MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ENGİN SARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

NİSAN 2015

ANKARA

Fen Bilimleri Enstitü onayı

Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR
Anabilim Dalı Başkanı

ENGİN SARI tarafından hazırlanan MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Oktay DUMAN
Tez Danışmanı

Tez Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Mustafa BAYRAKTAR

Üye : Prof. Dr. Oktay DUMAN

Üye : Prof. Dr. Ogün DOĞRU

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Engin SARI

Üniversitesi : **TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi**
Enstitüsü : **Fen Bilimleri**
Anabilim Dalı : **Matematik**
Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Oktay DUMAN**
Tez Türü ve Tarihi : **Yüksek Lisans – Nisan 2015**

Engin SARI

MAKSİMUM-ÇARPIM OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

ÖZET

Bu yüksek lisans tezinde istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak pseudo-lineer yapıdaki maksimum-çarpım operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Hem klasik hem de istatistiksel yaklaşım sonuçları üzerinde durulmuştur. Üstelik elde edilen yaklaşımın istatistiksel oranları ile ilgili sonuçlara da yer verilmiştir. Son olarak lineer olmayan bu operatörler için q-Bernstein polinomları yardımıyla yeni bir uygulama sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: A-istatistiksel yakınsaklık, süreklilik modülü, maksimum-çarpım operatörleri, Shepard operatörleri, q-Bernstein polinomları.

University	:	**TOBB University of Economics and Technology**
Institute	:	**Institute of Natural and Applied Sciences**
Science Programme	:	**Mathematics**
Supervisor	:	**Prof. Dr. Oktay DUMAN**
Degree Awarded and Date	:	**M.Sc. – April 2015**

Engin SARI

APPROXIMATION PROPERTIES OF MAX-PRODUCT OPERATORS

ABSTRACT

In this thesis, by using the notion of statistical convergence, we investigate the aproximation properties of max-product operators that are pseudo-linear.

Both classical and statistical approximation results are studied. Moreover, the results related to the statistical rates of the approximation are discussed. Finally, a new application is presented for those nonlinear operators by means of q-Bernstein polynomials.

Keywords: A-statistical convergence, modulus of continuity, max-product operators, Shepard operators, q-Bernstein polynomials.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana veren ve çalışmalarım boyunca ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren değerli danışman hocam Prof. Dr. Oktay DUMAN'a ve ayrıca çalışmalarımın her aşamasında bana yardımcı olan kardeşim Deniz SARI'ya saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

Bu çalışmada kullanılmış olan semboller açıklamalarıyla birlikte aşağıda verilmektedir.

Semboller		**Açıklama**
(X, d)		kompakt metrik uzay
$\lvert K\rvert$		K kümesinin eleman sayısı
$\delta(K)$		K kümesininin yoğunluğu
$\delta_A(K)$		K kümesinin A-yoğunluğu
C_1		birinci mertebeden Cesàro matrisi
χ_K		K kümesinin karakteristik fonksiyonu
$C(X, [0, \infty))$		X metrik uzayı üzerinde tanımlı, negatif olmayan sürekli fonksiyonların uzayı
$\omega(f, \delta)$	$(\delta > 0)$	f fonksiyonunun süreklilik modülü
$L_n(f; x)$		maksimum-çarpım operatörü
$S_n^{\lambda}(f; x)$		Shepard maksimum-çarpım operatörü
$st_A - o(p_n)$		$o(p_n)$ oranında A-istatistiksel yakınsaklık
$st_A - o_m(p_n)$		$o_m(p_n)$ oranında A-istatistiksel yakınsaklık

1. GİRİŞ

Korovkin tipinde yaklaşımlar teorisi temel olarak operatör dizilerinin düzgün yakınsaklığına, pozitifliğine ve lineerliğine dayanmaktadır. Literatürde her üç dayanak noktası için çeşitli ilerlemeler ve genişletmeler bulunmaktadır. Örneğin düzgün yakınsaklık yerine toplam süreci (aritmetik ortalama yakınsaklık, hemen hemen yakınsaklık vb.) ve istatistiksel yakınsaklık gibi daha zayıf yakınsaklık metotları kullanılmıştır (bkz: [3],[4],[13],[17]). Operatörlerin pozitifliği kavramı da fonksiyonun artanlığı, azalanlığı, konveksliği ve konkavlığı özelliklerinden yararlanılarak zayıflatılmıştır (bkz: [2],[3]).Yaklaşım operatörlerinin lineerliği ise son yıllarda Bede ve arkadaşları tarafından pseudo-lineerlik kavramı kullanılarak geliştirilmiştir (bkz: [5],[6],[7],[8]). Duman tarafından verilen [9] no'lu makalede ise hem yakınsaklık metotu hem de lineerlik kavramı zayıflatılmıştır. Bu yüksek lisans tezinde daha çok [9] da elde edilen sonuçlar üzerinde duracağız. Bunun için önce çalışılacak yaklaşım operatörleri tanımlanacak daha sonra onun klasik ve istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenecektir. Tezin son kısmında elde edilen sonuçlar özel bir yaklaşım operatörü üzerine uygulanacaktır. Burada q-tamsayılarıyla tanımlanan genelleştirilmiş Bernstein operatörlerinin lineer olmayan versiyonları inşa edilecektir.

2. TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde, ilerde ihtiyaç duyacağımız bazı temel tanım ve notasyonlara yer vereceğiz. Öncelikle "yoğunluk", "A-yoğunluk" tanımları yapılarak, bu tanımlar yardımıyla "istatistiksel yakınsaklık" ve "A-istatistiksel yakınsaklık" kavramları verilecektir. Son olarak teoremlerin ispatlarında kullanacağımız "süreklilik modülü" tanımı verilerek, süreklilik modülünün bazı temel özelliklerine değinilecektir.

2.1 Yoğunluk

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere bir $K \subset \mathbb{N}$ altkümesi verilsin ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ şeklinde bir küme tanımlansın. K kümesinin eleman sayısı da $|K|$ ile gösterilsin.

Tanım 2.1.1. *Bir $K \subset \mathbb{N}$ altkümesi için*

$$\lim_n \frac{1}{n}|K_n|$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin yoğunluğu denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir [20]. Bu tanıma göre asal sayılar kümesi 0 yoğunluklu iken doğal sayılar kümesinin yoğunluğu 1 olup, doğal sayıların her bir sonlu altkümesi de 0 yoğunlukludur. Bunun yanısıra, örneğin $\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{n^3 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$ ve $\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}) = 1/2$ olduğu tanımdan çıkarılabilir. Bir küme 0 yoğunluklu ise onun her alt kümesi de 0 yoğunlukludur. Ayrıca bir B kümesi yoğunluğa sahip ise, bu durumda $\delta(\mathbb{N} \backslash B) = 1 - \delta(B)$ olacaktır [12],[20].

2.2 İstatistiksel Yakınsaklık

Bu bölümde yoğunluk kavramı kullanılarak bilinen klasik yakınsaklık tanımından daha zayıf olan istatistiksel yakınsaklık tanımına yer verilecektir.

Tanım 2.2.1. *Bir x dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması demek her $\varepsilon > 0$ için*

$$\lim_j \frac{1}{j}|n \leq j : |x_n - L| \geq \varepsilon| = 0$$

olması demektir. Denk bir ifade ile, $K := K(\varepsilon) = \{n \leq j : |x_n - L| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(K(\varepsilon)) = 0$$

olması demektir. İstatistiksel yakınsaklık $x_n \to L(stat)$ veya $st - \lim_n x_n = L$ şeklinde gösterilir [11],[22].

Bu tanıma göre, eğer x dizisi bir L sayısına istatistiksel yakınsak ise bu durumda L sayısının herhangi bir $\varepsilon > 0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durum istatistiksel yakınsaklığın klasik yakınsaklıktan daha genel olduğunu gösterir. Buradan anlaşılmaktadır ki yakınsak her dizi aynı değere istatistiksel yakınsaktır; fakat yakınsak olmamasına rağmen istatistiksel yakınsak diziler tanımlanabilir.

Örnek 2.2.1. *Genel terimi*

$$x = (x_n) = \begin{cases} 1, & n = m^2 \text{ } ise \\ 0, & n \neq m^2 \text{ } ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan x dizisi için $st-\lim_n x_n = 0$ *olduğu görülebilir, fakat buradaki x dizisi klasik anlamda yakınsak değildir.*

Yakınsak her dizi sınırlıdır fakat istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması gerekmez. Bu ilginç özelliği sağlayan bir dizi örneğini aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Örnek 2.2.2. $x = (x_n)$ *dizisinin genel terimi*

$$x = (x_n) = \begin{cases} \sqrt{n}, & n = m^2 \ ise \\ 0, & n \neq m^2 \ ise \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda yine $st - \lim_n x_n = 0$ *olmasına rağmen bu x dizisi üstten sınırsızdır.*

2.3 *A*-Yoğunluk

Bu bölümde yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramı regüler matrisler kullanılarak geliştirilecektir.

Tanım 2.3.1. $A = (a_{jn})$ *j, n = 1, 2,...; sonsuz bir matris olmak üzere verilen bir* $x = (x_j)$ *dizisi için, x in "A-dönüşüm dizisi",* $Ax := ((Ax)_j)$ *ile gösterilir ve*

$$(Ax)_j = \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} x_n$$

şeklinde tanımlanır. Burada her bir n için seri yakınsak kabul edilmektedir. Eğer $\lim_j x_j = L$ *olduğunda* $\lim_j (Ax)_j = L$ *koşulu gerçekleniyorsa, bu durumda A "regüler matris" adını alır [14].*

Toplanabilme teorisinde $C_1 := (c_{jn})$ *Cesàro matrisi*

$$c_{jn} = \begin{cases} \frac{1}{j}, & 1 \leq n \leq j \ ise \\ 0, & n > j \ ise \end{cases}$$

ile tanımlanır. Kolayca görüleceği üzere Cesàro matrisi regülerdir. Bir $A = (a_{jn})$ matrisinin regüler olması, Silverman - Toeplitz koşulları olarak da bilinen aşağıdaki teorem ile karakterize edilir. Şimdi bu teoremi ispatsız olarak vereceğiz.

Teorem 2.3.1. *(Silverman-Toeplitz) Bir $A = (a_{jn})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul*

i. $\sup_j \sum_{n=1}^{\infty} |a_{jn}| < \infty$,

ii. $\forall$ *n için* $a_n := \lim_j a_{jn} = 0$,

iii. $\lim_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} = 1$

koşullarının sağlanmasıdır [14],[18].

Tanım 2.3.2. *$A = (a_{jn})$, negatif olmayan regüler bir toplanabilme matrisi olsun. Bir $K \subset \mathbb{N}$ altkümesi için*

$$\delta_A(K) = \lim_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\chi_K(n) \tag{2.1}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin A-yoğunluğu denir. Buna denk olarak,

$$\delta_A(K) = \lim_j \sum_{n\in K} a_{jn} \tag{2.2}$$

yazabiliriz. (2.1) deki χ_K sembolü, K kümesinin karakteristik fonksiyonunu göstermektedir [12].

2.4 *A*-İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda da A-yoğunluk yardımıyla A-istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtacağız.

Tanım 2.4.1. *$A=(a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matrsi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için $K:=K(\varepsilon)=\{n\leq j:|x_n-L|\geq\varepsilon\}$ olmak üzere*

$$\lim_j \sum_{n=1}^{\infty} a_{jn}\chi_{K(\varepsilon)}(n)=0 \tag{2.3}$$

ise, ya da buna denk olarak her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_j \sum_{n:|x_n-L|\geq\varepsilon} a_{jn}=0 \quad veya \quad \delta_A(K(\varepsilon))=0 \tag{2.4}$$

gerçekleniyorsa, bu durumda $x=(x_n)$ dizisi L sayısına A-istatistiksel yakınsaktır denir ve $st_A-\lim x=L$ ile gösterilir [12],[19].

Bu tanıma göre, eğer (2.4) ile verilen denklemde A matrisi yerine I birim matrisini alırsak, bu durumda klasik anlamda yakınsaklık elde edilir. Yani; $st_I-\lim x=\lim x=L$ bulunur. A yerine C_1 Cesàro matrisi alındığında ise, A-istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

A-istatistiksel yakınsaklık tanımı kullanılarak yakınsak her dizinin A- istatistiksel yakınsak olduğu görülebilir. Fakat bunun karşıtı her zaman için doğru değildir. $\lim_j max_n\{a_{jn}\}=0$ şartını sağlayan negatif olmayan regüler $A=(a_{jn})$ matrisi için A-istatistiksel yakınsaklık klasik yakınsaklıktan daha güçlü bir ifadedir [15].

2.5 Süreklilik Modülü

(X,d) kompakt metrik uzay ve f, X üzerinde sürekli, reel değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun süreklilik modülü $\omega(f,\delta)$ ile gösterilir ve

$$\omega(f,\delta)=\bigvee\{|f(x)-f(y)|:x,y\in X,d(x,y)\leq\delta\}$$

olarak tanımlanır. Burada $\bigvee$ sembolü maksimumu göstermektedir. Süreklilik modülü, $\delta > 0$ uzunluğunu aşmayan bir aralıkta fonksiyonunun maksimum salınımını ifade etmektedir.

Şimdi süreklilik modülünün bazı temel özelliklerini verelim (bkz: [1],[16]).

i. *Her* $x, y \in X$ için $|f(x) - f(y)| \leq \omega(f, d(x, y))$ eşitsizliği gerçeklenir,

ii. *Her* $\delta > 0$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(f, n\delta) \leq n\omega(f, \delta)$ eşitsizliği sağlanır,

iii. *Her* $\lambda, \delta > 0$ için $\omega(f, \lambda\delta) \leq (1 + \lambda)\omega(f, \delta)$ eğitsizliği gerçeklenir.

3. MAKSİMUM- ÇARPIM OPERATÖRLERİ

(X, d), kompakt metrik uzay ve $A = (a_{jn})$, negatif olmayan regüler bir matris olsun. Bu durumda maksimum-çarpım operatörü

$$L_n(f; x) = \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x, x_k).f(x_k), x \in X \quad ve \quad f \in C(X, [0, \infty)) \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (bkz: [6],[9]). Bu çalışmada $\forall x \in X$ için

$$\delta_A\big(\{n \in \mathbb{N} : \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x, x_k) = 1\}\big) = 1 \tag{3.2}$$

eşitliğinin sağlandığı kabul edilecektir. Burada $k = 0, 1, ..., n$ için x_k lar X metrik uzayından alınan temsilci noktalar olup $K_n(x, x_k)$ çekirdek fonksiyonunun da X metrik uzayı üzerinde tanımlı, negatif olmayan x'e göre sürekli bir fonksiyon olduğu kabul edilmektedir.

Şimdi maksimum-çarpım operatörleri için pseudo-lineerlik özelliğini hatırlayalım.

$$\forall f, g \in C(X, [0, \infty)) \text{ ve } \forall \alpha, \beta \geq 0 \text{ için}$$

$$L_n(\alpha.f \bigvee \beta.g; x) = \alpha.L_n(f; x) \bigvee \beta.L_n(g; x)$$

eşitliği gerçeklenir [6]. Bu eşitlik bize göstermektedir ki maksimum-çarpım operatörleri klasik anlamda lineer operatörler değildir.

3.1 A-İstatistiksel Yaklaşım Teoremi

Makimum-çarpım operatörlerinin yaklaşım teoreminden önce aşağıdaki lemmaya ihtiyaç duyacağız.

Lemma 3.1.1. *$\forall a_k, b_k \in [0,\infty)$ ve $k = 0,1,...,n$ için*

$$|\bigvee_{k=0}^{n} a_k - \bigvee_{k=0}^{n} b_k| \leq \bigvee_{k=0}^{n} |a_k - b_k|$$

eşitsizliği gerçeklenir [6].

İspat. Maksimum-çarpım operatörlerinin azalmayan özelliğini kullanarak

$$\bigvee_{k=0}^{n} a_k = \bigvee_{k=0}^{n} |b_k + a_k - b_k| \leq \bigvee_{k=0}^{n} b_k + |a_k - b_k|$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği düzenlersek istenileni elde etmiş oluruz.

Şimdi O. Duman tafarından 2010 yılında verilen istatistiksel yaklaşım teoremini ifade edebiliriz (bkz: [9]).

Teorem 3.1.1. *(X,d), kompakt metrik uzay ve $A = (a_{jn})$, negatif olmayan regüler bir matris olsun. Eğer (3.1) ve (3.2) ile verilen L_n operatörü,*

$$st_A - \lim_n \left\{ \bigvee \{|L_n(\varphi_x; x)| : x \in X\} \right\} = 0, \qquad \varphi_x(y) = d^2(y,x)$$

şartını sağlıyorsa $\forall f \in C(X,[0,\infty))$ için

$$st_A - \lim_n \left\{ \bigvee \{|L_n(f;x) - f(x)| : x \in X\} \right\} = 0$$

eşitliği gerçeklenir [9].

İspat. $x \in X$ ve $f \in C(X,[0,\infty))$ verilsin. f nin X üzerindeki düzgün sürekliliğinden $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta > 0$ öyle ki,

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}\varphi_x(y) \tag{3.3}$$

eşitsizliği $\forall y \in X$ için sağlanır. Burada $M_f := \bigvee\{|f(y)| : y \in X\}$ olarak tanımlanmıştır.

$$K := \{n \in \mathbb{N} : \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x, x_k) = 1\}$$

kümesini göz önüne alırsak (3.2) den $\delta_A(K) = 1$ ya da $\delta_A(\mathbb{N} \setminus K) = 0$ bulunur. $\forall n \in K$ için (3.3) ve Lemma 3.1.1 uyarınca

$$\begin{aligned}
|L_n(f;x) - f(x)| &= |\bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k).f(x_k) - \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k).f(x)| \\
&\leq \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k).|f(x_k) - f(x)| \\
&\leq \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k).\big(\varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}\varphi_x(x_k)\big) \\
&\leq \varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2} \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k).\varphi_x(x_k) \\
&= \varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2} L_n(\varphi_x;x)
\end{aligned}$$

elde edilir. $x \in X$ üzerinden maksimum alırsak, $\forall n \in K$ için

$$\bigvee\{|L_n(f;x) - f(x)| : x \in X\} \leq \varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2}\bigvee\{|L_n(\varphi_x;x)| : x \in X\}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Verilen bir $r > 0$ sayısı için $\varepsilon < r$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçerek D ve D' kümelerini aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$D := \{n \in \mathbb{N} : (\bigvee\{|L_n(f;x) - f(x)| : x \in X\}) \geq r\},$$

$$D' := \{n \in \mathbb{N} : (\bigvee\{|L_n(\varphi_x;x)| : x \in X\}) \geq \frac{(r-\varepsilon)\delta^2}{2M_f}\}.$$

D ve D' kümelerinin tanımından yararlanarak

$$D \cap K \subseteq D' \cap K$$

olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Buna göre $\forall j \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir:

$$\sum_{n \in D \cap K} a_{jn} \leq \sum_{n \in D' \cap K} a_{jn} \leq \sum_{n \in D'} a_{jn}.$$

Şimdi $j \to \infty$ üzerinden limit alırsak

$$\lim_j \sum_{n \in D \cap K} a_{jn} = 0$$

bulunur. Ayrıca $\forall j \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n \in D} a_{jn} = \sum_{n \in D \cap K} a_{jn} + \sum_{n \in D \cap (\mathbb{N} \setminus K)} a_{jn} \leq \sum_{n \in D \cap K} a_{jn} + \sum_{n \in (\mathbb{N} \setminus K)} a_{jn}$$

eşitsizliği sağlanır. $\delta_A(\mathbb{N} \setminus K) = 0$ olduğunu kullanarak

$$\lim_j \sum_{n\in D} a_{jn} = 0$$

ifadesi bulunur ki bu da bize maksimum-çarpım operatörlerinin istatistiksel yakınsaklığını verir. Yani sonuç olarak

$$st_A - \lim_n \Big\{ \bigvee \{|L_n(f;x) - f(x)| : x \in X\}\Big\} = 0$$

bulunur.

Şimdi Teorem 3.1.1 in bir sonucu olarak aşağıdakini elde edebiliriz.

Sonuç 3.1.1. *(X,d), kompakt metrik uzay olsun. Eğer (3.1) ile tanımlanan L_n operatörleri*

$$\bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k) = 1(\forall n \in \mathbb{N}, x \in X)$$

şartını sağlıyor ve $\{L_n(\varphi_x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi, sıfır fonksiyonuna X üzerinde düzgün yakınsaksa, her $f \in C(X,[0,\infty))$ için $\{L_n(f)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi de f fonksiyonuna X üzerinde düzgün yakınsaktır [9].

Teorem 3.1.1, maksimum-çarpım operatörlerinin bir $f \in C(X,[0,\infty))$ fonksiyonuna istatistiksel yakınsaklığını verirken; Sonuç 3.1.1, bize klasik yakınsaklığı vermektedir. Fakat aşağıdaki örnek ikisi arasındaki ilişkiyi ortaya koymaktadır.

Örnek 3.1.1. *(X,d), kompakt metrik uzay olsun. $x \in X$, $\lambda, n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(X,[0,\infty))$ için Shepard maksimum-çarpım operatörü:*

$$S_n^{\lambda}(f;x) = \bigvee_{k=0}^{n} K_{n,\lambda}(x,x_k).f(x_k) = \frac{\bigvee_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{d^{\lambda}(x,x_k)}}{\bigvee_{j=0}^{n} \frac{1}{d^{\lambda}(x,x_j)}}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $K_{n,\lambda}(x, x_k)$ çekirdek fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$K_{n,\lambda}(x, x_k) = \frac{\frac{1}{d^{\lambda}(x,x_k)}}{\bigvee_{j=0}^{n} \frac{1}{d^{\lambda}(x,x_j)}}, \qquad x \notin \{x_k : k = 0, 1, ..., n\}.$$

Her $f \in C(X, [0, \infty))$ için $\{S_n^{\lambda}(f; x)\}$ dizisi f fonksiyonuna X üzerinde düzgün yakınsaktır [7]. Sıfır fonksiyonuna A-istatistiksel olarak yakınsak fakat klasik anlamda ıraksak bir (u_n) dizisi tanımlayabiliriz [15]. Tanımladığımız (u_n) dizisi ve $\{S_n^{\lambda}(f; x)\}$ dizisi yardımıyla, $x \in X$ ve $f \in C(X, [0, \infty))$ için maksimum-çarpım operatörünü

$$T_n(f; x) = (1 + u_n) S_n^{\lambda}(f; x) \tag{3.4}$$

şelinde tanımlarsak Teorem 3.1.1 in tüm şartları T_n operatörü için gerçeklenir. Buradan $\forall f \in C(X, [0, \infty))$ için

$$st_A - \lim_n \Big\{ \bigvee \{|T_n(f; x) - f(x)| : x \in X\} \Big\} = 0$$

buluruz. Fakat dikkat edilirse (u_n) klasik anlamda yakınsak olmadığından (3.4) ile verilen $(T_n(f))$ dizisiyle f fonksiyonuna yaklaşmak imkansızdır.

3.2 A-İstatistiksel Yakınsaklık Oranı

Bu bölümde Teorem 3.1.1 de elde edilen istatistiksel yaklaşımın oranlarına değineceğiz. Önce [10] da verilen aşağıdaki iki tanıma ihtiyaç vardır.

Tanım 3.2.1. *$A = (a_{jn})$ negatif olmayan regüler bir matris ve $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için*

$$\lim_{j} \frac{1}{p_j} \sum_{n:|x_n-L|\geq\varepsilon} a_{jn} = 0$$

ise, bu durumda $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisine* $o(p_n)$ *oranında* L *sayısına* A*-istatistiksel yakınsaktır denir ve* $x_n - L = st_A - o(p_n)$ $(n \to \infty)$ *ile gösterilir.*

Tanım 3.2.2. $A = (a_{jn})$ *negatif olmayan regüler bir matris ve* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. Her* $\varepsilon > 0$ *için*

$$\lim_{j} \sum_{n:|x_n-L|\geq\varepsilon p_n} a_{jn} = 0$$

ise, bu durumda $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisine* $o_m(p_n)$ *oranında* L *sayısına* A*-istatistiksel yakınsaktır denir ve* $x_n - L = st_A - o_m(p_n)(n \to \infty)$ *ile gösterilir.*

İstatistiksel yakınsaklık oranlarıyla ilgili Teoremlere geçmeden önce maksimum-çarpım operatörleri için aşağıdaki lemmaya itiyaç duyarız.

Lemma 3.2.1. *Her* $a_k, b_k \geq 0(k = 0, 1, , n)$ *için*

$$\bigvee_{k=0}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\bigvee_{k=0}^{n} a_k^2}\sqrt{\bigvee_{k=0}^{n} b_k^2}$$

eşitsizliği sağlanır [9].

İspat. $p, q \in \{0, 1, , n\}$ için

$$\bigvee_{k=0}^{n} a_k = a_p \quad ve \quad \bigvee_{k=0}^{n} b_k = b_q$$

olduğunu farzedelim. $\forall k = 0, 1, , n$ için

$$\bigvee_{k=0}^{n} a_k b_k \leq a_p b_q, \bigvee_{k=0}^{n} a_k^2 = a_p^2 \quad ve \quad \bigvee_{k=0}^{n} b_k^2 = b_q^2$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan da sonuç kolaylıkla elde edilir.

Teorem 3.2.1. *(X, d), kompakt metrik uzay, $A = (a_{jn})$, negatif olmayan regüler bir matris ve $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. Eğer (3.1) ve (3.2) ile verilen L_n operatörü $f \in C(X, [0, \infty))$ için*

$$\omega(f, \delta_n) = st_A - o(p_n) \qquad (n \to \infty)$$

$$\delta_n := \sqrt{\bigvee\{L_n(\varphi_x; x) : x \in X\}}, \qquad \varphi_x(y) = d^2(y, x)$$

şartını sağlıyorsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n \geq p_n$ ve $q_n \geq 1$ şartını sağlayan pozitif terimli artmayan bir (q_n) dizisi için

$$\bigvee\{|L_n(f; x) - f(x)| : x \in X\} = st_A - o(q_n) \qquad (n \to \infty)$$

eşitliği gerçeklenir [9].

İspat. $x \in X$ ve $f \in C(X, [0, \infty))$ olsun. Teorem 3.1.1 in ispatındaki aynı K kümesini kullanarak $\forall n \in K$ ve $\delta > 0$ için Lemma 3.2.1 uyarınca

$$
\begin{aligned}
|L_n(f;x)-f(x)| &\leq \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k).|f(x_k)-f(x)| \\
&\leq \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k).\omega(f,d(x_k,x)) \\
&\leq \omega(f,\delta)\bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k).(1+\frac{d(x_k,x)}{\delta}) \\
&= \omega(f,\delta)\big\{1+\frac{1}{\delta}\bigvee_{k=0}^{n} K_n(x,x_k)d(x_k,x)\big\} \\
&= \omega(f,\delta)\Bigg\{1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\bigvee_{k=0}^{n}[K_n(x,x_k)]}.\sqrt{\bigvee_{k=0}^{n}[K_n(x,x_k)d^2(x_k,x)]}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan $\forall n \in K$ ve $\delta > 0$ için

$$|L_n(f;x)-f(x)| \leq \omega(f,\delta)\{1+\frac{1}{\delta}\sqrt{L_n(d^2(.,x);x)}\}$$

eşitsizliği bulunur. Aynı n ve δ değeri için

$$\bigvee\{|L_n(f;x)-f(x)| : x \in X\} \leq \omega(f,\delta)\{1+\frac{\delta_n}{\delta}\}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Özel olarak $\delta := \delta_n$ seçersek

$$\bigvee\{|L_n(f;x)-f(x)| : x \in X\} \leq 2\omega(f,\delta_n)$$

buluruz. $\varepsilon > 0$ için E ve E' kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$E \; : \; \big\{n \in \mathbb{N} : (\bigvee\{|L_n(f;x)-f(x)| : x \in X\}) \geq \varepsilon\big\},$$

$$E' \quad : \quad \big\{n \in \mathbb{N} : \omega(f, \delta_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}\big\}.$$

Bu tanımlardan yararlanarak

$$E \cap K \subseteq E' \cap K$$

yazabiliriz. $\forall j \in \mathbb{N}$ için $q_j \geq p_j$ olduğundan

$$\frac{1}{q_j} \sum_{n \in E \cap K} a_{jn} \leq \frac{1}{p_j} \sum_{n \in E' \cap K} a_{jn} \leq \frac{1}{p_j} \sum_{n \in E'} a_{jn}$$

eşitsizliğini elde ederiz. j üzerinden limit alırsak

$$\lim_j \frac{1}{q_j} \sum_{n \in E \cap K} a_{jn} = 0$$

buluruz. Teorem 3.1.1 in ispatında olduğu gibi

$$\sum_{n \in E} a_{jn} = \sum_{n \in E \cap K} a_{jn} + \sum_{n \in E \cap (\mathbb{N} \setminus K)} a_{jn} \leq \sum_{n \in E \cap K} a_{jn} + \sum_{n \in (\mathbb{N} \setminus K)} a_{jn}$$

yazabiliriz. Buradan

$$\frac{1}{q_j} \sum_{n \in E} a_{jn} \leq \frac{1}{q_j} \sum_{n \in E \cap K} a_{jn} + \frac{1}{q_j} \sum_{n \in (\mathbb{N} \setminus K)} a_{jn}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\forall j \in \mathbb{N}$ için $q_j \geq 1$ olduğundan

$$\frac{1}{q_j}\sum_{n\in E} a_{jn} \le \frac{1}{q_j}\sum_{n\in E\cap K} a_{jn} + \sum_{n\in(\mathbb{N}\setminus K)} a_{jn}$$

eşitsizliği sağlanır. $j \to \infty$ üzerinden limit alırsak

$$\lim_j \frac{1}{q_j}\sum_{n\in E} a_{jn} = 0$$

buluruz. Buradan

$$\bigvee\{|L_n(f;x) - f(x)| : x \in X\} = st_A - o(q_n) \qquad (n \to \infty)$$

sonucuna ulaşırız.

Bir diğer A-istatistiksel oran teoremini de aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

Teorem 3.2.2. *(X, d), kompakt metrik uzay, $A = (a_{jn})$, negatif olmayan regüler bir matris ve $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif terimli artmayan bir dizi olsun. Eğer (3.1) ve (3.2) ile verilen L_n operatörü $f \in C(X, [0, \infty))$ için*

$$\omega(f, \delta_n) = st_A - o_m(p_n) \qquad (n \to \infty)$$

$$\delta_n := \sqrt{\bigvee\{L_n(\varphi_x; x) : x \in X\}}, \qquad \varphi_x(y) = d^2(y, x)$$

şartını sağlıyorsa, her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n \ge p_n$ şartını sağlayan pozitif terimli artmayan bir (q_n) dizisi için

$$\bigvee\{|L_n(f;x) - f(x)| : x \in X\} = st_A - o_m(q_n) \qquad (n \to \infty)$$

eşitliği gerçeklenir [9].

İspat. $\varepsilon > 0$ için F ve F' kümelerini

$$F \quad : \quad \big\{n \in \mathbb{N} : (\bigvee\{|L_n(f;x) - f(x)| : x \in X\}) \geq \varepsilon q_n\big\},$$

$$F' \quad : \quad \big\{n \in \mathbb{N} : \omega(f, \delta_n) \geq \frac{\varepsilon p_n}{2}\big\}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda az önceki ispat tekniğinden yararlanarak

$$F \cap K \subseteq F' \cap K$$

yazabiliriz. Buradan

$$\lim_j \sum_{n \in F \cap K} a_{jn} = 0$$

eşitliğini elde ederiz. Sonuç olarak

$$\lim_j \sum_{n \in F} a_{jn} = 0$$

olup, bu ise

$$\bigvee\{|L_n(f;x) - f(x)| : x \in X\} = st_A - o_m(q_n) \ (n \to \infty)$$

demektir.

4. SONUÇLAR VE UYGULAMALAR

Bu bölümde, maksimum-çarpım operatörlerinin klasik Bernstein polinomu ve onun q-genelleştirmesi üzerine olan uygulamalarına yer verilecektir.

4.1 q-Bernstein Polinomları

Kabul edelim ki; $n \in \mathbb{N}$, $f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ ve $q \in (0,1]$ olsun. Bernstein polinomu ve onun q-genelleştirmesi

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, \tag{4.1}$$

$$B_n(f;x;q) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right) x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) \tag{4.2}$$

olarak tanımlanmaktadır [17],[21]. Burada

$$[n]_q := 1 + q + ... + q^{n-1} (n = 1, 2, ...); \qquad [0]_q := 0,$$

$$[n]_q = \begin{cases} \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1 \text{ ise} \\ [n]_q = n, & q = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$[n]_q! = \begin{cases} [n]_q...[2]_q[1]_q, & n = 1, 2, ... \text{ ise} \\ 1, & n = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Burada $B_n(f; x)$ derecesi en fazla n olan bir polinomu göstermektedir. Kolayca görebiliriz ki; $B_n(f; 0) = f(0)$ ve $B_n(f; 1) = f(1)$ eşitlikleri gerçeklenir. Bernstein teoremi, $[0, 1]$ aralığı üzerinde $B_n(f)$ dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını ifade etmektedir. Eğer $q = 1$ seçersek, genelleştirilmiş Bernstein polinomu klasik Bernstein polinomuna dönüşür. Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $q \in (0, 1]$ için q-Bernstein polinomları

$$B_n(f; 0; q) = f(0), \qquad B_n(f; 1; q) = f(1)$$

özelliklerini sağlamaktadır.

(4.1) ve (4.2) ile tanımlanan Klasik Bernstein polinomları ve q-Bernstein polinomları pozitif ve lineer operatörlerdir. Bu nedenle yaklaşın özellikleri klasik Korovkin teoremi yardımıyla incelenebilir [16]. Klasik Bernstein polinomlarının lineer olmayan yapıdaki modifikasyonu Bede ve Gal tarafından üretilmiştir [5]. Lineer olmayan yapıdaki operatörler için klasik Korovkin teoremini uygulayamayız ancak bu yeni operatörlerin klasik Bernstein polinomlarıyla benzer yaklaşım özellikleri olduğu Bede ve Gal tarafından gösterilmiştir [5]. Operatörler lineer olmadığından dolayı bu çalışmalar yaklaşım teoremine önemli katkılar sağlamaktadır. Şimdi q-Bernstein polinomlarının lineer olmayan yapıdaki versiyonunu inceleyeceğiz.

$$C_+[0, 1] := \{f : [0, 1] \to [0, +\infty) : f, [0, 1] \text{ üzerinde sürekli}\}$$

olarak tanımlayalım. Binom açılımından dolayı

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1$$

olduğunu biliyoruz. Bundan yararlanarak klasik Bernstein polinomunu

$$B_n(f;x) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu formülde toplam operatörünü, maksimum operatörüyle yer değiştirerek Bede ve Gal [5] aşağıdaki lineer olmayan yaklaşım operatörünü elde etmiştir:

$$B_n^{(M)}(f;x) = \frac{\bigvee_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}}{\bigvee_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}, \qquad (f \in C_+[0,1], n \in \mathbb{N}). \quad (4.3)$$

Burada "M" harfi maksimumun kısaltmasıdır. Bu lineer olmayan yaklaşım operatörlerinin süreklilik modülü yardımıyla yaklaşım hızı aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$|B_n^{(M)}(f;x) - f(x)| = \omega(f, \frac{1}{\sqrt{n+1}}).$$

Benzer şekilde lineer olmayan q-Bernstein operatörlerini de aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$B_n^{(M)}(f;x;q) = \frac{\bigvee_{k=0}^{n} p_{n,k}(x;q) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right)}{\bigvee_{k=0}^{n} p_{n,k}(x;q)}. \quad (4.4)$$

Burada $n \in \mathbb{N}$, $f \in C_+[0,1]$, $x \in [0,1]$ ve $q \in (0,1)$ olmak üzere $p_{n,k}(x;q)$,

$$p_{n,k}(x;q) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=1}^{n-k} (1 - q^s x)$$

şeklinde verilmektedir. Eğer $x_{n,k}$ ve $K_n(x, x_{n,k})$ ifadeleri

$$x_{n,k} = \frac{[k]_q}{[n]_q} \quad ve \quad K_n(x, x_{n,k}) = \frac{p_{n,k}(x;q)}{\bigvee_{k=0}^{n} p_{n,k}(x;q)}$$

şeklinde tanımlanırsa q-Bernstein operatörleri için daha önce de (3.1) de verildiği gibi aşağıdaki formu elde ederiz:

$$B_n^{(M)}(f;x;q) = \bigvee_{k=0}^{n} K_n(x, x_{n,k}).f(x_{n,k}).$$

$q \to 1^-$ iken (4.4) ile verilen $B_n^{(M)}(f;x;q)$ operatörü (4.3) ile verilen $B_n^{(M)}(f;x)$ operatörüne indirgenir. Kolayca görebiliriz ki; her $x \in [0,1]$ ve her $q \in (0,1)$ için

$$\bigvee_{k=0}^{n} p_{n,k}(x;q) > 0$$

eşitsizliği gerçeklenir. Bu nedenle $B_n^{(M)}(f;x;q)$ operatörü iyi tanımlıdır. Her $f \in C_+[0,1]$ için

$$B_n^{(M)}(f;0;q) = f(0)$$

eşitliği gerçeklenir. Ayrıca $f \in C_+[0,1]$ ve f fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde azalmayan ise

$$B_n^{(M)}(f;1;q) = f(1)$$

eşitliğini elde ederiz. Gerçekten, f fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde azalmayan olduğunda

$$p_{n,k}(1;q)f\Big(\frac{[k]_q}{[n]_q}\Big) \le p_{n,n}(1;q)f\Big(\frac{[n]_q}{[n]_q}\Big) = f(1)$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buradan $B_n^{(M)}(f;1;q) = f(1)$ ifadesine ulaşırız. Fakat her $f \in C_+[0,1]$ için bu sonuç elde edilemez. Örneğin $[0,1]$ aralığı üzerinde $f(x) = 1 - x$ fonksiyonunu göz önüne alırsak, her $q \in (0,1)$ için

$$B_n^{(M)}(f;1;q) > p_{n,0}(1;q)f(0) = \prod_{s=1}^{n}(1-q^s) > 0 = f(1)$$

eşitsizliğini elde ederiz. $f \in C_+[0,1]$ iken, her $n \in \mathbb{N}$ ve $q \in (0,1)$ için $B_n^{(M)}(f;.;q) \in C_+[0,1]$ olduğunu görebiliriz; ancak $C_+[0,1]$ üzerinde lineer değildir.

$f, g \in C_+[0,1]$ için $B_n^{(M)}(f;x;q)$ operatörü monoton artandır. Yani

$$f \le g \Rightarrow B_n^{(M)}(f;x;q) \le B_n^{(M)}(g;x;q) \tag{4.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca her $f, g \in C_+[0,1]$ için

$$B_n^{(M)}(f+g;x;q) \le B_n^{(M)}(f;x;q) + B_n^{(M)}(g;x;q) \tag{4.6}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik $B_n^{(M)}(f;x;q)$ operatörünün $C_+[0,1]$ üzerinde lineer olmadığını gösterir.

Şimdi (4.5) ve (4.6) ile verilen eşitsizlikleri ve $B_n^{(M)}(e_0;1;q) = 1$ eşitliğini kullanarak $B_n^{(M)}(f;x;q)$ operatörü için aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.1.1. *Her $f \in C_+[0,1]$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1]$ ve $q \in (0,1)$ için*

$$|B_n^{(M)}(f;x;q) - f(x)| \leq 2\omega(f, \delta_n(x;q))$$

olur. Burada

$$\delta_n(x;q) := B_n^{(M)}(\varphi_x;x;q), \qquad \varphi_x(t) = |t-x|$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Şimdi (0,1) aralığında bulunan sabit q değerini, terimleri (0,1) aralığında bulunan ve

$$0 < q_n < 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$st_A - \lim_n q_n = 1 \quad ve \quad st_A - \lim q_n^n = 1$$

şartlarını sağlayan uygun bir q_n dizisi ile yer değiştirirsek

$$st_A - \lim_n \bigvee \{B_n^{(M)}(\varphi_x;x;q_n) : x \in [0,1]\} = 0$$

eşitliği gerçeklenmiş olur. Yukarıdaki ifade $B_n^{(M)}(\varphi_x;x;q_n)$ operatörünün sıfır fonksiyonuna A-istatistiksel yakınsaklığını vermektedir.

4.2 Sonuç Uyarıları

Bu yüksek lisans tezinde pseudo-lineer yapıdaki (lineer olmayan) maksimum-çarpım operatörlerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Özellikle yaklaşımdaki klasik yakınsaklık yerine daha zayıf olan "istatistiksel yakınsaklık" kavramı kullanılırken Duman [9] tarafından elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Bu yaklaşımların istatistiksel oranları da incelenmiştir. Son olarak q-Bernstein operatörleri yardımıyla burada bulunan sonuçlara örnek teşkil edecek yeni bir maksimum-çarpım operatör dizisi inşa edilmiştir.

Maksimum-çarpım operatörleriyle elde edilen bu sonuçların gelecek yıllardaki çalışmalarda maksimum-minimum operatörlerine de aktarılma potansiyeli bulunmaktadır. Üstelik istatistiksel yaklaşım için elde edilen teoremlerin "toplam süreci" kavramıyla yeniden ele alınması da bir başka araştırma problemi olarak önerilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Altomare, F. and Campiti, M., *Korovkin-type approximation theory and its applications, Walter de Gruyter* & *Co. Berlin*, **17**, 1994.

[2] Anastassiou, G.A. and Duman, O., *On relaxing the positivity condition of linear operators in statistical Korovkin-type approximations, Journal of Computational Analysis*, **11**, 7-9, 2009.

[3] Anastassiou, G.A. and Duman, O., *Towards intelligent modeling: Statistical approximation theory, Springer-Verlag, Berlin*, **14**, 2011.

[4] Atlıhan, Ö.G. and Orhan, C., *Matrix summability and positive linear operators, Positivity*, **11**, 387-398, 2007.

[5] Bede, B. and Gal, S.G., *Approximation by nonlinear Bernstein and Favard-Szász-Mirakjan operators of max-product kind, J. Concr. Appl. Math.*, **8**, 193-207, 2010.

[6] Bede, B., Nobuhara, H., Daňková, M. and Nola, A. D., *Approximation by pseudo - linear operators, Fuzzy Sets* & *Systems*, **159**, 804-820, 2008.

[7] Bede, B., Nobuhara, H., Fodor, J. and Hirota, K., *Max-product Shepard approximation operators, J. Adv. Comput. Intelligence Intelligent Informatics*, **10**, 494-497, 2006.

[8] Bede, B., Schwab, E. D., Nobuhara, H. and Rudas, I.J., *Approximation by Shepard Type pseudo-linear operators and applications to image processing, Internat. J. Approx. Reason.*, **50**, 21-26, 2009.

[9] Duman, O., *Statistical convergence of max-product approximating operators, Turk J Math*, **34**,501-514, 2010.

[10] Duman, O., Khan, M.K. and Orhan, C., *A-Statistical convergence of approximating operators, Math. Inequal. Appl.*, **6**, 689-699, 2003.

[11] Fast, H., *Sur la convergence statistique, Colloq. Math.*, **2**, 241-244, 1951.

[12] Freedman, A. R. and Sember, J. J., *Densities and summability, Pacific J. Math.*, **95**, 293-305, 1981.

[13] Gadjiev, A.D. and Orhan, C., *Some approximation theorems via statistical convergence, Rocky Mountain J. Math.*, **32**, 129-138, 2002.

[14] Hardy, G. H., *Divergent Series, Oxford Univ. Press, London*, 1949.

[15] Kolk, E., *Matrix summability of statistically convergent sequences, Analysis*, **13**, 77-83, 1993.

[16] Korovkin, P.P., *Linear Operators and Approximation Theory, Hindustan Publishing Corp. (India), Delhi*, 1960.

[17] Lorentz, G.G., *Bernstein Polynomials, Mathematical Expositions, no. 8, University of Toronto Press, Toronto*, 1953.

[18] Maddox, I. J., *Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press*, 1970.

[19] Miller, H. I., *A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, Trans. Amer. Math. Soc.*, **347**, 1811-1819, 1995.

[20] Niven, I. and Zuckerman, H. S., *An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley & Sons, 4th ed. New York*, 1980.

[21] Phillips, G.M., *Bernstein Polynomials based on the q-integers, Ann. Numer. Math.*, **4**, 511-518, 1997.

[22] Steinhaus, H., *Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. Collog. Math.*, **2**, 73-74, 1951.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	:	ENGİN, SARI
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	05.07.1981 Ankara
Medeni hali	:	Bekar
Telefon	:	0506 217 97 58
e-mail	:	esari@etu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Mersin Üniversitesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2006	Peker İnş. Tic. ve San. A.Ş.	Çevre Müh.
2007-2008	A.Z.K.-sutek İŞ ORTAKLIĞI	Çevre Müh.
2014	Sivas Çevre ve Şehircilik İl Müdürlüğü	Çevre Müh.
2014-2015	TCDD Genel Müdürlüğü	Çevre Müh.

Yabancı Dil

İngilizce

Uluslararası Konferans Bildirileri

- E. Sarı, "*Approximation Properties of Max-Product Operators*", Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM14), 6-9 November, 2014, Antalya, Turkey.