T.C.

BATMAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

M-KATLI SİMETRİK Bİ-ÜNIVALENT FONKSİYONLARIN ALT SINIFLARI İÇİN KATSAYI SINIRLARI

İdris TAYMUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK Anabilim Dalı

Aralık-2017

BATMAN

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

İdris TAYMUR
21.12.2017

TEZ KABUL VE ONAYI

İdris TAYMUR tarafından hazırlanan "M-KATLI SİMETRİK Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN ALT SINIFLARI İÇİN KATSAYI SINIRLARI" adlı tez çalışması 21/12/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ	…………
Danışman Doç. Dr. Mustafa AVCİ	…………
Üye Yrd. Doç. Dr. F. Müge SAKAR	…………

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Bahattin İŞCAN
FBE Müdürü

ÖZET

M-KATLI SİMETRİK
Bİ-ÜNIVALENT FONKSİYONLARIN
ALT SINIFLARI İÇİN KATSAYI SINIRLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İdris TAYMUR

BATMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2017

Bu tezde $f(z)$ ve $f^{-1}(z)$ fonksiyonları m-katlı simetrik analitik olan bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfının iki yeni altsınıfı tanımlanacaktır. Bu iki altsınıfa ait fonksiyonların katsayıları için üst sınırlar elde edeceğiz.

Anahtar Kelimeler: Ünivalent Fonksiyonlar,Bi-Ünivalent Fonksiyonlar, M-Katlı Simetrik Bi-Ünivalent Fonksiyonlar,Katsayı Sınırları, Katsayı Tahminleri, Salagean Türev Operatörü

ABSTRACT

COEFFİCİENT BOUNDS FOR SUBCLASSES OF
M-FOLD SYMMETRİC Bİ-UNİVALENT FUNCTİONS

MASTER THESIS

İdris TAYMUR

UNIVERSTY OF BATMAN
INSTITUE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

In this thesis, we introduce and investigate two new subclasses of the bi-univalent functions; both $f(z)$ and $f^{-1}(z)$ are m-fold symmetric analytic functions. Among other results, upper bounds for the coefficients $|a_{m+1}|$ and $|a_{2m+1}|$ are found in this investigation.

Keywords: Univalent Functions, Bi-univalent Functions, M-Fold SymmetricBi-univalent Functions, Coefficient Bounds,Coefficient Estimates, Salagean Operator.

ÖNSÖZ

Titizliği, bilgeliği ve tecrübesi ile bana bu tezin yazım sürecinin en başından en sonuna kadar yardımcı olan sevgili hocalarım Doç.Dr Bilal ŞEKER ve Doç.Dr. Mustafa AVCI'ya ve matematik bölümdeki diğer hocalarıma,

Her koşulda bana destek olan Aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

KISALTMA VE S İ M G E L E R

$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	: Gerçel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık Sayılar Kümesi
U	: $\{ z : \|z\| < 1 \}$, Birim disk
$k(z)$	: $\frac{z}{(1-z)^2}$, Koebe Fonksiyonu
$f \prec g$	: f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$D^n f$	: f fonksiyonunun n. mertebeden Salagean Türevi
A	: U birim diskinde tanımlanan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ analitik fonksiyonların sınıfı
S	: Birim diskte analitik, ünivalent ve normalleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı
P	: Pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı
K	: Konveks fonksiyonlar sınıfı
S^*	: Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$S^*(\alpha)$	: $\alpha -$mertebeliyıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathrm{K}(\alpha)$	: $\alpha -$mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı
$\tilde{\mathrm{S}}(\alpha)$	: α-mertebeligüçlü yıldızıl fonksiyonların sınıfını
$\tilde{\mathrm{K}}(\alpha)$	: α-mertebeligüçlü konveks fonksiyonların sınıfı
Σ	: Bi-ünivalent olan fonksiyonların sınıfı

GİRİŞ

Geometrik Fonksiyonlar Kuramı,bir karmaşık fonksiyonun analitik özellikleri ve bu analitik fonksiyonun görüntüsünün geometrik özellikleri arasındaki ilişkiyi gösteren Karmaşık analizin en önemli dallarindan biridir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisi, geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından biridir. Karmaşık analizde, karmasık düzlemin açık bir D altkümesi üzerinde tanımlanmış bir $f(z)$ fonksiyonu, kendi $f(\mathrm{D})$ resmi üzerine $1:1$ oluyorsa bu fonksiyona D bölgesinde ünivalenttir denir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisi çok geniş ve karmaşık olduğundan bazı kolaylaştırıcı kısıtlamalar yapmak gerekir. “Her basit bağlantılı D bölgesini, birim disk üzerine birebir olarak resmeden bir tek f analitik fonksiyonunun var olduğunu” ifade eden ünlü Riemann Dönüşüm Teoremindeki D bölgesi yerine U birim diskini alabiliriz.

Genel olarak, $\mathrm{U}=\left\{ z: |z|<1 \right\}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve normalize edilmiş yani, $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Her $f\in\mathrm{S}$ fonksiyonu

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\, z^n$$

şeklinde bir Taylor-Maclaurin serisi ile ifade edilebilir.

Ünivalent Fonksiyonlar Teorisinin temelleri, Riemann Dönüşüm Teoremi ile atılmış olmakla birlikte, teorinin başlangıcı, Koebe’nin (1907)normalize edilmiş ünivalent bir fonksiyonun kendisinin ve birinci türevinin modülleri üzerindeki sınırların varlığını ispatladığı 1907 yılındaki çalışması ve Bieberbach’ın (1916) bu tür fonksiyonların ikinci katsayıları için 1916 yılında elde ettiği katsayı kestirimine dayanır. Bieberbach, 1916 yılında normalize edilmiş bir ünivalent fonksiyonun katsayıları için ünlü $\left|a_n\right|\le n$ kestirimini yapmış olup, $n=2$ durumu için bu kestirimi ispatlamıştır. Bu önemli kestirim üzerinde pek çok matematikçi çalışmış olmakla beraber 1984 yılında Louis de Branges tarafından ispatlanıncaya kadar bir kestirim olarak kalmıştır.

Ünivalent fonksiyonlar$1:1$ olduğundan terslenebilirdir. İki ünivalent fonksiyon, kendisi ve tersi ünivalent olan fonksiyonlara denir. Genel olarak bi-ünivalent sınıfları kısaca Σ şeklinde gösterimketedir. Ünivalent fonksiyonların katsayı tahminlerinde olduğu gibi bi-ünivalent fonksiyonların katsayı tahminlerinin elde edilmesi için çalışmalar yapılmıştır. İki ünivalent fonksiyonların sınıfı ile ilgili ilk çalışmaları yapmış olan Lewin (1967), bu sınıfa ait fonksiyonların a_2 katsayısı için $|a_2| < 1,51$ olduğunu ispatlamıştır. Sonrasında, Brannan ve Clunie (1979), Netanyahu (1969) ve $|a_2|$ katsayısı için sırasıyla $|a_2| \leq \sqrt{2}$, $\max|a_2| = \frac{4}{3}$ ve $|a_2| > \frac{4}{3}$ eşitsizliklerini göstermişlerdir. İki ünivalent fonksiyonlar sınıfının $|a_2|$ katsayısı için bilinen en iyi tahmin 1985 yılında Taha (1981) tarafından yapılmış olan $|a_2| \leq 1.485$ katsayı tahminidir.Taylor-Maclaurin serisinin herbir

$$|a_n| \left(n \in N - \{1,2\}, N = \{1,2,...\}\right)$$

katsayıları için katsayı kestirimleri hala açık bir problem olarak durmaktadır.

Brannan ve Taha(1986) ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları gibi bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarını tanımlamışlardır. Bu sınıfa ait fonksiyonların $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için kesin olmayan tahminler buldular. Bu çalışmamızda bi-ünivalent fonksiyonların bazı yeni alt sınıflarını tanımlayacağız. Oluşturulan bu alt sınıflar daha öncesinde yapılmış olan bir çok çalışmanın genellemesi olarak yapılması planlanmaktadır.

2.KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1. (Disk) $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi , $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı açık disk,

$\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı kapalı disk,

$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı kümesine de çember denir.

Tanım 2.2. (İç Nokta) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ için $D(z_{0,} r) \subset \mathrm{A}$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir. A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin içi denir.

Tanım 2.3. (Açık Küme) A kümesinin bütün noktaları bir iç nokta ise A kümesine açık küme denir. A kümesinin tümleyeni açık küme ise A kümesi kapalı küme olarak adlandırılır.

Tanım 2.4. (Yığılma Noktası) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ olsun. $\mathrm{A} \neq \varnothing$ ve verilsin. z_0 noktasının her $\mathrm{D}(z_0, \varepsilon)$ komşuluğunda, A kümesinin z_0 dan farklı bir z noktası varsa z_0 nın bir yığılma noktasıdır denir.

Tanım 2.5. (Bağlantılı Küme) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. A kümesi boştan farklı, ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, bu kümeye bağlantılıdır denir. Yani,

$$\mathrm{A} \cap U \neq \varnothing, \mathrm{A} \cap V \neq \varnothing, \mathrm{A} \subset U \cup V, \mathrm{A} \cap U \cap V = \varnothing$$

olacak şekilde U ve V açık kümeleri bulunamıyorsa, A kümesi bağlantılıdır. Bağlantılı olmayan kümeye bağlantısızdır denir.

Tanım 2.6. (Eğri) $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere, $\gamma:[a,b]\rightarrow\mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir.

Tanım 2.7. (Bölge) Karmaşık düzlemde boştan farklı açık ve bağlantılı bir kümeye bölge adı verilir.

Tanım 2.8. (Basit Bağlantılı Bölge) $\mathrm{D}\subset\mathbb{C}$ bir bölge olsun. Eğer hem D hem de $\mathbb{C}-\mathrm{D}$ bağlantılı bir küme ise D bölgesine basit bağlantılı bölge denir.

Tanım 2.9. (Karmaşık Fonksiyon) A ,$\mathbb{C}$ nin herhangi bir altkümesi olsun. Her $z\in\mathrm{A}$ elemanına belli bir $f(z)\in\mathbb{C}$ elemanına karşılık getiren kurala karmaşık fonksiyon denir. $f:\mathrm{A}\rightarrow\mathbb{C}$ gösterimi ile belirtilir.

Bir f karmaşık fonksiyonu $w=f(z)$ şeklinde belirtilir.

Tanım 2.10. (Fonksiyonun Limiti) $\mathrm{A}\subset\mathbb{C}$ olmak üzere $f:\mathrm{A}\rightarrow\mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. $z_0\in\mathbb{C}$, A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Ve bir w_0 sayısı verilsin. Her $\varepsilon>0$ ve $0<|z-z_0|<\delta$ şartını sağlayan her $z\in\mathrm{A}$ için $|f(z)-w_0|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(z_0,\varepsilon)>0$ sayısı varsa f nin z_0 daki limiti w_0 dır denir ve

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$$

ile gösterilir.

Tanım 2.11. (Süreklilik) $\mathrm{A}\subset\mathbb{C}$ olmak üzere $f:\mathrm{A}\rightarrow\mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0\in\mathrm{A}$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$f\left(\mathrm{A}\cap D(z_0,\delta)\right)\subset D\left(f(z_0,\varepsilon)\right)$$

olacak şekilde bir $\delta=\delta(z_0,\varepsilon)>0$ sayısı varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 2.12. (Diferansiyellenebilirlik) $A \subset \mathbb{C}$ bir açık küme, $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun.Eğer $z_0 \in A$ noktasında

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise, f fonksiyonuna z_0 noktasında diferansiyellenebirdir veya türevlenebilirdir denir. Bu limit $f'(z)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.13. (Analitik Fonksiyon) $A \subset \mathbb{C}$ ve $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer f fonksiyonu , z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ karmaşık değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Teorem 2.14. (Maksimum Modül Teoremi) f fonksiyonu D bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon bu bölgede sabit olmadıkça, $|f(z)|$ modülü maksimum değeri bu bölgenin sınırında alır (Duren, 1983).

Teorem 2.15. (Schwarz Yardımcı Teoremi) f fonksiyonu $U = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)| \le 1$ ise $|f'(0)| \le 1$ ve $|f(z)| \le |z|$ eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu ile sağlanır.

Tanım 2.16. (Argüman) Karmaşık düzlemde $z \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısıyla belirtilen vektörün pozitif reel eksen ile yaptığı θ açısına z nin argümenti denir ve $\theta = \arg(z)$ ile gösterilir.

Tanım 2.17. (Konform Dönüşüm) Karmaşık düzlemin bir D bölgesinde $f : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer $z_0 \in \mathrm{D}$ noktasından geçen ve aralarında α açısı bulunan herhangi iki düzgün γ_1, γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında bir konform dönüşümdür denir. Eğer f fonksiyonu her $z_0 \in \mathrm{D}$ noktasında konform ise f fonksiyonu D bölgesinde konformdur. Resmedilen bölge ile resim bölgesi arasındaki ilişkinin daha iyi belirlenebilmesi için herhangi bir karmaşık fonksiyon yerine konform dönüşüm göz önüne alınır.

Teorem 2.18. Karmaşık düzlemin bir D bölgesinde $f : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ dönüşümü verilsin. f ,bir $z_0 \in \mathrm{D}$ noktasında sürekli ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f, z_0 noktasında bir konform dönüşümdür.

Tanım 2.19. (Dizi) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $f(n) = z_n$ olan fonksiyona $\mathbb{C}$ de bir karmaşık dizi denir.

Tanım 2.20. (Yakınsaklık) (z_n), $\mathbb{C}$ de bir dizi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ özelliğindeki bütün $n \in \mathbb{N}$ için $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa , (z_n) dizisinin limiti z_0 dır denir.

Belli bir $z_0 \in \mathbb{C}$ limitine sahip olan (z_n) dizisine yakınsak dizi denir.

Tanım 2.21. (Seri) (z_n) , bir karmaşık dizi olmak üzere $z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ...$ ifadesine karmaşık seri denir ve $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ile gösterilir.Bu serinin $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ olarak tanımlanan (s_n) dizisine kısmi toplamlar dizisi denir.

Tanım 2.22. (Yakınsak Seri) $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ bir karmaşık seri ve (s_n) bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun. (s_n) dizisi bir s_0 değerine yakınsıyorsa verilen seri s_0 sayısına yakınsıyor denir.

Tanım 2.23. (Kuvvet Serisi) $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ biçimindeki serilere kuvvet serileri denir.

Teorem 2.24. (Taylor Teoremi)

$f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ise bu noktanın bir komşuluğunda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

şeklinde bir kuvvet serisi açılımı vardır.Yukarıda belirtilen kuvvet serisine $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktası komşuluğundaki Taylor serisi denir. Taylor serisinde $z_0 = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

elde edilir. Bu seriye Maclaurin serisi adı verilir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu başlık altında tezin oluşturulmasında kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmektedir.

3.1. Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda ünivalent fonksiyonları tanımlayarak önemli özelliklerini vereceğiz.

Tanım 3.1.1. (Ünivalent Fonksiyon) $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere, $f : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu aynı değeri iki defa alamıyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde ünivalent fonksiyon denir. Yani D bölgesindeki $z_1 \neq z_2$ özelliğindeki tüm nokta çiftleri için $f(z_1) \neq f(z_2)$ dir. Diğer bir deyişle D bölgesinde bire-bir dönüşüme ünivalent fonksiyon denir.

.

Tanım 3.1.2. (Yerel Ünivalent Fonksiyon) Bir D bölgesinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu,herhangi bir $z_0 \in D$ noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 3.1.3. f ,D bölgesinde analitik olsun. Bu durumda $z_0 \in D$ noktasında $f^{'}(z_0) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul f nin $z_0 \in A$ noktasında yerel ünivalent olmasıdır.

D bölgesinde tanımlı f fonksiyonu $z_0 \in D$ için yerel ünivalent ise $f'(z_0)$ türevi z_0 noktasında f fonksiyonunun yerel olarak geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ sırasıyla bize uzunlukların yerel büyüme çarpanı ve yerel dönme çarpanını verir.

Yerel ünivalent fonksiyonu, açıları ve dönmeyi korur. Bu nedenden dolayı ünivalent bir fonksiyon, konform bir dönüşümle denk görülür.

Diğer yandan, bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde $f'(z_0) \neq 0$ olması koşulu D bölgesinin tümünde ünivalent olması için gerek koşul iken yeterli koşul olamaz. Örneğin

$f(z)=z^2$ fonksiyonu $\mathrm{D}=\left\{z:1<|z|<2,\ 0<\arg z<\dfrac{3\pi}{2}\right\}$ bölgesinde yerel ünivalenttir. Ancak ünivalent değildir.

Tek değişkenli ünivalent fonksiyonlar teorisinin en önemli temel sonuçlardan biri Riemann dönüşüm teoremidir.

Teorem 3.1.4. (Riemann Dönüşüm Teoremi) $\mathrm{D}\subset\mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesini U birim diski üzerine birebir ve konform olarak resmeden $z_0\in\mathrm{D}$ için $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ olacak şekilde bir tek f fonksiyonu vardır (Duren, 1983).

Riemann dönüşüm teoremiyle keyfi basit bağlantılı bölgelerde tanımlanan ünivalent fonksiyonları U birim diskindeki ünivalent fonksiyonlara dönüştürür. Bundan ötürü birim diskteki ünivalent fonksiyonları çalışacağız.

U birim diskinde analitik ve ünivalent olan $f(z)$ fonksiyonu $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalize edilebilir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu U birim diskinde analitik ve ünivalent ise o zaman

$$g(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{f'(0)}$$

fonksiyonuda $f(z)$ fonksiyonu ile aynı özellikleri taşır. Böylece yapılan bu normalizasyon sınıfın genelliğini sınırlamaz.

Bu tezde çalışmalarımızı, U birim diskinde tanımlanan

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

şeklindeki Taylor serisi açılımına sahip analitik fonksiyonların sınıflarıyla sınırlayacağız. Bu fonksiyonların sınıfını A sembolü ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.5. (S Sınıfı) U birim diskinde analitik, ünivalent ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşullarını sağlayan fonksiyonların sınıfına normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar sınıfı denir. Bu sınıfı S ile göstereceğiz.

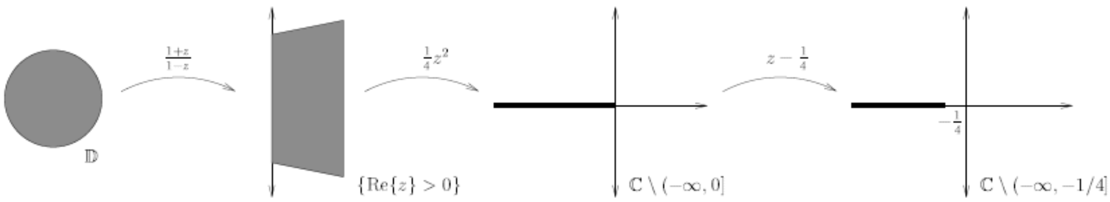
S sınıfına ait en önemli fonksiyonlardan biri

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+...=\sum_{n=1}^{\infty} n z^n \quad , \left(z\in \mathrm{U}\right)$$

şeklinde verilen Koebe fonksiyonudur. $k(z)$ Koebe fonksiyonunu

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]$$

şeklinde yazalım. $f(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu, U birim diskini $\mathrm{Re}\{w\}>0$ yarı düzlemi üzerine birebir olarak dönüştüren bir diğer lineer kesirsel dönüşümdür. Buradan yola çıkarak Koebe fonksiyonu U diskini $\left[-\infty,-\dfrac{1}{4}\right)$den çıkarılmış yani negatif reel eksen hariç tüm karmaşık düzleme konform olarak dönüştürür. Koebe fonksiyonu,ünivalent fonksiyonlar teorisinde birçok problem için extremal bir rol oynar.



Şekil.3.1. Koebe Fonksiyonu Birim Diskini $C-\left(-\dfrac{1}{4},\infty\right]$ konform olarak dönüştürür.

$f(z)=\dfrac{z}{1-z}$ şeklinde verilen fonksiyona lineer kesirsel dönüşüm denir. Bu fonksiyon U birim diskini $\mathrm{Re}\{w\}>-\dfrac{1}{2}$ yarı düzlem üzerine dönüştürür. Bu fonksiyon normalize edildiğinde S sınıfına ait olur. Benzer olarak,

Bieberbach,ilk kez S sınıfına ait bir f fonksiyonların a_n katsayıları için bir üst sınır oluşturmaya çalıştı. 1946 yılında $|a_2|\le 2$ eşitsizliğini ispatladı.

Teorem 3.1.6.(Bieberbach Teoremi) $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...\in \mathrm{S}$ ise $|a_2|\le 2$ dir.

Bieberbach, S sınıfına ait bir fonksiyonunun a_n katsayılarının $|a_n|\le n$ eşitsizliğini sağladığına dair bir kestirimde bulundu. Bieberbach kestirimi olarak bilinen bu zor problem 1985 yılında L. De Branges tarafından ispatlandı.

Teorem 3.1.7. (Bieberbach Kestirimi) $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+...\in \mathrm{S}$ ise her $n\geq 2$ için $|a_n|\leq n$ olur(Bieberbach 1916).

$f\in \mathrm{S}$ ünivalent fonksiyonları için en önemli temel geometrik sonuç 1907 yılında Koebe tarafından verilen ve Koebe dörtte bir teoremi olarak bilinen meşhur teoremdir. Her bir $f\in \mathrm{S}$ fonksiyonu $f(0)=0$ özelliğinde bir açık dönüşüm olduğundan dolayı bu dönüşümlerin görüntüsü, orjin merkezli bazı diskleri kapsar. Koebe, S sınıfındaki tüm fonksiyonların görüntülerinin ρ bir mutlak sabit olmak üzere ortak bir $|w|<\rho$ diskini kapsadığını ortaya çıkarmıştır. Koebe fonksiyonu , ρ mutlak sabitinin $|\rho|\leq \frac{1}{4}$ eşitsizliğini sağlar. Sonrasında, Bieberbach ρ mutlak sabitinin $\frac{1}{4}$ olarak alınabileceğini belirten Koebe kestirimini oluşturdu.

Teorem 3.1.8. (Koebe Dörtte Bir Teoremi) S sınıfındaki her fonksiyonun görüntüsü $\left\{w:|w|<\frac{1}{4}\right\}$ diskini kapsar (Duren, 1983).

Bieberbachın ispatlamış olduğu $|a_2|\leq 2$ katsayı eşitsizliği, konform dönüşümlerin geometrisinde büyüme teoremi ve bükülme teoremi gibi daha ileri uygulamalara sahiptir. büyüme teoremi ve bükülme teoremi,tüm $f\in \mathrm{S}$ fonksiyonları üzerinde sırası ile $|f(z)|$ ve $|f'(z)|$ için sınırlar oluşturur.

Bükülme teoremi, $f\in \mathrm{S}$ dönüşümü altında yay uzunluğunun sonsuz küçük büyüme çarpanı olarak $|f'(z)|$ nin geometrik açıklamasından veya alanın sonsuz küçük büyüme çarpanı olarak $|f'(z)|^2$ jakobiyeninden gelmektedir. Aşağıda verilen teorem , bükülme teoremi ve onun sonuçlarına ilişkin öncül bir tahmin verir.

Teorem 3.1.9. Her bir $f\in \mathrm{S}$ için

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\leq \frac{4r}{1-r^2}\quad |z|=r<1$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman 1983).

Teorem 3.1.10. (Bükülme Teoremi) Her bir $f \in S$ ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq \left| f^{'}(z) \right| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman,1983).

Teorem 3.1.11. (Büyüme Teoremi) Her bir $f \in S$ ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq \left| f(z) \right| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman,1983).

Teorem 3.1.12. S sınıfındaki her bir f fonksiyonu için

$$\frac{1-r}{(1+r)} \leq \left| \frac{zf^{'}(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{(1-r)} \quad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır (Duren,1983).

3.2. SUBORDİNASYON İLKESİ

Subordinasyon kavramı, ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu kavram ilk olarakLindelöf (1909) tarafından kullanılmıştır. Ancak Littlewood (1925) ve Rogosinski (1943) tarafından bu kavram tanıtılmış ve temel özellikleri ortaya çıkarılmıştır.

Tanım 3.2.1. (Schwarz Fonksiyonu) U birim diski içinde analitik ve

$$w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

şeklinde ifade edilen $w(z)$ fonksiyonu $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona schwarz fonksiyonu denir. Schwarz fonksiyonlarının sınıfı Ω ile gösterilir.

Tanım 3.2.2. (Subordinasyon Prensibi) f ve g fonksiyonları U birim diskinde analitik fonksiyonlar olsun. U birim diski $f(z) = g(w(z))$ olacak şekilde $w(z) \in \Omega$

schwarz fonksiyonu varsa f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir denir ve bu durum $f \prec g$ olarak gösterilir.

f subordinasyon fonksiyonunun ünivalent olmasına gerek yoktur. Özellikle, $g(z)$ fonksiyonu U birim diskinde ünivalent ise

$f \prec g \Leftrightarrow f(0)=g(0)$ ve $f(\mathrm{U}) \subseteq g(\mathrm{U})$

olmasıdır(Duren,1983).

3.3. ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Bu kısımda ünivalent fonksiyonların önemli bazı alt sınıflarını vereceğiz

Tanım 3.3.1. (Pozitif Reel Kısımlı Fonksiyonlar Sınıfı)

$$P(z)=1+p_1z+p_2z^2+...+p_nz^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$$

formuna sahip , U birim diskinde analitik olan ve U birim diskindeki herbir z noktası için $\mathrm{Re}\{p(z)\}>0$ koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına pozitif reel kısım fonksiyonlar sınıfı denir ve bu sınıf P ile gösterilir. $P(z)$ fonksiyonunun ünivalent olmasına gerek yoktur. Örneğin; $P(z)=1+z^n$ fonksiyonu herhangi bir $n \geq 0$ tamsayısı için P sınıfına aittir. Ancak $n \geq 2$ alırsak bu fonksiyon ünivalent olmaz.

$$L_0(z)=\frac{1+z}{1-z}=1+2z+2z^2+...=1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^n$$

şeklinde ifade edilen Mobius fonksiyonu, S sınıfındaki Koebe fonksiyonunun rolü gibi P sınıfında önemli yer tutar. Bu fonksiyon, U birim diskinde analitik ve ünivalent olup U birim diskini, sağ yarı düzleme konform olarak dönüştürür. Sonuç olarak, herhangi bir $f \in \mathrm{P}$ fonksiyonu P fonksiyonuna subordine edilirse

$$f \in P \Rightarrow f \prec P$$

dir.

Teorem 3.3.2. (Carathedory Teoremi) $f \in \mathrm{P}$ ve

$$f(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \quad (z \in \mathrm{U})$$

olsun. Bu durumda $|p_n| \leq 2 \quad , n = 1, 2, 3, 4...$ dir(Goodman, 1983).

Tanım 3.3.3. (Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı) D , $\mathbb{C}$ de bir bölge olsun. D bölgesindeki sabit $z = 0$ noktasını D nin herhangi bir noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D bölgesinde kalıyorsa D bölgesine orijine göre yıldızıl veya kısaca yıldızıl bölge adı verilir.

Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu D birim diskinde ünivalent ve D birim diskini yıldızıl bir bölgeye resmediyorsa , $f(z)$ fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir.

Yıldızıl fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir (Duren 1983). Bu sınıf ilk olarak Alexander (1915) ve Nevanlinna (1921) tarafından oluşturulmuştur.

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

Koebe fonksiyonu yıldızıl bir fonksiyondur. Aşağıda verilen teorem yıldızıl fonksiyonların analitik tanımını verir.

Teorem 3.3.4. $f \in \mathrm{A}$ ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ olsun. Bu durumda $f \in \mathrm{S}^*$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

eşitsizliği sağlamasıdır.

Yıldızıl fonksiyonların kümesini kısaca

$$\mathrm{S}^* = \left\{ f \in \mathrm{A} : \quad \mathrm{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}; \;\; z \in \mathrm{U} \right\}$$

şeklinde belirtilebilir.

Robertson (1936) tarafından tanımlanan ve S^* sınıfının bir alt sınıfı olan α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfının analitik tanımı aşağıda verilmiştir.

$$S^* = \left\{ f \in A : \quad \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > \alpha ; \;\; z \in U, 0 \le \alpha < 1 \right\}.$$

Tanım 3.3.5. (Güçlü Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı) $f \in A$ olsun.

$$\left| \arg \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| < \alpha \frac{\pi}{2} \quad , \left(z \in U, \; 0 \le \alpha < 1 \right)$$

veya bu eşitsizliğe denk olan

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \alpha \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^{\alpha} \quad , \left(z \in U, \; 0 \le \alpha < 1 \right)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna, α -mertebedengüçlü yıldızıl (strongly starlike of order α)fonksiyonu denir. Güçlü yıldızıl fonksiyonların sınıfını $\tilde{S}(\alpha)$ ile tanımlarız. $\alpha = 1$ için $\tilde{S}(1) = S^*$ olur. $\tilde{S}(\alpha)$ sınıfı, Brannan ve Kirwan (1969), ve Stankiewicz (1966) tarafından tanıtılmış ve çalışılmıştır.

Tanım 3.3.6. (Konveks Fonksiyonlar Sınıfı) D , $\mathbb{C}$ de bir bölge olsun. D bölgesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa yani , $z_1, z_2 \in D$ ve $0 \le \lambda \le 1$ olmak üzere $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in D$ koşulunu sağlıyorsa D bölgesine konveks bölge denir. $f \in A$ fonksiyonu birim diskte ünivalent ve $f(D)$ konveks bir bölge ise f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir.

Konveks ünivalent fonksiyonların normalize edilmiş sınıfı, görüntüsü konveks olan $f \in S$ fonksiyonlarından oluşur. Konveks fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir.

$f \in A$ fonksiyonunun K sınıfında olması için gerek ve yeter koşul

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > 0 \;\; , \left(z \in U \right)$$

olmasıdır. $f(z)=\dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonu U birim diskini yarı düzleme dönüştüren ve K sınıfında önemli rol oynayan fonksiyondur. K nın bir altsınıfını oluşturan α mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfının analitik tanımı aşağıda verilmiştir.

$$\mathrm{K}(\alpha)=\left\{ f\in \mathrm{A}:\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf^{''}(z)}{f^{'}(z)}\right)>\alpha,\;\; z\in \mathrm{U}, 0\le \alpha <1\right\}.$$

Aşağıda verilen teoremde yıldızıl ve konveks fonksiyonlarının birbirleriyle olan ilişkisiniifade edilmiştir.

Teorem 3.3.7. (Alexander Teoremi) $f(z)\in \mathrm{A}$ ve $z\in \mathrm{U}$ verilsin. $f(z)\in \mathrm{K}$ olması için gerek yeter koşul $zf'(z)\in \mathrm{S}^{*}$ olmasıdır(Alexander,1915).

Ayrıca Strohhacker (1933)tarafından

“ $f\in \mathrm{K}$ ise $f\in \mathrm{S}^{*}\left(\frac{1}{2}\right)$ “

olduğu ispatlanmıştır. S nin yıldızıl ve konveks fonksiyonları kapsayan altsınıfları için

$$\mathrm{K}\subset \mathrm{S}^{*}\subset \mathrm{S}\subset \mathrm{A}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

3.4. SALAGEAN TÜREV OPERATÖRÜ

Bu kısımda daha sonraki çalışmalarımızda kullanacağımız Salagean türev operatörünün tanımını vereceğiz.

Tanım 3.4.1. (Salagean Türev Operatörü) U birim diskinde analitik ve

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$$

formundaki fonksiyonların sınıfı A olsun. A sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için G.S Salagean tarafından

$$D^0 f(z) = f(z)$$
$$D^1 f(z) = zf'(z)$$
$$\vdots$$
$$D^n f(z) = D(D^{n-1} f(z)) \qquad (n \in \mathbb{N} = 1,2,3...)$$

şeklinde bir operatör oluşturulmuştur (Salagean 1983).

Bazı basit hesaplamalar ile $\mathcal{A}$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$D^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k \ \left(n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\right)$$

olduğu tanımdan kolayca elde edilir.

3.5. Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Bu kısımda, bi-ünivalent fonksiyonların tanımı ve bu fonksiyonlara ait katsayı tahminleri ile ilgili bilgiler verilecektir.

Tanım 3.5.1. (Bi-Ünivalent Fonksiyonların Sınıfı)

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

formunda gösterilen $\mathcal{S}$ sınıfına ait her $f(z)$ fonksiyonu

$$f\left(f^{-1}(z)\right) = z \ \left(z \in \mathrm{U}\right)$$
$$f\left(f^{-1}(w)\right) = w \ \left(|w| < r_0(f); r_0(f) \geq \frac{1}{4}\right)$$

özellliklerini sağlayan bir f^{-1} ters fonksiyonuna sahiptir. Gerçekte, f^{-1} ters fonksiyonu

$$f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + \left(2a_2^2 - a_3\right) w^3 - \left(5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4\right) w^4 + ...$$

şeklinde elde edilir.

$f \in \mathrm{A}$ olmak üzere hem f hem de f^{-1} fonksiyonları U birim diskinde ünivalent ise $f(z)$ fonksiyonuna **bi-ünivalent fonksiyon(bi-ünivalent)**denir.

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde Taylor-Maclaurin seri açılımı ile verilen ve U birim diskinde bi-ünivalent olan fonksiyonların sınıfını Σ ile göstereceğiz. Σ sınıfı,ilk olarak 1967 yılında Lewin (1967) tarafından tanımlanmıştır. Σ sınıfına ait bazı fonksiyonlara örnek olarak

$$\frac{z}{1-z},\ -\log(1-z),\ \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

şeklinde verilebilir. Ancak meşhur Koebe fonksiyonu, Σ sınıfına ait değildir. Çünkü görüntü bölgesi U birim diskini içermez.

Ünivalent fonksiyonlarda olduğu gibi bi-ünivalent fonkasiyonların katsayıları ile ilgili özellikle $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için katsayı tahminleri yapılmıştır.

Lewin, Σ sınıfına ait fonksiyonları ikinci katsayısı için $|a_2| < 1.51$ eşitsizliğini göstermiştir. İlk zamanlar $f \in \Sigma$ fonksiyonlarına ait katsayı sınırının $|a_n| \le 1 \left(n \in \mathbb{N} / \{1\}\right)$ olduğu düşünülüyordu. Sonrasında, Brannan ve Clunie (1979) $|a_2| \le \sqrt{2}$ katsayı tahminini yapmıştır. Diğer taraftan Netanyahu (1969) $\max|a_2| = \frac{4}{3}$ olduğunu ispatlamıştır. 1981 yılında Styer ve Wright'in (1981) yapmış olduğu çalışmalarında $|a_2| > \frac{4}{3}$ eşitsizliğini sağlayan $f \in \Sigma$ fonksiyonların var olduğunu göstermişlerdir. Σ sınıfındaki fonksiyonlara ait $|a_2|$ katsayısı için yapılan en iyi tahmin, 1985 yılında Taha (1981) tarafından gösterilmiş olan $|a_2| \le 1.485$ eşitsizliğidir.İki-ünivalent fonksiyonlara ait

$$|a_n|, \left(n \in \mathbb{N} / \{1,2\}; \mathbb{N} = \{1,2,3...\}\right)$$

Taylor-Maclourin katsayıları için katsayı tahmini hala açık bir problem olarak durmaktadır.

3.6. Bi-Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Ünivalent fonksiyonlarda olduğu gibi iki-ünivalent fonksiyonların bazı önemli alt sınıfları bu kısımda ele alınacaktır. Son yıllarda bu alt fonksiyonlardan yola çıkarak Srivastava ve ark. (2010), Frasin ve Aouf (2011), Çağlar ve ark. (2013) gibi birçok araştırmacı yeni alt sınıflar oluşturmuşlardır.

Tanım 3.6.1. (α -Mertebeden Güçlü Bi-Yıldızıl Fonksiyonların Sınıfı)

S sınıfının α -mertebeden olan yıldızıl fonksiyonların $\mathrm{S}^*(\alpha)$ sınıfına benzer olarak Brannan ve Taha (1986) tarafından iki-ünivalent fonksiyonlar sınıfına bir altsınıfı olan α **- mertebeden güçlü bi-yıldızıl fonksiyonlar sınıfı** tanımlamıştır. Bu sınıf $\mathrm{S}_\Sigma^*[\alpha]$ olarak gösterilir. $f \in \mathrm{A}$ fonksiyonun, $\mathrm{S}_\Sigma^*[\alpha]$ sınıfında olması için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekmektedir:

$$f \in \Sigma \text{ ve } \left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (z \in \mathrm{U}; 0 < \alpha \leq 1)$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (w \in \mathrm{U}; 0 < \alpha \leq 1).$$

Burada g fonksiyonu, f^{-1} fonksiyonun U birim diskine genişlemesidir. $\mathrm{S}_\Sigma^*[\alpha]$ sınıfına ait $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonlarının $|a_2|$ ve $|a_3|$ için katsayı sınırları

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}} \quad \text{ve} \quad |a_3| \leq 2\alpha$$

olarak elde etmişlerdir(Brannan ve Taha, 1986).

Tanım 3.6.2. (β -Mertebeden Bİ-Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı)

$\mathrm{S}_\Sigma^*[\alpha]$ sınıfından faydalanarak bi-ünivalent fonksiyonların bir altsınıfı olan β **- mertebeden bi-yıldızıl fonksiyonların sınıfı** da tanımlanmıştır. Bu sınıf $\mathrm{S}_\Sigma^*[\beta]$ olarak gösterilir. $f \in \mathrm{A}$ fonksiyonun $\mathrm{S}_\Sigma^*[\beta]$ sınıfında olması için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekmektedir:

$$f \in \Sigma \text{ ve } \operatorname{Re}\left(\frac{z f'(z)}{f(z)}\right) > \beta \quad (z \in \mathrm{U}; 0 \le \beta < 1)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left(\frac{w g'(w)}{g(w)}\right) > \beta \quad (w \in \mathrm{U}; 0 \le \beta < 1).$$

$\mathrm{S}_{\Sigma}^{*}[\beta]$ sınıfına ait $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonlarının $|a_2|$ ve $|a_3|$ için katsayı sınırları

$$|a_2| \le \sqrt{2(1-\beta)} \qquad \text{ve} \qquad |a_3| \le 2(1-\beta)$$

olarak elde etmişlerdir(Brannan ve Taha,1986).

3.7. M-Katlı Simetrik Bi-Ünivalent Fonksiyonlar Sınıfı

S sınıfına ait bir f fonksiyonu için karekök döüşümü altında ünivalentliğini koruduğunu biliyoruz (Duren,1983). Diğer bir deyişle, $f \in \mathrm{S}$ ve $g = \sqrt{f(z^2)}$ olarak alınırsa bu durumda $g \in S$ dir. $f(z) = 0$ değerini sadece orjinde aldığından dolayı, karekök fonksiyonunun tek değerli olan branşını seçebiliriz. Bu durumda g fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} g = \sqrt{f(z^2)} &= z\left\{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + \ldots\right\}^{1/2} \\ &= z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + \ldots, \qquad |z| < 1. \end{aligned}$$

g fonksiyonu $g(z) = -g(z)$özelliğini sağladığından dolayı analitik tek bir fonksiyondur. Ayrıca g fonksiyonu ünivalenttir. (Duren, 1983). Böylece S sınıfına ait her tek fonksiyon,karekök dönüşümü kullanarak S sınıfına ait bir fonksiyon ileelde edilir. Daha genel olarak,

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1} z^{mk+1}, \quad m = 2,3,\ldots$$

formunda normalize edilmiş m-katlı simetrik fonksiyonların olşturduğu sınıfı $S^{(m)}$ olarak tanımlayalım. Bu sınıf S sınıfının bir alt sınıfıdır. Bu durumda herbir $f \in S$ fonksiyonunun $g(z) = \left\{f(z^m)\right\}^{1/m}$ formundaki **m.dereceden kök dönüşümü,** $S^{(m)}$ sınıfına aittir. Tersine her $g \in S^{(m)}$ fonksiyonu, m.dereceden kök döüşümü ile S

sınıfına ait bir fonksiyonlaelde edilir. Gerçekte, S sınıfındaki fonksiyonlar tek katlı simetrik fonksiyonlardır.

Srivastava ve ark.(2014) m-katlı simetrik ünivalent fonksiyon kavramına benzer olarak m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonu tanımladılar. Bu çalışmalarındaher bir $f \in \Sigma$ fonksiyonunun, her bir $m \in N$ tamsayısı için m-katlı simetrik bi-ünivalent bir fonksiyon ürettiğine dair çok önemli sonuçlar elde ettiler. Aynı çalışmada

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

formunda verilen normalize edilmiş ünivalent fonksiyonu için $f^{-1} = g$ seri açılımı aşağıdaki formda elde ettiler:

$$g(w) = f^{-1}(w) = w - a_{m+1} w^{m+1} + [(m+1)a^2{}_{m+1} - a_{2m+1}] w^{2m+1}$$
$$-[\frac{1}{2}(m+1)(3m+2)a_{m+1}^3 - (3m+2)a_{m+1}a_{2m+1} + a_{3m+1}] w^{3m+1} + \ldots$$

U birim diskinde m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonların sınıfını Σ_m ile göstereceğiz. $m = 1$ değeri için bi-ünivalent fonksiyonların sınıfına ait f^{-1} fonksiyonun elde edileceği açıktır. $\sum$ sınıfına ait bazı fonksiyonlara örnek olarak aşağıdaki fonksiyonlar örnek verilebilir.

$$\left(\frac{z^m}{1-z^m}\right)^{\frac{1}{m}}, \ \left[-\log\left(1-z^m\right)\right]^{\frac{1}{m}} \text{ve} \qquad \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z^m}{1-z^m}\right)\right]^{\frac{1}{m}}.$$

Yukarıdaki fonksiyonlara karşılık gelen ters fonksiyonlar sırasıyla;

$$\left(\frac{w^m}{1+w^m}\right)^{\frac{1}{m}}, \left(\frac{e^{2w^m}-1}{e^{2w^m}+1}\right)^{\frac{1}{m}} \text{ ve } \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z^m}{1-z^m}\right)\right]^{\frac{1}{m}}$$

şeklinde elde edilir. Son yıllarda bu alt fonksiyonlardan yola çıkarak Srivastava ve ark. (2010), Frasin ve Aouf (2011), Çağlar ve ark. (2013) gibi birçok araştırmacı yeni alt sınıflar oluşturmuşlardır. Bununla beraber m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyon sınıfları ile ilgili olarak Srivastava ve ark. (2014), Srivastava ve ark. (2016) ve Eker (2016) gibi bir çok araştırmacının çalışmaları bulunmaktadır.

4. BÖLÜM

Bu bölümde, birim açık diskte $f(z)$ ve $f^{-1}(z)$ fonksiyonları m-katlı simetrik analitik olan bi-ünivalent fonksiyonların yeni iki altsınıfını Salagean operatörünü kullanarak tanımlayacağız. Bu iki altsınıfa ait fonksiyonlar için $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ katsayıları için kesin olmayan(non-sharp) üst sınırlar elde edeceğiz.

4.1. $T_{\Sigma,m}^{t,n}(\alpha)$ Sınıfı

Son yıllarda Srivastava ve ark. (2014), Srivastava ve ark. (2014) ve Eker (2016) $f(z)$ ve $f^{-1}(z)$ fonksiyonları m-katlı simetrik analitik olan bi-ünivalent fonksiyonların Σ sınıfının altsınıflarına ait fonksiynlar için $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ katsayı tahminleri geliştirmişlerdir.

Biz de bu kısımda Salagean Türev Operatörü kullanarak, aşağıda tanımlanan Σ sınıfınn yeni bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıfa ait $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ katsayı sınırlarını oluşturacağız.

Tanım 4.1.1. $f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1}\, z^{mk+1}$ şeklindeki fonksiyonlarını ele alalım. $0<\alpha\leq 1$, $n,t\in \mathbb{N}_0$ ve $t\geq n$ $z,w\in U$ olmak üzere

$$f\in\Sigma\ ,\quad \left|\arg\left(\frac{D^t f(z)}{D^n f(z)}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \tag{4.1.1}$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{D^t g(w)}{D^n g(w)}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \tag{4.1.2}$$

koşullarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfı $T_{\Sigma,m}^{t,n}(\alpha)$ şeklinde tanımlayacağız.

Burada $g(w)$ fonksiyonu $f(z)$ fonksiyonunun tersi olup aşağıda verilmiştir:

$$g(w)=f^{-1}(w)=w-a_{m+1}w^{m+1}+[(m+1)a^2_{m+1}-a_{2m+1}]w^{2m+1}$$
$$-[\frac{1}{2}(m+1)(3m+2)a^3_{m+1}-(3m+2)a_{m+1}a_{2m+1}+a_{3m+1}]w^{3m+1}+\dots\ .$$

4.2. $T^{t,n}_{\Sigma,m}(\alpha)$ Sınıfının Bazı Katsayı Sınırları

Aşağıdaki teoremde, $T^{t,n}_{\Sigma,m}(\alpha)$ sınıfınına ait fonksiyonların $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ katsayılarına ilişkin üst sınırları vereceğiz.

Teorem 4.2.1. $0<\alpha\le 1,\ n,t\in\mathbb{N}_0$ için $t>n$ ve $z,w\in\mathrm{U}$ olmak üzere $T^{t,n}_{\Sigma,m}(\alpha)$ sınıfına ait $f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk+1}z^{mk+1}$ şeklindeki fonksiyonlarını ele alalım. Bu durumda

$$|a_{m+1}|\le\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha(m+1)\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]-2\alpha\left[(m+1)^{n+t}-(m+1)^{2n}\right]-(\alpha-1)\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]^2}} \tag{4.2.1}$$

ve

$$|a_{2m+1}|\le\frac{2\alpha}{(2m+1)^t-(2m+1)^n}+\frac{2(m+1)\alpha^2}{\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]^2} \tag{4.2.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (4.1.1) ve (4.1.2) ile verilen eşitsizlikler aşağıdaki verilen eşitliklere denk olacak şekilde yeniden yazılabilir:

$$\frac{D^t f(z)}{D^n f(z)}=\left[p(z)\right]^{\alpha} \tag{4.2.3}$$

$$\frac{D^t g(w)}{D^n g(w)}=\left[q(w)\right]^{\alpha} \tag{4.2.4}$$

Burada $p(z)$ ve $q(w)$ fonksiyonları P sınıfında olup aşağıda verilen formlara sahiptir:

$$p(z)=1+p_m z^m+p_{2m}z^{2m}+p_{3m}z^{3m}+\ldots \qquad (4.2.5)$$

ve

$$q(w)=1+q_m w^m+q_{2m}w^{2m}+q_{3m}w^{3m}+\ldots \qquad (4.2.6)$$

(4.2.3) ve (4.2.4) eşitliklerinde z^m ve z^{2m} katsayılar arasında birebir eşleme yapabilmek için bu eşitliklerin sol tarafındaki oranlarla ile ilgili hesaplamalar yapılmıştır.

$$D^t f(z) = z+\sum_{k=1}^{\infty}(mk+1)^t a_{mk+1}z^{mk+1} = z+(m+1)^t a_{m+1}z^{m+1}+(2m+1)^t a_{2m+1}z^{2m+1}+\ldots$$

$$D^n g(w)=w+\sum_{k=1}^{\infty}(mk+1)^n b_{mk+1}w^{mk+1}=z+(m+1)^n b_{m+1}z^{m+1}+(2m+1)b_{2m+1}z^{2m+1}+\ldots$$

Bu eşitlikler için gerekli oranlamalar yapılırsa

$$\frac{D^t f(z)}{D^n f(z)}=1+\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]a_{m+1}z^m+\left\{\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]a_{2m+1}-\left[(m+1)^{t+n}-(m+1)^{2n}\right]a_{m+1}^2\right\}z^{2m}+\ldots$$

ve

$$b_{m+1}=-a_{m+1},b_{2m+1}=(m+1)a_{m+1}^2-a_{2m+1}$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\frac{D^t g(w)}{D^t g(w)}=1-\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]a_{m+1}w^m+\left\{\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]\left[(m+1)a_{m+1}^2-a_{2m+1}\right]-\left[(m+1)^{t+n}-(m+1)^{2n}\right]a_{m+1}^2\right\}w^{2m}+\ldots$$

elde edilir.Şimdi, yukarıda yapılan hesaplamalar sonrasında elde edilen (4.2.3) ve (4.2.4) eşitliklerindeki z^m ve z^{2m} değişkenlerine ait katsayılar arasında birebir eşleme yapılırsa

$$\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]a_{m+1}=\alpha p_m \qquad (4.2.7)$$

$$\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]a_{2m+1}-\left[(m+1)^{t+n}-(m+1)^{2n}\right]a_{m+1}^2=\alpha p_{2m}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}p_m^2 \qquad (4.2.8)$$

$$-\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]a_{m+1}=\alpha q_m \tag{4.2.9}$$

ve

$$\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]\left[(m+1)a_{m+1}^2-a_{2m+1}\right]-\left[(m+1)^{t+n}-(m+1)^{2n}\right]a_{m+1}^2=\alpha q_{2m}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}q_m^2 \tag{4.2.10}$$

bağıntıları elde edilir. (4.2.7) ve (4.2.10) bağıntılarından

$$p_m=-q_m \tag{4.2.11}$$

ve

$$2\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]^2 a_{m+1}^2=\alpha^2\left(p_m^2+q_m^2\right) \tag{4.2.12}$$

eşitliklerini buluruz. Ayrıca (4.2.8), (4.2.10) ve (4.2.12) bağıntılarını kullanarak

$$\left\{\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right](m+1)-2\left[(m+1)^{t+n}-(m+1)^{2n}\right]\right\}a_{m+1}^2=\alpha\left(p_{2m}+q_{2m}\right)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(p_m^2+q_m^2\right)$$

$$=\alpha\left(p_{2m}+q_{2m}\right)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{2\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]^2 a_{m+1}^2}{\alpha^2}$$

eşitliğine sahip olunur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$a_{m+1}^2=\frac{\alpha^2\left(p_{2m}+q_{2m}\right)}{\alpha(m+1)\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]-2\alpha\left[(m+1)^{t+n}-(m+1)^{2n}\right]-(\alpha-1)\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]^2} \tag{4.2.13}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikteki p_{2m} ve q_{2m} katsayıları için 3 Bölümde ifade edilen Teorem 3.3.2 uygulanırsa

$$\left|a_{m+1}\right|\le\frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha(m+1)\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]-2\alpha\left[(m+1)^{t+n}-(m+1)^{2n}\right]+(\alpha-1)\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]^2}}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. $|a_{m+1}|$ katsayısı için elde edilen bu tahmin teoremde iddia edilen (4.2.1) eşitsizliği olup böylece istenilen katsayı eşitsizliği elde edilmiş olur.

Şimdi $|a_{2m+1}|$ katsayısı için bir sınır elde etmeye çalışalım. (4.2.8) eşitliğinden (4.2.10) eşitliğini çıkartırsak

$$\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]\left[2a_{2m+1}-(m+1)a_{m+1}^2\right]=\alpha\left(p_{2m}-q_{2m}\right)+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(p_m^2-q_m^2\right),$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitlikten $|a_{2m+1}|$ katsayısını yalnız bırakırsak

$$a_{2m+1}=\frac{m+1}{2}\frac{\alpha^2\left(p_m^2+q_m^2\right)}{2\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]^2}+\frac{\alpha\left(p_{2m}-q_{2m}\right)}{2\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]} \tag{4.2.14}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.2.14) eşitliğindeki p_m, p_{2m}, q_m ve q_{2m} katsayılar için Teorem 3.3.2 uygulanırsa

$$|a_{2m+1}|\le\frac{2\alpha^2(m+1)}{\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]^2}+\frac{2\alpha}{\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Böylece Teorem 4.2.1 deki iddialar ispatlanmış olur.

4.3. $\boldsymbol{T}_{\Sigma,\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}}(\beta)$ Sınıfı

Bu kısımda ,aşağıda tanımını vereceğimiz Σ sınıfının yeni bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıfa ait $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ katsayı sınırlarını oluşturacağız. Elde edilecek sonuçlar Σ sınıfının bir çok altsınıfına ait elde edilen bir çok sonucu genelleştirmiş olacaktır.

Tanım 4.3.1. $0\le\beta<1,\ n,t\in\mathbb{N}_0$ için $t>n$ ve $z,w\in\mathrm{U}$ olmak üzere $\boldsymbol{T}_{\Sigma,\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}}(\beta)$ sınıfına ait $f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk+1}z^{mk+1}$ şeklindeki fonksiyonlarını ele alalım.

$$f \in \Sigma \ , \ \mathrm{Re}\left(\frac{D^t f(z)}{D^n f(z)}\right) > \beta \tag{4.3.1}$$

ve

$$\mathrm{Re}\left(\frac{D^t g(w)}{D^n g(w)}\right) > \beta \tag{4.3.2}$$

koşullarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfı $\boldsymbol{T}_{\Sigma,\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}}(\beta)$ olarak tanımlayacağız. Burada $g(w)$ fonksiyonu, $f(z)$ fonksiyonunun tersidir.

4.4. $\boldsymbol{T}_{\Sigma,\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}}(\beta)$ Sınıfının Bazı Katsayı Sınırları

Aşağıdaki teoremde, $\boldsymbol{T}_{\Sigma,\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}}(\beta)$ sınıfınına ait fonksiyonların $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ katsayılarına ilişkin üst sınırları vereceğiz.

Teorem 4.4.1. $0 \le \beta < 1,\ n,t \in \mathbb{N}_0$ için $t > n$ ve $z,w \in \mathbb{U}$ olmak üzere $\boldsymbol{T}_{\Sigma,\boldsymbol{m}}^{\boldsymbol{t},\boldsymbol{n}}(\beta)$ sınıfına ait $f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1} z^{mk+1}$ şeklindeki fonksiyonlarını ele alalım

Bu durumda

$$|a_{m+1}| \le 2 \cdot \sqrt{\frac{(1-\beta)}{\left[(2m+1)^t - (2m+1)^n\right](m+1) - 2.\left[(m+1)^{t+n} - (m+1)^{2n}\right]}} \tag{4.4.1}$$

ve

$$|a_{2m+1}| \le \frac{(1-\beta)^2 (m+1)}{\left[(m+1)^t - (m+1)^n\right]^2} + \frac{2(1-\beta)}{\left[(2m+1)^t - (2m+1)^n\right]} \tag{4.4.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen eşitsizlikler aşağıdaki verilen eşitliklere denk olacak şekilde yeniden yazılabilir:

$$\left(\frac{D^t f(z)}{D^n f(z)}\right) = \beta + (1-\beta)\, p(z) \tag{4.4.3}$$

ve

$$\left(\frac{D^t g(w)}{D^n g(w)}\right) = \beta + (1-\beta) q(w) \tag{4.4.4}$$

Burada $p(z)$ ve $q(w)$ fonksiyonları pozitif reel kısım fonksiyonların P sınıfında olup sırasıyla (4.2.5) ve (4.2.6) ile verilen formlara sahiptir. (4.4.3) ve (4.4.4) eşitliklerindeki z^m ve z^{2m} değişkenlerine ait katsayılar arasında birebir eşleme yapılırsa

$$\left[(m+1)^t - (m+1)^n\right] a_{m+1} = (1-\beta)\, p_m \tag{4.4.5}$$

$$\left[(2m+1)^t - (2m+1)^n\right] a_{2m+1} - \left[(m+1)^{t+n} - (m+1)^{2n}\right] a_{m+1}^2 = (1-\beta)\, p_{2m} \tag{4.4.6}$$

$$-\left[(m+1)^t - (m+1)^n\right] a_{m+1} = (1-\beta) q_m \tag{4.4.7}$$

ve

$$\left[(2m+1)^t - (2m+1)^n\right]\left[(m+1) a_{m+1}^2 - a_{2m+1}\right] - \left[(m+1)^{t+n} - (m+1)^{2n}\right] a_{m+1}^2 = (1-\beta) q_{2m} \tag{4.4.8}$$

bağıntıları elde edilir. (4.4.5) ve (4.4.7) bağıntılarından

$$p_m = -q_m \tag{4.4.9}$$

ve

$$2\left[(m+1)^t - (m+1)^n\right]^2 a_{m+1}^2 = (1-\beta)^2 \left(p_m^2 + q_m^2\right) \tag{4.4.10}$$

eşitliklerini buluruz. Ayrıca (4.4.6), (4.4.8) ve (4.4.10) bağıntılarını kullanarak

$$\left\{\left[(2m+1)^t - (2m+1)^n\right](m+1) - 2.\left[(m+1)^{t+n} - (m+1)^{2n}\right]\right\} a_{m+1}^2 = (1-\beta)\left(p_{2m} + q_{2m}\right)$$

eşitliğini buluruz. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$a_{m+1}^2 = \frac{(1-\beta)(p_{2m}+q_{2m})}{\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right](m+1)-2.\left[(m+1)^{t+n}-(m+1)^{2n}\right]}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikteki p_{2m} ve q_{2m} katsayıları için 3. Bölümde ifade edilen Teorem 3.3.2 uygulanırsa

$$|a_{m+1}| \leq 2\cdot\sqrt{\frac{(1-\beta)}{\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right](m+1)-2.\left[(m+1)^{t+n}-(m+1)^{2n}\right]}}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. $|a_{m+1}|$ katsayısı için elde edilen bu tahmin teoremde iddia edilen (4.4.1) eşitsizliği olup istenilen elde edilmiş olur.

Şimdi $|a_{2m+1}|$ katsayısı için bir sınır elde edelim.(4.4.6) eşitliğinden (4.4.8) eşitliğini çıkartırsak

$$\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]\left[2a_{2m+1}-(m+1)a_{m+1}^2\right]=(1-\beta)(p_{2m}-q_{2m})$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitlikten $|a_{2m+1}|$ katsayısını yalnız bırakırsak

$$a_{2m+1} = \frac{(1-\beta)^2(p_m^2+q_m^2)(m+1)}{4\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]^2} + \frac{(1-\beta)(p_{2m}-q_{2m})}{2\cdot\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]} \qquad (4.4.11)$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.4.11) eşitliğindeki p_m, p_{2m}, q_m ve q_{2m} katsayılar için Teorem 3.3.2 uygulanırsa

$$|a_{2m+1}| \leq \frac{2(m+1)(1-\beta)^2}{\left[(m+1)^t-(m+1)^n\right]^2} + \frac{2(1-\beta)}{\left[(2m+1)^t-(2m+1)^n\right]}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Böylece Teorem 4.4.1 in ispatı bitmiş olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda $0<\alpha\leq 1,\, n,t\in \mathbb{N}_0$ için $t>n$ ve $z,w\in \mathrm{U}$ olmak üzere $f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1}\, z^{mk+1}$ formundaki fonksiyonlar için

$$f\in\Sigma\ ,\quad \left|\arg\left\{\left(\frac{D^t f(z)}{D^t f(z)}\right)\right\}\right|<\frac{\alpha\pi}{2}$$

ve

$$\left|\arg\left\{\left(\frac{D^t g(w)}{D^t g(w)}\right)\right\}\right|<\frac{\alpha\pi}{2}$$

koşullarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu $\boldsymbol{T}_{\Sigma,m}^{t,n}(\alpha)$ sınıfı ve

$$f\in\Sigma\ ,\ \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{D^t f(z)}{D^t f(z)}\right)\right\}>\beta \quad (0\leq\beta<1,\ n,t\in\mathbb{N}_0 \text{ için } t>n \text{ ve } z,w\in\mathrm{U})$$

ve

$$\mathrm{Re}\left(\frac{D^t g(w)}{D^t g(w)}\right)>\beta \quad (0\leq\beta<1,\ n,t\in\mathbb{N}_0 \text{ için } t>n \text{ ve } z,w\in\mathrm{U})$$

koşullarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu $\boldsymbol{T}_{\Sigma,m}^{t,n}(\beta)$ sınıflarını tanımlayarak, bu sınıfa ait fonksiyonların temel özelliklerini inceledik. Elde ettiğimiz bulgulardaki parametreler için bazı özel seçimler yapılırsa, daha önce çalışılmış olan önemli sınıflar ve onlara ait sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.2.1 ile elde ettiğimiz sonuçlar bir çok çalışmanın genellemesi niteliğinde olup bu sonuçlardan bazıları aşağıda verilmiştir. Eğer Teorem 4.2.1 içinde $t=1,\, n=0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.1. $0<\alpha\le 1$ ve $z,w\in \mathrm{U}$ olmak üzere $\boldsymbol{f(z)}\in \boldsymbol{T}_{\Sigma,\boldsymbol{m}}^{1,0}(\alpha)$ sınıfına aitfonksiyonu $f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk+1}z^{mk+1}$ eşitliğiyle verilsin. Bu durumda $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ katsayıları için aşağıdaki eşitsizlikler bulunur:

$$|a_{m+1}|\le \frac{2\alpha}{m\sqrt{\alpha+1}}$$

ve

$$|a_{2m+1}|\le \frac{2\alpha^2(m+1)+\alpha}{m}$$

Sonuç 5.1 te elde edilen eşitsizlikler için $m=1$ alınırsa, Tanım 3.6.1 de verilmiş olan ve Brannan ve Taha (1986) tarafından tanımlanan $\mathrm{S}_{\Sigma}^{*}[\alpha]$ sınıfındaki fonksiyonların $|a_2|$ katsayısını genelleştirir. Eğer Teorem 4.2.1 içinde $t=1, n=0$ ve $m=1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir. Bununla beraber, Teorem 4.4.1 ile elde ettiğimiz sonuçlar bir çok çalışmanın genellemesi niteliğinde olup bu sonuçlardan iki tanesi aşağıda verilmiştir. Eğer Teorem 4.4.1 içinde $t=1, n=0$ alınırsa aşğıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.2. $0\le\beta<1$ ve $z,w\in \mathrm{U}$ olmak üzere $f(z)\in \boldsymbol{T}_{\Sigma,\boldsymbol{m}}^{1,0}(\beta)$ fonksiyonu $f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk+1}z^{mk+1}$ eşitliğiyle verilsin. Bu durumda $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ katsayıları için aşağıdaki eşitsizlikler bulunur:

$$|a_{m+1}|\le 2\sqrt{\frac{1-\beta}{m(m+1)}}$$

ve

$$|a_{2m+1}|\le \frac{(1-\beta)^2(m+1)}{m^2}+\frac{1-\beta}{m}$$

Sonuç 5.2 te $m=1$ alınırsa Tanım 3.6.2 de verilmiş olan ve Brannan ve Taha (1986) tarafından tanımlanan $\mathrm{S}_{\Sigma}^{*}[\beta]$ sınıfındaki fonksiyonların $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayılarını genelleştirir. Yukarıda elde edilen sonuçlardan yola çıkarak, bu çalışmada elde edilen sonuçlar daha önceki bir çok çalışmanın genellemesi niteliğindedir.

KAYNAKLAR

Alexander, J.W., 1915, Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, *Ann.of Math*., 17, 12-22.

Ali, R.M., Lee, S.K., Ravichandran V., Supramaniam S., 2012, Coefficient estimates for bi-univalent Ma-Minda starlike and convex functions, *Applied Mathematics Letters*, 25, 344-351.

Bıeberbach, L., 1916, Über die Koeffizienten derjenigen Potenz reihen, welcheeine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl., 940-955.

Branges L.de., 1985. A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Mathematica 154 (1), 137-152.

Brannan D.A. ve Clunie J.G., 1979, Aspects of Contemporary Complex Analysis, (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham, Academic Press), New York and London.

Brannan, D. A. and Kirwan, W. E., 1969, On some classes of bounded univalent functions, *J. London Math. Soc.*, Vol. 1, No. 2, 431-443.

Brannan, D.A. and Taha, T.S., 1986, On some classes of bi-univalent functions, 53-60, See also *Studia Univ. Babeş-Bolyai Math*. 31 (2) 70-77.

Çaglar, M., Orhan H and Yağmur, N., 2013, Coefficient bounds for new subclasses of bi-univalent functions, *Filomat*, 27(7), 1165-1171.

Duren, P.L., 1983, Univalent Functions, in: Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 259, *Springer-Verlag*, New York, Berlin, Heidelberg and Tokyo.

Frasin, B.A. and Aouf, M.K., 2011, New subclasses of bi-univalent functions, *Applied Mathematics Letters*, 24, 1569-1573.

Goodman, A.W., 1983, Univalent Functions, Vols.I and II, *Polygonal Publishing House*, Washington, New Jersey.

Koebe, P., 1907, Uber die Uniformisierung Beliebiger Analytischer Kurven, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl*., 191-210.

Lewin, M., 1967, On a coefficient problem for bi-univalent functions, *Proc. Amer .Math. Soc.*, 18, 63-68.

Lindelöf, E., 1909, Mémoire sur certaines inegualités dans la théorie des fonctionsonogènes etsur quelques propriétes nouvelles de ces fonctions dans la voisinage d'un point singulier essentiel, *Acta.Soc.Sci.Fenn*., 35, 7, 1–35.

Littlewood J.E., 1925, On inequalities in the theory of functions, *Proc. London Math.Soc.*, 23, 481-519.

Netanyahu, M.E., 1969, The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in |z |< 1, *Arch. Rational Mech. Anal.*, 32, 100-112.

Nevanlınna, R., 1920-1921, Über die Konforme Abbildung von Sterngebieten, *Översiktav Finska Vetenskaps*, Societetens Förhandlingar, No. 6, 63 1-21.

Robertson, M. S., 1936, On the theory of univalent functions, *Ann. Math.,Vol.*, 37, 374-408.

Rogosinski W., 1943. On the coefficients of subordinate functions, *Proc, London Math.*, Soc. 2, 48-82.

Salagean G.S., 1983, Subclasses of univalent functions, *Lecture Notes in Math.*, Springer, Berlin, 1013, 362372.

Srivastava, H.M., 2012, Some inequalities and other results associated with certain subclasses of univalent and bi-univalent analytic functions, in: Nonlinear Analysis: Stability; Approximation; and Inequal-ities (Panos M. Pardalos,Pando G. Georgiev and Hari M. Srivastava, Editors.), Springer Series on Optimization and Its Applications, Vol. 68, *Springer-Verlag*, Berlin, Heidelberg and New York, 607-630.

Srivastava, H.M., Mishra, A.K. and Gochhayat, P., 2010, Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions, *Appl. Math. Lett.*, 23, 1188-1192.

Srivastava, H,M., Sivasubramanian, S., Sivakumar, R., 2014, Initial coefficient bounds for a subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions. *Tbilisi Mathematical Journal*, 7, 1-10.

Srivastava, H. M., Gaboury, S., Ghanim, F., 2106, Initial coefficient estimates for some subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions, *Acta Mathematica Scientia*, 36B, 863-871.

Stankiewicz, J., 1966, “Quelques problems extrémaux les classes des fonctions α- angulairement étoisées”, *Ann. Univ. Marie Curie-Sfodowska,Sect. A*, Vol. 20, 59-75.

Strohhacker E., 1933, Beitrage Zur Theorie der Schlichten Functionen, *Math. Zeit.*, Vol. 37, pp 356-380.

Styer, D. and Wright, D. J., 1981, Results on bi-univalent functions, *Proc. Amer.Math. Soc.* 82, No. 2, 243-248.

Sumer Eker, S., 2016, Coefficient bounds for subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions, *Turk. J. Math.*, 40, 641-646.

Taha, T.S., 1981,Topics in Univalent Function Theory, Ph.D. Thesis, University of London.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	:	İdris TAYMUR
Uyruğu	:	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	:	BATMAN 10.10.1977
Telefon	:	05325182464
e-mail	:	taymuridris@hotmail.com

EĞİTİM

Derece			**Bitirme Yılı**
Lise	:	Batman Lisesi, MERKEZ, BATMAN	1996
Üniversite	:	Dicle Üniversitesi, DİYARBAKIR	2000
Yüksek Lisans	:	Batman Üniversitesi, BATMAN	2017
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurumu**	**Görevi**
2000	MEB	Matematik Öğretmeni
2003-2009	Sınav Dergisi Dershaneleri	Matematik Öğretmeni ve Yayın Yazarlığı
2009-2014	MEB	Matematik Öğretmeni
2014-2017	MEB	Okul Müdürü

UZMANLIK ALANI

Kompleks Analiz, Geometrik Fonksiyonlar Teorisi

YABANCI DİLLER

İngilizce , Arapça