YEREL SINIR SARTLI YEREL OLMAYAN PROBLEMLERIN 1 BOYUTTAN 2 VE 3 BOYUTA GENISLETILMESI

ÖRSAN KILIÇER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2015

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

ÖRSAN KILIÇER tarafından hazırlanan YEREL SINIR SARTLI YEREL OLMAYAN PROBLEMLERIN 1 BOYUTTAN 2 VE 3 BOYUTA GENISLETILMESI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Burak AKSOYLU
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Horst BEYER

Üye : Doç. Dr. Burak AKSOYLU

Üye : Doç. Dr. Fatih ÇELİKER

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Örsan Kılıçer

Üniversitesi	**:**	**TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü	**:**	**Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı	**:**	**Matematik**
Tez Danışmanı	**:**	**Doç. Dr. Burak AKSOYLU**
Tez Türü ve Tarihi	**:**	**Yüksek Lisans – Ağustos 2015**

Örsan Kılıçer

YEREL SINIR SARTLI YEREL OLMAYAN PROBLEMLERIN 1 BOYUTTAN 2 VE 3 BOYUTA GENISLETILMESI

ÖZET

Peridinamik (PD), sürekli ortamlar mekaniğinin yerel olmayan bir genişlemesi olmakla birlikte, yönetici operatörü olarak integral temelli konvolüsyonu ihtiva eder. $\mathbb{R}^n$'de, perdinamik teorinin yönetici operatörü, klasik (yerel) operatörün sınırlı bir fonksiyonudur [2]. 1D'de, Aksoylu ve diğerleri [1] peridinamik formulasyonunu, Hilbert bazlarını temel alan bir konvolüsyon operatörünü kullanarak sınırlı bir bölge için genelleştirdiler. Burada Hilbert bazları sonsuz bir toplam vermektedir. Böylelikle, yerel sınır koşulları, klasik operatörün sınır şartlarına uygun olarak bulunan Hilbert bazları yardımıyla, yerel olmayan teorilere uygulanabilmiş oldu.

Sonsuz toplamın integral gösterimi, uygun bir nümerik hesaplamaya izin verdiği için oldukça kullanışlıdır. Bu tezde, [1]'in sonuçları 2D ve 3D'ye genişletilmiş ve anti-periyodik ve periyodik sınır koşullarını sağlayan yönetici operatörlerin integral gösterimleri bulunmuştur.

Neumann ve Dirichlet sınır koşullarının integral gösterimi karmaşıktır. Bunun yerine, 1D'de, anti-periyodik ve periyodik sınır koşulları ve fonksiyonun çift ve tek parçaları kullanılarak Neumann ve Dirichlet sınır koşulları bulundu [1]. Burada, 'basit' (simple) denilen konvolüsyonlar kullanıldı. Bu tezde, bu yapılar 2D ve 3D'ye genişletildi. Ek olarak, yönetici fonksiyonların açık formları verildi.

Anahtar Kelimeler: Yerel olmayan teori, operatör teori, öz bazlar, konvolüsyon.

University	:	**TOBB University of Economics and Technology**
Institute	:	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	:	**Mathematics**
Supervisor	:	**Assoc. Prof. Burak AKSOYLU**
Degree Awarded and Date	:	**M.Sc. – AUGUST 2015**

Örsan Kılıçer

EXTENSION OF NONLOCAL PROBLEMS WITH LOCAL BOUNDARY CONDITIONS FROM 1 DIMENSION TO 2 AND 3 DIMENSIONS

ABSTRACT

Peridynamics (PD), a nonlocal extension of continuum mechanics, employs an integral based convolution as the governing operator. In $\mathbb{R}^n$, Beyer et al. [2] showed that the PD governing operator is a bounded function of the classical (local) operator. In 1D, Aksoylu et al. [1] generalized the PD formulation to a bounded domain using a convolution operator based on Hilbert bases, which gives rise to an infinite sum. This way, local Boundary Conditions (BCs) are incorporated to nonlocal theories through Hilbert bases of the classical operator with the chosen BC.

An integral representation of the infinite sum is very useful, as it allows for a convenient numerical implementation. We extend the results in [1] to 2D and 3D and provide integral representations of the governing operators employing antiperiodic and periodic BC.

Direct integral representations of the Neumann and Dirichlet BCs are involved. Instead, in 1D, a construction, called as simple convolution, was given [1] to obtain Neumann BC and Dirichlet BC, using antiperiodic and periodic BC. We also extend this construction to 2D and 3D. In addition, we provide explicit expressions of the corresponding regulating functions.

Keywords: Nonlocal theory, operator theory, eigenbasis, convolution.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamda özellikle danışman hocam Doç. Dr. Burak Aksoylu'ya yardımlarından ve de ilgisinden dolayı teşekkür ederim. Bu yeni ve geleceği olan alanla tanıştırdığı için de ayrıca müteşekkirim. Ayrıca, 112M891 nolu, 'Tabakalı Kompozit Yapıların Mukavemet ve Hasar Davranışını Önceden Tahmin Edebilecek Peridinamik Teoriyi Kullanan Bir Metod Geliştirilmesi' adlı Tübitak projesinde araştırmacı olarak bulunan Doç. Dr. Burak Aksoylu'ya yardımcı olarak çalışmama imkan veren proje yürütücüsü Doç Dr. Mehmet Ali Güler Hoca'ya da teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca hayatımda her zaman yanımda olan annem Gülay Kılıçer ve babam Zübeyir Kılıçer'e de emeklerinden dolayı saygılarımı ve de sevgilerimi sunarım. Son olarak, araştırma fırsatı verdiği için TOBB ETÜ'ye teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Bazı doğa olaylarını açıklayabilmek için yerel olmayan teorilerin gelişmesi gerekmektedir. Fizik alanında, yerel olan nokta parçacık kuramı olayları iyi açıklayamamaktadır. Tüm temel fizik teoremleri yereldir. Yerel teoriler ile kıyaslandığında yerel olmayan teorilerin formüle edilmesi daha çok alternatif içermektedir. Ancak, deney ile uyuşan yerel olmayan teori inşa etmek, yerel olana kıyasla daha zordur.

Klasik dalga eşitliği dalga olayının ancak bir kısmını açıklayabilmektedir. Self-adjoint operatörlerin fonsiyonel analizini kullanarak elde edilecek daha başarılı bir model inşa etmek daha mantıklıdır. Örnek olarak klasik operatör olan A yerine onun uygun bir fonksiyonu $f(A)$'nın kullanılması verilebilir. Bu yaklaşımın avantajlarından birisi, A'da sağlanan her bir simetri özelliği, $f(A)$ için de korunmaktadır. f fonksiyonuna *'düzenleyici (regulating) fonksiyon'* denmektedir [1]. Sonuç olarak, öteleme, döndürme ve bunun gibi klasik simetrilere göre değişmemesi gerekli özellikler korunmaktadır. Düzenleyici fonksiyonun seçimi araştırma konusudur.

Tezin yazarı yerel teorilerin çözemediği bazı olayları çözebilen yerel olmayan teoriler ile ilgilenmektedir. Kırık ilerlemesi [3] ve viskoelastik sönümlenme [4], peridinamik ve parçalı türevler ile modellenmiştir. Bu iki teorem de yerel olmayan teoridedir. Benzer operatörler yerel olmayan difüzyon [5, 6, 7], popülasyon modelleri [8, 9], görüntü işleme [10, 11], parçacık sistemleri [12] ve faz geçişi [13, 14] gibi uygulamalarda kullanılmaktadır.

Katılardaki stabil durumun kalkması ardından dalga oluşur. Dalga denklemi, deformasyonun evrimi konusundaki temel teoremdir. Klasik elastisite teorisi, malzemelerin kırık ve çatlaklarının büyümesine karşı dirençlerini karakterize eden ve modelleyen başarılı bir modeldir. Silling [3] kırık ve çatlakların dinamiğini tahmin edebilen, sürekli otamlar mekaniğinin yerel olmayan genişlemesi olan peridinamik teoriyi geliştirmiştir. Peridinamik yerel olmayan bir teori olduğundan, yerel sınır koşullarının peridinamik teoriye uygulanamayacak olması düşününlebilir. Ancak Aksoylu ve diğerleri [1] bu iddianın doğru olmadığını gösterdi.

Tez, şu şekilde ilerlemektedir ($1D$ üzerine her çalışma iki makaleden alıntıdır [1, 2]):

Bölüm (2.1)'de Hilbert uzayları üzerinde konvolüsyonlar tanımlandı. Bu konvolüsyonlar üzerine çalışıldı. *'Düzenleyici (regulating) fonksiyon'* tanımlandı. Hilbert uzaylarındaki konvolüsyonlar, Hilbert bazları yardımıyla yazıldı.

Bölüm (2.2)'de, Aksoylu ve diğerleri [1], hangi şartlar altında çözümlerin sınır şartlarını sağladığını buldular. Hilbert-Schmidt operatörleri sınır şartlarını sağlama konusunda önemli bir rol oynar. Hilbert-Schmidt koşulu sayesinde gerçeklenen düzgün yakınsaklık özelliğinden dolayı, limitlerin yer değişimi gündeme gelmektedir. Bundan dolayı, sınır koşulları sağlanmaktadır. Ayrıca, Hilbert-Schmidt özelliği girdinin *'düzgünleştirmesini (smoothing)'* sağlar. Bu durum, L^2'deki bir fonksiyonun, sınırda sürekli olan bir fonksiyona götüren bir fonksiyonun olması demektir. Türev içeren durumda da ek şartlar ileri sürerek, düzgün yakınsaklık sağlanır. Bu da limitlerin yer değiştirmesine götürür. Sonuç olarak, türev içeren sınır koşulları da sağlanmış olur.

Bölüm (2.3)'de, $1D$'de, periyodik, antiperiyodik, Neumann ve Dirichlet sınır koşulları gösterildi. periyodik ve antiperiyodik sınır şartlarında, soyut konvolüsyonların integral gösterimleri görece direkttir. Ancak, Neumann şartında, bu gösterim *'yarı-dalga'* simetrisine ihtiyaç duyar ki bu biraz karışıktır. Dirichlet şartında, gösterim integral formunun limitleri şeklindedir. Neumann ve Dirichlet sınır şartları için *'basit (simple)'* konvolüsyonlar verilmiştir. Bu konvolüsyonlar mikromodülüs fonksiyonunun periyodik ve antiperiyodik genişlemesi ile bağlantılıdır.

Bölüm (3)'de, $2D$ ve $3D$'de periyodik ve antiperiyodik sınır şartlarının soyut konvolüsyonları verilmiştir. $1D$'den $2D$ ve $3D$ duruma çıkmak için, $1D$'deki öz fonksiyonların tensör çarpımları kullanıldı. $2D$'ye çıkmak için, periyodik ve antiperiyodik sınır şartları için sırasıyla, çekirdek fonksiyonu C'nin x ve y yönünde periyodik ve antiperiyodik genişlemeleri yapıldı. $3D$'ye çıkmak için, periyodik ve antiperiyodik sınır şartları için sırasıyla, çekirdek fonksiyonu C'nin x, y ve z yönünde periyodik ve antiperiyodik genişlemeleri yapıldı.

Bölüm (4)'de, programlama için yardımcı olacak periyodik genişleme haritası, sırasıyla $2D$ ve $3D$ için verildi.

Bölüm (5)'de, Neumann ve Dirichlet sınır koşulları için, $2D$ ve $3D$'de, basit konvolüsyonlar verildi. Bu basit konvolüsyonlar, mikromodülüs fonksiyonun periyodik ve antiperiyodik genişlemelerine bağlıdır.

2. SINIRLI BÖLGELERDE YAPI

Sınırlı bölgelerde, Beyer ve diğerleri [2], peridinamiğin, klasik operatör A'nın yönetici fonksiyonu olan $f(A)$'yı kullandığını buldular:

$$\begin{aligned} f(A)u(x,t) : &= \int_{\mathbb{R}^n} C(y-x)(u(x,t)-u(y,t))dy \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} C(y)dy\right) u(x,t) - \int_{\mathbb{R}^n} C(x-y)u(y,t)dy. \end{aligned}$$

Banach cebiri yapısı korunarak, sınırlı bölgelerdeki konvolüsyonların genelleştirmesi, $L^1(\mathbb{R}^n)$'deki fonksiyonlara uygulanabilir mi? Aslında, böyle bir genelleştirmenin periyodik fonksiyonlara uygulanabildiği bilinmektedir.

2.1 Hilbert Uzaylarındaki Konvolüsyonlar

Sınırsız bölgelerde, Beyer ve diğerleri [2] yönetici fonksiyonun, klasik yönetici operatör olan Laplace operatörünün bir fonksiyonu olduğunu buldular. Bundan dolayı, sınırlı bölgelerde, yönetici fonksiyonu denk gelen klasik (lokal) operatörün fonksiyonu cinsinden düşünmek doğaldır. Bu durum, yerel olmayan durumlar için yerel sınır koşullarının uygulanmasını ortaya çıkarır.

Kolaylık için, klasik operatörü, uygun sınır koşullarını içeren Laplace operatörünün bir katı olarak seçtiler. Sınırlı bölgelerde, periyodik, anti-periyodik, Neumann ve Dirichlet gibi sınır koşullarında, Laplace operatörünün spektrumu pür olarak ayrıktır. Ek olarak, her bir sınır koşula denk gelen öz fonksiyonlar olan $e_k$lar'ı direkt olarak hesapladılar. Burada, kısaltma olarak `p, a, N, D` harfleri kullanıldı. Bunlara karşılık gelen sınır koşulları sırasıyla: Periyodik, anti-periyodik, Neumann ve Dirichlet'dir. Bu öz fonksiyonlar Hilbert bazı oluştururlar (tam ortonormal baz). Genişletilmiş konolüsyon operatörü şu şekilde tanımlanır:

$$C *_{\mathtt{BC}} u := \sum \langle e_k|C\rangle \langle e_k|u\rangle e_k. \tag{2.1}$$

Burada:

$$\langle e_k|u\rangle := \int_1^1 e_k^*(y)u(y)dy.$$

Çözülen yerel olmayan dalga denklemi şu şekildedir:

$$u_{tt}(x,t) := \varphi(A_{\mathtt{BC}})u(x,t) = 0, \quad x \in (-1,1), t \in [0,T].$$

Burada: $T \geq 0$, $\varphi : \sigma(A_{\mathtt{BC}}) \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyondur ve $A_{\mathtt{BC}}$, spektrumu $\sigma(A_{\mathtt{BC}})$ olan klasik (lokal) bir operatördür. Örneğin, (2.1)'deki konvolüsyon $c - C*_{\mathtt{BC}}$ yönetici fonksiyonunu ifade eder. Burada, c uygun bir sabittir. Düzenleyici fonksiyon $\varphi : \sigma(A_{\mathtt{BC}}) \to \mathbb{R}$ şu şekilde ifade edilir:

$$\varphi(A_{\mathtt{BC}}) := c - C *_{\mathtt{BC}} .$$

u'nun Hilbert bazı cinsinden gösterimi şu şekildedir:

$$u = \sum \langle e_k|u\rangle e_k.$$

Böylelikle şu sonuca ulaşılır:

$$(c - C*_{\mathtt{BC}})u = \sum [c - \langle e_k|C\rangle] \langle e_k|u\rangle e_k = \sum \varphi(\lambda_k) \langle e_k|u\rangle e_k.$$

Burada, (λ_k, e_k) klasik operatörünün öz çiftlerini gösterir.

2.2 Operatörlerin ve Sınır Koşullarının Düzgünleştirici Fonksiyonları

Motivasyon olarak, $[-1,1]$ aralığında tanımlı $u = \chi_{[-1/2,1/2]} + 1$'nun Dirichlet öz fonksiyon genişlemesi örnek verilebilir.

$$u = \sum_{1}^{\infty} \langle e_k^{\mathtt{D}} | u \rangle \, e_k^{\mathtt{D}}.$$

$$\sum_{1}^{N} \langle e_k^{\mathtt{D}} | u \rangle \, e_k^{\mathtt{D}}$$

fonksiyonu I üzerinde sonsuz kere diferansiyellenebilmesine rağmen ve de Dirichlet sınır koşullarını sağlamasına rağmen, u ne süreklidir ne de sınır koşullarını sağlar. Bu durum şu sorunun sorulmasına sebep olur: Hangi durumlarda çözüm sınır koşulları sağlanır?

2.2.1 Türev İçermeyen Sınır Koşullarının Sağlanması

Aksoylu ve diğerlerinin [1] makalelerinde, bu sorunun cevabı verildi. Bu durumda, Hilbert-Schmidt özelliği düzgün yakınsaklık argümanını gündeme getirir. Bu özellikle, sınır koşulları için limitlerin yer değiştirmesi uygulanabilir.

Theorem 1 (Bir Operatörün Düzgünleştirici Fonksiyonları) *$c,\ K > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ olsun. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ boş olmayan, sınırlı ve açık bir küme olsun. A, $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ üzerinde yoğun tanımlı (densely-defined), lineer ve self-adjoint olan ve pür nokta spektrumuna sahip (pure point spectrum) bir operatör olsun. Pür nokta sprektrumu özelliği ile Hilbert bazı olan öz fonksiyonlar tanımlanabilir:*

$$(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}.$$

Özel olarak, tüm $k \in \mathbb{N}^*$lar için, $e_k$lara karşılık gelen öz değerlere λ_k denilsin. Ayrıca, $\widehat{\Omega} \supset \overline{\Omega}$ açık ve sınırlı olsun ve tüm $k \in \mathbb{N}^*$ler için, e_k, bazı $\widehat{e_k} \in C(\widehat{\Omega}, \mathbb{C})$ların kısıtlanışı olsun ve şu koşulu sağlasın:

$$||\widehat{e_k}||_\infty \leq K.$$

Son olarak, $f \in U^s_{\mathbb{C}}(\sigma(A), \mathbb{C})$, $u \in L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ ve $b : \mathbb{R} \to L^2_{\mathbb{C}}(\Omega)$ sürekli olsun. Bu durumda şu durum geçerlidir:

1. *$f(A)$ Hilbert-Schmidt'dir ancak ve ancak*
$$(|f(\lambda_k)|^2)_{k\in\mathbb{N}^*}$$
toplanabilirdir.

2. *$f(A)$ Hilbert-Schmidt ise, $f(A)$'nın $\overline{\Omega}$ üzerinde ve de Ω'nın tüm limit x noktaları için sürekli bir genişlemesi vardır.*
$$\lim_{y\to x}[f(A)u](y) = \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k)\, \langle e_k|u\rangle\, (\lim_{y\to x} e_k(y)).$$

2.2.2 Türev İçeren Sınır Koşullarının Sağlanması

Aksoylu ve diğerleri [1] pür nokta sprektruma sahip olan operatörlerin türev içeren sınır koşullarını incelediler. $f(A)$'nın öz değerleri üzerinde tanımlanan ek sönümleme şartları ile, düzgün yakınsaklık durumu elde edilmektedir. Bu düzgün yakınsalık durumu, limitlerin türevlerde de yer değiştirmesini sağlamaktadır.

Theorem 2 (Bir Operatörün Düzgünleştirici Fonksiyonları II) *Türev içermeyen teoremin kabullerine ek olarak, $\Omega = I$, $\widehat{\Omega} = \widehat{I}$ olsun. Ayrıca I ve $\widehat{I}$, $\mathbb{R}$'nin boş olmayan aralıkları olsun. Ek olarak, $f(A)$ Hilbert-Schmidt olsun. Ayrıca, tüm $k \in \mathbb{N}^*$ için e_k türevlenebilir olsun ve türevlerinin $\overline{\widehat{I}}$ üzerinde sürekli $\widehat{e}'_k$ fonksiyonları olsun. Son olarak,*
$$(|||e'_k||_{\infty} f(\lambda_k)|^2)_{k\in\mathbb{N}^*}$$
toplanabilir olsun.
Bu halde, $f(A)u \in C^1(\overline{I}, \mathbb{C})$ ve I'nın tüm x limit noktaları için
$$\begin{aligned} \lim_{y\to x}[f(A)u](y) &= \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k\, \langle e_k|u\rangle\, (\lim_{y\to x} e_k(y)) \\ \lim_{y\to x}[f(A)u]'(y) &= \sum_{k=1}^{\infty} f(\lambda_k\, \langle e_k|u\rangle\, (\lim_{y\to x} e'_k(y)) \end{aligned}$$
geçerlidir.

2.3 1D'deki Çeşitli Sınır Koşulları için Tanımlanan Konvolüsyonlar

Hilbert bazlarının seçimi genelleştirilmiş konvolüsyonu belirler. Bu konvolüsyona *'kanonikal' (canonical)* konvolüsyon denmiştir [1]. Dirichlet ve Neumann durumlarında, soyut konvolüsyonun integral forma bağı direkt değildir. Öbür taraftan, periyodik ve antiperiyodik sınır koşullarında, bu bağ direktir. Bu durumlarda, mikromodül fonksiyonunun periyodik ve antiperiyodik genişlemesi gereklidir.

Neumann ve Dirichlet sınır koşullarında, Aksoylu ve diğerleri [1] *'basit' (simple)* dedikleri ek bir konvolüsyon üzerine çalıştılar. Bu konvolüsyonlar, periyodik ve antiperiyodik sınır koşullarından esinlendi. Çift mikromodül fonksiyonu ile tanımlı çift ve tek girdi fonksiyonlarının kullanıldığı, periyodik ve antiperiyodik sınır koşullarının konvolüsyonlarının belirli kombiansyonları, Neumann ve Dirichlet sınır koşullarını dikte eder.

2.3.1 Periyodik Sınır Koşulları

$A_p : D(A_p) \to L^2_{\mathbb{C}}(I)$ operatörü şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} D(A_p) : \ &= \{u \in C^2(\bar{I}, \mathbb{C}) : \lim_{x\to -1} u(x) = \lim_{x \to 1} u(x), \\ &\lim_{x\to -1} u'(x) = \lim_{x\to -1} u'(x)\}. \end{aligned}$$

Ayrıca,

$$A_p u := -\frac{1}{\pi^2} u''.$$

A_p, özdeğerleri aşağıdaki gibi tanımlanan pür ayrık bir spektrum $\sigma(A_p)$'a sahiptir:

$$\sigma(A_p) = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}.$$

Her bir $k \in \mathbb{Z}$ için, k^2 öz değerine karşılık gelen normalize edilmiş öz fonksiyonlar şu şekilde tanımlanır:

$$e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi k x}.$$

Sonuç olarak, $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $L^2_{\mathbb{C}}(I)$'de bir Hilbert bazıdır. Ayrıca 0, basit bir öz değerdir.

Kanonikal Konvolüsyon ve İntegral Gösterimi

Bu konuda, $*_p$, $L^2_{\mathbb{C}}(I)$'de tanımlı soyut konvolüsyondur ve $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ bazına bağlıdır. Çift $C \in L^2(I)$ ve $c \in \mathbb{R}$ için şu eşitlik tanımlıdır:

$$(C *_p u)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \hat{C}_p(x-y)u(y)dy.$$

Burada, $\widehat{C}_p$, C'nin $\mathbb{R}$ üzerindeki periyodik fonksiyona genişlemesidir. Aşağıdaki bağlantılar yazılabilir:

$$\hat{C}(x) = \hat{C}(x+2), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ve

$$\hat{C}(x) = C(x), \quad x \in [-1,1].$$

2.3.2 Antiperiyodik Sınır Koşulları

$A_a : D(A_a) \to L^2_{\mathbb{C}}(I)$ operatörü şu şekilde tanımlıdır:

$$\begin{aligned} D(A_a) : \ &= \{u \in C^2(\bar{I}, \mathbb{C}) : \lim_{x\to-1} u(x) = -\lim_{x\to 1} u(x), \\ &\lim_{x\to-1} u'(x) = -\lim_{x\to-1} u'(x)\} \end{aligned}$$

ve

$$A_a u := -\frac{1}{\pi^2}u''.$$

A_a pür ayrık bir spektruma $\sigma(A_a)$ sahiptir. $\sigma(A_a)$ şu şekilde tanımlıdır:

$$\sigma(A_a) = \{(k+\frac{1}{2})^2 : k \in \mathbb{N}\}.$$

Her bir $k \in \mathbb{Z}$ için, $(k+\frac{1}{2})^2$ öz değerlerine karşılık gelen normalize edilmiş öz fonksiyonlar şu şekildedir:

$$e_k(x) := \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\pi(k+\frac{1}{2})^2 x}.$$

Sonuç olarak, $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, $L^2_{\mathbb{C}}(I)$'de tanımlı bir Hilbert bazıdır.

Kanonikal Konvolüsyon ve İntegral Gösterimi

Bu konuda, $*_a$, $L^2_{\mathbb{C}}(I)$'de tanımlı soyut konvolüsyondur ve $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ bazına bağlıdır. Çift $C \in L^2(I)$ ve $c \in \mathbb{R}$ için şu eşitlik tanımlıdır:

$$(C *_a u)(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \hat{C}_a(x-y)u(y)dy.$$

Burada, $\widehat{C}_a$, C'nin $\mathbb{R}$ üzerindeki antiperiyodik fonksiyona genişlemesidir. Aşağıdaki bağlantılar yazılabilir:

$$\hat{C}(x) = -\hat{C}(x+2), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ve

$$\hat{C}(x) = C(x), \quad x \in [-1,1].$$

2.3.3 Neumann Sınır Koşulları

$A_{\mathtt{N}} : D(A_{\mathtt{N}}) \to L^2_{\mathbb{C}}(I)$ operatörü şu şekilde tanımlanır:

$$D(A_{\mathtt{N}}) := \{u \in C^2(\bar{I}, \mathbb{C}) : \lim_{x\to -1} u'(x) = \lim_{x\to 1} u'(x) = 0\}$$

ve

$$A_{\mathtt{N}} u := -\frac{4}{\pi^2} u''.$$

$A_{\mathtt{N}}$, özdeğerleri aşağıdaki gibi tanımlanan pür ayrık bir spektrum $\sigma(A_{\mathtt{N}})$'a sahiptir (burada öz değerler basittir):

$$\sigma(A_{\mathtt{N}}) = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}.$$

Her bir $k \in \mathbb{N}$ için, k^2 öz değerine karşılık gelen normalize edilmiş öz fonksiyonlar şu şekilde tanımlanır:

$$e_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{if } k = 0 \\ \cos(\pi k(x+1)/2), & \text{if } k \neq 0. \end{cases}$$

Sonuç olarak, $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $L^2_{\mathbb{C}}(I)$'de bir Hilbert bazıdır.

2.3.3.1 Basit Konvolüsyon ve İntegral Gösterimi

$C \in L^2(I)$ çift, $u \in L^2_{\mathbb{C}}(I)$ çift, $x \in I$ ve $k \in \mathbb{N}^*$ olsun. Bu durumda şu eşitlik geçerlidir:

$$C *_p u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle e^p_k | C\rangle_2 \, \langle e^p_k | u\rangle_2 \, e^p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_1(k^2) \, \langle e_k | u\rangle_2 \, e_k.$$

Burada, $\varphi_1 \in B(\sigma(A_{\mathtt{N}}), \mathbb{C})$ şu şekilde tanımlıdır:

$$\varphi_1(k^2) := \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N} \text{ tek ise} \\ \langle e^p_{k/2} | C\rangle_2, & k \in \mathbb{N} \text{ çift ise} \end{cases}$$

ve

$$C *_p P_{\text{çift}} = \varphi_1(A_{\mathtt{N}}).$$

Burada, ortogonal projeksiyon $P_{\text{çift}} : L^2_{\mathbb{C}}(I) \to L^2_{\mathbb{C}}(I)$, her $h \in L^2_{\mathbb{C}}(I)$ için, şu şekilde tanımlıdır:

$$P_{\text{çift}} h := \frac{1}{2}(h + h \circ (-id_I)).$$

Ek olarak, çift $C \in L^2(I)$, tek $u \in L^2_{\mathbb{C}}(I)$, $x \in I$ ve $k \in \mathbb{N}$ durumları için şu eşitlik geçerlidir:

$$C *_a u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle e^a_k | C\rangle_2 \, \langle e^a_k | u\rangle_2 \, e^a_k = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_2(k^2) \, \langle e_k | u\rangle_2 \, e_k.$$

Burada, $\varphi_2 \in B(\sigma(A_{\mathtt{N}}), \mathbb{C})$ şu şekilde tanımlıdır:

$$\varphi_2(k^2) := \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N}^* \text{ çift ise} \\ \langle e^a_{(k-1)/2} | C\rangle_2, & k \in \mathbb{N}^* \text{ tek ise} \end{cases}$$

and

$$C *_a P_{tek} = \varphi_2(A_{\mathtt{N}}).$$

Ortogonal projeksiyon $P_{\text{tek}} : L^2_{\mathbb{C}}(I) \to L^2_{\mathbb{C}}(I)$, tüm $h \in L^2_{\mathbb{C}}(I)$ için, tanımı şöyledir:

$$P_{\text{çift}} h := \frac{1}{2}(h - h \circ (-id_I)),$$

2.3.3.2 Kanonikal Konvolüsyon ve İntegral Gösterimi

Mikromodül fonksiyonu, C, şu şekilde yazılabilir:

$$C = C_1 + C_2.$$

Burada:

$$C_1(x) := \frac{1}{2}[C(|x|) + C(1 - |x|)], \quad C_2(x) := \frac{1}{2}[C(|x|) - C(1 - |x|)].$$

C_1 ve $C_2 \in L^2_{\mathbb{C}}(I)$ çifttir. 'Yarı-dalga' özelliği denilen özelliğe sahiptir. Yani, tüm $x \in [0, 1/2]$ için:

$$\begin{aligned} C_1(1-x) &= \frac{1}{2}[C(|1-x|) + C(1-|1-x|)] = \frac{1}{2}[C(1-x) + C(x)] = C_1(x), \\ C_2(1-x) &= \frac{1}{2}[C(|1-x|) - C(1-|1-x|)] = \frac{1}{2}[C(1-x) - C(x)] = -C_2(x). \end{aligned}$$

Sonuç şudur:

$$\begin{aligned} C *_{\mathtt{N}} u(x) &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle e_k|C\rangle_2 \langle e_k|u\rangle_2 \, e_k(x) \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} C_1(x-y)u(y)dy + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} C_1(-x-y)u(y)dy \\ &- \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} C_2(x-y)u(y)dy - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} C_2(-x-y)u(y)dy + k_{N,C} \langle e_0|u\rangle_2 . \end{aligned}$$

Burada:

$$k_{N,C} := -\frac{\sqrt{2}-1}{2}\int_{-1}^{1} C_1^*(y)dy + \frac{\sqrt{2}+1}{2}\int_{-1}^{1} C_2^*(y)dy.$$

2.3.4 Dirichlet Sınır Koşulları

$A_{\mathtt{D}} : D(A_{\mathtt{D}}) \to L^2_{\mathbb{C}}(I)$ operatörü şu şekilde tanımlanır:

$$D(A_{\mathtt{D}}) := \{u \in C^2(\bar{I}, \mathbb{C}) : \lim_{x\to-1} u(x) = \lim_{x\to 1} u(x) = 0\}$$

ve

$$A_{\mathtt{D}} u := -\frac{4}{\pi^2} u''.$$

$A_{\mathtt{D}}$, özdeğerleri aşağıdaki gibi tanımlanan pür ayrık bir spektrum $\sigma(A_{\mathtt{D}})$'a sahiptir (öz değerler basittir):

$$\sigma(A_{\mathtt{D}}) = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}.$$

Her bir $k \in \mathbb{N}^*$ için, k^2 öz değerine karşılık gelen normalize edilmiş öz fonksiyonlar şu şekilde tanımlanır:

$$e_k(x) = \sin(\frac{k\pi}{2}(x+1)).$$

2.3.4.1 Basit Konvolüsyon ve İntegral Gösterimi

$C \in L^2(I)$ çift, $u \in L^2_{\mathbb{C}}(I)$ tek, $x \in I$ ve $k \in \mathbb{N}^*$ olsun. Aşağıdaki bağlantı yazılabilir:

$$C *_p u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle e_k^p | C \rangle_2 \langle e_k^p | u \rangle_2 \, e_k^p = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_1(k^2) \langle e_k | u \rangle_2 \, e_k.$$

Burada, $\varphi_1 \in B(\sigma(A_{\mathtt{D}}), \mathbb{C})$ şu şekilde tanımlıdır:

$$\varphi_1(k^2) := \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N}^* \text{ tek ise} \\ \langle e_{k/2}^p | C \rangle_2, & k \in \mathbb{N}^* \text{ çift ise} \end{cases}$$

ve

$$C *_p P_{\text{tek}} = \varphi_1(A_{\mathtt{D}}).$$

Ayrıca, çift $C \in L^2(I)$, çift $u \in L^2_{\mathbb{C}}(I)$, $x \in I$ ve $k \in \mathbb{N}$ için şu eşitlik geçerlidir:

$$C *_a u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \langle e_k^a | C \rangle_2 \langle e_k^a | u \rangle_2 \, e_k^a = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_2(k^2) \langle e_k | u \rangle_2 \, e_k.$$

Burada, $\varphi_2 \in B(\sigma(A_{\mathtt{D}}), \mathbb{C})$ şu şekilde tanımlıdır:

$$\varphi_2(k^2) := \begin{cases} 0, & k \in \mathbb{N}^* \text{ is even} \\ \langle e_{(k-1)/2}^a | C \rangle_2, & k \in \mathbb{N}^* \text{ is odd} \end{cases}$$

ve

$$C *_a P_{\text{even}} = \varphi_2(A_{\mathtt{D}}).$$

2.3.4.2 Kanonikal Konvolüsyon ve İntegral Gösterimi

Çift C için şu eşitlik geçerlidir:

$$(C *_{\mathtt{D}} u)(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}^*} \langle e_k|C\rangle_2 \langle e_k|u\rangle_2 \, e_k(x)$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \widehat{PC}_{\mathtt{a}}(x-y)u(y)dy + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \widehat{PC}_{\mathtt{a}}(-x-y)u(y)dy$$
$$- \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (\widehat{C}_{\mathtt{a}} - \widehat{PC}_{\mathtt{a}})(x-y)u(y)dy + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (\widehat{C}_{\mathtt{a}} - \widehat{PC}_{\mathtt{a}})(-x-y)u(y)dy.$$

Burada, $\widehat{C}_{\mathtt{a}}$, C'nin $\mathbb{R}$ üzerindeki 2-antiperiyodik genişlemesini göstermektedir. Ayrıca, P aşağıda verilen uzayın kapanışının ortogonal projeksiyonudur:

$$Span(\{e_{4l+1} : l \in \mathbb{N}\}).$$

$\widehat{PC}_{\mathtt{a}}$, PC'nin $\mathbb{R}$ üzerindeki 2-antiperiyodik genişlemesidir.

2.3.4.3 Kanonikal Gösterimde Kullanılan Projeksiyonun Gösterimi

$u \in L^2_{\mathbb{C}}(I)$ için,

$$Pu = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin[\pi(n+\frac{1}{2})(id_I+1)]\sin[\pi(n+1)(id_I+1)]}{\sin[\pi(id_I+1)]} * \frac{1}{2}[u + u\circ(-id_I)]$$

yazılabilir. Burada, $*$, I üzerinde tanımlı integral konvolüsyonudur ve limit $L^2_{\mathbb{C}}(I)$ üzerinde uygulanır.

3. 2D VE 3D İÇİN SOYUT KONVOLÜSYONLAR

3.1 2D'de Periyodik Sınır Koşulları için Soyur Konvolüsyon

2D'de, $I \times I = [-1,1] \times [-1,1]$ üzerinde sınır değer koşullarını sağlayan yerel operatör şu şekilde tanımlanır:

$$Au \quad := \quad \frac{-1}{\pi^2}(u_{xx} + u_{yy}).$$

Periyodik sınır koşulları şu şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-1} u(x,y) &= \lim_{x\to1} u(x,y), & \lim_{y\to-1} u(x,y) &= \lim_{y\to1} u(x,y), \\ \lim_{x\to-1} u_x(x,y) &= \lim_{x\to1} u_x(x,y), & \lim_{y\to-1} u_y(x,y) &= \lim_{y\to1} u_y(x,y). \end{aligned}$$

Öz fonksiyonlar 1D'dekilerin tensör çarpımı ile bulunabilir:

$$e_{kl}(x,y) = e_k(x)e_l(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{ik\pi x}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{il\pi y} = \frac{1}{2}e^{i\pi(kx+ly)}. \tag{3.1}$$

Soyut konvolüsyon, (3.1)'da verilen A'nın Hilbert bazı kullanılarak bulunabilir:

$$C *_p u(x,y) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \langle e_{kl}|C\rangle \langle e_{kl}|u\rangle \, e_{kl}(x,y). \tag{3.2}$$

Terimler toplamda yazılır:

$$\begin{aligned}
C *_p u(x,y) &= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \langle e_{kl}|C\rangle \langle e_{kl}|u\rangle \, e_{kl}(x,y) \\
&= \langle \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} e_{kl}(x,y)^* \langle e_{kl}|C\rangle^* \, e_{kl}(s,t)|u(s,t)\rangle \\
&= \langle \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} e_{kl}(x,y)^* \langle C|e_{kl}\rangle \, e_{kl}(s,t)|u(s,t)\rangle \\
&= \langle \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \langle\{e_{kl}(x,y)^* \langle C|e_{kl}\rangle\} \, e_{kl}(s,t)|u(s,t)\rangle\rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \Big\{ \langle e_{kl}(\cdot,\cdot)|\hat{C}_{p,2}{}^*((x,y)-(\cdot,\cdot))\rangle \, e_{kl}(s,t) \Big\} \, |u(s,t)\rangle \\
&= \frac{1}{2} \langle \Big\{ \hat{C}_{p,2}{}^*((x,y)-(s,t)) \Big\} \, |u(s,t)\rangle \\
&= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \hat{C}_{p,2}((x,y)-(s,t)) u(s,t) ds dt
\end{aligned}$$

(3.2) eşitliğini integral gösterimine bağlamak için, toplamdaki her bir terim hesaplanır:

$$
\begin{aligned}
e_{kl}(x,y)^* \langle C|e_{kl}\rangle &= e_k(x)^* e_l(y)^* \langle C|e_{kl}\rangle \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_k(x)^* e_l(y)^* C^*(s,t) e_k(s) e_l(t) ds dt \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_k(-x) e_l(-y) C^*(s,t) e_k(s) e_l(t) ds dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} C^*(s,t) e_k(s-x) e_l(t-y) ds dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1+x}^{1+x} \hat{C_p}^*(s,t) e_k(s-x) ds\right\} e_l(t-y) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1} \hat{C_p}^*(s+x,t) e_k(s) ds\right\} e_l(t-y) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1} \hat{C_p}^*(s+x,t) e_l(t-y) dt\right\} e_k(s) ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1+y}^{1+y} \hat{C}_{p,2}{}^*(s+x,t) e_l(t-y) dt\right\} e_k(s) ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1} \hat{C}_{p,2}{}^*(s+x,t+y) e_l(t) dt\right\} e_k(s) ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \hat{C}_{p,2}{}^*(x-s,y-t) e_l(-t) e_k(-s) ds dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_l(t)^* e_k(s)^* \hat{C}_{p,2}{}^*(x-s,y-t) ds dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_{kl}(s,t)^* \hat{C}_{p,2}{}^*((x,y)-(s,t)) ds dt \\
&= \frac{1}{2}\langle e_{kl}(\cdot,\cdot)|\hat{C}_{p,2}{}^*((x,y)-(\cdot,\cdot))\rangle
\end{aligned}
$$

C'nin x yönündeki 2-periyodik genişlemesi şu şekilde tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
\hat{C}_p(x,y) &= \hat{C}_p(x+2,y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in [-1,1], \\
\hat{C}_p(x,y) &= C(x,y), \quad x \in [-1,1], \quad y \in [-1,1].
\end{aligned}
$$

$\hat{C}$'nin y yönündeki 2-periyodik genişlemesi şu şekilde tanımlanır:

$$
\begin{aligned}
\hat{C}_{p,2}(x,y) &= \hat{C}_p(x,y+2), \quad x \in [-1,1], \quad y \in \mathbb{R}, \\
\hat{C}_{p,2}(x,y) &= \hat{C}_p(x,y) = C(x,y), \quad x \in [-1,1], \quad y \in [-1,1]. \qquad (3.3)
\end{aligned}
$$

(3.3) eşitliğindeki $\hat{C}_{p,2}$ de, C'nin bir genişlemesidir.

3.2 3D'de Periyodik Sınır Koşulları için Soyut Konvolüsyon

3D'de, $I \times I = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ üzerinde periyodik sınır koşullarını sağlayan yerel operatör şu şekilde tanımlanır:

$$Au := \frac{-1}{\pi^2}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}).$$

Periyodik sınır koşulları şu şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -1} u(x,y,z) &= \lim_{x\to 1} u(x,y,z), \\
\lim_{y\to -1} u(x,y,z) &= \lim_{y\to 1} u(x,y,z), \\
\lim_{z\to -1} u(x,y,z) &= \lim_{z\to 1} u(x,y,z), \\
\lim_{x\to -1} u_x(x,y,z) &= \lim_{x\to 1} u_x(x,y,z), \\
\lim_{y\to -1} u_y(x,y,z) &= \lim_{y\to 1} u_y(x,y,z), \\
\lim_{z\to -1} u_z(x,y,z) &= \lim_{z\to 1} u_z(x,y,z).
\end{aligned}$$

Öz fonksiyonlar, 1D'dekilerin tensör çarpımları ile bulunur:

$$e_{klm}(x,y,z) = e_k(x)e_l(y)e_m(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{ik\pi x}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{il\pi y}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{im\pi z} = \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\pi(kx+ly+mz)}. \tag{3.4}$$

Soyut konvolüsyon, (3.4)'da verilen A'nın Hilbert bazı kullanılarak bulunabilir:

$$C *_p u(x,y,z) = \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} \langle e_{klm}|C\rangle \langle e_{klm}|u\rangle \, e_{klm}(x,y,z). \tag{3.5}$$

Terimler toplamda yazılır:

$$
\begin{aligned}
C *_p u(x,y,z) &= \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} \langle e_{klm}|C\rangle \langle e_{klm}|u\rangle\, e_{klm}(x,y,z) \\
&= \langle \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} e_{klm}(x,y,z)^* \langle e_{klm}|C\rangle^* \, e_{klm}(s,t,w)|u(s,t,w)\rangle \\
&= \langle \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} e_{klm}(x,y,z)^* \langle C|e_{klm}\rangle \, e_{klm}(s,t,w)|u(s,t,w)\rangle \\
&= \langle \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} \langle \{e_{klm}(x,y,z)^* \langle C|e_{klm}\rangle\} \, e_{klm}(s,t,w)|u(s,t,w)\rangle\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} \Big\{ \langle e_{klm}(\cdot,\cdot)|\hat{C}_{p,3}{}^*((x,y,z)-(\cdot,\cdot,\cdot))\rangle \, e_{klm}(s,t,w) \Big\} |u(s,t,w)\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle \Big\{ \hat{C}_{p,3}{}^*((x,y,z)-(s,t,w)) \Big\} |u(s,t,w)\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \hat{C}_{p,3}((x,y,z)-(s,t,w))u(s,t,w)\,dsdtdw
\end{aligned}
$$

(3.5) eşitliğini integral gösterimine bağlamak için, toplamdaki her bir terim hesaplanır:

$$
\begin{aligned}
&e_{klm}(x,y,z)^* \langle C|e_{klm}\rangle = e_k(x)^* e_l(y)^* e_m(z)^* \langle C|e_{klm}\rangle \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_k(x)^* e_l(y)^* e_m(z)^* C^*(s,t,w) e_k(s) e_l(t) e_m(w) dsdtdw \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_k(-x) e_l(-y) e_m(-z) C^*(s,t,w) e_k(s) e_l(t) e_m(w) dsdtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} C^*(s,t,w) e_k(s-x) e_l(t-y) e_m(w-z) dsdtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-1+x}^{1+x} \hat{C_p}^*(s,t,w) e_k(s-x) ds \right\} e_l(t-y) e_m(w-z) dtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-1}^{1} \hat{C_p}^*(s+x,t,w) e_k(s) ds \right\} e_l(t-y) e_m(w-z) dtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-1}^{1} \hat{C_p}^*(s+x,t,w) e_l(t-y) dt \right\} e_k(s) e_m(w-z) dsdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-1+y}^{1+y} \hat{C}_{p,2}{}^*(s+x,t,w) e_l(t-y) dt \right\} e_k(s) e_m(w-z) dsdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-1}^{1} \hat{C}_{p,2}{}^*(s+x,t+y,w) e_l(t) dt \right\} e_k(s) e_m(w-z) dsdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-1}^{1} \hat{C}_{p,2}{}^*(s+x,t+y,w) e_m(w-z) dw \right\} e_k(s) dsdt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-1+z}^{1+z} \hat{C}_{p,3}{}^*(s+x,t+y,w) e_m(w-z) dw \right\} e_k(s) e_l(t) dsdt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{ \int_{-1}^{1} \hat{C}_{p,3}{}^*(s+x,t+y,w+z) e_m(w) dw \right\} e_k(s) e_l(t) dsdt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \hat{C}_{p,3}{}^*(s+x,t+y,w+z) e_m(w) e_k(s) e_l(t) dsdtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \hat{C}_{p,3}{}^*(x-s,y-t,z-w) e_l(-t) e_k(-s) e_m(-w) dsdtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_l(t)^* e_k(s)^* e_m(w)^* \hat{C}_{p,3}{}^*(x-s,y-t,z-w) dsdtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_{klm}(s,t,w)^* \hat{C}_{p,3}{}^*((x,y,z)-(s,t,w)) dsdtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle e_{klm}(\cdot,\cdot,\cdot)|\hat{C}_{p,3}{}^*((x,y,z)-(\cdot,\cdot,\cdot))\rangle
\end{aligned}
$$

C'nin x yönündeki 2-periyodik genişlemesi şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \hat{C}_p(x,y,z) &= \hat{C}_p(x+2,y,z),\ x \in \mathbb{R},\ y \in [-1,1],\ \text{ve } z \in [-1,1] \\ \hat{C}_p(x,y,z) &= C(x,y,z),\ x \in [-1,1],\ y \in [-1,1],\ z \in [-1,1]. \end{aligned}$$

$\hat{C}$'nin y yönündeki 2-periyodik genişlemesi $x \in [-1,1]$, $y \in \mathbb{R}$ ve $z \in [-1,1]$ için şu şekilde tanımlanır:

$$\hat{C}_{p,2}(x,y,z) = \hat{C}_{p,2}(x,y+2,z).$$

Ayrıca, $x \in [-1,1]$, $y \in [-1,1]$ ve $z \in [-1,1]$ için şu eşitlik geçerlidir:

$$\hat{C}_{p,2}(x,y) = \hat{C}_p(x,y,z) = C(x,y,z). \tag{3.6}$$

(3.6) eşitliğindeki $\hat{C}_{p,2}$ de, C'nin bir genişlemesidir. $\hat{C}_{p,2}$'nin z yönündeki 2-periyodik genişlemesi $x \in [-1,1]$, $y \in [-1,1]$ ve $z \in \mathbb{R}$ için şu şekilde tanımlanır:

$$\hat{C}_{p,3}(x,y,z) = \hat{C}_{p,3}(x,y,z+2).$$

Ayrıca, $x \in [-1,1]$, $y \in [-1,1]$ ve $z \in [-1,1]$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\hat{C}_{p,3}(x,y,z) = \hat{C}_{p,2}(x,y,z) = \hat{C}_p(x,y,z) = C(x,y,z). \tag{3.7}$$

(3.7) eşitliğindeki $\hat{C}_{p,3}$ de, C'nin bir genişlemesidir.

3.3 2D'de Anti-Periyodik Sınır Koşulları için Soyut Konvolüsyon

2D'de, $I \times I = [-1,1] \times [-1,1]$ üzerinde anti-periyodik sınır değer koşullarını sağlayan yerel operatör şu şekilde tanımlanır:

$$Au \ := \ \frac{-1}{\pi^2}(u_{xx} + u_{yy}),$$

Anti-periyodik sınır koşulları şu şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1} u(x,y) &= -\lim_{x\to 1} u(x,y), & \lim_{y\to -1} u(x,y) &= -\lim_{y\to 1} u(x,y), \\ \lim_{x\to -1} u_x(x,y) &= -\lim_{x\to 1} u_x(x,y), & \lim_{y\to -1} u_y(x,y) &= -\lim_{y\to 1} u_y(x,y). \end{aligned}$$

Öz fonksiyonlar 1D'dekilerin tensör çarpımı ile bulunabilir:

$$e_{kl}(x,y) = e_k(x)e_l(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(k+\frac{1}{2})\pi x}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(l+\frac{1}{2})\pi y} = \frac{1}{2}e^{i\pi((k+\frac{1}{2})x+(l+\frac{1}{2})y)}. \tag{3.8}$$

Soyut konvolüsyon, (3.8)'da verilen A'nın Hilbert bazı kullanılarak bulunabilir:

$$C *_a u(x,y) = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \langle e_{kl}|C\rangle \langle e_{kl}|u\rangle \, e_{kl}(x,y). \tag{3.9}$$

Terimler toplamda yazılır:

$$\begin{aligned}
C *_a u(x,y) &= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \langle e_{kl}|C\rangle \langle e_{kl}|u\rangle \, e_{kl}(x,y) \\
&= \langle \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} e_{kl}(x,y)^* \langle e_{kl}|C\rangle^* \, e_{kl}(s,t)|u(s,t)\rangle \\
&= \langle \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} e_{kl}(x,y)^* \langle C|e_{kl}\rangle \, e_{kl}(s,t)|u(s,t)\rangle \\
&= \langle \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \langle \{e_{kl}(x,y)^* \langle C|e_{kl}\rangle\} \, e_{kl}(s,t)|u(s,t)\rangle\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \left\{\langle e_{kl}(\cdot,\cdot)|\hat{\hat{C}}_a^*((x,y)-(\cdot,\cdot))\rangle \, e_{kl}(s,t)\right\} |u(s,t)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle\left\{\hat{C}_{a,2}{}^*((x,y)-(s,t))\right\} |u(s,t)\rangle \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \hat{C}_{a,2}((x,y)-(s,t))u(s,t)dsdt
\end{aligned}$$

(3.9) eşitliğini integral gösterimine bağlamak için, toplamdaki her bir terim hesaplanır:

$$\begin{aligned}
e_{kl}(x,y)^* \langle C|e_{kl}\rangle &= e_k(x)^* e_l(y)^* \langle C|e_{kl}\rangle \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_k(x)^* e_l(y)^* C^*(s,t) e_k(s) e_l(t) dsdt \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_k(-x) e_l(-y) C^*(s,t) e_k(s) e_l(t) dsdt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} C^*(s,t) e_k(s-x) e_l(t-y) dsdt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1+x}^{1+x} \hat{C_a}^*(s,t) e_k(s-x) ds\right\} e_l(t-y) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1} \hat{C_a}^*(s+x,t) e_k(s) ds\right\} e_l(t-y) dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1} \hat{C_a}^*(s+x,t) e_l(t-y) dt\right\} e_k(s) ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1+y}^{1+y} \hat{C}_{a,2}{}^*(s+x,t) e_l(t-y) dt\right\} e_k(s) ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left\{\int_{-1}^{1} \hat{C}_{a,2}{}^*(s+x,t+y) e_l(t) dt\right\} e_k(s) ds \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \hat{C}_{a,2}{}^*(x-s,y-t) e_l(-t) e_k(-s) dsdt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_l(t)^* e_k(s)^* \hat{C}_{a,2}{}^*(x-s,y-t) dsdt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_{kl}(s,t)^* \hat{C}_{a,2}{}^*((x,y)-(s,t)) dsdt \\
&= \frac{1}{2}\langle e_{kl}(\cdot,\cdot)|\hat{C}_{a,2}{}^*((x,y)-(\cdot,\cdot))\rangle
\end{aligned}$$

C'nin x yönündeki 2 anti-periyodik genişlemesi şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_a(x,y) &= -\hat{C}_a(x+2,y), \quad x\in\mathbb{R}, \quad y\in[-1,1], \\
\hat{C}_a(x,y) &= C(x,y), \quad x\in[-1,1], \quad y\in[-1,1].
\end{aligned}$$

$\hat{C_a}$'nin y yönündeki 2 anti-periyodik genişlemesi şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{a,2}(x,y) &= -\hat{C}_{a,2}(x,y+2), \quad x\in[-1,1], \quad y\in\mathbb{R}, \\
\hat{C}_{a,2}(x,y) &= \hat{C}_a(x,y) = C(x,y) \quad x\in[-1,1], \quad y\in[-1,1]. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

(3.10) eşitliğindeki $\hat{C}_{a,2}$ de, C'nin bir genişlemesidir.

3.4 3D'de Anti-Periyodik Sınır Koşulları için Soyut Konvolüsyon

3D'de, $I \times I = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$ üzerinde anti-periyodik sınır koşullarını sağlayan yerel operatör şu şekilde tanımlanır:

$$Au \quad := \quad \frac{-1}{\pi^2}(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}),$$

Anti-periyodik sınır koşulları şu şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -1} u(x,y,z) = -\lim_{x\to 1} u(x,y,z), \quad \lim_{y\to -1} u(x,y,z) &= -\lim_{y\to 1} u(x,y,z), \\ \lim_{z\to -1} u(x,y,z) &= -\lim_{z\to 1} u(x,y,z), \\ \lim_{x\to -1} u_x(x,y,z) = -\lim_{x\to 1} u_x(x,y,z), \lim_{y\to -1} u_y(x,y,z) &= -\lim_{y\to 1} u_y(x,y,z), \\ \lim_{z\to -1} u_z(x,y,z) &= -\lim_{z\to 1} u_z(x,y,z). \end{aligned}$$

Öz fonksiyonlar, 1D'dekilerin tensör çarpımları ile bulunur:

$$\begin{aligned} e_{klm}(x,y,z) &= e_{k+\frac{1}{2}}(x)e_{l+\frac{1}{2}}(y)e_{m+\frac{1}{2}}(z) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(k+\frac{1}{2})\pi x}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(l+\frac{1}{2})\pi y}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i(m+\frac{1}{2})\pi z} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\pi((k+\frac{1}{2})x+(l+\frac{1}{2})y+(m+\frac{1}{2})z)}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Soyut konvolüsyon, (3.11)'da verilen A'nın Hilbert bazı kullanılarak bulunabilir:

$$C *_a u(x,y,z) = \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} \langle e_{klm}|C\rangle \, \langle e_{klm}|u\rangle \, e_{klm}(x,y,z). \tag{3.12}$$

Terimler toplamda yazılır:

$$
\begin{aligned}
C *_a u(x,y,z) &= \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} \langle e_{klm}|C\rangle \langle e_{klm}|u\rangle \, e_{klm}(x,y,z) \\
&= \langle \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} e_{klm}(x,y,z)^* \langle e_{klm}|C\rangle^* \, e_{klm}(s,t,w)|u(s,t,w)\rangle \\
&= \langle \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} e_{klm}(x,y,z)^* \langle C|e_{klm}\rangle \, e_{klm}(s,t,w)|u(s,t,w)\rangle \\
&= \langle \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} \langle \{e_{klm}(x,y,z)^* \langle C|e_{klm}\rangle\} \, e_{klm}(s,t,w)|u(s,t,w)\rangle\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} \left\{ \langle e_{klm}(\cdot,\cdot)|\hat{\hat{\hat{C}}}{}_a^*((x,y,z)-(\cdot,\cdot,\cdot))\rangle \, e_{klm}(s,t,w) \right\} |u(s,t,w)\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle \left\{ \hat{C}_{a,3}{}^*((x,y,z)-(s,t,w)) \right\} |u(s,t,w)\rangle \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \hat{C}_{a,3}((x,y,z)-(s,t,w))u(s,t,w)dsdtdw
\end{aligned}
$$

(3.12) eşitliğini integral gösterimine bağlamak için, toplamdaki her bir terim hesaplanır:

$$
\begin{aligned}
&e_{klm}(x,y,z)^* \langle C|e_{klm}\rangle = e_k(x)^* e_l(y)^* e_m(z)^* \langle C|e_{klm}\rangle \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_k(x)^* e_l(y)^* e_m(z)^* C^*(s,t,w) e_k(s) e_l(t) e_m(w) dsdtdw \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_k(-x) e_l(-y) e_m(-z) C^*(s,t,w) e_k(s) e_l(t) e_m(w) dsdtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} C^*(s,t,w) e_k(s-x) e_l(t-y) e_m(w-z) dsdtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{\int_{-1+x}^{1+x} \hat{C_a}^*(s,t,w) e_k(s-x) ds\right\} e_l(t-y) e_m(w-z) dtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{\int_{-1}^{1} \hat{C_a}^*(s+x,t,w) e_k(s) ds\right\} e_l(t-y) e_m(w-z) dtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{\int_{-1}^{1} \hat{C_a}^*(s+x,t,w) e_l(t-y) dt\right\} e_k(s) e_m(w-z) dsdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{\int_{-1+y}^{1+y} \hat{C}_{a,2}{}^*(s+x,t,w) e_l(t-y) dt\right\} e_k(s) e_m(w-z) dsdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{\int_{-1}^{1} \hat{C}_{a,2}{}^*(s+x,t+y,w) e_l(t) dt\right\} e_k(s) e_m(w-z) dsdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{\int_{-1}^{1} \hat{C}_{a,2}{}^*(s+x,t+y,w) e_m(w-z) dw\right\} e_k(s) dsdt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{\int_{-1+z}^{1+z} \hat{C}_{a,3}{}^*(s+x,t+y,w) e_m(w-z) dw\right\} e_k(s) e_l(t) dsdt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left\{\int_{-1}^{1} \hat{C}_{a,3}{}^*(s+x,t+y,w+z) e_m(w) dw\right\} e_k(s) e_l(t) dsdt \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \hat{C}_{a,3}{}^*(s+x,t+y,w+z) e_m(w) e_k(s) e_l(t) dsdtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \hat{C}_{a,3}{}^*(x-s,y-t,z-w) e_l(-t) e_k(-s) e_m(-w) dsdtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_l(t)^* e_k(s)^* e_m(w)^* \hat{C}_{a,3}{}^*(x-s,y-t,z-w) dsdtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e_{klm}(s,t,w)^* \hat{C}_{a,3}{}^*((x,y,z)-(s,t,w)) dsdtdw \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \langle e_{klm}(\cdot,\cdot,\cdot)|\hat{C}_{a,3}{}^*((x,y,z)-(\cdot,\cdot,\cdot))\rangle
\end{aligned}
$$

C'nin x yönündeki 2 anti-periyodik genişlemesi şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}\hat{C}_a(x,y,z) &= -\hat{C}_a(x+2,y,z),\ x\in\mathbb{R},\ y\in[-1,1],\ z\in[-1,1],\\ \hat{C}_a(x,y,z) &= C(x,y,z),\ x\in[-1,1],\ y\in[-1,1],\ z\in[-1,1].\end{aligned}$$

$\hat{C}$'nin y yönündeki 2 anti-periyodik genişlemesi $x \in [-1,1]$, $y \in \mathbb{R}$ ve $z \in [-1,1]$ için şu şekilde tanımlanır:

$$\hat{C}_{a,2}(x,y,z) = -\hat{C}_{a,2}(x,y+2,z).$$

Ayrıca, $x \in [-1,1]$, $y \in [-1,1]$ ve $z \in [-1,1]$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\hat{C}_{a,2}(x,y,z) = \hat{C}_a(x,y,z) = C(x,y,z). \tag{3.13}$$

(3.13) eşitliğindeki $\hat{C}_{a,2}$ de, C'nin bir genişlemesidir. $\hat{C}_{a,2}$'nin z yönündeki 2 anti-periyodik genişlemesi $x \in [-1,1]$, $y \in [-1,1]$ ve $z \in \mathbb{R}$ için şu şekilde tanımlanır:

$$\hat{C}_{a,3}(x,y,z) = -\hat{C}_{a,3}(x,y,z+2).$$

Ayrıca, $x \in [-1,1]$, $y \in [-1,1]$ ve $z \in [-1,1]$ için şu eşitlik gerçeklenir:

$$\hat{C}_{a,3}(x,y,z) = -\hat{C}_{a,2}(x,y,z) = \hat{C}_a(x,y,z) = C(x,y,z). \tag{3.14}$$

(3.14) eşitliğindeki $\hat{C}_{a,3}$ de, C'nin bir genişlemesidir.

4. PROGRAMLAMA İÇİN YARDIMCI OLACAK PERİYODİK GENİŞLEME HARİTASI

4.1 2D Periyodik Genişleme Haritası

$(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$ olduğundan dolayı, hesap yapılan bölge $(x, y) - (s, t) \in [-2, 2] \times [-2, 2] =: \hat{I} \times \hat{I}$ olacaktır. Burada, $\hat{I} \times \hat{I}$ üzerinde periyodik genişlemeyi yapabilmek için 9 adet alt bölge kullanılacaktır:

$$
\begin{array}{rrrl}
NE: & x \in [1,2], & y \in [1,2] & \hat{C}_p(x,y) := C(x-2, y-2) \\
N: & x \in [-1,1], & y \in [1,2] & \hat{C}_p(x,y) := C(x, y-2) \\
NW: & x \in [-2,-1], & y \in [1,2] & \hat{C}_p(x,y) := C(x+2, y-2) \\
E: & x \in [1,2], & y \in [-1,1] & \hat{C}_p(x,y) := C(x-2, y) \\
Ctr: & x \in [-1,1], & y \in [-1,1] & \hat{C}_p(x,y) := C(x, y) \\
W: & x \in [-2,-1], & y \in [-1,1] & \hat{C}_p(x,y) := C(x+2, y) \\
SE: & x \in [1,2], & y \in [-2,-1] & \hat{C}_p(x,y) := C(x-2, y+2) \\
S: & x \in [-1,1], & y \in [-2,-1] & \hat{C}_p(x,y) := C(x, y+2) \\
SW: & x \in [-2,-1], & y \in [-2,-1] & \hat{C}_p(x,y) := C(x+2, y+2).
\end{array}
$$

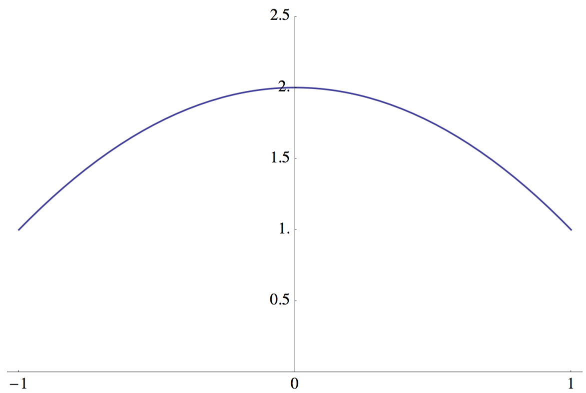
4.2 3D Periyodik Genişleme Haritası

$$
\begin{array}{rrrrl}
UNE: & x \in [1,2] & y \in [1,2] & z \in [1,2] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x-2,y-2,z-2) \\
MNE: & x \in [1,2] & y \in [1,2] & z \in [-1,1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x-2,y-2,z) \\
LNE: & x \in [1,2] & y \in [1,2] & z \in [-2,-1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x-2,y-2,z+2) \\
UE: & x \in [1,2] & y \in [-1,1] & z \in [1,2] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x-2,y,z-2) \\
ME: & x \in [1,2] & y \in [-1,1] & z \in [-1,1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x-2,y,z) \\
LE: & x \in [1,2] & y \in [-1,1] & z \in [-2,-1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x-2,y,z+2) \\
USE: & x \in [1,2] & y \in [-2,-1] & z \in [1,2] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x-2,y+2,z-2) \\
MSE: & x \in [1,2] & y \in [-2,-1] & z \in [-1,1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x-2,y+2,z) \\
LSE: & x \in [1,2] & y \in [-2,-1] & z \in [-2,-1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x-2,y+2,z+2) \\
UN: & x \in [-1,1] & y \in [1,2] & z \in [1,2] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x,y-2,z-2) \\
MN: & x \in [-1,1] & y \in [1,2] & z \in [-1,1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x,y-2,z) \\
LN: & x \in [-1,1] & y \in [1,2] & z \in [-2,-1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x,y-2,z+2) \\
UCtr: & x \in [-1,1] & y \in [-1,1] & z \in [1,2] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x,y,z-2) \\
Ctr: & x \in [-1,1] & y \in [-1,1] & z \in [-1,1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x,y,z) \\
LCtr: & x \in [-1,1] & y \in [-1,1] & z \in [-2,-1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x,y,z+2) \\
US: & x \in [-1,1] & y \in [-2,-1] & z \in [1,2] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x,y+2,z-2) \\
MS: & x \in [-1,1, & y \in [-2,-1] & z \in [-1,1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x,y+2,z) \\
LS: & x \in [-1,1] & y \in [-2,-1] & z \in [-2,-1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x,y+2,z+2) \\
UNW: & x \in [-2,-1] & y \in [1,2] & z \in [1,2] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x+2,y-2,z-2) \\
MNW: & x \in [-2,-1] & y \in [1,2] & z \in [-1,1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x+2,y-2,z) \\
LNW: & x \in [-2,-1] & y \in [1,2] & z \in [-2,-1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x+2,y-2,z+2) \\
UW: & x \in [-2,-1] & y \in [-1,1] & z \in [1,2] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x+2,y,z-2) \\
MW: & x \in [-2,-1] & y \in [-1,1] & z \in [-1,1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x+2,y,z) \\
LW: & x \in [-2,-1] & y \in [-1,1] & z \in [-2,-1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x+2,y,z+2) \\
USW: & x \in [-2,-1] & y \in [-2,-1] & z \in [1,2] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x+2,y+2,z-2) \\
MSW: & x \in [-2,-1] & y \in [-2,-1] & z \in [-1,1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x+2,y+2,z) \\
LSW: & x \in [-2,-1] & y \in [-2,-1] & z \in [-2,-1] & \hat{C}_p(x,y,z) = C(x+2,y+2,z+2)
\end{array}
$$

Burada, $\hat{I} \times \hat{I} \times \hat{I}$ üzerinde periyodik genişlemeyi yapabilmek için 27 adet alt bölge kullanılmıştır. $(x, y, z) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ olduğundan dolayı, hesap yapılan bölge $(x, y, z) - (s, t, w) \in [-2, 2] \times [-2, 2] \times [-2, 2] =: \hat{I} \times \hat{I} \times \hat{I}$ olacaktır.

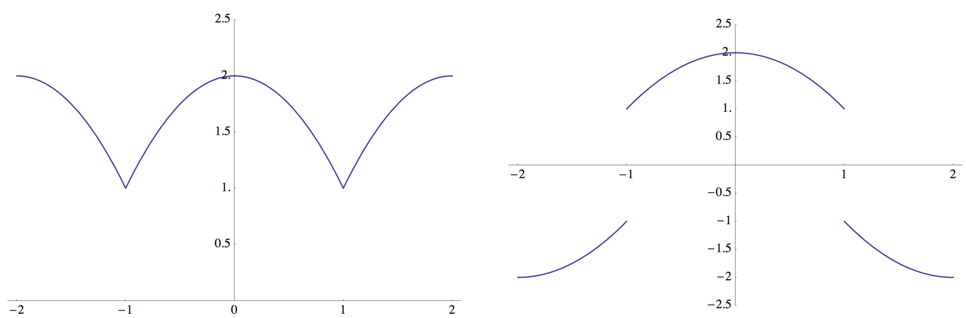
4.3 1D ve 2D için Periyodik ve Anti-Periyodik Genişleme Örneğinin Grafikleri

$[-1, 1]$'de tanımlı, örnek $y = 2 - x^2$ çekirdek fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir:



Şekil 4.1: Çekirdek Fonksiyon

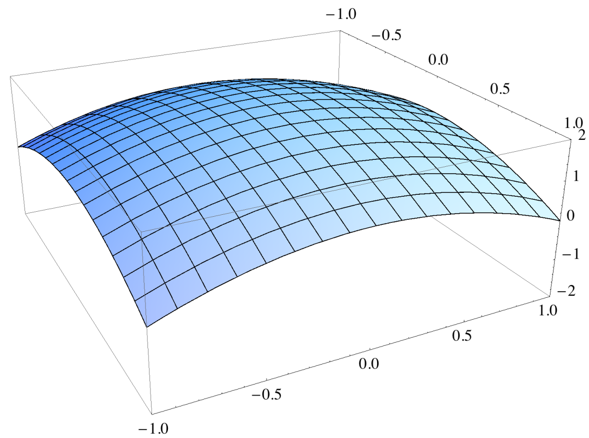
Çekirdek fonksiyonunun [-2,2] aralığına periyodik ve anti-periyodik genişlemesi aşağıdaki grafiklerdeki gibi olur:



(a) (b)

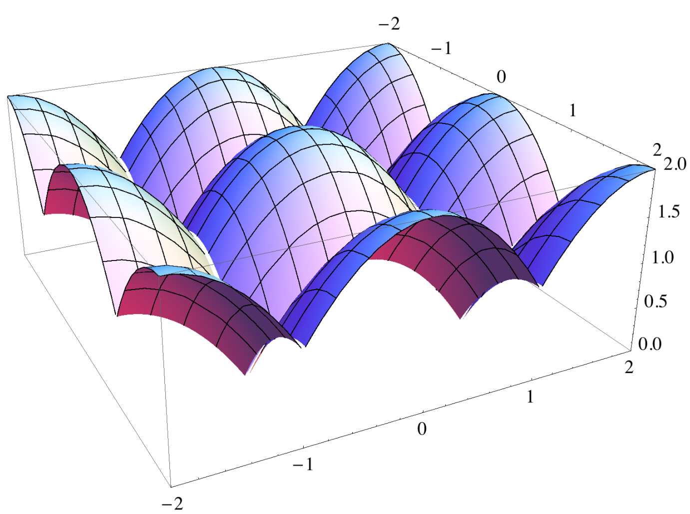
Şekil 4.2: (a) Periyodik ve (b) Anti-Periyodik Genişleme

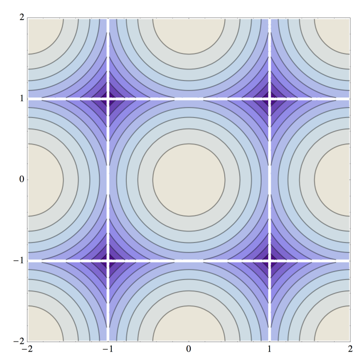
$[-1, 1] \times [-1, 1]$'de tanımlı, örnek $2 - x^2 - y^2$ çekirdek fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir:



Şekil 4.3: Çekirdek fonksiyon

Çekirdek fonksiyonunun periyodik genişlemesinin gösterimi ve eş yükselti eğrisi aşağıdaki gibidir (Burada periyodik genişleme $[-2, 2] \times [-2, 2]$ aralığında tanımlıdır):

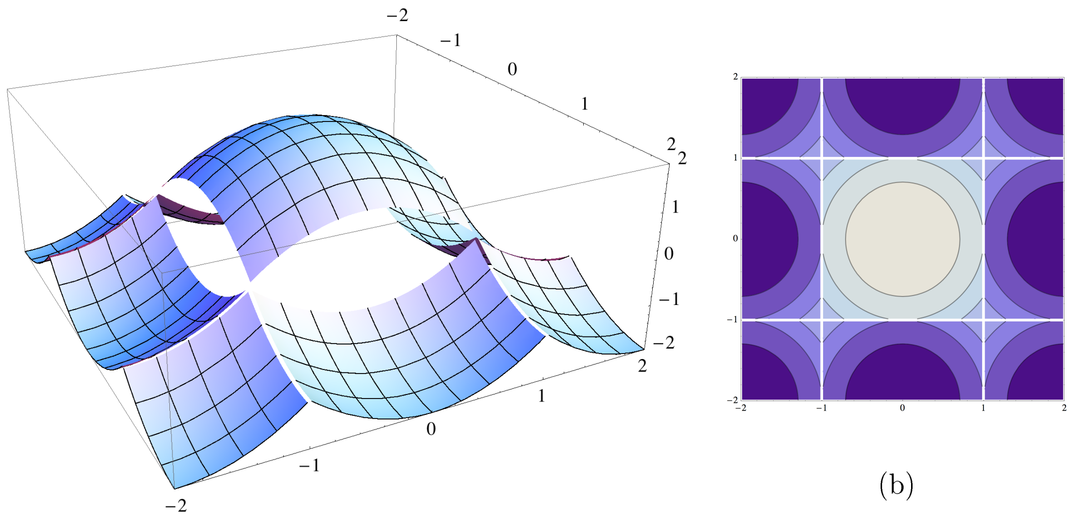




(b)

(a)

Şekil 4.4: (a) Periyodik Genişleme ve (b) Eş Yükselti Eğrisi



(a) (b)

Şekil 4.5: (a) Anti-Periyodik Genişleme ve (b) Eş Yükselti Eğrisi

Benzer şekilde, çekirdek fonksiyonunun anti-periyodik genişlemesinin gösterimi ve eş yükselti eğrisi yukarıdaki gibidir (Burada anti-periyodik genişleme $[-2,2]\times[-2,2]$ aralığında tanımlıdır):

5. 2D VE 3D İÇİN BASİT KONVOLÜSYON

5.1 2D'de Neumann Sınır Koşulları için Basit Konvolüsyon

Periyodik ve Neumann sınır koşulları için öz fonksiyonlar sırasıyla şunlardır:

$$e^p_{k,l} = \frac{1}{2}e^{i\pi(kx+ly)} = \frac{1}{2}(\cos(\pi(kx+ly)) + i\sin(\pi(kx+ly))$$

ve

$$e_{k,l}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{k ve l} = 0 \\ \cos(\pi k(x+1)/2)\cos(\pi l(y+1)/2), & \text{k veya l} \neq 0 \end{cases}.$$

Kullanılacak operatör:

$$A_{\mathbb{N}}u = \frac{-4}{\pi^2}\Delta u$$

dır ve bu operatöre karşılık gelen öz değerler $k^2 + l^2$'dir.

k veya $l \in \mathbb{N}^*$ için şu durum geçerlidir:

$$e_{2k,2l} = (-1)^{k+l}\cos(k\pi x)\cos(l\pi y). \tag{5.1}$$

Çift $C \in L^2(I \times I)$, çift $u \in L^2(I \times I)$, x, $y \in I$, k veya $l \in \mathbb{N}^*$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned} \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 &= \langle e^p_{-k,l}|C\rangle_2 = \langle e^p_{k,-l}|C\rangle_2 = \langle e^p_{-k,-l}|C\rangle_2 \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cos(\pi kx)\cos(\pi ly)C(x,y)dydx. \end{aligned}$$

Ayrıca, yukarıdaki eşitlik C'nin çift olması ve sinüs fonksiyonunun tek olmasından sağlanır. Şimdi,

$$\begin{aligned}\langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\cos(\pi kx)\cos(\pi ly))^* u(x,y)dydx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cos(\pi kx)\cos(\pi ly)u(x,y)dydx. \qquad (5.2)\end{aligned}$$

Yukarıda, cosinüs fonskiyonları reel olduklarından yukarıdaki eşitlik sağlanır. Ayrıca:

$$\langle e_{2k,2l}|u\rangle_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(-1)^{k+l}\cos(\pi kx)\cos(\pi ly)u(x,y)dydx \qquad (5.3)$$

eşitliği, (5.1)'den ve tanımdan sağlanır. (5.2) ve (5.3)'den aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 = \frac{(-1)^{k+l}}{2}\langle e_{2k,2l}|u\rangle_2 . \qquad (5.4)$$

k veya $l \neq 0$ için aşağıdaki eşitlik gerçeklenir:

$$\begin{aligned}\langle e^p_{k,l}|C\rangle_2\langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 e^p_{k,l} + \langle e^p_{-k,l}|C\rangle_2\langle e^p_{-k,l}|u\rangle_2 e^p_{-k,l} +\\ \langle e^p_{k,-l}|C\rangle_2\langle e^p_{k,-l}|u\rangle_2 e^p_{k,-l} + \langle e^p_{-k,-l}|C\rangle_2\langle e^p_{-k,-l}|u\rangle_2 e^p_{-k,-l} =\\ \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2\langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 (e^p_{k,l} + e^p_{-k,l} + e^p_{k,-l} + e^p_{-k,-l}).\end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned}e^p_{k,l} + e^p_{-k,l} + e^p_{k,-l} + e^p_{-k,-l} &= \frac{1}{2}(\cos(\pi(kx+ly)) + i\sin(\pi(kx+ly))) \\ &+ \frac{1}{2}(\cos(\pi(-kx+ly)) + i\sin(\pi(-kx+ly)) \\ &+ (\cos(\pi(kx-ly)) + i\sin(\pi(kx-ly)) \\ &+ \frac{1}{2}(\cos(\pi(-kx-ly)) + i\sin(\pi(-kx-ly))) \\ &= \frac{1}{2}(2\cos(\pi(kx+ly)) + 2\cos(\pi(kx-ly)) \\ &= 2\cos(\pi kx)\cos(\pi ly). \qquad (5.5)\end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitlik sinüs fonksiyonunun tek olmasından ve cosinüs fonksiyonun çift olmasından kaynaklanır. (5.1)'den şu sonuç elde edilir:

$$e^p_{k,l} + e^p_{-k,l} + e^p_{k,-l} + e^p_{-k,-l} = (-1)^{k+l}2e_{2k,2l}. \qquad (5.6)$$

(5.6), (5.4) ve (5.1) eşitliklerinden şu sonuç gerçeklenir:

$$\langle e^p_{k,l}|C\rangle_2\langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 (e^p_{k,l} + e^p_{-k,l} + e^p_{k,-l} + e^p_{-k,-l}) = \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2\langle e_{2k,2l}|u\rangle_2 e_{2k,2l}. \qquad (5.7)$$

Şimdi,

$$
\begin{aligned}
C *_p u = \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 e^p_{k,l} &= \sum_{k,l=1}^{\infty} \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 e^p_{k,l} \\
&+ \sum_{k,l=1}^{\infty} \langle e^p_{k,-l}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,-l}|u\rangle_2 e^p_{k,-l} + \sum_{k,l=1}^{\infty} \langle e^p_{-k,l}|C\rangle_2 \langle e^p_{-k,l}|u\rangle_2 e^p_{-k,l} \\
&+ \sum_{k,l=1}^{\infty} \langle e^p_{-k,-l}|C\rangle_2 \langle e^p_{-k,-l}|u\rangle_2 e^p_{-k,-l} \\
&+ \langle e^p_{1,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{1,0}|u\rangle_2 e^p_{1,0} \\
&+ \langle e^p_{-1,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{-1,0}|u\rangle_2 e^p_{-1,0} \\
&+ \langle e^p_{0,-1}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,-1}|u\rangle_2 e^p_{0,-1} \\
&+ \langle e^p_{0,1}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,1}|u\rangle_2 e^p_{0,1} \\
&+ \langle e^p_{0,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,0}|u\rangle_2 e^p_{0,0} \\
&= \sum_{k,l=1}^{\infty} \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 (e^p_{k,l} + e^p_{-k,l} + e^p_{k,-l} + e^p_{-k,-l}) \\
&+ \langle e^p_{1,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{1,0}|u\rangle_2 (e^p_{1,0} + e^p_{-1,0}) \\
&+ \langle e^p_{0,1}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,1}|u\rangle_2 (e^p_{0,1} + e^p_{0,-1}) + \langle e^p_{0,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,0}|u\rangle_2 e^p_{0,0}
\end{aligned} \tag{5.8}
$$

sağlanır. Burada,

$$
\begin{aligned}
\sum_{k,l=1}^{\infty} \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 (e^p_{k,l} + e^p_{-k,l}) \quad &+ \quad \sum_{k,l=1}^{\infty} \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 (e^p_{k,-l} + e^p_{-k,-l}) \\
&= \quad \sum_{k,l=1}^{\infty} \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \langle e_{2k,2l}|u\rangle_2 e_{2k,2l}
\end{aligned} \tag{5.9}
$$

(5.7) eşitliği tarafından sağlanır. Ayrıca,

$$
\langle e^p_{1,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{1,0}|u\rangle_2 (e^p_{1,0} + e^p_{-1,0}) = \langle e^p_{1,0}|C\rangle_2 \langle e_{2,0}|u\rangle_2 e_{2,0} \tag{5.10}
$$

ve

$$
\langle e^p_{0,1}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,1}|u\rangle_2 (e^p_{0,1} + e^p_{0,-1}) = \langle e^p_{0,1}|C\rangle_2 \langle e_{0,2}|u\rangle_2 e_{0,2} \tag{5.11}
$$

eşitliklerine ulaşılır. $e^p_{0,0} = 1/2$ ve $e_{0,0} = 1/2$ tanımdan geldiğinden, $e^p_{0,0} = e_{0,0}$ eşitliği sağlanır. Sonuç olarak,

$$
\langle e^p_{0,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,0}|u\rangle_2 e^p_{0,0} = \langle e^p_{0,0}|C\rangle_2 \langle e_{0,0}|u\rangle_2 e_{0,0} \tag{5.12}
$$

sağlanır. (5.8), (5.9), (5.10), (5.11) ve (5.12) eşitliklerinden şu sonuca ulaşılır:

$$C *_p u = \sum_{k,l=0}^{\infty} \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \, \langle e_{2k,2l}|u\rangle_2 e_{2k,2l}.$$

Çift k ve l için bir fonksiyon tanımlanır:

$$C *_p u = \sum_{k,l=0}^{\infty} \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \, \langle e_{2k,2l}|u\rangle_2 e_{2k,2l} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \phi_1(k^2, l^2) \, \langle e_{k,l}|u\rangle_2 \, e_{k,l}.$$

Burada, $\phi_1 \in B(\sigma(A_{\mathtt{N}}), \mathbb{C})$ şu şekilde tanımlanır:

$$\phi_1(k^2, l^2) := \begin{cases} 0 & k \text{ veya} l \text{ tek ise} \\ \langle e^p_{k/2,l/2}|C\rangle_2 & k \text{ ve} l \text{ çift ise} \end{cases}$$

ve

$$C *_p P_{\text{çift}} = \phi_1(A_{\mathtt{N}}).$$

Burada, ortogonal projeksiyon $P_{\text{çift}} : L^2_{\mathbb{C}}(I \times I) \to L^2_{\mathbb{C}}(I \times I)$, tüm $h \in L^2_{\mathbb{C}}(I \times I)$ için, şu şekilde ifade edilir:

$$P_{\text{çift}} h := \frac{1}{2}(h + h \circ (-id_I)).$$

Ayrıca, çift $C \in L^2(I \times I)$ ve tek $u \in L^2_{\mathbb{C}}$, x, $y \in I$, k,$l \in \mathbb{N}$ için:

$$\begin{aligned} \langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} e^{-i\pi(k+\frac{1}{2})x} e^{-i\pi(l+\frac{1}{2})y} C(x,y)dxdy \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \cos((k+\frac{1}{2})\pi x)\cos((l+\frac{1}{2})\pi y)C(x,y)dxdy \end{aligned}$$

sağlanır ve şu eşitlik gerçeklenir:

$$\langle e^a_{k,l}|u\rangle_2 = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sin((k+\frac{1}{2})\pi x)\sin((l+\frac{1}{2})\pi y)u(x,y)dxdy. \tag{5.13}$$

Şimdi,

$$\langle e^a_{-k-1,l}|u\rangle_2 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sin((k+\frac{1}{2})\pi x)\sin((l+\frac{1}{2})\pi y)u(x,y)dxdy \tag{5.14}$$

sağlanır. (5.13) ve (5.14) eşitlikleri ile benzer mantıkla şu sonuçlara ulaşılır:

$$\langle e^a_{k,l}|u\rangle_2 = -\langle e^a_{-k-1,l}|u\rangle_2 = -\langle e^a_{k,-l-1}|u\rangle_2 = \langle e^a_{-k-1,-l-1}|u\rangle_2 .$$

Burada, aşağıdaki sonuç gerçeklendiğinden dolayı,

$$e_{2k+1,2l+1} = (-1)^{k+l}\sin((k+\frac{1}{2})\pi x)\sin((l+\frac{1}{2})\pi y), \tag{5.15}$$

Şu sonuca ulaşılır:

$$\langle e_{2k+1,2l+1}|u\rangle_2 \quad = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(-1)^{k+l}\sin((k+\frac{1}{2})\pi x)\sin((l+\frac{1}{2})\pi y)udxdy. \tag{5.16}$$

(5.16) ve (5.13) eşitliklerinden şu sonuca ulaşılır:

$$\langle e^a_{k,l}|u\rangle_2 = \frac{(-1)^{k+l+1}}{2}\langle e_{2k+1,2l+1}|u\rangle_2 . \tag{5.17}$$

Aşağıda daha sonra kullanılacak olan dört eşitlik yazılmıştır:

$$\begin{gathered}
e^a_{k,l} \\
= \tfrac{1}{2}\left((\cos(\pi(k+\tfrac{1}{2})x+\pi(l+\tfrac{1}{2})y)+i\sin(\pi(k+\tfrac{1}{2})x+\pi(l+\tfrac{1}{2})y)\right), \\
e^a_{k,-l-1} \\
= \tfrac{1}{2}\left((\cos(\pi(k+\tfrac{1}{2})x-\pi(l+\tfrac{1}{2})y)+i\sin(\pi(k+\tfrac{1}{2})x-\pi(l+\tfrac{1}{2})y)\right), \\
e^a_{-k-1,l} \\
= \tfrac{1}{2}\left((\cos(-\pi(k+\tfrac{1}{2})x+\pi(l+\tfrac{1}{2})y)+i\sin(-\pi(k+\tfrac{1}{2})x+\pi(l+\tfrac{1}{2})y)\right), \\
e^a_{-k-1,-l-1} \\
= \tfrac{1}{2}\left((\cos(\pi(k+\tfrac{1}{2})x+\pi(l+\tfrac{1}{2})y)-i\sin(-\pi(k+\tfrac{1}{2})x+\pi(l+\tfrac{1}{2})y)\right).
\end{gathered}$$

Bu eşitliklerden şu sonuca ulaşılır:

$$e^a_{k,l} - e^a_{k,-l-1} - e^a_{-k-1,l} + e^a_{-k-1,-l-1} = -2\sin(\pi(k+\frac{1}{2})x)\sin(\pi(l+\frac{1}{2})y). \tag{5.18}$$

(5.18) ve (5.17) eşitliklerinin yardımıyla ve k ve $l \in \mathbb{N}$ için şu sonuçlar gerçeklenir:

$$\begin{aligned}
&\langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l}|u\rangle_2 e^a_{k,l} + \langle e^a_{-k-1,l}|C\rangle_2 \langle e^a_{-k-1,l}|u\rangle_2 e^a_{-k-1,l} \\
&+ \langle e^a_{k,-l-1}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,-l-1}|u\rangle_2 e^a_{k,-l-1} + \langle e^a_{-k-1,-l-1}|C\rangle_2 \langle e^a_{-k-1,-l-1}|u\rangle_2 e^a_{-k-1,-l-1} \\
&= \langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l}|u\rangle_2 (e^a_{k,l} - e^a_{-k-1,l} - e^a_{k,-l-1} + e^a_{-k-1,-l-1}) \\
&= (-1)^{k+l}\langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e_{2k+1,2l+1}|C\rangle_2 \sin(\pi(k+\frac{1}{2})x)\sin(\pi(l+\frac{1}{2})y) \\
&= \langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e_{2k+1,2l+1}|C\rangle_2 e_{2k+1,2l+1}.
\end{aligned}$$

Son eşitlik (5.15)'den gelmiştir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
C *_a u &= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l}|u\rangle_2 \, e^a_{k,l} = \sum_{k,l=0}^{\infty} \langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l}|u\rangle_2 \, e^a_{k,l} \\
&+ \sum_{k,l=0}^{\infty} \langle e^a_{-k-1,l}|C\rangle_2 \langle e^a_{-k-1,l}|u\rangle_2 \, e^a_{-k-1,l} \\
&+ \sum_{k,l=0}^{\infty} \langle e^a_{k,-l-1}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,-l-1}|u\rangle_2 \, e^a_{k,-l-1} \\
&+ \sum_{k,l=0}^{\infty} \langle e^a_{-k-1,-l-1}|C\rangle_2 \langle e^a_{-k-1,-l-1}|u\rangle_2 \, e^a_{-k-1,-l-1} \\
&= \sum_{k,l=0}^{\infty} \langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e_{2k+1,2l+1}|u\rangle_2 \, e_{2k+1,2l+1} \\
&= \sum_{k,l=0}^{\infty} \phi_2(k^2,l^2) \langle e_{k,l}|u\rangle_2 e_{k,l}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Burada, $\phi_2 \in B(\sigma(A_{\mathtt{N}}),\mathbb{C})$ şu şekilde ifade edilir:

$$\phi_2(k^2,l^2) := \begin{cases} 0 & k \text{ veya } l \text{ çift ise} \\ \langle e^a_{(k-1)/2,(l-1)/2}|C\rangle_2 & k \text{ ve } l \text{ tek ise.} \end{cases}$$

Ayrıca, $C *_a P_{tek} = \phi_2(A_{\mathtt{N}})$ olup, burada, ortogonal projeksiyon $P_{tek} : L^2_{\mathbb{C}}(I\times I) \to L^2_{\mathbb{C}}(I \times I)$, tüm $h \in L^2_{\mathbb{C}}(I \times I)$ için, şu şekilde ifade edilir:

$$P_{\text{tek}} := \frac{1}{2}\left(h - h \circ (-id_I)\right).$$

5.2 3D'de Neumann Sınır Koşulları için Basit Konvolüsyon

Periyodik ve Neumann sınır koşulları için öz fonksiyonlar sırasıyla şunlardır:

$$e^p_{k,l,m} = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{i\pi(kx+ly+mz)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos(\pi(kx+ly+mz)) + i\sin(\pi(kx+ly+mz))$$

ve

$$e_{k,l,m}(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2}}, & k,l \text{ ve } m = 0 \\ \cos(\pi k(x+1)/2)\cos(\pi l(y+1)/2)\cos(\pi l(z+1)/2), & k,l \text{ veya } m \neq 0 \end{cases}.$$

Kullanılacak operatör:

$$A_{\mathbb{N}}u = \frac{-4}{\pi^2}\Delta u$$

dır ve u operatöre karşılık gelen öz değerler $k^2 + l^2 + m^2$'dir.

k, l veya $m \in \mathbb{N}^*$ için şu durum geçerlidir:

$$e_{2k,2l,2m} = (-1)^{k+l+m}\cos(k\pi x)\cos(l\pi y)\cos(m\pi z). \tag{5.19}$$

Çift $C \in L^2(I \times I \times I)$, çift $u \in L^2(I \times I \times I)$, x, y, $z \in I$, k, l veya $m \in \mathbb{N}^*$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\begin{aligned}
\langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 &= \langle e^p_{-k,l,m}|C\rangle_2 = \langle e^p_{k,-l,m}|C\rangle_2 = \langle e^p_{k,l,-m}|C\rangle_2 = \langle e^p_{k,-l,-m}|C\rangle_2 \\
&= \langle e^p_{-k,-l,m}|C\rangle_2 = \langle e^p_{-k,l,-m}|C\rangle_2 = \langle e^p_{-k,-l,-m}|C\rangle_2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cos(\pi kx)\cos(\pi ly)\cos(\pi mz)C(x,y,z)dxdydz.
\end{aligned}$$

Ayrıca, yukarıdaki eşitlik C'nin çift olması ve sinüs fonksiyonunun tek olmasından sağlanır. Şimdi,

$$\begin{aligned}
\langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(\cos(\pi kx)\cos(\pi ly)\cos(\pi mz))^* u(x,y,z)dydxdz \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cos(\pi kx)\cos(\pi ly)\cos(\pi mz)u(x,y,z)dydxdz.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Yukarıda, cosinüs fonskiyonları reel olduklarından yukarıdaki eşitlik sağlanır. Ayrıca:

$$\langle e_{2k,2l,2m}|u\rangle_2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}(-1)^{k+l+m}\cos(\pi kx)\cos(\pi ly)\cos(\pi mz)udV. \tag{5.21}$$

eşitliği, (5.19)'den ve tanımdan sağlanır. (5.20) ve (5.21)'den aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 = \frac{(-1)^{k+l+m}}{2\sqrt{2}}\langle e_{2k,2l,2m}|u\rangle_2. \tag{5.22}$$

k, l veya $m \neq 0$ için aşağıdaki eşitlik gerçeklenir:

$$
\begin{aligned}
&\langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2\, e^p_{k,l,m} + \langle e^p_{-k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{-k,l,m}|u\rangle_2\, e^p_{-k,l,m} \\
&+ \langle e^p_{k,-l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,-l,m}|u\rangle_2\, e^p_{k,-l,m} + \langle e^p_{-k,-l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{-k,-l,m}|u\rangle_2\, e^p_{-k,-l,m} \\
&+ \langle e^p_{k,l,-m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,-m}|u\rangle_2\, e^p_{k,l,-m} + \langle e^p_{-k,l,-m}|C\rangle_2 \langle e^p_{-k,l,-m}|u\rangle_2\, e^p_{-k,l,-m} \\
&+ \langle e^p_{k,-l,-m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,-l,-m}|u\rangle_2\, e^p_{k,-l,-m} + \langle e^p_{-k,-l,-m}|C\rangle_2 \langle e^p_{-k,-l,-m}|u\rangle_2\, e^p_{-k,-l,-m} \\
&= \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^p_{k,l,m} + e^p_{-k,l,m} + e^p_{k,-l,m} \\
&+ e^p_{k,l,-m} + e^p_{k,-l,-m} + e^p_{-k,l,-m} + e^p_{-k,-l,m} + e^p_{-k,-l,-m}). \qquad (5.23)
\end{aligned}
$$

Burada,

$$
\begin{aligned}
e^p_{k,l,m} &+ e^p_{-k,l,m} + e^p_{k,-l,m} + e^p_{k,l,-m} + e^p_{k,-l,-m} + e^p_{-k,l,-m} + e^p_{-k,-l,m} + e^p_{-k,-l,-m} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos(\pi(kx+ly+mz)) + i\sin(\pi(kx+ly+mz))\right) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos(\pi(-kx+ly+mz)) + i\sin(\pi(-kx+ly+mz))\right) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos(\pi(kx-ly+mz)) + i\sin(\pi(kx-ly+mz))\right) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos(\pi(kx+ly-mz)) + i\sin(\pi(kx+ly-mz))\right) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos(\pi(kx-ly-mz)) + i\sin(\pi(kx-ly-mz))\right) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos(\pi(-kx+ly-mz)) + i\sin(\pi(-kx+ly-mz))\right) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos(\pi(-kx-ly+mz)) + i\sin(\pi(-kx-ly+mz))\right) \\
&+ \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos(\pi(kx+ly+mz)) - i\sin(\pi(kx+ly+mz))\right) \\
&= \sqrt{2}(\cos(\pi(kx+ly))\cos(\pi mz) + \cos(\pi(kx-ly))\cos(\pi mz)) \\
&= 2\sqrt{2}\cos(\pi kx)\cos(\pi ly)\cos(\pi mz).
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki eşitlik sinüs fonksiyonunun tek olmasından ve cosinüs fonksiyonun çift olmasından kaynaklanır. (5.19)'den şu sonuç elde edilir:

$$
\begin{aligned}
e^p_{k,l,m} &+ e^p_{-k,l,m} + e^p_{k,-l,m} + e^p_{k,l,-m} + e^p_{k,-l,-m} + e^p_{-k,l,-m} + e^p_{-k,-l,m} + e^p_{-k,-l,-m} \\
&= (-1)^{k+l+m} 2\sqrt{2} e_{2k,2l,2m}. \qquad (5.24)
\end{aligned}
$$

(5.24), (5.22) ve (5.23) eşitliklerinden şu sonuç gerçeklenir:

$$
\begin{aligned}
&\langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^p_{k,l,m} + e^p_{-k,l,m}) + \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^p_{k,-l,m} + e^p_{k,l,-m})\\
&+ \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^p_{k,-l,-m} + e^p_{-k,l,-m})\\
&+ \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^p_{-k,-l,m} + e^p_{-k,-l,-m})\\
&= \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e_{2k,2l,2m}|u\rangle_2 \, e_{2k,2l,2m}.
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

Şimdi,

$$
\begin{aligned}
C *_p u &= \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 \, e^p_{k,l,m} = \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 \, e^p_{k,l,m}\\
&+ \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \langle e^p_{-k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{-k,l,m}|u\rangle_2 \, e^p_{-k,l,m}\\
&+ \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \langle e^p_{k,-l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,-l,m}|u\rangle_2 \, e^p_{k,-l,m}\\
&+ \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \langle e^p_{k,l,-m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,-m}|u\rangle_2 \, e^p_{k,l,-m}\\
&+ \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \langle e^p_{k,-l,-m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,-l,-m}|u\rangle_2 \, e^p_{k,-l,-m}\\
&+ \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \langle e^p_{-k,l,-m}|C\rangle_2 \langle e^p_{-k,l,-m}|u\rangle_2 \, e^p_{-k,l,-m}\\
&+ \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \langle e^p_{-k,-l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{-k,-l,m}|u\rangle_2 \, e^p_{-k,-l,m}\\
&+ \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \langle e^p_{-k,-l,-m}|C\rangle_2 \langle e^p_{-k,-l,-m}|u\rangle_2 \, e^p_{-k,-l,-m}\\
&+ \langle e^p_{1,0,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{1,0,0}|u\rangle_2 (e^p_{1,0,0} + e^p_{-1,0,0}) + \langle e^p_{0,1,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,1,0}|u\rangle_2 (e^p_{0,1,0} + e^p_{0,-1,0})\\
&+ \langle e^p_{0,0,1}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,0,1}|u\rangle_2 (e^p_{0,0,1} + e^p_{0,0,-1})\\
&+ \langle e^p_{1,1,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{1,1,0}|u\rangle_2 (e^p_{1,1,0} + e^p_{1,-1,0} + e^p_{-1,1,0} + e^p_{-1,-1,0})\\
&+ \langle e^p_{1,0,1}|C\rangle_2 \langle e^p_{1,0,1}|u\rangle_2 (e^p_{1,0,1} + e^p_{1,0,-1} + e^p_{-1,0,1} + e^p_{-1,0,-1})\\
&+ \langle e^p_{0,1,1}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,1,1}|u\rangle_2 (e^p_{0,1,1} + e^p_{0,-1,1} + e^p_{0,1,-1} + e^p_{0,-1,-1})\\
&+ \langle e^p_{0,0,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,0,0}|u\rangle_2 \, e^p_{0,0,0}
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

sağlanır. Burada,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k,l,m=1}^{\infty} \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^p_{k,l,m} + e^p_{-k,l,m} + e^p_{k,-l,m} + e^p_{k,l,-m}) \\
+ &\sum_{k,l,m=1}^{\infty} \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^p_{k,-l,-m} + e^p_{-k,l,-m} + e^p_{-k,-l,m} + e^p_{-k,-l,-m}) \\
= &\sum_{k,l,m=1}^{\infty} \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e_{2k,2l,2m}|u\rangle_2 \, e_{2k,2l,2m} \qquad (5.27)
\end{aligned}$$

(5.25) eşitliği tarafından sağlanır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
&\langle e^p_{1,0,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{1,0,0}|u\rangle_2 (e^p_{1,0,0} + e^p_{-1,0,0}) = \langle e^p_{1,0,0}|C\rangle_2 \langle e_{2,0,0}|u\rangle_2 \, e_{2,0,0}, \\
&\langle e^p_{0,1,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,1,0}|u\rangle_2 (e^p_{0,1,0} + e^p_{0,-1,0}) = \langle e^p_{1,0,0}|C\rangle_2 \langle e_{0,2,0}|u\rangle_2 \, e_{0,2,0}, \\
&\langle e^p_{0,0,1}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,0,1}|u\rangle_2 (e^p_{0,0,1} + e^p_{0,0,-1}) = \langle e^p_{0,0,1}|C\rangle_2 \langle e_{0,0,2}|u\rangle_2 \, e_{0,0,2}, \\
&\langle e^p_{1,1,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{1,1,0}|u\rangle_2 (e^p_{1,1,0} + e^p_{1,-1,0} + e^p_{-1,1,0} + e^p_{-1,-1,0}) \\
&= \langle e^p_{1,1,0}|C\rangle_2 \langle e_{2,2,0}|u\rangle_2 \, e_{2,2,0}, \\
&\langle e^p_{1,0,1}|C\rangle_2 \langle e^p_{1,0,1}|u\rangle_2 (e^p_{1,0,1} + e^p_{1,0,-1} + e^p_{-1,0,1} \\
&+ e^p_{-1,0,-1}) = \langle e^p_{1,0,1}|C\rangle_2 \langle e_{2,0,2}|u\rangle_2 \, e_{2,0,2} \qquad (5.28)
\end{aligned}$$

ve

$$\langle e^p_{0,1,1}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,1,1}|u\rangle_2 (e^p_{0,1,1} + e^p_{0,1,-1} + e^p_{0,-1,1} + e^p_{0,-1,-1}) = \langle e^p_{0,1,1}|C\rangle_2 \langle e_{0,2,2}|u\rangle_2 \, e_{0,2,2} \qquad (5.29)$$

eşitliklerine ulaşılır. $e^p_{0,0,0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ ve $e_{0,0,0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ tanımdan geldiğinden, $e^p_{0,0,0} = e_{0,0,0}$ eşitliği sağlanır. Sonuç olarak,

$$\langle e^p_{0,0,0}|C\rangle_2 \langle e^p_{0,0,0}|u\rangle_2 \, e^p_{0,0,0} = \langle e^p_{0,0,0}|C\rangle_2 \langle e_{0,0,0}|u\rangle_2 \, e_{0,0,0} \qquad (5.30)$$

sağlanır. (5.26), (5.27), (5.28), (5.29) ve (5.30) eşitliklerinden şu sonuca ulaşılır:

$$C *_p u = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e_{2k,2l,2m}|u\rangle_2 \, e_{2k,2l,2m}.$$

Çift k, l ve m için bir fonksiyon tanımlanır:

$$C*_p u = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e_{2k,2l,2m}|u\rangle_2 \, e_{2k,2l,2m} = \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \phi(k^2, l^2, m^2) \langle e_{k,l,m}|u\rangle_2 \, e_{k,l,m}.$$

Burada, $\phi \in B(\sigma(A_{\mathtt{N}}), \mathbb{C})$ şu şekilde tanımlanır:

$$\phi(k^2, l^2, m^2) := \begin{cases} 0 & k, l \text{ veya } m \text{ tek ise} \\ \langle e^p_{k/2, l/2, m/2} | C \rangle_2 & k, l \text{ ve } m \text{ çift ise} \end{cases}$$

ve

$$C *_p P_{\text{çift}} = \phi(A_{\mathtt{N}}).$$

Burada, ortogonal projeksiyon $P_{\text{çift}} : L^2_{\mathbb{C}}(I \times I \times I) \to L^2_{\mathbb{C}}(I \times I \times I)$, tüm $h \in L^2_{\mathbb{C}}(I \times I)$ için, şu şekilde ifade edilir:

$$P_{\text{çift}} h := \frac{1}{2}(h + h \circ (-id_I)).$$

Ayrıca, çift $C \in L^2(I \times I \times I)$ ve tek $u \in L^2_{\mathbb{C}}$, x, y ve $z \in I$, k, l ve $m \in \mathbb{N}$ için:

$$\begin{gathered} \langle e^a_{k,l,m} | C \rangle_2 \\ = \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} e^{-i\pi(k+\frac{1}{2})x} e^{-i\pi(l+\frac{1}{2})y} e^{-i\pi(m+\frac{1}{2})z} C(x,y,z) dxdydz \\ = \tfrac{1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \cos((k+\tfrac{1}{2})\pi x) \cos((l+\tfrac{1}{2})\pi y) \cos((m+\tfrac{1}{2})\pi z) C dxdydz \end{gathered}$$

sağlanır ve şu eşitlik gerçeklenir:

$$\begin{aligned} &\langle e^a_{k,l,m} | u \rangle_2 \\ &= -\frac{i}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \sin((k+\frac{1}{2})\pi x) \sin((l+\frac{1}{2})\pi y) \sin((m+\frac{1}{2})\pi z) u dV. \quad (5.31) \end{aligned}$$

Şimdi,

$$\begin{gathered} \langle e^a_{-k-1,l,m} | u \rangle_2 \qquad (5.32) \\ = \tfrac{i}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \sin((k+\tfrac{1}{2})\pi x) \sin((l+\tfrac{1}{2})\pi y) \sin((m+\tfrac{1}{2})\pi z) u(x,y,z) dxdydz. \end{gathered}$$

sağlanır. (5.31) ve (5.33) eşitlikleri ile şu sonuçlara ulaşılır:

$$\begin{aligned} \langle e^a_{k,l,m} | u \rangle_2 &= -\langle e^a_{-k-1,l,m} | u \rangle_2 = -\langle e^a_{k,-l-1,m} | u \rangle_2 = -\langle e^a_{k,l,-m-1} | u \rangle_2 \\ &= -\langle e^a_{-k-1,-l-1,-m-1} | u \rangle_2 = \langle e^a_{-k-1,-l-1,m} | u \rangle_2 \\ &= \langle e^a_{-k-1,l,-m-1} | u \rangle_2 = \langle e^a_{k,-l-1,-m-1} | u \rangle_2 . \end{aligned}$$

Burada, aşağıdaki sonuç gerçeklendiğinden dolayı,

$$e_{2k+1,2l+1,2m+1} = (-1)^{k+l+m} \sin((k+\frac{1}{2})\pi x) \sin((l+\frac{1}{2})\pi y) \sin((m+\frac{1}{2})\pi z), \quad (5.33)$$

şu sonuca ulaşılır:

$$\begin{aligned} &\left\langle e_{2k+1,2l+1,2m+1} | u \right\rangle_2 \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (-1)^{k+l+m} \sin((k+\tfrac{1}{2})\pi x)\sin((l+\tfrac{1}{2})\pi y)\sin((m+\tfrac{1}{2})\pi z) u dx dy dz. \end{aligned} \tag{5.34}$$

(5.35) ve (5.31) eşitliklerinden şu sonuca ulaşılır:

$$\left\langle e^a_{k,l,m} | u \right\rangle_2 = (-1)^{k+l+m+1} \frac{i}{2\sqrt{2}} \left\langle e_{2k+1,2l+1,2m+1} | u \right\rangle_2 . \tag{5.35}$$

Şu eşitlik gerçeklenir:

$$\begin{aligned} e^a_{k,l,m} &- e^a_{k,-l-1,m} - e^a_{-k-1,l,m} - e^a_{k,l,-m-1} - e^a_{-k-1,-l-1,-m-1} \\ &+ e^a_{-k-1,-l-1,m} + e^a_{-k-1,l,-m-1} + e^a_{k,-l-1,-m-1} \\ &= -2\sqrt{2} i \sin((k+\frac{1}{2})\pi x)\sin((l+\frac{1}{2})\pi y)\sin((m+\frac{1}{2})\pi z). \end{aligned} \tag{5.36}$$

(5.36) ve (5.35) eşitliklerinin yardımıyla ve k, l ve $m \in \mathbb{N}$ için şu sonuçlar gerçeklenir:

$$\begin{aligned} &\left\langle e^a_{k,l,m} | C \right\rangle_2 \left\langle e^a_{k,l,m} | u \right\rangle_2 e^a_{k,l,m} \\ &+ \left\langle e^a_{-k-1,l,m} | C \right\rangle_2 \left\langle e^a_{-k-1,l,m} | u \right\rangle_2 e^a_{-k-1,l,m} \\ &+ \left\langle e^a_{k,-l-1,m} | C \right\rangle_2 \left\langle e^a_{k,-l-1,m} | u \right\rangle_2 e^a_{k,-l-1,m} \\ &+ \left\langle e^a_{k,l,-m-1} | C \right\rangle_2 \left\langle e^a_{k,l,-m-1} | u \right\rangle_2 e^a_{k,l,-m-1} \\ &+ \left\langle e^a_{-k-1,-l-1,m} | C \right\rangle_2 \left\langle e^a_{-k-1,-l-1,m} | u \right\rangle_2 e^a_{-k-1,-l-1,m} \\ &+ \left\langle e^a_{-k-1,l,-m-1} | C \right\rangle_2 \left\langle e^a_{-k-1,l,-m-1} | u \right\rangle_2 e^a_{-k-1,l,-m-1} \\ &+ \left\langle e^a_{k,-l-1,-m-1} | C \right\rangle_2 \left\langle e^a_{k,-l-1,-m-1} | u \right\rangle_2 e^a_{k,-l-1,-m-1} \\ &+ \left\langle e^a_{-k-1,-l-1,-m-1} | C \right\rangle_2 \left\langle e^a_{-k-1,-l-1,-m-1} | u \right\rangle_2 e^a_{-k-1,-l-1,-m-1} \\ &= \left\langle e^a_{k,l,m} | C \right\rangle_2 \left\langle e^a_{k,l,m} | u \right\rangle_2 (e^a_{k,l,m} - e^a_{-k-1,l,m} - e^a_{k,-l-1,m}) \\ &+ \left\langle e^a_{k,l,m} | C \right\rangle_2 \left\langle e^a_{k,l,m} | u \right\rangle_2 (-e^a_{k,l,-m-1} + e^a_{-k-1,-l-1,m} + e^a_{-k-1,l,-m-1}) \\ &+ \left\langle e^a_{k,l,m} | C \right\rangle_2 \left\langle e^a_{k,l,m} | u \right\rangle_2 (e^a_{k,-l-1,-m-1} - e^a_{-k-1,-l-1,-m-1}) \\ &= \left\langle e^a_{k,l,m} | C \right\rangle_2 \left\langle e_{2k+1,2l+1,2m+1} | C \right\rangle_2 e_{2k+1,2l+1,2m+1}. \end{aligned}$$

Son eşitlik (5.33)'den gelmiştir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
C *_a u &= \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} \langle e^a_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l,m}|u\rangle_2 e^a_{k,l,m} \\
&= \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \langle e^a_{-k-1,l,m}|C\rangle_2 \langle e^a_{-k-1,l,m}|u\rangle_2 e^a_{-k-1,l,m} \\
&+ \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \langle e^a_{k,-l-1,m}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,-l-1,m}|u\rangle_2 e^a_{k,-l-1,m} \\
&+ \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \langle e^a_{k,l,-m-1}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l,-m-1}|u\rangle_2 e^a_{k,l,-m-1} \\
&+ \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \langle e^a_{-k-1,-l-1,m}|C\rangle_2 \langle e^a_{-k-1,-l-1,m}|u\rangle_2 e^a_{-k-1,-l-1,m} \\
&+ \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \langle e^a_{-k-1,l,-m-1}|C\rangle_2 \langle e^a_{-k-1,l,-m-1}|u\rangle_2 e^a_{-k-1,l,-m-1} \\
&+ \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \langle e^a_{k,-l-1,-m-1}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,-l-1,-m-1}|u\rangle_2 e^a_{k,-l-1,-m-1} \\
&+ \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \langle e^a_{-k-1,-l-1,-m-1}|C\rangle_2 \langle e^a_{-k-1,-l-1,-m-1}|u\rangle_2 e^a_{-k-1,-l-1,-m-1} \\
&= \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \psi(k^2,l^2,m^2) \langle e_{k,l,m}|u\rangle_2 e_{k,l,m}
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Burada, $\psi \in B(\sigma(A_{\mathtt{N}}),\mathbb{C})$ şu şekilde ifade edilir:

$$\psi(k^2,l^2,m^2) := \begin{cases} 0 & k,l \text{ veya } m \text{ çift ise} \\ \langle e^a_{(k-1)/2,(l-1)/2,(m-1)/2}|C\rangle_2 & k,l, \text{ ve } m \text{ tek ise.} \end{cases}$$

Ayrıca, $C *_a P_{tek} = \psi(A_{\mathtt{N}})$ olup, burada, ortogonal projeksiyon $P_{tek} : L^2_{\mathbb{C}}(I \times I \times I) \to L^2_{\mathbb{C}}(I \times I \times I)$, tüm $h \in L^2_{\mathbb{C}}(I \times I \times I)$ için, şu şekilde ifade edilir:

$$P_{tek} := \frac{1}{2}\left(h - h_0(-id_I)\right).$$

5.3 2D'de Dirichlet Sınır Koşulları için Basit Konvolüsyon

Bu kısımda, basit konvolüsyonu bulma için, operatör tanımlanıp, bu operatör üzerinden öz fonksiyonlar ve öz değerler elde edilecektir. Operatör aşağıdaki eşitlikte verilmiştir:

$$A_{\mathtt{D}}u = -\frac{4}{\pi^2}\Delta u.$$

Burada, $u \in W_0^2(I \times I, \mathbb{C})$ olmaktadır. $A_{\mathtt{D}}$, pür ayrık bir spektruma sahiptir ve basit öz değerleri vardır:

$$\sigma(A_{\mathtt{D}}) = \{k^2 + l^2 : k, l \in \mathbb{N}^*\}.$$

Bu özdeğerlere karşılık gelen normalize edilmiş öz fonksiyonlar, aşağıda verilmiştir:

$$e_{k,l}(x,y) := \sin(\frac{k\pi}{2}(x+1))\sin(\frac{l\pi}{2}(y+1)).$$

Diğer sınır koşullarında, anti-periyodik ve periyodik sınır koşullarına denk gelen öz fonksyionlar gösterildi. Bu öz fonksiyonlar üzerinden işlemler yapılacaktır. Dirichlet sınır koşulu için ve k veya $l \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$e_{2k,2l} = (-1)^{k+l}\sin(k\pi x)\sin(l\pi y). \tag{5.37}$$

Çift $C \in L^2(I \times I)$, çift $u \in L^2(I \times I)$, $x$ve $y \in I$, k veya $l \in \mathbb{N}^*$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 &= \langle e^p_{-k,l}|C\rangle_2 = \langle e^p_{k,-l}|C\rangle_2 = \langle e^p_{-k,-l}|C\rangle_2 \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cos(\pi kx)\cos(\pi ly)C(x,y)dydx \end{aligned} \tag{5.38}$$

ve

$$\begin{aligned} \langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 &= -\langle e^p_{-k,l}|u\rangle_2 = -\langle e^p_{k,-l}|u\rangle_2 = \langle e^p_{-k,-l}|u\rangle_2 \\ &= \frac{(-1)^{k+l+1}}{2}\langle e_{2k,2l}|u\rangle_2 . \end{aligned}$$

Sonuç olarak, k ve $l \in \mathbb{N}^*$ için şu eşitlik geçerlidir:

$$e^p_{k,l} - e^p_{-k,l} - e^p_{k,-l} + e^p_{-k,-l} = -2(\sin(\pi kx)\sin(\pi ly)). \tag{5.39}$$

(5.39), (5.37) ve (5.38) eşitliklerinden şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
\langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 e^p_{k,l} &+ \langle e^p_{-k,l}|C\rangle_2 \langle e^p_{-k,l}|u\rangle_2 e^p_{-k,l} \\
&+ \langle e^p_{k,-l}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,-l}|u\rangle_2 e^p_{k,-l} + \langle e^p_{-k,-l}|C\rangle_2 \langle e^p_{-k,-l}|u\rangle_2 e^p_{-k,-l} \\
&= \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 (e^p_{k,l} - e^p_{-k,l} - e^p_{k,-l} + e^p_{-k,-l}) \\
&= -2 \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 (\sin(\pi kx)\sin(\pi ly)) \\
&= \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \langle e_{2k,2l}|u\rangle_2 e_{2k,2l}.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
C *_p u &= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l}|u\rangle_2 e^p_{k,l} \\
&= \sum_{k,l=1}^{\infty} \langle e^p_{k,l}|C\rangle_2 \langle e_{2k,2l}|u\rangle_2 e_{2k,2l} \\
&= \sum_{k,l=1}^{\infty} \psi_1(k^2,l^2) \langle e_{k,l}|u\rangle_2 e_{k,l}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\psi_1 \in B(\sigma(A_{\mathtt{D}}), \mathbb{C}$ şu şekilde ifade edilir:

$$\psi_1(k^2,l^2) := \begin{cases} 0 & k \text{ veya } l \in \mathbb{N}^* \text{ tek ise} \\ \langle e^p_{k/2,l/2}|C\rangle_2 & k \text{ ve } l \in \mathbb{N}^* \text{ çift ise,} \end{cases}$$

ve

$$C *_p P_{tek} = \psi_1(A_{\mathtt{D}}).$$

Ayrıca, çift $C \in L^2(I\times I)$ ve çift $u \in L^2_{\mathbb{C}}$, x, $y \in I$, k,$l \in \mathbb{N}$için:

$$\begin{aligned}
\langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 &= \langle e^a_{-k-1,l}|C\rangle_2 = \langle e^a_{k,-l-1}|C\rangle_2 = \langle e^a_{-k-1,-l-1}|C\rangle_2 \\
&= \frac{(-1)^{k+l}}{2} \langle e^a_{2k+1,2l+1}|C\rangle_2 \\
\langle e^a_{k,l}|u\rangle_2 &= \langle e^a_{-k-1,l}|u\rangle_2 = \langle e^a_{k,-l-1}|u\rangle_2 = \langle e^a_{-k-1,-l-1}|u\rangle_2 \\
&= \frac{(-1)^{k+l}}{2} \langle e^a_{2k+1,2l+1}|u\rangle_2 \qquad (5.40)
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l}|u\rangle_2 e^a_{k,l} &+ \langle e^a_{-k-1,l}|C\rangle_2 \langle e^a_{-k-1,l}|u\rangle_2 e^a_{-k-1,l} \\
&+ \langle e^a_{k,-l-1}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,-l-1}|u\rangle_2 e^a_{k,-l-1} \\
&+ \langle e^a_{-k-1,-l-1}|C\rangle_2 \langle e^a_{-k-1,-l-1}|u\rangle_2 e^a_{-k-1,-l-1} \\
&= \langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l}|u\rangle_2 (e^a_{k,l} + e^a_{-k-1,l} + e^a_{k,-l-1} + e^a_{-k-1,-l-1}) \\
&= 2 \langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l}|u\rangle_2 \cos(\pi(k+\frac{1}{2})x)\cos(\pi(l+\frac{1}{2})y) \\
&= \langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e_{2k+1,2l+1}|u\rangle_2 e_{2k+1,2l+1}
\end{aligned}$$

eşitliği, (5.40) yardımıyla elde edilir. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
C *_a u &= \sum_{k,l\in\mathbb{Z}} \langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l}|u\rangle_2 e^a_{k,l} \\
&= \sum_{k,l=0}^{\infty} \langle e^a_{k,l}|C\rangle_2 \langle e_{2k+1,2l+1}|u\rangle_2 e_{2k+1,2l+1} \\
&= \sum_{k,l=1}^{\infty} \psi_2(k^2+l^2) \langle e_{k,l}|u\rangle_2 e_{k,l}
\end{aligned}$$

geçerlidir. Burada, $\psi_2 \in B(\sigma(A_{\mathtt{D}}), \mathbb{C})$ şu şekilde ifade edilir:

$$\psi_2(k^2, l^2) := \begin{cases} 0 & k \text{ veya } l \in \mathbb{N}^* \text{ çift ise} \\ \langle e^a_{(k-1)/2,(l-1)/2}|C\rangle_2 & k \text{ ve } l \in \mathbb{N}^* \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve

$$C *_a P_{\text{çift}} = \psi_2(A_{\mathtt{D}}).$$

5.4 3D'de Dirichlet Sınır Koşulları için Basit Konvolüsyon

Bu kısımda, basit konvolüsyonu bulma için, operatör tanımlanıp, bu operatör üzerinden öz fonksiyonlar ve öz değerler elde edilecektir. Operatör aşağıdaki eşitlikte verilmiştir:

$$A_{\mathtt{D}} u = -\frac{4}{\pi^2}\Delta u,$$

Burada, $u \in W_0^2(I \times I, \mathbb{C})$ olmaktadır. $A_{\mathtt{D}}$, pür ayrık bir spektruma sahiptir ve basit öz değerleri vardır:

$$\sigma(A_{\mathtt{D}}) = \{k^2 + l^2 + m^2 : k, l \text{ ve } m \in \mathbb{N}^*\}.$$

Bu özdeğerlere karşılık gelen normalize edilmiş öz fonksiyonlar, aşağıda verilmiştir:

$$e_{k,l,m}(x,y,z) := \sin(\frac{k\pi}{2}(x+1))\sin(\frac{l\pi}{2}(y+1))\sin(\frac{m\pi}{2}(z+1)).$$

Dirichlet sınır koşulu için ve k, l veya $m \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$e_{2k,2l,2m} = (-1)^{k+l+m}\sin(k\pi x)\sin(l\pi y)\sin(m\pi z). \tag{5.41}$$

Çift $C \in L^2(I \times I \times I)$, tek $u \in L^2(I \times I \times I)$, x, y ve $z \in I$, k, l veya $m \in \mathbb{N}^*$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned}
\langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 &= \langle e^p_{-k,l,m}|C\rangle_2 = \langle e^p_{k,-l,m}|C\rangle_2 = \langle e^p_{k,l,-m}|C\rangle_2 \\
&= \langle e^p_{-k,-l,m}|C\rangle_2 = \langle e^p_{-k,l,-m}|C\rangle_2 = \langle e^p_{k,-l,-m}|C\rangle_2 = \langle e^p_{-k,-l,-m}|C\rangle_2 \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\cos(\pi kx)\cos(\pi ly)\cos(\pi mz)C(x,y,z)dydxdz.
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 &= -\langle e^p_{-k,l,m}|u\rangle_2 = -\langle e^p_{k,-l,m}|u\rangle_2 = -\langle e^p_{k,l,-m}|u\rangle_2 \\
&= \langle e^p_{-k,-l,m}|u\rangle_2 = \langle e^p_{-k,l,-m}|u\rangle_2 = \langle e^p_{k,-l,-m}|u\rangle_2 = -\langle e^p_{-k,-l,-m}|u\rangle_2 \\
&= \frac{(-1)^{k+l+m}i}{2\sqrt{2}}\langle e_{2k,2l,2m}|u\rangle_2 .
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Sonuç olarak, k, l ve $m \in \mathbb{N}^*$ için şu eşitlik (5.41) yardımıyla geçerlidir:

$$\begin{aligned}
e^p_{k,l,m} &- e^p_{-k,l,m} - e^p_{k,-l,m} - e^p_{k,l,-m} + e^p_{-k,-l,m} \\
&+ e^p_{-k,l,-m} + e^p_{k,-l,-m} - e^p_{-k,-l,-m} \\
&= -2\sqrt{2}i\sin(\pi kx)\sin(\pi ly)\sin(\pi mz) \\
&= (-1)^{k+l+m+1}2\sqrt{2}ie_{2k,2l,2m}.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Sonuç olarak, (5.43) ve (5.42) eşitliklerinde şu sonuç elde edilir:

$$\begin{aligned}
&\langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^p_{k,l,m} - e^p_{-k,l,m}) \\
&+ \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 (-e^p_{k,-l,m} - e^p_{k,l,-m}) \\
&+ \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^p_{-k,-l,m} + e^p_{-k,l,-m}) \\
&+ \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^p_{k,-l,-m} - e^p_{-k,-l,-m}) \\
&= \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 ((-1)^{k+l+m+1} 2\sqrt{2} i e_{2k,2l,2m}) \\
&= \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e_{2k,2l,2m}|u\rangle_2 \, e_{2k,2l,2m}.
\end{aligned}$$

Buradan, aşağıdaki sonuç gerçeklenir:

$$\begin{aligned}
C *_p u = &= \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^p_{k,l,m}|u\rangle_2 \, e^p_{k,l,m} \\
&= \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \langle e^p_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e_{2k,2l,2m}|u\rangle_2 e_{2k,2l,2m} \\
&= \sum_{k,l,m=1}^{\infty} \gamma_1(k^2,l^2,m^2) \langle e_{k,l,m}|u\rangle_2 \, e_{k,l,m}.
\end{aligned}$$

$\gamma_1 \in B(\sigma(A_{\mathtt{D}}),\mathbb{C})$ şu şekilde tanımlanır:

$$\gamma_1(k^2,l^2,m^2) := \begin{cases} 0 & k,l \text{ veya } m \in \mathbb{N}^* \text{ tek ise} \\ \langle e^p_{k/2,l/2,m/2}|C\rangle_2 & k,l \text{ ve } m \in \mathbb{N}^* \text{ çift ise} \end{cases}$$

ve

$$C *_p P_{tek} = \gamma_1(A_{\mathtt{D}}).$$

Ayrıca, çift $C \in L^2(I\times I\times I)$ ve çift $u \in L^2_{\mathbb{C}}$, x, y ve $z \in I$, k, l ve $m \in \mathbb{N}$ için:

$$\begin{aligned}
\langle e^a_{k,l,m}|C\rangle_2 &= \langle e^a_{-k-1,l,m}|C\rangle_2 = \langle e^a_{k,-l-1,m}|C\rangle_2 = \langle e^a_{k,l,-m-1}|C\rangle_2 \\
&= \langle e^a_{-k-1,-l-1,m}|C\rangle_2 = \langle e^a_{-k-1,l,-m-1}|C\rangle_2 \\
&= \langle e^a_{k,-l-1,-m-1}|C\rangle_2 = \langle e^a_{-k-1,-l-1,-m-1}|C\rangle_2
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\langle e^a_{k,l,m}|u\rangle_2 &= \langle e^a_{-k-1,l,m}|u\rangle_2 = \langle e^a_{k,-l-1,m}|u\rangle_2 = \langle e^a_{k,l,-m-1}|u\rangle_2 \\
&= \langle e^a_{-k-1,-l-1,m}|u\rangle_2 = \langle e^a_{-k-1,l,-m-1}|u\rangle_2 \\
&= \langle e^a_{k,-l-1,-m-1}|u\rangle_2 = \langle e^a_{-k-1,-l-1,-m-1}|u\rangle_2 \\
&= \frac{(-1)^{k+l+m}}{2\sqrt{2}} \langle e_{2k+1,2l+1,2m+1}|u\rangle_2 \qquad (5.44)
\end{aligned}$$

Eşitlikleri geçerlidir. Şimdi, şu sonuca ulaşılır:

$$\begin{aligned}
e^a_{k,l,m} &+ e^a_{-k-1,l,m} + e^a_{k,-l-1,m} \\
&+ e_{k,l,-m-1} + e^a_{-k-1,-l-1,m} + e^a_{-k-1,l,-m-1} \\
&+ e^a_{k,-l-1,-m-1} + e^a_{-k-1,-l-1,-m-1} \\
&= 2\sqrt{2}\cos(\pi(k+\frac{1}{2})x)\cos(\pi(l+\frac{1}{2})y)\cos(\pi(m+\frac{1}{2})z) \\
&= (-1)^{k+l+m}2\sqrt{2}e_{2k+1,2l+1,2m+1}. \qquad (5.45)
\end{aligned}$$

(5.44) ve (5.45) eşitliklerinin yardımı ile şu eşitliğe varılır:

$$\begin{aligned}
&\langle e^a_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^a_{k,l,m} + e^a_{-k-1,l,m}) \\
&+ \langle e^a_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^a_{k,-l,m} - e^a_{k,l,-m-1}) \\
&+ \langle e^a_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^a_{-k-1,-l-1,m} + e^a_{-k-1,l,-m-1}) \\
&+ \langle e^a_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l,m}|u\rangle_2 (e^a_{k,-l-1,-m-1} + e^a_{-k-1,-l-1,-m-1}) \\
&= \langle e^a_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l,m}|u\rangle_2 ((-1)^{k+l+m}2\sqrt{2}e_{2k+1,2l+1,2m+1}) \\
&= \langle e^a_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e_{2k+1,2l+1,2m+1}|u\rangle_2 \, e_{2k+1,2l+1,2m+1}.
\end{aligned}$$

Sonuç olarak:

$$\begin{aligned}
C *_a u = &= \sum_{k,l,m\in\mathbb{Z}} \langle e^a_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e^a_{k,l,m}|u\rangle_2 \, e^a_{k,l,m} \\
&= \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \langle e^a_{k,l,m}|C\rangle_2 \langle e_{2k+1,2l+1,2m+1}|u\rangle_2 e_{2k+1,2l+1,2m+1} \\
&= \sum_{k,l,m=0}^{\infty} \gamma_2(k^2,l^2,m^2) \langle e_{k,l,m}|u\rangle_2 \, e_{k,l,m}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\gamma_2 \in B(\sigma(A_{\mathtt{D}}),\mathbb{C})$ şu şekilde tanımlıdır:

$$\gamma_2(k^2,l^2,m^2) := \begin{cases} 0 & k,l \text{ veya } m \in \mathbb{N}^* \text{ çift ise} \\ \langle e^a_{(k-1)/2,(l-1)/2,(m-1)/2}|C\rangle_2 & k,l \text{ ve } m \in \mathbb{N}^* \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve

$$C *_a P_{\text{çift}} = \gamma_2(A_{\mathtt{D}}).$$

6. SONUÇ

Bu tez, peridinamik yönetici operatörün, $\mathbb{R}^n$ üzerinde klasik yönetici operatörünün sınırlı bir fonksiyonu olduğu sonucu bulunan makalenin [1] yardımıyla ortaya çıkmıştır. Peridinamik operatörü konvolüsyon içermektedir. Bu tezde, adı geçen makalenin $1D$ için sonuçları yazıldı. Soyut konvolüsyonlar, Neumann ve Dirichlet sınır koşulları hariç, $2D$ ve $3D$'ye genelleştirildi. $2D$ ve $3D$'deki sınırlı bölgedeki klasik operatörün öz bazları yardımıyla konvolüsyonlar genelleştirildi. Periyodik, anti-periyodik, Neumann ve Dirichlet sınır koşulları çalışıldı. Periyodik ve anti-periyodik sınır koşullarında, soyut konvolüsyonların integral gösterimleri, $2D$ ve $3D$ için de $1D$'de olduğu gibi direkttir. $2D$ ve $3D$ için, periyodik ve anti-periyodik sınır koşullarının konvolüsyonları kullanılarak, ek integral konvolüsyonlar üretildi. Bunlara kısaca *'basit (simple)'* konvolüsyon dendi. Bu konvolüsyonların belirli bir kombinasyonu Neumann ve Dirichlet sınır koşullarını sağladı.

$\mathbb{R}^n$ üzerinde düzgün katsayıları olan bir operatör pür ayrık spektruma sahiptir. Bu durum uzay için öz bazların bulumasını sağlar. Düzenleyici fonksiyonlar, problemin altında yatan fiziği anlamak için önemlidir. Fiziksel problemler için yaratılacak düzenleyici fonksiyonlar iyi bir araştırma konusudur. Ayrıca, $2D$ ve $3D$ için, Neumann ve Dirichlet sınır koşullarının soyut konvolüsyonlarının hesaplanması açık bir problemdir. Ek olarak, bu elde edilen veya edilecek olan soyut konvolüsyonlarla ilgili $2D$ ve $3D$'de nümerik hesaplamalar da gelecekteki araştırma konularından birisidir.

KAYNAKLAR

[1] Aksoylu, B., Beyer, H.R., Celiker, F., Incorporating local boundary conditions into nonlocal theories, yayına gönderildi.

[2] Beyer, H.R., Aksoylu, B., Celiker, F., On a Class of Nonlocal Wave Equations from Applications, yayına gönderildi.

[3] Silling, S., Reformulation of Elasticity Theory for Discontinuities and Long-Range Forces, *J. Mech. Phys. Solids*, **48**: 175–209, 2000.

[4] Beyer, H., Kempfle, S., Definition of Physically Consistent Damping Laws with Fractional Derivatives, *ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1995

[5] Andreu-Vaillo, F., Mazon, J.M., Rossi, Toledo-Melero, J., Nonlocal Diffusion Problems *Mathematical Surveys and Monographs*, vol. **165**, (2010)

[6] Du, Q., Gunzburger, M., Lehoucq, R.B., Zhou, K., Analysis and Approximation of Nonlocal Diffusion Problems with Volume Constraints, *SIAM Rev.*, **54**: 667–696, (2012).

[7] Seleson, P., Gunzburger, M., Parks, M.L., Interface Problems in Nonlocal Diffusion and Sharp Transitions between Local and Nonlocal Domains, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **266**, 185–204, (2013).

[8] Carillo, C., Fife, P., Spatial Effects in Discrete Generation Population Models, *J. Math. Biol.*, **50**(2), 161–188, (2005).

[9] Mogilner, A., Leah Edelstein-Keshet, A Non-Local Model for a Swarm, *J. Math. Biol.*, **38**, 534–570, (1999)

[10] Gilboa, G., Osher, S., Nonlocal Operators with Applications to Image Processing, *Multiscale Modeling and Simulation*, **7**(3), 1005–1028, (2008).

[11] Kindermann, S., Osher, S., Jones, P.W., Deblurring and Denoising of Images by Nonlocal Functionals, *Multiscale Model. Simul.*, **4**, 1091–1111, (2005).

[12] Bodnar, M., Velazquez, J.J.L., An Integro-Differential Equation Arising as a Limit of Individual Cell-Based Models, *J. Differential Equations*, **222**, 341–380, (2006).

[13] Alberti, G., Bellettini, G., A Nonlocal Anisotropic Model for Phase Transition, Part I: The Optimal Profile Problem, *Math. Ann.*, **310**, 527–560, (1998).

[14] Alberti, G., Bellettini, G., A Nonlocal Anisotropic Model for Phase Transition: Asymtotic Behabviour of Rescaled, *European J. Appl. Math.*, **9**, 261–284, (1998).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	KILIÇER, Örsan
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	05.12.1987 Gediz
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	05303007812
Faks	:	
e-mail	:	okilicer@metu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	2013

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2010-2011	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Eğitim Asistanı (3 ay)
2011-2012	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Eğitim Asistanı (3 ay)
2013-2015	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi
2013-2015	Tübitak 1001-112M891	Proje Öğrencisi
2015-	ODTÜ	Araştırma Görevlisi

Yabancı Dil

İngilizce (Çok iyi)

Almanca (Temel)

Projeler

Tübitak 1001-112M891, 'Tabakalı Kompozit Yapıların Mukavemet ve Hasar Davranışını Önceden Tahmin Edebilecek Peridinamik Teoriyi Kullanan Bir Metod Geliştirilmesi',
(01.05.2013-01.05.2015)

Yayınlar

10. Ankara Matematik Günleri, (11.06.2015-12.06.2015)
"Yerel Olmayan Teorilere Dahil Edilen Yerel Sınır Değer Koşullarının 2 ve 3 Boyuta Genişletilmesi"