LAGRANGE-BURMANN TERS ÇEVİRME FORMÜLÜ VE KOMBİNATORİKTE UYGULAMALARI

HALİT ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EKİM 2014

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

HALİT ÖZTÜRK tarafından hazırlanan LAGRANGE-BURMANN TERS ÇEVİRME FORMÜLÜ VE KOMBİNATORİKTE UYGULAMALARI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Emrah KILIÇ
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Yrd. Doç. Dr. İlker AKKUŞ

Üye : Prof. Dr. Emrah KILIÇ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Zülfükar SAYGI

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Halit ÖZTÜRK

Üniversitesi	**:**	**TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik**
Tez Danışmanı	**:**	**Prof. Dr. Emrah KILIÇ**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Yüksek Lisans – Ekim 2014**

Halit ÖZTÜRK

LAGRANGE-BURMANN TERS ÇEVİRME FORMÜLÜ VE KOMBİNATORİKTE UYGULAMALARI

ÖZET

Bu tezde Lagrange-Bürmann inversiyon formülü (veya sadece Lagrange) olarak bilinen ve özel olarak mertebesi bir olan kuvvet serilerinin bileşke işlemine göre tersini bulmakta kullandığımız yöntem tanıtılmış, bu amaçla bazı temel konularda da bilgiler verilmiştir. Tez kapsamında, Lagrange-Burmann inversiyon formülünün farklı yöntemlerle elde edilen ispatları sunulmuş ve formülün uygulandığı birçok kombinatorik ve nümerik problem, örnek olarak verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Lagrange-Bürmann formülü, inversiyon, bir fonksiyonun tersi.

University	**:**	**TOBB University of Economics and Technology**
Institute	**:**	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	**:**	**Mathematics**
Supervisor	**:**	**Prof. Dr. Emrah KILIÇ**
Degree Awarded and Date	**:**	**M.Sc. – October 2014**

Halit ÖZTÜRK

LAGRANGE-BURMANN TERS ÇEVİRME FORMÜLÜ VE KOMBİNATORİKTE UYGULAMALARI

ABSTRACT

In this thesis, the method known as Lagrange-Bürmann inversion formula (or just Lagrange) is introduced which is used for obtaining the compositional inverse of a power series of order one and also fundamental issues are considered. As part of the thesis proofs of the formula are given which are obtained by different methods and many numerical and combinatorial problems are considered as examples.

Keywords: Lagrange-Bürmann formula, inversion, inverse of a function.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren saygıdeğer hocam Prof. Dr. Emrah KILIÇ'a,
TOBB ETÜ Matematik Bölümü hocalarıma,
maddi desteğinden dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine,
maddi ve manevi manada en büyük destekçim olan ve yardımlarını esirgemeyen canım anneme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simge ve kısaltmaların açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$[z^n]$	Katsayı operatörü
rez	Rezidü operatörü
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cismi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}\,[[t]]$	Kompleks katsayılı kuvvet serilerinin kümesi
$o(f(t))$	$f(t)$ kuvvet serisinin mertebesi
$\sum$	Toplam notasyonu
$(f \circ g)(t) = f(g(t))$	f ve g fonksiyonlarının bileşkesi
$\mathbb{C}\,((t))$	Kompleks katsayılı Laurent serilerinin kümesi
$Rez(f; z_0)$	f nin z_0 daki rezidüsü
Γ	Kompleks düzlemde eğri
$\overline{D}$	D nin kapanışı
D'	D-$\{0\}$

1. GİRİŞ

Bir kuvvet serisi fonksiyon olarak düşünüldüğünde, bu fonksiyonun bileşke işlemine göre tersinin katsayılarını bulmak her zaman kolay değildir. Ancak bazı durumlarda Lagrange-Bürman formülü olarak adlandırılan yöntemle bu katsayıları elde edebiliriz. Bu tezde Lagrange-Bürman formülü tanıtılmış ve bazı problemler yöntemin uygulaması olarak verilmiştir.

Bu amaçla tezimizin 2. bölümünde, gerekli olan temel kavramlar tanımlanmış ve kompleks analizden bazı teoremler verilmiştir.

3. bölümde ilk olarak Lagrange-Bürman formülü (yada kısaca Lagrange) ifade edilmiş ve bu teoreme denk olan farklı sonuçlar verilmiştir. Ayrıca teoremin, birbirlerinden farklı yöntemler kullanan dört ispatı yapılmıştır. En son verilen cebirsel ispatta Lagrange-Bürman formülünün bir genelleştirilmesi ispatlanmıştır.

4. bölümde Lagrange-Bürman formülünün kombinatoryal ve nümerik problemlerde kullanımı örneklerle gösterilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1 Kuvvet Serileri

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + ... + f_n t^n + ...$$

ifadesine t belirsizine göre kompleks katsayılı bir kuvvet serisi denir. Kompleks sayılar cismi üzerinde tanımlı bütün kuvvet serilerinin kümesini $\mathbb{C}[[t]]$ ile gösterelim. Bu bölümde, $\mathbb{C}[[t]]$ üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayacak, bu işlemlerle birlikte $\mathbb{C}[[t]]$ nin cebirsel özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım 2.1.1 *$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$ ve $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n$ iki kuvvet serisi olsun. Bu durumda,*

$$f(t) \pm g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (f_n \pm g_n) t^n$$

dir.

Tanım 2.1.2 *$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$ ve $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^n$ iki kuvvet serisi olsun. Bu durumda $\mathbb{C}[[t]]$ üzerinde çarpma işlemi,*

$$f(t) \cdot g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} \right) t^n$$

olarak tanımlanır.

Yukarıda tanımlanan çarpma işlemine Cauchy çarpımı adı verilir. Ayrıca tanımlanan bu işlemlere göre;

$$0 = 0 + 0t + 0t^2 + ... + 0t^n + ...$$

ve

$$1 = 1 + 0t + 0t^2 + ... + 0t^n + ...$$

elemanlarına sırası ile toplama ve çarpma işlemine göre $\mathbb{C}[[t]]$ nin etkisiz elemanları denir. Tanımladığımız işlemlerle birlikte $\mathbb{C}[[t]]$, birimli ve değişmeli bir halka yapısına sahip olur. Şimdi $\mathbb{C}[[t]]$ nin cebirsel özelliklerini daha detaylı inceleyebilmek için bazı kavramların tanımlarını ve özelliklerini vereceğiz.

Tanım 2.1.3 ***(Katsayı Operatörü)*** $\forall\ f(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ *için,*

$$[t^n] \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k = f_n$$

olarak tanımladığımız $[\ ]$ *operatöre katsayı operatörü adı verilir. Özel olarak* $[t^0] f(t)$ *ifadesi için* $L(f)$ *gösterimini kullanacağız.*

Katsayı operatörünün bazı bilinen özelliklerini hatırlatalım. $f(t), g(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
[t^n](\alpha f(t) + \beta g(t)) &= \alpha [t^n] f(t) + \beta [t^n] g(t), \\
[t^n] t f(t) &= \left[t^{n-1}\right] f(t), \\
[t^n] f'(t) &= (n+1) \left[t^{n+1}\right] f(t), \\
[t^n] f(t)g(t) &= \sum_{k=0}^{n} \left[t^k\right] f(t) \left[t^{n-k}\right] g(t), \\
[t^n] f(g(t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} (\left[y^k\right] f(y)) [t^n] g(t)^k
\end{aligned}$$

dır.

Tanım 2.1.4 ***(Bir Kuvvet Serisinin Mertebesi)*** $f(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ *ve* $f(t) \neq 0$ *olmak üzere,* $f(t)$ *nin mertebesi* $o(f)$ *ile gösterilir ve*

$$o(f) = \min\{n : [t^n],\ f_n \neq 0 \ ve\ n \in \mathbb{N}\}$$

olarak tanımlanır.

$f(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ nin mertebesi $o(f(t))$, $f(t)$ nin $\mathbb{C}[[t]]$ de çarpma işlemine göre tersinin olup olmadığına dair bize bilgi verir. Şimdi mertebe ile ilgili önemli bir sonucu vereceğiz.

Teorem 2.1.1 *$f(t), g(t) \in \mathbb{C}[[t]]$, $f(t) \neq 0$ ve $g(t) \neq 0$ olsun. Bu durumda*

$$o(f(t)g(t)) = o(f(t)) + o(g(t))$$

dir.

İspat: $s, r \geq 0$ olmak üzere $o(f(t)) = s$ ve $o(g(t)) = r$ olsun. Dolayısıyla $f_i, g_j \in \mathbb{C}$ olmak üzere;

$$f(t) = \sum_{k=s}^{\infty} f_k t^k = f_s t^s + f_{s+1} t^{s+1} + ... + f_n t^n + ...$$

ve

$$g(t) = \sum_{k=r}^{\infty} g_k t^k = g_r t^r + g_{r+1} t^{r+1} + ... + g_n t^n + ...$$

şeklinde yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned} f(t)g(t) &= (f_s t^s + f_{s+1} t^{s+1} + ... + f_n t^n + ...)(g_r t^r + g_{r+1} t^{r+1} + ... + g_n t^n + ...) \\ &= \left(f_s t^s + \sum_{k=s+1}^{\infty} f_k t^k \right) \left(g_r t^r + \sum_{k=r+1}^{\infty} g_k t^k \right) \\ &= f_s g_r t^{s+r} + f_s t^s \sum_{k=r+1}^{\infty} g_k t^k + g_r t^r \sum_{k=s+1}^{\infty} f_k t^k + \sum_{k=s+1}^{\infty} f_k t^k \sum_{k=r+1}^{\infty} g_k t^k \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

şeklinde yazılabilir. (2.1.1) eşitliğinin sağındaki en küçük dereceli terimin $f_s g_r t^{s+r}$ olduğu görülmektedir. Mertebenin tanımından dolayı

$$o(f(t)g(t)) = s + r = o(f(t)) + o(g(t)) \tag{2.1.2}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ∎

Teorem 2.1.1 den elde edeceğimiz aşağıdaki sonuç bize, bir $f(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ kuvvet serisinin hangi durumda çarpımsal tersinin bulunduğunu söyler.

Sonuç 2.1.1 *$f(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ olsun. $f(t)$ nin $\mathbb{C}[[t]]$ de çarpımsal tersinin bulunması için gerek ve yeter koşul $o(f(t)) = 0$ olmasıdır.*

İspat: $f(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ kuvvet serisinin, $\mathbb{C}[[t]]$ de $g(t)$ gibi bir çarpımsal tersi varsa, bu durumda $f(t)g(t) = 1$ olmalıdır. Açıkça $o(1) = 0$ olduğundan, bu durumda $o(f(t)g(t)) = o(1) = 0$ olmalıdır. Teorem 2.1.1 göz önüne alınırsa;

$$o(f(t)) = o(g(t)) = 0$$

olması gerektiği sonucuna ulaşırız. $o(f(t)) = 0$ olsun. Bu durumda mertebe tanımından açıkça $f_0 \neq 0$ dır. $f(t)$ nin çarpımsal tersini $g(t)$ kabül ettiğimizi hatırlatalım. Bu durumda $g_0 f_0 = 1$ olması gerektiğini biliyoruz. Bu eşitlikten hareketle $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} = 0 \tag{2.1.3}$$

denkleminden $g_0, g_1, ..., g_n, ...$ katsayılarını elde edebiliriz. Böylece,

$$g(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k = g_0 + g_1 t^1 + ... + g_n t^n + ...$$

kuvvet serisini elde etmiş oluruz. Böylece ispat tamamlanır. ■

Mertebe ile ilgili diğer bir sonucu da aşağıda veriyoruz.

Teorem 2.1.2 *$f(t), g(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ ve $o(g(t)) > 0$ olsun. Bu durumda*

$$o(f(g(t))) = o(f(t))o(g(t))$$

dir.

İspat: $r > 0$ olmak üzere $o(f(t)) = s$ ve $o(g(t)) = r$ olsun. Dolayısıyla $f_i, g_j \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$f(t) = \sum_{k=s}^{\infty} f_k t^k = f_s t^s + f_{s+1} t^{s+1} + ... + f_n t^n + ...$$

ve

$$g(t) = \sum_{k=r}^{\infty} g_k t^k = g_r t^r + g_{r+1} t^{r+1} + ... + g_n t^n + ...$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$f(g(t)) = \sum_{k=s}^{\infty} f_k g(t)^k = f_s g(t)^s + f_{s+1} g(t)^{s+1} + ... + f_n g(t)^n + ... \qquad (2.1.4)$$

dir. Hipotezden dolayı $o(g(t)) > 0$ olduğundan,

$$o(g(t)^s) < o(g(t)^{s+1}) < o(g(t)^{s+2}) < ...$$

eşitsizliğine ulaşırız. Açıkça $g(t)^s = g_r^s t^{sr} + ...$ yazılabileceğinden dolayı (2.1.4) de en küçük dereceli terim $f_s g_r^s t^{sr}$ dir. Mertebenin tanımından,

$$o(f(g(t))) = sr = o(f(t))o(g(t))$$

bulunur. ■

Mertebenin bu özelliği kullanılarak aşağıdaki sonucu elde ederiz. Sonucu vermeden önce,

$$t = 0 + 1t + 0t^2 + ... + 0t^n + ...$$

nin bileşke işlemine göre etkisiz eleman olduğunu hatırlatalım.

Sonuç 2.1.2 *$f(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ ve $o(f(t)) > 0$ olsun. $f(t)$ nin $\mathbb{C}[[t]]$ de bileşke işlemine göre tersi varsa $o(f(t)) = 1$ dir.*

İspat: $g(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ olmak üzere, $(g \circ f)(t) = g(f(t)) = t$ olsun. Bu durumda, Teorem 2.1.2 den

$$o(g(f(t)) = o(g(t))o(f(t)) = o(t) = 1$$

elde edilir. $o(g(t))o(f(t)) = 1$ eşitlğinden, $o(f(t)) = 1$ ve $o(g(t)) = 1$ sonucuna ulaşırız. ■

Mertebe ile ilgili verdiğimiz bu bilgilerden sonra, $\mathbb{C}[[t]]$ nin cebirsel yapısı ile ilgili aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edebiliriz.

Teorem 2.1.3 *$\mathbb{C}[[t]]$ bir tamlık bölgesidir.*

İspat: Daha önce, $\mathbb{C}[[t]]$ nin birimli ve değişmeli bir halka olduğuna değinmiştik. Böylece, $\mathbb{C}[[t]]$ nin tamlık bölgesi olduğunu göstermek için $\mathbb{C}[[t]]$ nin sıfır bölensiz olduğunu ispatlamamız yeterlidir. Bunun için $f(t)$, $g(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ ve $f(t) \neq 0$, $g(t) \neq 0$ olmak üzere, $f(t)g(t) = 0$ olduğunu varsayalım. $s, r \geq 0$ doğal sayıları için $o(f(t)) = s$ ve $o(g(t)) = r$ olsun. $f(t)$ ve $g(t)$ kuvvet serilerini,

$$f(t) = \sum_{k=s}^{\infty} f_k t^k = f_s t^s + f_{s+1} t^{s+1} + ... + f_n t^n + ...$$

ve

$$g(t) = \sum_{k=r}^{\infty} g_k t^k = g_r t^r + g_{r+1} t^{r+1} + ... + g_n t^n + ...$$

biçiminde ifade edelim. Varsayımımızdan dolayı $f(t)g(t) = 0$ olduğundan, $f(t)g(t)$ çarpımında $f_s g_r t^{s+r} = 0$ eşitliği sağlanmalıdır. $f_s g_r t^{s+r} = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $f_s g_r = 0$ olmasıdır. Bu durumda, $\mathbb{C}$ nin bir cisim olmasından dolayı $f_s = 0$ veya $g_r = 0$ dır. Ancak her iki durumda da $f(t)$, $g(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ nin mertebelerinin seçimi ile çelişiriz. Böylece varsayımımız yanlıştır ve $\mathbb{C}[[t]]$ nin bir tamlık bölgesi olduğu sonucunu elde ederiz. ■

2.2 Kompleks Analizden Bazı Bilgiler

Burada vereceğimiz bilgiler, Lagrange inversiyon formülünün analitik ispatında kullandığımız kavramlar ve teoremler hakkında olacaktır. Ayrıca rezidü operatörü ve özelliklerinden de bahsedeceğiz.

2.2.1 Tekillik

Tanım 2.2.1 *Bir f fonksiyonu, $0 < |z - z_0| < R$ delinmiş diskinde analitik fakat $z_0 \in \mathbb{C}$ de analitik olmasın. Böyle bir z_0 noktasına f fonksiyonunun bir izole tekil noktası denir.*

$z_0 \in \mathbb{C}$, f fonksiyonun tekil noktası ise f, z_0 da Laurent serisi olarak adlandırılan bir seri açılımına sahiptir. Aşağıda bu tür serilerle ilgili bazı teoremler ve özelliklerden bahsedeceğiz.

2.2.2 Laurent Serileri

Teorem 2.2.1 *f fonksiyonu, $r < |z - z_0| < R$ bölgesinde analitik olsun. Bu durumda f fonksiyonu,*

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (z - z_0)^j + \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} (z - z_0)^{-j} \qquad (2.2.1)$$

şeklinde, her iki serinin de $r < |z - z_0| < R$ de yakınsak ve her kapalı $r < \rho_1 \leq |z - z_0| \leq \rho_2 < R$ bölgesinde düzgün yakınsak olduğu bir seri açılımına sahiptir. Ayrıca C, $r < |z - z_0| < R$ bölgesinde bulunan ve z_0 noktasının C nin iç bölgesinde yer aldığı pozitif yönlü, basit kapalı bir eğri olmak üzere $\forall j \in \mathbb{Z}$ için

$$a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{j+1}}$$

dir.

z_0 tekil noktası, teoremde verilen seri açılımında, negatif indisli katsayıların durumuna göre sınıflandırılır.

Tanım 2.2.2 *f, z_0 da izole tekil noktaya sahip olsun ve $0 < |z - z_0| < R$ de (2.2.1) şeklinde Laurent serisine açılsın.*

1. *$\forall j > 0$ için $a_{-j} = 0$ ise z_0 kaldırılabilir tekil noktadır.*
2. *Bir $n > 0$ tamsayısı için $a_{-n} \neq 0$ fakat $\forall j > n$ için $a_{-j} = 0$ ise z_0, n. mertebeden kutup noktasıdır.*
3. *Sonsuz sayıda negatif indisli terim için $a_{-j} \neq 0$ ise z_0 bir esas tekil noktadır.*

(2.2.1) açılımına f fonksiyonunun z_0 civarında Laurent serisi denir. Burada verdiğimiz genel tanıma rağmen tezimizde sadece sonlu sayıda negatif indisli terime sahip olan Laurent serileri ile ilgileneceğiz.

Bu şekildeki kompleks katsayılı bütün Laurent serilerinin kümesini $\mathbb{C}((t))$ ile gösterelim. Böylece her $f(t) \in \mathbb{C}((t))$ bir m doğal sayısı için

$$f(t) = \sum_{j=-m}^{\infty} f_j t^j \tag{2.2.2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Artık $\mathbb{C}((t))$ üzerinde toplama ve çarpma işlemlerini tanımlayabiliriz. Bu tanımlarımızda genelliği bozmadan $m \geq n$ olduğunu varsayacağız.

Tanım 2.2.3 *$f(t) = \sum_{j=-m}^{\infty} f_j t^j$, $g(t) = \sum_{j=-n}^{\infty} g_j t^j$ iki Laurent serisi olsun. Bu durumda, $-m \leq j < -n$ olacak şekildeki j tamsayıları için $g_j = 0$ olarak kabul edilirse;*

$$f(t) \pm g(t) = \sum_{j=-m}^{\infty} (f_j \pm g_j) t^j$$

dir.

Tanım 2.2.4 *$f(t) = \sum_{j=-m}^{\infty} f_j t^j$, $g(t) = \sum_{j=-n}^{\infty} g_j t^j$ iki Laurent serisi olsun. Bu durumda $\mathbb{C}((t))$ üzerinde çarpma işlemi,*

$$f(t) \cdot g(t) = \sum_{j=-m-n}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} f_k g_{j-k} \right) t^j$$

olarak tanımlanır.

(2.2.2) den dolayı bir $f(t) \in \mathbb{C}((t))$ Laurent serisi için $t^m\ f(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ ve $o(t^m f(t)) = 0$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır. $o(t^m f(t)) = 0$ olması nedeni ile Sonuç 2.1.1 bize $t^m f(t) g(t) = 1$ olacak şekilde $g(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ bulunduğunu söyler. Bu durumda, $f(t)(t^m g(t)) = 1$ olduğundan, $t^m g(t)$, $f(t)$ nin çarpımsal tersidir. Böylece her $f(t) \in \mathbb{C}((t))$ Laurent serisinin $\mathbb{C}((t))$ içerisinde bir çarpımsal terse sahip olduğunu göstermiş oluruz. Ayrıca buradan elde ettiğimiz bir başka sonuç da $f(t) \neq 0$ şeklindeki her $f(t) \in \mathbb{C}((t))$ için, $f(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ veya $\frac{1}{f(t)} \in \mathbb{C}[[t]]$ olduğudur. Bu sonucu kullanarak mertebe tanımını ve özelliklerini Laurent serilerine genelleştireceğiz. Bu amaçla, bir an için Sonuç 2.1.1 in Laurent serileri için tutarlı olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$0 = o(1) = o\left(f(t)\frac{1}{f(t)}\right) = o\left(\frac{1}{f(t)}\right) + o\left(f(t)\right)$$

elde ederiz. Böylece, $f(t)$ kuvvet serisi olmayan bir Laurent serisi ise, $o\left(f(t)\right) = -o\left(\frac{1}{f(t)}\right)$ dir. Burada $\frac{1}{f(t)}$ bir kuvvet serisi olacağından, $o\left(\frac{1}{f(t)}\right)$, Tanım 2.1.4 de verilen şekilde bulunur.

2.2.3 Rezidü Kavramı

Tanım 2.2.5 *f fonksiyonu bir z_0 noktasında izole tekilliğe sahip ise, f nin z_0 civarında Laurent serisine açılımında $\frac{1}{z-z_0}$ ın katsayısına, f nin z_0 noktasındaki rezidüsü denir. f nin z_0 noktasındaki rezidüsü;*

$$Rez(z_0) \text{ veya } Rez(f; z_0)$$

ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem bize kutup noktalarında bir fonksiyonun rezidülerini hesaplamak için bir yöntem verir.

Teorem 2.2.2 *f fonksiyonu, z_0 noktasında n. mertebeden kutup noktasına sahip olsun. Bu durumda*

$$Rez(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z - z_0)^n f(z)\right]$$

dir.

Basit kapalı bir eğrinin iç bölgesinde f fonksiyonunun rezidülerini bilmek, f nin bu eğri boyunca kompleks integralini hesaplamamızda bize kolaylık sağlar. Aşağıda vereceğimiz teorem bu olgu ile ilgilidir.

Teorem 2.2.3 ***(Cauchy Rezidü Teoremi)*** *Γ pozitif yönlü, basit kapalı bir eğri ve f, Γ eğrisinin iç bölgesindeki z_1, z_2, ..., z_n noktaları haricinde Γ eğrisinin iç bölgesinde ve Γ eğrisinin üzerinde analitik olsun. Bu durumda*

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Rez(z_j)$$

dir.

Tanım 2.2.6 $\forall\ f(t) \in \mathbb{C}((t))$ *için*

$$f(t) = \sum_{j=-m}^{\infty} a_j t^j$$

olmak üzere

$$rez\,[f(t)] = rez\left[\sum_{j=-m}^{\infty} a_j t^j\right] = a_{-1}$$

şeklinde tanımlı

$$rez : \mathbb{C}((t)) \longrightarrow \mathbb{C}$$

fonksiyonuna rezidü operatörü denir.

Özellikle Lagrange inversiyon formülü için verdigimiz ikinci ispatımızda analitik bir fonksiyonun tersinin hangi durumlarda yine analitik olacağını ifade edebilmemiz gerekecektir. Bu amaçla, aşağıdaki teoremleri hatırlatmakta fayda görüyoruz.

Teorem 2.2.4 *(**Rouche Teoremi**) Eğer f ve h, basit kapalı bir C eğrisinin içinde ve üzerinde analitik ve C nin her noktasında $|h(z)| < |f(z)|$ ise bu durumda f ve $f+h$, C eğrisinin iç bölgesinde aynı sayıda köke sahiptirler.*

Teorem 2.2.5 *D kompleks düzlemde bir bölge ve $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu $1-1$ ve analitik olsun. Bu durumda $f^{-1} : f(D) \longrightarrow D$ analitiktir.*

2.3 Vektör Uzayları ve Operatörler

$\mathbb{C}((t))$ Laurent serileri kümesi, üzerinde tanımladığımız toplama işlemi ile birlikte $\mathbb{C}$ üzerinde vektör uzayıdır. $\mathbb{C}((t))$ üzerindeki bu yapı, Lagrange inversiyon formülü için vereceğimiz cebirsel ispatta bu yapıya ait bazı kavramları kullanacağız.

Tanım 2.3.1 *V ve W, $\mathbb{C}$ üzerinde iki vektör uzayı olsun. $(\cdot \mid \cdot) : V \times W \longrightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü, her $x,\ x_1,\ x_2 \in V$, $y,\ y_1,\ y_2 \in W$ ve her $\alpha,\ \beta \in \mathbb{C}$ için*

1. $(x_1 + x_2 \mid y) = (x_1 \mid y) + (x_2 \mid y)$

2. $(x \mid y_1 + y_2) = (x \mid y_1) + (x \mid y_2)$

3. $(\alpha x \mid y) = \alpha(x \mid y)$

4. $(x \mid \beta y) = \bar{\beta}(x \mid y)$

şartları sağlanırsa, $(\cdot \mid \cdot)$ *dönüşümüne bir bilineer form denir.*

Tanım 2.3.2 Φ, $\mathbb{C}((t))$ *üzerinde bir operatör olsun.* Φ *nin eşleniği olan* Φ^* *operatörü* $\forall\ f,\ g \in \mathbb{C}((t))$ *için*

$$(\Phi f \mid g) = (f \mid \Phi^* g)$$

olacak şekilde tanımlanır.

3. LAGRANGE İNVERSİYON FORMÜLÜ

Bu bölümde Lagrange inversiyon formülü ifade edilecek ve bazı denk sonuçlar verilecektir. Teorem 3.1.1 in ifadesi, elementer, analitik ve cebirsel ispatlar [7] den alınmıştır. Ayrıca Sonuç 3.1.1 ve 3.1.2 nin ifade ispatları için de [7] den yararlanılmıştır. Rezidü değişmezliğine bağlı olarak sunulan ispat için ise [1] den faydalanılmıştır.

3.1 Teoremin İfadesi ve Bazı İspatlar

Teorem 3.1.1 *$f, g \in C[[z]]$ ve $o(g) = 1$ olsun. Bu durumda $h \circ g = f$ olacak şekilde bir $h \in C[[z]]$ vardır ve h serisinin katsayıları*

$$h_0 = L(f)$$

ve $\forall m > 0$ için

$$h_m = \frac{1}{m} rez[f'(z)g(z)^{-m}] = rez[f(z)g'(z)g(z)^{-m-1}]$$

ile verilir.

Teoremi ispatlamadan önce Lagrange inversiyon formülünün değişik ifade ediliş biçimlerinden bazılarını vereceğiz.

$o(g) = 1$ şartından dolayı $g(z) = \frac{z}{e(z)}$ ve $o(e) = 0$ olacak şekilde bir $e(z) \in \mathbb{C}\,[[z]]$ bulunur. Böylece $g(z) = \frac{z}{e(z)}$ yazdığımızda ilk teoremimizin değişik bir ifadesi olan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.1 ***(Kesirli Durum)*** *$f, e \in \mathbb{C}[[z]]$, $o(e) = 0$ ve $g(z) = \frac{z}{e(z)}$ olsun. Bu durumda $h \circ g = f$ olacak şekilde bir $h \in \mathbb{C}[[z]]$ vardır ve h serisinin katsayıları,*

$$h_0 = L(f)$$

ve $\forall m > 0$ için,

$$h_m = \frac{1}{m}\left[z^{m-1}\right] f'(z)e(z)^m = [z^m]\, f(z)g'(z)e(z)^{m+1}$$

ile verilir.

Aşagıdaki sonuç, Lagrange inversiyon formülünün, fonksiyonel eşitlikleri çözerken kullandığımız ve Teorem 3.1.1 e eşdeğer olduğunu göstereceğimiz denk bir ifadesidir.

Sonuç 3.1.2 ***(Kapalı Form)*** *$G \in \mathbb{C}[[z]]$ ve $o(e) = 0$ olmak üzere $G(z) = ze(G(z))$ fonksiyonel eşitliği sağlansın. Bu durumda her $f \in \mathbb{C}[[z]]$ için $c_m = [z^m]\, f(G(z))$ katsayıları,*

$$c_0 = L(f) \tag{3.1.1}$$

ve $\forall m > 0$ için,

$$c_m = \frac{1}{m}\left[z^{m-1}\right] f'(z)e(z)^m \tag{3.1.2}$$

ile verilir.

İspat: Öncelikle Teorem 3.1.1 i kullanarak kapalı form için verilen eşitliklerin doğru olduğunu gösterelim. $g(z) = \frac{z}{e(z)}$ olacak şekilde $g \in \mathbb{C}[[z]]$ tanımlarsak $g(G(z)) = z$ eşitliğini elde ederiz. Böylece g, G'nin sol tersidir. $\mathbb{C}[[z]]$ de bileşke işlemine göre her sol ters aynı zamanda sağ ters olduğundan $G(g(z)) = z$ eşitliğini buluruz. Bu esitlikte her iki tarafının f kuvvet serisi ile bileşkesini alırsak $(f \circ G) \circ g = f$ yada $h = f \circ G$ kabul edersek $h(\frac{z}{e(z)}) = f(z)$ elde ederiz. Bu son eşitlikten Sonuç 3.1.1 i kullanarak (3.1.1) ve (3.1.2) ile verilen katsayılara ulaşırız.

Şimdi Sonuç 3.1.2 yi kullanarak Sonuç 3.1.1 i elde edelim. $o(e) = 0$ olmak üzere $f, e \in C[[z]]$ verilsin ve $g(z) = \frac{z}{e(z)}$ olsun. $g(z) = \frac{z}{e(z)}$ ifadesi kapalı formda verilen fonksiyonel eşitlikle birlikte $g(G(z)) = z$ yi verir. Sonuç 3.1.2 yi uygularsak $f(G(z)) = \sum c_m z^m$ aciliminda z yerine $g(z)$ yazdigimizda $f(z) = \sum c_m g(z)^m$ açılımını elde ederiz. Bu katsayılar ise $h(g(z)) = f(z)$ olacak şekildeki Sonuç 3.1.1 de verilen $h \in \mathbb{C}[[z]]$'nin katsayılarıdır. ■

3.2 Elementer İspat

Aşağıda ifade ve ispatını vereceğimiz lemmayı Teorem 3.1.1 in elementer ispatında kullanacağız.

Lemma 3.2.1 *$g \in C[[z]]$ ve $o(g) = 1$ olsun. Bu durumda $\dfrac{g'(z)}{g(z)^{n+1}}$ Laurent serisi için, $rez\Big[\dfrac{g'(z)}{g(z)^{n+1}}\Big] = \delta_{n,0}$ dır.*

İspat: Burada $n \neq 0$ için $\dfrac{g'(z)}{g(z)^{n+1}}$ serisi $-\frac{1}{n}g(z)^{-n}$ Laurent serisinin türevidir. Bir Laurent serisinin türevinin rezidüsü 0 olduğundan $n > 0$ için iddia doğrudur.

$n = 0$ için $o(e) = 0$ olmak üzere $g(z) = \frac{z}{e(z)}$ yazarsak $\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{1}{z} - \frac{e'(z)}{e(z)}$ elde ederiz. $\frac{e'(z)}{e(z)}$ bir kuvvet serisi olduğundan rezidüsü 0 dır. Böylece

$$rez\Big[\frac{g'(z)}{g(z)}\Big] = 1 = \delta_{00} \tag{3.2.1}$$

bulunur. ■

Artık Lagrange inversiyon formülünün (Teorem 3.1.1) elementer ispatını yapabiliriz.

İspat: $h(z)$ nin tanımından $f(z) = \sum_{n\geq 0} h_n g(z)^n$ dir. Her iki tarafın türevini alır ve $m > 0$ olmak üzere $g(z)^m$ ile bölersek,

$$f'(z)g(z)^{-m} = \sum_{n\geq 0} nh_n \frac{g'(z)}{g(z)^{m-n+1}}$$

elde ederiz. Lemma 3.2.1 den eşitliğin her iki tarafı göz önüne alınırsa

$$rez[f'(z)g(z)^{-m}] = rez\left[\sum_{n\geq 0} nh_n \frac{g'(z)}{g(z)^{m-n+1}}\right] = mh_m$$

elde edilir. Diğer taraftan $f(z)g(z)^{-m}$ çarpımının türevini alırsak,

$$(f(z)g(z)^{-m})' = f'(z)g(z)^{-m} - mf(z)g(z)^{-m-1}$$

bulunur. Her iki tarafın rezidüsü hesaplanırsa, Lemma 3.2.1 den

$$\frac{1}{m} rez[f'(z)g(z)^{-m}] = rez[f(z)g'(z)g(z)^{-m-1}]$$

elde ederiz. O halde $\forall m > 0$ için,

$$h_m = \frac{1}{m} rez[f'(z)g(z)^{-m}] = rez[f(z)g'(z)g(z)^{-m-1}]$$

dir. Son olarak $o(g) = 1$ ve $h \circ g = f$ olduğunu kullanarak

$$h_0 = h(0) = h(g(0)) = f(0) = L(f)$$

eşitliğine ulaşırız. ■

3.3 Rezidü Değişmezliğine Bağlı Bir İspat

Lagrange inversiyon formülünün bir diğer ispatında aşağıdaki lemmadan yararlanacağız. Vereceğimiz ikinci ispatta Sonuç 3.1.1 in gösterimlerini kullanacak ve Lagrange inversiyon formülü için iki farklı ifade elde edeceğiz.

Lemma 3.3.1 *$G(z) = \sum_{j\geq -m} a_j z^j$, $u(z) = \sum_{j\geq 0} b_j z^j$ ve $b_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda $rez[G(u(z))u'(z)] = rez[G(z)]$ dir.*

İspat: $G(z)=\sum_{j\geq -m} a_j z^j$ olduğunu ve rezidünün lineerlik özelliğini kullanarak;

$$rez[G(u(z))u'(z)] = rez\left[\sum_{j=-m}^{\infty} a_j u(z)^j u'(z)\right] = \sum_{j=-m}^{\infty} a_j rez[u(z)^j u'(z)] \quad (3.3.1)$$

yazabiliriz. $\forall j \neq -1$ için $u(z)^j u'(z) = \frac{1}{j+1}(u(z)^{j+1})'$ ve $g(z)$ bir Laurent serisi olmak üzere $rez[g'(z)]=0$ olduğundan, $j \neq -1$ iken,

$$rez[u(z)^j u'(z)] = rez\left[\frac{1}{j+1}(u(z)^{j+1})'\right] = 0 \quad (3.3.2)$$

dır. $j=-1$ olması durumunda ise Lemma 3.2.1 den,

$$rez[u(z)^{-1}u'(z)] = 1 \quad (3.3.3)$$

dir. Böylece (3.3.1), (3.3.2) ve (3.3.3) den

$$\begin{aligned} rez[G(u(z))u'(z)] &= rez\left[\sum_{j=-m}^{\infty} a_j u(z)^j u'(z)\right] = \sum_{j=-m}^{\infty} a_j rez[u(z)^j u'(z)] \\ &= \sum_{j=-m, j\neq -1}^{\infty} a_j rez[u(z)^j u'(z)] + a_{-1} rez[u(z)^{-1}u'(z)] \\ &= a_{-1} \\ &= rez[G(z)] \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz. ■

Artık Lagrange inversiyon formülü için farklı bir ispat daha verebiliriz.

İspat: (**Teorem 3.1.1**) $o(g(z)) = 1$ olduğundan $g(z)$, orjinin bir komşuluğu içerisinde analitik ve 1-1 dönüşümdür ve bu nedenle Teorem 2.2.4 den dolayı $g^{-1}(z)$ de bu komşulukta analitiktir. Bu durumda z, $g(z)$ nin kuvvetleri cinsinden seriye açılabilir. Böylece $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ olduğundan;

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n g(z)^n$$

olacak şekilde $h_n \in \mathbb{C}$ katsayıları vardır. Burada türev alarak;

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n h_n g(z)^{n-1} g'(z)$$

elde ederiz. Şimdi

$$G(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nh_n z^{n-1}$$

olsun. $o(g(z)) = 1$ olması nedeni ile $g(z) = \frac{z}{e(z)}$ olacak şekilde $o(e(z)) = 0$ şartını sağlayan bir $e(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ vardır. Böylece Lemma 3.2.2 den

$$rez\left[\frac{f'(z)e(z)^r}{z^r}\right] = rez\left[\frac{f'(z)}{g(z)^r}\right] = rez\left[\frac{G(g(z))g'(z)}{g(z)^r}\right] = rez\left[\frac{G(z)}{z^r}\right] = rh_r \tag{3.3.4}$$

dir. Diğer taraftan $f'(z)e(z)^r$ fonksiyonunun $z = 0$ civarında Taylor serisi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}(f'(z)e(z)^r)\right]_{z=0}$$

kullanılarak

$$rez\left[\frac{f'(z)e(z)^r}{z^r}\right] = \frac{1}{(r-1)!}\left[\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}(f'(z)e(z)^r)\right]_{z=0}$$

bulunur. Burada (3.3.4) den

$$h_r = \frac{1}{r!}\left[\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}(f'(z)e(z)^r)\right]_{z=0}$$

sonucuna ulaşılır. Böylece

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(z)^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f'(z)e(z)^n)\right]_{z=0} \tag{3.3.5}$$

açılımını elde edilir. Ayrıca $g(z) = \frac{z}{e(z)}$ eşitliği $z - g(z)e(z) = 0$ olarak yeniden düzenlenir ve bu eşitliğin her iki tarafında türev alınırsa,

$$1 - g'(z)e(z) - g(z)e'(z) = 0$$

elde edilir. Bu son eşitlikten ise

$$g'(z) = \frac{1 - g(z)e'(z)}{e(z)}$$

elde edilir. (3.3.5) da her iki tarafın z ye göre türevi alınırsa;

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(z)^{n-1}}{(n-1)!} g'(z)\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f'(z)e(z)^n)\right]_{z=0}$$

bulunur. Burada $g'(z)$ yerine

$$\frac{1-g(z)e'(z)}{e(z)}$$

yazıldığında,

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)e(z)}{1-g(z)e'(z)} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(z)^{n-1}}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f'(z)e(z)^n)\right]_{z=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g(z)^{n}}{n!}\left[\frac{d^{n}}{dz^{n}}(f'(z)e(z)^{n+1})\right]_{z=0} \qquad (3.3.6)\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. (3.3.5) de

$$\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f'(z)e(z)^n)\right]_{z=0}$$

ifadesi incelenirse, $f'(z)e(z)^n \in \mathbb{C}[[z]]$ olduğu görülür. Bu durumda

$$f'(z)e(z)^n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

olacak şekilde $a_k \in \mathbb{C}$ katsayıları vardır. Son eşitlikte $n \geq 1$ iken her iki tarafın $(n-1)$ defa türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f'(z)e(z)^n) &= \sum_{k=n-1}^{\infty} k(k-1)...(k-n+2)a_k z^{k-n+1} \\ &= (n-1)!a_{n-1} + \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)...(k-n+2)a_k z^{k-n+1}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f'(z)e(z)^n)\right]_{z=0} &= (n-1)!a_{n-1} \\ &= \left[t^{n-1}\right](n-1)!f'(t)e(t)^n\end{aligned}$$

bulunur. Bulduğumuz bu son eşitlikle birlikte (3.3.5) yeniden düzenlenirse,

$$\begin{aligned}f(z) &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(z)^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(f'(z)e(z)^n)\right]_{z=0} \\ &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(z)^n}{n!}\left[t^{n-1}\right](n-1)!f'(t)e(t)^n \\ &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(z)^n}{n}\left[t^{n-1}\right]f'(t)e(t)^n \qquad (3.3.7)\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşırız. (3.3.7) de, $\frac{1}{n}\left[t^{n-1}\right] f'(t)e(t)^n$ katsayısının ise, Sonuç 3.1.1 de katsayılar için verilen ifadelerle aynı olduğu görülür. Benzer şekilde (3.3.6) formülü de

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}(f'(z)e(z)^{n+1})\right]_{z=0} = \left[t^n\right] f'(t)e(t)^{n+1}$$

eşitliğinden faydalanılarak

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)e(z)}{1-g(z)e'(z)} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{g(z)^n}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}(f'(z)e(z)^{n+1})\right]_{z=0} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} g(z)^n \left[t^n\right] f'(t)e(t)^{n+1} \qquad (3.3.8)\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir. Son olarak, $f'(z)e(z) = F(z)$ yazılırsa bu formül

$$\frac{F(z)}{1-g(z)e'(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} g(z)^n \left[t^n\right] F(t)e(t)^n \qquad (3.3.9)$$

halini alır. ■

3.4 Analitik ispat

Öncelikle bu ispatta kullanacağımız bir lemmayı verelim.

Lemma 3.4.1 ***(Terslenebilir Serilerin Yerel Tekliği)*** *$D \subset \mathbb{C}$ orjini içeren bir disk, $\overline{D}$, D nin kapanışı ve $D' = D - \{0\}$ olsun. Eğer g, $\overline{D}$ üzerinde analitik, $g(0) = 0$ ve her $z \in D'$ için $g(z) \neq 0$ ise orjini içeren bir $E \subset \mathbb{C}$ diski vardır ve $g : D \to E$ birebir ve örtendir.*

İspat: Her $z \in D'$ için $g(z) \neq 0$ olduğundan $M = \min\{|g(\zeta)| : \zeta \in \partial D\}$ sıfırdan farklıdır. E, yarıçapı M olan orjin merkezli disk olsun. $\omega \in E$ alalım. Tanımdan dolayı her $\zeta \in \partial D$ için

$$|\omega| < M \leq |g(\zeta)|$$

dır. Burada $\Psi(z) = g(z)$ ve $\Psi_0(z) = -\omega$ alarak Rouche Teoremini uygularsak, $\Psi(z) = g(z)$ ve $\Psi(z) + \Psi_0(z) = g(z) - \omega$ fonksiyonunun D de aynı sayıda köke sahip olduğunu görürüz. Ancak kabulümüzden dolayı $g(z)$ nin D de tek bir kökü vardır ve ω, E nin keyfi bir elemanı olduğundan her $\omega \in E$ için $g(z) - \omega$, E de tek bir köke sahiptir. Böylece $g(z)$, E de $1-1$ ve örtendir. ■

Bu lemma yardımı ile Lagrange inversiyon formülünün analitik ispatını verebiliriz. Elementer ispatla karşılaştırıldığında analitik ispatın daha zahmetli olduğu görülecektir. Fakat analitik kuvvet serileri, yakınsaklık disklerindeki herhangi bir noktada hesaplanabilen analitik fonksiyonlar olduklarından, bu ispatla elde edeceğimiz sonuç daha kuvvetlidir.

İspat: (Analitik İspat) $D \subset \mathbb{C}$ Lemma 3.3.1 deki gibi bir disk ve f, g $\overline{D}$ üzerinde analitik olsun. Lemma 3.3.1 den dolayı $g : D \to E$ birebir ve örten olacak şekilde orjin merkezli bir $E \subset D$ diski vardır. γ, D nin sınırı olan, saat yönünün tersine yönlendirilmiş eğri olmak üzere $\forall \omega \in E$ için

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\zeta) \frac{g'(\zeta) d\zeta}{g(\zeta) - \omega}$$

olarak tanımlayalım. Rezidü teoreminden bu integralin sonucu $f(\zeta)\frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)-\omega}$ nin singüler noktalarındaki rezidülerinin toplamına eşittir. Ancak $g : D \to E$ birebir ve örten olduğundan, sabit bir $\omega \in E$ için tek singüler nokta $z = g^{-1}(\omega)$ dır. Böylece z, 1. mertebeden kutup noktası olduğundan;

$$\hat{h}(\omega) = \lim_{\zeta \to z} \left[(\zeta - z)(f(\zeta) \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta) - \omega}) \right] = \lim_{\zeta \to z} (\zeta - z)(f(\zeta) \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta) - \omega}) = f(z)$$

elde edilir. $g(z) = \omega$ olduğunu kullanarak $\hat{h}(g(z)) = f(z)$ elde ederiz ki bu $g^{-1} : E \to D$, $1-1$ ve örten olduğundan bütün $z \in D$ ler için geçerlidir. Böylece D üzerinde, $\hat{h}$ ve Teorem 3.1.1 in ifadesinde belirtilen $h \circ g = f$ olacak şekildeki h için $\hat{h} = h$ dir.

Bir önceki lemmadan $\forall \omega \in E$ ve $\forall \zeta \in D$ için $\left| \frac{\omega}{g(\zeta)} \right| < 1$ olduğunu biliyoruz. Böylece yukarıdaki integrali D in sınırı ∂D üzerinde

$$f(\zeta) \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} \frac{1}{1 - \frac{\omega}{g(\zeta)}} = f(\zeta) \frac{g'(\zeta)}{g(\zeta)} \left(1 + \frac{\omega}{g(\zeta)} + \frac{\omega^2}{g(\zeta)^2} + ... \right)$$

yakınsak geometrik serisi şeklinde açabiliriz. Ayrıca bu seri düzgün yakınsak olduğundan terim terim integrallenebilirdir. Böylece $h(\omega)$ için

$$h(\omega) = h_0 + \omega + h_2 \omega^2 + ...$$

şeklindeki kuvvet serisi gösterimini elde ederiz ki burada h_m katsayıları $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$h_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(\zeta) \frac{g'(\zeta)d\zeta}{g(\zeta)^{m+1}} \tag{3.4.1}$$

olarak elde edilir. Bu integralin tek singüler noktası $g(\zeta)$ nın tek kökü olan $\zeta = 0$ dır. Burada rezidü teoremi kullanılarak $\forall m \in \mathbb{N}$

$$h_m = rez[f(z)g^{'}(z)g(z)^{-m-1}]$$

olarak bulunur. h_m ler için verdiğimiz bu ifade Teorem 3.1.1 de verdiğimiz formüllerden ikincisidir. h_m katsayıları bu ikinci formda ifade edildiğinde, Lemma 3.2.1 i kullanarak

$$\begin{aligned} h_0 &= rez[f(z)g'(z)g(z)^{-1}] \\ &= L(f) \end{aligned}$$

buluruz.

Lagrange inversiyon formülünün ikinci formunu elde etmek için (3.3.1) integraline kısmi integasyon yöntemini uygulayacağız. $m = 0$ için $h_0 = L(f)$ olduğunu biliyoruz. O halde $\forall m > 0$ için,

$$\begin{aligned} h_m &= \frac{1}{2\pi i m} \oint_{\gamma} f(\zeta)(g(\zeta)^{-m})'d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i m} \oint_{\gamma} f'(\zeta)g(\zeta)^{-m}d\zeta \qquad (3.4.2) \end{aligned}$$

elde ederiz. (3.4.2) integralini ise $\forall m > 0$ için,

$$h_m = \frac{1}{m} rez[f'(z)g(z)^{-m}]$$

olarak yazabiliriz. Bu ise Lagrange inversiyon formülünün Teorem 3.1.1 de elde ettiğimiz ilk halidir. ■

3.5 Cebirsel İspat

Cebirsel bir bakış açısı ile Lagrange inversiyon formülünü incelediğimizde, elde ettiğimiz katsayıların aslında $f \in \mathbb{C}[[t]]$ kuvvet serisini, $\{g_m(z)\}$ baz vektörlerinin lineer birleşimi olarak yazmaya çalıştığımızda ihtiyaç duyduğumuz katsayılar olduğunu görürüz. Böylece, eğer $(\cdot \mid \cdot)$ bilineer formu, $\{g_m(z)\}$ baz vektörleri ortonormal olacak şekilde seçilirse, $f(z) = \sum c_m g_m(z)$, $g_m(z)$ ile bilineer olarak çarpıldığında $(f \mid g_m(z)) = c_m$ elde edilir. Fakat $\{g_m(z)\}$, $(\cdot \mid \cdot)$ bilineer formuna göre ortonormal değilse, $\{g_m^*(z)\}$ biortonormal bazı seçildiğinde bu kez c_m katsayıları için, $(f \mid g_m^*(z)) = c_m$ geçerlidir ve bazı durumlarda biortonormal baz aslında eşlenik özdeğer probleminin özvektörleri olarak ortaya çıkar.

Lagrange inversiyon formülünün Teorem 3.1.1 deki ifadesinde g belirli bir kuvvet serisi olmak üzere, $g_m(z) = g(z)^m$ olduğunu ve f nin kuvvet serisi olması ile birlikte $o(g) = 1$ şartının sağlanması şeklinde kısıtlamalarımız bulunduğunu burada hatırlatalım. Ancak vereceğimiz genelleştirilmiş Lagrange inversiyon formülünün ifadesinde, f ve g nin belirli şartları sağlamakla birlikte herhangi iki Laurent serisi olabileceğini göreceğiz. Böylece Teorem 3.1.1 den daha genel bir sonuç elde edeceğiz. Bunun için öncelikle amacımıza uygun bir bilineer form seçmemiz gerekmektedir. Aşağıdaki basit sonuç, aradığımız bilineer formu vermektedir.

Teorem 3.5.1 $(\cdot \mid \cdot) : \mathbb{C}((t)) \times \mathbb{C}((t)) \longrightarrow \mathbb{C}$ *olmak üzere,* $(f \mid g) = L(f \cdot g)$ *şeklinde tanımlanan* $(\cdot \mid \cdot)$, $\mathbb{C}((t))$ *üzerinde bir bilineer formdur.*

Şimdi genelleştirilmiş Lagrange inversiyon formülünü ifade edelim.

Teorem 3.5.2 $f \in \mathbb{C}((z))$, $o(f) = m_0$ *ve her* $m \geq m_0$ *tamsayısı için* $o(g_m) = m$ *olmak üzere,* $g_m \in \mathbb{C}((z))$ *olsun.* $\mathbb{C}((z))$ *üzerinde bir* Φ *operatörü,* $\lambda_m \in \mathbb{C}$ *özdeğerleri birbirlerinden farklı olacak ve* $\Phi g_m = \lambda_m g_m$ *özdeğer problemi sağlanacak şekilde tanımlansın. Eğer*

$$f(z) = \sum_{m \geq m_0} c_m g_m(z)$$

ise, $g_m^* \in \mathbb{C}((z))$, *eşlenik özdeğer problemi olan*

$$\Phi^* g_m^* = \lambda_m g_m^*$$

eşitliğinin çözümü olmak üzere, $\forall m \geq m_0$ *için*

$$c_m = (f \mid g_m^*)$$

dir.

İspat: m, $n \geq m_0$ tamsayıları keyfi sabitler olsunlar. $\Phi g_m = \lambda_m g_m$ eşitliğini g_n^* ile bilineer olarak çarparsak,

$$(\Phi g_m \mid g_n^*) = \lambda_m (g_m \mid g_n^*) \tag{3.5.1}$$

elde ederiz. Benzer şekilde $\Phi^* g_n^* = \lambda_n g_n^*$, g_m ile bilineer olarak çarpılırsa,

$$(g_m \mid \Phi^* g_n^*) = \lambda_n (g_m \mid g_n^*) \tag{3.5.2}$$

bulunur. Eşlenik operatörün tanımından, (3.5.1) ve (3.5.2) te sol taraflar eşittir. Bu ise bize, $\lambda_m (g_m \mid g_n^*) = \lambda_n (g_m \mid g_n^*)$ sonucunu verir. Kabulümüzden dolayı özdeğerler farklı olduğundan $(g_m \mid g_n^*) = \delta_{m,n}$ dir. Başka bir deyişle g_m^* özvektörlerinden oluşan $\{g_m^*\}$ bazı, $\{g_m\}$ bazına göre biortonormaldir. Böylece $\forall m \geq m_0$ için

$$(f \mid g_m^*) = \sum_{n \geq m_0} c_n (g_n \mid g_m^*) = \sum_{n \geq m_0} c_n \delta_{m,n} = c_m$$

dir. ■

Lagrange inversiyon formülünü, Teorem 3.1.1 deki şekliyle elde etmek için yukarda verdiğimiz teoremde bahsi geçen Φ operatörünü uygun biçimde seçmemiz gerekir. Böylece Teorem 3.1.1 in ispatını bahsettiğimiz cebirsel yöntemi kullanarak yeniden yapabiliriz.

İspat: (**Teorem 3.1.1**) Her $m \geq m_0$ doğal sayısı için $g_m(z) = g(z)^m$ ve $o(f(z)) = m_0$ olsun. $o(g(z)) = 1$ olduğundan $o(g_m) = m$ dir. Ayrıca f nin bir kuvvet serisi olduğu kabulünden dolayı $m_0 \geq 0$ dır. Eğer $h \circ g = f$ ise

$$m_0 = o(f) = o(h \circ g) = o(h)o(g) = o(h)$$

elde edilir. Böylece

$$f(z) = \sum_{m \geq m_0} c_m g_m(z)$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan

$$g_m'(z) = (g(z)^m)' = mg(z)^{m-1}g'(z) = mg(z)^m \frac{g'(z)}{g(z)} \tag{3.5.3}$$

dir. Her $a \in \mathbb{C}((z))$ için $\Phi a = \frac{g(z)}{g'(z)}a'$ olarak tanımlansın. Bu durumda her $m \geq m_0$ doğal sayısı için $\lambda_m = m$ olmak üzere $\Phi g_m = \lambda_m g_m$ eşitliği geçerlidir. Böylece genelleştirilmiş Lagrange inversiyon formülü olarak verdiğimiz teoremde bahsedilen $\Phi^* g_m^* = \lambda_m g_m^*$ eşlenik özdeğer probleminin çözümü olan g_m^* ler kullanılarak $c_m = (f \mid g_m^*)$ şeklinde c_m katsayıları elde edilir. Şimdi bu eşlenik operatörü bulalım. Bunun için öncelikle her $a \in \mathbb{C}((z))$ için $Ma(z) = m(z)a(z)$ şeklinde tanımlı M çarpım operatörünün eşleniğini elde edelim. Eşlenik operatörün tanımını kullanırsak, her $a, b \in \mathbb{C}((z))$ için

$$(Ma \mid b) = L(ma)b = La(mb) = (a \mid Mb)$$

sonucuna ulaşırız. Bu ise bize çarpım operatörünün eşleniğinin kendisi olduğu sonucunu verir. İkinci olarak ise her $a \in \mathbb{C}((z))$ için $\bar{D}a(z) = za'(z)$ olarak tanımladığımız normalleştirilmiş türev operatörünün eşleniğini hesaplayalım. Burada türev için çarpım kuralını ve bir Laurent serisinin türevinin rezidüsünün sıfır olduğu bilgisini kullanarak $a, b \in \mathbb{C}((z))$ için

$$0 = L\bar{D}(ab) = L(\bar{D}a)b + La(\bar{D}b) = \left(\bar{D}a \mid b\right) + \left(a \mid \bar{D}b\right)$$

elde ederiz. Böylece

$$\left(\bar{D}a \mid b\right) = \left(a \mid -\bar{D}b\right)$$

başka bir ifade ile $\bar{D}^* = -\bar{D}$ sonucuna ulaşırız. Bununla birlikte M çarpım operatörünü, her $a \in \mathbb{C}((z))$ için

$$Ma(z) = \frac{g(z)}{zg'(z)}a(z)$$

olarak tanımlarsak Φ operatörünü $M\bar{D}$ şeklinde ifade edebiliriz. Böylece çarpımın eşleniği kuralından

$$\Phi^* = \left(M\bar{D}\right)^* = \bar{D}^* M^* = -\bar{D}M$$

dir. Ulaştığımız sonuçlara göre eşlenik özdeğer problemi

$$-\bar{D}Mg_m^*(z) = mg_m^*(z)$$

şeklindedir. $Mg_m^*(z) = \tilde{g}_m(z)$ olsun. Bu durumda özdeğer problemi,

$$(\tilde{g}_m(z))' = -m\tilde{g}_m(z)\frac{g'(z)}{g(z)} \tag{3.5.4}$$

diferansiyel denklemine dönüşür. Bu eşitlik $g_m(z)$ için elde ettiğimiz (3.5.3) diferansiyel denklemi karşılaştırılırsa (3.5.4) ün çözümünün $\tilde{g}_m(z) = g(z)^{-m}$ olduğu görülür ve böylece

$$g_m^*(z) = M^{-1}g(z)^{-m} = zg(z)^{-m-1}g'(z)$$

bulunur. Bu durumda c_m katsayıları ise

$$\begin{aligned} c_m &= (f \mid g_m^*) = Lzf(z)g(z)^{-m-1}g'(z) \\ &= rez\left[f(z)g(z)^{-m-1}g'(z)\right] \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. ■

4. UYGULAMALAR

4.1 Katalan Sayıları

Rosenkranz [7] Katalan sayıları için açık bir formülasyon elde etmiştir. Bu bölümde bu formülasyon örnek olarak verilecektir. Bir kombinatoryal problem olarak, değişmeli fakat birleşmeli olmayan bir çarpma işleminde $x_1, x_{2,...}, x_n$ gibi n tane sembolün çarpımı kaç farklı şekilde hesaplanabilir sorusunu ele alalım ve bu sayıyı C_n ile gösterelim. Örnek olarak $n = 4$ için $C_4 = 5$ dir ve olası bütün çarpma yolları, $((x_1x_2)(x_3x_4)), (((x_1x_2)x_3)x_4), ((x_1(x_2x_3))x_4), (x_1((x_2x_3)x_4)), (x_1(x_2(x_3x_4)))$ olarak listelenebilir. Bu örneklerden de görülebileceği gibi $x_1, x_{2,...}, x_n$ sembollerinin her geçerli çarpımı, X_1 ve X_2 sırası ile k ve $n-k$ sembolün geçerli çarpımları olmak üzere (X_1X_2) olarak yazılabilir. Tek bir sembol için geçerli çarpımların sayısı $C_1 = 1$ dir. Ayrıca $C_0 = 0$ alırsak bu bize

$$\begin{aligned} &C_0 = 0, C_1 = 1, \\ &\forall n > 1 \text{ için } C_n = \sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \end{aligned}$$

rekürans bağıntısını verir. Bu rekürans bağıntısını kullanarak C_n sayılarının üreteç fonksiyonu olan

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$$

kuvvet serisinin

$$C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = 0 + z + \sum_{n=2}^{\infty} C_n z^n = z + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \right) z^n$$
$$= z + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} \right) z^n = z + C(z)^2$$

fonksiyonel eşitliğini sağladığını görürüz.

Bu fonksiyonel eşitlik elementer metodlarla da çözülebilir ancak biz burada Lagrange inversiyon formülünün kapalı formunu kullanacağız. Öncelikle $C(z)$ üreteç fonksiyonunun

$$G(z) = \sum_{n=2}^{\infty} C_n z^{n-1}$$

olmak üzere $C(z) = z + zG(z)$ şeklinde ifade edilebileceğini belirtelim. Böylece $C(z) = z + C(z)^2$ eşitliğinde $C(z)$ yerine $z + zG(z)$ yazılırsa gerekli işlemlerden sonra $G(z) = z(G(z) + 1)^2$ elde edilir ve $e(z) = (z + 1)^2$ şeklinde tanımlanırsa, $G(z) = z(G(z) + 1)^2$ eşitliği, $G(z) = ze(G(z))$ halini alır. $f(z) = z$ olması durumunda Lagrange inversiyon formülünün kapalı formunu uygularsak $G(z)$ fonksiyonunun katsayıları $G_0 = L(f) = L(z) = 0$ ve

$$\forall n > 0 \text{ için } G_n = \frac{1}{n} \left[z^{n-1} \right] (z + 1)^{2n} = \frac{1}{n} \binom{2n}{n-1}$$

bulunur.

Ayrıca $C(z) = z(G(z) + 1)$ ifadesi bize

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n = z + z \sum_{n=0}^{\infty} G_n z^n = z + \sum_{n=0}^{\infty} G_n z^{n+1}$$
$$z + \sum_{n=1}^{\infty} G_{n-1} z^n = 0 + z + \sum_{n=2}^{\infty} G_{n-1} z^n$$

eşitliğini verir. Bu durumda $C_0 = 0$, $C_1 = 1$ başlangıç koşullarını dikkate alırsak,

$$\sum_{n=2}^{\infty} C_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} G_{n-1} z^n$$

eşitliğinden $\forall n > 1$ için,

$$\begin{aligned} C_n = G_{n-1} &= \frac{1}{n-1}\binom{2n-2}{n-2} \\ &= \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

4.2 Abel Özdeşliği

Rosenkranz [7] Abel özdeşliği için Lagrange inversiyon formülünü kullanarak bir ispat vermiştir. Bu özdeşlik, kombinatorikte karşılaştığımız önemli özdeşliklerden biridir ve 1826 yılında Niels Hendrik Abel tarafından bulunmuştur. Burada [7] den yararlanarak bu özdeşliğin bir ispatını vereceğiz. Öncelikle Abel özdeşliğinin ifadesinin $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+ak)^{k-1}(y-ak)^{n-k}$$

olduğunu belirtelim. İspatımızda temel fikir, $f(z) = e^{xz}$ ve $g(z) = \frac{z}{e^{az}}$ için Sonuç 3.1.1 i kullanmak olacaktır. Ayrıca bu durumda $e(z) = e^{az}$ olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece

$$e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{z}{e^{az}}$$

yazılırsa, h_m katsayıları, Sonuç 3.1.1 kullanılarak

$$h_0 = L(f(z)) = 1 = \frac{x(x+a0)^{0-1}}{0!},$$

ve $\forall n > 0$ için,

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{1}{n}[z^{n-1}]f'(z)e(z)^n = \frac{1}{n}[z^{m-1}]xe^{xz}e^{anz} \\ &= \frac{x}{n}[z^{n-1}]e^{(an+x)z} \\ &= \frac{x}{n}[z^{n-1}]\sum \frac{(x+an)^k}{k!}z^k \\ &= \frac{x(x+an)^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Böylece;

$$e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x+an)^{n-1}}{n!} e^{-anz} z^n \tag{4.2.1}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.2.1) de her iki taraf e^{yz} ile çarpılırsa;

$$e^{xz}e^{yz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x+an)^{n-1}}{n!} e^{yz} e^{-anz} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x+an)^{n-1}}{n!} e^{(y-an)z} z^n$$

bulunur. Bu son eşitlikte

$$e^{(y-an)z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y-an)^k}{k!} z^k$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} e^{xz}e^{yz} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x+an)^{n-1}}{n!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y-an)^k}{k!} z^k\right) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(x+an)^{n-1}}{n!} z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y-an)^k}{k!} z^k \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x(x+ak)^{k-1}}{k!} \frac{(y-an)^{n-k}}{(n-k)!}\right) z^n \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$e^{xz}e^{yz} = e^{(x+y)z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} z^n$$

seri açılımını da göz önünde bulundurursak

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x(x+ak)^{k-1}}{k!} \frac{(y-ak)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

eşitliğine ulaşırız. Son ifadede her iki taraf $n!$ ile çarpılırsa, gerekli düzenlemeden sonra Abel özdeşligi olan

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x(x+ak)^{k-1}(y-ak)^{n-k} = (x+y)^n$$

sonucunu elde ederiz.

4.3 Bir Ters Fonksiyon Örneği

Bu bölümde, Rosenkranz [7] tarafından Lagrange-Bürmann formülünün basit bir uygulaması olarak verilen örnek sunulacaktır. $g(z) = ze^{-az}$ olmak üzere $h(g(z)) = z$ olacak şekilde $h(z)$ fonksiyonunun kuvvet serisine açılımındaki katsayıları bulalım. Bu durumda, $f(z) = z$ ve $e(z) = e^{az}$ için Sonuç 3.1.1 den,

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$$

olacak şekildeki h_n katsayıları, $h_0 = L(f(z)) = L(z) = 0$ ve $\forall n > 0$ için,

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{1}{n}[z^{n-1}]f'(z)e(z)^n \\ &= \frac{1}{n}[z^{n-1}]e^{anz} \\ &= \frac{(an)^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(an)^{n-1}}{n!} z^n$$

açılımını elde ederiz.

4.4 Üstel Serinin Tersi

Rosenkranz [7] Lagrange inversiyon formülünü kullanarak, $g(z) = e^z - 1$ olmak üzere $h(g(z)) = z$ eşitliğini sağlayan h fonksiyonunun katsayılarını hesaplamıştır. Bu bölümde örnek olarak bu uygulama verilecektir. Bu durumda, Teorem 3.1.1 de $f(z) = z$ alınması gerektiği açıktır ve yine Teorem 3.1.1 e göre

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n$$

olarak kabul edersek $h_0 = L(f(z)) = L(z) = 0$ ve $\forall n > 0$ için,

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{1}{n} rez \left[g(z)^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{n} rez \left[(e^z - 1)^{-n} \right] \end{aligned}$$

dir. Böylece problemimiz $(e^z-1)^{-n}$ nin rezidüsünün hesaplanmasına dönüşür. Şimdi bu rezidüleri hesaplayalım. $n=1$ iken

$$\begin{aligned} rez\left[(e^z-1)^{-1}\right] &= rez\left[\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+...\right)^{-1}\right] \\ &= rez\left[\left(z\left(1+\frac{z^1}{2!}+\frac{z^2}{3!}+...\right)\right)^{-1}\right] \\ &= rez\left[\frac{1}{z}\left(1+\frac{z^1}{2!}+\frac{z^2}{3!}+...\right)^{-1}\right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. Eger $n\geq 1$ ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{n}D\,(e^z-1)^{-n} &= -\,(e^z-1)^{-n-1}\,e^z \\ &= (-1)^{n-1}\,(1-e^z)^{-n-1}\,((1-e^z)-1) \\ &= (-1)^{n-1}\,(e^z-1)^{-n}+(-1)^n\,(e^z-1)^{-n-1} \end{aligned}$$

dir. Son eşitliği ve bir Laurent serisinin türevinin rezidüsünün 0 olduğu sonucunu kullanarak,

$$\begin{aligned} 0 &= rez\left[\frac{1}{n}D\,(e^z-1)^{-n}\right] \\ &= rez\left[(-1)^{n-1}\,(e^z-1)^{-n}+(-1)^n\,(e^z-1)^{-n-1}\right] \\ &= -rez\left[(-1)^{n-1}\,(e^z-1)^{-n}\right]+rez\left[(-1)^n\,(e^z-1)^{-n-1}\right] \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$rez\left[(-1)^{n-1}\,(e^z-1)^{-n}\right]=rez\left[(-1)^n\,(e^z-1)^{-n-1}\right]$$

eşitliğine ulaşırız. Bu durumda

$$(-1)rez\left[(e^z-1)^{-n}\right]=rez\left[(e^z-1)^{-n-1}\right]$$

dir ve $rez\left[(e^z-1)^{-1}\right]=1$ sonucu kullanılarak, tümevarımla $\forall n>0$ için

$$h_n=\frac{1}{n}rez\left[(e^z-1)^{-n}\right]=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

bulunur. Sonuç olarak, $g(z) = e^z - 1$ olmak üzere $h(g(z)) = z$ eşitliğini sağlayan h fonksiyonunu

$$\begin{aligned} h(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} h_n z^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \end{aligned}$$

dir ve elde ettiğimiz bu seri $\log(1+z)$ fonksiyonunun $z = 0$ civarında Taylor açılımıdır.

4.5 Konvolüsyon Örnekleri

Riordan [6] Vandermonde konvolüsyonunun bir genelleştirmesini ve bir konvolüsyon özdeşliğini vermiştir. Bu örnekler uygulama olarak verilecektir. $y = (x-1)x^{-\beta}$ olsun. $x = 1+z$ dönüşümü yaparsak, $y = z(1+z)^{-\beta}$ eşitliğini elde ederiz. Şimdi, $g(z) = z(1+z)^{-\beta}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $o(g(z)) = 1$ dir. Böylece, $f(z) = (1+z)^{\alpha}$ ve $e(z) = (1+z)^{\beta}$ olmak üzere, Lagrange inversiyon formülünün (3.2.6) ifadesini kullanarak,

$$\begin{aligned} x^{\alpha} = (1+z)^{\alpha} &= f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(z)^n}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f'(z)e(z)^n) \right]_{z=0} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha g(z)^n}{n} \binom{\alpha + \beta n - 1}{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{\alpha}{\alpha + \beta n} \binom{\alpha + \beta n}{n}. \end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde,

$$x^{\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{\gamma}{\gamma + \beta n} \binom{\gamma + \beta n}{n} \tag{4.5.1}$$

ve

$$x^{\alpha+\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \frac{\alpha+\gamma}{\alpha+\gamma+\beta n} \binom{\alpha+\gamma+\beta n}{n}$$

dir.

$$A_n(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta n} \binom{\alpha + \beta n}{n}$$

olarak tanımlanırsa $x^{\alpha}x^{\gamma} = x^{\alpha+\gamma}$ eşitliğinden,

$$A_n(\alpha+\gamma,\beta) = \sum_{k=0}^{n} A_k(\alpha,\beta)A_{n-k}(\gamma,\beta)$$

şeklinde Vandermonde konvolüsyonunun bir genellemesine ulaşırız.

Bir diğer özdeşliğe ise (3.2.7) yı kullanarak elde ettiğimiz

$$\frac{x^{\alpha+1}}{(1-\beta)x+\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \binom{\alpha+\beta n}{n} \tag{4.5.2}$$

eşitliğinden hareketle ulaşabiliriz. Burada benzer şekilde,

$$\frac{x^{\gamma+1}}{(1-\beta)x+\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \binom{\gamma+\beta n}{n}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{x^{\alpha+\gamma+2}}{((1-\beta)x+\beta)^2} &= \frac{x^{\alpha+1}}{(1-\beta)x+\beta}\frac{x^{\gamma+1}}{(1-\beta)x+\beta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y^n \binom{\alpha+\beta n}{n} \sum_{n=0}^{\infty} y^n \binom{\gamma+\beta n}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+\beta k}{k} \binom{\gamma+\beta(n-k)}{n-k} \right) \end{aligned} \tag{4.5.3}$$

dır. Ayrıca (4.5.3) deki çarpımı,

$$\frac{x^{\alpha+\gamma+2}}{((1-\beta)x+\beta)^2} = \frac{x^{\alpha+\gamma+1}}{(1-\beta)x+\beta}\frac{x}{(1-\beta)x+\beta}$$

şeklinde de yazabiliriz. Burada ise (4.5.2) den,

$$\frac{x}{(1-\beta)x+\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \binom{\beta n}{n}$$

ve

$$\frac{x^{\alpha+\gamma+1}}{(1-\beta)x+\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \binom{\alpha+\gamma+\beta n}{n}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{x^{\alpha+\gamma+2}}{((1-\beta)x+\beta)^2} &= \frac{x^{\alpha+\gamma+1}}{(1-\beta)x+\beta}\frac{x}{(1-\beta)x+\beta} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y^n \binom{\alpha+\gamma+\beta n}{n} \sum_{n=0}^{\infty} y^n \binom{\beta n}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} y^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+\gamma+\beta k}{k} \binom{\beta(n-k)}{n-k} \right) \end{aligned}$$

buluruz. O halde,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} y^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+\beta k}{k} \binom{\gamma+\beta(n-k)}{n-k} \right) \\ = & \sum_{n=0}^{\infty} y^n \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+\gamma+\beta k}{k} \binom{\beta(n-k)}{n-k} \right) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+\beta k}{k} \binom{\gamma+\beta(n-k)}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha+\gamma+\beta k}{k} \binom{\beta(n-k)}{n-k}$$

sonucuna ulaşırız.

4.6 Fibonacci Sayıları

Kılıç ve Prodinger [3] bazı çift toplamları Lagrange inversiyon formülünü kullanarak elde etmişlerdir. Bu bölümde bu sonuçlar uygulama olarak verilecektir. $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ olmak üzere, $n \geq 1$ için $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ rekürans bağıntısı ile tanımlanır. $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olarak alınırsa, $n \geq 0$ olmak üzere, Fibonacci sayıları için

$$f_n = \frac{\phi^n - \overline{\phi}^n}{\phi - \overline{\phi}}$$

eşitliği yazılabilir. Bu örneğimizde, Fibonacci sayıları ile ilgili bazı özdeşlikleri, Lagrange inversiyon formülünü kullanarak ispatlayacağız. İlk olarak, $n > 0$ olmak üzere,

$$\sum_{0 \leq i,j \leq n} \binom{n+i}{2j} \binom{n+j}{2i} \tag{4.6.1}$$

toplamını göz önüne alalım. Açıkça,

$$\left[z^{2j}\right] (1+z)^{n+i} = \binom{n+i}{2j}$$

dir. Ayrıca,

$$S = \sum_{i=0}^{n} (1+z)^{n+i} \binom{n+j}{2i}$$

olarak kabul edersek,

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=0}^{n} (1+z)^{n+i} \binom{n+j}{2i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (1+z)^{n+\frac{i}{2}} \binom{n+j}{i} \frac{1+(-1)^i}{2} \\ &= \left[\left(1+\sqrt{1+z}\right)^{j+n} + \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n} \right] \frac{(1+z)^n}{2} \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \left(1+\sqrt{1+z}\right)^{j+n} + \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n} &= \sum_{k=0}^{j+n} \binom{j+n}{k} \left(\sqrt{1+z}\right)^k \\ &\quad + \sum_{k=0}^{j+n} \binom{j+n}{k} \left(\sqrt{1+z}\right)^k (-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{j+n}{2} \right\rfloor} \binom{j+n}{2k} \left(\sqrt{1+z}\right)^{2k} \end{aligned}$$

olması nedeni ile S ile gösterilen toplamda z nin derecesi en fazla $\frac{j+n}{2} + n$ olabilir. $j > n$ durumunda ise

$$\frac{j+n}{2} + n < j + n < 2j$$

dir. Bu nedenle $j > n$ iken

$$\left[z^{2j}\right] \left(\left(1+\sqrt{1+z}\right)^{j+n} + \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n} \right) (1+z)^n = 0$$

dır. Böylece (4.6.1) toplamı için

$$\begin{aligned} \sum_{0 \le i,j \le n} \binom{n+i}{2j} \binom{n+j}{2i} &= \sum_{j \ge 0} \left[z^{2j}\right] \left(1+\sqrt{1+z}\right)^{j+n} \frac{(1+z)^n}{2} \\ &\quad + \sum_{j \ge 0} \left[z^{2j}\right] \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n} \frac{(1+z)^n}{2} \\ &= \sum_{j \ge 0} \left[z^{j}\right] \left(1+\sqrt{1+z}\right)^{\frac{j}{2}+n} \frac{(1+z)^n}{2} \frac{1+(-1)^j}{2} \\ &\quad + \sum_{j \ge 0} \left[z^{2j}\right] \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n} \frac{(1+z)^n}{2} \qquad (4.6.2) \end{aligned}$$

geçerlidir. (4.6.2)de ilk toplamı hesaplamak için öncelikle,

$$\sum_{j\geq 0}\left[z^j\right]\left(1+\sqrt{1+z}\right)^{\frac{j}{2}+n}(1+z)^n \tag{4.6.3}$$

ifadesini inceleyelim. $F(z) = \left(1+\sqrt{1+z}\right)^n(1+z)^n$ ve $e(z) = \sqrt{1+\sqrt{1+z}}$ olmak üzere (4.6.3) toplamı

$$\sum_{j\geq 0}\left[z^j\right]F(z)e(z)^j \tag{4.6.4}$$

şeklindedir. Lagrange inversiyon formülünün (3.3.9) ifadesinde,

$$g(z) = \frac{z}{e(z)} = \frac{z}{\sqrt{1+\sqrt{1+z}}}$$

olarak tanımlanırsa,

$$\sum_{j\geq 0}\left[t^j\right]F(t)e(t)^j g(z)^j = \frac{F(z)}{1-g(z)e'(z)} \tag{4.6.5}$$

eşitliğini elde ederiz. Eğer

$$g(z) = \frac{z}{e(z)} = \frac{z}{\sqrt{1+\sqrt{1+z}}} = 1$$

ise (4.6.5) toplamı (4.6.4) toplamına eşit olur. Böylece, $g(z) = 1$ ise,

$$\frac{z}{\sqrt{1+\sqrt{1+z}}} = 1$$

dir ve bu eşitlik düzenlenirse

$$\left(z^2-1\right)^2 = z+1$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemden ise $z_0 = -1$, $z_1 = 0$, $z_2 = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $z_3 = \overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ kökleri bulunur. Ancak bu köklerden sadece $z_2 = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{z}{\sqrt{1+\sqrt{1+z}}} = 1$$

eşitliğini sağlar. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 0}\left[z^j\right]\left(1+\sqrt{1+z}\right)^{\frac{j}{2}+n}(1+z)^n &= \sum_{j\geq 0}\left[z^j\right]F(z)e(z)^j \\ &= \frac{F(\phi)}{1-g(\phi)e'(\phi)} \\ &= 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (4.6.6)\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde,

$$g(z) = \frac{z}{e(z)} = \frac{z}{\sqrt{1+\sqrt{1+z}}} = -1$$

iken, $z = -1$ elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
& \sum_{j\geq 0} \left[z^j\right] \left(1+\sqrt{1+z}\right)^{\frac{j}{2}+n} (1+z)^n (-1)^j \\
= & \sum_{j\geq 0} \left[z^j\right] F(z)e(z)^j (-1)^j \\
= & \frac{F(-1)}{1-g(-1)e'(-1)} \\
= & 0
\end{aligned} \tag{4.6.7}$$

dır. Sonuç olarak (4.6.6) ve (4.6.7) den (4.6.2) ifadesideki ilk toplam;

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

olarak elde edilir. Son olarak (4.6.2) ifadesindeki

$$\sum_{j\geq 0} \left[z^{2j}\right] \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n} (1+z)^n \tag{4.6.8}$$

toplamını,

$$\sum_{j\geq 0} \left[z^{2j}\right] z^{j+n} \left(\frac{1-\sqrt{1+z}}{z}\right)^{j+n} (1+z)^n = \sum_{j\geq 0} \left[z^j\right] z^n \left(\frac{1-\sqrt{1+z}}{z}\right)^{j+n} (1+z)^n$$

olarak düzenlersek, $F(z) = \left(1-\sqrt{1+z}\right)^n (1+z)^n$ ve

$$e(z) = \frac{1-\sqrt{1+z}}{z}$$

olmak üzere, (4.6.8) toplamını

$$\sum_{j\geq 0} \left[z^j\right] F(z)e(z)^j$$

biçiminde yazabiliriz. Böylece,

$$g(z) = \frac{z}{e(z)} = \frac{z}{\frac{1-\sqrt{1+z}}{z}} = 1 \tag{4.6.9}$$

olması durumunda (4.6.8) toplamı

$$\sum_{j\geq 0}\left[t^j\right]F(t)e(t)^j g(z)^j$$

toplamına eşittir. (4.6.9) eşitliği düzenlenirse,

$$\left(z^2-1\right)^2 = z+1$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemden ise $z_0 = -1$, $z_1 = 0$, $z_2 = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $z_3 = \overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ kökleri bulunur. Ancak bu köklerden sadece $z_3 = \overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{z}{\frac{1-\sqrt{1+z}}{z}} = 1$$

eşitliğini sağlar. Şimdi, Lagrange inversiyon formülünün (3.3.9) ifadesinden (4.6.8) toplamı, $g(z) = 1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 0}\left[z^{2j}\right]\left(1-\sqrt[2]{1+z}\right)^{j+n}(1+z)^n &= \sum_{j\geq 0}\left[z^j\right]F(z)e(z)^j \\
&= \sum_{j\geq 0}\left[t^j\right]F(t)e(t)^j g(z)^j \\
&= \frac{F(\overline{\phi})}{1-g(\overline{\phi})e'(\overline{\phi})} \\
&= \left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad (4.6.10)
\end{aligned}$$

dir. (4.6.6) ve (4.6.10) den aradığımız toplamı

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \\
= &\ \frac{\phi^{4n-1}-\overline{\phi}^{4n-1}}{\sqrt{5}} \\
= &\ f_{4n-1}
\end{aligned}$$

olarak buluruz.

Burada ikinci örnek olarak,

$$\sum_{1\leq i,j\leq n+1}\binom{n+i}{2j-1}\binom{n+j}{2i-1}$$

toplamını inceleyeceğiz. Benzer şekilde,

$$\left[z^{2j-1}\right](1+z)^{n+i} = \binom{n+i}{2j-1}$$

dir ve

$$R = \sum_{i=1}^{n+1} (1+z)^{n+i} \binom{n+j}{2i-1}$$

olarak kabul edersek,

$$\begin{aligned} R &= \sum_{i=1}^{n+1} (1+z)^{n+i} \binom{n+j}{2i-1} \\ &= \sum_{i\geq 0} (1+z)^{n+\frac{i+1}{2}} \binom{n+j}{i} \frac{1-(-1)^i}{2} \\ &= \left[\left(1+\sqrt{1+z}\right)^{j+n} - \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n}\right] \frac{(1+z)^{n+\frac{1}{2}}}{2} \end{aligned}$$

elde ederiz. Ayrıca

$$\begin{aligned} &\left(1+\sqrt{1+z}\right)^{j+n} - \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n} \\ &= \sum_{k=0}^{j+n} \binom{j+n}{k} \left(\sqrt{1+z}\right)^k \\ &\quad - \sum_{k=0}^{j+n} \binom{j+n}{k} \left(\sqrt{1+z}\right)^k (-1)^k \\ &= \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{j+n+1}{2} \right\rfloor} \binom{j+n}{2k-1} \left(\sqrt{1+z}\right)^{2k-1} \end{aligned} \tag{4.6.11}$$

dir. Şimdi $j > n+1$ ve $j+n = 2m$ olsun. Bu durumda $j > m > n$ dir. Böylece

$$2j-1 > 2m-1 = m+m-1 \geq m+n$$

elde edilir. Diğer taraftan $j+n = 2m$ halinde (4.6.11) den dolayı

$$\left[\left(1+\sqrt{1+z}\right)^{j+n} - \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n}\right] \frac{(1+z)^{n+\frac{1}{2}}}{2}$$

ifadesinde z nin mertebesi $m+n$ dir. Ancak $j > n+1$ durumunda $2j-1 > m+n$ olduğundan

$$\left[z^{2j-1}\right]\left[\left(1+\sqrt{1+z}\right)^{j+n} - \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n}\right] \frac{(1+z)^{n+\frac{1}{2}}}{2} = 0$$

olur. Benzer şekilde $j > n+1$ ve $j+n = 2m+1$ durumunda da

$$\left[\left(1+\sqrt{1+z}\right)^{j+n} - \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n}\right] \frac{(1+z)^{n+\frac{1}{2}}}{2}$$

ifadesinde z nin mertebesi $m+n$ dir. Bununla birlikte $j+n = 2m+1$ iken $j > m+1 > m > n$ olduğundan

$$\begin{aligned} 2j-1 &> 2(m+1)-1 \\ &= 2m+1 \\ &= m+1+m \\ &> m+n \end{aligned}$$

dir. Böylece $j > n+1$ ve $j+n = 2m+1$ halinde de

$$\left[z^{2j-1}\right] \left[\left(1+\sqrt{1+z}\right)^{j+n} - \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n}\right] \frac{(1+z)^{n+\frac{1}{2}}}{2} = 0$$

bulunur. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &\sum_{1\leq i,j\leq n+1} \binom{n+i}{2j-1}\binom{n+j}{2i-1} \\ = &\sum_{j=1}^{n+1} \left[z^{2j-1}\right] \left(1+\sqrt{1+z}\right)^{j+n} \frac{(1+z)^{n+\frac{1}{2}}}{2} \\ &-\sum_{j=1}^{n+1} \left[z^{2j-1}\right] \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n} \frac{(1+z)^{n+\frac{1}{2}}}{2} \\ = &\sum_{j\geq 1} \left[z^{2j-1}\right] \left(1+\sqrt{1+z}\right)^{j+n} \frac{(1+z)^{n+\frac{1}{2}}}{2} \\ &-\sum_{j\geq 1} \left[z^{2j-1}\right] \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n} \frac{(1+z)^{n+\frac{1}{2}}}{2} \\ = &\sum_{j\geq 1} \left[z^{j}\right] \left(1+\sqrt{1+z}\right)^{\frac{j+1}{2}+n} \frac{(1+z)^{n+\frac{1}{2}}}{2} \frac{1-(-1)^j}{2} \\ &-\sum_{j\geq 1} \left[z^{2j-1}\right] \left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n} \frac{(1+z)^{n+\frac{1}{2}}}{2} \end{aligned} \tag{4.6.12}$$

sonucuna ulaşırız. (4.6.12) de ilk toplamı hesaplamak için,

$$\sum_{j\geq 1} \left[z^{j}\right] \left(1+\sqrt{1+z}\right)^{\frac{j+1}{2}+n} (1+z)^{n+\frac{1}{2}} \tag{4.6.13}$$

ifadesini inceleyelim. $F(z) = \left(1+\sqrt{1+z}\right)^{n+\frac{1}{2}}(1+z)^{n+\frac{1}{2}}$ ve $e(z) = \sqrt{1+\sqrt{1+z}}$ olmak üzere (4.6.13) toplamı

$$\sum_{j\geq 0}\left[z^j\right]F(z)e(z)^j$$

biçimindedir. Önceki örneğimizde izlenilen yolu kullanarak, $g(z) = \frac{z}{e(z)}$ şeklinde $g(z)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\sum_{j\geq 0}\left[t^j\right]F(t)e(t)^j g(z)^j \tag{4.6.14}$$

toplamında, eğer $g(z) = \frac{z}{e(z)} = 1$ ise (4.6.14) toplamı (4.6.13) toplamına eşittir. Böylece, $g(z) = 1$ ise,

$$\frac{z}{\sqrt{1+\sqrt{1+z}}} = 1$$

dir ve bu eşitlik düzenlenirse

$$\left(z^2-1\right)^2 = z+1$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemden ise $z_0 = -1$, $z_1 = 0$, $z_2 = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $z_3 = \overline{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ kökleri bulunur. Ancak bu köklerden sadece $z_2 = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{z}{\sqrt{1+\sqrt{1+z}}} = 1$$

eşitliğini sağlar. Bu durumda Lagrange inversiyon formülünün (3.3.9) ifadesinden,

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 1}\left[z^j\right]\left(1+\sqrt{1+z}\right)^{\frac{j+1}{2}+n}(1+z)^{n+\frac{1}{2}} &= \sum_{j\geq 0}\left[z^j\right]F(z)e(z)^j \\ &= \frac{F(\phi)}{1-g(\phi)e'(\phi)} \\ &= 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\alpha^{4n+2} \qquad (4.6.15)\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde $g(z) = \frac{z}{e(z)} = -1$ ise $z = -1$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned}\sum_{j\geq 1}\left[z^j\right]\left(1+\sqrt{1+z}\right)^{\frac{j+1}{2}+n}(1+z)^{n+\frac{1}{2}}(-1)^j &= \frac{F(-1)}{1-g(-1)e'(-1)} \\ &= 0 \qquad (4.6.16)\end{aligned}$$

dır. Şimdi (4.6.12)de ikinci toplamı hesaplamak için

$$\sum_{j\geq 1}\left[z^{2j-1}\right]\left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n}(1+z)^{n+\frac{1}{2}}$$

ifadesini ele alalım.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\geq 1}\left[z^{2j-1}\right]\left(1-\sqrt{1+z}\right)^{j+n}(1+z)^{n+\frac{1}{2}}\\
=\;&\sum_{j\geq 1}\left[z^{2j-1}\right]z^{j+n}\left(\frac{1-\sqrt{1+z}}{z}\right)^{j+n}(1+z)^{n+\frac{1}{2}}\\
=\;&\sum_{j\geq 0}\left[z^{j}\right]z^{n+1}\left(\frac{1-\sqrt{1+z}}{z}\right)^{j+n}(1+z)^{n+\frac{1}{2}} \qquad (4.6.17)
\end{aligned}$$

dır. Burada, $F(z)=z\left(1-\sqrt{1+z}\right)^{n}(1+z)^{n+\frac{1}{2}}$ ve $e(z)=\frac{1-\sqrt{1+z}}{z}$ olmak üzere (4.6.17) toplamı,

$$\sum_{j\geq 0}\left[z^{j}\right]F(z)e(z)^{j}$$

şeklindedir. O halde,

$$g(z)=\frac{z}{e(z)}=\frac{z}{\frac{1-\sqrt{1+z}}{z}}=1 \qquad (4.6.18)$$

olması durumunda (4.6.17) toplamı

$$\sum_{j\geq 0}\left[t^{j}\right]F(t)e(t)^{j}g(z)^{j}$$

toplamına eşittir. (4.6.18) eşitliği düzenlenirse,

$$\left(z^{2}-1\right)^{2}=z+1$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemden ise $z_0=-1$, $z_1=0$, $z_2=\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $z_3=\overline{\phi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ kökleri bulunur. Ancak bu köklerden sadece $z_3=\overline{\phi}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{z}{\frac{1-\sqrt{1+z}}{z}}=1$$

eşitliğini sağlar. Lagrange inversiyon formülünün (3.3.9) ifadesinden aradığımız sonuç,

$$\frac{F(\overline{\phi})}{1-g(\overline{\phi})e'(\overline{\phi})}=-\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\overline{\phi}^{4n+2} \qquad (4.6.19)$$

dir. Böylece (4.6.15) ve (4.6.19) dan

$$\begin{aligned}\sum_{1\leq i,j\leq n+1}\binom{n+i}{2j-1}\binom{n+j}{2i-1} &= \frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\phi^{4n+2}+\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\overline{\phi}^{4n+2}\right)\\ &= f_{4n+1}\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

4.7 Polinomlar

Hare, Prodinger ve Shallit [2] $p(x) = x^m - x^{m-1} - ... - x - 1$ polinomunun pozitif kökü için bir sonsuz toplam elde etmişlerdir. Ayrıca buna bağlı bazı sonuçlarda bulunmuştur. Şimdi bu örnekler uygulama olarak verilecektir. $p(x) = x^m - x^{m-1} - ... - x - 1$ polinomunun bir tek pozitif kökünün olduğunu bilinmektedir. Bu kökü, α_m ile gösterilsin ve ayrıca $\beta_m = \frac{1}{\alpha_m}$ olsun. Bu örneğimizde, α_m, β_m ve $\frac{1}{2-\alpha_m}$ için seriler elde edeceğiz. Kolaylık açısından $\alpha_m = \alpha$ ve $\beta_m = \beta$ olarak alacağız.

4.7.1 β için bir seri

α, $p(x) = x^m - x^{m-1} - ... - x - 1$ polinomunun bir kökü olduğundan, $\alpha^m = \alpha^{m-1}+\alpha^{m-2}+...+\alpha+1$ dir. Her iki taraf $(1-\alpha)$ ile çarpılırsa, $(1-\alpha)\alpha^m = 1-\alpha^m$ ve dolayısıyla, $\alpha^{m+1} - 2\alpha^m + 1 = 0$ elde ederiz. Ayrıca $\beta = \frac{1}{\alpha}$ olduğundan $\beta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta^{m+1}$ dir. Şimdi

$$e(z) = \left(z+\frac{1}{2}\right)^{m+1}$$

olsun ve $g(z) = \frac{z}{e(z)}$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda $f(z) = z$ olmak üzere Lagrange inversiyon formülünün (3.3.9) ifadesinden

$$z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(z)^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(e(z)^n)\right]_{z=0}$$

dır. Burada

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(e(z)^n) &= \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(z+\frac{1}{2}\right)^{(m+1)n} \\ &= \binom{(m+1)\,n}{n-1}(n-1)!\left(z+\frac{1}{2}\right)^{mn+1}\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$g(z)=\frac{z}{e(z)}=\frac{1}{2}$$

ise $z=\beta-\frac{1}{2}$ bir çözümdür. Bu durumda $z=\beta-\frac{1}{2}$ ve $g(z)=\frac{z}{e(z)}=\frac{1}{2}$ değerleri

$$z=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{g(z)^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(e(z)^n)\right]_{z=0}$$

eşitliğinde yerlerine yazılırlarsa

$$\begin{aligned}\beta-\frac{1}{2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\binom{(m+1)\,n}{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{2}\right)^{mn+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{(m+1)\,n}{n-1}\frac{1}{2^{(m+1)n}}.\end{aligned}$$

serisini elde ederiz. Böylece

$$\beta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{(m+1)\,n}{n-1}\frac{1}{2^{(m+1)n}}$$

dir.

4.7.2 α için bir seri

$\alpha^{m+1}-2\alpha^m+1=0$ eşitliği $\alpha^m(\alpha-2)+1=0$ olarak yeniden düzenlenirse, $2-\alpha=\alpha^{-m}$ bulunur. Burada,

$$e(z)=\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-m}$$

ve $g(z)=\frac{z}{e(z)}$ olsun. Eğer $g(z)=2^{-m}$ ise $z=2-\alpha$

$$g(z)=\frac{z}{e(z)}=2^{-m}$$

bir çözümdür. Ayrıca

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(e(z)^n) &= \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-mn} \\ &= \binom{(m+1)\,n-2}{n-1}(n-1)!\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{-mn-n+1}\end{aligned}$$

dir. Şimdi $f(z) = z$ olmak üzere Lagrange inversiyon formülünün (3.3.9) ifadesinden

$$2-\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-mn}}{n}\binom{(m+1)\,n-2}{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

elde edilir. Böylece,

$$\alpha = 2-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{(m+1)\,n-2}{n-1}\frac{1}{2^{(m+1)n}}$$

dir.

4.7.3 $1/(2-\alpha)$ için bir seri

Bu örneğimizde

$$\frac{1}{2-\alpha} = 2^m-\frac{m}{2}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{(m+1)\,n}{n+1}\frac{1}{2^{(m+1)n}}$$

olduğunu ispatlayacağız. Öncelikle

$$S(w) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}w^n\left[t^{n+1}\right](1+t)^{(m+1)n}.$$

tanımlayalım. Burada $y = \frac{1}{2^{m+1}}$ için

$$S\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\binom{(m+1)\,n}{n+1}\frac{1}{2^{(m+1)n}}$$

dir. Bu durumda

$$S\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) = \frac{1}{2-\alpha}-2^m+\frac{m}{2}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $2-\alpha = \alpha^{-m}$ eşitliği tekrar düzenlenirse

$$\frac{2}{\alpha}-1 = \alpha^{-m-1}$$

eşitliğini elde ederiz.

$$e(z) = (1+z)^{m+1}, \ f'(z) = -e(z)^{-2}$$

ve $w = \frac{z}{e(z)}$ olsun. O halde

$$w = \frac{z}{e(z)} = \frac{1}{2^{m+1}} \tag{4.7.1}$$

ise (4.7.1) eşitliği için $z = \frac{2}{\alpha} - 1$ bir çözümdür. Lagrange inversiyon formülünün (3.2.8) ifadesinden

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n} \left[t^{n-1}\right] f'(t)e(t)^n$$

dir. Son eşitlikte w ye göre türev alarak,

$$\frac{d}{dw} f(z) = \frac{dz}{dw} f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} w^{n-1} \left[t^{n-1}\right] f'(t)e(t)^n$$

elde ederiz. $w = \frac{z}{e(z)}$ olduğunu dikkate alırsak

$$\frac{dz}{dw} = \frac{e(z)^2}{e(z) - ze'(z)}$$

dir. Böylece;

$$\begin{aligned}
&\frac{e(z)^2}{e(z) - ze'(z)} f'(z) \\
= \ & \sum_{n=1}^{\infty} w^{n-1} \left[t^{n-1}\right] f'(t)e(t)^n \\
= \ & \left[t^0\right] f'(t)e(t) + w\,[t]\, f'(t)e(t)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} w^{n+1} \left[t^{n+1}\right] f'(t)e(t)^2 e(t)^n.
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız. $f'(z) = -e(z)^{-2}$ olduğundan

$$-\frac{1}{e(z) - ze'(z)} = -1 - \sum_{n=1}^{\infty} w^{n+1} \left[t^{n+1}\right] e(t)^n$$

dir. Diğer taraftan

$$S'(w) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} w^{n-1} \left[t^{n+1}\right] (1+t)^{(m+1)n}$$

dir ve bu eşitlikten,

$$2w^2S'(w) = 1 - \frac{1}{e(z) - ze'(z)}$$

elde ederiz. Böylece

$$S'(w) = \frac{1}{2w^2} - \frac{1}{e(z) - ze'(z)}\frac{e(z)^2}{2z^2}$$

ve

$$\begin{aligned}
S(w) &= -\frac{1}{2w} - \int \frac{1}{e(z) - ze'(z)}\frac{e(z)^2}{2z^2}dw \\
&= -\frac{1}{2w} - \int \frac{e(z) - ze'(z)}{e(z)^2}\frac{1}{e(z) - ze'(z)}\frac{e(z)^2}{2z^2}dz \\
&= -\frac{1}{2w} + \frac{1}{2z} + C
\end{aligned}$$

dir. İntegrasyon sabiti olan C değeri, $S(0) = 0$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
C &= \frac{1}{2}\lim_{w\to 0}\left[\frac{1}{w} - \frac{1}{z}\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{e(z) - 1}{z} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^{m+1} - 1}{z} \\
&= \frac{m+1}{2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu durumda

$$S(w) = -\frac{1}{2w} + \frac{1}{2z} + \frac{m+1}{2}$$

dir. Böylece $w = \frac{1}{2^{m+1}}$ ve $z = \frac{2}{\alpha} - 1$ için

$$S\left(\frac{1}{2^{m+1}}\right) = \frac{1}{2-\alpha} - 2^m + \frac{m}{2}$$

eşitliğine ulaşılır.

4.8 Cardano Formülleri

Rosenkranz [7] genel bir kübik denklemin bir kökü için seri açılımı elde etmiştir. Burada bu uygulama verilmektedir. Kübik bir denklem, a, b, ve c kompleks katsayılar olmak üzere

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

formundadır. Ancak her durumda bu denklem $z = x + \frac{a}{3}$ dönüşümü yapılarak,

$$z^3 + 3pz + 2q = 0 \tag{4.8.1}$$

formuna indirgenebilir. Burada, p ve q katsayıları

$$p = \frac{b}{3} + \frac{a^2}{9}, \; q = \frac{a^3}{27} - \frac{ab}{6} + \frac{c}{2}$$

eşitlikleri ile verilir. İtalyan matematikçi Cardano 1545 te (4.8.1) in köklerinden bir tanesi için

$$z_0 = \sqrt[3]{-q + \sqrt{p^3 + q^2}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{p^3 + q^2}}$$

eşitliğini vermiştir. Biz ise burada köklerden birine yakınsayan bir seri elde edeceğiz. Öncelikle $g(z) = z^3 + 3pz$ olarak kabul edersek problemimiz $g(z) = -2q$ denklemini çözmeye dönüşür. Eğer $g(z_0) = -2q$ ve $g(z)$ fonksiyonunun tersi $g^{-1}(z)$ ise aradığımız çözüm olan z_0 için $z_0 = g^{-1}(-2q)$ eşitliği geçerlidir. Böylece

$$g^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

olacak şekilde c_n katsayılarını bulursak

$$z_0 = g^{-1}(-2q) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (-2q)^n$$

serisini elde ederiz. Teorem 3.1.1 de $f(z) = z$ alındığında c_n katsayıları, $c_0 = L(f(z)) = L(z) = 0$ ve $\forall n > 0$ için,

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{n} rez \left[g(z)^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{n} rez \left[\left(z^3 + 3pz \right)^{-n} \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[z^{n-1} \right] \left[\left(z^2 + 3p \right)^{-n} \right] \end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \left(z^2 + 3p \right)^{-n} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} \frac{z^{2k}}{(3p)^{n+k}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} (-1)^k \frac{(z)^{2k}}{(3p)^{n+k}} \end{aligned}$$

açılımını kullanarak n nin çift olmasıdurumunda $c_n = 0$ ve n nin tek olmasıdurumunda ise

$$c_n = c_{2m+1} = \binom{3m}{m} \frac{(-1)^{m+1}}{2m+1} \frac{(2q)^{2m+1}}{(3p)^{3m+1}}$$

sonuçlarınıelde ederiz. Bu durumda

$$z_0 = g^{-1}(-2q) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{3k}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1} \frac{(2q)^{2k+1}}{(3p)^{3k+1}}$$

dir.

4.9 Cebirsel bir eşitlik

Rosenkranz [7] n. dereceden özel bir eşitliğin bir kökü için elde edilen seri açılımı burada uygulama olarak verilecektir. Burada, n pozitif bir tamsayı ve $a, b \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $(z+a)^n = bz$ eşitliğinin köklerinden birine yakınsayan bir seri elde edeceğiz. Öncelikle

$$g(z) = \frac{z}{(z+a)^n}$$

şeklinde $g(z)$ fonksiyonunu tanımlarsak problemimiz,

$$g(z) = \frac{1}{b}$$

eşitliğinin çözümüne dönüşür. $o(g(z)) = 1$ olduğundan $g^{-1}(z)$ mevcuttur. Böylece

$$g(z_0) = \frac{1}{b}$$

ise aradığımız çözüm olan $z_0 \in \mathbb{C}$ için

$$g^{-1}(\frac{1}{b}) = z_0$$

geçerlidir. Eğer $f(z) = z$ ise Lagrange inversiyon formülü kullanılarak $g^{-1}(z)$ nin katsayıları c_m ler

$$c_0 = L(f) = 0$$

ve $\forall m > 0$ için

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{1}{m} rez\left[f'(z)\frac{(z+a)^{mn}}{z^m}\right] \\ &= \frac{1}{m} rez\left[\frac{(z+a)^{mn}}{z^m}\right] \\ &= \binom{mn}{m-1}\frac{a}{m}a^{(n-1)m} \end{aligned}$$

dir. Bu durumda aradığımız çözüm olan $z_0 \in \mathbb{C}$,

$$z_0 = g^{-1}(\frac{1}{b}) = \sum_{m=1}\binom{mn}{m-1}\frac{a}{m}\left(\frac{a^{(n-1)}}{b}\right)^m$$

şeklinde bir seri toplamı olarak yazılabilir.

4.10 Ters Bağıntılar

Rosenkranz [7] tarafÄśndan bazı ters bağıntılar için genel bir form ve uygulaması verilmiştir. Bu bölümde bu teoremi, ispatını ve binomial ters bağıntıyı uygulama olarak vereceğiz. Bir ters bağıntı çiftinin genel formu, $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$a_m = \sum_{n=0}^{m} \alpha_{mn} b_n \Leftrightarrow b_m = \sum_{n=0}^{m} \beta_{mn} a_n$$

şeklindedir. Burada α_{mn} ve β_{mn} katsayıları, sırası ile sonsuz boyutlu alt üçgensel A ve B matrislerinin girdileri olarak düşünülebilir. Böylece $a = (a_0,\ a_1, ...)$ ve $b = (b_0,\ b_1, ...)$ dizilerinden bağımsız olarak $AB = I$ eşitliği sağlandığında α_{mn} ve β_{mn} katsayılarının bir ters çift oluşturduğu görülür.

Aşağıda vereceğimiz teorem bize bu katsayıların geniş bir ailesini verir.

Teorem 4.10.1 *$f(z)$ mertebesi 0, $g(z)$ ve $h(z)$ ise mertebeleri 1 olan kuvvet serileri olsunlar. Bu durumda*

$$\alpha_{mn} = rez\left[f(z)g(z)^n h(z)^{-m-1}h'(z)\right]$$

ve

$$\beta_{mn} = rez\left[f(z)^{-1}h(z)^n g(z)^{-m-1}g'(z)\right]$$

katsayıları bir ters çift oluşturur.

İspat: Teorem 3.1.1 de $f(z)$ yerine $f(z)g(z)^n$ ve $g(z)$ yerine $h(z)$ yazılırsa $m > 0$ için $h_m = \alpha_{mn}$ olduğu görülür. Benzer şekilde $f(z)$ yerine $f(z)^{-1}h(z)^n$ alınırsa bu kez $h_m = \beta_{mn}$ elde edilir.

$m = 0$ ve $n > 0$ olması durumunda, $h(z)$ ve $g(z)$ kuvvet serilerinin mertebelerinin 1 olması kabulünden dolayı Lemma 3.2.1 den

$$\alpha_{0n} = rez\left[f(z)g(z)^n h(z)^{-1}h'(z)\right] = 0$$

ve

$$\beta_{0n} = rez\left[f(z)^{-1}h(z)^n g(z)^{-m-1}g'(z)\right] = 0$$

dır.

Eğer $m = n = 0$ ise yine Lemma 3.2.1 den

$$\begin{aligned}\alpha_{00} &= rez\left[f(z)h(z)^{-1}h'(z)\right]\\ &= L(f(z))\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\beta_{00} &= rez\left[f(z)^{-1}g(z)^{-1}g'(z)\right]\\ &= L(g(z))\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$f(z)g(z)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{mn}h(z)^m \tag{4.10.1}$$

ve

$$f(z)^{-1}h(z)^n = \sum_{m=0}^{\infty} \beta_{mn}g(z)^m \tag{4.10.2}$$

dir.

Ters bağıntı özelliğini göstermek için (4.10.1) eşitliğini β_{nk} ile çarpar ne n üzerinden toplam alırsak, eşitliğin sol tarafında, (4.10.2) den dolayı

$$\begin{aligned} f(z)\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{nk}g(z)^n &= f(z)f(z)^{-1}h(z)^k \\ &= h(z)^k \end{aligned}$$

elde edilir. Aynı işlemi (4.10.1) nin sağ tarafında da uygulanırsa

$$h(z)^k = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{mn}\beta_{nk}\right)h(z)^m$$

eşitliğine ulaşılır ve buradan ise

$$\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{mn}\beta_{nk} = \delta_{m,k}$$

sonucu bulunur. Benzer şekilde (4.10.2), α_{nk} ile çarpılıp n üzerinden toplam alınırsa, (4.10.1) eşitliğinden dolayı

$$\begin{aligned} f(z)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{nk}h(z)^n &= f(z)^{-1}f(z)g(z)^k \\ &= g(z)^k \end{aligned}$$

elde edilir. (4.10.2) eşitliğinin sağ tarafında ise aynı işlemlerle

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{mn}\alpha_{nk}\right)g(z)^m$$

toplamını elde ederiz. Eşitlikten dolayı

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{mn}\alpha_{nk}\right)g(z)^m = g(z)^k$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{mn}\alpha_{nk} = \delta_{m,k}$$

dir.

Son olarak

$$\alpha_{mn} = rez\left[f(z)g(z)^n h(z)^{-m-1}h'(z)\right]$$

eşitliğinde $n > m$ ise $\alpha_{mn} = 0$ olduğunu göstereceğiz. Öncelikle $h(z)$ mertebesi 1 olan bir kuvvet serisi olduğu için $h(z) = zk(z)$ olacak şekilde mertebesi 0 olan bir $k(z)$ kuvvet serisi vardır. Böylece

$$h(z)^{-m-1} = \frac{1}{z^{m+1}} k(z)^{-m-1}$$

dir ve $k(z)$ nin mertebesi 0 olduğundan $k(z)^{-m-1}$ de bir kuvvet serisidir. Ayrıca $f(z)g(z)^n$ nin mertebesi, Teorem 2.1.1 den dolayı n dir. Böylece, $u(z)$ mertebesi 0 olan bir kuvvet serisi olmak üzere, $f(z)g(z)^n = z^n u(z)$ sağlanacak şekilde $u(z) \in \mathbb{C}[[t]]$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= rez\left[f(z)g(z)^n h(z)^{-m-1} h'(z)\right] \\ &= rez\left[\frac{z^n}{z^{m+1}} k(z)^{-m-1} u(z)\right] \end{aligned}$$

dir ve $n > m$ olduğundan

$$\begin{aligned} \alpha_{mn} &= rez\left[\frac{z^n}{z^{m+1}} k(z)^{-m-1} u(z)\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. Benzer işlemler uygulanarak $n > m$ durumunda $\beta_{mn} = 0$ olduğu da gösterilebilir. Sonuç olarak $A = [\alpha_{mn}]$ ve $B = [\beta_{mn}]$ nin alt üçgen matris oldukları görülür. ■

Şimdi teoremimizi uygulaması olan bir örneği verelim.

4.10.1 Binomial Ters Bağıntı

Burada $\alpha_{mn} = \binom{m+p}{n+p}$ katsayıları ile bir ters çift oluşturacak şekilde β_{mn} katsayılarını hesaplayacağız. α_{mn} katsayısını

$$\alpha_{mn} = \binom{m+p}{n+p} = \binom{m+p}{m-n} = rez\left[(1+z)^{m+p} z^{-m+n-1}\right]$$

şeklinde yazabiliriz. Bu durumda

$$f(z)g(z)^n h(z)^{-m-1} h'(z) = (1+z)^{m+p} z^{-m+n-1}$$

eşitliğinin sağlanması için $g(z) = z$ ve $h(z) = (1+z)^{-1} z$ olarak seçersek, $h'(z) = (1+z)^{-2}$ ve $f(z) = (1+z)^{p+1}$ bulunur. Elde edilen bu fonksiyonlar, β_{mn} için verilen

$$\beta_{mn} = rez\left[f(z)^{-1}h(z)^n g(z)^{-m-1} g'(z)\right]$$

eşitliğinde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\beta_{mn} &= rez\left[(1+z)^{-p-1}(1+z)^{-n} z^n z^{-m-1}\right] \\
&= rez\left[(1+z)^{-n-p-1} z^{n-m-1}\right] \\
&= \binom{-n-p-1}{m-n} \\
&= (-1)^{m-n}\binom{m+p}{m-n}
\end{aligned}$$

bulunur.

Özel olarak $p = 0$ değeri için

$$\sum (-1)^{k-n}\binom{m}{k}\binom{k}{n} = \delta_{m,n}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] Andrews, George E., Askey, R., Roy, R., *Special Functions*, Cambridge University Press, 1999, ISBN 0 521 78988 5.

[2] Hare, Kevin., Prodinger, Helmut., Shallit, Jeffrey., *Three Series for the Generalized Golden Mean*, arXiv:1401.6200v1 [math.NT], 23 Jan 2014.

[3] Kılıç, E., Prodinger, H., *Some Double binomial sums related to Fibonacci, Pell and generalized order-k Fibonacci numbers*, Rocky Mountain Journal of Mathematics 43 (3) (2013), 975-987.

[4] Kreyszig, Erwin., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989, ISBN 0-471-50459-9.

[5] Palka, Bruce P., *An Introduction to Complex Function Theory* (Undergraduate Texts in Mathematics),1991 Springer-Verlag New York Inc.

[6] Riordan, J., *Combinatorial Identities*, John WileySons Inc., 1979, ISBN 0 88275 829 2.

[7] Rosenkranz, Markus., *Lagrange Inversion* (Diplomarbeit),1997.

[8] Saff, E. B., Snider, A.D., *Fundamentals of Complex Analysis*, 2003, 1993, 1976 Pearson Education, Inc.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	ÖZTÜRK, Halit
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	04.06.1984
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	0537 664 10 74
e-mail	:	hozturk@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Y. Lisans	TOBB ETÜ	2014
Lisans	Gazi Üniversitesi	2010
Lise	Çorum And. Ögrt. Lisesi	2002

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2012-2014	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Burslu Y.L. Öğrencisi

Yabancı Dil

İngilizce (İyi)

Uluslararası Bildiriler

E. Kılıç and H. Öztürk, On binomial transformations of a product of rising and falling factorials, *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2014)*, November 6-9, 2014, Antalya, Turkey (accepted for presentation).