T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

MATEMATİK AKADEMİK BAŞARISI YÜKSEK ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN VE MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN İSPAT YAPABİLME BECERİLERİNİN VE ARGÜMAN TERCİHLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim TURAN

TOKAT

Ağustos, 2019

T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

MATEMATİK AKADEMİK BAŞARISI YÜKSEK ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN VE MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN İSPAT YAPABİLME BECERİLERİNİN VE ARGÜMAN TERCİHLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İbrahim TURAN

Danışman: Dr. Öğretim Üyesi Zülfiye ZEYBEK ŞİMŞEK

TOKAT

Ağustos, 2019

ETİK SÖZLEŞME

Bu belge ile bu tezdeki bütün bilgi toplama ve raporlaştırma sürecinin Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğine, Eğitim Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzuna, genel akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak gerçekleştirildiğini; bu tez çalışmasını "intihali engelleme" programı ile taradığımı, bana ait olmayan tüm bilgi, düşünce ve bulgulara atıf yaptığımı ve kaynağını gösterdiğimi beyan eder, sorumluluğun tarafıma ait olduğunu kabul ederim.

23/08/2019

İbrahim TURAN

JÜRİ İMZA SAYFASI

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

İbrahim TURAN'ın "Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerilerinin ve argüman tercihlerinin incelenmesi" adlı çalışması 02/08/2019 tarihinde jürimiz tarafından Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Adı Soyadı	İmza
Başkan: Doç. Dr. Gürsel GÜLER	
Üye (Tez Danışmanı): Dr. Öğr. Üyesi Zülfiye ZEYBEK ŞİMŞEK	
Üye : Doç. Dr. Eyüp SEVİMLİ	

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

23/08/2019

Doç.Dr.Kerem KILIÇER

Enstitü Müdürü

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Eğitim yaşamımın her aşamasında, destekleriyle hep yanımda olan, dualarını eksik etmeyen, bu günlere gelmemde en çok emeği geçen anneme, babama ve ağabeylerime çok teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bana her zaman değerli fikirleriyle yardımcı olan, üzerimde emekleri olan sayın hocalarım; Dr. Öğretim Üyesi Adem EROĞLU, Dr. Öğretim Üyesi Makbule Gözde DİDİŞ KABAR, Doç. Dr. Eyüp SEVİMLİ ve Dr. Öğretim Üyesi Esra BALGALMIŞ'a teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarımı yönlendiren, gönderdiğim maillere hemen dönüt veren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri, yardımlarını esirgemeyerek yetişme ve gelişmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Dr. Öğretim Üyesi Zülfiye ZEYBEK ŞİMŞEK'e teşekkürü borç bilirim.

2018-2019 yılı Tokat ili Turhal Alparslan Ortaokulu matematik öğretmenlerine ve araştırmaya katılan öğrencilere, araştırmaya yaptıkları katkıdan, ispat problemlerini içtenlikle ve gönüllü olarak cevapladıklarından dolayı saygılarımı sunarım.

Son olarak tezimin her aşamasında yanımda olan, tezi bitirmem içim bana en çok destek veren, motivasyon kaynağım, çok sevdiğim değerli eşim Pembegül TURAN'a tüm kalbimle teşekkür ederim.

İbrahim TURAN

ÖNSÖZ

Matematiksel ispatlar, matematik eğitiminin önemli bir parçası olmasına rağmen matematiksel ispat yapmak, her düzeyden öğrenciler ve hatta matematik öğretmeni adayları için bile zordur (Arslan, 2007). Güncel eğitim reformları ve matematik eğitimcileri matematiksel ispatların, eğitimin ilk kademelerinden itibaren matematik eğitiminin önemli bir parçası olması gerektiğini savunurlar (CCSSI, 2010; NCTM, 2000). Gerek NCTM (2000)'in ispat öğretimine erken yaşlarda başlanması gerektiğine dair vurguları, gerekse küçük yaş grupları ile ispat öğretimine yönelik yürütülen çalışmalar Türkiye'deki eğilimin aksine ispatın ortaöğretim öncesi dönemde de ele alınabileceğini ortaya koymaktadır.

Bu doğrultuda araştırmanın amacı, matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerilerinin ve argüman tercihlerinin incelenmesi olarak belirlenmiştir. Çalışmanın birinci bölümünde, çalışmanın problem durumu, amacı, önemi, sayıltıları, sınırlılıkları ve tanımlarından bahsedilmiştir. İkinci bölümde, çalışmanın kavramsal çerçevesi doğrultusunda ispat ile ilgili görüşlere ve tanımlara, ispatın fonksiyonları ve matematik eğitimi üzerindeki rolüne, ulusal ve uluslararası matematik öğretim programlarında ispatın yerine, ispat düzeyleri ve ispat şemalarına, ispat yapma sürecinde karşılaşılan zorluklar ve kavram yanılgılarına yer verilmiş, alan yazın taraması yapılarak ilgili çalışmalar sunulmuştur. Üçüncü bölümde, çalışmanın araştırma modeli (deseni), katılımcı grup, araştırmacının rolü, veri toplama araçları, pilot uygulama, veri toplama süreci, verilerin nasıl analiz edildiği ve araştırmanın geçerlilik ve güvenirliliğinin nasıl sağlandığı ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır. Dördüncü bölümde, çalışmanın araştırma sorusu doğrultusunda öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerileri ve ispat tercihlerine yönelik elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Beşinci bölümde, bulgulardan elde edilen sonuçlar alan yazında yer alan çalışmalarla desteklenerek tartışılmıştır. Altıncı bölümde ise çalışmanın sonuçları sunularak, bu alanda çalışacak araştırmacılara ve matematik öğretmenlerine yönelik öneriler sunulmuştur.

ÖZET

MATEMATİK AKADEMİK BAŞARISI YÜKSEK ORTAOKUL ÖĞRENCİLERİNİN VE MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN İSPAT YAPABİLME BECERİLERİNİN VE ARGÜMAN TERCİHLERİNİN İNCELENMESİ

Turan, İbrahim

Yüksek Lisans, Matematik Eğitimi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Zülfiye Zeybek Şimşek

Ağustos 2019, xx + 168 sayfa

Matematiksel muhakeme ve ispat, insanın doğuştan getirdiği bir yetenektir. Muhakeme ve ispat yeteneğinin gelişimi, öğrencilerin okul hayatını ve gerçek yaşamındaki etkinliklerini kolaylaştırmada büyük bir öneme sahiptir. Son yıllarda matematik eğitiminde ispatın yeri ve önemi hızla artmaktadır. Bu sebeple ispat, matematik eğitiminin önemli amaçlarından biri olmuştur. Güncel eğitim reformlarında da ispata daha fazla önem verilmeye başlanmış, okul öncesi dönemden ortaöğretim son sınıfa kadar tüm sınıf seviyelerinde ispatın matematik eğitiminin bir parçası olması gerekliliği benimsenmiştir. Fakat matematik eğitiminde ispat yapmak, her seviyeden öğrenciler ve hatta öğretmen adayları için bile zor bir kavramdır. İspatın üst düzey ve her seviyeden öğrencinin zorlandığı bir konu olması sebebiyle bu çalışmada, matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerileri ve argüman tercihleri incelenmiştir.

Bu çalışma, 2018-2019 eğitim öğretim yılının ikinci döneminde Tokat ilinin bir ilçesinde bulunan bir devlet okulunda okumakta olan; altı ortaokul 7. sınıf, altı ortaokul 8. sınıf öğrencisi ve bu okulda görev yapmakta olan 4 matematik öğretmeni ile gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerilerinin ve argüman tercihlerinin incelenmesinin amaçlandığı bu çalışma, nitel araştırma yöntemlerinden olan durum araştırması desenine göre tasarlanmıştır. Araştırmanın amacı doğrultusunda öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, matematiğin en temel öğrenme alanlarından biri olan, sayılar öğrenme alanına ait

matematiksel önermelerin doğruluğunu kanıtlama ve farklı seviyelerdeki argümanları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi çalışmanın uygulama konusu olarak seçilmiştir. Çalışma öğrenciler için, matematik dersi yılsonu başarı puanı, genel yılsonu başarı puanı, cinsiyet ve çalışmaya katılmadaki gönüllülük gibi ölçütlere göre; öğretmenler için görev süresi, cinsiyet ve çalışmaya katılmadaki gönüllülük gibi ölçütlere göre amaçlı örnekleme olarak belirlenen on iki öğrenci ve dört matematik öğretmeni ile yürütülmüştür. İlk olarak öğrencilere ve matematik öğretmenlerine, ispat yapabilme becerilerini belirlemeye yönelik, araştırmacı tarafından hazırlanan İspat Beceri Testi (İBT) formu uygulanmıştır. İBT formu uygulandıktan belirli bir süre sonra öğrencilere ve matematik öğretmenlerine, argüman tercihlerini belirlemeye yönelik, araştırmacı tarafından hazırlanan Argüman Değerlendirme Testi (ADT) formu uygulanmıştır. Ardından öğrenciler ve matematik öğretmenleri ile yarı yapılandırılmış bireysel görüşmeler yapılmış ve katılımcıların formlara verdikleri cevapları daha ayrıntılı bir şekilde açıklamaları amaçlanmıştır. Bu çalışmanın veri kaynaklarını İBT ve ADT formlarına verilen cevaplar ve bireysel görüşme kayıtları oluşturmuştur.

Çalışmanın bulgularına göre, sayılar öğrenme alanına ait verilen matematiksel önermeleri doğrularken, öğrencilerin en fazla deneysel (empirik) argümanları, matematik öğretmenlerinin ise en fazla cebirsel-biçimsel argümanları kullandıkları belirlenmiştir. Anlatımsal-sözel (narrative) argümanların, öğrencilerin doğrulamalarında, deneysel argümanlardan sonra fazlaca kullandıkları diğer bir yöntem olduğu görülmüştür. Cebirsel-biçimsel argümanları tercih eden az sayıda öğrenci mevcut iken, görsel (visual) argümanları tercih eden öğrenci bulunmamaktadır. Ayrıca çalışmada kullanılan matematiksel önermelere yönelik sunulan argümanlardan, öğrencilerin çoğunlukla anlatımsal-sözel argümanları ikna edici buldukları görülse de, diğer argümanları ikna edici bulan öğrenci sayılarının da birbirine yakın olduğu bulunmuştur. Matematik öğretmenlerinin çoğunluğu ise verilen matematiksel önermeler için sunulan argümanlardan, en fazla puanı cebirsel-biçimsel argümana, en az puanı ise deneysel argümana vereceklerini belirttikleri görülmüştür.

Çalışmanın sonucunda öğrencilerin, alan yazınla benzer sonuçlar sergilediği ve doğrulamalarında deneysel ispat şemasına uygun doğrulamalar yaptığı fakat kendilerine sunulan argümanlardan deneysel argüman dışında; anlatımsal-sözel, görsel ve cebirsel-biçimsel argümanları da tercih ettikleri sonucuna ulaşılmıştır. Matematik öğretmenlerinin ise doğrulamalarında alan yazının aksine cebirsel-biçimsel argümanları kullandıkları ve kendilerine sunulan argümanlardan cebirsel-biçimsel argümanları içeren cevapları yüksek puanla, deneysel argümanları içeren cevapları ise düşük puanla değerlendireceklerini belirttikleri sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca matematik öğretmenleri ile matematik eğitiminden sorumlu oldukları öğrencilerin, ispat oluşturma becerilerinin çoğunlukla benzeşmediği, argüman değerlendirme becerilerinin ise yarı yarıya benzeştiği sonuçlarına ulaşılmıştır. Çalışmanın bu sonuçlarından yola çıkarak matematik öğretmenlerine ve araştırmacılara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Doğrulama, İspat Yapabilme Becerileri, Argüman Tercihleri, Matematiksel İspat.

ABSRACT

INVESTIGATING HIGH ACHIEVEING MIDDLE GRADE STUDENTS' AND THEIR MATHEMATICS TEACHERS' PROVING SKILLS AND THEIR CHOICES OF ARGUMENTS

Turan, İbrahim

Master's Thesis, Division of Mathematics Education

Advisor: Assist. Prof. Dr. Zülfiye Zeybek Şimşek

August 2019, xx + 168 pages

Mathematical reasoning and proof is an innate ability. Developing reasoning skills and the ability of proving constitute such an important step in facilitating successful school life and real-life activities. In recent years, the importance of proof in mathematics education has been recognized widely. Thus, reasoning and proving have become one of the important objectives of mathematics education. Current educational reforms movements have emphasized the importance of proofs at all grade levels from pre-kindergarten through high school. Therefore, the purpose of this study was to investigate high achieving middle grade students' and their math teachers' ability to prove and their choices of argument types.

This study included six 7th grade and six 8th grade students, who were studying at a public school located in a district of Tokat province, and 4 mathematics teachers during the second semester of the 2018-2019 academic year. Since the aim of this study was to examine the ability of students' and their mathematics teachers' proving and their preferences of argument types, this study was designed as a case study, which is one of the qualitative research methods. In line with the aim of the study, participating students and mathematics teachers were asked to prove the truthiness of mathematical statements and to evaluate the level of convincingness of the provided arguments in the learning area of numbers, which constitutes one of the most important learning areas in mathematics curriculum. The participants of the study were selected based on different criteria such as academic achievement, end-of-year GPAs, gender, volunteering to

participate for students; working experiences, gender and volunteering to participate for teachers. Twelve students and four math teachers were selected based on aforementioned criteria by using purposeful sampling method. In order to determine the ability of proving, the Proving Ability Test (PAT) form, designed by the researcher, was administered to the students and mathematics teachers. After a while administering the PAT form, the Argument Assessment Test (AAT) form, designed by the researcher, was administered to the students and mathematics teachers to determine their preferences of argument types. Later, semi-structured individual interviews were conducted in order to gather more detailed data with the students and the teachers. The PAT and AAT forms as well as individual interview records constituted the main data sources for this study.

The findings of the study revealed that the participating students constructed experimental (empirical) arguments for validating the truth of the given mathematical statements the most. In addition to the empirical arguments, the students also constructed narrative-verbal arguments. While empirical arguments were mostly constructed by the participating students, algebraic-formal arguments were the least used method. Visual arguments, on the other hand, were constructed by none of the participating students. During evaluating presented arguments, it could not be concluded that the participating students preferred experimental (empirical), narrative-verbal, visual or algebraic-formal arguments to one another. Other findings of the study demonstrated that mathematics teachers constructed algebraic-formal arguments while validating the mathematical statements the most. In addition, most of the teachers stated that they would assign the least points to the experimental (empirical) arguments and the most points to the algebraic-formal arguments.

The overall findings of the study concluded that the students constructed experimental proofs while proving, which align well with the results of other studies in the literature. However, they preferred narrative-verbal, visual and algebraic-formal arguments as the most convincing arguments while evaluating the arguments presented to them. Mathematics teachers, on the other hand, constructed algebraic-formal arguments and evaluated the arguments constructed as algebraic arguments with a higher score. In addition, it could be concluded that students and the mathematics teachers who are responsible for their mathematics education do not have much similarity in their proving skills. Their argument evaluation skills, on the other hand, are

half-similar. Based on these results, suggestions will be provided for mathematics teachers and researchers.

Key Words: Choices of Proof Types, Mathematical Proofs, Proving Skills, Validations.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

KISALTMALAR

NCTM: Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics)

CCSSI: Ortak Temel Standartlar (Common Core State Standards Initiative)

MEB: Milli Eğitim Bakanlığı

TDK: Türk Dil Kurumu

TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Study (Uluslararası Eğitim Başarılarını Değerlendirme Kuruluşu)

PİSA: Programme for International Student Assessment (Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı)

İBT: İspat Beceri Testi

ADT: Argüman Değerlendirme Testi

D.A.: Deneysel (Empirik) Argüman

A.S.A. Anlatımsal-Sözel (Narrative) Argüman

G.A.: Görsel Argüman

C.B.A.: Cebirsel-Biçimsel Argüman

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın problem durumu, amacı, önemi, sayıltıları (varsayımlar), sınırlılıkları ve araştırma ile ilgili başlıca tanımlara yer verilmiştir.

Problem Durumu

Matematik sadece sayı ve hesap bilimi olmayıp, aynı zamanda güçlü bir iletişim aracıdır. Matematiğin kendine has sistematik yapısı, uluslararası bir dil olgusu kazanmasını sağlamıştır (Uğurel, 2010). Bu sistematik yapının içerisinde muhakeme ve ispat, matematiğin ayrılmaz temel parçalarıdır (Schoenfeld, 1994). Harel ve Sowder (1998) ispatı, bir matematiksel ifadenin doğruluğu hakkında şüpheler ortaya koyma veya var olan şüpheleri ortadan kaldırma süreci olarak tanımlamaktadır. Ayrıca bu sürecin aslını anlama ve ikna etme olmak üzere iki alt süreç içerdiğini belirtmektedir. Hanna (1990)'a göre matematiksel ispat, matematiksel bilginin formülleştirilmesine veya sonuçların sistematikleştirilmesine katkıda bulunur. Dolayısıyla ispatlar, sadece bir ifadenin doğruluğunu göstermekle kalmaz, aynı zamanda öğrencilerin kavramları daha iyi anlamasına ve matematiksel anlayışlarının gelişimine yardımcı olur. Matematiksel muhakeme ve ispat, insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenektir. Gerekli altyapılar ve öğrenme ortamları sağlandığında, bu ispat ve muhakeme yapabilme potansiyeli ortaya çıkabilmektedir (Altıparmak ve Öziş, 2005). Muhakeme ve ispat yeteneğinin gelişimi, öğrencilerin okul hayatını ve gerçek yaşamındaki etkinliklerini kolaylaştırmada büyük bir öneme sahiptir (Çontay, 2017).

Son yıllarda matematik eğitiminde ispatın yeri ve önemi hızla artmaktadır. Bu sebeple ispat, matematik eğitiminin önemli amaçlarından biri olmuştur. Matematik öğretim programları ve matematik öğretmeni yetiştirme programları, ispatın bu önemine göre güncellenmektedir. Ortak Temel Standartlar (Common Core State Standards Initiative) [CCSSI] (2010), öğrencilerin ilkokul ve ortaokuldan itibaren geometri deneyimlerini biçimlendirdiklerini ve ortaöğretim çağlarında daha kesin tanımlar kullanarak ispatlar yapmaya başladıklarını belirtmektedirler. Benzer olarak Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics) [NCTM] (2000), ispatın öğretim programlarına sadece belirli ünitelerde dahil edilen bir konu olmadığını, tüm sınıf düzeylerinde matematik eğitiminin doğal bir parçası haline gelmesi gerektiğini vurgulamaktadırlar. Öğrenciler ispatlar ile matematiksel sonuçların altında yatan sebepleri ortaya çıkarırken, matematiksel varsayımları kullanırlar ve matematiğin anlamlı olduğunu görürler (CCSSI, 2010; NCTM, 2000). Ülkemizde Milli Eğitim Bakanlığı Matematik Öğretim Programı'nın genel ve özel amaçlarında şu ifadeler yer almaktadır.

> …gündelik hayatta ihtiyaç duyacağı temel düzeyde sözel, sayısal ve bilimsel akıl yürütme ile sosyal becerileri ve estetik duyarlılığı kazanmış, bunları etkin bir şekilde kullanarak sağlıklı hayat yönelimli bireyler olmalarını sağlamak (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018, s. 4)
>
> Problem çözme sürecinde kendi düşünce ve akıl yürütmelerini rahatlıkla ifade edebilecek, başkalarının matematiksel akıl yürütmelerindeki eksiklikleri veya boşlukları görebilecektir (MEB, 2018, s. 9)

Belirtilen bu amaçlarda, akıl yürütme becerilerinin ve dolayısıyla muhakeme becerilerinin önemine vurgu yapılmaktadır. Fakat programın kazanım kısmı incelendiğinde, akıl yürütme ve ispat kavramı lise müfredatında bir süreç kazanımı olarak değerlendirilmekte; ortaokul müfredatında ise ispata hiç yer verilmemekte veya ispatı çağrıştıran ifadelere yer verilmektedir (Zeybek, Üstün ve Birol, 2018). Bu durum ülkemiz eğitim sisteminin, her eğitim kademesinde ispat eğitimine gerekli önemi vermediğini göstermektedir.

Birçok ülkede matematik öğretiminde ispata yer verilmemekte; aritmetik kavramlara, yoğun hesaplamalara ve algoritmik süreçlere odaklanılmaktadır (Harel ve Sowder, 1998; Stylianides, 2008). Fakat ortaokuldan sonra, özellikle geometri konularında, öğrencilerden ispatları anlamaları ve yazmaları beklenmektedir (Ball, Hoyles, Jahnke ve Movshovitz-Hadar, 2002). Bu durumda öğrencilerden, ortaokul sonrası kademelerde ispatla ilgili bu beklenti, ortaokul düzeyinde öğrencilerde ispatın temelinin oluşturulması gerekliliğini göstermektedir. Güncel eğitim reformları ve raporları matematik eğitiminde ispatın önemini vurgulamakta; her sınıf seviyesinde ispatın matematik eğitim süreçlerinin bir parçası olması gerekliliğinden bahsetmektedir. Ancak müfredatlardaki kazanımlar bu beklentiyi karşılamamaktadır. Günümüz matematik eğitiminde ispat, hala geometri dersi ile ilişkilendirilmeye veya üst düzey matematik eğitiminin bir parçası gibi algılanmaya devam edilmektedir (Knuth, 2002a).

Matematik eğitiminde ispat ve muhakeme ile ilgili yurt içi ve yurt dışında birçok çalışma yürütülmüştür (Albayrak-Bahtiyari, 2010). Matematik eğitiminde ispat ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde bu çalışmaların genellikle, matematik öğretmenlerinin (veya matematik öğretmen adaylarının) veya farklı seviyelerdeki (üniversite, lise, ortaokul ve ilkokul) öğrencilerin; ispat yapma süreçleri, ispata yönelik görüşleri, ispat yapma becerileri veya ispat eğilimleri gibi konularda yoğunlaştığı sonucuna ulaşılmıştır (Albayrak-Bahtiyari, 2010; Arslan, 2007; Aylar, 2014; Aylar ve Şahiner, 2016; Balacheff, 1988; Çalışkan, 2012; Çontay, 2017; Flores, 2006; Hanna, 1990, 2000a, 2000b; Healy ve Hoyles, 2000; Jones, 2000; Güler, 2013; Güner, 2012; Güven, Çelik ve Karataş, 2005; Knuth, 2002a, 2202b; Knuth, Choppin ve Bieda, 2009; Knuth, Slaughter, Choppin ve Sutherland, 2002; Küchemann ve Hoyles, 2005; Mansi, 2003; Miyazaki, 2000; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Özer ve Arıkan, 2002; Öztürk, 2017; Quinn, 2009; Stylianides, 2007a, 2007b; Tuncer, 2014; Uğurel, 2010; Ülker, 2018; Yeşildere ve Türnüklü, 2006; Zaimoğlu, 2012, Zeybek-Şimşek ve Üstün, 2019). Bu araştırmaların çoğunluğunda, matematik eğitiminde anlamlı öğrenmelerin sağlanması ve ezberin önlenmesinde ispatın önemine vurgu yapılmaktadır (Hanna, 2000a; Knuth, 2002a). Ayrıca gerekli imkanlar ve eğitim ortamları sağlandığında ispat becerilerinin gelişeceğini belirten çalışmalar da mevcuttur (Altıparmak ve Öziş, 2005; Aylar, 2014; Aylar ve Şahiner, 2016). İlgili alan yazında, farklı kademelerdeki öğrencilerin, eğitim süreci içerisinde ispat yapma becerileri, ispat seviyeleri, ispat öğretimi yapıldığında ispat eğilimlerindeki değişimler, ispat konusundaki eksiklikleri gibi konularda çalışmalar yapıldığı görülmüştür (Aylar, 2014; Aylar ve Şahiner, 2016). Matematik eğitiminde ispatın rolünün, her sınıf düzeyinde artan önemine rağmen, ilköğretim düzeyinde ispat kavramı ile ilgili çok fazla çalışma yapılmamıştır (Stylianides, 2007b).

İspat deneyimleri öğrenciler için okul hayatlarının her seviyesinde matematik eğitiminin bir parçası olmalıdır (CCSSI, 2010; Hanna, 2000a; Knuth ve diğerleri, 2009; Mansi, 2003; NCTM, 2000; Schoenfeld, 1994; Stylianides, 2007a). Eğitim-öğretim sürecinin her seviyesinde öğrencilerin okul tecrübelerinin en önemli öğelerinden biri öğretmenlerdir. Öğretmenlerin, eğitim-öğretim sürecinde müfredatın uygulayıcısı ve öğrencilerin ispat deneyimlerinin merkezinde olmaları sebebiyle, ispat ile ilgili bilgi ve becerileri yeterli seviyede olmalıdır. Öğretmenlerin ispata yönelik bilgileri ve eğilimleri sınırlı olduğunda, öğrencilerin de ispat konusunda kavram yanılgılarına sahip olma olasılığı artmaktadır (Healy ve Hoyles, 2000; Knuth, 2002a, 2002b). Bazı araştırmalar matematik öğretmenlerinin ve matematik öğretmen adaylarının ispat ile ilgili bilgilerinin yetersiz olduğu, ispat yaparken zorlandıkları ve ispat ile ilgili kavram yanılgılarının olduğunu ortaya koymaktadır (Almeida, 2003; Healy ve Hoyles, 2000; Jones, 2000; Moralı ve diğerleri, 2006). Bu doğrultuda, hem öğretmenlerin, hem de öğrencilerin ispatla ilgili görüşlerini, bu süreçte kullandıkları yöntemleri, yaklaşımları ve yaşadıkları zorlukları bilmek önem taşımaktadır (Gökkurt, Deniz, Akgün, ve Soylu, 2014).

Matematiksel ifadelerin aslını anlama ve ikna etme süreçleri olarak tanımlanan ispat şeması, bireylerin kendilerini ve başkalarını nasıl ikna ettiklerine ışık tutmaktadır (Harel ve Sowder, 1998). Öğretmenlerin ve öğrencilerin ispat becerilerinin ve argüman tercihlerinin incelenmesi ve sahip oldukları şemaların belirlenmesi, onların ispat süreçlerini anlamada ve bu bağlamda öneriler geliştirerek ilgili alan yazına katkı sağlamada etkili bir yol olabileceği düşünülmüştür. Böylelikle eğitim ortamlarının nasıl düzenleneceğine ve öğretim programlarında nelere dikkat edileceğine yönelik fikirler oluşacağı düşünülmektedir. Bu doğrultuda, akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencileri ile bu öğrencilerin matematik öğretmenlerinin sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait ispat yapabilme becerilerinin ve argüman tercihlerinin incelenmesinin uygun bir konu olduğuna karar verilmiştir. Akademik başarısı yüksek öğrencilerin tercih edilme ve bu süreçte sayılar ve işlemler öğrenme alanının tercih edilme nedenleri bir sonraki başlıkta verilecektir.

Araştırmanın Amacı

İspat matematik öğrenmede bir araçtır (Knuth, 2002a). Matematiksel bilginin oluşması sürecindeki neden ve niçin sorularına cevap ispatla mümkündür. İmamoğlu (2010)'a göre öğrenciler, ispatlar vasıtasıyla matematikçilerin ne yaptığını anlarlar. Son yıllarda ispatın matematik eğitimindeki yeri ve önemi hızla artarken bu önemin karşılığı öğretim programlarına yansımamıştır. NCTM (2000) matematiksel ispata bütün sınıf düzeyi müfredatlarında yer verilmesi gerektiğini vurgularken, ülkemiz ortaokul matematik eğitim programında ispat kavramı açıkça yer almayıp, ispatı çağrıştıran ifadelere (örüntü bulma, ilişkileri fark etme, akıl yürütme, problem çözme, vb.) yer verildiği görülmektedir (MEB, 2018). İspatın alan yazınca belirtilen öneminden ve belirtilen bu önemin karşılığının ülkemizde sağlanamamış olmasından dolayı araştırmada, öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

Ülkemiz ortaokul matematik öğretim programının en önemli öğrenme alanlarından biri, sayılar ve işlemler öğrenme alanıdır. NCTM (2000)'in de matematik müfredatının en önemli öğrenme alanlarından biri olarak vurguladığı sayılar öğrenme alanı, ülkemiz matematik öğretim müfredatında tüm sınıf seviyelerinde yer almaktadır (MEB, 2013). Bu sebeple çalışmada, öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerini ortaya koyabilmeleri amacıyla hazırlanan matematiksel önermeler, sayılar ve işlemler öğrenme alanından seçilmiştir. Ancak çalışmada kullanılan matematiksel önermelerin, sayılar ve işlemler öğrenme alanında yer alan kazanımlarla kapsam geçerliliği sağlaması amaçlanmamıştır.

Çalışma grubunu oluşturan öğrenciler, akademik başarı seviyesi yüksek 7. ve 8. sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. Günümüz eğitim sisteminde başarılı öğrenci diye tabir edilen, yılsonu akademik başarı puanı yüksek olan öğrencilerin, ispat ve muhakeme yeteneklerinin ne düzeyde olduğu ve akademik başarılarının bu yeteneklerine yansıyıp yansımadığının ortaya konulması planlanmış; ispat becerilerinin ve argüman tercihlerinin matematik öğretmenleriyle birlikte incelenmesi amaçlanmıştır. İspatın üst düzey bir konu olması ve her kademeden öğrenci için zor bir kavram olması, ispat çalışılacak grup olarak akademik başarısı yüksek öğrencilerin tercih edilmesinde diğer bir etken olmuştur. Ayrıca Aylar (2014)'ün belirttiği üzere akademik başarısı yüksek öğrencilerin cebir bilgisinin gelişmiş olması ve ispat yapabilmenin sembolik dil kullanımı ve cebir bilgisi gerektirmesi, bu öğrencilerin tercih edilmesinde diğer bir gerekçedir. Nitekim, ispat becerilerinin incelenmesi amacıyla yapılan çalışmalarda ortaokul, lise ve üniversite öğrencilerinin büyük bir çoğunluğunun, ispatlama becerilerinde deneysel ispat şemasına sahip olduğu ve ispat yapabilen öğrenci sayısının kısıtlı olduğuna dair bulgular bulunmaktır (Aylar, 2014; Aylar ve Şahiner, 2016; Çalışkan, 2012; Healy ve Hoyles, 2000; Harel ve Sowder, 1998; Knuth, 2002a; Knuth ve diğerleri, 2002; Özer ve Arıkan, 2002; Zeybek-Şimşek ve Üstün, 2019). Yapılan bazı çalışmalar ise öğrencilerin ispat konusundaki yetersizliklerinin, cebir konusundaki eksikliklerine bağlı oluğunu vurgulamaktadır (Arslan, 2007; Aylar, 2014; Çalışkan 2012; Özer ve Arıkan, 2002; Zaimoğlu, 2012). Ortaokul öğrencileri somut düşünceden soyut düşünceye geçiş aşamasında yer almakta ve matematik öğretim programında 6. sınıftan itibaren cebirsel dil kullanmaya başlamaktadırlar (Arslan, 2007; Aylar, 2014). 7. ve 8. sınıflarda cebirsel dil kullanımının artmaya başlaması sebebiyle çalışma grubunu oluşturacak öğrencilerin, 7. ve 8. sınıflardan seçilmesinin daha uygun olacağı düşünülmüştür.

Ülkemizde, ispat eğitiminin gelişimine ve ilgili alan yazına katkı sağlayabilmek için bu araştırmada, akademik başarısı yüksek 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin ve bu öğrencilerin matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerilerini ve argüman tercihlerini betimleyebilmek amaçlanmıştır. Ayrıca öğrencilerin ve öğretmenlerin ispat yapabilme süreçleri ve argüman tercihleri hakkında görüşleri de irdelenmiştir. Bu çalışmanın, ülkemizdeki ispat öğretimi ve süreç içerisinde öğrencilerin ispat yapma becerilerinin geliştirilmesine yönelik öğretim anlayışının iyileştirilmesine katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca, yapılan bu araştırma ile ispat ve ispatlamaya ilişkin yapılacak çalışmaların geliştirilmesine yönelik alan yazına katkı sağlanması da amaçlanmaktadır. Bu amaç doğrultusunda araştırma sorusu aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

"Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul 7. ve 8. sınıf öğrencileri ile bu öğrencilerin matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerileri ve argüman tercihleri hangi seviyededir?"

Bu araştırma sorusu doğrultusunda araştırmada aşağıdaki alt sorulara da cevap aranacaktır.

1- Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul (7. ve 8. sınıf) öğrencilerinin ispat yapabilme becerileri hangi seviyededir?

   1-a Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul (7. ve 8. sınıf) öğrencileri, matematiksel doğrulamalarda hangi tür argümanları tercih etmektedirler (ikna edici bulmaktadırlar)?

2- Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerileri hangi seviyededir?

   2-a Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin matematik öğretmenleri matematiksel doğrulamalarda hangi tür argümanları tercih etmektedirler (düşük ve yüksek puanla değerlendirmektedirler)?

Araştırmanın Önemi

Ortaokul matematik eğitiminde ispat ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, bu çalışmaların genellikle ortaokul düzeyindeki öğrencilerin matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin belirlenmesi (Knuth ve diğerleri, 2009), ispat yapma becerilerinin incelenmesi (Altıparmak ve Öziş, 2005; Knuth ve diğerleri, 2002), muhakeme ve ispat yapabilme süreçlerinin analiz edilmesi (Arslan, 2007; Zaimoğlu, 2012), ispatın öneminin farkındalıklarının belirlenmesi (Albayrak-Bahtiyari, 2010), matematik başarıları ile ispat seviyeleri arasındaki ilişkinin ortaya konulması (Çalışkan, 2012), ispat eğitim programı uygulandığında ispata yönelik algılarındaki değişimin incelenmesi (Aylar, 2014; Aylar ve Şahiner, 2016; Ülker, 2018) ve ispat şemalarının belirlenmesi (Flores, 2006; Zeybek-Şimşek ve Üstün, 2019) konularına odaklanıldığı görülmüştür. Altıparmak ve Öziş (2005), ortaokul öğrencilerinin tümdengelim ve tümevarım yöntemlerine dayalı muhakemeyi kullanabilmeleri gerektiğini savunmaktadırlar. Ortaokul öğrencilerinden beklenilen ispat becerilerinin araştırıldığı çalışmalarda; Arslan (2007) ortaokul öğrencilerinin ispat yapabilme seviyelerinin beklenilen seviyenin altında olduğu ve sınıf seviyesi yükseldikçe ispat yapabilme becerilerinin arttığını; Albayrak-Bahtiyari (2010) 8. sınıf öğrencilerinin ispat ve muhakeme kavramları ile ilgili farkındalıklarının yeterli düzeyde olmadığını bildirmektedir. Healy ve Hoyles (2000), 14–15 yaş grubundan ulusal sınavda başarılı olan öğrencilerin dahi, ispat performanslarının istenilen düzeyde olmadığını belirtmişlerdir. Çalışkan (2012) ise, 8. sınıf öğrencilerinin matematik başarısı ile ispat yapabilme seviyeleri arasında pozitif yönlü ilişki olduğunu belirtmiştir. Knuth ve diğerleri (2002), ortaokul öğrencilerinin büyük bir kısmının matematiksel doğrulamalarında örnek kullanmayı tercih ettiğini belirtmişlerdir. Yeşildere ve Türnüklü (2007), 8. sınıftan yeni mezun öğrencilerin, matematiksel bilgilerle ilişkilendirme yapma ve mantıksal akıl yürütmede, ortaöğretim hazırbulunuşluk seviyesine ulaşmadıklarını bildirmişlerdir. Benzer bir çalışmada ise Knuth ve diğerleri (2009), 6–8. sınıf öğrencilerinin öğrenim süreçlerinde doğrulama fikri geliştiğinde, lise döneminde ispat yapabilecek düzeye gelebileceğini bildirmişlerdir. Zeybek-Şimşek ve Üstün (2019), 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerini incelemiş ve öğrencilerin deneysel düzeyde argümanlar oluşturabildiğini belirtmişlerdir. Aylar (2014), Aylar ve Şahiner (2016) ve Ülker (2018) ise, ispata yönelik algı ve becerilerini geliştirmeyi amaçlayan bir öğretim süreci ve ispatla ilgili giriş etkinlikleri yapılması sonrasında ortaokul öğrencilerinin, ispat yapabilme becerilerinde gelişme gözlendiğini bildirmişlerdir. Tüm bu çalışmalar ve bulguları incelendiğinde, ispat ile matematik başarısı arasında pozitif yönlü bir ilişki olduğu (Çalışkan, 2012), gerekli ortamlar sağlandığında öğrencilerin ispat oluşturma becerilerinin arttığı (Aylar, 2014; Aylar ve

Şahiner, 2016; Ülker, 2018) ve bu süreçte öğretmenlerin önemine vurgu yapıldığı (Aylar, 2014; Healy ve Hoyles, 2000; Knuth, 2002a, 2002b) görülmektedir.

Matematik eğitimi alanında yapılan çalışmalar incelendiğinde, hem öğrencilerin hem de matematik öğretmenlerinin ispat yapma süreçlerinin ve argüman tercihlerinin birlikte incelendiği bir çalışmaya ulaşılamamıştır. Ayrıca akademik başarısı yüksek öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin incelendiği kısıtlı sayıda çalışmaya ulaşılmıştır (Healy ve Hoyles, 2000). Öğrencilerin ispatlama ve muhakeme becerilerindeki gelişimlerinin öğretmenlere bağlı olduğu (Altıparmak ve Öziş, 2005; Martin ve Harel, 1989) düşünüldüğünde, öğretmenlerin ve öğrencilerin ispat ve muhakeme yeteneklerinin birlikte incelenmesinin alan yazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca yapılan çalışmalar, öğretmenlerin büyük bir kısmının ispata yönelik sınırlı bilgiye sahip olduğu (Knuth, 2002a, 2002b; Martin ve Harel, 1989) ve bu yüzden de güncel eğitim programlarının önerilerini yerine getirmekte zorlandıklarını göstermektedir (Almeida, 2003; Healy ve Hoyles, 2000; Jones, 2000; Moralı ve diğerleri, 2006). Öğretmenlerin ve öğrencilerin ispatı anlamada zorlanmaları, bir ifadenin doğrulanmasında örneklerden yararlanılması ve ispatın zor bir iş olarak algılaması yapılan çalışmalar tarafından ortaya konulan diğer bulgular arasındadır (Almeida, 2001; Güner, 2012; Knuth, 2002a; Moralı ve diğerleri, 2006).

Çalışmada, ilgili alan yazındaki ispat problemleri ve argümanları, ülkemizdeki eğitim ortamlarına göre uyarlanmış olup, ülkemiz öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin, alan yazında yer alan benzeri problemlere bakışı, ne kadar başarılı oldukları, ispat yapma süreçlerindeki eğilimleri ve argüman tercihleri analiz edilmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapma süreçleri ve argüman tercihleri incelenirken, bu süreçler hakkında bireysel görüşmeler yapılması, öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapma ve argüman tercihleri süreçlerindeki düşüncelerinin daha iyi analiz edilmesini sağlayacağı düşünülmüştür. Çalışkan (2012), ispat ile matematik akademik başarısı arasında ilişki olduğunu belirtmiştir. Bu sebeple çalışma grubu olarak matematik akademik başarısı yüksek öğrenciler seçilmiştir. Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin derste gösterdikleri başarılarının ispat yapabilme yeterliliklerine yansıyıp yansımadığı araştırılmıştır.

Yapılan çalışmalara bakıldığında, ispat becerilerinin ortaokul düzeyinde incelendiği çalışma sayısı, diğer kademelere oranla daha az olduğu sonucuna ulaşılmıştır (Knuth ve diğerleri, 2002; Flores, 2006; Arslan, 2007; Yeşildere ve Türnüklü, 2006; Knuth ve diğerleri, 2009; Albayrak-Bahtiyari, 2010; Çalışkan, 2012; Zaimoğlu, 2012; Aylar, 2014; Ülker, 2018). İlgili alan yazında ulaşılan çalışmalarda, farklı eğitim kademelerindeki öğrencilerin ve öğretmen adaylarının matematiksel ispat yapma becerilerini ve ispat tercihlerini konu alan çalışmaların sayısı çok olmasına rağmen, matematik öğretmenlerinin matematiksel ispat yapma becerilerini ve ispat tercihlerini konu alan çalışmaların sayısının az olduğu görülmektedir (Öztürk, 2017). Oysa öğretmenlerin ispata yönelik görüşlerinin, algılarının, ispat yapma sürecinde kullandıkları yöntemlerin, stratejilerin, yaklaşımların ve ispat yapma becerilerinin bilinmesi önem taşımaktadır. Çünkü öğretmenlerin ispata yönelik sahip olduğu anlayışlar, öğrencilerin ispata yönelik anlamalarını etkilemektedir (Healy ve Hoyles, 2000; Jones, 2000; Moralı ve diğerleri, 2006). Bu sebeple çalışma grubumuza, akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin matematik eğitiminden sorumlu matematik öğretmenleri de eklenmiştir. Öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapma süreçlerinin ve argüman tercihlerinin bir arada incelenmesi öğrenci-öğretmen arasındaki ispat etkileşimini de ortaya koyacağı düşünülmektedir.

Yapılan bu araştırmanın, matematik eğitimi alanına ve ilgili alan yazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca matematik eğitiminde ispata her eğitim kademesinde yer verilmesi gerekliliğinin daha çok belirtildiği eğitim dünyasında, bu tarz çalışmaların artması, ülkemizde de ispat eğitimine verilen önemin artmasına ve yaygınlaşmasına katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu sebeple çalışmanın, akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencileri ile matematik öğretmenlerinin; hem ispat yapabilme becerileri ve argüman tercihlerini başka değişkenlerle ilişkilendirmeden deneysel olmayan bir yaklaşımla belirleme hususunda, hem de bu belirleme sürecini yapılan bireysel görüşmeler yardımıyla ortaya koyma hususunda özgün bir çalışma niteliği taşıdığı düşünülmektedir.

Sayıltılar

Bu çalışmada, akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin, ispat yapabilme becerilerini ve argüman tercihlerini betimleyebilmek amacıyla uygulanan, İspat Beceri Testi ve Argüman Değerlendirme Testi formlarındaki sorulara, gerçek başarı durumlarını yansıttıkları ve gerçek görüşlerini içtenlikle ortaya koydukları varsayılmıştır. Ayrıca öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin uygulanan formlar sonrasında yapılan görüşmelerdeki sorulara da içtenlikle ve gerçek görüşlerini yansıtacak biçimde cevap verdikleri varsayılmıştır.

Araştırmada İBT ve ADT formlarının geçerlik ve güvenirliği alınan uzman görüşüyle sağlanmaya çalışılmıştır. Veri toplama araçlarının ölçtükleri özellikler açısından geçerli ve güvenilir olduğu ve geliştirilmesi sürecinde alınan uzman görüşünün yeterli olduğu varsayılmıştır.

Araştırma sürecinde kontrol altına alınamayan değişkenlerin çalışmanın sonucunu etkilemeyeceği varsayılmıştır. Öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin beklenmeyen ve istenmeyen dış etkenlerden eşit düzeyde etkilendikleri düşünülmektedir. Formlardan elde edilen verilerin, var olan durumu yansıttığı varsayılmaktadır. Veri toplama araçları ile elde edilen bilgilerin objektif olduğu kabul edilmiştir.

Sınırlılıklar

Aşağıda ifade edilen sınırlılıklar çerçevesinde elde edilen bulgular geçerli olmaktadır.

1. Araştırma, 2018-2019 eğitim-öğretim yılı içerisindeki bulgularla sınırlıdır.
2. Araştırma, Tokat ilinde yer alan bir ortaokuldaki matematik akademik başarısı yüksek 12 öğrenci ile sınırlıdır.
3. Araştırma, öğrencilerin matematik eğitiminden sorumlu 4 matematik öğretmeni ile sınırlıdır.
4. Araştırma, öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerilerinin tespitinde, İBT formunda yer alan, sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait 4 önermeye verdikleri cevapların analizi ile sınırlıdır.
5. Araştırma, öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin argüman tercihlerinin tespitinde, ADT formunda yer alan, sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait önermeler için hazırlanan 4 argümandan tercihlerinin analizi ile sınırlıdır.
6. Araştırma, öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin sadece sayılar ve işlemler öğrenme alanında ispat yapabilme becerileri ve argüman tercihleri ile sınırlıdır.

7. İBT ve ADT formlarında yer alan sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait önermeler, bu öğrenme alanındaki kazanımları sınırlı oranda kapsaması ile sınırlıdır.
8. Araştırmada ortaya konulan ispat yöntemleri ve argümanlar; Bell (1976), Balacheff (1988), Harel ve Sowder (1998), Tall (1998), Healy ve Hoyles (2000), Stylianides (2008) ve Quinn (2009)'un çalışmalarından sentezlenen çerçeve ile sınırlıdır.

Tanımlar

Argümantasyon: "Argüman oluşturma süreci, diğer bir ifadeyle, akıl yürütme zincirine dayalı olarak sonuca varma işlemidir." (Umland ve Sriraman, 2014, s. 44). Ayrıca argümantasyon; bir fikri, bir düşünceyi veya bir hipotezi doğrulama, savunma ve açıklama çalışmalarının tümüdür (Aslan, 2014).

İspat: İspat matematiksel bir argümandır ve sınıf topluluğuna kabul edilmiş doğruları açıklamak için sunulan gerekçelerdir (Stylianides, 2007a). Bir argümanın ispat olabilmesi için aşağıdaki özellikleri içermesi gerekir.

> 1. (Dayanak: Foundatin) Sınıf topluluğu tarafından doğru olduğu tartışmaya gerek duyulmaksızın kabul edilen (teoremler, formüller, postulatlar, aksiyomlar, tanımlar vs.) ifadeleri içerir.
> 2. (Formüle etme: Formulation) Sınıf topluluğu tarafından bilinen veya kavramsal olarak ulaşabilecekleri muhakeme biçimlerini (mantıksal çıkarım (dedüktif), örneklerden genelleme (indüktif) gibi) içerir.
> 3. (Sunuş ve Sosyal Boyut: Representation and Social Dimension) Sınıf topluluğu için uygun (yapısına, özelliklerine, önceki bilgilerine, yaşına vs.) ve onların anlayabileceği kavramsal argümanları (sözel, cebirsel, görsel-geometrik gibi) içerir (Stylianides, 2007a, s. 291).

İspatlama: "Kişinin gözleminin doğruluğu hakkında şüphelerini ortaya çıkarmak veya ortadan kaldırmak için ortaya koyduğu süreçtir." (Harel ve Sowder, 1998, s. 241).

Doğrulama: "Bir varsayımın doğruluğunu denetlemek için deney ve mantıksal tanıtlama yoluyla yapılan işlemlerin bütünüdür." (Türk Dil Kurumu [TDK], 2019).

BÖLÜM II

KAVRAMSAL ÇERÇEVE

Çalışmada matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencileri ile bu öğrencilerin matematik öğretmenlerinin ispat yapma becerileri ve argüman tercihlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Eğitim reformlarında ve gelişen programlarda ispata daha fazla önem verilmeye başlanılmıştır. NCTM (2000), tüm sınıf seviyelerinde ispatın matematik eğitiminin bir parçası olması gerekliliğini belirmektedir. MEB (2018), akıl yürütme ve muhakeme yetenekleri gelişmiş bireylerin yetiştirilmesine vurgu yapmaktadır. Son yıllarda matematik eğitiminde ispat ve muhakeme kavramlarına verilen önemin artmasıyla birlikte, ispat ve muhakeme ile ilgili özellikle yurt dışı alan yazında birçok çalışmaya rastlamak mümkündür (Almeida, 2000, 2001, 2003; Balacheff, 1988; Bieda, 2010; De Villiers, 1990; Flores, 2006; Hanna, 1990, 2000a, 2000b; Harel ve Sowder, 1998; Healy ve Hoyles, 2000; Jones, 2000; Knuth, 2002a, 2002b; Knuth ve diğerleri, 2009; Knuth ve diğerleri, 2002; Küchemann ve Hoyles, 2005; Mansi, 2003; Martin ve Harel, 1989; Miyazaki, 2000; Schoenfeld, 1994; Stylianides A.J., 2007a, 2007b; Stylianides G.J., 2008, 2009, 2010; Quinn, 2009; Tall, 1998; Waring, 2005). Ülkemizde ise, öğretim programlarında ispata verilen önemin artması ile birlikte, ispatla ilgili çalışmalarda son yıllarda artış gözlenmiştir (Albayrak-Bahtiyari, 2010; Arslan, 2007; Aylar, 2014; Çalışkan, 2012; Çontay, 2017; Doruk, 2016; Güler, 2013; Güner, 2012; Güven ve diğerleri, 2005; Moralı ve diğerleri, 2006; Özer ve Arıkan, 2002; Öztürk, 2017; Tuncer, 2014; Uğurel, 2010; Ülker, 2018; Yeşildere ve Türnüklü, 2006; Yılmaz, 2015; Zaimoğlu, 2012, Zeybek ve diğerleri, 2018).

Yapılan alan yazın taraması sonucu ulaşılan araştırmalarda; matematik öğretmenlerinin (veya matematik öğretmeni adaylarının) (Çontay, 2017; Doruk, 2016; Güler, 2013; Güner, 2012; Moralı ve diğerleri, 2006; Öztürk, 2017; Yılmaz, 2015), matematik bölümü üniversite öğrencilerinin (Jones, 2000; Tuncer, 2014), ortaöğretim öğrencilerinin (Healy ve Hoyles, 2000; Özer ve Arıkan, 2002; Knuth, 2002a; Mansi, 2003; Güven ve diğerleri, 2005), ortaokul öğrencilerinin (Albayrak-Bahtiyari, 2010; Arslan, 2007; Aylar, 2014; Çalışkan, 2012; Flores, 2006; Knuth ve diğerleri, 2002; Knuth ve diğerleri, 2009; Ülker, 2018; Yeşildere ve Türnüklü, 2006; Zaimoğlu, 2012;) ve ilkokul öğrencilerinin (Stylianides, 2007b); ispat süreçleri, ispat seviyeleri, ispat eğilimleri ve ispata yönelik görüşlerinin incelenmesine yönelik çalışmalara rastlamak mümkündür. Ayrıca öğrencilerin ispat yapabilme süreçlerinde öğretmen rolünün araştırıldığı (Uğurel, 2010) ve ortaokuldan ortaöğretime geçen öğrencilerin ispat yapabilme seviyelerinin değişimini boylamsal inceleyen (Küchemann ve Hoyles, 2005) çalışmalara da rastlamak mümkündür.

Yukarıda özetlenen çalışmalar ışığında bu bölüm; "İspat Kavramı İle İlgili Genel Görüşler ve İspat Tanımları", "İspatın Fonksiyonları ve Matematik Eğitimindeki Rolü", "Ulusal ve Uluslararası Matematik Öğretim Programlarında İspat", "İspat Yapma Düzeyleri ve İspat Şemaları" ve "İspat Yapma Sürecinde Karşılaşılan Zorluklar ve Kavram Yanılgıları" başlıklarından oluşmaktadır. Bu başlıklara ait açıklamalar aşağıda verilmiştir.

İspat Kavramı İle İlgili Genel Görüşler ve İspat Tanımları

Matematik; biçimlerin, sayıların ve niceliklerin yapılarını, özelliklerini, aralarındaki bağıntıları tümdengelimli akıl yürütme yoluyla inceleyen ve aritmetik, geometri ve cebir gibi dallara ayrılan bilim dalıdır (TDK, 2019). Büyük bir hızla değişen ve gelişen dünyamızda, genellikle öğrenciler tarafından pek sevilmeyen, soyut bir ders olarak görülen matematiğin yeri ve önemi yadsınamaz. Günlük yaşantımızda, işimizde, evimizde, alışverişlerimizde ve daha birçok alanda gerekli olan çözümleyebilme, muhakeme edebilme, genelleme yapabilme, yaratıcı ve bağımsız düşünebilme gibi üst düzey davranışları geliştiren bir alan olarak matematiğin öğrenilmesi kaçınılmazdır. Milli Eğitim Bakanlığı [MEB] (2018), matematik öğretim programı genel ve özel amaçlarında ispat kavramına açıkça yer vermemiş, fakat muhakeme ve akıl yürütme süreçlerinin önemine vurgu yapmıştır. Matematiğin özünde mantıksal muhakeme vardır. Bu yüzden matematikte muhakeme ve onun alt kavramı olan ispat ön plana çıkmaktadır (Arslan, 2007). Umay (2003), ispat ve muhakemenin birlikte anılan kavramlar olduğunu belirtmektedir. Muhakeme, bir başka deyişle usavurma, tüm durumları dikkate alarak düşünüp mantıklı bir sonuç ortaya çıkarma sürecidir. Muhakeme, kritik düşünme ve yaratıcı düşünme gibi çeşitli düşünme tarzları içerir. Yani üst düzey bir düşünme beceri biçimi ve yeteneğidir. Muhakeme ile matematik arasındaki ilişki, matematiğin özü itibariyle bu yeteneği kullanmayı gerektirmesinden kaynaklanmaktadır. Matematik, sadece sayıları, işlemleri öğretmekle kalmaz, düşünme, olaylar arasında bağ kurma, akıl yürütme, tahminde bulunma, problem çözme gibi önemli beceriler kazandırır.

Matematiğin diğer bilimlerden farklı olarak kendine has bir takım etkinlikleri vardır. Problem kurma, problem çözme, sembol kullanma, genelleme yapma, ispatlama bu etkinliklerden bazılarıdır (Baki, 2008). İspat, sistematiğe dayalı geçerlik yöntemiyle matematiği diğer bilimlerden ayırır (Arsac, 2007) ve matematiğin ayrılmaz bir parçasıdır (Schoenfeld, 1994). İspat sadece geometri ile ilişkilendirilmiş bir kavram gibi algılanmaktadır. Buna karşın ispat, matematik yapma, matematiği düzenleme ve matematiği aktarma süreçlerinin temel bileşenidir (Knuth, 2002a).

İspat, Türk Dil Kurumu sözlüğünde "Tanıt ve kanıt göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, kanıtlama, tanıtlama tanıt" şeklinde tanımlanmaktadır (TDK, 2019). Polya (1981)'e göre ispat, matematik yapmanın ve bilmenin temelidir. Ayrıca matematiksel bilgiyi kurmak, geliştirmek ve iletmek için gereklidir. Hersch (1993) ispatı, bir durumun doğruluğunun belirlenmesi, denenmesi ve test edilmesi olarak açıklar. Yıldırım (1996) ise ispatı, bir yargı ya da savın doğruluğunu gerekçeleriyle kabul ettirme uğraşı olarak tanımlamaktadır. Aslında ispatlar, öğrencilerin kavramları daha iyi anlamalarını ve sonuçlara inanmalarını, ne yaptıklarını görmelerini sağlar ve düşünce yapılarını geliştirir (Tucker, 1999). İspatı sonuçların geçerliliğini açıklamak ve kişinin hem kendisini hem de başkasını ikna etmek amacı ile geliştirilen bir argüman olarak gören Harel ve Sowder (1998) ispatı, bir kişinin kendisini veya başkalarını, matematiksel bir ifadenin doğruluğu ya da yanlışlığı hakkında ikna etmek amacıyla kullandığı bir argüman olarak tanımlarlar.

Matematiksel ispat en genel anlamıyla, bir ifadenin ve önermenin doğruluğunun, önceden bilinen bir veya daha fazla önermeyle ilişkilendirilip, mantıksal bir takım çıkarımlar vasıtasıyla ortaya konulmasıdır (Dede ve Karakuş, 2014). Hanna (2000a) bir matematiksel ispatın amacını, bir iddianın sadece doğru ya da yanlış olduğunu değil, aynı zamanda bu iddianın neden doğru ya da neden yanlış olduğunu göstermek olarak açıklar. Matematikçiler için bir iddianın doğrulanmasından ziyade ispatlanması daha önemlidir. Çünkü iyi bir ispat, verilen teoremin arkasında yatan nedenleri anlamaya yardım eder ve hem teoremin doğruluğunu hem de niçin doğru olduğunu gösterir.

Lee (2002), matematiksel ispat sürecinin, evrensel olarak bilinen kural ve yöntemleri olan, matematiğin temel yapıtaşlarından biri olduğunu belirtmiştir. Lee (2002)'ye göre ispat süreci birbiri ile ilişkili 3 farklı aşamadan oluşur. Bunlar; ispat yapılacak durumun araştırılması, ispatın organizasyonu (düzenlenmesi) ve hedef kitleye anlatılması (sunulması, açıklanması) olarak sıralanabilir. Bir matematikçi, önce eldeki teorem ya da ifadeyi inceler, hâlihazırda yapılmış ispatlara bakarak ifadenin doğru olup olmadığını araştırır ve hâlihazırda ispatlanmış teoremlerden yola çıkarak nasıl türetilebileceğini inceler. Bu süreç teorem ya da ifadenin ispatla doğrulanması ya da ifadenin yanlış olduğunun gösterilmesiyle sona erer. Fakat bir ispat ancak matematikçi topluluğu tarafından kabul gördükten sonra bir ispat olur (Lee, 2002).

Bieda (2010) ise ispatı, özel bir argümantasyon şekli olan ve matematiksel bir iddianın her zaman doğru (veya yanlış) olduğunu, matematiğin kendi normları çerçevesinde kabul gören argümantasyon modları ve gösterim formatı kullanarak oluşturulan bir süreç olarak tanımlayarak, matematiksel ispatların mantıksal olma yönüne vurgu yapmıştır.

Daha detaylı olarak Stylianides (2007a)'ya göre ispat, matematiksel bir argümandır ve sınıf topluluğuna kabul edilmiş doğruları açıklamak için sunulan gerekçelerdir. İspatlar, sınıf topluluğunun bilinen sonuçlara ulaşarak muhakeme yeteneğini geliştirmelerine yardımcı olur. Stylianides (2007a) bu tanımla birlikte, ispat kavramının sınıf topluluğu normlarına göre değerlendirilmesinin öneminin altını çizer. Stylianides (2007a), bir ifadeye yönelik ortaya konulan her argümanın ispat niteliği taşımayacağını belirtmektedir. Ayrıca bir argümanın ispat olabilmesi için aşağıdaki karakteristik özellikleri içermesi gerektiğini belirtmiştir.

> 1. Sınıf topluluğu tarafından doğru olduğu tartışmaya gerek duyulmaksızın kabul edilen (teoremler, formüller, postulatlar, aksiyomlar, tanımlar vs.) ifadeleri içerir (Dayanak: Foundatin).
>
> 2. Sınıf topluluğu tarafından bilinen veya kavramsal olarak ulaşabilecekleri muhakeme biçimlerini (mantıksal çıkarım (dedüktif), örneklerden genelleme (indüktif) gibi) içerir (Formüle etme: Formulation).
>
> 3. Sınıf topluluğu için uygun (yapısına, özelliklerine, önceki bilgilerine, yaşına vs.) ve onların anlayabileceği kavramsal argümanları (sözel, cebirsel, görsel-geometrik gibi) içerir (Sunuş ve Sosyal Boyut: Representation and Social Dimension) (Stylianides, 2007a, s.291).

Bu çalışmada, ispat ile ilgili Stylianides (2007a)'nın yukarıda belirttiği tanım kullanılacak, öğrencilerin ve öğretmenlerin ispat yapma ve argüman değerlendirme süreçleri incelenirken çalışmaya ışık tutacaktır. Styliandes (2007b) ayrıca, ispat kavramını oluşturan iki temel ilke olduğunu ve ispatın bu iki temel ilkeye uygun olması gerektiğini belirtmektedir. Bu ilkelerden birincisi; ortaya konulan ispat herkes tarafından kabul edilebilir olmalıdır (geçerlilik ilkesi), yani kişiden kişiye göre değişmemelidir. İkincisi ise; ortaya konulan ispat genelleme yapmamıza imkan tanımalıdır (süreklilik ilkesi), yani ileri kademelerde ve farklı konularda kullanılmaya imkan tanımalıdır. Balacheff (1988)'e göre de bir ispatın, kişinin öznel düşüncelerden bağımsız olması ve geçen zamana göre süreklilik arz etmesi gerekir.

Matematiksel ispatlar şüphesiz matematik eğitiminin en önemli parçalarından biridir. Çünkü ispatların, matematiksel olguların daha iyi kavranması, matematiksel düşüncelerin gelişimi ve ikna etme gibi birçok önemli fonksiyonu mevcuttur (Gökkurt ve Soylu, 2012). Ayrıca İmamoğlu (2010), öğrencilerin ispatlar sayesinde, matematikçilerin yaptıkları şeylerin ne anlama geldiğini anladığını belirtmektedir. Matematik eğitiminde ispatın fonksiyonları, rolü ve önemi daha geniş olarak bir sonraki bölümde ele alınacaktır.

İspatın Fonksiyonları, Matematik Eğitimindeki Rolü ve Önemi

İspatın matematik eğitiminde birçok fonksiyonu bulunmaktadır. Hanna (2000a), bir ispatın fonksiyonlarını Bell (1976) ve de Villiers (1990)'dan geliştirerek şu şekilde özetlemektedir:

> Doğrulama; bir matematiksel önermenin doğruluğunu göstermek, Açıklama; bir önermenin neden doğru olduğunu açıklamak, Sistemleştirme; aksiyomlardan, ana kavram ve teoremlerden oluşan bir sistem içinde çeşitli sonuçların düzenlenmesi, Keşif; yeni sonuçlara ulaşmaya imkan tanınması, İletişim; matematiksel bilginin iletimini sağlanması, Zihinsel sorgulama; ispatın ikna ediciliğinin tamamlanması ve Tanımların doğrulanması; tanım ve önermelerin geçerliliğinin sağlanmasıdır (Hanna, 2000a, s.8).

Hanna (2000a)'nın belirttiği matematiksel ispatların fonksiyonları, ispatı yapan ve ispatı okuyan kişiye göre değişiklik gösterebilir. Örneğin, bir analiz dersinde veya bir matematik çalışmasında bir teoremin ispatı, teoremin doğruluğunu göstermeyi amaçlarken, bir öğrenci için aynı teoremin ispatı, ispatın altındaki temel fikrin bir açıklaması olabilir. Bu bağlamda, matematiksel bir ispatın yapılış amacı ispatı yapan kişi ve okuyan kişi için farklı olabilmektedir (Dede ve Karakuş, 2014).

Hanna (1990)'a göre matematiksel ispatlar ikiye ayrılmaktadır. Bunlardan birincisi formal ispatlardır. Formal ispatlar; matematiğin resmi dilinin kullanıldığı, var olan aksiyomlar ve sistemler kullanılarak türetilen formüllerin sonlu dizisidir. Formal ispatta sezgisel delillere ve insan yargısına başvurulmaz. Formal ispat, kesin ispatla birlikte anılmaktadır. Bir diğer adı 'ispatlayan ispat'tır. İspatlayan ispat, bir teoremin sadece doğru olduğunu gösterir ve yalnızca delile dayalı gerekçeler sunar. İspatlayan ispat, matematiksel tümevarıma veya sadece söz dizimsel düşüncelere dayanmaktadır. İkincisi ise kabul edilebilir ispatlardır. Kabul edilebilir ispatlar; nitelikli matematikçiler tarafından kabul edilebilen, kurallara uygun olan ispatlardır. Hersch (1993)'ün işleyen ispat tanımına uymaktadır. Kabul edilebilir ispat, ispatın pratik yönüne bakıp, matematik toplumunu ikna edip etmediğine bakar. Bir diğer adı 'açıklayan ispat'tır. Açıklayan ispat, bir teoremin niçin doğru olduğunu gösterir ve olaydan türetilen gerekçelerin bir kümesini sunar. Açıklayan ispat, mutlaka çalışılan matematiksel fikirlere dayalı mantıksal temeller sunar. Bununla birlikte her iki ispat türünün de bir matematik ispatının gerekliliklerini karşılamaktadır. Dolayısıyla matematiksel bir ispatın geçerliliğini belirlemek için eşit ölçülerde hizmet etmektedir ve her iki tür de matematik topluluğu tarafından geçerli sayılır. Hanna (1990) ikisi arasındaki ayrımı şu örnekle açıklamıştır:

"$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$" ifadesinin ispatlanması sürecinde, Hanna (1990)'nın ispatlayan ispat tanımına uygun olarak matematiksel tümevarım yöntemi içeren ispat temsili Şekil 1'de sunulmuştur.

n=1 için teorem doğru olsun.

Kabul edelim ki, keyfi bir k değeri için teorem doğru olsun.

O zaman,

$S(k+1)=S(k)+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$'dir.

Böylece, ifade k için doğruysa k+1 için doğrudur. Tümevarım ilkesiyle, önerme her n için doğrudur.

Şekil 1. İspatlayan İspat Temsili

"$1+2+3+\cdots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}$" ifadesinin ispatlanması sürecinde, Hanna (1990)'nın açıklayan ispat tanımına uygun olarak Gauss yöntemi ve simetri özelliği kullanılarak ifadenin neden doğru olduğunu açıklayan ispat temsili Şekil 2'de sunulmuştur.

Aynı ifadeyi birini tersten olmak üzere iki kez alt alta yazıp toplayalım.

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$

$$S(n) = n + (n-1) + \cdots + 3 + 2 + 1$$

$$+ \quad 2.S(n) = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) \longrightarrow \text{n tane}$$

$$S(n) = \frac{n(n+1)}{2} \text{ olur.}$$

Şekil 2: Açıklayan İspat Temsili

Açıklayıcı ispatlar tümdengelimden çok, anlaşılır argümanlar içermektedir. Hanna (1990)'a göre tümdengelim apayrı bir konudur ve bu matematikçileri ilgilendirir. Bu sebeple öğrenim seviyesine göre öğrencilerden beklenen ispatlar makul olmalıdır. İspat öğretiminin lise ve daha üst eğitim kademelerinde yoğunlaşmasına paralel olarak, bu alanda gerçekleştirilen çalışmaların büyük bir bölümü ilk ve ortaokul düzeyinde ispat öğretimini ele almamaktadır. Hatta bazı çalışmalar okul matematiğinde ispatın sadece ileri lise düzeyindeki öğrencilere uygun olduğunu, ortaokul öğrencilerinin formal ispatı anlamadığını ve yapamayacaklarını belirtebilmektedir (Bell, 1976; Fischbein, 1982; Knuth, 2002a). Çalışmanın katılımcı grubunu oluşturan ortaokul seviyesindeki öğrencilerden ispatlayan ispat (Bkz. Şekil 1) türünde formal bir ispat beklenmemektedir. Bunun yanı sıra, ortaokul düzeyindeki öğrencilerden, daha çok açıklayan ispat (Bkz. Şekil 2) türündeki informal yöntemlerle oluşturulmuş, ancak ispat olma kriterleri taşıyan matematiksel argümanlar beklenmektedir. Her ne kadar katılımcı öğrencilerden formal ispatlar beklenmese de, katılımcı öğretmenlerden formal ispat yapmaları beklentiler arasındadır.

Hanna (1990), ders kitaplarında bulunan formal ispatların matematiksel fikirleri iletmek için iyi bir yöntem olmadığını belirtmektedir. Ayrıca formal ispatların matematik eğitiminin bir parçası olabilmesi için, sosyal kriterlere daha fazla önem verilmesi gerektiğini de bildirmiştir. Buna rağmen matematik eğitiminde ispat için açıklayıcı argümanların aksine sadece formal yöntemler kullanılmaktadır (Hanna, 1990). Bu durum öğrencilerin ispatlardan ve dolayısıyla matematikten soğumalarına sebep olmaktadır. Knuth (2002a), ispatın temel işlevinin, bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklaması olduğunu savunmaktadır. Bir ifadenin doğruluğunun altında yatan nedenleri açıklamayan ispatların boş bir uğraş olduğunu savunan Ross (1998), ispatın sadece cebirsel argümanlardan oluşmayacağını, ispatlarda görsel argümanlara da yer verilebileceğini belirtmiştir. Ross (1998)'un bu görüşünden yola çıkarak çalışmada, formal yöntemler içeren cebirsel argümanların yanında; informal yöntemler içeren anlatımsal-sözel (narrative) argümanlara ve görsel argümanlara da yer verilmiştir. Çünkü ortaokul seviyesindeki bir öğrenciden kendi ispatlamasını ya da doğrulamasını yaparken, formal yöntemlerden çok informal yöntemlere başvuracağı düşünülmektedir.

Dede (2013), matematiksel ispatların formal ve sosyal-kültürel olmak üzere iki boyutu olduğunu savunur. Matematiksel ispatın formal boyutu, matematiksel bir bilginin doğrulanması sürecindeki kural, ifade, açıklama ve önermeleri vb. içermektedir. Matematiksel ispatın sosyal-kültürel boyutu ise, yapılan ispatın geçerliliği için kullanılan süreç, işlem ve yöntemlerin, ispatın yapıldığı ortam ve kişiler çerçevesinde ele alınmasını içermektedir. Diğer bir ifadeyle ispatın oluşturulma süreci, sunuluş biçimi ve kullanılan yöntemlerin, ispatın oluşturulduğu ortam ve kişilerin kavramsal erişim sınırları çerçevesinde ele alınması ispatın sosyal boyutunu oluştururken, ispatın mantıksal kurallara göre dizilmesi ise formal boyutunu oluşturmaktadır (Hanna ve Jahnke, 1993; Stylianides, 2007a).

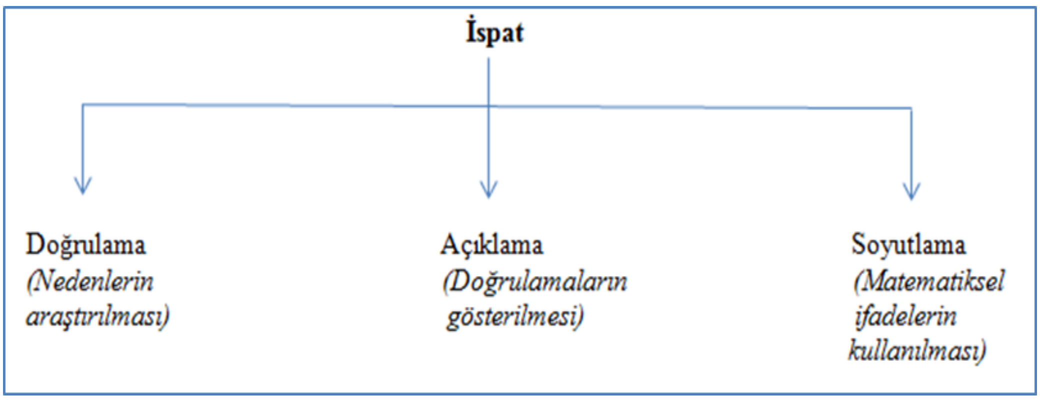
Matematikçiler tarafından bir teoremin kabulü, bir formal ispattan ziyade ispatın anlaşılmasına ve önemine daha fazla vurgu yapan bir sosyal süreci içermektedir. Bu anlamda, eğer bir matematiksel bilginin doğruluğunun gösterildiği bir içerik, matematikçiler tarafından geçerli olarak tanımlanırsa, bu içerik bir matematiksel ispat olarak kabul edilmektedir. Yani, matematiğin bir teoreminin önemi ve altındaki kavramların anlaşılması durumu bu teoremin kabulü noktasında, formal ispatın varlığından çok daha fazla rol oynamaktadır (Dede, 2013). Matematik eğitiminde formal ispatları azaltıp açıklayan ispatları artırmanın, matematik eğitimini daha anlaşılır ve sevilir hale getireceği düşünülmektedir.

İspat, matematiğin temel yapıtaşların biridir ve matematiksel bilginin gelişimi, kurulumu ve iletimi için vazgeçilmezdir. Matematiğin tüm evrelerinde ispatın önemi yadsınamaz. Tüm bu durumlar ispat ile matematik eğitimi arasındaki kuvvetli ilişkiyi ortaya koymaktadır. Matematiksel ispat, öğrenci seviyesine göre düzenlenerek öğretim süreçlerine erken yaşlardan itibaren entegre edilmeli, öğrencilerin ispat ile iç içe gelişmeleri sağlanmalıdır (CCSSI, 2010; NCTM, 2000). İspatın bu önemine rağmen matematik eğitiminde genel olarak, lise ve üniversite eğitiminde ya da sadece geometri derslerinde ispata yer verilmektedir (Aylar, 2014; Bell, 1976; Fischbein, 1982; Knuth, 2002a). İspatın matematiğin merkezinde olması, okul matematiğinde ispata yer verilmesi gerekliliği birçok araştırmacı tarafından vurgulanmıştır (Balacheff, 1988; Ball ve diğerleri, 2002; CCSSI, 2010; Hanna, 2000a; Healy ve Hoyles, 2000; Knuth, 2002a; Knuth ve diğerleri, 2009; Mansi, 2003; NCTM, 2000; Lee, 2002; Schoenfeld, 1994; Stylianides, 2007a, 2007b). Okul matematiğinde öğrenciler bir matematiksel ifadenin ispatını yaparken, bir yandan da formülleri son halleriyle bilmenin yeterli olmadığını, ulaşılan sonuçların nedenleriyle birlikte açıklanması gerektiğini öğrenirler. İspatlama etkinlikleri ile öğrenciler matematiğin aksiyomatik yapısını tanıma fırsatı elde ederler. Bir yandan da muhakeme becerilerini geliştirirler. Çocuklarda matematiksel ispat yapabilme becerisinin gelişmesiyle; sistemli düşünebilen, olayları sebepleriyle açıklayabilen bir toplumun oluşması ve ileri düzey matematik çalışabilmek için gerekli görülmektedir (Güven ve diğerleri, 2005).

Altıparmak ve Öziş (2005), matematik öğretiminin en önemli hedeflerinden birinin, neden ve niçin sorularına karşılık olarak mantıklı cevaplar elde etmenin, diğer bir deyişle muhakeme yeteneğinin gelişimini sağlamak olduğunu belirtmişlerdir. İnsanları diğer canlılardan ayıran en temel özellik muhakeme yapabilme yeteneği olduğunu belirten Umay (2003) de matematik öğretiminin en önemli hedeflerinden birinin muhakeme yeteneğinin gelişimini sağlamak olduğunu belirtmiştir. İspat, muhakeme yeteneğinin gelişimine katkı sağlayacak faktörlerin başında gelir. Muhakeme ve ispat yapabilme yeteneği matematiğin temelini oluşturur (Tall, 1998). İspatın gelişimi, bireylerin farklı mantıksal düşünme yollarını kazanmasına bağlıdır. Değişik muhakemeler, bilgilerin farklı yönleriyle inşa edilmesini sağlar. İnsanlar bu düşünebilme ve muhakeme edebilme yetenekleri sayesinde birçok şeyi akıl süzgecinden geçirip mantıklı sonuçlar ortaya koyabilmekte, verilen ifadelerin doğruluğunu gösterebilmektedir (Arslan, 2007). İspatın, verilen bir teoremin anlamını anlamaya, ikna etmeye, analitik düşünme becerinin geliştirmeye ve daha birçok duruma yardımcı olacağı düşünülmektedir.

NCTM (2000) matematik eğitiminde beş süreç standardı olduğunu bildirmiştir. Bunlar; problem çözme, akıl yürütme ve ispat, iletişim, temsil ve ilişkilendirmedir. Bu süreç standartları, öğrencilerin kazanmaları ve kullanmaları gereken matematiksel süreçleri ifade etmektedir. Bu süreçlerden ispat ile problem çözme arasında yakın bir ilişki vardır. Tall (1991), problem çözme sürecini; muhtemel varsayımları formüle etme, etkinlikler dizisini test etme, belirli bir teoremin formal bir ispatını oluşturana kadar değiştirme ve yeniden tanımlama işlemlerini içeren etkinlik olarak tanımlamıştır. Nitekim problem çözme etkinlikleri ispat etkinliklerine dayanak oluşturabilir. Bu sebeple problem çözme süreçlerinde ispata yer verilmeli ve öğrencilerin muhakeme becerilerini geliştirmelerine fırsat tanınmalıdır.

İspat, matematiksel bilginin inşa edilmesinde, gelişiminde ve aktarılmasında gereklidir (Stylianides, 2007a). Öğrenciler, ispatlar sayesinde matematikçilerin yaptıkları şeylerin ne anlam teşkil ettiğini öğrenirler (İmamoğlu, 2010). Hanna (2000a)'ya ve Hersh (1993)'e göre ispat, matematiğin temel taşlarından biridir ve matematik dersindeki en önemli rolü, öğrencilerin matematiksel anlayışlarının gelişimine yardımcı olmaktır. Nitekim öğrenciler ispatı öğrenmeden matematiği ve matematiğin doğasını anlayamazlar. İspatı matematik sürecinin bir bileşeni olarak kullanmak öğrenmelerin daha anlamlı olmasını sağlayacaktır. İspatlama etkinlikleri hem matematiksel düşünmenin geliştirilmesinde hem de matematik yapmada, matematiğin doğasını, anlamını ve tarihsel gelişimini kavramada, matematiğin geliştirilme yollarını ve toplumlar tarafından ne şekilde paylaşıldığını algılamada büyük bir öneme sahiptir. Bu sebeple matematik eğitiminde ispatın önemi yadsınamaz (Hanna, 2000a). Baki (2008)'e göre Şekil.2'de belirtildiği üzere matematiksel ispatların matematik eğitiminde; doğrulama, açıklama ve soyutlama olmak üzere üç rolü bulunmaktadır.



Şekil 3. Matematiksel İspatların Rolü

İspatın matematik eğitimindeki rolü üzerine yapılan çalışmalara bakıldığında, ispat ve matematik arasında kuvvetli bir ilişki olduğu, ispatın matematiksel bilginin inşasında önemli bir yere sahip olduğu ve neticede öğrencilerin ispat yapma becerilerinin kazandırılmasında öğretmenlere büyük sorumluluklar düştüğü belirtilmiştir (Gökkurt ve diğerleri, 2014). Matematiksel ispat kavramının öğretimi ve anlaşılması noktasında, matematik uzmanlarına, öğretmenlerine ve müfredatlarına büyük sorumluluklar düşmektedir. Nitekim matematik uzmanları ve öğretmenleri; öğrencilerin, matematiksel ispatın rolünü ve amacını anlamasına yardımcı olmak yükümlülükleri vardır. Bu nedenle matematik uzmanları ve öğretmenleri, matematiksel ispat kavramının eğitim-öğretim ortamlarının her kademesindeki matematik müfredatlarına ve öğrenci düzeylerine uygun olacak şekilde yer almasına öncülük etmelidirler (Hanna ve Barbeau, 2009). Tüm bu durumlara dikkat edildiğinde matematiksel ispatlar aracılığıyla öğrencilere kazandırılabilecek bazı eğitimsel ve matematiksel değerler şunlardır:

1) İspatlar ile öğrencilerin matematiksel kavramları daha iyi anlar ve geçerli mantıksal çıkarımlar yaparak ulaşılan sonuçlara daha iyi inanırlar.
2) İspatlama etkinliği sırasında öğrenciler matematiksel ifade ve önermenin ispatını yaparken kendilerini bu ispatı yapan kişinin yerine koyabilirler.
3) İspatlar ile matematikçiler ne yaptıklarını ifade ederken öğrenciler ise matematikçilerin ne yaptığını daha net anlarlar. Bu durum öğrencilerin matematiğe matematikçilere ve matematiksel çalışmalara saygı duymalarını sağlar.
4) Bazı estetik ve güzel ispatlar sayesinde öğrencilerin estetik ve güzellik değerlerinin gelişimine katkı sağlayabilir.
5) İspatlar ile öğrencilerin sabırlı olma, ısrar etme, mantıklı düşünme vs. gibi düşünme sistemlerinin ve karakterlerinin gelişimine olumlu yönde katkı sağlayabilir (Tucker, 1999).

İspatın matematik eğitimindeki yeri sürekli tartışmalara sebep olmuştur. Bazıları ispatın matematik eğitiminde yeri olmadığını, bazıları ise matematikten ispatı çıkarmanın matematiği en temel yapı taşlarından birinden yoksun bırakmak olduğunu savunmaktadır. Sonuç olarak ispat, matematiği anlamak, anlamlandırmak ve iletmek için gerekli olan bileşenlerin başında gelir (Albayrak-Bahtiyari, 2010). Hanna (2008), matematik eğitimcilerinin ispatın sınıfta kullanımının olumlu katkı sağladığı konusunda birleştiklerini savunmuş ve matematik eğitiminde ispata daha fazla yer verilmesi gerektiğini belirtmiştir.

Ulusal ve Uluslararası Matematik Öğretim Programlarında İspat

İspat ve muhakemenin insanın doğuştan getirdiği bir yetenek olduğu düşünülmektedir. (Altıparmak ve Öziş, 2005). Son yıllarda matematiksel ispat ve muhakeme yeteneği, ileri düzeyde matematik bilgisi gerektiren bir konu alanı algısından uzaklaşarak, her eğitim kademesindeki bireyin matematiksel ispat yapabilme yeteneğine sahip olduğu belirtilmektedir (Knuth, 2002a). Altıparmak ve Öziş (2005)'e göre bu yeteneğin gelişimi uygulanacak belirli stratejilere bağlıdır. Bahsedilen stratejiler, eğitim ortamında ispat ve muhakeme yapısının gelişimiyle ilgili öğretim programlardır.

CCSSI (2010, s.6)'da "matematiksel olarak yeterli düzeye erişen öğrenci, kabul edilen kavram, tanım ve önceden belirlenmiş (doğruluğu ispatlanmış veya kabullenilmiş) sonuçları kullanarak bir argüman oluşturabilendir." diyerek, matematik bilmeyi ispat yapabilme yeteneği ile ilişkilendirmiştir.

NCTM (2000) ispatı bir konu alanı olmaktan uzaklaştırılarak, matematiğin bir parçası haline getirilmesi gerektiğini ve ezberin önlenmesi ve anlamlı öğrenmelerin sağlanmasında ispatın matematiğin tüm süreçlerine dahil edilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Güncel reformların ispatın matematik eğitimindeki önemine vurgu yapması, hem öğrencilerin matematiksel kavramları daha iyi anlamlandırmasında ispatın rolü, hem de öğrencilerin bir disiplin olarak matematiği daha iyi tanımalarına katkısı ile yakından ilişkilidir (Zeybek ve diğerleri, 2018). Birçok araştırmacıya göre de ispat, matematiğin ayrılmaz bir parçasıdır (CCSSI, 2010; NCTM, 2000; Schoenfeld, 1994). NCTM (2000) özellikle erken yaş dönemlerinden itibaren ispat eğitimine önem verilmesi gerektiğini belirtmiştir. Buna karşın henüz okul matematiğinde (özellikle ilköğretim düzeyinde), ispatın ne anlama geldiği, ispatlama süreçlerinde öğretmen ve öğrencilerin ne gibi rolleri olduğu henüz net değildir (Styliandies, 2007a). Matematik eğitimcileri ve araştırmacılar ispata sadece geometri derslerinde yer vermenin yanlış olduğunu savunmaktadır (Bieda, 2010; Harel ve Sowder, 1998; Stylianides, 2008). Bu bağlamda erken yaş dönemlerinde ispat öğretimini konu alan çalışmaların artırılması ispat eğitimine verilen önemi artıracağı düşünülmektedir.

NCTM (2000)’e göre okul öncesinden ikinci sınıfa kadarki süreçte öğrenciler kendi deneyimlerine dayanarak muhakeme yapabilmektedir. Bunu yaparken algılama, deneysel veriler ve daha önceki öğrendiği gerçeklere dayanan basit tümdengelimi kullanabilir. 3–5. sınıflara gelindiğinde öğrenciler, ters örneklerin ve başkalarını ikna edici bir tartışmayı nelerin oluşturduğunun üzerinde dururlar. Buna ek olarak ortaya konulan çözümleri karşılaştırma ve birbirlerinin kavrama şekillerini soruşturma vasıtasıyla, örneklerden ilişkileri tanımlamayı ve ilişkilerin neden genellenebileceği gibi fikirleri geliştirmeyi ve savunmayı öğrenmeye başlarlar. Yapılan çalışmalar öğrencilerin ilköğretimin erken kademelerinden itibaren muhakeme ve ispat yeteneklerini kullanabildiklerini görüşünü desteklemektedir (Maher ve Martino, 1996; Reid, 2002; Stylianides, 2007b). Örneğin, Maher ve Martino (1996) beş yıllık çalışmalarında 1. sınıftan 5. sınıfa kadar altı öğrencinin ispat yapabilme yeteneklerindeki gelişimi gözlemlemiş ve bu öğrencilerin ispat yapabildikleri sonucuna varmışlardır. Benzer olarak, Stylianides (2007b), ilkokul 3. sınıf öğrencilerinin sınıf ortamındaki muhakeme yeteneklerini gözlemlemiştir. Bu süreçleri ispatı oluşturan iki temel ilke (geçerlilik-süreklilik) ışığında incelemiş ve öğrencilerin ispatlama süreçlerinin gelişimini, öğretmenlerin oluşturacağı sınıf ortamları ve etkileşime göre değişebileceğini belirtmiştir. Ayrıca ilkokul seviyesinde doğrulama etkinliklerinin artırılması ilerleyen basamaklarda ispatlama süreçlerine fayda sağlayacağını bildirmiştir (Zeybek ve diğerleri, 2018).

NCTM (2000) “Okul Matematiğinin İlkeleri ve Standartları” adlı raporda ispat öğretiminin erken yaşlarda ele alınması gereken bir konu olduğu vurgulanmıştır. Bu rapora göre, ortaokul seviyesindeki öğrencilerde soyut düşünebilme becerilerinin başlamasından dolayı, varsayımlarını derinlemesine değerlendirmek için tümevarımla birlikte tümdengelimi kullanabilecekleri belirtilmektedir. NCTM (2000)’nin öngörüsüne göre, lise çağındaki bir öğrencinin formal ispat yapmak için yeterli donanıma sahip olması beklenmektedir. Fakat lise çağındaki öğrencilerin büyük bir kısmının ispat yapmak için yeterli düzeyde olmadıkları aşikardır (Healy ve Hoyles, 2000; Özer ve Arıkan, 2002). İspatı, insanın içgüdüsel olarak sahip olduğu bir yetenek olarak gören Altıparmak ve Öziş (2005), bu yeteneğin okul öncesi dönemden itibaren gelişim gösterdiğini ve uygun stratejilerle daha da ileri taşınabileceğini belirtmişlerdir.

NCTM (2000) ispat öğretimini, matematik öğretiminin temel esasları arasına almış, her sınıf düzeyine göre ispat gelişimi piramitsel şekilde ilerlemekte olduğunu ve ispat yapabilme becerilerinin geliştirilebilmesi için gerekli olanları şu şekilde sıralamıştır:

1. Öğrenciler, ispat ve muhakeme yeteneğinin matematiğin temel yönlerinden biri olduğunun farkına varmalıdır.
2. Öğrencilere matematiksel tahminlerde bulunabilme ve bunları sıralayabilme fırsatı verilmelidir.
3. Öğrenciler matematiksel argümanları ve ispatı değerlendirip geliştirebilmelidir.
4. Öğrenciler gerekli akıl yürütme, muhakeme ve ispat metotlarını seçip kullanabilmelidir (NCTM, 2000, s.402).

Moralı ve diğerleri (2006), yukarıda belirtilen etkinliklerin genellikle gerçek yaşam problemlerinden ve matematiğin kendi iç dünyasından doğacağını ifade etmektedirler. Tüm bu süreçlerde öğretmene düşen görevin; öğrencilere bu tür öğrenme ortamlarını oluşturup, öğrencilerin muhakeme etme ve ispat becerilerini geliştirmek olduğunu belirtmişlerdir.

Ülkemiz uluslararası düzeyde matematik, fen ve okuma başarısının ölçülmesinin amaçlandığı Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması (Trends in International Mathematics and Science Study) (TİMSS) ve Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programlarında (Programme for International Student Assessment) (PİSA) oldukça gerilerde yer almaktadır. Sonuçlar incelendiğinde "öğrencilerin verilen bilgiyi düzenleyebilme, genelleme yapabilme ve sıradan olmayan problemlerin çözümünde stratejilerini açıklayabilme" becerilerinin ortalamaların oldukça altında olduğu görülmektedir (Arslan, 2007). Ülkemiz matematik eğitimi programında ispat yapabilme aşamalardan, tahmin becerileri hariç, diğerleri ya çok az bulunmakta ya da hiç bulunmamaktadır. Aylar (2014)'a göre bunun bir sebebi, ülkemizdeki ilkokul ve ortaokul müfredatlarında ispatla yakından ilişkili olan problem çözme, ilişkilendirme, iletişim, tahmin ve akıl yürütme gibi kavramlar yer alırken, ispata doğrudan değinilmemesi olabilir

Ülkemizde Milli Eğitim Bakanlığının 2005 yılındaki "İlköğretim Matematik (6, 7 ve 8. sınıflar) Dersi Öğretim Programı" incelendiğinde, ilköğretim 6–8. sınıflarda matematik öğretiminde teorem, aksiyom gibi kavramların olmaması sebebiyle açıkça ispat yapmaktan bahsetmek güçtür. Bu programın genel hedeflerinden biri 'mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilme' ifadesidir (MEB, 2005). Matematik öğretiminin temel amaçları arasında, "mantıksal tümevarım ve tümdengelimle ilgili çıkarımlar yapabilecek bireyler yetiştirmek" ifadesinin yer alması öğrencilerin matematiksel düşünme becerisinin geliştirilmesinin hedeflendiğini göstermektedir (Albayrak-Bahtiyari, 2010). Bu hedefin gerçekleştirilmesi, özellikle matematiksel problemlerin çözümünde ve geometrik kuralların nereden geldiğini anlamada önem kazanmaktadır. İlköğretimde matematik öğretiminde, matematiksel bilginin ispatına dayalı olarak yapılandırılmış etkinlikler yoluyla matematiksel bilgiye ulaşıldığı görülmektedir (Moralı ve diğerleri, 2006).

Milli Eğitim Bakanlığı'nın 2013 yılında güncellenen "Milli Eğitim Bakanlığı Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı" incelendiğinde ise, akıl yürütme becerisinin kazandırılması için 'mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma' ve 'bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama' becerilerinin önemine vurgu yapmaktadır (MEB, 2013). Zeybek ve diğerleri (2018), ortaokul matematik programında matematiksel genellemeler yapmanın öneminin vurgulanması ve ders kitaplarında muhakeme ve ispat etkinlikleri arasında matematiksel genellemeler yapma kategorisindeki etkinliklerin sayıca fazla olmasının uyumlu olduğu bildirmişlerdir. Ortaokul programında matematiksel genellemeler yapmanın öneminin vurgulanmasının yanı sıra, 'çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma' becerilerinin de önemi vurgulanmaktadır (MEB, 2013, s. vi).

Matematiksel ispat kavramı, öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinin gelişiminde ve matematiksel bilgilerinin oluşumunda önemli bir role sahiptir. Bu bağlamda; ülkemizde yenilenen "Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı"nda da ispat kavramının önemine vurgu yapılmış ve matematik öğretmenlerinden, öğrencilerin farklı düşünme ve ispat yapma becerilerini geliştirmelerine yardımcı olacak etkinlikler sunmaları, farklı ispat tekniklerini öğretmeleri ve ispatların, matematikteki önemine vurgu yapmaları istenmiştir (Dede ve Karakuş, 2014).

İspat kavramı okulların matematik programlarında hemen her düzeyde yer almaktadır. Öğretim süreçlerinin planlanmasında ispata yer verme şekli, ispatla ilgili öğretmenin alışkanlıkları ve öğrencilerin hazırbulunuşluk seviyeleri gibi faktörler etkili olmaktadır. Bu konudaki eksikliklerin giderilmesi ancak öğretmen eğitiminde ispat kavramının önemine daha çok değinilmesi ve ispatın ne olduğu, matematik eğitimindeki yeri, zihinsel gelişim basamaklarına uygun düşen ispat düzeylerinin belirlenmesi ve bu belirlemelere uygun programların geliştirilmesi ile mümkündür (Arslan, 2007). Güncel eğitim reformlarının önerileri ışığında matematiksel muhakeme ve ispat kavramlarının öğrencilerin matematik eğitimlerinin her seviyesinde yer alması önerilirken, bu çalışma ve ders kitaplarını muhakeme ve ispat etkinlikleri çerçevesinde inceleyen diğer çalışmalar bu önerilerin ders materyalleri hazırlanırken çok dikkate alınmadığını kanıtlar niteliktedir (Zeybek ve diğerleri, 2018).

İspat Yapma Düzeyleri ve İspat Şemaları

İspat yapma yeteneğinin ve düşüncesinin gelişimi bireyde okul öncesi dönemde başlar. Çocuklar okul öncesi dönemde sezgisel dönemdedir ve bu dönem aynı zamanda mantıksal düşünmeye geçiş dönemidir Sınıflama, eşleştirme, sıralama, karşılaştırma gibi kavramlar ispatın temelini oluşturan, mantıksal düşünceye geçişte köprü görevi gören terimlerdir. İlkokul döneminde (1-5. sınıf) çocuk somut düşünme, ortaokul döneminde ise soyut düşünme dönemindedir. İlkokul ve ortaokul döneminde çocukta mantıksal düşünme başlamıştır. 6. sınıftan sonra (özellikle 7. ve 8. sınıflarda) mantıklı düşünmeye ek olarak soyut düşünebilme yeteneği eklenir (Altıparmak ve Öziş, 2005).

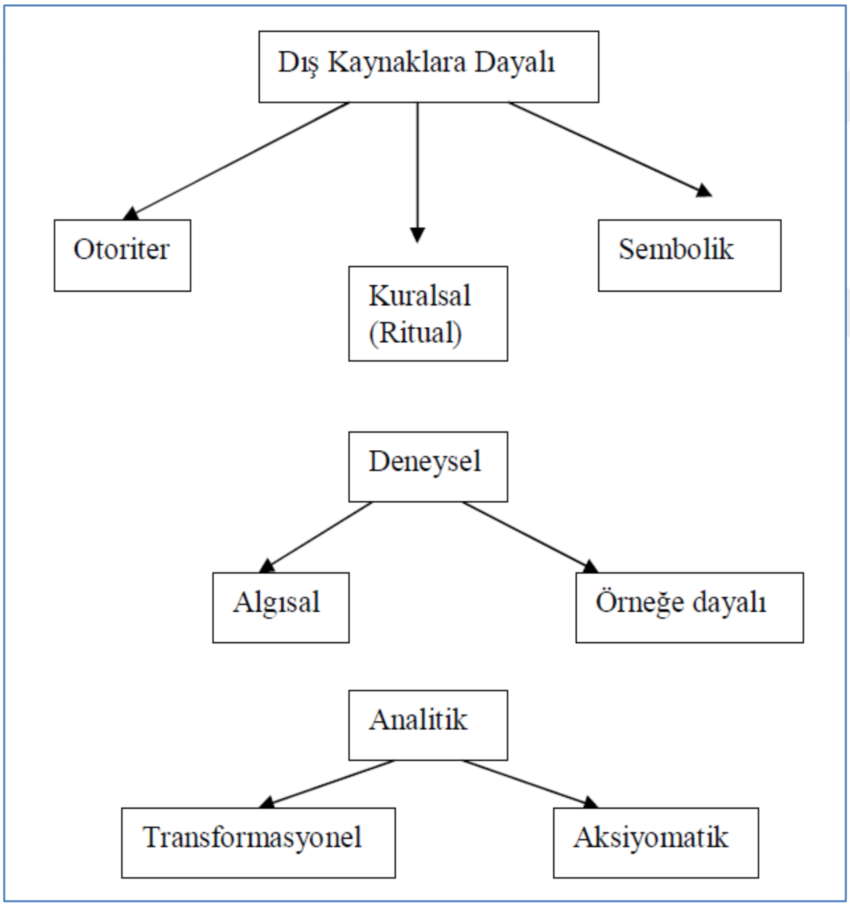
İlkokul çağındaki bir çocuk somut işlemler dönemindedir ve bu yaşlarda öğrenme çok hızlıdır. 2. sınıf öğrencilerinden muhakeme ve ispat adına, şekilleri tanımaları ve sınıflandırabilmeleri beklenir. 2. sınıfın sonunda öğrenciler sayıları da kullanarak muhakeme yapabilirler. Bu kademedeki sınıflarda görsel argümanlar ve fiziksel materyaller daha fazla kullanılmalıdır. Böylelikle öğrencilerin şekilleri karşılaştırma, benzer ya da farklı olanları belirleyip genellemeler yapmaları sağlanır. 3–5. sınıf öğrencilerinden muhakeme ve ispat adına varsayımları formüle edebilmeleri beklenir. Bu kademedeki öğrencilere ifadelerin doğruluğunu göstermek için, bir kaç örneğin yeterli olmadığını, karşıt örnekleri verilen ifadeleri çürütebilmek için kullanabilmeyi öğrenmelidirler. Ortaokul çağında ise, 6–8. sınıf öğrencilerinden muhakeme ve ispat adına genellemeler hakkında varsayım oluşturmaları ve varsayımları değerlendirmeleri beklenir. Bu öğrenciler (özellikle de 7. ve 8. sınıf öğrencilerinden), varsayımları ve iddiaları değerlendirebilmeli, matematiksel iddiaları formüle ederek tümdengelimli ve tümevarımsal muhakemeyi kullanabilmeli ve muhakeme becerilerinin gelişimlerini sürdürebilmelidir (Altıparmak ve Öziş, 2005). Bu çalışmanın katılımcılarının ortaokul 7 ve 8. sınıf öğrencilerinden oluşması nedeniyle çalışmaya katılan öğrencilerin, kendilerine sunulan matematiksel ifade ve argümanları mantıklı ve makul bir şekilde değerlendirebilecekleri ve muhakeme yeteneklerini kullanarak matematiksel iddialara argüman geliştirilebilecekleri düşünülmektedir.

Alan yazın incelendiğinde, öğrencilerin oluşturdukları argümanların seviyelendirilmesine yönelik birçok çalışmaya rastlamak mümkündür (Bell, 1976; Balacheff, 1988; Harel ve Sowder, 1998; Healy ve Hoyles, 2000; Quinn, 2009; Tall, 1998). Bu çalışmalar incelendiğinde, farklı araştırmacıların farklı seviyelendirmelerde bulunduğu görülür. İlerleyen kısımlarda bu konuda yapılan sınıflandırma çalışmalarına değinilecektir.

Bell (1976), ispatın matematiksel anlamının üç boyut taşıdığını ve her birinin kendi açısından çok önemli olduğunu ifade etmiştir. Birincisi bir önermenin doğruluğu ile ilgili olan geçerli kılma ya da doğrulamadır; ikincisi, açıklamadır; çünkü iyi bir ispattan bir önermenin neden doğru olduğuna dair bir öngörü taşıması beklenmektedir, bu ispatın geçerliliğini etkilemez fakat bir ispattaki varlığı estetik açıdan tercih edilmektedir. İspatın üçüncü boyutu daha matematiksel bir özellik olan sistematikleştirmedir ki bu, sonuçların aksiyomların, ana kavramların ve teoremlerin ve bunlardan türeyen küçük sonuçların tümdengelimsel bir sisteme dönüştürülmesidir. Bell (1976)'nın belirlediği üç özellik ispatları incelemek için matematik eğitiminde bir araç olarak kullanılmaktadır. Bell (1976) öğrencilerin ispat şemaları için 3 aşamayı tanımlar. 1. aşama soyut ispat aşaması, 3. aşama empirik (deneysel) ispat aşaması ve 2. aşama bu ikisi arasında geçiş aşamasıdır.

Balacheff (1988) ise, ispat tip ve seviyelerini 4 kategoride toplamıştır. Bu kategoriler: (a) Naive Empiricism (Saf Deneycilik), (b) Crucial Experiment (Kritik Deney), (c) Generic Example (Genel Örnek), ve (d) Thought Experiment (Düşünce Deneyi). İlk seviyede (Saf Deneycilik) öğrenciler, ifadenin birkaç tane örnek için geçerli olduğunu doğruladıktan sonra, varsayımı doğru olarak kabul etme eğilimindedirler. Bu seviye genelleme sürecinin başlangıcını teşkil eder. İkinci seviyede (Önemli-Kritik Deney), kritik bir şekilde seçilen örnek ve ya örnekler kontrol edilir. Eğer seçilen kritik örnek(ler) için ifade doğru ise, varsayım doğrudur. Bu seviyenin ilk seviyeden farkı; öğrencilerin genellik sorununun farkında olmaları olarak düşünülebilir. Üçüncü seviyede (Genel Örnek) seçilen örnek, işlemler veya dönüşümlere dayanmaktadır. Öğrenciler, her ne kadar genel bir örneğe dayalı argümanlar geliştirseler de, bu argümanların bir özel durumlara dayanmasına rağmen özel durumlar için kullanılmazlar. Dördüncü seviyede (Düşünce Deneyi) ise fikri delillerden hareket ederek öğrenciler, örnekleri açıklamaya başlarlar ve açıklamalarını belirli örneklerden ayırmaya ve entelektüel kanıtlara dayandırmaya başlarlar (Balacheff, 1988).

Harel ve Sowder (1998)'e göre öğrenciler, bir matematiksel ifadenin doğruluğunu göstermede farklı stratejiler kullanırlar. Bu stratejiler öğrencinin, bir ifadenin doğruluğunu göstermek için kendini ve karşısındakini nasıl ikna ettiğine göre değişmektedir. Bir ifade için neyin belirleyici ve ikna edici olduğu öğrencinin ispat şemasını ortaya koymaktadır. Harel ve Sowder (1998) tarafından ortaya konulan ispat şeması ve bu şemada yer alan kategoriler Şekil 4'te özetlenmiştir.



Şekil 4. İspat Şemaları

Harel ve Sowder (1998)'in öne sürdüğü, Şekil 4'te verilen ispat şemalarında yer alan ilk kategori dışsal ispat şemasıdır. Bu seviyede yer alan öğrenciler matematikte öğrendikleri kavramların doğruluğunu kitap, öğretmen veya başka dış etmenlere dayandırırlar. Dışsal ispat şemasındaki öğrenciler, matematiksel bir ifadenin geçerliğini tanımlamak için dışsal bir otoriteye güvenir. Bu ispat şemasına sahip öğrenciler keşfetme yerine kuralları ezberlemeyi öğrenirler ve eleştirel yönleri gelişmez. Dışsal ispat şemaları (a) Kuralsal (Ritüel), (b) Otoriter ve (c) Sembolik olmak üzere üç aşamadan oluşur. Kuralsal (ritüel) aşamasında öğrenciler, bir matematiksel ifadenin ve önermenin doğruluğundan ziyade görünüşünden etkilenirler. Ardışık hesaplamaların, matematiksel ifadelerin, notasyonların organize hali öğrenciyi etkiler ve öğrenci bu kadar organize ifadenin yanlış olacağına ihtimal vermez. Otoriter aşamasında öğrenciler için, bir teoremin, ispatın ve formülün bir kitapta yer alması veya öğretmen tarafından sunulması yeterlidir. Bu şemaya sahip öğrencilerin kitabı veya öğretmeni yanında olmadığında, bir ifadenin doğruluğunu belirleme hususunda endişelidirler. Sınıf otoritesi olarak öğretmen, görev belirleme, tartışmalara rehberlik etme, şüphe uyandırma, öğrencileri sorgulamaya yönlendirme, açıklama yapma ve sonuçları belirtme konusunda kesinlikle önemli bir role sahiptir. Bu tip şemaya sahip öğrenciler otorite bağımlılığından kurtulması için küçük grup çalışmalarına yönlendirilebilir. Sembolik aşamasında öğrenciler, çoğunlukla matematiksel terim ve sembollerin anlamını tam olarak bilmediklerinden dolayı, matematiksel sembol, tanım ve işlemleri anlamlarından uzak ve hatalı olarak kullanırlar. Örneğin; $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$'yi $\frac{a+c}{b+d}$ olarak algılama veya $\sin(x+y)$'yi $(\sin x+\sin y)$ olarak algıma buna örnektir. İkinci kategori deneysel ispat şemasıdır. Bu seviyede yer alan öğrenciler, yalnızca örneklere dayanarak doğrulama yaparlar. Bu ispat şemasındaki öğrenciler için, duyuşsal birikimler veya fiziksel olguların etkisiyle incelenen önermeler ve varsayımlar geçerli olabilir, şüpheli görülebilir veya ret edilebilir. Deneysel ispat şemaları (a) Örneklere dayalı ve (b) Algısal (Sezgisel) olmak üzere iki aşamadan oluşur. Örneklere dayalı aşamasında öğrenciler, ispat sürecinde üzerinde çalışılan kümenin sınırlı sayıdaki elemanı için doğrulama yaparlar ve buradan elde ettiği çıkarımla kümenin tümü için bir genellemeye varabilirler. Matematikçiler, örneklere ve ters örneklere değer vermektedirler. Fakat öğrenciler, örnekle doğrulamanın kesin sonuç belirtmediğinin farkına vardırılmalıdır. Aksi takdirde bu durum öğrencilerin üst düzey doğrulama yeteneklerinin gelişmesini engelleyebilir. Bu sebeple öğrencilere tek örnekle doğrulama yapmalarının yanılgıya yol açabileceği deneyimleri yaşamaları sağlanmalı ve tamamen güvenmelerinin önüne geçilmelidir. Algısal (Sezgisel) aşamasındaki öğrenciler, basit çizimler veya sezgileri yardımıyla iddianın doğruluğunu açıklamaya çalışırlar. Teknoloji, dinamik geometri ve matematik yazılımları sayesinde çokça çizime imkan tanır. Üçüncü ve son ispat şeması analitik ispat şemasıdır. Bu seviyede yer alan öğrenciler, mantıksal tümdengelimci araçlarla varsayımların geçerliğini belirlemeyi ifade eder. Üst düzey doğrulamalar içerir. Analitik ispat şemaları (a) Dönüşümsel (Transformasyonel) ve (b) Aksiyomatik olmak üzere iki aşamadan oluşmaktadır. Dönüşümsel (Transformasyonel) aşamada öğrenciler, dönüşüme dayalı gözlemleri, nesneler üzerinde işlemleri ve işlemlerin sonuçlarının tahmini içerir. Bu şemadaki öğrenciler, ispatlama sürecinde hem tümevarımsal hem de tümdengelimli muhakeme sürecini kullanırlar. Doğrulama süreci örneklere dayalı olmaktan çok geneldir ve muhakeme içerir. Örneğin; "Birler basamağı 5 olan bir sayının karesininde birler basamağı 5 tir." İfadesini doğrularken birler basamağı 5 olan sayıların karesini genel ifade ile $(10\mathrm{n}+5)^2$ olarak gösterebilmek ve devamında birler basamağı 5 ile bitmeyen sayıların karelerinden örnekler verebilmek. Aksiyomatik aşamadaki öğrenciler, doğrulama sürecinde aksiyomatik sisteme dikkat ederler ve tümdengelimli çıkarımlar gerçekleştirerek formel bir ispat ortaya koyarlar. Tanımları, postulatları ve aksiyomları kullanarak ispat yapabilirler.

Dede ve Karakuş (2014)'e göre matematiksel akıl yürütmenin temelinde Harel ve Sowder (1998)'in bahsettiği analitik ispat şemaları bulunduğundan dolayı, öğrencilerin dışsal ve deneysel ispat şemalarını kullanmaları çok fazla istenilmemektedir. Bunun yanında, bu iki şemanın kullanılmasının olumlu yönleri de vardır. Dışsal ispat şemalarından otorite ispat şemaları özellikle öğrencilerin bilmediği bir konuda kaynak belirtebilmelerini sağlamada kullanılabilir. Bunun yanında, deneysel ispat şemaları da konuyla ilgili örnek ve ters örneklerin öğrencilerin düşüncelerinin ortaya çıkarılmasında etkilidir. Analitik ispat şemaları ise bu iki şemaya göre daha üst düzey ispat şemaları olup, öğrencilerin daha fazla kullanmaları beklenilen şemalardır.

Deneysel (empirik) argümanlar (yöntemler) ispat olarak nitelendirilmemektedir. Çünkü empirik argümanlar geçerlilik ve süreklilik ilkesi ile uyuşmamaktadır (Balacheff, 1988; Harel ve Sowder, 1998). Fakat ilkokul çağlarında deneysel (empirik) yöntemlerle ortaya konulan çabalar tümdengelimli akıl yürütme ve ispatlama için temel teşkil etmektedir (Maher ve Martino, 1996). Empirik argümanlarla doğrulamaya alışan öğrenciler ilerleyen yıllarda iyi seçilmiş bir örnekle doğrulamayı ispat olarak nitelendirebilir ve bu durum öğrencide ileri düzeyde ispat seviyesine ulaşmasını zorlaştıracaktır (Martin ve Harel, 1989).

Tall (1998), bireylerin bilişsel gelişim seviyelerine göre ispat yapma yaklaşımlarının farklılaşabileceğini bildirmiştir. Bilişsel gelişim inaktif (pasif), ikonik ve sembolik olmak üzere üç aşamada temsil edilmiştir. En temel iletişim şekli olan inaktif, fikirlerini iletmek için jestleri ve fiziksel eylemleri kullanmaktır. Bir sonraki ikonik, resimleri veya şemaları fiziksel temsiller olarak kullanmaktır. Sembolik ise yalnızca doğal dili değil, aynı zamanda matematik ve geometrinin kendine has dilini kastetmektedir. Tall (1998) ispat yapma yaklaşımlarını belirli düzeylerde sınıflandırmıştır. Buna göre ispat yapma yaklaşımları uygulamalı (enactive), görsel (visual), cebirsel (algebraic) ve formel (formal) olmak üzere dört boyutta değerlendirilmiştir. Buna göre en alt düzeydeki uygulamalı ispat; bir ifadenin doğruluğunun gösterilmesi için fiziksel eylemi içeren ispattır. Uygulamalı ispat en alt seviyedeki ispatları içermektedir. Aynı zamanda sözel ya da görsel ögeleri de barındırabilen bu türün en önemli özelliği fiziksel eylemi içermesidir. İki kenarının uzunluğu eşit olan üçgenin taban açılarının da eşit olacağını ispatlamada bir kağıttan yapılan ikizkenar üçgenin simetri ekseninden ikiye katlanarak üst üste gelen taban açılarının ölçüsünün aynı olduğunun gösterilmesi bu ispat türüne bir örnektir. İkinci düzeydeki ispat olan görsel ispat, uygulamalı ispatı da bünyesinde barındıran ve argümanların görsel öğelerle doğrulanmasını içeren ispattır. Sözsüz ispatlar (proof without words) bu ispat türüne örnek verilebilir. Bu ispat biçiminin Harel ve Sowder (1998)'in deneysel algısal ispat biçimiyle ilişkili olduğu söylenebilir. Üçüncü ispat ise cebirsel gösterimler ve manipülasyonlarla yapılan cebirsel ispattır. Ardışık iki tek sayının toplamının 4'ün bir katı olduğunun 2n+1 ve 2n+3 cebirsel ifadelerinin toplama yoluyla 4n+4 olarak yazılarak doğruluğunun gösterilmesi bu tür ispata bir örnektir. En son düzeydeki ispat ise tümevarımsal biçimde yapılan klasik matematiksel ispat olarak nitelendirilebilecek formel ispattır. Bu ispat düzeyinin ise Harel ve Sowder (1998)'in analitik ispat şemasıyla ilişkilendirilmesi mümkündür.

Healy ve Hoyles (2000), 14–15 yaşlarındaki ulusal sınavda başarılı gruba giren öğrencilerin doğrulama ve ispat performanslarını incelemek için yaptıkları çalışmalarında, Tall (1998)'in öne sürdüğü deneysel (empirik), biçimsel (cebirsel) ve anlatımsal (narrative) argümanları kullanmışlardır. Yapılan araştırmada öğrencilerden doğrulama konusunda kendi yaklaşımlarını araştırmaları ve en iyi ispatın hangisi olduğunu tercih etmeleri istenmiştir. Katılımcıların verdikleri yanıtlar deneysel, biçimsel ve anlatımsal olmak üzere üç gruba ayrılmıştır.

Stylianides (2008) Tablo 1'de belirtildiği üzere ispat ve muhakeme süreçlerini genellemeler yapmak ve argümanlar geliştirmek olmak üzere iki alt başlıkta toplamıştır. Argümanlar geliştirme başlığı altında ise (1) ispat olan argümanlar ve (2) ispat olmayan argümanlar olmak üzere iki çatıda toplamıştır.

Tablo 1. İspat ve Muhakeme Sürecinin Bileşenleri

İspat ve Muhakeme Süreçleri			
Genellemeler yapmak		Argümanlar geliştirme	
Bir örüntü bulma (kesin ve makul)	Bir çıkarım yapma (Gerekçeli)	İspat Sunma (Genel argüman veya gösterim)	İspat olmayan bir argüman sunma (Deneysel veya rasyonel)

(Stylianides, 2008, s.10)

Tablo 1'de görüldüğü üzere ispat olan argümanlar çatısı altında, (a) genellenebilir örnek ve (b) gösterim yer almaktadır. Genellenebilir örnek, belirli bir durumu, daha genel durumları temsil etmek amacı ile kullanan ispatlardır (Balacheff, 1988). Gösterim ise, belirli bir durumun temsil ediciliğine bağlı olmayan geçerli argümanlardır. Matematiksel bir ifadenin doğruluğunu kanıtlamak için ispat oluşturmada yetersiz kalan argümanlar ise ispat olmayan argümanları çatısı altında (a) empirik argümanlar ve (b) mantıksal çıkarımlar olmak üzere ikiye ayırmıştır. Empirik argüman, matematiksel bir iddianın doğruluğunu örneklerle açıklamaya çalışan argümanlardan oluşurken, mantıksal çıkarım ise ne empirik ne de bir ispat olan argümanları açıklamak için kullanılır. Örneğin bir argüman bazı anahtar kabul edilmiş doğrulardan bahsetmiyor ve ya kabul edilmiş doğrulardan oluşan kümeye ait olmayan ifadelere yer veriyor ise mantıksal çıkarım olarak kabul edilir.

Stylianides (2009) ayrıca, ispat olan ve ispat olmayan argümanları gelişmişlik düzeylerine göre Tablo 2'deki gibi sıralamıştır.

Tablo 2. Argümanlar Hiyerarşisi

	İspat olmayan argümanlar		İspatlar	
Gelişmişlik düzeyleri	Deneysel argüman	Mantıksal çıkarım	Genel argüman	Gösterim

(Stylianides, 2009, s. 280)

Tablo 2'de görüldüğü üzere deneysel argümanlar en alt düzeyde yer alırken gösterim en üst düzeyde yer almaktadır. Genel argümanlar ve gösterimler ispat sayılırken deneysel argümanlar ve mantıksal çıkarımlar ispat sayılmamaktadır

Quinn (2009) tarafından ortaya konulan ispat seviyelendirmeleri ise Tablo 3'te özetlenmiştir.

Tablo 3. İspat Seviyeleri

Kategoriler	Kategorinin Özeti	Kategorinin Karakteristik Özellikleri
Seviye 0	Gerekçe yok.	Öğrenciden gerekçelendirilmesi istendiğinde, ya sadece bildiklerini söylerler ya da cevaplarını tekrar verirler.
Seviye 1	Dış otoriteye ya da ezberci işlemlere başvurma.	Öğrenciler sadece dış otoriteyi dayanak olarak kullanırlar ve ezberlenmiş kuralları söylerler. Bu fikrin neden doğru olduğunu anlamazlar ya da ilgilenmezler.
Seviye 2	Naif bir muhakeme, genellikle yanlış sonuçlarla.	Her ne kadar öğrenciler bir miktar açıklama yapsalar da, bu tartışmalar ya da öğrencilerin duymayı hatırladıkları bir şeyle, genellikle yanlış olarak başlar. Sonuç olarak, öğrenciler çoğunlukla yanlış bir karara varırlar (sadece hesaplama hatası değil). Eğer öğrenciler doğru bir sonuca varmışlarsa, bu yanlış sebeplerden kaynaklanıyordur.
Seviye 3-A	Endüktif akıl yürütme A (örnekler, deneyler veya empirik gösteriler).	Öğrenciler bir iddianın doğruluğuna örnekler vererek karar verirler. Her seviyedeki öğrenciler anlamak için örnekler kullanırken, bu seviyedeki öğrenciler örnekleri bir ispat olarak kullanırlar.
Seviye 3-B	Endüktif akıl yürütme B (bir genellemenin yapılıp yapılmadığının ve neden yapıldığının araştırılması).	Hala örneklerden yararlanma varken, öğrenciler karşı örnekler, örnek olaylar veya aşırı durumlar arayarak genellemeye başlarlar. Bir örneğin sürekli ifadeyi doğrulayacağından şüphe duyarlar.
Seviye 4	Resmi akıl yürütmeye geçiş (resmi akıl yürütme unsurları, ancak kesin olmayan unsurlar).	Öğrenciler Seviye 5 argümanının resmi olmayan bir versiyonunu kullanırlar.
Seviye 5	Biçimsel akıl yürütme (bir matematikçi tarafından kabul edilebilir).	Öğrencilerin argümanları bir matematikçi tarafından kesin ve kabul edilebilirdir. Teorik ve formal yollar içerir.

Quinn (2009, s.305)

Tablo 3'te görüldüğü üzere Quinn (2009) ispat seviyelerini yedi basamakta gruplandırmıştır. Seviye 3B basamağındaki öğrenciler Seviye 3A'dan farklı olarak Balacheff (1988)'in belirttiği kritik örnekleri kullanmaya başlarlar. Bu sebeple Quinn

(2009) kritik örnekler vermeyi rastgele verilen birkaç örnekten daha yüksek bir seviye olarak görmekte ve Seviye 3B'yi 3.5 olarak belirtmektedir.

Bu çalışmada, yukarıda belirtilen Bell (1976), Balacheff (1988), Harel ve Sowder (1998), Tall (1998), Healy ve Hoyles (2000), Stylianides (2008) ve Quinn (2009)'un ispat seviyelendirmeleri, ispat şemaları ve ispat yöntemleri ışığında bir derleme yapılmıştır. Çalışmada matematiksel ifadelerin doğrulanması veya ispatlanması için kullanılabilecek yöntemler üç kategoride toplanmıştır. Bunlar: (1) İspat olmayan yöntemler, (2) İnformal ispat yöntemleri ve (3) Formal ispat yöntemleridir. İspat olmayan yöntemler, deneysel (empirik) argümanlarla doğrulama yapmaktır. Yani bir matematiksel ifadenin doğruluğunu örnekler vasıtasıyla göstermeye çalışma durumudur. Alan yazında çoğu çalışmada deneysel argümanların ispat niteliği taşımadığı belirtilmiştir (Balacheff, 1988; Harel ve Sowder, 1998; Stylianides, 2008). Bu çalışmada ispat olmayan yöntemler ile kastedilen deneysel argümanlar olacaktır. İnformal ispat yöntemleri, ispatın özelliklerini tam anlamıyla taşımamakla birlikte, bir kısmını taşıyabilen doğrulama yöntemleridir. Bu çalışmada informal ispat yöntemler ile kastedilen yöntemler, anlatımsal-sözel (narrative) argümanlar ve görsel (visual) argümanlardan oluşmaktadır. Bell (1976)'nın belirttiği deneysel ispattan soyut ispata geçiş aşaması ve Quinn (2009)'un belirttiği resmi akıl yürütmeye geçiş olarak nitelendirdiği basamaktır. Bu basamaktaki ispatlar tam ispat tanımına uymamakla birlikte ispatın bazı özelliklerini taşımaktadır. Formal ispat yöntemleri, Tall (1998)'in belirttiği üzere matematiğin resmi dilinin kullanıldığı cebirsel-biçimsel yöntemleri ve tümevarımsal biçimde yapılan klasik matematiksel ispatları içeren yöntemlerdir. Çalışmada formal ispat yöntemler ile kastedilen cebirsel-biçimsel argümanlar olacaktır. Alan yazından derlenen ve çalışmanın veri analizi kısmında yararlanılan doğrulama ve ispat yöntemleri Tablo 4'te verilmiştir. Ayrıca her bir alt temaya ait karakteristik özellikler çalışmanın yöntem bölümünde daha ayrıntılı bir şekilde verilecektir.

Tablo 4. Doğrulama ve İspat Yöntemleri

Doğrulama ve İspatlama Yöntemleri (Temalar)	Doğrulama ve İspatlama Yöntemlerinin Alt Yöntemleri (Alt Temalar)
İspat Olmayan Yöntemler	Deneysel (Empirik) Argümanlar (Kodu: D.A.)
İnformal İspat Yöntemleri	Anlatımsal-Sözel (Narrative) Argümanlar (Kodu: A.S.A.)
	Görsel (Visual) Argümanlar (Kodu: G.A.)
Formal İspat Yöntemleri	Cebirsel-Biçimsel Argümanlar (Kodu: C.B.A.)

Tablo 4'te görüldüğü üzere ispat olmayan yöntemleri deneysel argümanların kullanıldığı yöntemler oluşturmaktadır. Bu seviye alan yazında Bell (1976)'nın 'deneysel (empirik)' aşaması, Balacheff (1988)'in 'saf deneycilik' ve 'kritik deney' aşaması, Tall (1998)'in 'uygulamalı enaktif (pasif)' aşaması, Harel ve Sowder (1998)'in 'deneysel ispat şemaları: örneğe dayalı ve algısal (sezgisel)' aşaması, Stylianides (2008)'in 'deneysel argümanlar' aşaması, Quinn (2009)'un 'Seviye 3 A: örnekler, deneyler veya ampirik gösteriler' aşamasına denk gelmektedir. İnformal ispat yöntemlerini anlatımsal-sözel ve görsel argümanların kullanıldığı yöntemler oluşturmaktadır. Bu seviye alan yazında Bell (1976)'nın 'deneysel (empirik) doğrulamalar ile soyut ispatlar arasınaki geçiş' aşaması, Balacheff (1988)'in 'genel örnek' aşaması, Stylianides (2008)'in 'genellenebilir örnek' aşaması, Quinn (2009)'un 'Seviye 4: resmi akıl yürütmeye geçiş (resmi akıl yürütme unsurları, ancak kesin olmayan unsurlar)' aşamasına denk gelmektedir. Formal ispat yöntemleri cebirsel-biçimsel argümanların kullanıldığı yöntemlerden oluşmaktadır. Bu seviye alan yazında Bell (1976)'nın 'soyut ispat' aşaması, Balacheff (1988)'in 'düşünce deneyi' aşaması, Harel ve Sowder (1998)'in 'analitik ispat şemaları: dönüşümsel' şeması, Stylianides (2008)'in 'gösterim' aşaması ve Quinn (2009)'un 'Seviye 5: biçimsel akıl yürütme' aşamasına denk gelmektedir. Bu tablo hem veri kaynaklarının hazırlanmasında hem de analiz aşamasında analitik çerçeve olarak kullanılmış olup yöntem kısmında her temaya ve alt temaya uygun örnek öğrenci cevapları ile basamaklar daha ayrıntılı açıklanmaya çalışılmıştır.

Matematiksel İspat Yapma Sürecindeki Zorluklar ve Kavram Yanılgıları

Matematik, eğitim hayatının ilk yıllarından itibaren karşılaştığımız bir ders olup, sarmal ve piramitsel bir şekilde devam etmektedir. Matematiğin içerisinde eğitim hayatının ilk yıllarından itibaren varlığını hissettiren, ispat yapabilme becerisi, üst sınıflara doğru giderek daha üst bilişsel seviyelere çıktığı gözlenmektedir. Harel ve Sowder (1998), teoremler ve ispatların matematiğin ayrılmaz temel parçaları olduğunu düşünmektedirler. Matematikte ispatın yeri ve öneminin son yıllarda artmasıyla birlikte, farklı yaş gruplarındaki öğrencilerin ispatlama becerileri, süreçleri, şemaları, yöntemleri ve gelişimleri matematik eğitimi alanında araştırma konularından biri haline gelmiştir. Fakat ispat yapmak, gerek ilköğretim ve ortaöğretim, gerekse yükseköğretim olmak üzere, yer aldığı eğitimin her aşamasında, öğrencilerin korktukları, sıkıntı duydukları, başarılı olamadıkları, başarılı olamayacaklarına inandıkları, genellikle sevilmeyen ve gereksiz görülen bir süreç olarak algılandığı birçok araştırmanın konusu olmuştur (Almeida, 2003; Chazan, 1993; Jones, 2000; Knuth, 2002a; Knuth ve diğerleri, 2009; Özer ve Arıkan, 2002; Raman, 2003).

İspat yapmak muhakeme ve anlamayı gerektirir. Anlamlandırma ise matematik başarısına olumlu katkı sağlar. Bu sebeple öğretmen ve öğrencilerin 'neden' sorusunu alışkanlık haline getirmeleri faydalı olacaktır (Mansi, 2003). Matematiksel anlamlandırmanın zorlu bir süreç olduğunu belirten Raman (2002)'a göre, öğrenciler, ispat yaparken doğru olduğuna inandıkları bir sonuca ulaşsalar bile, daha önceki öğrendiklerine uygun olmadıkça, ispatın matematiksel olarak doğru olduğunu düşünmemektedirler. Bu sebeple ispatın matematik eğitiminde doğru ve yerinde kullanılması gerekmektedir. Güven ve diğerleri (2005), ortaöğretimde öğrenim gören öğrencilerin ispat yapabilmeleri gerektiğini, fakat bu seviyedeki öğrencilerin farklı geometri konularında ispat yapma becerilerinin yetersiz olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Harel ve Sowder (1998)'de ispatlama konusunun lise ve üniversite öğrencileri tarafından zorlu bir süreç olarak görüldüğünü belirtmişlerdir. Öğrencilerin gerek öğretim programından, gerekse öğretim yöntemlerinden kaynaklanan ispat yapma yetersizlikleri olduğunu belirten Almedia (2003), uygun eğitim yöntemleri ile öğrencilerin ispat yapma konusunda geliştirilebileceğini ve değiştirilebileceğini, öğrencilerin bu konuda bir potansiyellerinin olduğunu belirtmiştir.

Çeşitli eğitim seviyelerindeki öğrencilerin ispata ilişkin düşüncelerinin yanı sıra, ispat yapma düzeyleri ve ispat yapmada karşılaştıkları sorunlar üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Hem lise hem de üniversite düzeyinde öğrencilerin ispat yapma düzeyleri düşük bulunmuştur. Almeida (2001)'in ve Özer ve Arıkan (2002)'nin belirttiği üzere lise öğrencileri, matematiksel doğrulamaları genellikle birkaç örnek ile deneyerek deneysel (empirik) argüman oluşturarak yapmaktadırlar. Söz konusu örnekler büyük oranda sayısal olup cebirsel gösterimler şeklinde değildir. Özer ve Arıkan (2002) bu durumu ülkemiz nezdinde test çözme üzerine odaklanılan öğretim anlayışı altında öğrencilerin matematiksel yazım, sembol ve notasyon kullanımları konusunda yeterince yönlendirilmemesinin bir sonucu olarak belirtmektedir. Nitekim Harel ve Sowder (1998), öğrencilerin matematiksel doğrulamalar için verilen birkaç örneğin yeterli olacağına inandırılmasının, bu öğrencilerde daha sonraki süreçlerde çeşitli kavram yanılgılarına sebep olabileceğini belirtirler. Harel ve Sowder (1998) ayrıca öğrencilerin ispat oluşturmakta zorlandıklarını, bunun sebebi olarak ise öğretmenlerin, öğrencilerin ispat fikirlerini geliştirecekleri ve ispat yapacakları ortamı sağlamaktan çok, ispatlamaları kendilerinin yapmalarını sebep olarak göstermektedir. Bazı araştırmacılar ortaokul öğrencilerinin okulda ispatla ilgili sınırlı deneyimlerinden kaynaklı, ispat yapma konusunda zorlandığını belirtmişlerdir (Chazan, 1993; Senk, 1985).

Dede ve Karakuş (2014)'e göre, öğrencilerin ispatlama sürecinde kullandıkları ispat şemaları, öğrencilerin düşüncelerini ve ikna olma stillerini yansıttığından dolayı, aynı zamanda öğrencilerin kavram yanılgılarını da ışık tutmaktadır. Bu sebeple, matematik öğretim programları ile öğrencilerin ispatlama süreçleri ve ispat şemaları arasında sıkı bir bağ vardır. Özer ve Arıkan (2002) lise 2. sınıf (10. sınıf) öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme becerileri ile sahip oldukları ispat düzeylerini Miyazaki'nin (2000) ve Balacheff'in (1988) ispat sevilendirmelerini temel alarak incelemişler, öğrencilerin hemen hemen tamamının amaçlanan düzeyde tümdengelim ve tümevarım yoluyla ispat yapamadıkları görmüşlerdir. Öğrenciler bir ifadenin doğruluğunu göstermek için genellikle sayısal örneklere (deneysel yöntemlere) başvurmuşlardır. Öğrencilerin çoğu ortaya koydukları ispatlamalarla Balacheff (1988)'e göre pragmatik düzeyde (en alt seviye, örnek vererek yapılan doğrulamalar) kalmışlardır. Knuth ve diğerleri (2002), ortaokul 6–8. sınıf öğrencilerinin ispatlama konusundaki yeterliliklerini incelemiş ve araştırmaya katılan öğrencilerin %70'inin bir ifadenin doğruluğunu göstermek için örnek kullandığını (deneysel yöntemler) tespit etmişlerdir. Mansi (2003) ise çalışmasında, lise öğrencilerinin matematiksel ispat konusunda yeterli donanıma sahip olmadıklarını belirtmiş ve ispat ile anlamlı öğrenme ve başarı arasındaki ilişkiye değinmiştir. Arslan (2007), ilköğretim 6–8. sınıf öğrencilerinin muhakeme ve ispat yapabilme süreçlerini incelemiş, öğrencilerin muhakeme etme düzeylerinin alan yazınca uygun görülen seviyenin altında olduğunu ve ispat yapabilme becerilerinin, sınıf seviyesiyle doğru orantılı olarak belirgin değiştiğini belirtmiştir. Knuth ve diğerleri (2009), 6–8. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispat hakkındaki düşünceleri sorgulamışlar ve doğrulama yaparak kendi fikirlerini oluşturan öğrencilerin lise döneminde ispat yapabilecek düzeye gelebileceğini vurgulamışlardır. Ayrıca matematik eğitiminde anlamlı öğrenmeler sağlamak için ispata daha fazla yer verilmesi gerekliliği üzerinde durmuşlardır. Reid ve Knipping (2010), ispat ile ilgili yapılan çalışmalarında tüm öğretim düzeylerinde yer alan öğrencilerin (ilkokuldan üniversite öğrenimine kadar) ispat yaparken deneysel (empirik) argümanları kullandığını, örnek deneyerek yapılan doğrulamaları ispat için yeterli bulduklarını ortaya koymuşlardır. Literatürde ortaokul ve lise öğrencilerinin matematiksel doğrulamalarında genellikle deneysel yöntemleri ortaya koyduklarına yönelik çalışmalara sık rastlanmaktadır (Aylar, 2014; Chazan, 1993; Cooper ve diğerleri, 2011; Çalışkan, 2012; Healy ve Hoyles, 2000; Harel ve Sowder, 1998; Özer ve Arıkan, 2002; Zaimoğlu, 2012; Zeybek-Şimşek ve Üstün, 2019). Çalışkan (2012), ilköğretim 8. sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin arasındaki ilişkiyi incelemiş ve ilköğretim 6, 7, 8. sınıf matematik ders kitaplarındaki etkinlikleri Balacheff'in (1988) ispat seviyelendirmelerine göre analiz etmiştir. Araştırma sonucunda ilköğretim matematik ders kitaplarında yer alan etkinliklerin ispat düzeylerinin, öğrencilerin ispat düzeylerinin altında kaldığı, öğrencilerin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyeleri arasında pozitif yönde ilişki olduğu sunucuna ulaşmıştır. Zaimoğlu (2012), 8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimlerini incelemiş, öğrenciler tarafından en çok tercih edilen ispat türünün sayısal örnekleme ve görsel ispat olduğunu ve en az tercih edilen ispat türünün ise cebirsel ispat olduğunu belirtmiştir. Çontay (2017), ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şemalarına göre incelemiş, öğretmen adaylarının üst düzey ispat bilgisi içeren, analitik-aksiyomatik ispat şeması haricindeki tüm alt gruplarındaki ispat şemalarının özelliklerini ortaya koyan özellikler sergilediklerini belirtmiştir. Jones (2000) matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin bilgilerini incelemiş, öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin becerilerinin yeterli düzeyde olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca yüksek akademik başarıya sahip matematik öğretmen adaylarının dahi etkili matematik öğretimi için gerekli bilgilere sahip olmadıkları ve bu şekilde mezun olduklarını belirtmiştir. Moralı ve diğerleri (2006) da benzer şekilde matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerini incelemiş ve öğretmen adaylarının büyük kısmının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin ya olmadığını ya da yetersiz olduğunu belirtmişlerdir.

Almeida (2000)'e göre öğrenciler, ispat yapmanın anlamlılığını ve önemini, öğretmenin beklentisini karşılamak ve sınavlardan yüksek not almanın ötesinde kavrayamamaktadırlar. Bu bağlamda ispatı doğru olarak tamamlayan ya da kabul edilebilir bir argüman ortaya koyabilen öğrenci sayısı oldukça azdır. Bu durumun oluşmasına etki eden unsurlardan bazıları; öğrencilerin matematiksel bilgi eksiklikleri, öğretim programlarından kaynaklı eksiklikler ve kavram yanılgılarıdır. Weber (2006), öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreç ile ilgili yaşadıkları problemleri üç kategoride sınıflandırmıştır. Birinci kategori, öğrencilerin matematiksel ispat hakkında sahip oldukları kavramsal bilgilerin yetersiz oluşudur. İkinci kategori, öğrencilerin bir kavramı ya da bir teoremi yanlış anlamalarından kaynaklı bunları yanlış uygulamalarıdır. Üçüncü kategori ise, öğrencilerin ispat oluşturmak için strateji geliştirmede yetersiz oluşlarıdır.

Öğrencilerin matematiksel ispat yapma süreçlerini etkileyen faktörlerden bir diğer ise öğrencilerin problem çözme sürecinde yasadıkları zorluklar olarak düşünülebilir. NCTM (2000) problem çözme ve ispatı süreç standartları arasında almıştır. Altun (2007)'a göre problem çözme süreci esnasında, rutin olmayan problemlerin çözülmesi, bir ilişki, düzen veya örüntünün açıklanmasını gerektirdiğinden, bu rutin olmayan problemler öğrencilerde olayları inceleme, ilişki, düzen veya örüntü arama eğilimini arttırır, ispat fikrini geliştirir. Bu bağlamda, her tür teoreme, bir sıra dışı problem çözme gözüyle bakılabilir. Yeşildere ve Türnüklü (2007), ortaokuldan liseye geçen öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerini incelemiş ve öğrencilerin problem çözmede, matematiksel bilgilerle ilişkilendirme yapmada ve mantıksal akıl yürütmede, öznel düşüncelerini problem çözme sürecine yansıttıklarından dolayı sorun yaşadıklarına işaret etmiştir.

Almeida (2001), öğrencilerin ispat yapma becerilerine bakıldığında, genelde, matematiğin formalist yapısı açısından eksikliğinin sorun yarattığını bildirmiştir. Bu da matematiksel bazı önemli sorunların ortaya çıkmasına sebep olmaktadır. Almeida (2001), ispat yapma süreçlerinde zorluklarla karşılaşmamak için üç öneri sunmuştur: Birincisi, öğrenciye informal bir şekilde ifade edilen ispat, formal bir şekilde ortaya konulandan kavranması daha kolay gelmektedir. İkincisi, formal olarak bir ispat yapılsa bile öğrenci bu ispata güvenmemekte ve deneysel örnekler ile deneme ve karşılaştırma ihtiyacı duymaktadır. Üçüncüsü ve sonuncusu ise, öğrenciler sadece öğretmenlerin yönlendirmeleri ile ispat yapmakta ve onların desteği ile ispat yapabilmektedir.

İspatın alan yazınca belirtilen bu zorlukları ve kavram yanılgılarına dayanarak öğrencilerden sadece formal ispat yöntemlerini yani cebirsel-biçimsel argümanları kullanmalarını beklemek yanlış olacaktır. Bu çalışmanın katılımcılarının ortaokul 7 ve 8. sınıf öğrencilerinden oluşması nedeniyle çalışmaya katılan öğrencilerin, kendi ispatlamasını ya da doğrulamasını yaparken, formal yöntemlerden çok, informal yöntemlere başvuracağı düşünülmektedir. Bu çalışmada öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin matematiksel ifadeleri ispatlamaları esnasında kullandıkları yöntemleri ve ispat tercihlerini belirlemek için kullanılan veri toplama araçlarından ve bu araçların geliştirilmesi ve uygulanması aşaması hakkında bilgiler bir sonraki bölümde verilecektir.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Araştırmanın yöntem bölümü; "Araştırma Modeli", "Katılımcı Grup", "Veri Toplama Araçları", "Pilot Uygulama", "Veri Toplama Süreci", "Verilerin Analizi", "Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları" ve "Araştırmacının Rolü" olmak üzere sekiz başlıkta incelenmiştir. Bu başlıklar ve bunlara ait alt başlıklar aşağıda detaylandırılmıştır.

Araştırma Modeli

Araştırma, matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencileri ile bu öğrencilerin matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerileri ve argüman tercihlerinin ortaya konulmasını amaçlamaktadır. Bu amaç doğrultusunda çalışma nitel bir çalışma olarak planlanmıştır.

> Nitel araştırma, gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırmadır (Yıldırım ve Şimşek, 2018, s.39).

Nitel araştırmada çoğunlukla üç tür veri toplanır:

> 1. Çevreyle ilgili veri; araştırmanın yapıldığı çevrenin psiko-sosyal, kültürel, demografik ve fiziksel özelliklerine ilişkindir.
> 2. Süreçle ilgili veri, araştırma süresince neler olup bittiği ve bu olanların araştırma grubunu nasıl etkilediğine ilişkindir.
> 3. Algılara ilişkin veriler ise; araştırma grubuna dahil olan bireylerin süreç hakkında düşündüklerine ilişkindir (Yıldırım ve Şimşek, 2008, s.40)

Çalışma, akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencileri ve bu öğrencilerin matematik öğretmenleri ile gerçekleştirilmesi sebebiyle nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması (case study) olarak planlanmıştır. Creswell (2013)'e göre durum çalışması (case study); araştırmacının zaman içerisinde sınırlandırılmış bir veya birkaç durumu çoklu kaynakları içeren veri toplama araçları (gözlemler, görüşmeler, görsel-işitseller, dokümanlar, raporlar) ile derinlemesine incelediği, durumların ve duruma bağlı temaların tanımlandığı nitel bir araştırma yaklaşımıdır. Durum çalışması; tek bir durum ya da olayın derinlemesine boylamsal olarak incelendiği, verilerin sistematik bir şekilde toplandığı ve gerçek ortamda neler olduğuna bakıldığı bir yöntemdir. Elde edilen sonuçlarla olayın neden o şekilde oluştuğu ve gelecek çalışmalarda nelere odaklanılması gerektiğini ortaya koyar (Davey, 1991). Yin'e (2003) göre "Durum çalışması, olgular ve bağlamların arasındaki sınırların açıkça belli olmadığı durumlarda güncel bir olguyu kendi gerçek hayat durumları içerisinde inceleyen bir araştırma" dır (s. 13). Yin'e (2003) göre durum çalışması birden fazla analiz birimini içerdiğinde; bir durum içerisinde alt birim ya da alt birimlere yoğunlaşılmaktadır. Bu ise iç içe geçmiş durum çalışmalarında ortaya çıkmaktadır. Yin (2003) durum çalışmasını; 1) araştırmada "nasıl" ve " niçin" sorularına odaklanıldığı, 2) araştırmacının olaylar üzerinde çok az ya da hiç kontrolünün olmadığı, 3) olayı ya da olguyu kendi doğal yaşam çerçevesinde çalışıldığı, 4) olay ve gerçek yaşam arasındaki bağ yeterince açık olmadığı zamanlarda kullanılan bir araştırma yöntemi olarak tanımlamaktadır. Bu çalışmada doğrulama ve ispatlama yöntemleri birden fazladır, bu yüzden bu çalışma iç içe geçmiş durum çalışması olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmadaki durumlar ise akademik başarı seviyesi yüksek farklı eğitim kademesindeki ortaokul öğrencileri ve bu öğrencilerin matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerileri ve argüman tercihleridir. Akademik başarı seviyesi yüksek ortaokul öğrencileri ile matematik öğretmenlerinin ispatlama yöntemi veya argüman tercihi olarak ortaya koyacakları; ispat olmayan yöntemler, informal ispat yöntemleri ve formal ispat yöntemleri farklı durumlar ortaya koyacaktır.

Katılımcı Grup

Çalışmada nitel araştırmalarda sıkça kullanılan, amaçlı örnekleme yönteminden faydalanılmıştır. Merriam, (1990)'a göre "Amaçlı örnekleme, araştırmacının keşfetmek, anlamak ve durum hakkında fikir sahibi olmak ve bu yüzden bunların çoğunun öğrenilebileceği bir örneklem seçmek durumunda olduğu varsayımına dayanır." (s. 61). Çalışmada amaçlı örnekleme çeşitlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile örneklem seçilme yoluna gidilmiştir. Bu örnekleme yönteminde önceden belirlenmiş ölçütleri karşılayan durumlar çalışılmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Araştırmanın örneklemini, Tokat ilinde Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı bir ortaokulda öğrenim görmekte olan, matematik akademik başarısı yüksek ölçütüne uygun altı 7. sınıf öğrencisi, altı 8. sınıf öğrencisi ve bu öğrencilerin matematik eğitiminden sorumlu dört matematik öğretmeni oluşturmaktadır. Çalışmanın yapıldığı okul, araştırmacının görev yaptığı okul olmakla birlikte, bu okulun seçilmesinde katılımcılarla çalışmanın kolay olacağının düşünülmesi ve katılımcıların cevaplamalarını daha içten ve gönüllü yapacakları samimiyeti araştırmacı ile yakalamış olmaları etken olmuştur.

Ortaokul öğrencileri somut düşünceden soyut düşünceye geçiş aşamasında yer almaktadır. Matematik öğretim müfredatına göre, 6. sınıftan itibaren cebir öğrenme alanı müfredatta yoğun olarak yer almakta ve öğrencilerin 6. sınıftan itibaren cebirsel dili kullanmaya başlamaktadırlar. 7. ve 8. sınıflarda ise cebirsel dil kullanımı artmaktadır. Ayrıca, alan yazında yer alan çalışmalar ispat yapma eyleminin karmaşık bir süreç olduğunu ve öğrencilerin akademik başarıları ile yakından ilişkili olduğunu belirtmektedir (Arslan, 2007; Çalışkan, 2012). Tüm bu sebeplerden ötürü, çalışma grubu olarak 7. ve 8. sınıf akademik başarısı yüksek olan öğrencilerin seçilmesinin daha isabetli olacağı düşünülmüştür. Matematik akademik başarısı yüksek olan öğrenciler, 7. ve 8. sınıf şubelerinden, geçmiş yıllara ait dönem sonu başarı puanları ile dönem içindeki matematik başarı puanları incelenerek ve matematik öğretmenlerinin görüşleri alınarak seçilmiştir. Bu seçimler gönüllülük esasına göre yapılmıştır. Araştırmanın farklı ve zengin veriler sunması için, öğrenciler farklı sınıf şubelerinden seçilmeye çalışılmıştır. Matematik öğretmenlerinin seçiminde ise, araştırmaya katılan akademik başarıları yüksek 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin matematik eğitiminden sorumlu, 5 öğretmenden 4'ü çalışmaya gönüllü katılmayı kabul etmişlerdir. Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul 7. ve 8. sınıf öğrencileri ile matematik öğretmenlerine İspat Beceri Testi, Argüman Değerlendirme Testi uygulanmış ve klinik görüşme yöntemiyle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Çalışma raporlaştırılırken katılan öğrencilerin ve öğretmenlerin gerçek isimleri kullanılmamıştır. Katılımcı grubun bir kısmını oluşturan matematik öğretmenlerinin, araştırmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak kodları, cinsiyetleri ve görev sürelerine yönelik bilgiler Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5. Katılımcı Öğretmenlere Ait Bilgiler

Öğretmenin Kodu	Cinsiyeti	Görev Süresi
MÖ1	Kız	17 yıl
MÖ2	Erkek	22 yıl
MÖ3	Kız	18 yıl
MÖ4	Erkek	14 yıl

Katılımcı grubun diğer kısmını oluşturan akademik başarısı yüksek ortaokul 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin, araştırmanın ilerleyen kısımlarında kullanılacak kodları, cinsiyetleri, bir önceki yıla ait dönem sonu genel başarı puanları ve dönem sonu matematik dersi başarı puanları Tablo 6'da sunulmuştur.

Tablo 6. Katılımcı Öğrencilere Ait Bilgiler

Öğrenci Kodu	Cinsiyeti	Dönem Sonu Başarı Puanı	Dönem Sonu Matematik Dersi Başarı Puanı
7SÖ1	Kız	99,04	99,16
7SÖ2	Kız	99,29	100
7SÖ3	Kız	99,36	99,16
7SÖ4	Kız	98,72	99,16
7SÖ5	Erkek	98,90	98,33
7SÖ6	Erkek	99,11	100
8SÖ1	Kız	98,14	96,66
8SÖ2	Erkek	98,99	98,33
8SÖ3	Erkek	96,53	90
8SÖ4	Kız	99,74	99,83
8SÖ5	Kız	99,37	100
8SÖ6	Erkek	97,50	96,66

Katılımcı grubu oluşturan öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin arasındaki ilişkiyi ortaya koyan, hangi öğretmenin hangi öğrencilerin matematik eğitiminden sorumlu olduğuna ait bilgiler Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7. Katılımcı Öğrencilerin Matematik Eğitiminden Sorumlu Olan Öğretmenler

	Kodlar	Matematik Öğretmenleri			
		MÖ1	MÖ2	MÖ3	MÖ4
Öğrenciler	7SÖ1				×
	7SÖ2	×			
	7SÖ3	×			
	7SÖ4	×			
	7SÖ5		×		
	7SÖ6		×		
	8SÖ1			×	
	8SÖ2				×
	8SÖ3				×
	8SÖ4	×			
	8SÖ5			×	
	8SÖ6		×		

×: Öğrencinin matematik eğitiminden sorumlu öğretmen

Tablo 7'de görüldüğü üzere MÖ1 kodlu matematik öğretmeni çalışmaya katılan 4 öğrencinin, MÖ2 kodlu matematik öğretmeni çalışmaya katılan 3 öğrencinin, MÖ3 kodlu matematik öğretmeni çalışmaya katılan 2 öğrencinin ve MÖ4 kodlu matematik öğretmeni ise çalışmaya katılan 3 öğrencinin matematik eğitiminden sorumludur.

Veri Toplama Araçları

Çalışmanın amacı doğrultusunda, veri toplama aracı olarak araştırmacı tarafından, öğrenci ve öğretmenlere uygulanmak üzere, İspat Beceri Testi (İBT) ve Argüman Değerlendirme Testi (ADT) geliştirilmiştir. Bu testlerin geliştirilmesi sürecinde ilk aşamada, konuyla ilgili geniş bir alan yazın taraması yapılmıştır. Çalışmada farklı zamanlarda farklı veri toplama araçları kullanılarak veri toplanmıştır. Veri toplama aracı olarak kullanılan İBT ve ADT formlarında yer alan önermeler; ortaokul matematik müfredatında yer alan kazanımlara, ders kitaplarına ve öğrencilerin seviyelerine uygun olacak şekilde, matematiğin en genel öğrenme alanlarından biri olan sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait matematiksel önermelerden yararlanılarak hazırlanmıştır. Matematik Dersi (5., 6., 7. ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı'nda öğrenme alanlarının sınıflara göre dağılımları Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8. Öğrenme Alanlarının Sınıflara Göre Dağılımı

	Sınıflar			
Öğrenme Alanları	5. Sınıf	6. Sınıf	7. Sınıf	8. Sınıf
Sayılar ve İşlemler	×	×	×	×
Cebir		×	×	×
Geometri ve Ölçme	×	×	×	×
Veri İşleme	×	×	×	×
Olasılık				×

Sayılar ve işlemler öğrenme alanı, MEB (2018) 5-8. sınıf matematik müfredatında; 'Doğal Sayılar ve İşlemler, Kesirler ve İşlemler, Ondalık Gösterim, Yüzdeler, Çarpanlar ve Katlar, Kümeler, Tam Sayılar ve İşlemler, Rasyonel Sayılar ve İşlemler, Oran ve Orantı, Üslü İfadeler ve Kareköklü İfadeler' alt öğrenme alanlarına ayrılmaktadır. Biber ve Tuna (2017)'nın, Matematik Dersi (5., 6., 7. ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı'nda (2013) yer alan her bir sınıf seviyesi için verilen 'Üniteler ve Zaman Dağılımları' tablosunu özetlediği öğrenme alanları ve tahmini süre çizelgesi Tablo 9'da verilmiştir.

Tablo 9. Öğretim Programında Öğrenme Alanları İçin Ayrılan Tahmini Süreler

	5. Sınıf		6. Sınıf		7. Sınıf		8. Sınıf	
Öğrenme Alanları	Toplam Ders Saati	Toplam Süre Payı	Toplam Ders Saati	Toplam Süre Payı	Toplam Ders Saati	Toplam Süre Payı	Toplam Ders Saati	Toplam Süre Payı
Cebir	-	-	16	%9	24	%13	48	%27
Geometri	54	%30	51	%28	62	%34	59	%33
Ölçme	30	%17	19	%11	14	%8	7	%4
Sayılar	96	%53	94	%52	80	%44	54	%30
Olasılık	-	-	-	-	-	-	12	%7

Sayılar ve işlemler öğrenme alanı, Tablo 8'de görüldüğü üzere ortaokulda tüm sınıf seviyelerinde yer alan bir öğrenim alanıdır. Bunun yanı sıra, Tablo 9'da görüldüğü üzere sayılar öğrenme alanına ayrılan tahmini öğrenme süresi, diğer öğrenme alanlarına nazaran en fazladır. Görüldüğü üzere sayılar ve işlemler öğrenme alanı, matematiğin temelini oluşturması ve diğer öğrenme alanlarının da ön koşulu olması sebebiyle, çalışmadaki sorular bu öğrenme alanından seçilmiştir. İBT ve ADT veri toplama araçları hakkında detaylı bilgiler ilerleyen bölümlerde sunulacaktır.

İspat Beceri Testi (İBT) Formu

Çalışmada veri toplama aracı olarak araştırmacı tarafından "İspat Beceri Testi" formu geliştirilmiştir. İBT formu ile öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, verilen bir matematiksel ifadenin doğrulanması sürecinde, bir ispatı nasıl oluşturduklarını, ispatlama süreçlerini ve bu süreçlerde hangi ispatlama yöntemlerini kullandıklarını ortaya koymalarını sağlamak amacıyla, araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Farklı doğrulama ve ispat yöntemlerini ortaya çıkarmayı planlayan İBT formunda, sayılar ve işlemler öğrenme alanı konuları ile ilgili, dört tane matematiksel önermeye yer verilmiş olup, katılımcılardan bu önermelerin doğruluğunu kendi yöntemleriyle kanıtlamaları istenmiştir. İBT formunda yer alan önermelerin hazırlanması sürecinde, ilk olarak konu ile ilgili geniş bir alan yazın taraması yapılmış ve sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait matematiksel önermeler seçilmiştir. Healy ve Hoyles (2000), Miyazaki (2000), Knuth ve diğerleri (2009) ve Dede (2013)'ün çalışmalarından derlenen önermeler İBT formunun oluşturulması sürecinde ana kaynaklar olmuştur. İBT formu, önceki çalışmalarda kullanılmış, dolayısıyla uzman görüşü alınmış, geçerliği ve güvenirliği test edilmiş önermelerden oluşmaktadır. İBT formuna ilişkin önermelerin tercih edilme gerekçelerine ait daha detaylı bilgi bu bölümün ilerleyen aşamalarında yer almaktadır.

İBT formunun bu çalışmadaki geçerliği ve güvenirliği uzman görüşü alınarak pilot uygulama öncesi test edilmiştir. Pilot uygulamaya ilişkin ayrıntılı bilgi ilerleyen bölümlerde yer almaktadır. İBT formunda yer almak üzere başta altı önerme seçilmiştir. Altı önermeden oluşan İBT formu, pilot uygulama olarak bir grup öğrenciye ve bir öğretmene uygulanmıştır. İBT formunun pilot uygulamasında, öğrencilerin önermeleri anlayıp anlamayacağı, verilen önermelerin tamamını ne kadar sürede cevaplayacağı, önermelerin amacına hizmet edip etmeyeceği gibi durumların gözlenmesi amaçlanmıştır. Uygulama sonrasında öğrencilerin, İBT formundaki bazı önermeleri anlamakta zorlandıkları ve farklı argümanlar sunmakta güçlük yaşadıkları gözlenmiştir. Bu sebeple İBT formunda yer alan altı önermeden ikisi elenerek formda kullanılmak üzere dört önermeye karar verilmiştir. Elenen iki önermenin seçimi aşamasında, pilot uygulama esnasında katılımcıların anlamakta zorlandıkları önermeler ve uzman görüşü etkili olmuştur. Çalışmadan çıkarılan önermeler ve çıkarılma sebepleri aşağıda açıklanacaktır.

3. soru: "Ardışık 3 tamsayının çarpımı daima 6'nın katıdır." ifadesini ispatlayınız.

Şekil 5. İBT Formundan Çıkarılan Üçüncü Önerme

Şekil 5'te verilen, İBT formundan çıkarılan üçüncü önerme; Healy ve Hoyles (2000)'nin "A Study of Proof Conceptions in Algebra" adlı çalışmasında öğrencilerin, ispat ve doğrulama performanslarını incelemek amacıyla kullandığı önermeler arasındadır. Pilot uygulama esnasında, öğrencilerin bu ifade için deneysel argüman dışında farklı bir argüman türetmede zorlandıkları gözlemlenmiştir. Cebirsel argüman türetmeye çalışan öğrenciler ise, 3 tane cebirsel ifadenin çarpımına kadar gelmişler, buradan sonraki aşamaya geçişte güçlükler yaşamışlardır. Bu durumların İBT formunun geçerliğini düşüreceği düşünülmüştür. Bu yüzden üçüncü önerme pilot uygulama sonrasında İBT formundan çıkarılmıştır.

5. soru: "P ve Q iki tek tam sayı olsun. $(P+Q).(P-Q)$ daima 4'ün katıdır." ifadesini ispatlayınız.

Şekil 6. İBT Formundan Çıkarılan Beşinci Önerme

Şekil 6'da verilen, İBT formundan çıkarılan beşinci önerme; Healy ve Hoyles (2000)'nin "A Study of Proof Conceptions in Algebra" adlı çalışmasında öğrencilerin, ispat ve doğrulama performanslarını incelemek amacıyla kullandığı önermeler arasındadır. Pilot uygulama esnasında, verilen ifadenin fazla cebirsel ifade içerdiği sebebiyle öğrencilerin ifadeyi anlamakta zorlandıkları gözlenmiştir. Bu durumun İBT formunun geçerliğini düşüreceği düşünülmüştür. Bu yüzden beşinci önerme de pilot uygulama sonrasında İBT formundan çıkarılmıştır. İBT formunda kullanılmak üzere, uzman görüşü alınarak dört önermeye karar verilmiş olup bu önermeler Ek 1'de sunulmuştur.

İBT formunun birinci önermesi; Knuth ve diğerleri (2009)'un "Proof: Examples and Beyond" adlı çalışmasında, 6–8. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini almak için kullandığı önermelerden biridir. Önerme değiştirilmeden çalışmada da kullanılmıştır. Bu önerme ile öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait bir matematiksel ifadenin ispatlanması esnasında hangi yöntemleri kullanacaklarını betimlemek amaçlanmıştır. İBT formunun ikinci önermesi; Healy ve Hoyles (2000)'nin "A Study of Proof Conceptions in Algebra" adlı çalışmasında öğrencilerin, ispat ve doğrulama performanslarını incelemek amacıyla kullandığı önermelerden biridir. Önerme değiştirilmeden çalışmada da kullanılmıştır. Bu önerme ile öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait bir matematiksel ifadenin ispatlanması esnasında hangi yöntemleri kullanacaklarını betimlemek amaçlanmıştır. İBT formunun üçüncü önermesi; Miyazaki (2000)'nin "Levels of Proof in Lover Secondary School Mathematics" adlı çalışmasında öğrencilerin, ispat düzeylerini belirlemek amacıyla kullandığı önermelerden biridir. Önerme değiştirilmeden çalışmada da kullanılmıştır. Bu önerme ile öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait bir matematiksel ifadenin ispatlanması esnasında hangi yöntemleri kullanacaklarını betimlemek amaçlanmıştır. İBT formunun dördüncü önermesi; Dede (2013)'nin "Matematikte İspat: Önemi, Çeşitleri ve Tarihsel Gelişimi" adlı çalışmasında durumlara dayalı ispatı örneklendirmek için kullandığı önermelerden biridir. Önerme değiştirilmeden çalışmada da kullanılmıştır. Bu önerme ile öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait cebirsel ifade içeren bir matematiksel ifadenin ispatlanması esnasında hangi yöntemleri kullanacaklarını betimlemek amaçlanmıştır.

İBT formu değiştirilmeden hem öğrenciler hem de öğretmenler için kullanılmıştır. Matematik öğretmenlerinin bu önermelere yönelik birden fazla argüman geliştirme potansiyeline sahip oldukları göz önünde bulundurularak, İBT formunda öğretmenlere yönelik herhangi bir yönlendirme yapılmaktan kaçınılmış ve kasıtlı olarak öğretmenlerin bu önermeleri ispatlamaya yönelik hangi argümanı kullanacakları onların tercihine bırakılmıştır. İBT formunun uygulanmasından sonra yapılan bireysel görüşmelerde ise öğretmenlerin formda kullandıkları argümanları tercih etme sebepleri tartışılmıştır. İBT formunda yer alan önermelerin amaca hizmet edip etmeyeceği ve önermelerin seviyeye uygunluğu gibi kriterler konusunda, formun geliştirilme aşamasında uzman görüşü alınmıştır.

Argüman Değerlendirme Testi (ADT) Formu

Çalışmada diğer bir veri toplama aracı olarak, araştırmacı tarafından "Argüman Değerlendirme Testi" formu geliştirilmiştir. ADT formu, öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, doğrulama ve ispatlama tercihleri, doğrulama esnasında hangi argümanı ikna edici buldukları, ortaya konulan argümanlar hakkında değerlendirmeleri gibi hususlarda bilgi toplamak amacıyla araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. ADT formunun geliştirilmesi aşamasında İBT formundaki matematiksel önermeler kullanılmıştır. ADT formunda, İBT formundaki matematiksel önermeler için farklı doğrulama ve ispat yöntemleri (deneysel argüman, anlatımsal-sözel argüman, görsel argüman ve cebirsel-biçimsel argüman) içeren cevaplar sunulmuştur. ADT formunun geliştirilmesinin esas amacı öğrencilerin ve öğretmenlerin, İBT formunda yer alan matematiksel önermelerin doğrulanması ve ispatlanması esnasında ortaya konulması muhtemel cevapları veya argümanları nasıl değerlendirdiklerini ve hangi tür argümanları daha geçerli (ikna edici) bulduklarını incelemektir. ADT formunda yer alan argümanların oluşturulması sürecinde, Healy ve Hoyles (2000)'nin çalışmasından esinlenilmiştir. Bu süreçte İBT formundaki her önerme için, çalışmanın kavramsal çerçevesi kısmında ispat yapma düzeyleri ve şemaları başlığında ele alınan, ispat olmayan yöntemler, informal ispat yöntemleri ve formal ispat yöntemlerinden oluşan; deneysel (empirik) argümanlar, anlatımsal-sözel (narrative) argümanlar, görsel (visual) argümanlar ve cebirsel-biçimsel argümanlar olmak üzere dört adet argüman hazırlanmıştır. Argümanlar oluşturulduktan sonra argümanlarla ilgili uzman görüşü alınarak uygulamaya hazır hale getirilmiştir.

ADT formunun çalışmadaki geçerliği ve güvenirliği uzman görüşü alınarak pilot uygulama öncesi test edilmiştir. Pilot uygulama sonrasında İBT formundan çıkarılan üçüncü ve beşinci önermeler, ADT formundan da çıkarılmıştır. Başlangıçta ADT formu, pilot uygulama olarak bir grup öğrenciye ve bir öğretmene uygulanmıştır. ADT formunun pilot uygulamasında, öğrencilerin önermeleri anlayıp anlamayacağı, verilen soruların tamamını ne kadar sürede cevaplayacağı gibi durumların gözlenmesi amaçlanmıştır. ADT formunun başlangıçta altı önermeden oluşuyor olması ve öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, her soruda dört tane olmak üzere toplam yirmi dört argümanı değerlendiriyor olmaları sebebiyle, uygulama ortalama 50-60 dakika sürmüştür. Uygulama sonrasında katılımcıların, ADT formundaki soruları cevaplamalarının fazla zaman aldığı, son sorulara geldikçe cevaplama isteklerinde azalmalar olduğu ve ayrıca öğrencilerin bazı önermeleri anlama ve cevaplama konusunda zorlandıkları gözlenmiştir. Bu sebeple İBT formundan çıkarılan üçüncü ve beşinci önermeler, ADT formundan da çıkarılmıştır. Böylelikle uygulamanın daha az zaman alacağı ve değerlendirmelerin daha geçerli ve güvenilir sonuçlar vereceği düşünülmüştür. ADT formu öğrencilere ve matematik öğretmenlerine, İBT formu uygulandıktan belirli bir süre (yaklaşık bir buçuk hafta) sonra uygulanmak üzere geliştirilmiştir. Öncelikle İBT formu ile öğrencilerin ve öğretmenlerin kendi doğrulama ve ispat yöntemlerini ortaya koymaları, sonrasında ise ADT formu ile ortaya konulan doğrulama ve ispat ile ilgili argümanlardan ikna edici buldukları tercihleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. ADT formu, çalışmaya katılan öğrenciler ve matematik öğretmenleri için farklı formatlarda geliştirilmiştir. Öğrenciler için geliştirilen ADT formunda, öğrencilerden verilen argümanları incelemeleri ve hangi argümanı ikna edici bulduklarını nedeniyle birlikte açıklamaları istenmiştir. Matematik öğretmenleri için geliştirilen ADT formunda ise öğretmenlerden, verilen argümanları incelemeleri ve hangi argümanı daha yüksek ve hangi argümanı daha düşük puanla değerlendireceklerini nedenleriyle birlikte açıklamaları istenmiştir. ADT formunun öğretmenlere uygulanmasındaki temel amaç, öğretmenlerin ispat görüşlerinin ve muhtemel öğrenci cevaplarını değerlendirme biçimlerinin ne yönde olduğuna dair görüş ortaya koymaktır. Öğrenciler için geliştirilen ADT formu Ek 2-a'da, öğretmenler için geliştirilen ADT formu Ek 2-b'de sunulmuştur.

Bireysel Görüşmeler

İBT formu ve ADT formu uygulandıktan sonra son olarak, öğrenciler ve matematik öğretmenleri ile veri toplama araçlarına verdikleri cevapları daha iyi anlamak ve derinlemesine analiz yapmak amacıyla yarı yapılandırılmış bireysel görüşmeler yapılmıştır. Görüşmelerde öğrencilerden ve matematik öğretmenlerden, İBT formunda yer alan sorulara yönelik ortaya koydukları doğrulama yöntemine yönelik sorular yönetilmiştir. Böylelikle öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, neden belirli bir şekilde doğrulama yaptıklarına dair bir görüş ortaya koyabilmek amaçlanmıştır. Öğrencilerin ve öğretmenlerin ortaya koydukları cevapların doğası ile ilgili soru yöneltmenin, doğrulama yöntemlerini ve sebeplerini ortaya çıkarmada daha yararlı olacağı düşünülmüştür. Benzer şekilde farklı yöntemler kullanan öğrencilerin ve öğretmenlerin kullandıkları yöntemle ilgili sorular sorulmuştur. Bu soru öğrencilere ve öğretmenlere, kullandıkları yöntemlere göre farklı biçimlerde yöneltilmiştir.

Görüşmelerde ayrıca öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, ADT formuna verdikleri cevaplar ile ilgili tercihlerinin altında yatan sebepler, yöneltilen sorular ile araştırılmıştır. Ayrıca öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, tercih etmedikleri diğer argümanlara bakış açıları da yapılan görüşmelerde araştırılmıştır. Yapılan görüşmeler katılımcıların tercihine göre, ses veya video ile kayıt altına alınmıştır. Bireysel görüşmeler, her bir katılımcı ile ortalama 5-10 dakika kadar sürmüştür. Bireysel görüşmelerde öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, İBT formunda yaptıkları doğrulama yöntemleri hakkında sorular yöneltilmiş, doğrulamayı farklı bir yolla yapıp yapamayacakları, doğrulamalarında kullandıkları yöntemin ne olduğu ve neden bu yöntemi kullandıkları sorulmuştur. Bunun yanında ADT formunda tercihen ikna edici buldukları yöntemin, kullandıkları yöntem olup olmadığı, tercih ettikleri yöntemi neden tercih ettikleri ve diğer tercih etmedikleri yöntemleri değerlendirmelerine yönelik sorular sorulmuştur.

Pilot Uygulama

Bu çalışmanın pilot uygulaması gerçekleştirilirken öncelikle, üç öğrenci ve bir öğretmene, İBT formu ve ADT formunun altı soruluk ilk hali uygulanmıştır. Öğrencilerin ve öğretmenin verdikleri yazılı cevaplar toplanmış ve analiz edilmiş, analiz sonucunda doğrulama yöntemlerine ve doğrulama tercihlerine yönelik bireysel görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde öğrencilerin ve öğretmenin soruları nasıl buldukları, anlayıp anlamama noktasındaki görüşleri, doğrulama sürecinde ortaya koydukları farklı yöntemler ve doğrulama tercihlerine yönelik bazı sorular yöneltilmiştir.

Pilot uygulama ile İBT ve ADT formları, 2018-2019 eğitim öğretim yılının ikinci döneminin başlarında, akademik başarı seviyesi yüksek bir 7. ve iki 8. sınıf öğrencisine ve bir lise matematik öğretmenine okul kütüphanesinde uygulanmıştır. İBT formu üç öğrenci ve bir öğretmene dağıtılmış, burada yer alan ifadeleri kendi ifadeleriyle doğrulamaları ve ispatlamaları beklenmiştir. Uygulama süresi 20 dakika ile 25 dakika arasında olmuştur. İBT formu uygulandıktan üç gün sonra aynı üç öğrenci ve bir öğretmene ADT formu dağıtılmış ve burada yer alan argümanları değerlendirmeleri ve ikna edici yöntemi tercih etmelerine yönelik cevapları nedenleriyle birlikte belirtmeleri istenmiştir. Uygulama öğrenciler için 50-60 dakika civarında sürmüş, öğretmen için ise 30 dakika sürmüştür. Uygulama bittikten bir gün sonra, pilot uygulamaya katılan öğrencilerle ve öğretmenle verdikleri cevapları değerlendirmek ve İBT ile ADT formları hakkında görüş elde etmek için bireysel görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler okul kütüphanesinde gerçekleştirilmiştir. Görüşme süreleri 5 ile 10 dakika arasında değişmiştir. Öğretmen ve öğrenciler yazılı halde dile getirmedikleri bazı düşünceleri görüşmelerde dile getirmişler ve görüşmelerde daha zengin veri sağlamışlardır.

Pilot uygulama sonrasında İBT ve ADT formlarında yer alan üçüncü ve beşinci sorular, öğrencilerin sorularda zorlanmaları, özellikle ADT formunun uygulamasının uzun sürmesi ve bu sebeple ilerleyen sorularda cevaplama isteğinde azalmalar olması gibi sebeplerden dolayı çıkarılmıştır. Çıkarılan sorular İBT formunun cevaplanması aşamasında öğrencilerin cevaplamakta ve anlamakta zorlandıkları sorulardan seçilmiştir. Çıkarılan sorular, pilot uygulamaya katılan matematik öğretmeninin dahi anlamakta ve ispat oluşturmakta zorlandıkları sorulardır. Bu sebeple bu soruların amaca hizmet etmekten ziyade İBT ve ADT formunu zorlaştırdığı ve geçerlik ve güvenirliği düşürdüğü gerekçesiyle uzman görüşü de alınarak veri toplama araçlarından çıkarılmasına karar verilmiştir.

Veri Toplama Süreci

İspat Beceri Testi ve Argüman Değerlendirme Testi formlarının uygulaması ve bu uygulama sonrasında yapılan bireysel görüşmeler 2018–2019 eğitim-öğretim yılının ikinci döneminde gerçekleştirilmiştir. Araştırmaya başlamadan belirli bir süre önce, katılımcı grupta bulunan öğrenciler ve matematik öğretmenleri araştırma konusunda bilgilendirilmiştir. Araştırma için gerekli izinleri almak ve araştırmaya katılmalarını belgelendirmek için Ek 3'te belirtilen Veli İzin Formu' nu araştırmaya katılacak öğrenci velilerine, Ek 4'te belirtilen Gönüllü Katılım Formu'nu araştırmaya katılacak matematik öğretmenlerine doldurtulup imzalatılmıştır. Bu sebeple araştırmaya katılan öğrenci ve matematik öğretmenleri araştırmaya katılmaya gönüllü kişilerden oluşmuştur. Formlar alınmadan önce araştırma yapılacak grup bilgilendirilmiş, akıllarına takılan sorular araştırma öncesinde, araştırma esnasında ve araştırma sonrasında titizlikle cevaplanmıştır. Araştırma yapabilmek için toplanan formlar ile araştırma izin dilekçeleri, üniversitenin etik kuruluna gönderilmiş, Ek 5'te sunulan etik kurul onayından sonra uygulama ile ilgili resmi kurumlardan gerekli izinler alınmıştır. İlgili uygulama izin yazısı Ek 6'da sunulmuştur.

Araştırma grubuna ilk uygulanan veri toplama aracı İBT formudur. İBT formu, öğrencilere sınıf ortamında, yaklaşık bir ders saati (40 dakika) verilerek uygulanmıştır. İBT formu uygulandıktan yaklaşık bir buçuk hafta sonra ADT formuna geçilmiştir. ADT formu da, öğrencilere sınıf ortamında, yaklaşık bir ders saati (40 dakika) verilerek uygulanmıştır. Uygulama esnasında öğrenciler aynı sınıfta bulunmuş olup, cevaplamaları bireysel olarak yapmışlardır. Veri toplama araçları öğretmenlere ise öğretmenler odasında, cevaplamaları bitene kadar süre verilerek uygulanmıştır. Uygulama, öğretmenlerin tamamına aynı anda yapılmış olup, cevaplamaları bireysel olarak yapmışlardır. ADT formunda öğrencilerden, verilen argümanları değerlendirmeleri, kendileri için en geçerli argümanı seçmeleri ve sebebini belirtmeleri; öğretmenlerden ise, verilen argümanlardan hangisine daha çok ve hangisine daha az puan vereceklerini sebepleriyle belirtmeleri istenmiştir. Burada çalışma grubunu oluşturan öğrencilerden ve matematik öğretmenlerinden, ispat yapabilme becerilerini ve argüman tercihlerini en iyi şekilde ortaya koyabilmeleri ve verilen argümanlar arasından kendileri için daha ikna edici veya daha az ikna edici olanı seçmeleri beklenmiştir. İBT formu ve ADT formu uygulandıktan sonra, farklı zamanlarda yapılan bireysel görüşmelere başlanmıştır. Her öğrenci ve öğretmen ile ortalama 5-10 dakikalık kısa görüşmeler yapılmış olup, bu görüşmeler katılımcının isteğine göre ses veya video ile kayıt altına alınmıştır. Ses ve video kayıtlarının deşifresi araştırmacı tarafından yapılmıştır.

Bireysel görüşmeler esnasında öğrencilere, formlardaki cevaplarına yönelik aşağıdaki gibi örnek sorular yöneltilerek, daha detaylı veriler elde edilmeye çalışılmıştır.

1. Bu doğrulama ve ispatlama yöntemini kullanmanın sebebi nedir?
2. Bu doğrulama ve ispatlama yöntemini ikna edici bulmanın sebebi nedir?
3. Diğer argümanlar ve yöntemler hakkında neler düşünüyorsun?
4. Doğrulama ve ispatlama yöntemi ile argüman tercihinin farklı olmasının sebebi nedir?

Bu sorular ile öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin İBT ve ADT formunda verdikleri cevaplarda doğrulama ve ispatlama yöntemlerini, tercihlerini ve çözümlerinin açıklamalarını nasıl yaptıklarına yönelik veriler elde etmek amaçlanmıştır.

Verilerin Analizi

Öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerileri ve argüman tercihlerinin incelemesi, İBT ve ADT formlarına verdikleri cevaplar ve sonrasında yapılan bireysel görüşmeler incelenerek yapılmıştır. Bu süreç içerisinde katılımcılara müdahale edilmemiş, verdikleri cevapların altında yatan nedenler yapılan bireysel görüşmelerle derinlemesine incelenmiştir. Öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin doğrulama ve ispat yöntemlerinin belirlenebilmesi için yapılan analiz kısmı, araştırmacı dahil olmak üzere iki kişiyle yürütülmüştür. Verilerin analizinde görev alan yardımcı araştırmacı, aynı şehirde bir lisede matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Yardımcı araştırmacıya analiz öncesinde doğrulama ve ispatlama yöntemleri ile ilgili nasıl ve hangi ölçütlere göre sınıflandırma yapacağı ve benzer çalışmalarda doğrulama ve ispat yöntemlerinin nasıl sınıflandırıldığına dair örnekler içeren eğitimler verilmiştir. Böylelikle yardımcı araştırmacının analiz yapmadan önce hem konuya aşina olduğu hem de ortaya konulabilecek doğrulama ve ispat yöntemleriyle ilgili ayrıntılı bilgi edindiği düşünülmüştür.

Araştırmanın verileri analiz edilirken, nitel araştırma yöntemlerinden betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Betimsel analiz, çeşitli veri toplama araçları ile elde edilen verilerin daha önceden belirlenmiş temalara göre özetlenmesi ve yorumlanmasını içeren bir nitel veri analiz türüdür. Veriler, araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre düzenlenebileceği gibi, görüşme ve gözlem süreçlerinde kullanılan sorular ya da boyutlar dikkate alınarak da sunulabilir. Bu analiz türünde araştırmacı, görüştüğü ya da gözlemiş olduğu bireylerin görüşlerini tam anlamıyla ortaya koyabilmek için doğrudan alıntılara sıklıkla yer verebilmektedir. Betimsel analizin temel amacı, elde edilmiş olan bulguların okuyucuya özetlenmiş ve yorumlanmış bir biçimde sunulmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Betimsel analiz dört aşamadan oluşur. Birinci aşamada araştırmacı, araştırma sorularından, araştırmanın kavramsal çerçevesinden ya da görüşme ve gözlemlerde yer alan boyutlardan hareket ederek, veri analizi için bir tema oluşturur. Böylece verilerin hangi kriterler altında düzenleneceği ve sunulacağı belirlenmiş olur. Ardından araştırmacı, daha önce oluşturmuş olduğu temaya dayalı olarak verileri okur ve düzenler. Bu süreçte verilerin anlamlı ve mantıklı bir biçimde bir araya getirilmesi önem taşımaktadır. Bu aşamadan sonra araştırmacı, düzenlemiş olduğu verileri tanımlar. Bunun için gerekli yerlerde doğrudan alıntılara da başvurabilir. Bu sürecin sonunda araştırmacı tanımlamış olduğu bulguları açıklar, ilişkilendirir ve anlamlandırır. Araştırmacı bu aşamada ayrıca yapmış olduğu yorumları daha da güçlendirmek için önceki bulgularla destekler, neden-sonuç ilişkilerini açıklar ve ihtiyaç duyulması durumunda farklı bulgular arasında karşılaştırma yapar (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

Çalışmada ispat seviyeleri ve şemaları alt başlığında Tablo 4'te açıklanan doğrulama ve ispat yöntemleri, öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin İBT ve ADT formlarına verdikleri cevaplarını sınıflandırmak amacı ile kullanılmıştır. Veri analizi üç aşamada gerçekleştirilmiştir. Birinci aşamada öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, İBT formundaki matematiksel önermeleri doğrularken kullandıkları yöntemler incelenerek verilerin çözümlemesi gerçekleştirilmiştir. İkinci aşamada çözümlenen veriler bireysel görüşme kayıtları ile desteklenerek doğrulamada kullandıkları yöntemler ve argümanlar Tablo 4'de yer alan doğrulama yöntemlerine göre araştırmacılar tarafından sınıflandırılmıştır. Üçüncü aşamada ise öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin her bir matematiksel önerme için oluşturulan farklı düzeydeki argümanları değerlendirmeleri, bu argümanlardan en ikna edici buldukları argümanı tercih etmeleri ve bu tercihleri için sundukları sebepler, bireysel görüşmelerden alıntılarla desteklenerek sınıflandırılmıştır. Veriler iki farklı araştırmacı tarafından ayrı ayrı zamanlarda sınıflandırılmış ve bir araya gelerek sınıflandırmalar karşılaştırılmıştır.

Çalışmada kullanılacak temaların oluşturulması sürecinde Bell (1976)'nın ve Balacheff (1988)'in ispat seviyeleri, Tall (1988)'in ispat yöntemleri, Harel ve Sowder (1998)'in ispat şemaları, Healy ve Hoyles (2000)'nin ispat sınıflandırması, Stylianides (2008)'in ispat olan ve ispat olmayan argümanlar gruplandırması ve Quinn (2009)'un ispat seviyeleri sentezlenmiştir. ADT formundaki argümanların temelini oluşturan ve İBT formuna verilebilecek muhtemel cevaplara teorik bir çerçeve oluşturabilme amacı doğrultusunda, yukarıda belirtilen çalışmalar irdelenmiş ve bir ortak payda bulunmaya çalışılmıştır.

Öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, İBT ve ADT formunda yer alan sorulara verdikleri cevaplardan yola çıkarak, çalışma grubunun, bir matematiksel ifadenin doğrulanması ve ispatlanması sürecinde hangi tür argümanları kullandıkları ve hangi tür argümanları ikna edici buldukları (tercih ettikleri), geliştirilen kodlama sürecine göre analiz edilmiştir. Çalışmanın birinci araştırma problemini ve alt problemini test etmek için, her bir soruda, öğrencilerin İBT formunda verdikleri cevaplar ve ADT formunda tercih ettikleri argümanlar tek tek irdelenmiştir. Bu aşamadan sonra, öğrencilerin matematiksel ifadeleri doğrulamada kullandıkları yöntemler (doğrulama metotları) ve ikna edici buldukları argümanlar, her soruda, tek tek incelenmiş ve kodlanmış; bu kodlamalara ait bilgiler tablolar halinde gösterilmiştir. Çalışmanın ikinci problemini ve alt problemini test etmek için her bir soruda, matematik öğretmenlerinin İBT formuna verdikleri cevaplar ve ADT formunda tercih ettikleri argümanlar tek tek irdelenmiştir. Bu aşamadan sonra, matematik öğretmenlerinin matematiksel ifadeleri doğrulamada kullandıkları yöntemler (doğrulama metotları) ve ikna edici buldukları (daha az veya daha fazla puan verecekleri) argümanlar, her soruda, tek tek incelenmiş ve kodlanmış; bu kodlamalara ait bilgiler tablolar halinde gösterilmiştir. Çalışmada kullanılacak her temaya ve alt temalarına ait göstergeler (kodlar) Tablo 10'da sunulmuştur.

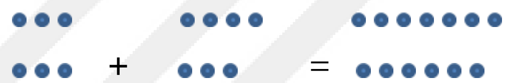
Tablo 10. Doğrulama ve İspat Yöntemlerinin Uygulamaya İlişkin Göstergeleri

Doğrulama ve İspatlama Yöntemleri (Temalar)	Doğrulama ve İspatlama Yöntemlerinin Alt Yöntemleri (Alt Temalar)	Doğrulama ve İspatlama Yöntemine İlişkin Göstergeler (Kodlar)
İspat Olmayan Yöntemler	Deneysel (Empirik) Argümanlar (Kodu: D.A.)	İfadenin doğruluğunu belirli sayı(lar) değerleri üzerinden göstermeye çalışma (kritik değerler içerebilir) Bu alt tema kendi içerisinde üçe ayrılmaktadır: (1) Tek bir örnek ile önermeyi doğrulayanlar, (2) Birden çok örnek kullanarak önermeyi doğrulayanlar, (3) Kritik (uç) örnekler kullanarak önermeyi doğrulayanlar.
İnformal İspat Yöntemleri	Anlatımsal-Sözel (Narrative) Argümanlar (Kodu: A.S.A.)	İfadenin doğruluğunu tümdengelimsel sözel dil kullanarak açıklama Geneli tam yansıtmayan cebirsel ifadeler içerebilir. Sözel ifadeler genellenebilir ifadeler içerir.
	Görsel (Visual) Argümanlar (Kodu: G.A.)	İfadenin doğruluğunu görsel şekiller, modeller, fiziki gösterimler ile açıklama Görsel gösterimler genellenebilir argümanlar içerir.
Formal İspat Yöntemleri	Cebirsel-Biçimsel Argümanlar (Kodu: C.B.A.)	İfadenin doğruluğunu genel cebirsel ifadeler kullanarak tümdengelimsel yolla açıklama. Cebirsel ifadeler geneli yansıtır niteliktedir.

Tablo 10'da görüldüğü üzere çalışmaya ait temalar; (1) ispat olmayan yöntemler, (2) informal ispat yöntemleri ve (3) formal ispat yöntemleridir. Bu temalara ait alt temalar ise; (a) deneysel (empirik) argümanlar, (b) anlatımsal-sözel (narrative) argümanlar, (c) görsel (visual) argüman ve (d) cebirsel-biçimsel argüman olmak üzere dört kategoriden oluşmuştur. Deneysel (empirik) argümanlar alt teması da kendi içerisinde üçe ayrılmaktadır: (1) Tek bir örnek ile önermeyi doğrulayanlar, (2) Birden çok örnek kullanarak önermeyi doğrulayanlar, (3) Kritik (uç) örnekler kullanarak önermeyi doğrulayanlar. Soruları boş bırakarak cevaplandıramayanlar veya herhangi bir mantıksal çıkarımda bulunmayan öğrenciler herhangi bir kategoriye alınmamıştır. Katılımcı matematiksel doğrulamasını yaparken birden fazla yöntem kullanmış ise, doğrulama yöntemi olarak daha gelişmiş olan doğrulama yöntemi, katılımcının ispat beceri seviyesi olarak seçilmiştir. Örneğin verilen matematiksel ifadeyi doğrulayan bir katılımcı, doğrulamasını hem deneysel (empirik) argümanlar kullanarak hem de anlatımsal-sözel argümanlar kullanarak yapmışsa, katılımcının ispat beceri seviyesi daha gelişmiş yöntem olan anlatımsal-sözel argüman seçilmiştir. Öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin verdikleri cevaplar, araştırmacı ve yardımcı araştırmacı tarafından hazırlanan Tablo 10'daki göstergelere göre değerlendirilmiş, ispat becerilerinin olup olmadığına, çözümlerde kullandıkları ispatlama yollarına ve ispat temsil şekillerine bakılmıştır. Yapılan sınıflamaların doğruluğundan emin olmak için iki araştırmacının veri analizleri kontrol edilmiştir. Araştırmacı ve yardımcı araştırmacı farklı düşünceye sahip oldukları zaman, bunları nedenleriyle tartışmışlar ve nihai kararlarını vermişlerdir. Veri setindeki analizler karşılaştırıldığında yüzde yüz tutarlık olduğu belirlenmiştir.

Çalışmanın veri analizinde araştırmacılara kolaylık sağlaması amacıyla, "Ardışık iki sayının toplamı daima tektir." ifadesinin ispatlanması sürecine ait (1) ispat olmayan (deneysel argüman) yöntemler, (2) informal ispat (anlatımsal-sözel argüman veya görsel argüman) yöntemler ve (3) formal ispat (cebirsel-biçimsel argüman) yöntemler temalarına ve (a) deneysel (empirik) argümanlar, (b) anlatımsal-sözel (narrative) argümanlar, (c) görsel (visual) argüman ve (d) cebirsel-biçimsel argüman alt temalarına ait verilebilecek muhtemel öğrenci cevapları Tablo 11'de verilmiştir.

Tablo 11. Doğrulama ve İspat Yöntemlerinin Uygulamaya İlişkin Gösterge Örnekleri

Doğrulama ve İspatlama Yöntemleri (Temalar)	Doğrulama ve İspatlama Yöntemlerinin Alt Yöntemleri (Alt Temalar)	Doğrulama ve İspatlama Yöntemine Örnek
İspat Olmayan Yöntemler	Deneysel (Empirik) Argümanlar (Kodu: D.A.)	Ardışık iki sayı 5 ve 6 olsun. İkisini topladığımda; $5 + 6 = 11$ eder. Görüldüğü üzere sonuç tektir.
İnformal İspat Yöntemleri	Anlatımsal-Sözel (Narrative) Argümanlar (Kodu: A.S.A.)	Ardışık iki sayıdan biri tek biri çift olur. Dolayısıyla tek sayı ile çift sayının toplamı tek sayıdır.
	Görsel (Visual) Argümanlar (Kodu: G.A.)	Ardışık iki sayıyı sayma pulları ile modelleyelim:  Çift sayılarla ikili gruplama yaptığımızda açıkta kalan pul olmaz. Tek sayılarla ikili gruplama yaptığımızda 1 pul hep açıkta kalır. Sonuç olarak toplamda da 1 pul hep açıkta kalır. Yani tek olur.
Formal İspat Yöntemleri	Cebirsel-Biçimsel Argümanlar (Kodu: C.B.A.)	Ardışık iki sayı; Çift sayı: $2n$ Tek sayı: $2n + 1$ İkisini topladığımızda; $2n + (2n + 1) = 4n + 1$ olur. $4n$ çift olduğundan, 1 eklendiğinde sonuç tek olur.

Tablo 11'de görüldüğü üzere deneysel argüman kullanan öğrenci cevabı örnek içermekte, anlatımsal-sözel argüman kullanan öğrenci cevabı resmi ispata geçiş aşamasında sözel açıklamalar içermekte, görsel argüman içeren öğrenci cevabı örnekten genellemeye yönelik veriler içermekte ve cebirsel-biçimsel argüman içeren öğrenci cevabı ise genel ifadeler içermekte ve tüm sayılar için geçerli bir durum ortaya koymaktadır.

Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları

Geçerlik ve güvenirlik, nitel veya nicel tüm araştırmalarda etkin bir durumdur fakat farklı bağlamlarda ele alınır. Geçerlik ve güvenirlik çalışmalarının önemini Merriam (1990, s. 199-200), "Geçerlik ve güvenirlik kavramları; bir çalışma kavramsallaştırılırken verilerin toplanmasında, analiz edilmesinde, yorumlanmasında ve bulguların sunulmasında büyük itina ile yaklaşılması gereken kavramlardır." şekilde vurgulamıştır. Güvenirlik bilimsel bulguların tekrar edilebilirliği ile ilgiliyken, geçerlik bilimsel bulguların doğruluğu ile ilgilidir. (LeCompte ve Goetz, 1982).

Geçerlik ve güvenirliği incelemek için birçok tanım, yöntem ve istatistiki işlem vardır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Nitel araştırmaların yapısı gereği katılımcılarla bire bir olarak iletişim kurulması, sahada uzun zaman geçirerek detaylı anlamlara ulaşma hedefiyle elde edilen derin bilgiyi anlama çabasında olmasından dolayı, bu araştırmalara yönelik standartlaştırılmış ölçme araçları ve bu araçların geçerlik ve güvenirliklerini inceleyen teknikler gelişmemiştir (Creswell, 2013; Yıldırım ve Şimşek, 2013). Nitel araştırmalarda çalışmanın niteliğini artırmak adına, araştırmaların doğasına uygun çeşitli alternatif kavramlar geliştirilmiştir. Nitel araştırmalarda "iç geçerlilik" yerine "inandırıcılık", "dış geçerlilik" yerine "aktarılabilirlik", "iç güvenilirlik" yerine "tutarlılık" ve "dış güvenilirlik" yerine "teyit edilebilirlik" kavramları tanımlanarak farklı bir strateji geliştirilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2013).

İç Geçerlilik-İnandırıcılık: Araştırmada elde edilen bulguların gerçek hayatta karşılaşılan sorunlara çözüm oluşturabilmesi inandırıcılık çerçevesinde değerlendirilir. Nitel araştırmalarda inandırıcılığı artırmak için çeşitleme, uzun süreli etkileşim, uzman incelemesi, araştırmacı duruşu ve katılımcı teyidi gibi stratejilere başvurulması önerilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Çalışmada inandırıcılık niteliğini artırmaya yönelik aşağıdaki önlemler alınmıştır:

- Araştırma verilerinin toplanması bir ay gibi bir süre içerisinde yapılmıştır.
- Araştırmanın yöntem boyutunda çalışma grubunun nasıl belirlendiği, veri toplama araçları ve analiz teknikleri ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.
- Araştırmada İBT formu, ADT formu ve bireysel görüşme ile video-ses kaydı gibi birden çok araç kullanılarak veri toplanmıştır. Bu şekilde tek bir veri aracından bilgi edinilmek yerine daha fazla araç kullanılarak daha inandırıcı sonuçlara ulaşılmıştır.

- Araştırmanın oluşumundan raporlaştırılmasına kadar geçen süreçte konu uzmanlarından ve alan yazından yardım alınmıştır.
- Veri toplama araçlarının hazırlanması ve verilerin analiz edilmesi süreçlerinde uzman görüşüne başvurulmuştur.

Dış Geçerlilik-Aktarılabilirlik: Nicel araştırmaların temel amaçlarından biri olan genelleme kavramının nitel araştırmalardaki karşılığı aktarılabilirlik olarak görülmektedir. Nitel araştırmalarda olay ve olguların içerisinde bulundukları ortamdan etkilenebilecekleri dikkate alındığında doğrudan genelleme yapılması mümkün olmaz. Bu sebeple aktarılabilirlik araştırmayı okuyan bireylerin, benzer ortamlar ve süreçlere ilişkin bir anlayış oluşturabilmesi ve kendi uygulamalarını daha deneyimli yapabilmelerini sağlamaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Çalışmada aktarılabilirliği artırmaya yönelik aşağıdaki önemler alınmıştır:

- Araştırma verileri ayrıntılı olarak betimlenmiş, İBT ve ADT formları ile yarı yapılandırılmış bireysel görüşmelerden elde edilen veriler herhangi bir yorum katılmadan direkt alıntı şeklinde kullanılmıştır.
- Araştırmanın amacına yönelik amaçlı örneklem seçilmiş ve seçilen örneklemin özelliklerine dair, katılımcı özellikleri başlığı altında geniş bir bilgiye yer verilmiştir.

İç Güvenirlik-Tutarlılık: Nitel araştırmada olay ve olgular ortama ve zamana bağlı oluştukları için araştırmanın aynı biçimiyle tekrarı olanaklı değildir. Bu nedenle, olay ve olguların değişkenliği kabul edilerek bu değişkenliğin araştırmada tutarlı bir biçimde yansıtılıp yansıtılmadığına bakılır (Yıldırım ve Simsek, 2013). Araştırmada tutarlık kapsamında, veri toplama, veri analizi ve raporlaştırma süreçlerinde aynı uzmanlarla çalışılmış ve süreçte benzer işlemler aynı biçimde yapılmaya çalışılmıştır.

Dış Güvenirlik-Teyit edilebilirlik: Bilimsel araştırmalarda veriler elde edilirken araştırmacının veri kaynağına uzak olması ve nesnel bir yaklaşımla olay ve olguları ortaya koyması gerekmektedir. Ancak nitel araştırmalarda araştırmacının etkisinin hiç olmayacağı bir araştırmadan söz etmek mümkün olmamaktadır. Bu sebeple nitel araştırmalara nesnellik kavramı yerine teyit edilebilirlik kavramı önerilmektedir. Araştırmacı elde ettiği veriler ile ulaştığı sonuçları sürekli teyit ederek okuyucuya mantıklı bir şekilde sunabilmelidir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Çalışmanın “yöntem” ve “bulgular” bölümü oluşturulurken, belirtilen her bir öğe ayrıntılı bir biçimde tanımlanmaya çalışılmıştır. Veri toplama sürecinde oluşturulan İBT ve ADT formları, uzman görüşü ışığında araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Veri analizi aşamasında kodlamalar iki farklı araştırmacı tarafından bağımsız bir şekilde yapılmış, daha sonrasında kodlamalar karşılaştırılarak benzer ve farklı yanlar belirlenmiştir. Farklılıklar üzerinde yapılan tartışmalar sonucunda ortak bir karara varılmıştır. Tablo 10 ve Tablo 11, iki araştırmacının görüşleri doğrultusunda birlikte oluşturulmuş ve seviyeler arasındaki farklılıklar belirlenirken çeşitli tartışmalarda bulunulmuştur. Ayrıca araştırmadan elde edilen tüm veriler saklanarak çalışmanın sonuçlarıyla teyit edilebilirliğinin sağlanması amaçlanmıştır. İBT ve ADT formları, öğrencilere dağıtılıp çalışmaya başlanmadan önce, araştırmacı tarafından öğrencilere çalışmanın amacı ve önemi açıklanmış; çalışmaya katılarak matematik eğitimine ulusal ve uluslararası alanda katkıda bulunacakları ve verecekleri cevapların çalışma için önem arz ettiği belirtilmiştir. Çalışma süreci içerisinde hiçbir şekilde not ile değerlendirilmeyecekleri ve gerçek isimlerinin kullanılmayacağı ifade edilmiştir. Ayrıca, öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin çalışmaya katılmalarında gönüllükleri esas alınarak, öğrenci velilerinden izin belgesi, matematik öğretmenlerinden gönüllü katılım belgesi alınmıştır (Bkz. Ek 4 ve Ek 5).

Araştırmacının aynı zamanda çalışmaya katılan öğrencilerle ve matematik öğretmenleriyle aynı okulda olması nedeniyle samimi ve güvenilir bir ortam oluşturulmuş, öğrencilerin rahat bir şekilde süreci yaşamaları sağlanmıştır. Araştırmada veri kaynağı, katılımcıların çalıştığı ortam ve süreç, veri toplama ve analiz yöntemleri ayrıntılı biçimde açıklanmaya çalışılmıştır. Araştırmanın pilot ve asıl uygulamasında kullanılan sorular danışman öğretim üyesi ile birlikte alan yazından seçilmiştir. Ayrıca pilot ve asıl uygulamada kullanılan soruların her biri bir matematikçiye sorulmuş ve onun soruları çözme süreci göz önüne alınarak soruların seçimi yeniden gözden geçirilmiştir. Araştırmacı gözlem, görüşme ve yazılı dokümanlar yoluyla elde ettiği verileri herhangi bir yorum katmadan okuyucuya sunmuş, doğrudan alıntılara gözlenen temalara göre kategoriler oluşturulmuş ve yorumlamıştır. Bulguların raporlaştırılmasında veriler açık, net ve ayrıntılı bir biçimde açıklanmıştır. Verilerin yorumlanmasında kaynaklardan doğrudan alıntılar yapılmıştır. Farklı veri toplama araçlarından elde edilen sonuçlar birbirleriyle ve ilgili alan yazınla ilişkilendirilerek raporlaştırılmıştır.

Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmada araştırmacı, nicel araştırmada olduğu gibi sadece incelediği konuya ilişkin çeşitli yöntemlerle bilgi toplayan, veriye dönüştüren, analizlerini yapıp raporlaştıran kişi değildir. Nitel araştırmalarda araştırmacı, veri toplama ve veri analizi için temel kaynaktır. Burada araştırmacı araştırma sürecinde alanda, araştırmaya katılan kişilerle doğrudan görüşmeler yapıp gerektiğinde kişilerle benzer deneyimler yaşayan, bu deneyimleri ve onlar sayesinde kazandığı bakış açısını veri çözümlemesinde kullanan kişi konumundadır (Yıldırım, 1999). Araştırmacı anlamlı bilgi edinebilmek için fırsatlar sağlayarak bulunduğu duruma tepki verir. Veriler; anketler veya bilgisayarlar yerine bu insan aracı (human instrument) ile sağlanır (Merriam, 1990a). Fakat nitel araştırmalarda tam nesnelliğin başarılması mümkün olmamaktadır. Nitel araştırmada, araştırmacının alanda yer alması, çalışmaya katılan bireyler ile doğrudan görüşmeler yapması, olayların doğal akışını etkileyebilmektedir. Bu durumda, elde edilen verilerin nesnel olmaması geleneksel araştırma bakış açısına ters düşmektedir. Bu yüzden araştırmacı, nesnelliği zedeleyecek durumlara karşı önlemler almalıdır. Bu durumda araştırmacının, incelediği olgu ya da olayı mümkün olduğunca gerçekçi ve açık bir şekilde tanımlayabilmesi önem kazanmaktadır. Bunun için standart veri toplama araçlarıyla çalışmak yararlı olabilir. Ancak hiçbir araştırmada yüzde yüz nesnellik sağlanamaz. Araştırmacı bir olayı ya da olguyu uzaktan ve dışarıdan incelemeye çalışsa bile, kullandığı veri toplama araçları veya veri analiz biçimi ile bir ölçüde kendi perspektifini yansıtır. Bu nedenle başarılması neredeyse imkansız olan tam nesnellik uğruna araştırmacının bilgi kaynaklarına yakın olarak elde edebileceği daha geçerli bilgileri kaybetmemek gerekir (Yıldırım, 1999). Nitel araştırmalarda önemli olan, araştırmacının konumunu ve tutumunu yani kendi rolünü açık biçimde belirlemesi ve sonuçlara ulaşma yöntemlerini ayrıntılı biçimde ortaya koyabilmesidir. (Yıldırım ve Şimşek, 1998).

Araştırmacı; öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispatlama yöntemlerini ve argüman tercihlerini ve ortaya çıkarırken, nesnelliği zedeleyecek önlemleri almak için; öncelikle birçok kaynakta yıllardır kullanılan, geçerliği ve güvenirliği kanıtlanmış olan Bell (1976), Balacheff (1988), Harel ve Sowder (1998), Tall (1998), Healy ve Hoyles (2000), Stylianides (2008) ve Quinn (2009)'un ispat seviyelendirmeleri, ispat şemaları ve ispat yöntemleri ışığında bir derleme kullanmıştır. Veri toplama aşamasında, nesnelliği korumak için, öğrencilere ve matematik öğretmenlerine uyguladığı İspat Beceri Testi ve Argüman Değerlendirme Testi formlarında, sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait Healy ve Hoyles (2000), Miyazaki (2000), Knuth ve diğerleri (2009) ve Dede (2013)'ün çalışmalarında kullandığı önermelere yer vermiştir. Ayrıca yönlendirici olmayan sorular yönelttiği yarı yapılandırılmış bireysel görüşmeler yapmıştır. Araştırmacı, yardımcı bir araştırmacı ile öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin İBT ve ADT formlarına verdikleri cevapları deşifre ederek bulguları ortaya koyduktan sonra kendi yorumunu ortaya koymuş ve çalışmanın tartışma bölümünü oluşturmuştur. Araştırmacı çalışmayı bizzat kendisi yürütmüştür. İBT ve ADT formları, ilgili alan yazından yararlanılarak ve uzman görüşü alarak hazırlanmıştır. Araştırmacı bunun yanında yarı yapılandırılmış bireysel görüşmeler yaparak derinlemesine analiz yapmayı amaçlamıştır. Araştırmacı, katılımcı grupta bulunan öğrencileri ve matematik öğretmenlerini kendi görev yaptığı okuldan seçtiği için, çalışma boyunca aynı ortamda olmuşlardır. Bu durum araştırmacıya öğrencilerle ve matematik öğretmenleriyle daha kolay iletişime geçebilme, istenildiği vakit daha ayrıntılı ve doğru bilgi alma, yanlış alınmış olan bilgiyi düzeltme şansı tanımıştır.

Araştırmacı ilgili konuyu daha önce yüksek lisans ders döneminden itibaren ilgi duymaya başlamıştır. Alan yazını tanıdıkça, ispat yöntemlerini ve argüman tercihlerini yurtiçinde ve yurtdışında başka bir değişken olmadan deneysel olmayan bir yaklaşımla durum çalışması kullanarak belirleme yoluna giden çalışmaların nadir olmasını keşfettikten sonra öğrencilerle ve matematik öğretmenleriyle çalışmaya karar vermiştir. Bunun için ilgili alan yazından ispat yöntemleri ve argüman çeşitleri ile ilgili örnekleri bulmaya çalışmış ve öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin becerilerini ve tercihlerini sınıflandırabilmek için bir anahtar hazırlamıştır. Bunun yanında araştırmacı ilgili alan yazındaki yeni kaynaklara ulaşmış, daha önce yapılmış olan tezlerden bilgi edinmiştir. Bu da araştırmacının ilgili konuyu daha yakından tanımasına ve anlamasına sebep olmuştur. Bu açıdan bakıldığında araştırmacının araştırmaya entegre olarak Merriam'ın (1990a) çalışmasında bahsedilen insan aracı (human instrument) görevini gördüğü söylenebilir. Araştırmacı matematik eğitimi alanında aldığı yüksek lisans eğitimi boyunca nitel araştırmaları konu alan derslere katılarak nitel araştırma yöntemleri ve uygulama alanları konusunda yöntemsel bilgi almış ve bu konuda yeterlik kazanmaya çalışmıştır. Bunun yanı sıra bu yüksek lisans tezini hazırlama süreci içerisinde tez izleme dönemlerinde, tez izleme jürisinde bulunan nitel araştırma konusunda bilgi ve deneyim sahibi öğretim elemanıyla yapılan fikir alışverişleri sayesinde tez sürecinin doğru biçimde yapılandırılmasına yönelik destek almıştır. Bu anlamda araştırmacının nitel araştırma yeterliğinin sağlandığı düşünülmektedir.

BÖLÜM IV

BULGULAR

Bu çalışmada, matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencileri ile matematik öğretmenlerinin, ispat yapabilme becerileri ve argüman tercihlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda çalışmanın araştırma sorusu, iki alt sorudan meydana gelmektedir. Çalışmanın birinci alt sorusunu; matematik akademik başarısı yüksek ortaokul (7. ve 8. sınıf) öğrencilerinin, ispat yapabilme becerilerinin hangi seviyede olduğu ve matematiksel doğrulamalarda hangi tür argümanları ikna edici buldukları oluşturmaktadır. Çalışmanın bir diğer alt sorusunu ise; matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin matematik öğretmenlerinin, ispat yapabilme becerilerinin hangi seviyede olduğu ve matematiksel doğrulamalarda hangi tür argümanları düşük ve yüksek puanla değerlendirecekleri oluşturmaktadır.

Çalışmanın bu bölümünde araştırma problemleri temelinde, çalışmanın yöntem bölümünde ayrıntılı olarak açıklandığı üzere, öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerilerini ve argüman tercihlerini değerlendirmeye yönelik uygulanan İspat Beceri Testi ve Argüman Değerlendirme Testi ile bireysel görüşmelerden elde edilen bulgular, tablolar ve açıklamalarla birlikte verilecektir. Bulguların anlaşılırlığının artırılması amacıyla elde edilen bulgular; (1) Öğrencilerin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin analizinden elde edilen bulgular, (2) Matematik öğretmenlerinin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin analizinden elde edilen bulgular ve (3) Öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin karşılaştırılmasından elde edilen bulgular olmak üzere üç başlıktan oluşmaktadır.

Öğrencilerin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerilerinin Analizinden Elde Edilen Bulgular

Araştırmanın birinci araştırma problemi; "Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul (7. ve 8. sınıf) öğrencilerinin ispat yapabilme becerileri hangi seviyededir?" ve bu problemin alt problemi; "Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul (7. ve 8. sınıf) öğrencileri, matematiksel doğrulamalarda hangi tür argümanları tercih etmektedirler (ikna edici bulmaktadırlar)?" şeklinde ifade edilmiştir.

Bu araştırma problemlerine cevap aranırken, akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin İBT ve ADT formlarına verdikleri cevaplar ve bireysel görüşmeler esnasında yaptıkları açıklamalar dahilinde elde edilen veriler sunulmuştur.

Öğrencilerin İBT Formuna Verdikleri Yanıtlara İlişkin Bulgular

Çalışmanın bu bölümünde öğrencilerin, sayılar öğrenme alanına ait matematiksel önermeleri doğrularken (veya ispatlarken) ortaya koydukları yöntemlerin neler olduğunu belirlemek için, İBT formunda yer alan sorulara verdikleri cevaplara ve bireysel görüşmelerde yaptıkları açıklamalara ilişkin bulgu ve açıklamalara yer verilmiştir.

Birinci soruya ait bulgular. Öğrencilerin İBT formunda yer alan, "*Herhangi 3 tek sayının toplamı yine tektir*, ifadesini ispatlayanız" şeklindeki birinci soruya verdikleri cevaplar ve bu cevapların seviyelerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 12'de verilmiştir.

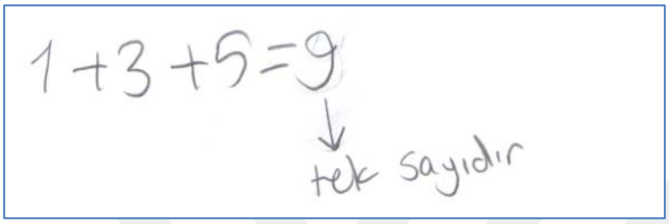
Tablo 12. Öğrencilerin İBT Formu 1. Sorusuna Ait Verileri

	Öğrenci Kodu												
Doğrulama Basamağı	7SÖ1	7SÖ2	7SÖ3	7SÖ4	7SÖ5	7SÖ6	8SÖ1	8SÖ2	8SÖ3	8SÖ4	8SÖ5	8SÖ6	N
D.A.*	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×		10
A.S.A.**					×	×				×	×		4
G.A.***													-
C.B.A.****													-
Diğer												×	1

× : Öğrencilerin doğrulamada kullandığı yöntem, * : Deneysel (empirik) argüman ,** : Anlatımsal-sözel (narrative) argüman, *** : Görsel argüman, **** : Cebirsel-biçimsel argüman

Tablo 12 incelendiğinde öğrencilerin doğrulamalarında farklı yöntemler tercih ettiği görülmektedir. Öğrencilerinden 7'si verilen matematiksel ifadeyi doğrulamak için deneysel (empirik) argümanlar, 1'i anlatımsal-sözel (narrative) argümanlar ve 3'ü ise hem deneysel hem de anlatımsal-sözel argümanlar kullanmışlardır. 8SÖ6 kodlu öğrenci ise verilen ifadedeki tek sayı ibaresini çift olarak algılamış ve ifadeyi doğrulayamamıştır. Yapılan bireysel görüşmede bu öğrenci soruyu yanlış okuduğunu fark etmiş ve diğer kategorisinde kodlanmıştır. Ayrıca doğrulama yöntemi olarak görsel argüman ve cebirsel-biçimsel argüman kullanan öğrenci çıkmamıştır.

İBT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanan öğrencilerin bir kısmının, doğrulamalarını yaparken tek örnek kullanmayı, bir kısmının ise birden fazla örnek kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. Birden fazla örnek kullanmayı tercih eden öğrencilerde, kritik değerleri tercih eden öğrenciler de mevcuttur. Tek örnekle doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 7'de verilmiştir.



Şekil 7. 7SÖ1'in İBT Formu 1. Soru İçin Cevabı

Şekil 7'de görüldüğü üzere 7SÖ1 kodlu öğrenci, İBT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını bir tane örnek vererek yapmıştır. Öğrencinin bu sorudaki doğrulaması hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Tek örnekle doğrulama yapmışsın. Bu senin için yeterli mi?

7SÖ1: Benim için yeterli.

Araştırmacı: Peki bir kaç tane daha örnek verseydin nasıl olurdu?

7SÖ1: Daha çok anlaşılmasını sağlar.

Araştırmacı: Örneğin dışında bir yöntem aklına gelmedi mi?

7SÖ1: Geldi ama ben bunu daha çok sevdiğim için…

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrencinin, doğrulama için tek örneği yeterli gördüğü, verilen örnek miktarı arttıkça ifadenin doğruluğunun daha çok anlaşılmasını sağlayacağına dair görüş belirttiği gözlenmiştir. Farklı yöntemlerinde aklına geldiğini fakat bu yöntemi kullanmayı daha uygun gördüğünü belirtmiştir.

İBT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanan öğrencilerden, birden fazla örnek ile doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 8'de verilmiştir.

$3+5+1=9$

$3+5+7=15$

$3+5+9=17$

$33+27+17=77$

Şekil 8. 8SÖ2'nin İBT Formu 1. Soru İçin Cevabı

Şekil 8'de görüldüğü üzere 8SÖ2 kodlu öğrenci, İBT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını dört tane örnek deneyerek yapmıştır. Öğrencinin bu sorudaki doğrulaması hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: 4 tane örnek vermişsin. Sence sadece örnek vermek yeterli mi?

8SÖ2: Açıklama yapsam iyi olurdu.

Araştırmacı: Bu kuralın sağlanmadığı bir örnek çıkabilir mi?

8SÖ2: Hayır. Çünkü her türlü, her sayıyı denesek yine böyle olur.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrenci, dört tane örnek kullanmış, örnek miktarını artırarak ifadeyi doğrulamıştır. Araştırmacı tarafından, verilen ifade ile ilgili aksi bir örnek bulunup bulunmayacağı sorusu yöneltilerek öğrencinin bu konuda düşünmesi sağlanmış fakat öğrencinin tüm sayıları denemenin sonucu değiştirmeyeceğinde yani deneysel argümanda ısrarcı olduğu görülmüştür.

İBT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanan öğrencilerden kritik değerler ile doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 9'da verilmiştir.

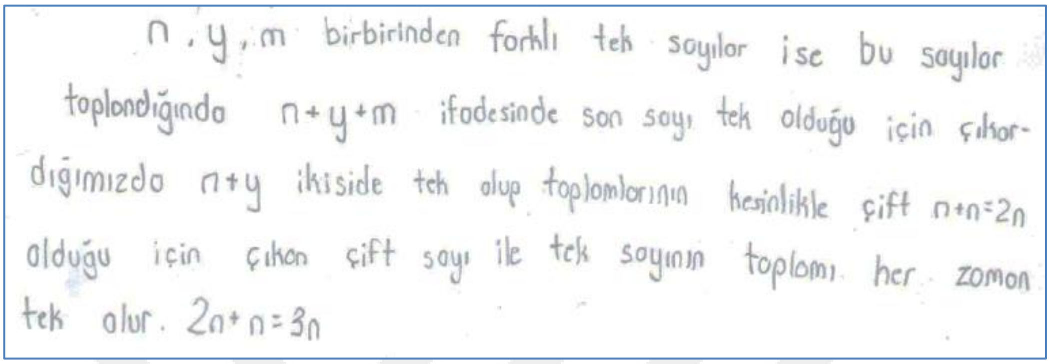
$9999+3+101=1103$

$1+3+5=9$

Şekil 9. 8SÖ4'ün İBT Formu 1. Soru İçin Cevabı

Şekil 9'da görüldüğü üzere 8SÖ4 kodlu öğrenci, İBT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını iki tane örnek vererek yapmıştır. Örneğin birinde 1, 3, 5 gibi ardışık tek sayıları denemiş, diğerinde ise 9999, 3, 101 gibi kritik (uç) değerler deneyerek deneysel argüman kullandığı görülmektedir.

İBT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, anlatımsal-sözel argüman kullanarak doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 10'da verilmiştir.


n, y, m birbirinden farklı tek sayılar ise bu sayılar
toplandığında n+y+m ifadesinde son sayı tek olduğu için çıkar-
dığımızda n+y ikiside tek olup toplamlarının kesinlikle çift n+n=2n
olduğu için çıkan çift sayı ile tek sayının toplamı her zaman
tek olur. 2n+n=3n

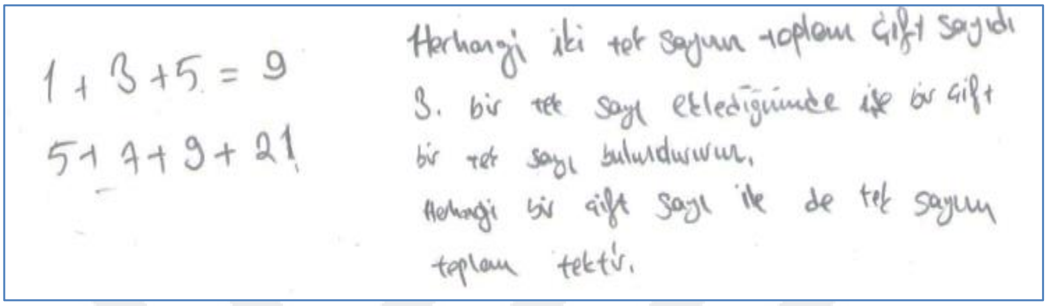
Şekil 10. 7SÖ6'nın İBT Formu 1. Soru İçin Cevabı

Şekil 10'da görüldüğü üzere 7SÖ6 kodlu öğrenci, İBT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını basit cebirsel ifadeler ve sözel açıklamalar kullanarak yapmıştır. Öğrenci cevabında üç tek sayı için n, y, m gibi cebirsel ifadeler kullanarak doğrulamaya başlamış fakat ikisinin toplamına (n+y) geldiğinde farklı iki tek sayıyı eşit iki sayı gibi düşünüp 2n olarak ifade etmiştir. Daha sonra üçüncü sayıyı da farklı bir sayı olarak değerlendirmeyip toplamın 3n olacağını belirtmiştir. Kullandığı yöntem her ne kadar cebirsel ifadeler içerse de, bunlar genel durumları yansıtamamaktadır. Öğrencinin cevabı 'birbirine eşit üç tek sayının toplamının tek olur' ifadesine uygun bir cebirsel argümandır. Ancak soruda belirtilen ifade eşitlik durumundan bahsetmemektedir. Öğrencinin bu sorudaki doğrulaması hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

> Araştırmacı: Açıklama yapmışsın. Açıklaman biraz muallakta kalmış gibi sanki. Biraz açıklar mısın burada ne yaptığını?
>
> 7SÖ6: Burada zaten iki tane tek sayının toplamı ikisi de n ise 2n olur. Üçüncüsü de tek sayı olacağı için n'yi 2n ile toplarsak 3n, yani sonuç yine tek olur. Çünkü iki tanesinin (tek sayıyı kastediyor) toplamı çift olur. Çiftle her zaman tek toplandığında sonuç tek olur.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde, öğrencinin doğrulamasında basit cebirsel ifadeler kullanmasının, ispatın genellenebilir olma özelliğini tam anlamıyla yansıtmadığı görülmektedir. Öğrencinin doğrulamasını daha çok sözel açıklamalardan yararlanarak, yani anlatımsal-sözel argüman kullanarak yaptığı görülmektedir.

İBT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, hem deneysel argüman hem de anlatımsal-sözel argümanı bir arada kullanarak doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 11'de verilmiştir.



Şekil 11. 8SÖ5'in İBT Formu 1. Soru İçin Cevabı

Şekil 11'de görüldüğü üzere 8SÖ5 kodlu öğrenci, İBT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını yaparken iki tane örnek vermiş ayrıca bu örneklerden yola çıkarak genellemeye yönelik sözel açıklamalarda bulunmuştur. Bu sözel açıklamalar daha genel bir ifade olup burada kullanılan iki tek sayının toplamı bir çift sayı eder ve bir tek sayı ve bir çift sayının toplamı tek sayı eder ifadeleri genellenebilir argümanlarla gösterilse formal bir ispat olabilirdi. Fakat böyle bir gösterim yapılmadığı ve ispatın genellenebilir olma özelliği sağlanmadığı için öğrencinin doğrulaması informal ispat yöntemidir. Öğrencinin bu sorudaki doğrulama seviyesi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Hem örnek vermişsin hem sözel açıklama yapmışsın.

8SÖ5: Evet. Örnekte tüm sayılarda geçerli olamayacağı için, sonsuz kadar sayı olduğuna göre…

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrenci hem deneysel hem de anlatımsal-sözel argüman kullanmasına sebep olarak, örnekle bütün sayıları açıklayamayacağını belirtmiştir. Belirtilen öğrenci deneysel argümanlar kullanarak doğrulamaya başlamış, anlatımsal-sözel argümanlar kullanarak doğrulamasını sonlandırmıştır.

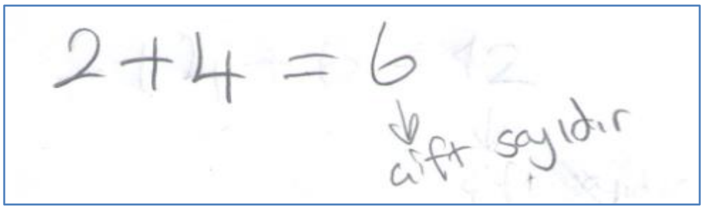
İkinci soruya ait bulgular. Öğrencilerin İBT formunda yer alan, "*Herhangi 2 çift sayının toplamı yine çift bir sayıdır,* ifadesini ispatlayanız" şeklindeki ikinci soruya verdikleri cevaplar ve bu cevapların seviyelerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 13'te verilmiştir.

Tablo 13. Öğrencilerin İBT Formu 2. Sorusuna Ait Verileri

	Öğrenci Kodu												
Doğrulama Basamağı	7SÖ1	7SÖ2	7SÖ3	7SÖ4	7SÖ5	7SÖ6	8SÖ1	8SÖ2	8SÖ3	8SÖ4	8SÖ5	8SÖ6	N
D.A.	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×		10
A.S.A.									×	×	×		3
G.A.													-
C.B.A.			×			×						×	3

Tablo 13 incelendiğinde öğrencilerin doğrulamalarında farklı yöntemler tercih ettiği görülmektedir. Öğrencilerinden 6'sı verilen matematiksel ifadeyi doğrulamak için deneysel (empirik) argümanlar, 2'si cebirsel-biçimsel argümanlar, 3'ü hem deneysel hem anlatımsal-sözel (narrative) argümanlar ve 1'i ise hem deneysel hem de cebirsel-biçimsel argümanlar kullanmışlardır. Soruyu cevaplayamayan veya yanlış yorumlayan öğrenci bulunmamaktadır. Ayrıca doğrulama yöntemi olarak görsel argüman kullanan öğrenci çıkmamıştır.

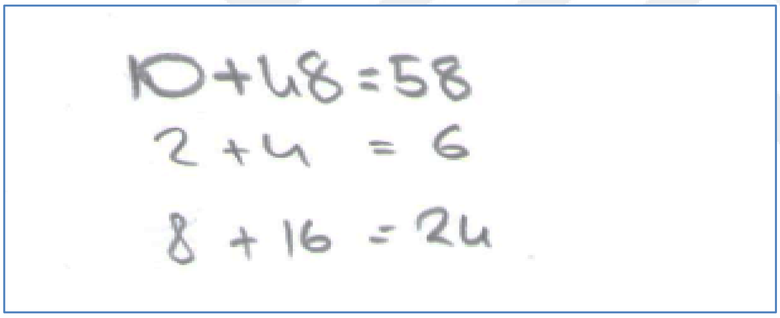
İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanan öğrencilerin bir kısmının, doğrulamalarını yaparken tek örnek kullanmayı, bir kısmının ise birden fazla örnek kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. Birden fazla örnek kullanmayı tercih eden öğrencilerde, kritik değerleri tercih eden öğrenciler de mevcuttur. Tek örnekle doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 12'de verilmiştir.



Şekil 12. 7SÖ1'in İBT Formu 2. Soru İçin Cevabı

Şekil 12'de görüldüğü üzere 7SÖ1 kodlu öğrenci, İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını tek örnek vererek yaptığı görülmektedir. Yapılan bireysel görüşmede 7SÖ1 kodlu öğrenci bir önceki soruda olduğu gibi bu soruda da tek örneği yeterli gördüğünü belirtmiş, yani deneysel argüman kullanmayı tercih etmiştir.

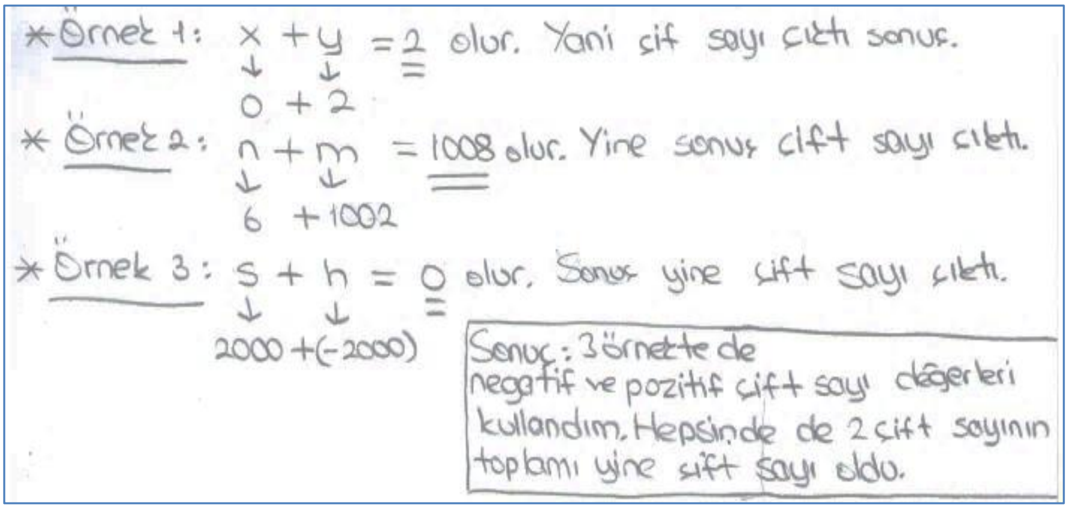
İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanan öğrencilerden, birden fazla örnek ile doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 13'te verilmiştir.



Şekil 13. 7SÖ5'in İBT Formu 2. Soru İçin Cevabı

Şekil 13'te görüldüğü üzere 7SÖ5 kodlu öğrenci, İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını üç tane örnek vererek yapmıştır. Öğrencinin ispatın genellenebilir olma özelliğinden uzak rastgele sayılardan üç örnekle deneysel argüman kullandığı görülmektedir.

İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanan öğrencilerden kritik değerler ile doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 14'te verilmiştir.



Şekil 14. 7SÖ2'nin İBT Formu 2. Soru İçin Cevabı

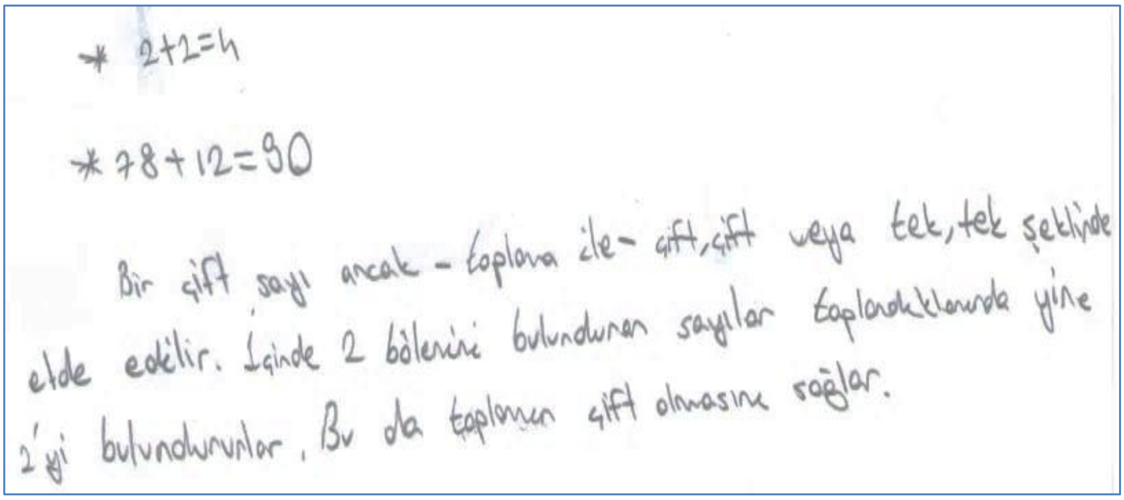
Şekil 14'te görüldüğü üzere 7SÖ2 kodlu öğrenci, İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını üç tane örnek vererek yaptığı, örneklerinden bazılarında pozitif bazılarında negatif sayılar kullandığı görülmektedir. Öğrenci başlangıçta sayıları temsilen cebirsel ifadeler kullanmış fakat bu cebirsel ifadelere değer vererek deneysel aşamaya geçiş yapmıştır. Öğrencinin bu sorudaki doğrulaması hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Doğrulamanı yaparken hem pozitif hem de negatif sayılarla yapmışsın. Hep uç örnekler verip farklılaştırmışsın. Bu 3 tane örnek ikna edici mi senin için?

7SÖ2: Aslında cebirsel yöntemler kullansam tüm değerleri sağlayacağı için daha mantıklı olurdu. Ama o sonradan aklıma geldi. O an ikna ediciydi benim için bu yöntem. En azından sokaktan çevirdiğimiz bir kişiye bu şekilde anlattığımızda daha ikna edici olduğunu düşünüyorum.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrenci, doğrulamasında kritik (uç) değerler kullanarak ifadeyi daha ikna edici hale getirdiğini düşünmektedir. Cebirsel yöntemle doğrulama yaparak, tüm değerleri kapsayan bir yöntem kullanmasının daha mantıklı olacağını belirten öğrencinin, buna rağmen deneysel argümanın anlaşılırlığının daha fazla olduğunu düşündüğü görülmektedir.

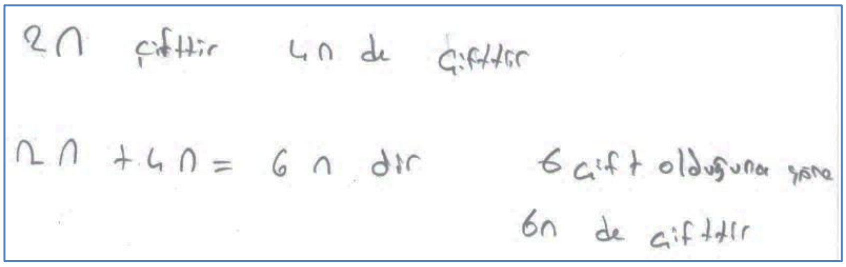
İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, hem deneysel argüman hem de anlatımsal-sözel argümanı bir arada kullanarak doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 15'te verilmiştir.



Şekil 15. 8SÖ4’ün İBT Formu 2. Soru İçin Cevabı

Şekil 15’te görüldüğü üzere 8SÖ4 kodlu öğrenci, İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını yaparken iki tane örnek vermiş ayrıca bu örneklerden yola çıkarak, çift sayının ancak iki tek sayının ya da iki çift sayının toplamıyla elde edilebileceğini belirterek genellemeye yönelik sözel açıklamalarda bulunmuştur. Sonuç olarak öğrenci doğrulamasında hem deneysel argümana hem de anlatımsal-sözel argümana yer vermiştir.

İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, cebirsel-biçimsel argüman kullanarak doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 16’da verilmiştir.



Şekil 16. 8SÖ6'ün İBT Formu 2. Soru İçin Cevabı

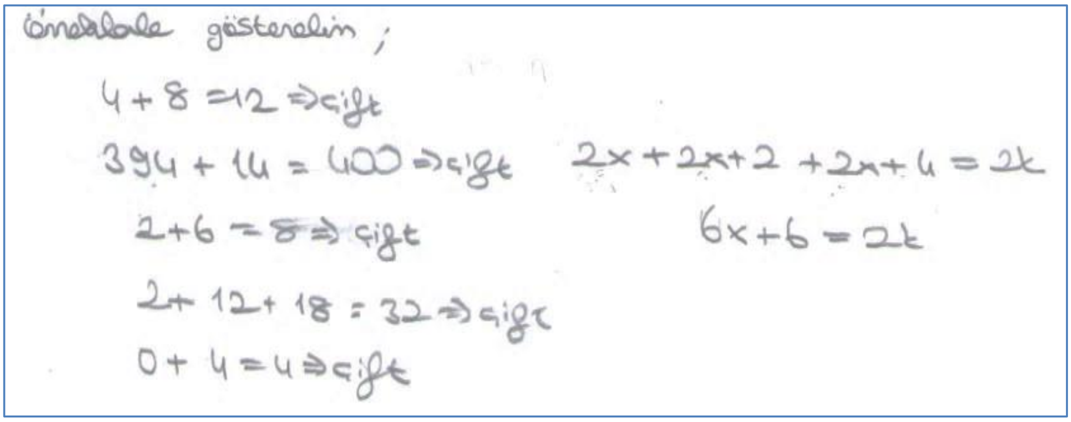
Şekil 16’da görüldüğü üzere 8SÖ6 kodlu öğrenci, İBT formunun 2. sorusunda yer alan ifadenin matematiksel doğrulamasını cebirsel ifadeler kullanarak yapmıştır. Öğrenci doğrulamasında iki çift sayı için 2n ve 4n gibi genel cebirsel ifadeler kullanmış ve toplamının 6n olacağını belirtmiştir. Öğrencinin bu sorudaki doğrulaması hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Cebirsel yöntemi seçmişsin. Sebebi nedir?

8SÖ6: Çünkü cebirsel ifadeler bütün sayılar için geçerlidir.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrenci, cebirsel ifadelerin bütün sayılar için geçerli olduğunu belirtmiştir. Öğrencinin bir ispatın genellenebilir olma özelliğinin farkında olduğu ve formal bir ispat yaparak cebirsel-biçimsel argüman kullandığı görülmektedir.

İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken hem deneysel argüman hem de cebirsel-biçimsel argümanı bir arada kullanarak doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 17’da verilmiştir.



Şekil 17. 7SÖ3'ün İBT Formu 2. Soru İçin Cevabı

Şekil 17’de görüldüğü üzere 7SÖ3 kodlu öğrenci, İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını yaparken, öncesinde 5 tane örnek vermiş sonrasında ise üç tane çift sayıyı 2x, 2x+2 ve 2x+4 cebirsel ifadeleri ile belirtip genellenebilir bir argüman ortaya koymuştur. Öğrenci örneklerle doğrulamaya başlamış, buradan çıkardığı sonucu cebirsel argümanlar kullanarak göstermiştir. Sonuç olarak öğrencinin, hem deneysel hem de cebirsel-biçimsel argümanı bir arada kullandığı görülmektedir.

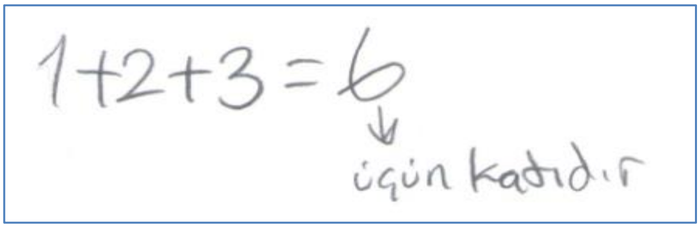
Üçüncü soruya ait bulgular. Öğrencilerin İBT formunda yer alan, “*Ardışık 3 tam sayının toplamı daima 3’ün katıdır,* ifadesini ispatlayanız” şeklindeki üçüncü soruya verdikleri cevaplar ve bu cevapların seviyelerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 14’te verilmiştir.

Tablo 14. Öğrencilerin İBT Formu 3. Sorusuna Ait Verileri

Doğrulama Basamağı	Öğrenci Kodu											
	7SÖ1	7SÖ2	7SÖ3	7SÖ4	7SÖ5	7SÖ6	8SÖ1	8SÖ2	8SÖ3	8SÖ4	8SÖ5	8SÖ6	N
D.A.	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×		11
A.S.A.					×					×	×		3
G.A.													-
C.B.A.			×			×						×	3

Tablo 14 incelendiğinde öğrencilerin doğrulamalarında farklı yöntemler tercih ettiği görülmektedir. Öğrencilerinden 6'sı verilen matematiksel ifadeyi doğrulamak için deneysel (empirik) argümanlar, 1'i cebirsel-biçimsel argümanlar, 3'ü hem deneysel hem anlatımsal-sözel (narrative) argümanlar ve 2'si ise hem deneysel hem de cebirsel-biçimsel argümanlar kullanmışlardır. Soruyu cevaplayamayan veya yanlış yorumlayan öğrenci bulunmamaktadır. Ayrıca doğrulama yöntemi olarak görsel argüman kullanan öğrenci çıkmamıştır.

İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanan öğrencilerin bir kısmının, doğrulamalarını yaparken tek örnek kullanmayı, bir kısmının ise birden fazla örnek kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. Birden fazla örnek kullanmayı tercih eden öğrencilerde, kritik değerleri tercih eden öğrenciler de mevcuttur. Tek örnekle doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 18'de verilmiştir.



Şekil 18. 7SÖ1'in İBT Formu 3. Soru İçin Cevabı

Şekil 18'de görüldüğü üzere 7SÖ1 kodlu öğrenci, İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını tek örnek deneyerek yapmıştır.

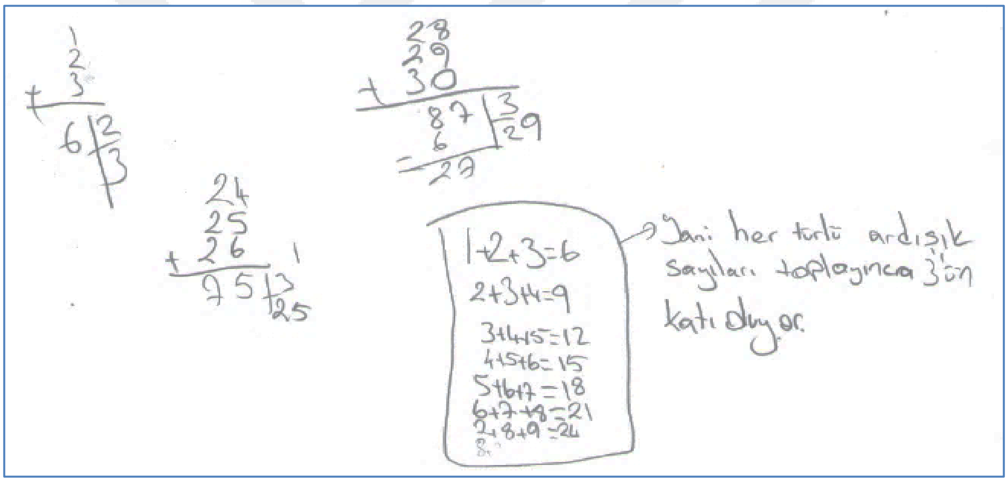
Öğrencinin bu sorudaki doğrulaması hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Kendi sayılarınla doğru olduğunu buldun. Olumsuz bir örnek olabilir mi?

7SÖ1: Birkaç tane örnekte aklımdan geçirdim. Onlar da doğru çıkınca bunu yazdım.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrencinin aslında birden fazla örneği denediği fakat cevabına birini yazdığı görülmektedir. Öğrenci olumsuz bir örnek olup olmayacağı sorusuna ihtimal veriyor olsa da, doğrulamasında deneysel argüman kullandığı görülmektedir.

İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanan öğrencilerden, birden fazla örnek ile doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 19'da verilmiştir.



Şekil 19. 8SÖ2'nin İBT Formu 3. Soru İçin Cevabı

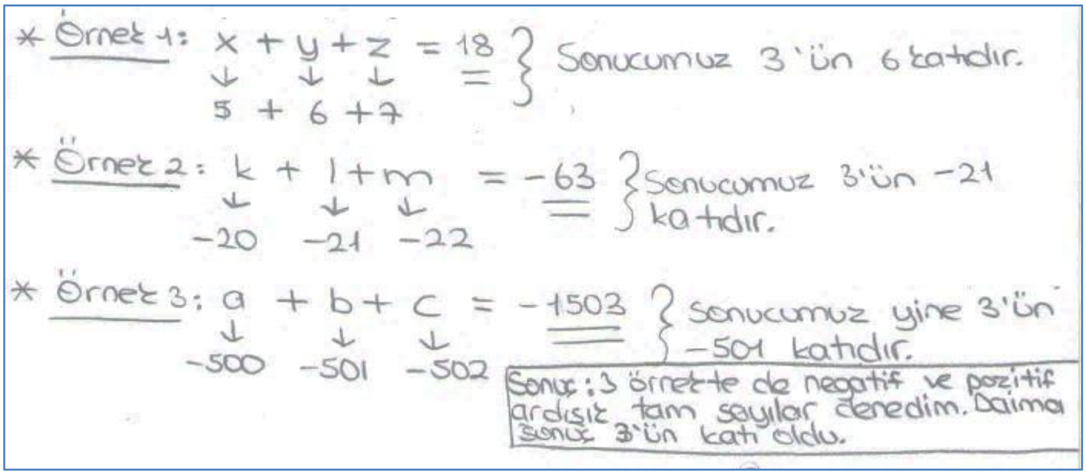
Şekil 19'da görüldüğü üzere 8SÖ2 kodlu öğrenci, İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını birden fazla örnek vererek yapmıştır. Öğrencinin bu sorudaki doğrulama seviyesi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Önce üç tane örnek vermiş, doğrulamanı yapmışsın. Sonra yetmemiş örnekleri bayağı çoğaltmışsın.

8SÖ2: Bütün sayıları birlikte yaptığımda böyle oluyor. En son taraflarını (birler basamağını kastediyor) toplayınca yine olacağı için, en son birler basamağındaki sayıları topladım.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde, öğrencinin örneklerden genelleme yaptığı görülmektedir. Öğrenci, bir sayının tek ya da çift olduğuna birler basamağına bakılarak karar verildiğini, ardışık bir basamaklı sayıların tamamını toplayarak aksi bir durum ortaya çıkıp çıkmayacağını denediği gözlenmektedir. Öğrencinin burada tüm örnekleri tüketmeye çalışarak genellenebilir bir sonuca varmaya çalıştığı görülmektedir. Sonuç olarak öğrencinin deneysel argüman kullandığı aşikardır.

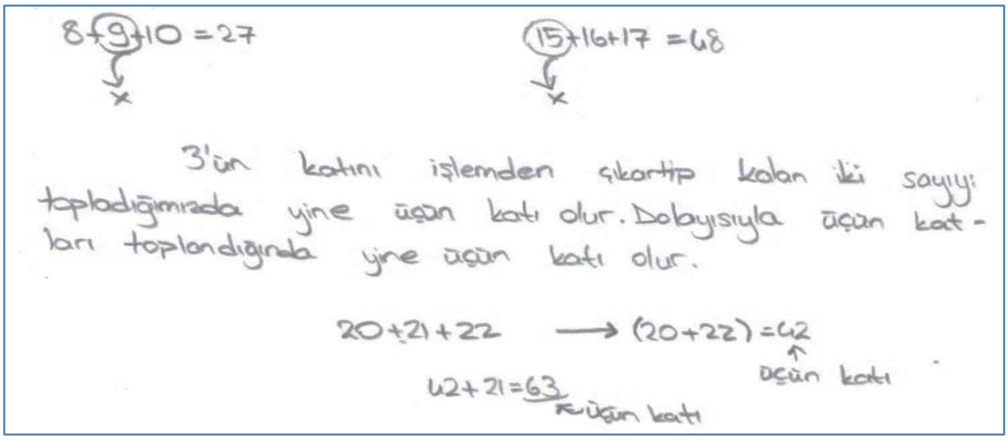
İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanan öğrencilerden kritik değerler ile doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 20’de verilmiştir.



Şekil 20. 7SÖ2'nin İBT Formu 3. Soru İçin Cevabı

Şekil 20’de görüldüğü üzere 7SÖ2 kodlu öğrenci, İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını birden fazla örnek vererek yapmıştır. Örneklerinde kritik değerler vererek daha ikna edici bir doğrulama yapmaya çalıştığı, ve sonuç olarak deneysel argüman kullandığı görülmektedir.

İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, hem deneysel argüman hem de anlatımsal-sözel argümanı bir arada kullanarak doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 21’de verilmiştir.



Şekil 21. 7SÖ5'ün İBT Formu 3. Soru İçin Cevabı

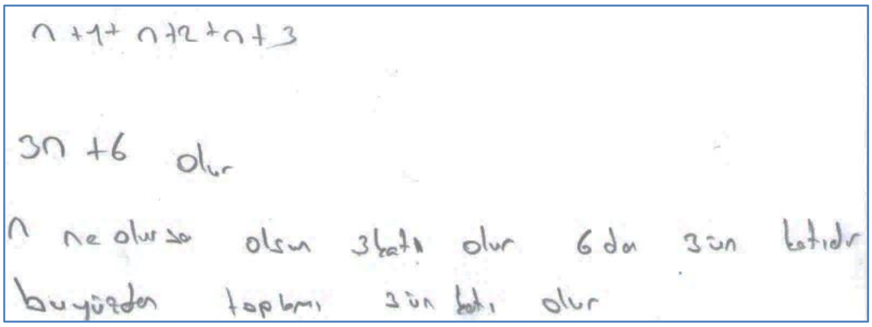
Şekil 21’de görüldüğü üzere 7SÖ5 kodlu öğrenci, İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını yaparken iki tane örnek vermiş ve sözel açıklamalarda bulunmuştur. Bu sözel açıklamada öğrenci, ardışık üç sayıdan birinin üçün katı olacağı ve bu sayılar arasından üçün katı olanı çıkarıp kalan ikisini topladığımızda üçün katı olacağını örneklerinden genellemeye çalışmıştır. Öğrencinin bu sorudaki doğrulaması hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: İki tane örnek vermişsin. Hem de altına açıklamasını yapmışsın. Biraz açıklar mısın bize ne yaptığını?

7SÖ5: Bu üçlü toplama işleminde 3’ün katı olanı çıkardığımızda ikisinin toplamı yine 3’ün katı oluyor.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde, öğrencinin, ardışık üç sayıdan birinin 3’ün katı olacağı ve kalan diğer iki sayının da toplamının daima 3’ün katı olacağı çıkarımında bulunduğu görülmüştür. Öğrencinin 3’un katı olmayan iki sayının toplamının ise 3’ün katı olacağı çıkarımını, verdiği örneklerden genellediği görülmüştür. Yani öğrenci doğrulamasında hem deneysel hem de anlatımsal-sözel argümanı bir arada kullanmıştır.

İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, cebirsel-biçimsel argüman kullanarak doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 22’de verilmiştir.


n+1+ n+2+n+3

3n +6 olur

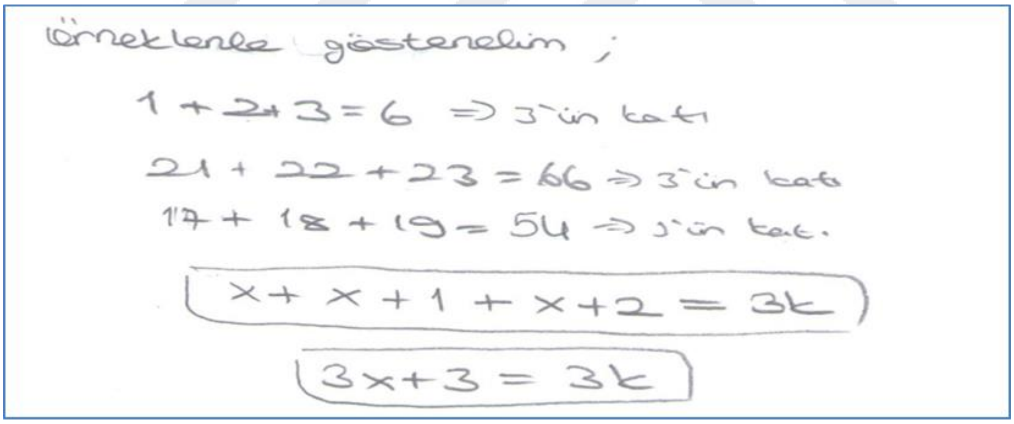
n ne olursa olsun 3 katı olur 6 da 3ün katıdır

buyüzden toplamı 3ün katı olur

Şekil 22. 8SÖ6'nın İBT Formu 3. Soru İçin Cevabı

Şekil 22’de görüldüğü üzere 8SÖ6 kodlu öğrenci, İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını cebirsel ifadeler kullanıp ‘n’ ne olursa olsun diye belirtip formal yöntemlerle ispat yaptığı ve cebirsel-biçimsel argüman kullandığı görülmektedir.

İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, hem deneysel argüman hem de cebirsel-biçimsel argümanı bir arada kullanarak doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 23’te verilmiştir.


örneklerle gösterelim ;

$1+2+3=6 \Rightarrow$ 3'ün katı

$21+22+23=66 \Rightarrow$ 3'ün katı

$17+18+19=54 \Rightarrow$ 3'ün katı.

$\boxed{x+x+1+x+2=3k}$

$\boxed{3x+3=3k}$

Şekil 23. 7SÖ3'ün İBT Formu 3. Soru İçin Cevabı

Şekil 23’te görüldüğü üzere 7SÖ3 kodlu öğrenci, İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını yaparken öncelikle üç tane örnek vermiş, sonrasında bir genellemeye varmış ve ardışık üç sayıyı, $x + x + 1 + x + 2 = 3x + 3$ şeklinde cebirsel ifadeye dönüştürmüştür. Sonuç olarak öğrenci doğrulamasını hem deneysel hem de cebirsel-biçimsel argümanı bir arada kullanarak yaptığı görülmektedir.

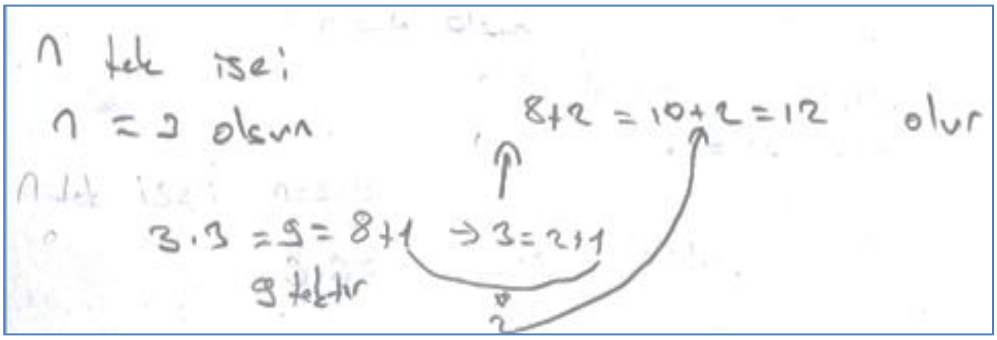
Dördüncü soruya ait bulgular: Öğrencilerin İBT formunda yer alan *"$\boldsymbol{n^2+n}$ çifttir,* ifadesini ispatlayanız" şeklindeki dördüncü soruya verdikleri cevaplar ve bu cevapların seviyelerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 15'te verilmiştir.

Tablo 15. Öğrencilerin İBT Formu 4. Sorusuna Ait Verileri

	Öğrenci Kodu												
Doğrulama Basamağı	7SÖ1	7SÖ2	7SÖ3	7SÖ4	7SÖ5	7SÖ6	8SÖ1	8SÖ2	8SÖ3	8SÖ4	8SÖ5	8SÖ6	N
D.A.	×	×	×	×	×		×	×	×	×	×	×	11
A.S.A.					×	×			×	×	×		5
G.A.													-
C.B.A.													-

Tablo 15 incelendiğinde öğrencilerin doğrulamalarında farklı yöntemler tercih ettiği görülmektedir. Öğrencilerinden 7'si verilen matematiksel ifadeyi doğrulamak için deneysel (empirik) argümanlar, 1'i anlatımsal-sözel (narrative) argümanlar ve 3'ü ise hem deneysel hem de anlatımsal-sözel argümanlar kullanmışlardır. Soruyu cevaplayamayan veya yanlış yorumlayan öğrenci bulunmamaktadır. Ayrıca doğrulama yöntemi olarak görsel argüman ve cebirsel-biçimsel argüman kullanan öğrenci çıkmamıştır.

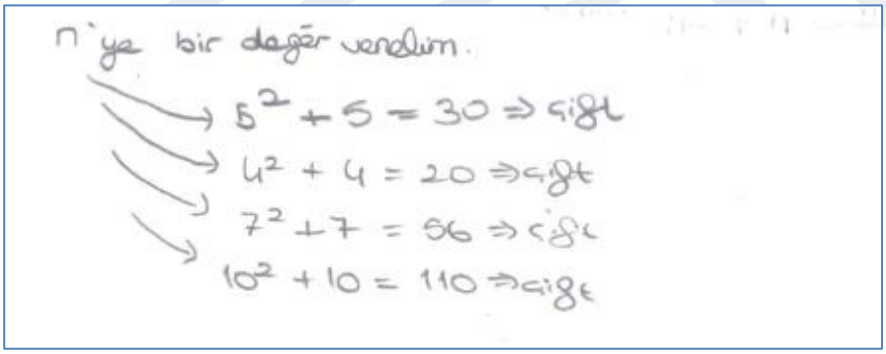
İBT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanan öğrencilerin bir kısmının, doğrulamalarını yaparken tek örnek kullanmayı, bir kısmının ise birden fazla örnek kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. Birden fazla örnek kullanmayı tercih eden öğrencilerde, kritik değerleri tercih eden öğrenciler de mevcuttur. Tek örnekle doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 24'te verilmiştir.



Şekil 24. 8SÖ6'nın İBT Formu 4. Soru İçin Cevabı

Şekil 24’te görüldüğü üzere 8SÖ6 kodlu öğrenci, İBT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını tek örnek deneyerek yapmıştır. Öğrencinin sadece tek sayı olma durumu için örnek vererek doğrulama yaptığı yani deneysel argüman kullandığı aşikardır.

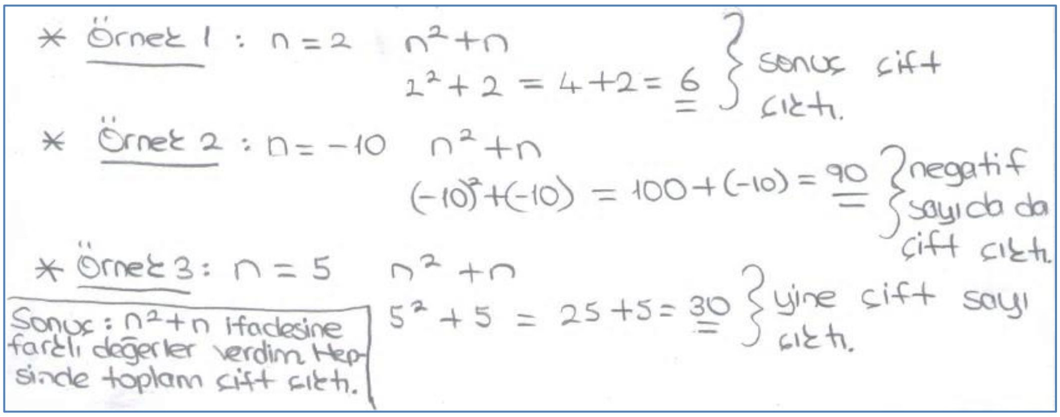
İBT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanan öğrencilerde, birden fazla örnek ile doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 25’te verilmiştir.



Şekil 25. 7SÖ3'ün İBT Formu 4. Soru İçin Cevabı

Şekil 25’te görüldüğü üzere 7SÖ3 kodlu öğrenci, İBT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını dört tane örnek vererek yaptığı yani deneysel argüman kullandığı görülmektedir.

İBT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanan öğrencilerden kritik değerler ile doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 26’da verilmiştir.

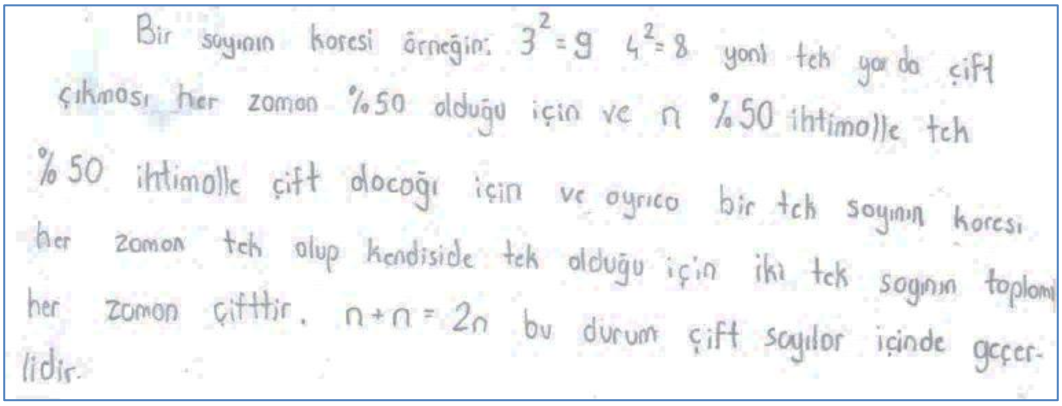


* Örnek 1 : $n=2$ n^2+n
$2^2+2=4+2=6$ } sonuç çift çıktı.
* Örnek 2 : $n=-10$ n^2+n
$(-10)^2+(-10)=100+(-10)=90$ } negatif sayıda da çift çıktı.
* Örnek 3 : $n=5$ n^2+n
$5^2+5=25+5=30$ } yine çift sayı çıktı.
Sonuç : n^2+n ifadesine farklı değerler verdim. Hepsinde toplam çift çıktı.

Şekil 26. 7SÖ2'nin İBT Formu 4. Soru İçin Cevabı

Şekil 26'da görüldüğü üzere 7SÖ2 kodlu öğrenci, İBT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasını üç tane örnek vererek yapmıştır. Yapılan bireysel görüşmede öğrenci, önceki sorularda olduğu gibi bu soruda doğrulamasında kullandığı örneklerde de kritik değerler vererek daha ikna edici bir doğrulama yapmaya çalıştığını belirtmiştir. Sonuç olarak öğrencinin deneysel argüman kullandığı görülmektedir.

İBT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken anlatımsal-sözel argüman kullanarak doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 27'de verilmiştir.

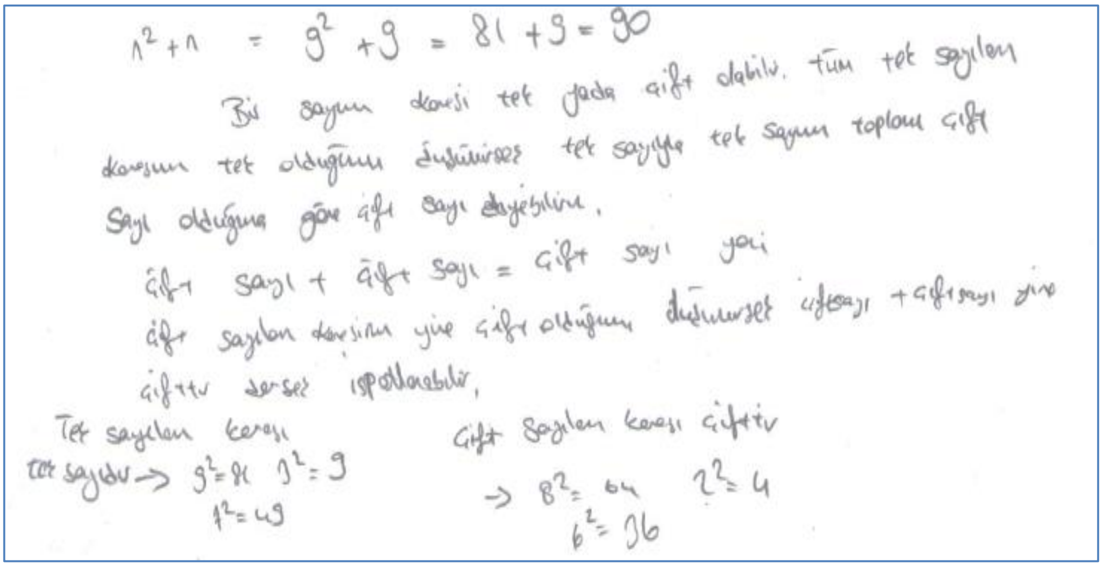


Bir sayının karesi örneğin: $3^2=9$ $4^2=8$ yani tek ya da çift çıkması her zaman %50 olduğu için ve n %50 ihtimalle tek %50 ihtimalle çift olacağı için ve ayrıca bir tek sayının karesi her zaman tek olup kendiside tek olduğu için iki tek sayının toplamı her zaman çifttir. $n+n=2n$ bu durum çift sayılar içinde geçerlidir.

Şekil 27. 7SÖ6'nın İBT Formu 4. Soru İçin Cevabı

Şekil 27'de görüldüğü üzere 7SÖ6 kodlu öğrenci, İBT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulamasında öğrencinin, basit cebirsel ifadeler kullandığı görülmektedir. Doğrulama esnasında 'n' olarak belirttiği sayının karesini de 'n' olarak göstermiş ve kullandığı cebirsel argümanlar genellenebilir olma özelliğini yitirmiştir. Kullandığı cebirsel ifadelerin genel durumları tam anlamıyla yansıtmadığı görülmektedir. Çift sayı için bir açıklama yapma gereği duymamış, tek sayının karesinin de tek olduğunu belirtmiş ve iki tek sayının toplamının daima çift olacağını belirtmiştir. Öğrencinin doğrulamasını daha çok sözel açıklamalardan yararlanarak, yani anlatımsal-sözel argüman kullanarak yaptığı görülmektedir.

İBT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, hem deneysel argüman hem de anlatımsal-sözel argümanı bir arada kullanarak doğrulama yapan öğrenci temsili Şekil 28'de verilmiştir.



$n^2+n = 9^2+9 = 81+9 = 90$

Bir sayının karesi tek yada çift olabilir. Tüm tek sayıların karesinin tek olduğunu düşünürsek tek sayıyla tek sayının toplamı çift sayı olduğuna göre çift sayı diyebiliriz.

çift sayı + çift sayı = çift sayı yani çift sayıların karesinin yine çift olduğunu düşünürsek çiftsayı + çiftsayı yine çifttir dersek ispatlanabilir.

Tek sayıların karesi tek sayıdır → $9^2=81$ $3^2=9$ $7^2=49$

Çift sayıların karesi çifttir → $8^2=64$ $2^2=4$ $6^2=36$

Şekil 28. 8SÖ5'in İBT Formu 4. Soru İçin Cevabı

Şekil 28'de görüldüğü üzere 8SÖ5 kodlu öğrenci, İBT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken bir tane örnek verdiği ve devamında sözel açıklamalarla genelleme yapmaya çalıştığı görülmektedir. Öğrenci tek sayının karesinin de tek olduğunu, çift sayının karesinin de çift olduğunu ve tek+tek ve çift+çift durumlarının çift olduğunu belirtmiştir. Sonuç olarak öğrencinin doğrulamasında hem deneysel hem de anlatımsal-sözel argüman kullandığı görülmektedir.

Öğrencilerin ADT Formuna Verdikleri Yanıtlara İlişkin Bulgular

Çalışmanın bu bölümünde öğrencilerin, ADT formunda sunulan deneysel (empirik), anlatımsal-sözel (narrative), görsel ve cebirsel-biçimsel argümanları nasıl değerlendirdiklerini ve hangi tür argümanları daha geçerli (ikna edici) bulduklarını sebepleriyle belirttikleri, ADT formunda yer alan sorulara verdikleri cevaplara ve bireysel görüşmelerde yaptıkları açıklamalara ilişkin bulgu ve açıklamalara yer verilmiştir.

Birinci soruya ait bulgular. Öğrencilerin ADT formunda yer alan "*Herhangi 3 tek sayının toplamı yine tektir*, ifadesini ispatlayanız" şeklindeki birinci soru için sunulan deneysel (empirik), anlatımsal-sözel (narrative), görsel ve cebirsel-biçimsel argümanlardan ikna edici buldukları tercihleri ve bu tercihlerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 16'da verilmiştir.

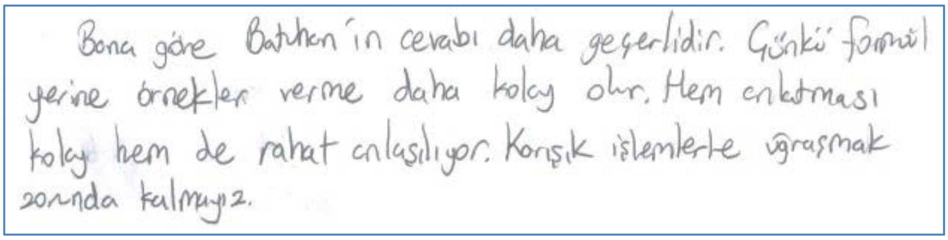
Tablo 16. Öğrencilerin ADT Formu 1. Sorusuna Ait Verileri

	Öğrenci Kodu												
Argüman Türü	7SÖ1	7SÖ2	7SÖ3	7SÖ4	7SÖ5	7SÖ6	8SÖ1	8SÖ2	8SÖ3	8SÖ4	8SÖ5	8SÖ6	N
D.A.*	×			×									2
A.S.A.**			×		×	×		×		×			5
G.A.***		×							×				2
C.B.A.****							×				×	×	3

× : Öğrencilerin tercih ettiği argüman, * : Deneysel (empirik) argüman ,** : Anlatımsal-sözel (narrative) argüman, *** : Görsel argüman, **** : Cebirsel-biçimsel argüman

Tablo 16 incelendiğinde öğrencilerin, matematiksel doğrulama ve ispatlama için kendilerine sunulan argümanlardan farklı yöntemleri tercih ettiği görülmektedir. Öğrencileri 2'si verilen doğrulama ve ispatlama yöntemlerinden deneysel (empirik) argümanı, 5'i anlatımsal-sözel (narrative) argümanı, 2'si görsel argümanı ve 3'ü cebirsel-biçimsel argümanı ikna edici bulduklarını belirtmişlerdir.

ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak deneysel argümanı (Batuhan'ın cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 29'da verilmiştir.


Bana göre Batuhan'ın cevabı daha geçerlidir. Çünkü formül yerine örnekler verme daha kolay olur. Hem anlatması kolay hem de rahat anlasılıyor. Karısık islemlerle ugrasmak zorunda kalmayız.

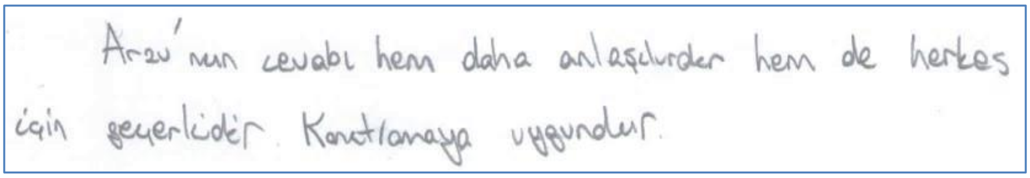
Şekil 29. 7SÖ1'in ADT Formu 1. Soru İçin Cevabı

Şekil 29'da görüldüğü üzere 7SÖ1 kodlu öğrenci, ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan deneysel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrenci formüller yerine örnek verme yönteminin daha kolay olduğunu belirtmektedir. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

> Araştırmacı: Bu cevabı tercih etmenin sebebi nedir?
>
> 7SÖ1: Sebebi hem daha kolay, hem rahatlıkla anlaşılabilir, başkalarına anlatmakta çok kolay, böyle yapması kısa sürüyor.
>
> Araştırmacı: Cebirsel yöntemlerle yapılan doğrulama nasıl sence?
>
> 7SÖ1: Bakıldığında daha karışık duruyor.
>
> Araştırmacı: Görsel yöntem için ne dersin?
>
> 7SÖ1: Çizmek fazla alan kaplayacağı için uğraşmazdım.
>
> Araştırmacı: Sözel yöntem için ne düşünüyorsun?
>
> 7SÖ1: Hiç bana uygun değil.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde, öğrencinin deneysel argümanı tercih etmesinin sebebi, daha kolay, anlaşılabilir olması ve başkalarına anlatmak için en kısa yol olarak görmesidir. Öğrenci cebirsel argümanı karışık, görsel argümanı uğraştırıcı bulmakta ve anlatımsal-sözel argümanın ise kendisine uygun bir yöntem olmadığını belirtmektedir.

ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak anlatımsal-sözel argümanı (Arzu'nun cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 30'da verilmiştir.


Arzu'nun cevabı hem daha anlaşılırdır hem de herkes için geçerlidir. Kontrolamaya uygundur.

Şekil 30. 8SÖ4'ün ADT Formu 1. Soru İçin Cevabı

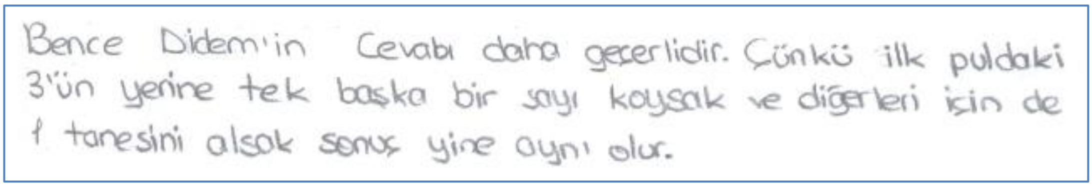
Şekil 30'da görüldüğü üzere 8SÖ4 kodlu öğrenci, ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan anlatımsal-sözel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Anlatımsal-sözel yöntemi seçmişsin. Sebebi nedir?

8SÖ4: Şimdi öncelikle örnek vermiştim (İBT formundaki cevabını kastediyor) ama benim bunu seçme sebebim o altında yazan sözlü ifadeydi. Çünkü iki tek sayının toplamının çift olduğunu söyledim. Sonra çiftle tek sayıların toplamı her zaman tek olduğu için de tek olduğu argümanı sundum. Ondan dolayı onu seçtim.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrencinin, İBT formunda verdiği cevaba yakın olmasından dolayı anlatımsal-sözel argümanı tercih ettiği görülmektedir.

ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak görsel argümanı (Didem'in cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 31'de verilmiştir.


Bence Didem'in Cevabı daha geçerlidir. Çünkü ilk puldaki 3'ün yerine tek başka bir sayı koysak ve diğerleri için de 1 tanesini alsak sonuç yine aynı olur.

Şekil 31. 7SÖ2'nin ADT Formu 1. Soru İçin Cevabı

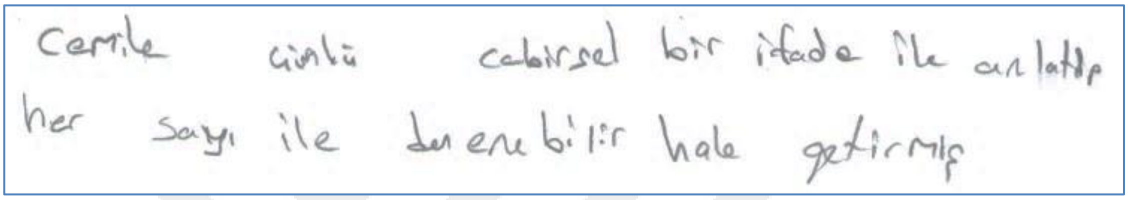
Şekil 31'de görüldüğü üzere 7SÖ2 kodlu öğrenci, ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan görsel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Verilen ifadeye görsel yöntemi ikna edici bulmuşsun. Bunun sebebi nedir?

> 7SÖ2: Cebirsel cevabı kendi cevabıma yakın görmüştüm. Ama görsel cevabın sokaktan çevirdiğimiz herkese anlatmak için daha pekiştirici olduğunu düşündüm. Cebirsel cevabı okuma yazma bilmeyen birine anlatmaya kalktığımızda anlayamazdı.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrenci görsel argümanı herkese anlatmak için açıklayıcı bir yol olarak belirtmektedir. Cebirsel cevabın birine anlatmak için uygun olmadığını belirten öğrencinin, görsel argümanın kullanıldığı cevabı ikna edici bulduğu görülmektedir.

ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak cebirsel-biçimsel argümanı (Cemile'nin cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 32'de verilmiştir.


Cemile çünkü cebirsel bir ifade ile anlatıp her sayı ile denenebilir hale getirmiş

Şekil 32. 8SÖ6'nın ADT Formu 1. Soru İçin Cevabı

Şekil 32'de görüldüğü üzere 8SÖ6 kodlu öğrenci, ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan cebirsel-biçimsel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

> Araştırmacı: Cebirsel yöntemi seçmişsin. Sebebi nedir?
>
> 8SÖ6: Çünkü bütün cebirsel ifadeler bütün sayılar için geçerlidir.
>
> Araştırmacı: Peki görsel yöntem veya deneysel yöntem veya sözel yöntem hakkındaki düşüncen nedir?
>
> 8SÖ6: Onlar sadece kendi sayılarıyla açıklanabilir. Ama cebirsele ne getirirsek getirelim hepsinde de cevap çıkar yani.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde, öğrencinin cebirsel argümanın bütün sayılar için geçerli olduğunu belirttiği görülmektedir. Öğrenci bir ispatın genelenebilir olma özelliğinin farkındadır. Diğer argümanların ise sadece bazı değerler için doğrulama yaptığını belirtmekte ve cebirsel argümanları ikna edici bulmaktadır.

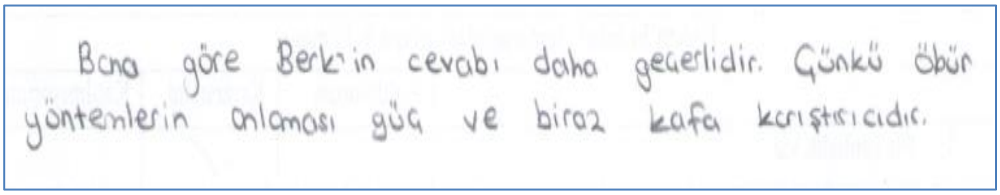
İkinci soruya ait bulgular. Öğrencilerin ADT formunda yer alan "*Herhangi 2 çift sayının toplamı yine çift bir sayıdır,* ifadesini ispatlayanız" şeklindeki ikinci soru için sunulan deneysel (empirik), anlatımsal-sözel (narrative), görsel ve cebirsel-biçimsel argümanlardan ikna edici buldukları tercihleri ve bu tercihlerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 17'de verilmiştir.

Tablo 17. Öğrencilerin ADT Formu 2. Sorusuna Ait Verileri

	Öğrenci Kodu												
Argüman Türü	7SÖ1	7SÖ2	7SÖ3	7SÖ4	7SÖ5	7SÖ6	8SÖ1	8SÖ2	8SÖ3	8SÖ4	8SÖ5	8SÖ6	N
D.A.	×			×									2
A.S.A.							×	×	×				3
G.A.		×			×								2
C.B.A.			×			×				×	×	×	5

Tablo 14 incelendiğinde öğrencilerin, matematiksel doğrulama için kendilerine sunulan argümanlardan farklı yöntemleri tercih ettiği görülmektedir. Öğrencilerin 2'si verilen doğrulama ve ispatlama yöntemlerinden deneysel (empirik) argümanı, 3'ü anlatımsal-sözel (narrative) argümanı, 2'si görsel argümanı ve 5'i ise cebirsel-biçimsel argümanı ikna edici bulduklarını belirtmişlerdir.

ADT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak deneysel argümanı (Berke'nin cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 33'te verilmiştir.



Şekil 33. 7SÖ4'ün ADT Formu 2. Soru İçin Cevabı

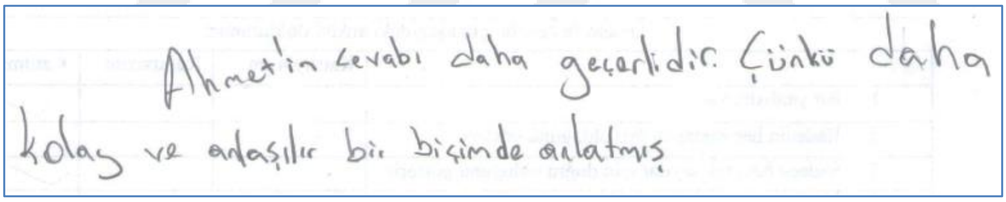
Şekil 33'te görüldüğü üzere 7SÖ4 kodlu öğrenci, ADT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan deneysel argümanı ikna edici bulmuştur. Buna sebep olarak ise diğer yöntemleri kafa karıştırıcı bulduğunu belirtmiştir. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Deneysel argümanı daha geçerli bulmanın sebebi nedir?

7SÖ4: Cevabıma yakın olduğu için (İBT formundaki cevabını kastediyor).

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrenci, İBT formunda verilen ifadeyi doğrularken kullandığı yönteme benzer olmasından dolayı deneysel argümanı tercih ettiğini belirtmektedir. 7SÖ4 kodlu öğrencinin İBT formunda bu ifadeyi ispatlarken deneysel argüman kullandığı bilinmektedir (Bkz. Tablo 13). Öğrencinin ispatın genellenebilir olması fikrinden uzak olup, ispatlama yaparken ve sunulan ispatları değerlendirirken deneysel argümanlara yatkınlık gösterdiği görülmektedir.

ADT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak anlatımsal-sözel argümanı (Ahmet'in cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 34'te verilmiştir.


Ahmet'in cevabı daha geçerlidir. Çünkü daha kolay ve anlaşılır bir biçimde anlatmış

Şekil 34. 8SÖ2'nin ADT Formu 2. Soru İçin Cevabı

Şekil 34'te görüldüğü üzere 8SÖ2 kodlu öğrenci, ADT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan anlatımsal-sözel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Sunulan argümanlardan anlatımsal cevabı seçmenin sebebi nedir?

8SÖ2: Açıklamayla daha anlaşılır ve kolay bir şekilde olduğundan.

Araştırmacı: Kendin örnek vererek doğrulama yapmıştın (İBT formunda).

8SÖ2: Ama orda açıklamayı eksik yapmıştım. Orada da açıklama yapsaydım daha iyi olurdu.

Araştırmacı: Peki cebirsel yöntem nasıl?

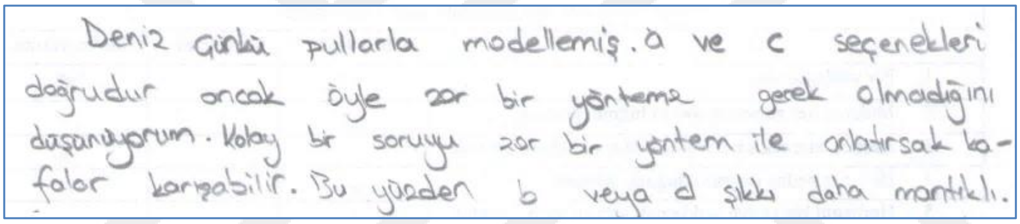
8SÖ2: Çok karışık, kafa karıştırıcı.

Araştırmacı: Ya görsel yöntem?

8SÖ2: Aslında biraz daha açıklayıcı ama anlatımsal olan daha hoşuma gitti.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrenci, daha anlaşılır ve kolay bulduğu için anlatımsal-sözel argümanı seçtiğini belirtmektedir. Ayrıca öğrencinin cebirsel-biçimsel argümanı kafa karıştırıcı bulduğu ve görsel argümanı ise biraz daha açıklayıcı bulduğu görülmektedir. 8SÖ2 kodlu öğrenci İBT formunda bu ifadeyi ispatlarken deneysel argümanlar kullanmış fakat kendine sunulan argümanlardan anlatımsal-sözel argümanı ikna edici bulmuştur.

ADT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak görsel argümanı (Deniz'in cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 35'te verilmiştir.


Deniz Günlü pullarla modellemiş. a ve c seçenekleri doğrudur ancak öyle zor bir yönteme gerek olmadığını düşünüyorum. Kolay bir soruyu zor bir yöntem ile anlatırsak kafalar karışabilir. Bu yüzden b veya d şıkkı daha mantıklı.

Şekil 35. 7SÖ5'in ADT Formu 2. Soru İçin Cevabı

Şekil 35'te görüldüğü üzere 7SÖ5 kodlu öğrenci, ADT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan görsel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Görsel cevabı tercih etmişsin. 1. soruda görsel tercih etmemişsin ama 2. soruda bunu tercih etmişsin. Sebebi ne?

7SÖ5: Diğer yöntemler bana kafa karıştırıcı geldi. Deneysel yöntem aslında anlaşılır bir şekilde. Ama sözel ve cebirsel kafa karıştırıcı geldi bana. Bunda direkt görsel olarak anlattığı için seçtim.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrenci, anlatımsal-sözel ve cebirsel yöntemlerin kendisine kafa karıştırıcı geldiğini belirtmektedir. Sorunun kolay bir soru olduğunu ve zor yöntemlerle anlatmanın yersiz olduğunu yazılı ifadesinde belirtmiştir. 7SÖ5 kodlu öğrenci İBT formunda aynı ifadeyi doğrularken deneysel argümanlar kullanmıştır. Burada ise deneysel yöntem ve görsel yöntemi anlaşılır bulduğu fakat görsel argümanı ikna edici bulduğu görülmektedir.

ADT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak cebirsel-biçimsel argümanı (Canan'ın cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 36'da verilmiştir.

Canan'ın cevabı her insan için ayrı kolaylıkta olmasa da kanıtlanmaya en uygun ve en akla yatkın olan cevaptır

Şekil 36. 8SÖ4'ün ADT Formu 2. Soru İçin Cevabı

Şekil 36'da görüldüğü üzere 8SÖ4 kodlu öğrenci, ADT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan cebirsel-biçimsel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Neden cebirsel yöntemi seçtin?

8SÖ4: Cebirsel cevap burada bana daha mantıklı geldi ve bilimsel açıdan, matematiksel açıdan daha böyle bir arkasında kanıt olan, daha kanıtlanabilir olduğu için onu seçtim. Benim cevabım da (İBT formunda anlatımsal-sözel argüman kullandığı cevabı kastediyor) yine belli bir şeyleri kanıtlıyordu ama cebirsel cevap daha bilimsel, daha matematiksel geldi.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrenci, İBT formunda anlatımsal-sözel argümanı kullandığı fakat cebirsel yöntemi gördüğünde matematiksel açıdan daha geçerli bulduğu ve bu sebeple cebirsel-biçimsel argümanı tercih ettiği görülmektedir.

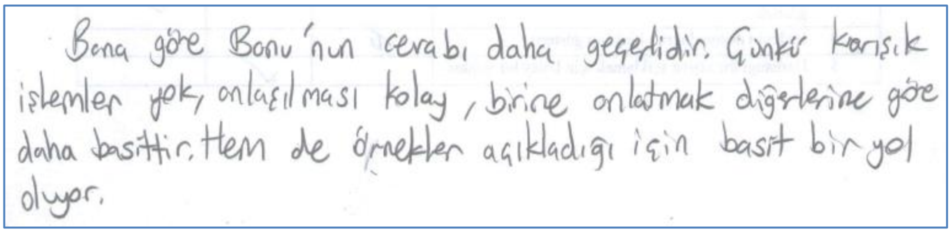
Üçüncü soruya ait bulgular. Öğrencilerin ADT formunda yer alan "*Ardışık 3 tam sayının toplamı daima 3'ün katıdır,* ifadesini ispatlayanız" şeklindeki üçüncü soru için sunulan deneysel (empirik), anlatımsal-sözel (narrative), görsel ve cebirsel-biçimsel argümanlardan ikna edici buldukları tercihleri ve bu tercihlerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 18'de verilmiştir

Tablo 18. Öğrencilerin ADT Formu 3. Sorusuna Ait Verileri

Argüman Türü	Öğrenci Kodu												
	7SÖ1	7SÖ2	7SÖ3	7SÖ4	7SÖ5	7SÖ6	8SÖ1	8SÖ2	8SÖ3	8SÖ4	8SÖ5	8SÖ6	N
D.A.	×			×									2
A.S.A.			×			×				×			3
G.A.					×		×	×	×				4
C.B.A.		×									×	×	3

Tablo 18 incelendiğinde öğrencilerin, matematiksel doğrulama için kendilerine sunulan argümanlardan farklı yöntemleri tercih ettiği görülmektedir. Öğrencilerin 2'si verilen doğrulama yöntemlerinden deneysel (empirik) argümanı, 3'ü anlatımsal-sözel (narrative) argümanı, 4'ü görsel argümanı ve 3'ü ise cebirsel-biçimsel argümanı ikna edici bulduklarını belirtmişlerdir.

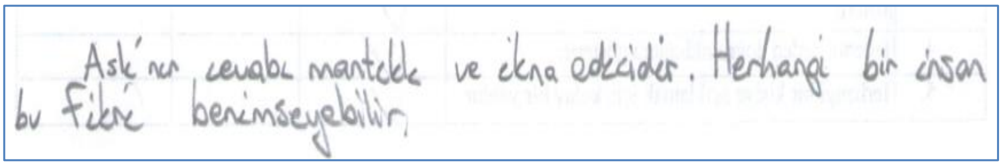
ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak deneysel argümanı (Banu'nun cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 37'de verilmiştir.


Bena göre Bonu'nun cevabı daha geçerlidir. Çünkü karışık işlemler yok, anlaşılması kolay, birine anlatmak diğerlerine göre daha basittir. Hem de örnekler açıkladığı için basit bir yol oluyor.

Şekil 37. 7SÖ1'in ADT Formu 3. Soru İçin Cevabı

Şekil 37'de görüldüğü üzere 7SÖ1 kodlu öğrenci, ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan deneysel argümanı ikna edici bulmuştur. 7SÖ1 kodlu öğrenci İBT formunda aynı ifadeyi doğrularken deneysel argümanlar kullanmış (Bkz. Tablo 14) burada da kendi cevabına benzer olan deneysel argümanı ikna edici bulmuştur.

ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama ispatlama yöntemi olarak anlatımsal-sözel argümanı (Aslı'nın cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 38'de verilmiştir.


Aslı'nın cevabı mantıklı ve ikna edicidir. Herhangi bir insan bu fikri benimseyebilir.

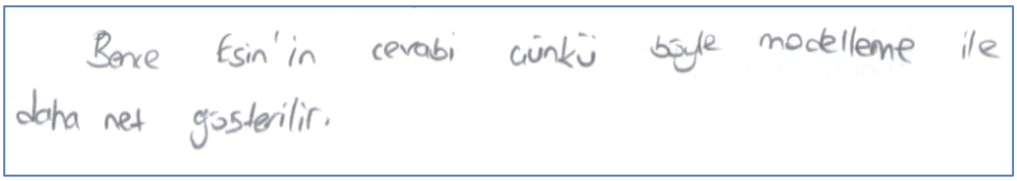
Şekil 38. 8SÖ4'ün ADT Formu 3. Soru İçin Cevabı

Şekil 38'de görüldüğü üzere 8SÖ4 kodlu öğrenci, ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan anlatımsal-sözel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

> Araştırmacı: Sözel cevabı seçmenin altında yatan sebep ne?
>
> 8SÖ4: Bu cevap bana daha mantıklı geldi. Çünkü sonuç olarak sözel açıklama yapmış ve herhangi bir insanın anlayabilmesi için, herkesin anlayacağı bir cevap olabileceği için onu seçtim.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrencinin, anlatımsal-sözel yöntemleri herkesin anlayabileceği bir yöntem olarak gördüğü ve anlatımsal-sözel argümanları ikna edici bulduğu görülmektedir. Kendisine mantıklı geldiği için bu argümanı ikna edici bulduğunu belirten 8SÖ4 kodlu öğrencinin, İBT formunda aynı ifadeyi doğrularken deneysel ve anlatımsal-sözel argümanlar kullandığı bilinmektedir (Bkz. Tablo 14).

ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak görsel argümanı (Esin'in cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 39'da verilmiştir.


Bence Esin'in cevabı çünkü böyle modelleme ile daha net gösterilir.

Şekil 39. 8SÖ1'in ADT Formu 3. Soru İçin Cevabı

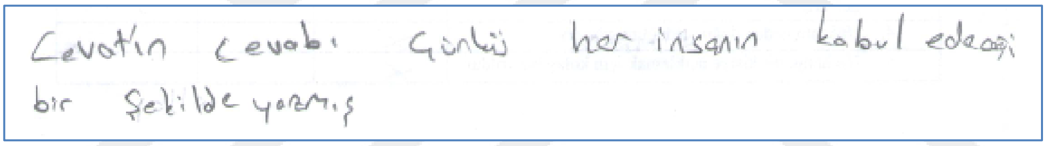
Şekil 39’da görüldüğü üzere 8SÖ1 kodlu öğrenci, ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan görsel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Görsel yöntemi seçmenin sebebi nedir?

8SÖ1: Öbürlerine göre daha sade olduğu için.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrenci, görsel yöntemin sade ve net bir gösterim olduğunu belirtmektedir. İBT formunda aynı ifadeyi doğrularken deneysel argüman kullanan 8SÖ1 kodlu öğrenci görsel argümanı ikna edici bulmuştur.

ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak cebirsel-biçimsel argümanı (Cevat’ın cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 40’ta verilmiştir.


Cevatın cevabı çünkü her insanın kabul edeceği bir şekilde yazmış

Şekil 40. 8SÖ6'nın ADT Formu 3. Soru İçin Cevabı

Şekil 40’ta görüldüğü üzere 8SÖ6 kodlu öğrenci, ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan cebirsel-biçimsel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Cebirsel yöntemi seçmenin sebebi nedir?

8SÖ6: Bu da benim gibi cebirsel ifadelerle anlatmış (İBT formundaki cevabını kastediyor). Diğer şekilde en basit cevap görsel cevaptaki gibi olurdu. Ama cebirsel cevap daha kapsamlı, onu seçtim.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrencinin kendi cevabına benzer olan ve daha kapsamlı olduğunu belirttiği cebirsel-biçimsel argümanı tercih ettiği görülmektedir. 8SÖ6 kodlu öğrencinin ispatın genellenebilir olma özelliğinin farkında olduğu, İBT formunda cebirsel-biçimsel argüman kullandığı ve ADT formunda ise cebirsel-biçimsel argümanı ikna edici bulduğu görülmektedir.

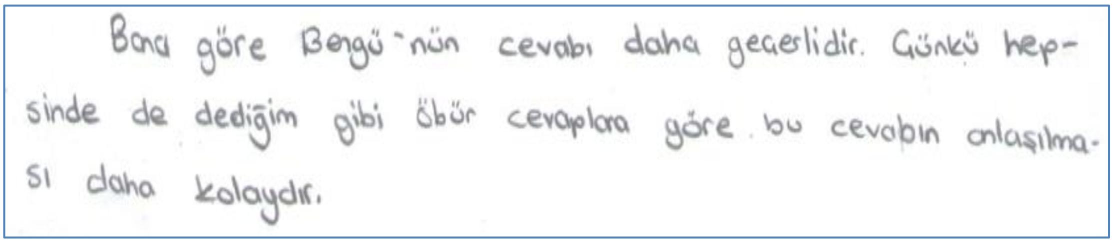
Dördüncü soruya ait bulgular: Öğrencilerin ADT formunda yer alan *"$n^2 + n$ çifttir,* ifadesini ispatlayanız." şeklindeki dördüncü soru için sunulan deneysel (empirik), anlatımsal-sözel (narrative), görsel ve cebirsel-biçimsel argümanlardan ikna edici buldukları tercihleri ve bu tercihlerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 19'da verilmiştir.

Tablo 19. Öğrencilerin ADT Formu 4. Sorusuna Ait Verileri

	Öğrenci Kodu												
Argüman Türü	7SÖ1	7SÖ2	7SÖ3	7SÖ4	7SÖ5	7SÖ6	8SÖ1	8SÖ2	8SÖ3	8SÖ4	8SÖ5	8SÖ6	N
D.A.	×			×			×						3
A.S.A.			×		×	×			×	×			5
G.A.		×						×				×	3
C.B.A.											×		1

Tablo 19 incelendiğinde öğrencilerin matematiksel doğrulama için kendilerine sunulan argümanlardan farklı yöntemleri tercih ettiği görülmektedir. Öğrencilerin 3'ü verilen doğrulama yöntemlerinden deneysel (empirik) argümanı, 5'i anlatımsal-sözel (narrative) argümanı, 3'ü görsel argümanı ve 1'i ise cebirsel-biçimsel argümanı ikna edici bulduklarını belirtmişlerdir.

ADT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak deneysel argümanı (Bengü'nün cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 41'de verilmiştir.


Bana göre Bengü'nün cevabı daha geçerlidir. Çünkü hep-sinde de dediğim gibi öbür cevaplara göre bu cevabın anlaşılma-sı daha kolaydır.

Şekil 41. 8SÖ1'in ADT Formu 1. Soru İçin Cevabı

Şekil 41'de görüldüğü üzere 8SÖ1 kodlu öğrenci, ADT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan deneysel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Deneysel yöntemi seçmişsin. Peki diğerlerini seçmeme nedenin ne?

8SÖ1: Bu daha anlaşılabilir olduğu için bunu seçtim.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrencinin, İBT formunda aynı ifadeyi doğrularken kullandığı cebirsel argümanın anlaşılır olduğunu düşündüğü, ispatın genellenebilir olma özelliğinin farkında olmadığı ve sunulan argümanlardan da deneysel argümanı ikna edici bulduğu görülmektedir.

ADT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak anlatımsal-sözel argümanı (Alper'in cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 42'de verilmiştir.

Alper'in cevabı başka bir gerçekten yani kanıtlanmış bir bilgiden türetilmiştir. O nedenle kanıtlaması ve anlaşılması çok kolaydır.

Şekil 42. 8SÖ4'ün ADT Formu 4. Soru İçin Cevabı

Şekil 42'de görüldüğü üzere 8SÖ4 kodlu öğrenci, ADT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan anlatımsal-sözel argümanı ikna edici bulmuştur. 8SÖ4 kodlu öğrencinin İBT formunda aynı ifadeyi doğrularken deneysel ve anlatımsal-sözel argümanları kullandığı bilinmekte olup (Bkz. Tablo 15) anlaşılması kolay olması gerekçesiyle anlatımsal-sözel argümanı ikna edici bulduğu görülmektedir.

ADT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak görsel argümanı (Derya'nın cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 43'te verilmiştir.

Derya'nın cevabı daha geçerlidir. Çünkü şekil üzerinde farklı sayılar verdiğimizde yine (ardışık) dikdörtgen elde ederiz.

Şekil 43. 7SÖ2'nin ADT Formu 4. soru İçin Cevabı

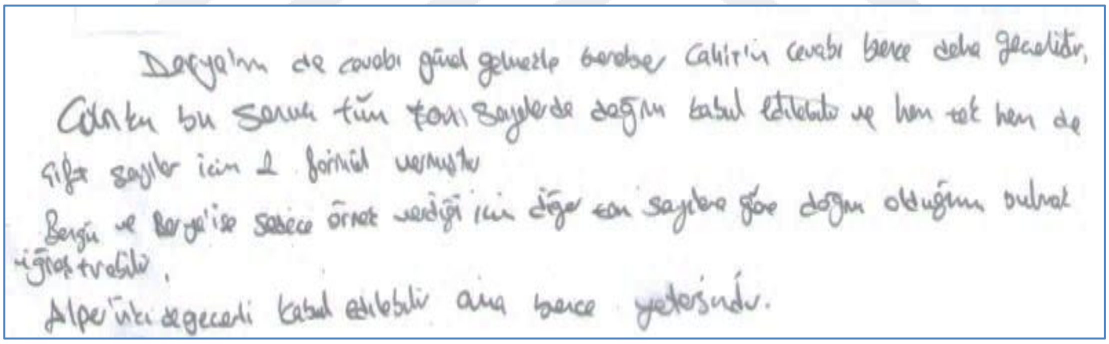
Şekil 43’te görüldüğü üzere 7SÖ2 kodlu öğrenci, ADT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan görsel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrencinin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğrenciyle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Görseli seçmenin nedeni tam olarak ne?

7SÖ2: Hem açıklamayla hem de şekille şematize etmesi. Bu (cebirseli kastediyor) aşırı karışık geldi. Bu (görseli kastediyor) yöntem daha iyi geldi. Daha çok kavrayabildim.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğrenci, cebirsel yöntemi karışık bulduğunu ve görsel ifadelerle daha iyi kavradığını belirterek görsel argümanı tercih etmiştir. İBT formunda aynı ifadeyi doğrularken deneysel argüman kullanan 7SÖ2 kodlu öğrenci, burada görsel argümanı ikna edici bulmuştur.

ADT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulama yöntemi olarak cebirsel-biçimsel argümanı (Cahit’in cevabı) ikna edici bulan öğrenci temsili Şekil 44’te verilmiştir.


Dağra'nın de cevabı güzel gelmezse bence Cahit'in cevabı bence daha geçerlidir,
Çünkü bu soru tüm tam sayılarda doğru kabul edilebilir ve hem tek hem de
çift sayılar için 1 formül vermiştir
Bergü ve Berge'ise sadece örnek verdiği için diğer tam sayılara göre doğru olduğunu bulmak
ığrastırabilir.
Alpe'nin ki değecerli kabul edilebilir ama bence yetersizdir.

Şekil 44. 8SÖ5'in ADT Formu 4. Soru İçin Cevabı

Şekil 44’te görüldüğü üzere 8SÖ5 kodlu öğrenci, ADT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için kendine sunulan argümanlardan cebirsel-biçimsel argümanı ikna edici bulmuştur. Öğrencinin ispatın genellenebilir olma özelliğine vurgu yaparak, cebirsel-biçimsel argümanın tüm sayılarda doğru olduğunu, deneysel argümanın ise sadece seçilen sayılarda doğru olduğunu açıkladığı görülmektedir. İBT formunda aynı ifadeyi doğrularken deneysel argüman ve anlatımsal-sözel argüman kullanan 8SÖ5 kodlu öğrencinin burada anlatımsal-sözel argümanı yetersiz bulması, deneysel argümanı eleştirmesi ve cebirsel-biçimsel argümanı ikna edici bulması dikkat çekicidir.

Öğrencilerin İBT ve ADT Formlarına Verdikleri Yanıtlara İlişkin Bulguların Sentezi

Çalışmanın bu bölümünde, öğrencilerin İBT formunda ortaya koydukları ispatlama becerileri ile ADT formunda sunulan argümanlardan hangisini ikna edici bulduklarına dair tercihleri karşılaştırılmıştır. Öğrencilerin, İBT formunda verilen matematiksel ifadeyi ispatlarken ortaya koydukları doğrulama yöntemi birden fazla olan cevaplarında, doğrulama yöntemi olarak bir üst kategorideki cevabı kabul edilmiştir. Örneğin bir öğrenci, verilen matematiksel ifadeyi doğrularken, hem deneysel hem de anlatımsal-sözel argüman kullanmışsa bu öğrencinin doğrulama yöntemi anlatımsal-sözel argüman temasına dahil edilmiştir. Tüm öğrencilerin İBT ve ADT formlarına verdikleri cevaplar bir araya getirilmiş ve Tablo 20 hazırlanmıştır.

Tablo 20. Öğrencilerin İspatlama Becerilerinin ve Argüman Tercihlerinin Karşılaştırılması

		ADT Formundaki Tercihler			
		D.A.* (N=9)	A.S.A.** (N=16)	G.A.*** (N=11)	C.B.A.*** (N=11)
İBT Formundaki Cevaplar	D.A.* (N=26)	9	5	10	2
	A.S.A.** (N=15)	-	9	1	5
	C.B.A.**** (N=6)	-	2	-	4

* : Deneysel (empirik) argüman, ** : Anlatımsal-sözel (narrative) argüman, ***: Görsel argüman, **** : Cebirsel-biçimsel argüman

Tablo 20 incelendiğinde öğrencilerin, İBT formundaki sorulara doğrulama yöntemi olarak deneysel argümanları toplamda 26 defa kullandıkları görülmektedir. Deneysel argümanın kullanıldığı bu 26 cevabın, ADT formunda; 9'u yine deneysel argümanları, 5'i anlatımsal-sözel argümanları, 10'u görsel argümanları ve 2'si cebirsel-biçimsel argümanları tercih ettiği görülmektedir. Öğrencilerin, İBT formundaki sorulara doğrulama yöntemi olarak anlatımsal-sözel argümanları toplamda 15 defa kullanıldıkları görülmektedir. Anlatımsal-sözel argümanın kullanıldığı bu 15 cevabın, ADT formunda; 9'u yine anlatımsal-sözel argümanları, 1'i görsel argümanları ve 5'i cebirsel-biçimsel argümanları tercih ettiği görülmektedir. Öğrencilerin, İBT formundaki sorulara doğrulama yöntemi olarak cebirsel-biçimsel argümanları toplamda 6 defa kullanıldıkları görülmektedir. Cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı bu 6 cevabın, ADT formunda; 4'ü yine cebirsel-biçimsel argümanları ve 2'si anlatımsal-sözel argümanları tercih ettiği görülmektedir.

Matematik Öğretmenlerinin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerilerinin Analizinden Elde Edilen Bulgular

Araştırmanın ikinci araştırma problemi; "Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerileri hangi seviyededir?" ve bu problemin alt problemi; "Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencilerinin matematik öğretmenleri matematiksel doğrulamalarda hangi tür argümanları tercih etmektedirler (düşük ve yüksek puanla değerlendirmektedirler)?" şeklinde ifade edilmiştir.

Bu araştırma problemlerine cevap aranırken, matematik öğretmenlerinin İBT ve ADT formlarına verdikleri cevaplar ve bireysel görüşmeler esnasında yaptıkları açıklamalar dahilinde elde edilen veriler sunulmuştur.

Matematik Öğretmenlerinin İBT Formuna Verdikleri Yanıtlara İlişkin Bulgular

Çalışmanın bu bölümünde, matematik öğretmenlerinin, matematiksel ifadeleri doğrularken başvurdukları yöntemlerin neler olduğunu belirlemek için, İBT formunda yer alan sorulara verdikleri cevaplara ve bireysel görüşmelerde yaptıkları açıklamalara ilişkin bulgu ve açıklamalara yer verilmiştir.

Birinci soruya ait bulgular: Matematik öğretmenlerinin İBT formunda yer alan, "*Herhangi 3 tek sayının toplamı yine tektir*, ifadesini ispatlayanız" şeklindeki birinci soruya verdikleri cevaplar ve bu cevapların seviyelerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 21'de verilmiştir.

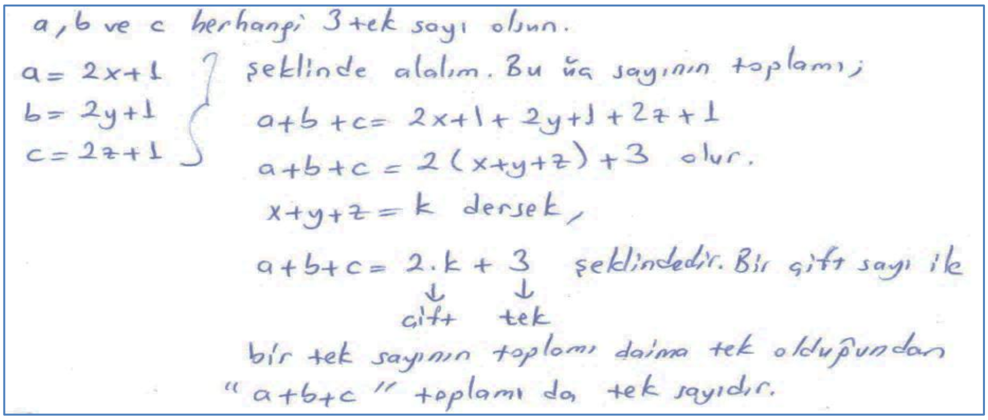
Tablo 21. Matematik Öğretmenlerinin İBT Formu 1. Sorusuna Ait Verileri

	Öğretmen Kodu			
Doğrulama Basamağı	MÖ1	MÖ2	MÖ3	MÖ4
D.A.*				×
A.S.A.**				
G.A.***				
C.B.A.****	×	×	×	

× : Matematik öğretmenlerinin doğrulamada kullandığı yöntem, * : Deneysel (empirik) argüman, ** : Anlatımsal-sözel (narrative) argüman, ***: Görsel argüman, **** : Cebirsel-biçimsel argüman

Tablo 21 incelendiğinde matematik öğretmenlerinin 3'ü verilen matematiksel ifadeyi doğrulamak için cebirsel-biçimsel argüman, 1'i ise deneysel (empirik) argüman kullanmıştır.

İBT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, cebirsel-biçimsel argüman kullanarak doğrulama yapan matematik öğretmeni temsili Şekil 45'te verilmiştir.



a, b ve c herhangi 3 tek sayı olsun.

$\left.\begin{array}{l} a = 2x+1 \\ b = 2y+1 \\ c = 2z+1 \end{array}\right\}$ şeklinde alalım. Bu üç sayının toplamı;

$a+b+c = 2x+1+2y+1+2z+1$

$a+b+c = 2(x+y+z)+3$ olur.

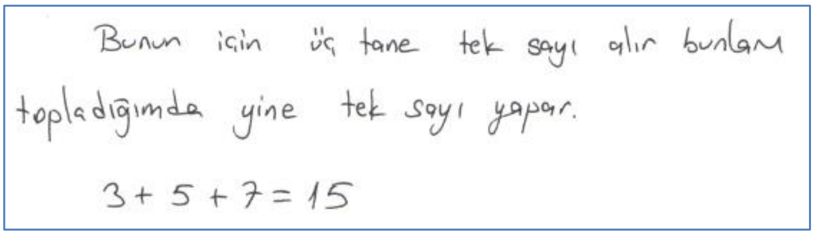
$x+y+z = k$ dersek,

$a+b+c = \underbrace{2.k}_{\text{çift}} + \underbrace{3}_{\text{tek}}$ şeklindedir. Bir çift sayı ile bir tek sayının toplamı daima tek olduğundan "a+b+c" toplamı da tek sayıdır.

Şekil 45. MÖ1'in İBT Formu 1.Soru İçin Cevabı

Şekil 45'te görüldüğü üzere MÖ1 kodlu matematik öğretmenin, verilen ifadeyi doğrularken cebirsel-biçimsel argümanlar kullandığı ve ispatın genellenebilir olma kriterine uygun formal bir ispat ortaya koyduğu görülmektedir.

İBT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanarak doğrulama yapan matematik öğretmeni temsili Şekil 46'da verilmiştir.


Bunun için üç tane tek sayı alır bunları topladığımda yine tek sayı yapar.

3 + 5 + 7 = 15

Şekil 46. MÖ4'ün İBT Formu 1. Soru İçin Cevabı

Şekil 46'da görüldüğü üzere MÖ4 kodlu matematik öğretmeni, verilen ifadeyi doğrularken bir örnek verdiği görülmektedir. Matematik öğretmeninin bu sorudaki doğrulama seviyesi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğretmenle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Bir tane örnek vererek doğrulamanızı yapmışsınız.

MÖ4: Bunu bildiğim için herhangi üç tek sayı seçtim, topladığımda yine tek yaptı.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde matematik öğretmeninin, verilen ifadenin doğruluğunu bildiği için sadece örnek vermeyi uygun gördüğü ve deneysel argüman kullandığı görülmektedir.

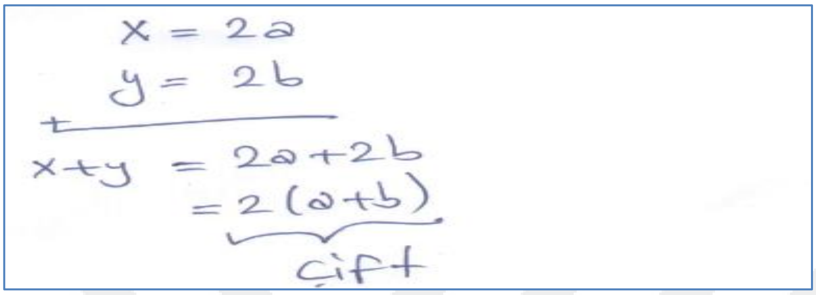
İkinci soruya ait bulgular: Matematik öğretmenlerinin İBT formunda yer alan, "*Herhangi 2 çift sayının toplamı yine çift bir sayıdır,* ifadesini ispatlayanız" şeklindeki ikinci soruya verdikleri cevaplar ve bu cevapların seviyelerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 22'de verilmiştir.

Tablo 22. Matematik Öğretmenlerinin İBT Formu 2. Sorusuna Ait Verileri

	Öğretmen Kodu			
Doğrulama Basamağı	MÖ1	MÖ2	MÖ3	MÖ4
D.A.				×
A.S.A.				
G.A.				
C.B.A.	×	×	×	

Tablo 21 incelendiğinde matematik öğretmenlerinin 3’ü verilen matematiksel ifadeyi doğrulamak için cebirsel-biçimsel argüman, 1’i ise deneysel (empirik) argüman kullanmıştır.

İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, cebirsel-biçimsel argüman kullanarak doğrulama yapan matematik öğretmeni temsili Şekil 47’de verilmiştir.

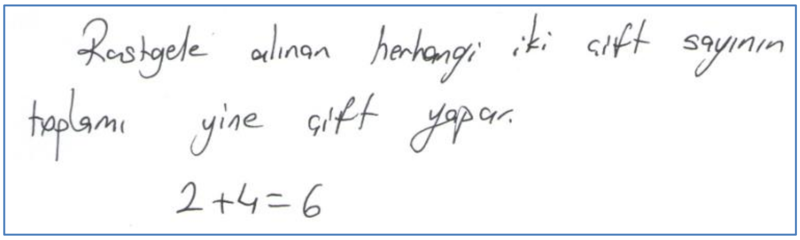


$$\begin{aligned} x &= 2a \\ y &= 2b \\ \hline x+y &= 2a+2b \\ &= \underbrace{2(a+b)}_{\text{çift}} \end{aligned}$$

Şekil 47. MÖ3'ün İBT Formu 2. Soru İçin Cevabı

Şekil 47’de görüldüğü üzere MÖ3 kodlu matematik öğretmeni, verilen ifadeyi doğrularken cebirsel-biçimsel argümanlar kullanarak ispatın genellenebilir olma özelliğine uygun formal bir ispat yapmıştır.

İBT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanarak doğrulama yapan matematik öğretmeni temsili Şekil 48’de verilmiştir.



Rastgele alınan herhangi iki çift sayının toplamı yine çift yapar.

$2+4=6$

Şekil 48. MÖ4'ün İBT Formu 2. Soru İçin Cevabı

Şekil 48’de görüldüğü üzere MÖ4 kodlu matematik öğretmeni, verilen ifadeyi doğrularken birinci soruda olduğu gibi verilen ifadenin doğruluğunu bildiğini bireysel görüşmede belirtmiş ve bu sebeple deneysel argüman kullanarak doğrulama yapmıştır.

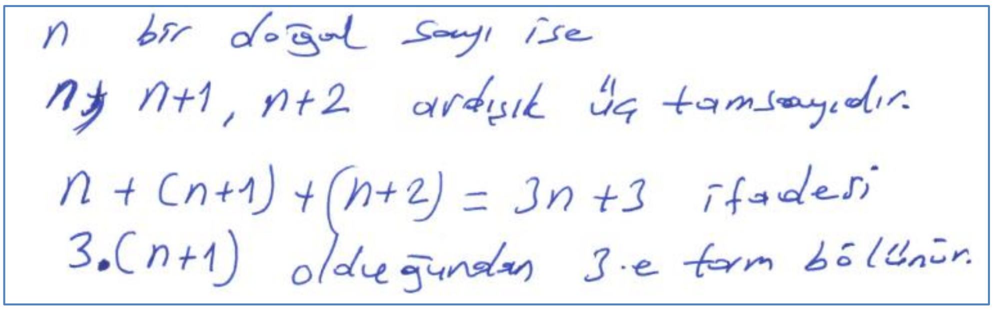
Üçüncü soruya ait bulgular. Matematik öğretmenlerinin İBT formunda yer alan, "*Ardışık 3 tam sayının toplamı daima 3'ün katıdır,* ifadesini ispatlayanız" şeklindeki üçüncü soruya verdikleri cevaplar ve bu cevapların seviyelerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 23'te verilmiştir.

Tablo 23. Matematik Öğretmenlerinin İBT Formu 3. Sorusuna Ait Verileri

	Öğretmen Kodu			
Doğrulama Basamağı	MÖ1	MÖ2	MÖ3	MÖ4
D.A.				×
A.S.A.				
G.A.				
C.B.A.	×	×	×	

Tablo 23 incelendiğinde matematik öğretmenlerinin 3'ü verilen matematiksel ifadeyi doğrulamak için cebirsel-biçimsel argüman, 1'i ise deneysel (empirik) argüman kullanmıştır.

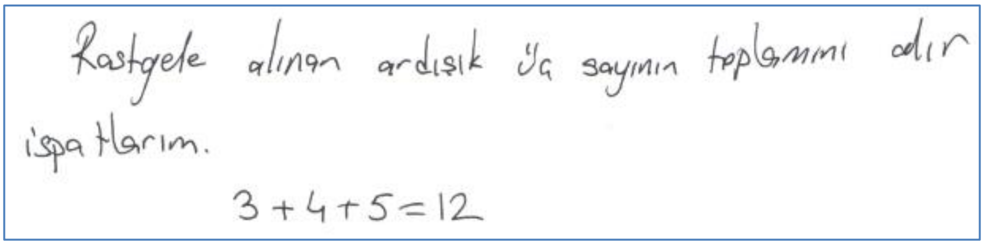
İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, cebirsel-biçimsel argüman kullanarak doğrulama yapan matematik öğretmeni temsili Şekil 49'da verilmiştir.



Şekil 49. MÖ2'nin İBT Formu 3. Soru İçin Cevabı

Şekil 49'da görüldüğü üzere MÖ2 kodlu matematik öğretmeni, verilen ifadeyi doğrularken ispatın genellenebilir olması özelliğine uygun olarak cebirsel-biçimsel argüman kullanmış ve formal bir ispat yapmıştır.

İBT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel kullanarak doğrulama yapan matematik öğretmeni temsili Şekil 50'de verilmiştir.


Rastgele alınan ardısık üç sayının toplamını adır ispatlarım.
$3+4+5=12$

Şekil 50. MÖ4'ün İBT Formu 3. Soru İçin Cevabı

Şekil 50'de görüldüğü üzere MÖ4 kodlu matematik öğretmeni, verilen ifadeyi doğrularken verilen ifadenin doğruluğunu bildiğini belirterek deneysel argüman kullanmayı tercih ettiği görülmektedir.

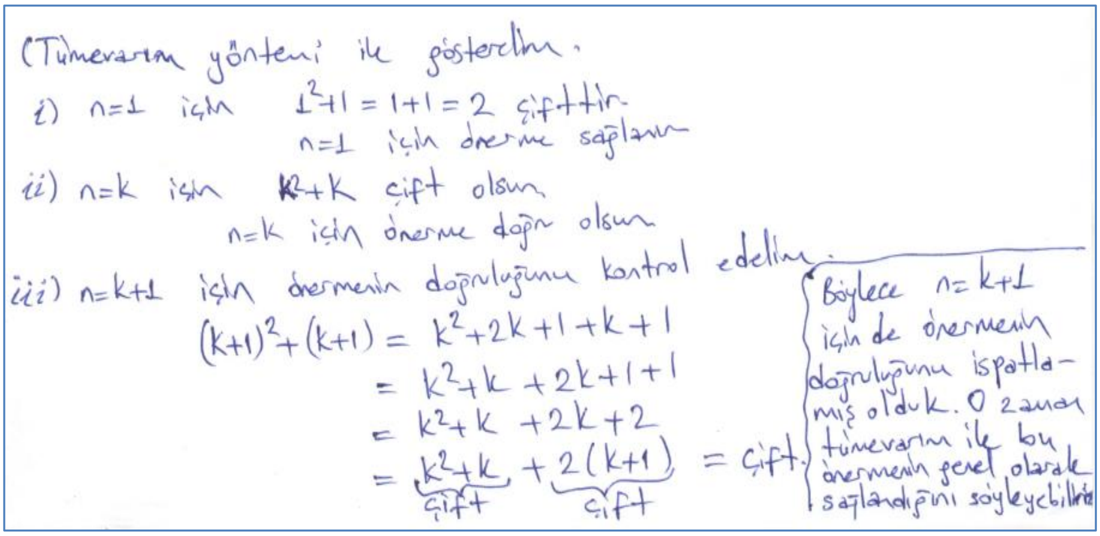
Dördüncü soruya ait bulgular. Matematik öğretmenlerinin İBT formunda yer alan, "n^2+n *çifttir,* ifadesini ispatlayanız" şeklindeki dördüncü soruya verdikleri cevaplar ve bu cevapların seviyelerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 24'te verilmiştir.

Tablo 24. Matematik Öğretmenlerinin İBT Formu 4. Sorusuna Ait Verileri

	Öğretmen Kodu			
Doğrulama Basamağı	MÖ1	MÖ2	MÖ3	MÖ4
D.A.				×
A.S.A.				
G.A.				
C.B.A.	×	×	×	

Tablo 24 incelendiğinde matematik öğretmenlerinin 3'ü verilen matematiksel ifadeyi doğrulamak için cebirsel-biçimsel argüman, 1'i ise deneysel (empirik) argüman kullanmıştır.

İBT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, cebirsel-biçimsel argüman kullanarak doğrulama yapan matematik öğretmeni temsili Şekil 51'de verilmiştir.


(Tümevarım yöntemi ile gösterelim.

i) $n=1$ için $1^2+1=1+1=2$ çifttir.
$n=1$ için önerme sağlanır

ii) $n=k$ için k^2+k çift olsun
$n=k$ için önerme doğru olsun

iii) $n=k+1$ için önermenin doğruluğunu kontrol edelim.

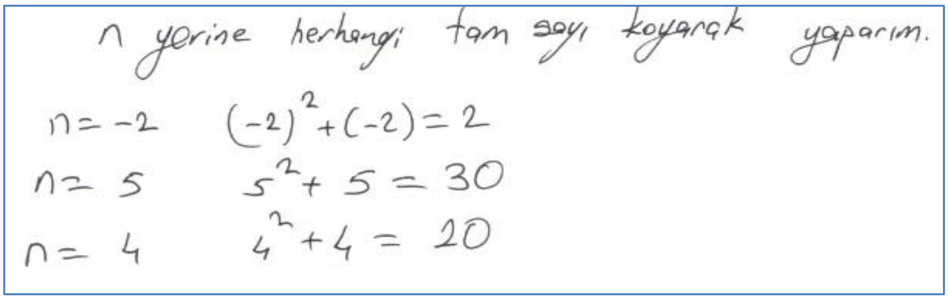
$$\begin{aligned}(k+1)^2+(k+1) &= k^2+2k+1+k+1\\ &= k^2+k+2k+1+1\\ &= k^2+k+2k+2\\ &= \underbrace{k^2+k}_{\text{çift}}+\underbrace{2(k+1)}_{\text{çift}} = \text{çift}\end{aligned}$$

Böylece $n=k+1$ için de önermenin doğruluğunu ispatlamış olduk. O zaman tümevarım ile bu önermenin genel olarak sağlandığını söyleyebiliriz.

Şekil 51. MÖ3'ün İBT Formu 4. Soru İçin Cevabı

Şekil 51'de görüldüğü üzere MÖ3 kodlu matematik öğretmeni, doğrulamasını ispatın genellenebilir olma özelliğine uygun olarak cebirsel-biçimsel argüman kullanıp tümevarım yöntemi ile formal bir ispat yapmıştır.

İBT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrularken, deneysel argüman kullanarak doğrulama yapan matematik öğretmeni temsili Şekil 52'de verilmiştir.


n yerine herhangi tam sayı koyarak yaparım.

$n=-2$ $(-2)^2+(-2)=2$

$n=5$ $5^2+5=30$

$n=4$ $4^2+4=20$

Şekil 52. MÖ4'ün İBT Formu 4. Soru İçin Cevabı

Şekil 52'de görüldüğü üzere MÖ4 kodlu matematik öğretmeni, doğrulamasını yaparken ispatın genellenebilir olma özelliğini dikkate almayıp, verilen önermeyi birden fazla örnekle deneyip deneysel argüman kullanarak yapmıştır.

Matematik Öğretmenlerinin ADT Formuna Verdikleri Cevaplara İlişkin Bulgular

Çalışmanın bu bölümünde, matematik öğretmenlerinin, ADT formunda sunulan deneysel (empirik), anlatımsal-sözel (narrative), görsel ve cebirsel-biçimsel argümanları nasıl değerlendirdiklerini ve hangi tür argümanları daha yüksek ve daha düşük puanla değerlendireceklerini sebepleriyle belirttikleri, ADT formunda yer alan sorulara verdikleri cevaplara ve bireysel görüşmelerde yaptıkları açıklamalara ilişkin bulgu ve açıklamalara yer verilmiştir.

Birinci soruya ait bulgular. Matematik öğretmenlerinin ADT formunda yer alan "*Herhangi 3 tek sayının toplamı yine tektir*, ifadesini ispatlayanız" şeklindeki birinci soru için sunulan deneysel (empirik), anlatımsal-sözel (narrative), görsel ve cebirsel-biçimsel argümanlardan daha yüksek ve daha düşük puan vereceklerini belirttikleri tercihlerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 25'te verilmiştir.

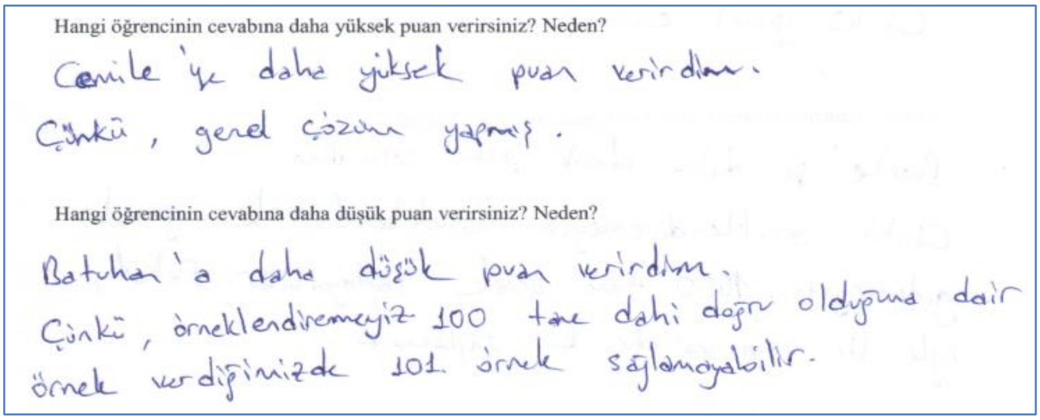
Tablo 25. Matematik Öğretmenlerinin ADT Formu 1. Sorusuna Ait Verileri

	Öğretmen Kodu			
Argüman Türü	MÖ1	MÖ2	MÖ3	MÖ4
D.A.*	–	–	–	
A.S.A.**				–
G.A.***		+		+
C.B.A.****	+		+	

+: Yüksek puan tercihi, −: Düşük puan tercihi , * : Deneysel (empirik) argüman, ** : Anlatımsal-sözel (narrative) argüman, ***: Görsel argüman, **** : Cebirsel-biçimsel argüman

Tablo 25 incelendiğinde matematik öğretmenlerinin, matematiksel doğrulama için kendilerine sunulan argümanlardan farklı yöntemleri tercih ettiği görülmektedir. Öğretmenlerden 2'si en yüksek puan tercihlerini cebirsel-biçimsel argümandan; en düşük puan tercihlerini deneysel argümandan yana kullanacaklarını belirtmişlerdir. Öğretmenlerden 1'i en yüksek puan tercihini görsel argümandan; en düşük puan tercihini deneysel argümandan yana kullanacağını belirtmiştir. Öğretmenlerden 1'i ise en yüksek puan tercihini görsel argümandan; en düşük puan tercihini anlatımsal-sözel argümandan yana kullanacağını belirtmiştir.

ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulayan öğrenci cevaplarından en yüksek puanı cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı cevaba (Cemile'nin cevabı); en düşük puanı ise deneysel argümanın kullanıldığı cevaba (Batuhan'ın cevabı) vereceğini belirten öğretmen temsili Şekil 53'te verilmiştir.


Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Cemile'ye daha yüksek puan verirdim.
Çünkü, genel çözüm yapmış.

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

Batuhan'a daha düşük puan verirdim.
Çünkü, örneklendiremeyiz 100 tane dahi doğru olduğuna dair örnek verdiğimizde 101. örnek sağlamayabilir.

Şekil 53. MÖ3'ün ADT formu 1. Soru İçin Cevabı

Şekil 53'te görüldüğü üzere MÖ3 kodlu matematik öğretmeni, ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması ve ispatlanması için sunulan öğrenci cevaplarından, yüksek puanı cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı Cemile'nin cevabına; düşük puanı ise deneysel argümanın kullanıldığı Batuhan'ın cevabına vereceğini belirtmiştir. Öğretmenin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğretmenle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Cemileye daha yüksek puan vereceğinizi söylemişsiniz. Sebebi nedir?

MÖ3: Çünkü Cemile genel çözüm yapmış. Matematikte örneklerle çözüme gittiğimiz zaman net cevap olmuyor. Genel çözüme gitmek zorundayız. Verdiğimiz yirmi tane örnek doğru olabilir ama yirmi birinci örnekle durum çürütülebilir.

Araştırmacı: Batuhan'ın cevabına en düşük puan vereceğinizi söylemişsiniz. Bunun sebebi nedir?

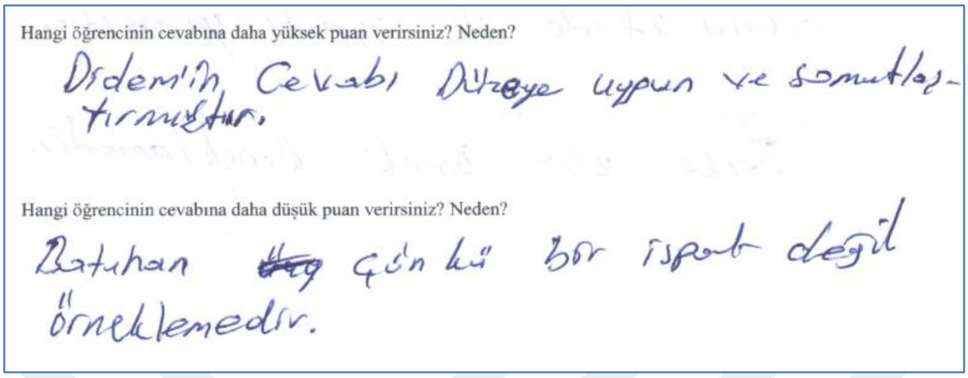
MÖ3: Batuhan direkt örnek yöntemine gitmiş.

Araştırmacı: 3 tane örnek vermiş.

MÖ3: Yeterli değil. Biraz önce belirttiğim gibi sağlamayan bir sayı olduğu takdirde tezimiz çürüyor. Dolayısıyla o sağlamayan bir örnek bulunabilir.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğretmenin, ispatın genellenebilir olması özelliğine vurgu yaptığı ve cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı Cemile'nin cevabına daha yüksek puan vereceği; örneklerin ise genellenebilir olma özelliğine uygun olmağı, kesin sonuç vermediği ve sağlamayan bir sayı bulunabileceği gibi sebeplerden dolayı deneysel argümanın kullanıldığı Batuhan'ın cevabına daha düşük puan vereceği görülmektedir.

ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulayan öğrenci cevaplarından en yüksek puanı görsel argümanın kullanıldığı cevaba (Didem'in cevabı); en düşük puanı ise deneysel argümanın kullanıldığı cevaba (Batuhan'ın cevabı) vereceğini belirten öğretmen temsili Şekil 54'te verilmiştir.


Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Didem'in Cevabı Düzeye uygun ve somutlaş-tırmıştır.

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

Batuhan ~~deg~~ çünkü bir ispat değil örneklemedir.

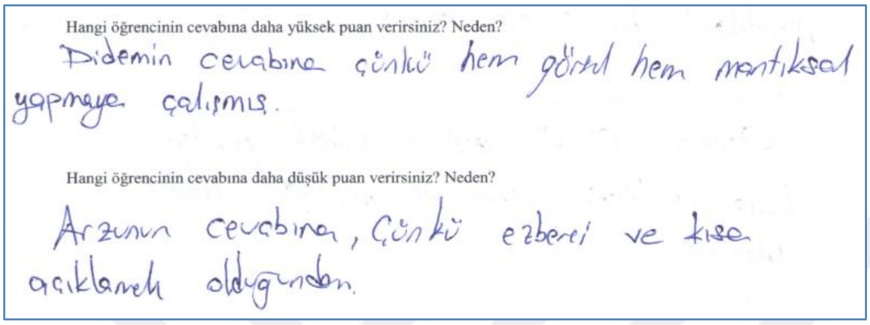
Şekil 54. MÖ2'nin ADT Formu 1. Soru İçin Cevabı

Şekil 54'te görüldüğü üzere MÖ2 kodlu matematik öğretmeni, ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması ve ispatlanması için sunulan öğrenci cevaplarından, yüksek puanı görsel argümanın kullanıldığı Didem'in cevabına; düşük puanı ise deneysel argümanın kullanıldığı Batuhan'ın cevabına vereceğini belirtmiştir. Öğretmenin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğretmenle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

> Araştırmacı: Hangi öğrencinin cevabına yüksek puan verirsiniz diye sorduğumuzda görsel cevaba demişsiniz. Sebebi nedir?
>
> MÖ2: İlköğretim öğrencileri olması anlamında, özellikle 5, 6 ve 7. sınıflarda cebirsel ifadeleri çok vermiyoruz. Yani bu denli ispatlayacak şekilde cebirsel ifade bilmedikleri için çocuğun bunu şekille ifade etmesi çok güzel bir şey. Şekille somutlaştırması.
>
> Araştırmacı: Deneysel yönteme de en düşük puanı veririm demişsiniz. Sebebi nedir?
>
> MÖ2: Çünkü bu bir ispat değildir. Bu örnek göstermedir. Bu teoreme uygun birkaç tane örnek göstermeler bir ispat değildir.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğretmenin, verilen matematiksel ifadeyi doğrularken şekille somutlaştırmanın öğrenci seviyesine uygun bir ispat oluşturması gibi gerekçelerle görsel argümanın kullanıldığı Didem'in cevabına daha yüksek puan vereceği; örnek vermenin ispat olmadığını belirterek ispatın genellenebilir olma özelliğine olması gerektiğine vurgu yaptığı ve bu sebeple deneysel argümanın kullanıldığı Batuhan'ın cevabına daha düşük puan vereceği görülmektedir. Öğretmenin cebirsel-biçimsel argümanları tercih etmemesinin, seviyeye uygun olmadığını düşünmesinden kaynaklandığı bireysel görüşmeden çıkarılan diğer bir bulgudur.

ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulayan öğrenci cevaplarından en yüksek puanı görsel argümanın kullanıldığı cevaba (Didem'in cevabı); en düşük puanı ise anlatımsal-sözel argümanın kullanıldığı cevaba (Arzu'nun cevabı) vereceğini belirten öğretmen temsili Şekil 55'te verilmiştir.


Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Didemin cevabına çünkü hem görsel hem mantıksal yapmaya çalışmış.

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

Arzunun cevabına, Çünkü ezberci ve kısa açıklamalı olduğundan.

Şekil 55. MÖ4'ün ADT Formu 1. Soru İçin Cevabı

Şekil 55'te görüldüğü üzere MÖ4 kodlu matematik öğretmeni, ADT formunun 1. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması ve ispatlanması için sunulan öğrenci cevaplarından, yüksek puanı görsel argümanın kullanıldığı Didem'in cevabına; düşük puanı ise anlatımsal-sözel argümanın kullanıldığı Arzu'nun cevabına vereceğini belirtmiştir. Öğretmenin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğretmenle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

> Araştırmacı: En yüksek puanı Didem'e yani görsel cevaba vereceğinizi söylemişsiniz. Bunun sebebi nedir?
>
> MÖ4: Çünkü Didem'in cevabı hem görsel hem de mantıksal eşleşmeye uyduğu için, bende öğrencilere bu yöntemi tercih ederim genelde ve bu şekilde anlatılmasının zihinde daha kalıcı olduğunu düşünürüm.
>
> Araştırmacı: Arzunun cevabına neden en düşük puanı veririm dediniz?
>
> MÖ4: Çünkü Arzu'nun cevabı çok klasik, çok bilindik ezberci bir açıklama olduğu için hoşuma gitmedi. Tercih etmediğim, kullanmadığım bir yöntem.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğretmenin, görsel argümanları daha mantıksal, akılda kalıcı bulduğu ve kendi anlatım yöntemine de benzediği gibi sebeplerden dolayı bu argümanları kullanan Didem'in cevabına daha yüksek puan vereceğini; ezberci ve klasik bulduğu anlatımsal-sözel argümanın kullanıldığı Arzu'nun cevabına ise daha düşük puan vereceğini belirttiği görülmektedir. MÖ4 kodlu matematik öğretmeninin İBT formunda aynı soruyu doğrularken deneysel argüman kullandığı bilinmektedir (Bkz. Tablo 21). Fakat bu yöntemi en yüksek puanla değerlendirmeyeceği dikkat çekicidir.

İkinci soruya ait bulgular: Matematik öğretmenlerinin ADT formunda yer alan "*Herhangi 2 çift sayının toplamı yine çift bir sayıdır,* ifadesini ispatlayanız" şeklindeki ikinci soru için sunulan deneysel (empirik), anlatımsal-sözel (narrative), görsel ve cebirsel-biçimsel argümanlardan daha yüksek ve daha düşük puan vereceklerini belirttikleri tercihlerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 26'da verilmiştir.

Tablo 26. Matematik Öğretmenlerinin ADT Formu 2. Sorusuna Ait Verileri

	Öğretmen Kodu			
Argüman Türü	MÖ1	MÖ2	MÖ3	MÖ4
D.A.	−	−	−	
A.S.A.				
G.A.				+
C.B.A.	+	+	+	−

+: Yüksek puan tercihi, −: Düşük puan tercihi

Tablo 26 incelendiğinde matematik öğretmenlerinin, matematiksel doğrulama için kendilerine sunulan argümanlardan farklı yöntemleri tercih ettiği görülmektedir. Öğretmenlerden 3'ü en yüksek puan tercihlerini cebirsel-biçimsel argümandan; en düşük puan tercihlerini deneysel argümandan yana kullanacaklarını belirtmişlerdir. Öğretmenlerden 1'i ise en yüksek puan tercihini görsel argümandan; en düşük puan tercihini cebirsel-biçimsel argümandan yana kullanacağını belirtmiştir.

ADT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulayan öğrenci cevaplarından, en yüksek puanı cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı cevaba (Canan'ın cevabı); en düşük puanı deneysel argümanın kullanıldığı cevaba (Berke'nin cevabı) vereceğini belirten öğretmen temsili Şekil 56'da verilmiştir.

Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Canan'ın cevapına en yüksek puanı verirdim.
Bütün tam sayıları kapsayan bir ispat olduğu için en yüksek puanı verirdim.

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

Berke'nin cevabına en düşük puanı verirdim.
Bazı tam sayı değerleri için geçerli bir ispat olduğu için en düşük puanı verirdim.

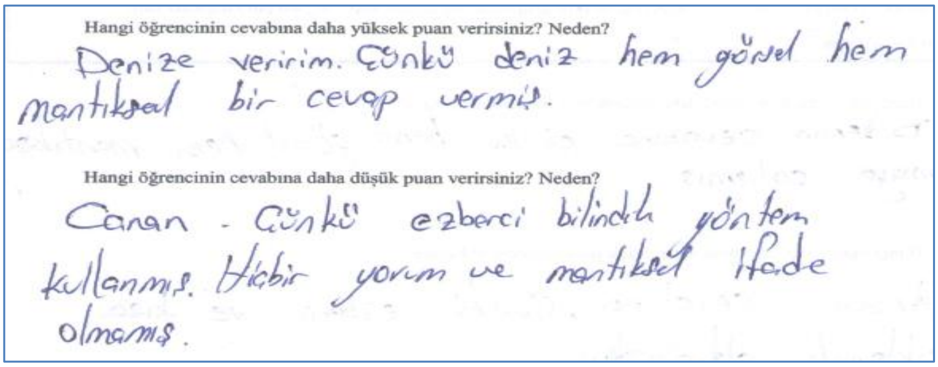
Şekil 56. MÖ1'in ADT formu 2. Soru İçin Cevabı

Şekil 56'da görüldüğü üzere MÖ1 kodlu matematik öğretmeni, ADT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için sunulan öğrenci cevaplarından, yüksek puanı cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı Canan'ın cevabına; düşük puanı ise deneysel argümanın kullanıldığı Berke'nin cevabına vereceğini belirtmiştir. Öğretmenin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğretmenle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

> Araştırmacı: Canan'ın cevabına en yüksek puanı veririm demişsiniz. Sebebi nedir?
>
> MÖ1: Canan'ın cevabı bütün tam sayılar için geçerli bir ispat olduğu için. Cebirsel ifadeleri seçip bütün kullanacağımız tam sayılar için geçerli bir ispat yapmış.
>
> Araştırmacı: En düşük puanı Berke'nin cevabına vermişsiniz. Bunun sebebi nedir?
>
> MÖ1: Evet. Deneysel yöntemi seçen öğrenci, sadece seçtiği tam sayılar için ispat yapmış oldu. Aksine bir tek örnek bile gösterilmiş olsa onun ispatını çürüteceği için genel bir ispat yöntemi olmamış.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğretmenin, cebirsel-biçimsel argümanların kullanıldığı cevabın bütün tam sayılar için geçerli olduğunu belirterek, ispatın genellenebilir olması özelliğine vurgu yaptığı ve bu argümanın kullanıldığı Canan'ın cevabına daha yüksek puan vereceği; örnek yönteminde ise sadece seçilen sayı için doğru olduğu ve aksine bir örnek olma ihtimalini belirterek deneysel argümanın kullanıldığı Berke'nin cevabına daha düşük puan vereceği görülmektedir.

ADT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulayan öğrenci cevaplarından, en yüksek puanı görsel argümanın kullanıldığı cevaba (Deniz'in cevabı); en düşük puanı cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı cevaba (Canan'ın cevabı) vereceğini belirten öğretmen temsili Şekil 57'de verilmiştir.


Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Denize veririm. Çünkü deniz hem görsel hem mantıksal bir cevap vermiş.

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

Canan - Çünkü ezberci bilindik yöntem kullanmış. Hiçbir yorum ve mantıksal ifade olmamış.

Şekil 57. MÖ4'ün ADT Formu 2. Soru İçin Cevabı

Şekil 57'de görüldüğü üzere MÖ4 kodlu matematik öğretmeni, ADT formunun 2. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için sunulan öğrenci cevaplarından, yüksek puanı görsel argümanın kullanıldığı Deniz'in cevabına; düşük puanı ise cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı Canan'ın cevabına vereceğini belirtmiştir. Öğretmenin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğretmenle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

Araştırmacı: Görsel yönteme en yüksek vereceğinizi söylemişsiniz.

MÖ4: Görsel akılda kaldığı için görseli tercih ediyorum. Ama sevmediğim şey ise cebirsel ve sözel olan Canan'ın ve Ahmet'in cevabı. Formül üzerine hesaplamalar yapılmış sanki. Formüllerinde bir mantığı olduğu için hep mantıksal ve görsel düşünüyorum.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğretmenin, verilen matematiksel ifadeyi akılda kalıcı olarak belirttiği görsel argümanı kullanan Deniz'in cevabına daha yüksek puan vereceğini; cebirsel argümanların kullandığı cevabın formüller üzerine hesaplama yaptığını belirterek bu argümanların kullanıldığı Canan'ın cevabına daha düşük puan vereceğini belirttiği görülmektedir.

Üçüncü soruya ait bulgular. Matematik öğretmenlerinin ADT formunda yer alan "*Ardışık 3 tam sayının toplamı daima 3'ün katıdır,* ifadesini ispatlayanız" şeklindeki üçüncü soru için sunulan deneysel (empirik), anlatımsal-sözel (narrative), görsel ve cebirsel-biçimsel argümanlardan daha yüksek ve daha düşük puan vereceklerini belirttikleri tercihlerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 27'ee verilmiştir.

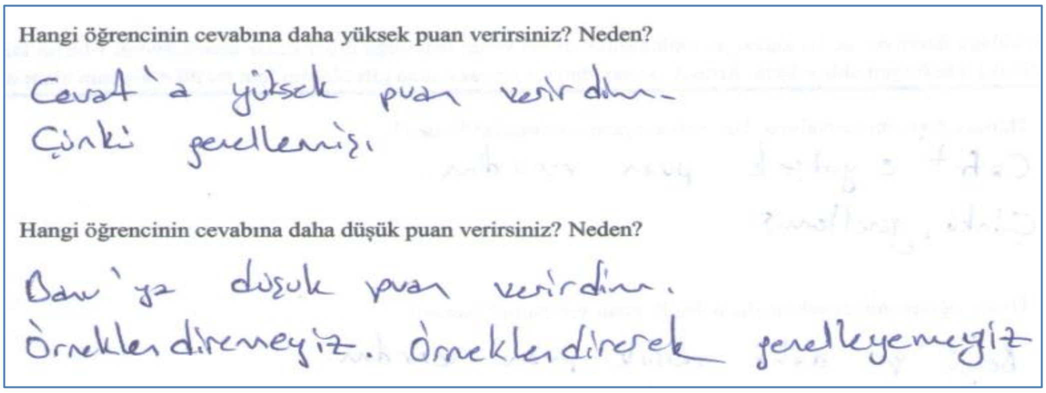
Tablo 27. Matematik Öğretmenlerinin ADT Formu 3. Sorusuna Ait Verileri

	Öğretmen Kodu			
Argüman Türü	MÖ1	MÖ2	MÖ3	MÖ4
D.A.	−	−	−	
A.S.A.				−
G.A.		+		+
C.B.A.	+		+	

+: Yüksek puan tercihi, −: Düşük puan tercihi

Tablo 23 incelendiğinde matematik öğretmenlerinin, matematiksel doğrulama için kendilerine sunulan argümanlardan farklı yöntemleri tercih ettiği görülmektedir. Öğretmenlerden 2'si en yüksek puan tercihlerini cebirsel-biçimsel argümandan; en düşük puan tercihlerini deneysel argümandan yana kullanacaklarını belirtmişlerdir. Öğretmenlerden 1'i en yüksek puan tercihini görsel argümandan; en düşük puan tercihini deneysel argümandan yana kullanacağını belirtmiştir. Öğretmenlerden 1'i ise en yüksek puan tercihini görsel argümandan en düşük puan tercihini anlatımsal-sözel argümandan yana kullanacağını belirtmiştir.

ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulayan öğrenci cevaplarından, en yüksek puanı cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı cevaba (Cevat'ın cevabı); en düşük puanı deneysel argümanın kullanıldığı cevaba (Banu'nun cevabı) vereceğini belirten öğretmen temsili Şekil 58'de verilmiştir.


Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Cevat'a yüksek puan verirdim.
Çünkü genellemiş,

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

Banu'ya düşük puan verirdim.
Örnekler diremeyiz. Örnekler direrek genelleyemeyiz

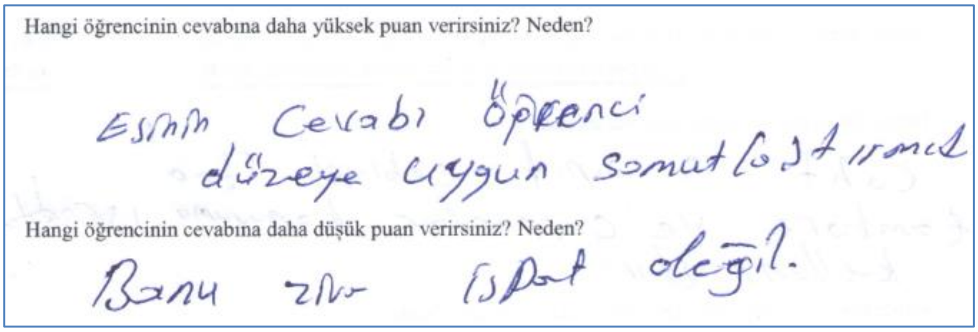
Şekil 58. MÖ3'ün ADT Formu 3. Soru İçin Cevabı

Şekil 58'de görüldüğü üzere MÖ3 kodlu matematik öğretmeni, ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için sunulan öğrenci cevaplarından, yüksek puanı cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı Cevat'ın cevabına; düşük puanı ise deneysel argümanın kullanıldığı Banu'nun cevabına vereceğini belirtmiştir. Öğretmenin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğretmenle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

> Araştırmacı: Cebirsel argümanın kullanıldığı cevabı seçmişsiniz en yüksek puan için. Sebebi nedir?
>
> MÖ3: Çünkü genel çözüm yapmış. Genel çözüm verdiğiniz bütün örnekler için sağlıyor anlamı teşkil ediyor.
>
> Araştırmacı: Peki hocam görsel yöntemler hakkında görüşünüz nedir?
>
> MÖ3: Evet onları da inceledim. Banu'nun cevabı (deneysel) en düşük puan alacak yöntem ama görsel dikkatimi çekti ve o da güzel, doyurucu. Öğrenci görseli daha iyi anlayacak ama bizim beklediğimiz cebirsel yöntem.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğretmenin, ispatın genellenebilir olma özelliğine değindiği ve cebirsel-biçimsel argümanların kullanıldığı Cevat'ın cevabına daha yüksek puan vereceğini belirtmiştir. Örneklerden genelleme yapılmayacağını belirterek deneysel argümanın kullanıldığı Banu'nun cevabına en düşük puanı vereceğini belirtmiştir. Ayrıca görsel argüman kullanılmasının öğrencinin anlamasına olumlu katkı yaptığını belirtmiş fakat beklentinin cebirsel yöntemler olduğunu belirtmiştir.

ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulayan öğrenci cevaplarından, en yüksek puanı görsel argümanın kullanıldığı cevaba (Esin'in cevabı); en düşük puanı deneysel argümanın kullanıldığı cevaba (Banu'nun cevabı) vereceğini belirten öğretmen temsili Şekil 59'da verilmiştir.


Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Esinin Cevabı öğrenci düzeye uygun somutlaştırma

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

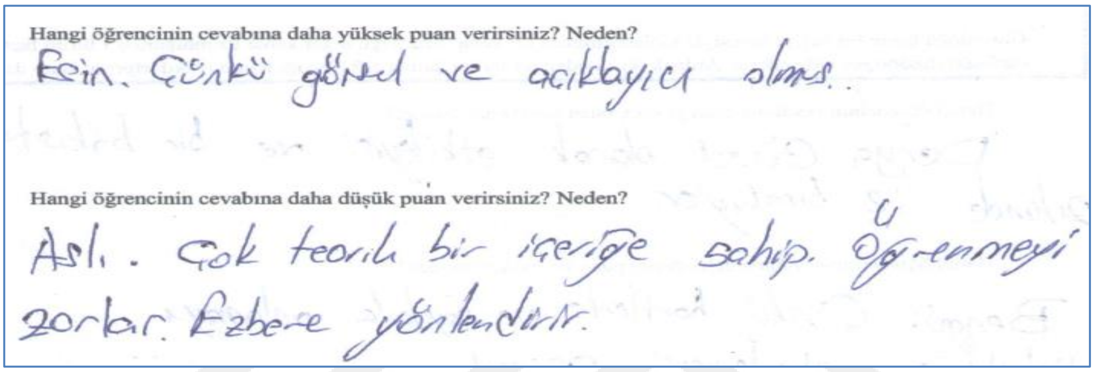
Banu nın ispat değil.

Şekil 59. MÖ2'nin ADT Formu 3. Soru İçin Cevabı

Şekil 59'da görüldüğü üzere MÖ2 kodlu matematik öğretmeni, ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması ve ispatlanması için sunulan öğrenci cevaplarından yüksek puanı görsel argümanın kullanıldığı Esin'in cevabına;

düşük puanı ise deneysel argümanın kullanıldığı Banu'nun cevabına vereceğini belirtmiştir. MÖ2 kodlu matematik öğretmeni, görsel argümanın düzeye uygun somutlaştırma yapmış olmasından dolayı yüksek puan vereceğini, deneysel argümana ise ispat olmamasından dolayı düşük puan vereceğini belirtmiştir.

ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulayan öğrenci cevaplarından, en yüksek puanı görsel argümanın kullanıldığı cevaba (Esin'in cevabı); en düşük puanı anlatımsal-sözel argümanın kullanıldığı cevaba (Aslı'nın cevabı) vereceğini belirten öğretmen temsili Şekil 60'ta verilmiştir.


Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Esin. Çünkü görsel ve açıklayıcı olmuş.

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

Aslı. Çok teorik bir içeriğe sahip. Öğrenmeyi zorlar. Ezbere yönlendirir.

Şekil 60. MÖ4'ün ADT Formu 3. Soru İçin Cevabı

Şekil 60'ta görüldüğü üzere MÖ4 kodlu matematik öğretmeni, ADT formunun 3. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için sunulan öğrenci cevaplarından, yüksek puanı görsel argümanın kullanıldığı Esin'in cevabına; düşük puanı ise anlatımsal-sözel argümanın kullanıldığı Aslı'nın cevabına vereceğini belirtmiştir. Görsel argümana açıklayıcı olmasından dolayı yüksek puan vereceğini, anlatımsal-sözel argümana ise teorik bilgiler içermesi ve ezbere yönlendireceği gibi sebeplerden dolayı düşük puan vereceğini belirttiği görülmektedir.

Dördüncü soruya ait bulgular. Matematik öğretmenlerinin ADT formunda yer alan "$\boldsymbol{n^2+n}$ çifttir, ifadesini ispatlayanız" şeklindeki dördüncü soru için sunulan deneysel (empirik), anlatımsal-sözel (narrative), görsel ve cebirsel-biçimsel argümanlardan daha yüksek ve daha düşük puan vereceklerini belirttikleri tercihlerine dair bilgi ve açıklamalar Tablo 28'de verilmiştir.

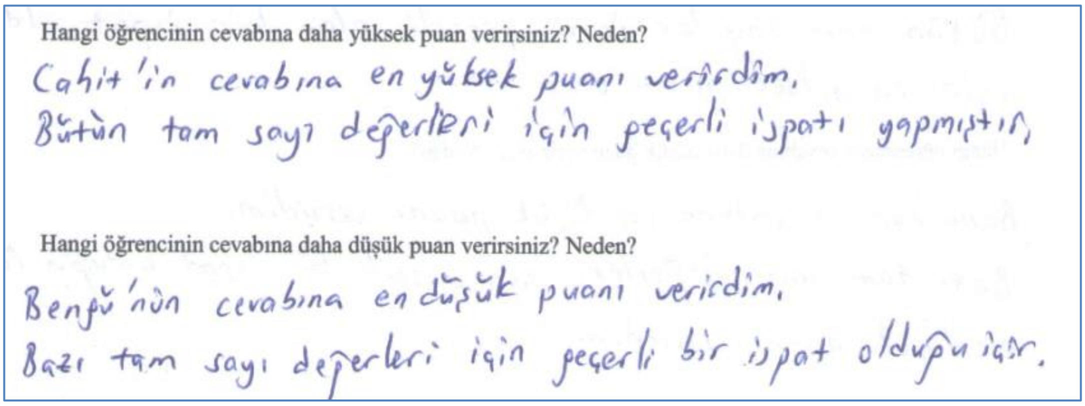
Tablo 28. Matematik Öğretmenlerinin ADT Formu 4. Sorusuna Ait Verileri

	Öğretmen Kodu			
Argüman Türü	MÖ1	MÖ2	MÖ3	MÖ4
D.A.	–	–	–	–
A.S.A.				
G.A.				+
C.B.A.	+	+	+	

+: Yüksek puan tercihi, −: Düşük puan tercihi

Tablo 28 incelendiğinde matematik öğretmenlerinin, matematiksel doğrulama için kendilerine sunulan argümanlardan farklı yöntemleri tercih ettiği görülmektedir. Öğretmenlerden 3'ü en yüksek puan tercihlerini cebirsel-biçimsel argümandan; en düşük puan tercihlerini deneysel argümandan yana kullanacaklarını belirtmişlerdir. Öğretmenlerden 1'i ise en yüksek puan tercihini görsel argümandan; en düşük puan tercihini deneysel argümandan yana kullanacağını belirtmiştir.

ADT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulayan öğrenci cevaplarından, en yüksek puanı cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı cevaba (Cahit'in cevabı); en düşük puanı deneysel argümanın kullanıldığı cevaba (Bengü'nün cevabı) vereceğini belirten öğretmen temsili Şekil 61'de verilmiştir.


Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Cahit'in cevabına en yüksek puanı verirdim. Bütün tam sayı değerleri için geçerli ispatı yapmıştır.

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

Bengü'nün cevabına en düşük puanı verirdim. Bazı tam sayı değerleri için geçerli bir ispat olduğu için.

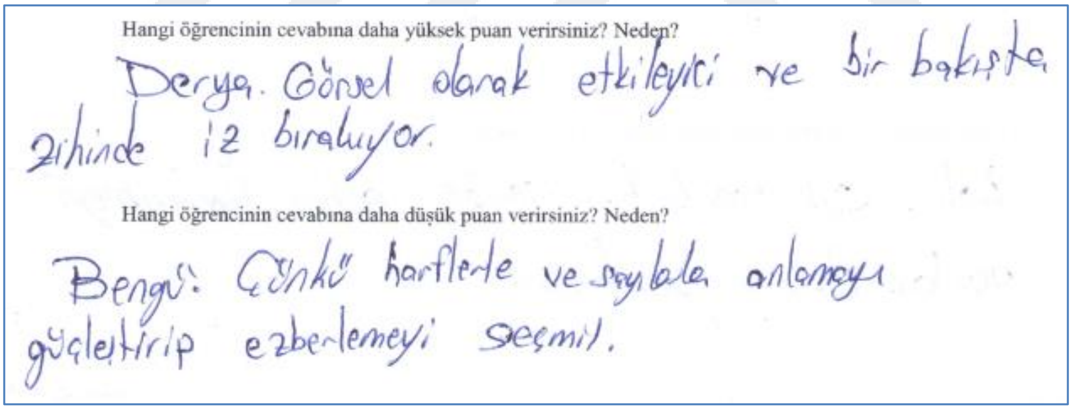
Şekil 61. MÖ1'in ADT formu 4. Soru İçin Cevabı

Şekil 61'de görüldüğü üzere MÖ1 kodlu matematik öğretmeni, ADT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için sunulan öğrenci cevaplarından, yüksek puanı cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı Cahit'in cevabına; düşük puanı ise deneysel argümanın kullanıldığı Bengü'nün cevabına vereceğini belirtmiştir. Öğretmenin bu sorudaki tercihi hakkında, daha ayrıntılı bilgi elde edilebilmesi için öğretmenle yapılan bireysel görüşmeden bir kesit sunulmuştur.

> Araştırmacı: Cahit'in cevabına en yüksek puan vereceğinizi ve deneysel yönteme yani Bengü'nün cevabına en düşük puan vereceğinizi söylemişsiniz. Sebebi nedir?
>
> MÖ1: Bengü sadece 3'ü kullanmış. Çift sayı olsaydı ne olurdu? Veya negatif sayılarda var. O yüzden yine Cahit'in cevabı en iyi cevaptı. Dediğim gibi Derya'nın cevabı da (görsel argüman) seçilebilecek bir cevap. Ama yine de en geneli cebirsel.

Yukarıda verilen görüşme kesiti incelendiğinde öğretmenin, cebirsel ifadelerle daha geçerli ispat yapıldığını belirtip cebirsel-biçimsel argümanların kullanıldığı Cahit'in cevabına daha yüksek puan vereceği; her durum için geçerli olmayacağını düşündüğü deneysel argümanın kullanıldığı Bengü'nün cevabına daha düşük puan vereceği görülmektedir.

ADT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadeyi doğrulayan öğrenci cevaplarından, en yüksek puanı görsel argümanın kullanıldığı cevaba (Derya'nın cevabı); en düşük puanı deneysel argümanın kullanıldığı cevaba (Bengü'nün cevabı) vereceğini belirten öğretmen temsili Şekil 62'de verilmiştir.


Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?
Derya. Görsel olarak etkileyici ve bir bakışta zihinde iz bırakıyor.
Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?
Bengü: Çünkü harflerle ve sayılarla anlamayı güçleştirip ezberlemeyi seçmiş.

Şekil 62. MÖ4'in ADT Formu 4. Soru İçin Cevabı

Şekil 62'de görüldüğü üzere MÖ4 kodlu matematik öğretmeni, ADT formunun 4. sorusunda yer alan matematiksel ifadenin doğrulanması için sunulan öğrenci cevaplarından, yüksek puanı görsel argümanın kullanıldığı Deniz'in cevabına; düşük puanı ise deneysel argümanın kullanıldığı Bengü'nün cevabına vereceğini belirtmiştir. Görsel argümana zihinde iz bırakacak etkileyici bir cevap olmasından dolayı yüksek puan vereceğini, deneysel argümanı ise ezberci bulduğunu düşük puan vereceğini belirtmektedir. MÖ4 kodlu matematik öğretmeni İBT formunda aynı ifadeyi deneysel argüman kullanarak doğrulamış fakat burada deneysel argüman kullanan cevaba en düşük puan vereceğini belirtmiştir.

Matematik Öğretmenlerinin İBT ve ADT Formlarına Verdikleri Yanıtlara İlişkin Bulguların Sentezi

Çalışmanın bu bölümünde, matematik öğretmenlerinin İBT formunda ortaya koydukları doğrulama yöntemleri ile ADT formunda sunulan argümanlardan hangisini daha fazla puanla değerlendireceklerine dair tercihleri karşılaştırılmıştır. Tüm matematik öğretmenlerinin İBT ve ADT formlarına verdikleri cevaplar bir araya getirilmiş ve Tablo 29 hazırlanmıştır.

Tablo 29. Matematik Öğretmenlerinin İspatlama Becerilerinin ve Argüman Tercihlerinin Karşılaştırılması

		ADT Formundaki Tercihler	
		G.A.** (N=6)	C.B.A.*** (N=10)
İBT Formundaki Cevaplar	D.A.* (N=4)	4	-
	C.B.A.*** (N=12)	2	8

* : Deneysel (empirik) argüman, **: Görsel argüman, *** : Cebirsel-biçimsel argüman

Tablo 26 incelendiğinde matematik öğretmenlerinin, İBT formundaki sorulara doğrulama yöntemi olarak deneysel argümanları toplamda 4 defa kullandıkları görülmektedir. Deneysel argümanın kullanıldığı bu 4 cevabın, ADT formunda tamamının görsel argümanları daha yüksek puanla değerlendirme yönünde tercih ettiği görülmektedir. Matematik öğretmenlerinin İBT formundaki sorulara doğrulama yöntemi olarak cebirsel-biçimsel argümanları toplamda 12 defa kullanıldıkları görülmektedir. Cebirsel-biçimsel argümanın kullanıldığı bu 12 cevabın, ADT formunda; 8'i yine cebirsel-biçimsel argümanları ve 2'si ise görsel argümanları daha yüksek puanla değerlendirme yönünde tercih ettiği görülmektedir.

Öğrencilerin ve Matematik Öğretmenlerinin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerilerinin Karşılaştırılmasından Elde Edilen Bulgular

Bu bölümde öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerine yönelik önceki bölümlerde verilen bulgular karşılaştırılacaktır. Matematik öğretmenlerinin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin matematik eğitiminden sorumlu oldukları öğrencilerin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin benzerliğine dair bulgulara yer verilecektir. Bunun için önce öğrencilere ait bulgular özetlenecek sonra matematik öğretmenlerine ait bulgular özetlenecek ve daha sonra bu iki bulgular birbirleriyle karşılaştırılacaktır.

Öğrencilerin İBT ve ADT formlarındaki tüm sorulara verdikleri cevaplara ait bulgular Tablo 30'da özetlenmiştir.

Tablo 30. Öğrencilerin İBT ve ADT Formlarına Verdikleri Cevaplara Ait Bulguların Özeti

	1. Önerme		2. Önerme		3. Önerme		4. Önerme	
	İBT	ADT	İBT	ADT	İBT	ADT	İBT	ADT
7SÖ1	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.
7SÖ2	D.A.	G.A.	D.A.	G.A.	D.A.	C.B.A.	D.A.	G.A.
7SÖ3	D.A.	A.S.A.	C.B.A.	C.B.A.	C.B.A.	A.S.A.	D.A.	A.S.A.
7SÖ4	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.
7SÖ5	A.S.A.	A.S.A.	A.S.A.	G.A.	A.S.A.	G.A.	A.S.A.	A.S.A.
7SÖ6	A.S.A.	A.S.A.	C.B.A.	C.B.A.	C.B.A.	A.S.A.	A.S.A.	A.S.A.
8SÖ1	D.A.	C.B.A.	D.A.	A.S.A.	D.A.	G.A.	D.A.	D.A.
8SÖ2	D.A.	A.S.A.	D.A.	A.S.A.	D.A.	G.A.	D.A.	G.A.
8SÖ3	D.A.	G.A.	A.S.A.	A.S.A.	D.A.	G.A.	A.S.A.	A.S.A.
8SÖ4	A.S.A.	A.S.A.	A.S.A.	C.B.A.	A.S.A.	A.S.A.	A.S.A	A.S.A.
8SÖ5	A.S.A.	C.B.A.	A.S.A.	C.B.A.	A.S.A.	C.B.A.	A.S.A.	C.B.A.
8SÖ6	Diğer	C.B.A.	C.B.A.	C.B.A.	C.B.A.	C.B.A.	D.A.	G.A.

Tablo 30 incelendiğinde İBT formunda yer alan tüm önermeleri doğrularken, 7SÖ1, 7SÖ2, 7SÖ4, 8SÖ1 ve 8SÖ2 kodlu öğrencilerin deneysel (empirik) argüman; 7SÖ5, 8SÖ4 ve 8SÖ5 kodlu öğrencilerin anlatımsal-sözel (narrative) argüman kullandıkları görülmektedir. Geriye kalan 7SÖ3,7SÖ6, 8SÖ3 ve 8SÖ6 kodlu öğrencilerin ise doğrulama yöntemlerinin değişkenlik gösterdiği görülmektedir. ADT formundaki argüman tercihlerinde, 7SÖ1 ve 7SÖ4 kodlu öğrencilerin deneysel argümanları; 8SÖ5 kodlu öğrencinin cebirsel-biçimsel argümanları ikna edici buldukları görülmektedir. Diğer öğrencilerin argüman tercihlerinin ise değişkenlik gösterdiği görülmektedir. Ayrıca 7SÖ1 ve 7SÖ4 kodlu öğrencilerin hem ispatlama yöntemi olarak hem de argüman tercihi olarak deneysel argümanları tercih ettiği görülmektedir.

Matematik öğretmenlerinin İBT ve ADT formlarındaki tüm sorulara verdikleri cevaplara ait bulgular Tablo 31'de özetlenmiştir.

Tablo 31. Matematik Öğretmenlerinin İBT ve ADT Formlarına Verdikleri Cevaplara Ait Bulguların Özeti

	1. Önerme		2. Önerme		3. Önerme		4. Önerme	
	İBT	ADT	İBT	ADT	İBT	ADT	İBT	ADT
MÖ1	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.
MÖ2	C.B.A.	+: G.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: G.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.
MÖ3	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.
MÖ4	D.A.	+: G.A. −:A.S.A.	D.A.	+: G.A. −: C.B.A.	D.A.	+: G.A. −: A.S.A.	D.A.	+: G.A. −: D.A.

+: Yüksek puan tercihleri, −: Düşük puan tercihleri

Tablo 31 incelendiğinde İBT formunda yer alan tüm önermeleri doğrularken, 8SÖ1, 8SÖ2 ve 8SÖ3 kodlu matematik öğretmenlerinin cebirsel-biçimsel argüman; 8SÖ4 kodlu öğretmenin ise deneysel argüman kullandıkları görülmektedir. ADT formundaki argüman tercihlerinde, MÖ1 ve MÖ3 kodlu matematik öğretmenlerinin cebirsel-biçimsel argümanları yüksek puanla değerlendirecekleri, deneysel argümanları düşük puanla değerlendirecekleri görülmektedir. MÖ2 ve MÖ4 kodlu matematik öğretmenlerinin argüman tercihlerinin ise değişkenlik gösterdiği görülmektedir.

MÖ1 Kodlu Matematik Öğretmeni ve Öğrencilerinin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerileri

MÖ1 kodlu matematik öğretmeni 7SÖ2, 7SÖ3, 7SÖ4 ve 8SÖ4 kodlu öğrencilerin matematik eğitiminden sorumludur (Bkz. Tablo 7). MÖ1 kodlu matematik öğretmeninin ve matematik eğitiminden sorumlu olduğu öğrencilerin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin karşılaştırılması için İBT ve ADT formuna verdikleri yanıtlara ilişkin bulgular Tablo 32'de verilmiştir.

Tablo 32. MÖ1 Kodlu Öğretmen ve Öğrencilerinin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerilerinin Karşılaştırılması

	1. Önerme		2. Önerme		3. Önerme		4. Önerme	
Kod	İBT	ADT	İBT	ADT	İBT	ADT	İBT	ADT
MÖ1	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.
7SÖ2	D.A.	G.A.	D.A.	G.A.	D.A.	C.B.A.	D.A.	G.A.
7SÖ3	D.A.	A.S.A.	C.B.A.	C.B.A.	C.B.A.	A.S.A.	D.A.	A.S.A.
7SÖ4	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.
8SÖ4	A.S.A.	A.S.A.	A.S.A.	C.B.A.	A.S.A.	A.S.A.	A.S.A	A.S.A.

Tablo 32 incelendiğinde MÖ1 kodlu matematik öğretmeninin ispat oluşturma sürecinde (İBT formunda) tüm önermelerde cebirsel-biçimsel argüman kullandığı görülmektedir. Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 7SÖ2 ve 7SÖ4 kodlu öğrencilerin ispat oluşturma sürecinde tüm önermelerde deneysel argüman, 8SÖ4 kodlu öğrencinin tüm önermelerde anlatımsal-sözel argüman ve 7SÖ3 kodlu öğrencinin ise iki önermede deneysel argüman diğer iki önermede cebirsel-biçimsel argüman kullandığı görülmektedir. MÖ1 kodlu matematik öğretmeninin argüman değerlendirme sürecinde (ADT formunda) tüm önermelerde cebirsel-biçimsel argümanları yüksek puanla, deneysel argümanları ise düşük puanla değerlendireceği görülmektedir. Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 7SÖ2 kodlu öğrencinin argüman değerlendirme sürecinde üç önermede görsel argümanı bir önermede cebirsel-biçimsel argümanı, 7SÖ3 ve 8SÖ4 kodlu öğrencilerin üç önermede anlatımsal-sözel argümanı bir önermede cebirsel-biçimsel argümanı ve 7SÖ4 kodlu öğrencinin ise tüm önermelerde deneysel argümanı ikna edici bulduğu görülmektedir.

MÖ2 Kodlu Matematik Öğretmeni ve Öğrencilerinin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerileri

MÖ2 kodlu matematik öğretmeni 7SÖ5, 7SÖ6 ve 8SÖ6 kodlu öğrencilerin matematik eğitiminden sorumludur (Bkz. Tablo 7). MÖ2 kodlu matematik öğretmeninin ve matematik eğitiminden sorumlu olduğu öğrencilerin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin karşılaştırılması için İBT ve ADT formuna verdikleri yanıtlara ilişkin bulgular Tablo 33'te verilmiştir.

Tablo 33. MÖ2 Kodlu Öğretmen ve Öğrencilerinin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerilerinin Karşılaştırılması

	1. Önerme		2. Önerme		3. Önerme		4. Önerme	
Kod	İBT	ADT	İBT	ADT	İBT	ADT	İBT	ADT
MÖ2	C.B.A.	+: G.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: G.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.
7SÖ5	A.S.A.	A.S.A.	A.S.A.	G.A.	A.S.A.	G.A.	A.S.A.	A.S.A.
7SÖ6	A.S.A.	A.S.A.	C.B.A.	C.B.A.	C.B.A.	A.S.A.	A.S.A.	A.S.A.
8SÖ6	Diğer	C.B.A.	C.B.A.	C.B.A.	C.B.A.	C.B.A.	D.A.	G.A.

Tablo 33 incelendiğinde MÖ2 kodlu matematik öğretmeninin ispat oluşturma sürecinde (İBT formunda) tüm önermelerde cebirsel-biçimsel argüman kullandığı görülmektedir. Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 7SÖ5 kodlu öğrencinin ispat oluşturma sürecinde tüm önermelerde anlatımsal-sözel argüman, 7SÖ6 kodlu öğrencinin iki önermede anlatımsal-sözel argüman diğer iki önermede cebirsel-biçimsel argüman ve 8SÖ6 kodlu öğrencinin ise iki önermede cebirsel-biçimsel argüman bir önermede deneysel argüman kullandığı görülmektedir (8SÖ6 kodlu öğrenci İBT formunun 1. önermesini doğrulayamamış ve 'Diğer' olarak kodlanmıştır). MÖ2 kodlu matematik öğretmeninin argüman değerlendirme sürecinde (ADT formunda) yüksek puan tercihini iki önermede cebirsel-biçimsel argümandan diğer iki önermede ise görsel argümandan yana kullandığı; düşük puan tercihini tüm önermelerde deneysel argümandan yana kullandığı görülmektedir. Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 7SÖ5 kodlu öğrencinin argüman değerlendirme sürecinde iki önermede görsel argümanı iki önermede anlatımsal-sözel argümanı, 7SÖ6 kodlu öğrencinin üç önermede anlatımsal-sözel argümanı bir önermede cebirsel-biçimsel argümanı ve 8SÖ6 kodlu öğrencinin ise üç önermede cebirsel-biçimsel argümanı bir önermede görsel argümanı ikna edici bulduğu görülmektedir.

MÖ3 Kodlu Matematik Öğretmeni ve Öğrencilerinin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerileri

MÖ3 kodlu matematik öğretmeni 8SÖ1 ve 8SÖ5 kodlu öğrencilerin matematik eğitiminden sorumludur (Bkz. Tablo 7). MÖ3 kodlu matematik öğretmeninin ve matematik eğitiminden sorumlu olduğu öğrencilerin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin karşılaştırılması için İBT ve ADT formuna verdikleri yanıtlara ilişkin bulgular Tablo 34'te verilmiştir.

Tablo 34. MÖ3 Kodlu Öğretmen ve Öğrencilerinin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerilerinin Karşılaştırılması

	1. Önerme		2. Önerme		3. Önerme		4. Önerme	
Kod	İBT	ADT	İBT	ADT	İBT	ADT	İBT	ADT
MÖ3	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.	C.B.A.	+: C.B.A. −: D.A.
8SÖ1	D.A.	C.B.A.	D.A.	A.S.A.	D.A.	G.A.	D.A.	D.A.
8SÖ5	A.S.A.	C.B.A.	A.S.A.	C.B.A.	A.S.A.	C.B.A.	A.S.A.	C.B.A.

Tablo 34 incelendiğinde MÖ3 kodlu matematik öğretmeninin ispat oluşturma sürecinde (İBT formunda) tüm önermelerde cebirsel-biçimsel argüman kullandığı görülmektedir. Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 8SÖ1 kodlu öğrencinin ispat oluşturma sürecinde tüm önermelerde deneysel argüman ve 8SÖ5 kodlu öğrencinin ise tüm önermelerde anlatımsal-sözel argüman kullandığı görülmektedir. MÖ3 kodlu matematik öğretmeninin argüman değerlendirme sürecinde (ADT formunda) yüksek puan tercihini tüm önermelerde cebirsel-biçimsel argümandan yana kullandığı; düşük puan tercihini tüm önermelerde deneysel argümandan yana kullandığı görülmektedir. Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 8SÖ1 kodlu öğrencinin argüman değerlendirme sürecinde her önermede farklı türden argümanı ve 8SÖ5 kodlu öğrencinin tüm önermelerde cebirsel-biçimsel argümanı ikna edici bulduğu görülmektedir.

MÖ4 Kodlu Matematik Öğretmeni ve Öğrencilerinin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerileri

MÖ4 kodlu matematik öğretmeni 7SÖ1, 8SÖ2 ve 8SÖ3 kodlu öğrencilerin matematik eğitiminden sorumludur (Bkz. Tablo 7). MÖ4 kodlu matematik öğretmeninin ve matematik eğitiminden sorumlu olduğu öğrencilerin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin karşılaştırılması için İBT ve ADT formuna verdikleri yanıtlara ilişkin bulgular Tablo 35'te verilmiştir.

Tablo 35. MÖ4 Kodlu Öğretmen ve Öğrencilerinin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerilerinin Karşılaştırılması

	1. Önerme		2. Önerme		3. Önerme		4. Önerme	
Kod	İBT	ADT	İBT	ADT	İBT	ADT	İBT	ADT
MÖ4	D.A.	+: G.A. −:A.S.A.	D.A.	+: G.A. −: C.B.A.	D.A.	+: G.A. −: A.S.A.	D.A.	+: G.A. −: D.A.
7SÖ1	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.	D.A.
8SÖ2	D.A.	A.S.A.	D.A.	A.S.A.	D.A.	G.A.	D.A.	G.A.
8SÖ3	D.A.	G.A.	A.S.A.	A.S.A.	D.A.	G.A.	A.S.A.	A.S.A.

Tablo 35 incelendiğinde MÖ4 kodlu matematik öğretmeninin ispat oluşturma sürecinde (İBT formunda) tüm önermelerde deneysel argüman kullandığı görülmektedir. Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 7SÖ1 ve 8SÖ2 kodlu öğrencilerin ispat oluşturma sürecinde tüm önermelerde deneysel argüman, 8SÖ3 kodlu öğrencinin ise iki önermede anlatımsal-sözel argüman iki önermede deneysel argüman kullandığı görülmektedir. MÖ4 kodlu matematik öğretmeninin argüman değerlendirme sürecinde (ADT formunda) yüksek puan tercihini tüm önermelerde görsel argümandan yana kullandığı; düşük puan tercihini iki önermede anlatımsal-sözel argümandan bir önermede cebirsel-biçimsel argümandan bir önermede deneysel argümandan yana kullandığı görülmektedir. Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 7SÖ1 kodlu öğrencinin argüman değerlendirme sürecinde tüm önermelerde deneysel argümanı, 8SÖ2 ve 8SÖ3 kodlu öğrencilerin iki önermede anlatımsal-sözel argümanı iki önermede görsel argümanı ikna edici bulduğu görülmektedir.

BÖLÜM V

TARTIŞMA

Bu çalışmada, matematik akademik başarısı yüksek ortaokul öğrencileri ile matematik öğretmenlerinin, ispat yapabilme becerileri ve argüman tercihlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda tartışma bölümünün üç başlıkta verilmesi uygun görülmüştür. Birinci başlıkta öğrencilerin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerileri; ikinci başlıkta matematik öğretmenlerinin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerileri; üçüncü başlıkta ise öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin karşılaştırılması tartışılmıştır.

Çalışmaya Katılan Öğrencilerin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerileri İle İlgili Tartışma

Çalışmanın öğrencilere ait bulguları, öğrencilerin sayılar öğrenme alanına ait (1) matematiksel ispat oluşturma becerileri ve (2) argüman değerlendirme becerileri olmak üzere iki başlıkta yorumlanarak tartışılmıştır. İlk başlıkta öğrencilerin ispat oluşturma becerilerine ve doğrulamada kullandıkları yöntemlere ait bulguları, öğrencilerin İBT formundaki önermeleri doğrularken ortaya koydukları yöntemler ve bireysel görüşmelerden elde edilen veriler yorumlanarak elde edilmiştir. Diğer başlıkta ise öğrencilerin argüman değerlendirme becerileri, öğrencilerin ADT formunda ikna edici buldukları argüman tercihleri ve bireysel görüşmelerden elde edilen veriler yorumlanarak elde edilmiştir.

Çalışmaya Katılan Öğrencilerin İspat Oluşturma Becerileri

Çalışmanın bulgularına göre öğrencilerin, sayılar öğrenme alanına ait verilen matematiksel önermeleri doğrularken ortaya koydukları ispat oluşturma becerileri incelendiğinde, en fazla deneysel (empirik) argümanları kullandıkları görülmüştür (Bkz. Tablo 20). Bu sonuç alan yazında bulunan birçok çalışma ile uyumluluk göstermektedir (Aylar, 2014; Aylar ve Şahiner, 2016; Bieda, 2010; Chazan, 1993; Cooper ve diğerleri, 2011; Çalışkan, 2012; Healy ve Hoyles, 2000; Harel ve Sowder, 1998; Knuth, 2002a; Knuth ve diğerleri, 2002; Özer ve Arıkan, 2002; Reid ve Knipping, 2010; Zeybek-Şimşek ve Üstün, 2019). Her ne kadar ispat kavramının güncel eğitim reformlarında ve öğretim programlarında önemi belirtilmiş olsa da, yapılan çalışmalar öğrencilerin ispat seviyelerinin istenilen düzeyde olmadığını göstermektedir. Çalışmada matematik akademik başarısı yüksek öğrencilerin, ispat oluşturma sürecinde deneysel argüman dışında informal ve formal ispat yöntemlerini kullanabilmeleri beklenmiş fakat alan yazınca da vurgulandığı üzere öğrencilerin matematiksel doğrulamalarında deneysel argümanları sıklıkla kullandığı bulguları tekrarlanmıştır. Stylianides (2008)'e göre matematiksel doğrulamalarda kullanılan deneysel argümanlar ispat niteliği taşımamaktadır. Bu sebeple çalışmaya katılan öğrencilerin büyük bir kısmının doğrulamalarında ispat niteliği taşımayan yöntemleri kullandığı söylenebilir.

Sayılar öğrenme alanına ait verilen önermeleri doğrularken deneysel argümanları kullanan öğrencilerden; bir öğrencinin önermelerin tamamında, iki öğrencinin ise birer önermede tek örnek sunarak doğrulama yaptıkları sonucuna ulaşılmıştır. Bir örnek ile doğrulama yapan öğrenciler, tek örneğin bir ifadeyi doğrulamak için yeterli olduğunu belirtmişlerdir. Deneysel argüman kullanan öğrencilerin büyük bir kısmının ise birden fazla örnek kullanmayı tercih ettikleri görülmüştür. Birden fazla örnek vererek doğrulama yapan öğrencilerin, örnek sayısı arttıkça argümanın daha ikna edici olacağını düşündükleri görülmüştür. Benzer şekilde, birden fazla örnek veren öğrencilerden, örneklerini kritik (uç) değerlerden seçtiklerinde argümanların daha ikna edici olacağını düşündükleri görülmüştür. Buna karşın deneysel (empirik) argümanlar alan yazınca ispat olarak nitelendirilmemektedir (Balacheff, 1988; Harel ve Sowder, 1998; Stylianides, 2008). Çünkü deneysel argümanlar, ispatın geçerlilik ve süreklilik ilkesi ile uyuşmamaktadır. Ayrıca Maher ve Martino (1996), deneysel (empirik) yöntemlerle ortaya konulan çabaların tümdengelimli akıl yürütme ve ispatlama için temel teşkil ettiğini ve deneysel argümanlarla doğrulamaya alışan öğrenciler ilerleyen yıllarda iyi seçilmiş bir örnekle doğrulamayı ispat olarak nitelendirebileceğini ve bu durumun öğrencide informal ve formal yöntemlerle ispat yapabilme seviyesine ulaşmasını zorlaştıracağını belirtmektedir. Nitekim Harel ve Sowder (1998), öğrencilerin matematiksel doğrulamalar için verilen birkaç örneğin yeterli olacağına inandırılmasının, bu öğrencilerde daha sonraki süreçlerde çeşitli kavram yanılgılarına sebep olabileceğini belirtmişlerdir. Knuth ve diğerleri (2009) Harel ve Sowder (1998)'in aksine, 6–8. sınıf öğrencilerinin matematiksel ispatlarını deneysel argüman kullanarak oluşturan öğrencilerin, lise döneminde ispat yapabilecek düzeye gelebileceğini vurgulamışlardır. Chazan (1993) ise ortaokul öğrencilerinin okulda ispatla ilgili sınırlı deneyimlerinden kaynaklı, ispat yapma konusunda zorlandığını belirtmiştir. Buna karşın alan yazında (Balacheff, 1988; Cooper ve diğerleri, 2011) deneysel argümanlar kullanarak doğrulama yapan öğrencilerin, kullandıkları örneklerin sayısı (birden fazla örnek) ve niteliğinin (kritik değerlerle örnek) genellenebilir bir yargı sunma çabaları açısından anlam taşıyabildiğine de değinilmektedir.

Healy ve Hoyles (2000) öğrencilerin, kendi doğrulamalarında çoğunlukla deneysel argümanlar kullansalar da bu argümanlar ile öğretmenlerinden yüksek not alamayacaklarını belirttiklerini bildirmişlerdir. Çalışmada deneysel argümanla doğrulama yapan öğrencilerin sunulan argümanlardan ikna edici buldukları tercihlerinde deneysel argümanların dışında argümanları da tercih ettikleri sonucuna ulaşılmıştır. Bu durum Healy ve Hoyles (2000)'nin belirttiği yüksek not alamayacakları kaygısından kaynaklanmadığı, cebirsel argümanlarla doğrulama yapmanın karmaşık geldiği veya deneysel argümanlarla doğrulama yapmayı daha kolay bulmalarından kaynaklandığı bireysel görüşmelerden elde edilen sonuçlardandır. Özer ve Arıkan (2002) öğrencilerin, matematiksel doğrulamaları genellikle birkaç örnek ile deneyerek, yani deneysel (empirik) argüman oluşturarak yapmasına sebep olarak, ülkemiz nezdinde test çözme üzerine odaklanılan öğretim anlayışı altında öğrencilerin matematiksel yazım, sembol ve notasyon kullanımları konusunda yeterince yönlendirilmemesinin bir sonucu olduğunu bildirmektedirler. Çalışmada ulaşılan benzer sonucun Özer ve Arıkan (2002)'nin belirttiği gibi öğrencilerin liselere giriş sınavına hazırlanmaları nedeniyle test tekniğine odaklanmalarından kaynaklandığı düşünülebilir. Harel ve Sowder (1998) çalışmadaki sonuca benzer olarak, öğrencilerin ispat oluşturmakta zorlandıklarını belirtmekte olup, buna sebep olarak ise öğretmenlerin, öğrencilerin ispat fikirlerini geliştirecekleri ve ispat yapacakları ortamı sağlamaktan çok, ispatlamaları kendilerinin yapmalarını sebep olarak göstermektedir. Bieda (2010) bu çalışmadaki sonuçlara benzer olarak öğrencilerin, ispat ile ilişkili görevlerde az sayıda genel argümanları ürettikleri ve ağırlıklı olarak deneysel argüman olarak nitelendirilebilecek gerekçeler ürettiklerini belirtmektedir. Ayrıca Reid ve Knipping (2010), tüm öğretim düzeylerinde yer alan öğrencilerin (ilkokuldan yükseköğretime kadar) ispat yaparken deneysel (empirik) argümanları kullandığını, ispat oluşturma sürecinde tüm eğitim kademelerinde zorlandıklarını belirtmektedirler. Bu durum çalışmada ulaşılan sonuçla da uyuşmaktadır.

Buna ek olarak araştırmada ispat performansına yönelik alan yazınla uyumlu olmayan bazı sonuçlara da ulaşılmıştır. Öğrencilerin sınıf düzeyi ilerledikçe (6. sınıftan 8'e doğru) cebir kullanarak doğru sonuca ulaşma eğiliminde artış olduğunu belirten alan yazına (Arslan 2007; Çalışkan 2012) karşın çalışmada 7. sınıf öğrencileri ile 8. sınıf öğrencilerinin cebirsel argüman kullanımları arasında bir fark bulunamamıştır (Bkz. Tablo 30). Bu durumun çalışmaya katılan öğrencilerin akademik başarısı yüksek öğrencilerden oluşması, çalışmada kullanılan soruların genel bir konu alanı olan sayılar öğrenme alanından seçilmesi ve sınıf seviyesinin buna etkisi olmayacağından kaynaklandığı düşünülmektedir. Ayrıca matematiksel doğrulamalarda görsel argümanların da tercih edildiği çalışmalar (Çalışkan, 2012; Zaimoğlu, 2012) mevcut iken çalışmada doğrulama yöntemi olarak görsel argüman kullanan öğrenci çıkmamıştır. Bu farkın belirtilen çalışmaların geometri konularındaki ispat becerilerinin araştırılmasından buna karşın çalışmadaki önermelerin sayılar öğrenme alanında hazırlanmış olmasından kaynaklı olduğu düşünülmektedir. Bu durum girdi temsillerinin farklı olması durumunda, öğrencilerin ispat yöntemlerinin farklı olabileceğini göstermektedir.

Çalışmanın bulgularına göre öğrencilerin, sayılar öğrenme alanına ait verilen matematiksel önermeleri doğrulamak için deneysel argümanlardan sonra fazla kullandıkları diğer bir yöntem ise anlatımsal-sözel (narrative) argümanlar olmuştur (Bkz. Tablo 20). Bu durum alan yazındaki bazı çalışmaların bulguları ile örtüşmektedir (Cooper ve diğerleri, 2011; Healy ve Hoyles, 2000). Bazı öğrencilerin deneysel argüman kullandıktan sonra, aynı ifade için genellemeye yönelik açıklamalar yaparak, anlatımsal-sözel argümanlar da kullandıkları görülmüştür. Stylianides (2007b) ve Hanna (2000a) erken sınıf seviyelerinde informal yöntemlere daha fazla yer verilmesi gerektiği yönünde önerilerde bulunmaktadır. Çalışmada doğrulama yöntemi olarak anlatımsal-sözel argümanları kullanan öğrencilerin de bulunması ve anlatımsal-sözel argümanların informal ispat yöntemlerinden olması, Stylianides (2007b) ve Hanna (2000a)'nın bulgularını desteklediği düşünülmektedir.

Çalışmanın bulgularına göre öğrencilerin, cebirsel-biçimsel argümanları az da olsa kullanıldığı ve görsel argümanları ise hiç kullanılmadığı görülmüştür (Bkz. Tablo 20 ve Tablo 30). Cebirsel-biçimsel argümanların kullanıldığı formal ispat yöntemlerinin yok denecek kadar az kullanılması, alan yazındaki benzer çalışmalarla uyumluluk göstermektedir (Arslan, 2007; Aylar, 2014; Aylar ve Şahiner, 2016; Cooper ve diğerleri, 2011; Healy ve Hoyles, 2000; Zaimoğlu, 2012; Zeybek-Şimşek ve Üstün, 2019). Çalışmadaki sonuca benzer olarak Arslan (2007) öğrencilerin, cebir kullanarak genellemeye ulaşma eğiliminin düşük olduğunu ortaya koyarken, Zaimoğlu (2012) da öğrencilerin cebirsel ispatı bir yöntem olarak kullanmayı tercih etmediğini belirtmektedir. Cooper ve diğerlerinin (2011) gerçekleştirdikleri çalışmanın sonucuna göre ise öğrenciler, ispat yaparken öncelikle görsel ve anlatımsal yöntemleri, en son olarak da cebirsel ifadeleri kullanmaktadırlar. Bu çalışmada ise deneysel argümanları ve anlatımsal-sözel argümanları daha fazla öğrenci kullanmış, cebirsel argümanları çok az öğrenci kullanmış ve görsel argümanları kullanan öğrenci ise çıkmamıştır. Healy ve Hoyles (2000) öğrencilerin, cebirsel argümanların kullanıldığı formal ispatlardan uzak durduğunu, fakat bu yöntemlerin öğretmenlerden yüksek puan almak için geçerli bir yöntem olduğunu savunduklarını belirtmesi, bu çalışmada da bazı öğrencilerin bireysel görüşmelerde belirttikleri bir durumdur. Tüm bu çalışmalar cebir öğrenme alanına yeni giriş yapan ortaokul seviyesindeki öğrencilerin, bu alanla ilgili yaşadıkları sorunu ve bu sorunun ispat becerisi ile ilişkisini ortaya koymaktadır. Bu çalışmada da öğrenciler cebirsel ifadeleri kullanırken zorlanmış ve doğrulamalarında en az kullandıkları yöntem cebirsel-biçimsel argümanlar olmuştur. Çalışmada cebirsel ifadeler kullanarak doğrulama yapmaya başlayan fakat devamını getiremeyip anlatımsal-sözel argümanlara geçiş yapan öğrenciler de olmuştur (Bkz. Şekil 10 ve Şekil 27). Bu öğrencilerin cebirsel ifadeler kullanarak genel bir ispat yapmaya çalıştığı fakat cebirsel ifadeler konusundaki bilgi eksikliklerinden dolayı anlatımsal-sözel argümanlarla doğrulamalarına devam ettiği düşünülmektedir. Bu eksikliklerin sebebi olarak, öğretim programında ispat kavramına çok az yer verilmesi ve öğretim programlarının cebirsel ifadeler ile ilgili becerileri kazandırmada yetersiz olması düşünülmektedir. Ayrıca Zeybek ve diğerleri (2018), inceledikleri ortaokul ders kitaplarında ispat yapma etkinliği olma potansiyeline sahip etkinliklerin sayılarının çok az olduğunu eleştirmişlerdir. Nitekim matematik öğretim sürecinde öğretim materyali olarak kullanılan ders kitaplarının ispat etkinlikleri bakımından yetersiz oluşu, öğrencilerin formal bir ispat oluşturmada zorlanmalarında diğer bir olumsuz etken olarak düşünülebilir.

Çalışmaya Katılan Öğrencilerin Argüman Değerlendirme Becerileri

Çalışmanın bulgularına göre öğrencilerin argüman değerlendirme becerileri incelendiğinde, sayılar öğrenme alanına ait verilen matematiksel önermeleri doğrulamak için, kendilerine sunulan argümanlardan her bir argümanı ikna edici bulan öğrenciler çıkmıştır. Bulguların toplamına bakıldığında deneysel argümanlar 9 kez, anlatımsal-sözel argümanlar 16 kez, görsel argümanlar 11 kez ve cebirsel-biçimsel argümanlar 11 kez öğrenciler tarafından ikna edici bulunmuştur (Bkz. Tablo 20). Öğrencilerin ikna edici buldukları argüman tercihlerine bakıldığında, en fazla anlatımsal-sözel argümanı tercih etmiş olsalar da diğer argümanların tercih sayıları ile anlamlı bir farklılık bulunmamaktadır. Bu durum alan yazındaki benzer çalışmaların bulguları ile uyuşmamaktadır (Healy ve Hoyles, 2000; Zeybek-Şimşek ve Üstün, 2019). Healy ve Hoyles (2000) çalışmalarında öğrencilerin, daha çok cebirsel argümanları ikna edici bulduklarını belirtmiş; Zeybek-Şimşek ve Üstün (2019) ise çalışmalarında öğrencilerin deneysel argümanları içeren cevapları ikna edici bulduklarını bildirmişlerdir. Bu çalışmada ise her bir argümanı ikna edici bulan öğrenci sayıları birbirine yakın olmuş, herhangi bir argümanın tercihinde yoğunlaşma olmamıştır. Milli Eğitim Bakanlığı (2013) Ortaokul Matematik Dersi Öğretim Programı akıl yürütme becerisinin kazandırılması için “çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma, mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma” becerilerinin kazandırılmasının önemine vurgu yaparken öğrencilerin, ispat becerilerinin ve ortaya konulan ispatları değerlendirme becerilerinin istenilen düzeyde olmadığı söylenebilir.

Çalışmanın bulgularına göre, sayılar öğrenme alanında matematiksel doğrulamalarında deneysel argümanları kullanan öğrenciler, kendilerine sunulan argümanlardan çoğunlukla deneysel argümanları ve görsel argümanları ikna edici bulmuşlardır. Deneysel argümanları ikna edici bulan öğrencilerin tercih etme sebepleri genellikle, kendi doğrulama yöntemlerine benzemesi olurken; görsel argümanları ikna edici bulan öğrencilerin tercih etme sebebi ise genellikle, daha açıklayıcı ve akılda kalıcı bulmaları olmuştur. Bu durum öğrencilerin ispat kavramından uzak olmalarına bir sebep olarak gösterilebilir. Matematiksel doğrulamalarında anlatımsal-sözel argümanları kullanan öğrenciler, kendilerine sunulan argümanlardan anlatımsal-sözel argümanları ve cebirsel-biçimsel argümanları ikna edici bulmuşlardır. Matematiksel doğrulamalarında cebirsel-biçimsel argüman kullanan öğrencilerin ise, kendilerine sunulan argümanlardan yine cebirsel-biçimsel argümanları ikna edici buldukları görülmüştür. Benzer bir çalışmada Healy ve Hoyles (2000), öğrencilerin doğrulama yöntemi olarak deneysel argümanları ve anlatımsal-sözel argümanları daha fazla kullandığını, sunulan argümanlardan ise cebirsel argümanları ikna edici bulduklarını bildirmişlerdir. Zeybek-Şimşek ve Üstün (2019) ise öğrencilerin kendi doğrulamalarında deneysel argümanları kullanırken, sunulan argümanlarda da deneysel argümanları ikna edici bulduklarını belirtmiştir. Bu durum çalışmamızdaki bulgularla uyuşmamaktadır. Bu çalışmadaki öğrenciler ise, doğrulamalarında deneysel argümanlar ve anlatımsal-sözel argümanlar kullanırken, sunulan argüman tercihlerinde her bir argümanı tercih eden öğrenci sayılarının birbirine yakın olduğu görülmüştür.

Çalışmaya katılan öğrencilerin büyük bir bölümünün, sayılar öğrenme alanına ait verilen matematiksel önermeleri doğrularken deneysel argümanlar kullandıkları önceki kısımlarda belirtilmişti. Doğrulamalarında deneysel argüman kullanan bu öğrenciler, sunulan argüman tercihlerinde çoğunlukla deneysel argümanları veya görsel argümanları ikna edici bulma eğiliminde olmuşlardır. Doğrulamasında deneysel argüman kullanıp, görsel argümanı ikna edici bulan öğrencilerle yapılan bireysel görüşmelerde öğrencilerin, doğrulama yaparken akıllarına gelmeyen bu yöntemi gördüklerinde daha açıklayıcı bulmaları tercihlerinde etkili olmuştur. Anlatımsal-sözel argümanlarla doğrulama yapan öğrencilerin ise sunulan argümanlarda da anlatımsal-sözel argümanları tercih etme eğiliminde oldukları gözlenmiştir. Çalışmada cebirsel-biçimsel argüman ile doğrulama yapan az sayıda öğrenci ise sunulan argümanlarda da yine cebirsel-biçimsel argümana yöneldiği görülmüştür. Bu bulgu Aylar (2014)'ün çalışması ile benzerlik göstermektedir.

Çalışmaya Katılan Matematik Öğretmenlerinin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerileri İle İlgili Tartışma

Çalışmanın matematik öğretmenlerine ait bulguları, öğretmenlerin sayılar öğrenme alanına ait (1) matematiksel ispat oluşturma becerileri ve (2) argüman değerlendirme becerileri olmak üzere iki başlıkta yorumlanarak tartışılmıştır. İlk başlıkta matematik öğretmenlerinin ispat oluşturma becerilerine ve doğrulamada kullandıkları yöntemlere ait bulguları, öğretmenlerin İBT formundaki önermeleri doğrularken ortaya koydukları yöntemler ve bireysel görüşmelerden elde edilen veriler yorumlanarak elde edilmiştir. Diğer başlıkta ise matematik öğretmenlerinin argüman değerlendirme becerileri, öğretmenlerin ADT formunda yüksek ve düşük puan tercihleri ve bireysel görüşmelerden elde edilen veriler yorumlanarak elde edilmiştir.

Çalışmaya Katılan Matematik Öğretmenlerinin İspat Oluşturma Becerileri

Çalışmanın bulgularına göre, matematik öğretmenlerinin sayılar öğrenme alanına ait verilen matematiksel ifadeleri ispatlarken çoğunlukla cebirsel-biçimsel argümanları kullandıkları görülmüştür. Öğretmenlerin, verilen matematiksel ifadeleri doğrularken ortaya koydukları ispatlama becerileri incelendiğinde, dört öğretmenden üçünün tüm ifadeleri doğrularken cebirsel-biçimsel argümanlar içeren formal ispat yöntemleri kullandıkları görülmüştür (Bkz. Tablo 29). Ayrıca bir öğretmen doğrulama yöntemlerinin birinde tümevarım yöntemi ile tam bir ispat yapmıştır (Bkz. Şekil 51). Bu sonuç matematik öğretmenlerinin, ispat oluşturma kriterlerini bildiklerini ve cebirsel argümanlar kullanarak bir ispatın genellenebilir olması gerektiği özelliğine uygun olarak ispatlar ortaya koyabildiklerini göstermektedir. Bu durum alan yazındaki benzer çalışmalarla uyuşmamaktadır (Barkai, Tsamir, Tirosh ve Dreyfus, 2002; Healy ve Hoyles, 2000; Knuth, 2002b; Martin ve Harel, 1989; Moralı ve diğerleri, 2006; Raman, 2003). Barkai ve diğerleri (2002) çalışmalarında ortaokul matematik öğretmenlerinin yarısından fazlasının, bölünebilme kurallarıyla ilgili ispat yapma becerilerinde örnek vererek doğrulama eğiliminde olduğunu bildirmişlerdir. Jones (2000), öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin becerilerinin yeterli düzeyde olmadığını bildirmiştir. Benzer şekilde Martin ve Harel (1989) matematik öğretmen adaylarının yarısından fazlasının, matematiksel doğrulamalarda bir örnek üzerinden yapılan açıklamayı ispat olarak kabul etme eğiliminde olduklarını bildirmişlerdir. Çalışmaya katılan dört öğretmenden bir tanesi ise alan yazında belirtilen duruma uyumlu olarak verilen tüm ifadeleri doğrularken deneysel argüman kullanma eğiliminde olmuştur (Bkz. Şekil 46, Şekil 48, Şekil 50, Şekil 52). Deneysel argümanlar, Stylianides (2008)'e göre ispat niteliği taşımamaktadır. Deneysel argümanı tercih eden matematik öğretmeni ile yapılan bireysel görüşmelerde öğretmenin, verilen önermeyi bildiği için ispatlamaya gerek duymadığını ve örnekle doğrulamanın yeterli olacağını belirttiği görülmüştür. Çalışmada matematik öğretmenlerinin sayılar öğrenme alanına ait ifadelerde ispat yapma becerilerinin genel olarak yeterli düzeyde olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Çalışmaya Katılan Matematik Öğretmenlerinin Argüman Değerlendirme Becerileri

Çalışmanın bulgularına göre matematik öğretmenlerinin argüman değerlendirme becerileri incelendiğinde, sayılar öğrenme alanına ait verilen matematiksel önermeleri doğrulamak için, kendilerine sunulan argümanlardan farklı türden argümanları daha fazla puanla ve daha az puanla değerlendireceklerini belirttikleri görülmüştür. Öğretmenlerin büyük bir kısmı kendilerine sunulan argümanlardan cebirsel-biçimsel argümanları ve görsel argümanları yüksek puanla değerlendireceklerini belirtmişlerdir. Ayrıca deneysel argümanları ise düşük puanla değerlendireceklerini belirtmişlerdir. Buna sebep olarak cebirsel-biçimsel argümanların daha geçerli ve genel sonuçlar sunduğu, görsel argümanların ise anlaşılabilir, akılda kalıcı ve öğrenci seviyesine uygun olmasını; deneysel argümanların ise çürütülebilir olduğu, genellenebilir olmadığı ve örnek vermenin ispat sayılmayacağı gibi gerekçeler sunmuşlardır. Bu bulgu Martin ve Harel (1989)'in matematik öğretmen adaylarının yarısından fazlasının, kendilerine sunulan argümanlardan tek örnek ile doğrulamayı ispat sayacakları bulgusu ile çeliştiği görülmektedir. Yapılan bireysel görüşmelerde öğretmenler görsel argümanları beğendiklerini belirtmiş fakat genel sonuçlar için cebirsel-biçimsel argümanların kullanılması gerekliliği üzerinde durmuşlardır. Görsel argümanları tercih eden öğretmenler bireysel görüşmelerde bu tür argümanların anlatımda kolaylık sağlayacağından ve öğrenciler için anlamlı öğrenmeler sağlayacağından dolayı bu argümanları tercih ettiklerini belirttikleri sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmada, deneysel argümanların sadece belirtilen sayı için geçerli sonuçlar vereceği ve bu durumun genele yayılamayacağına dair öğretmen görüşleri, bireysel görüşmelerden çıkarılan bir diğer bulgu olmuştur.

Çalışmanın bulgularına göre, matematiksel doğrulamalarında cebirsel argümanlar kullanan matematik öğretmenleri, kendilerine sunulan argümanlardan çoğunlukla yine cebirsel-biçimsel argümanların kullanıldığı cevapları daha yüksek puanla, deneysel argümanların kullanıldığı cevapları ise daha düşük puanla değerlendireceklerini belirtmişlerdir (Bkz. Tablo 29 ve Tablo 31). Bu bulgu Healy ve Hoyles (2000)'nin öğrencilerin, cebirsel argümanların kullanıldığı formal ispatlardan uzak durduğunu, fakat bu yöntemlerin öğretmenlerden yüksek puan almak için geçerli bir yöntem olduğunu savunduklarına yönelik bulgusu ile uyuşmaktadır. Matematiksel doğrulamalarında deneysel argüman kullanan matematik öğretmeni ise, kendisine sunulan argümanlardan görsel argümanları daha yüksek puanla değerlendireceğini belirtmiştir. Buna sebep olarak ise görsel argümanların kullanıldığı cevapların somut ve akılda kalıcı olmasını bireysel görüşmelerde belirtmiştir.

Çalışmaya Katılan Öğrencilerin ve Matematik Öğretmenlerinin İspat Oluşturma ve Argüman Değerlendirme Becerilerinin Karşılaştırılması İle İlgili Tartışma

Çalışmanın öğrencilere ve matematik öğretmenlerine ait bulguları yukarıda ayrı ayrı tartışılmış olup, bu bölümde öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin, ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerileri birbiriyle karşılaştırılacaktır.

Öğrencilerin ispat oluşturma becerilerine ait bulgularda, 5 öğrencinin tüm önermelerde deneysel (empirik) argüman kullandığı, 3 öğrencinin tüm önermelerde anlatımsal-sözel (narrative) argüman kullandığı ve 4 öğrencinin ise kullandıkları argümanların değişkenlik gösterdiği sonuçlarına ulaşılmıştır (Bkz. Tablo30). Öğrencilerin argüman değerlendirme becerilerine ait bulgularda, 2 öğrencinin tüm önermelerde deneysel argümanları ikna edici buldukları, 1 öğrencinin tüm önermelerde cebirsel-biçimsel argümanları ikna edici buldukları ve 9 öğrencinin ise tüm önermelerde aynı tip argümanları ikna edici bulmadıkları yani tercihlerinin farklılık gösterdiği sonuçlarına ulaşılmıştır (Bkz. Tablo 30). Ayrıca 2 öğrencinin hem ispatlama yöntemi olarak hem de argüman tercihi olarak deneysel argümanları tercih ettiği sonucuna ulaşılmıştır.

Matematik öğretmenlerinin ispat oluşturma becerilerine ait bulgularda, 3 öğretmenin tüm önermelerde cebirsel-biçimsel argüman kullandığı ve 1 öğretmenin ise tüm önermelerde deneysel argüman kullandığı sonuçlarına ulaşılmıştır (Bkz. Tablo 31). Matematik öğretmenlerinin argüman değerlendirme becerilerine ait bulgularda, 2 öğretmenin tüm önermelerde yüksek puan tercihlerini cebirsel-biçimsel argümandan yana, düşük puan tercihlerini ise deneysel argümandan yana kullanacakları; diğer 2 öğretmenin yüksek ve düşük puan tercihlerinin önermeden önermeye değiştiği sonuçlarına ulaşılmıştır (Bkz. Tablo 31).

Matematik öğretmenlerinin ve matematik eğitiminden sorumlu olduğu öğrencilerin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin karşılaştırılmasına ait bulgular incelendiğinde, bazı öğretmenlere ait bulguların sorumlu olduğu öğrencilere ait bulgular ile benzeştiği ve bazı öğretmenlere bulguların ise sorumlu olduğu öğrencilere ait bulgular ile uyuşmadığı sonucuna ulaşılmıştır. MÖ1 kodlu matematik öğretmeni ispat oluşturma sürecinde tüm önermelerde cebirsel-biçimsel argüman kullanmıştır (Bkz. Tablo 32). Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 4 öğrencinin ispat oluşturma sürecinde verdikleri toplam 16 cevaptan 3'ü öğretmenin cevabı ile benzeşmektedir. Yine MÖ1 kodlu matematik öğretmeni argüman değerlendirme sürecinde tüm önermelerde yüksek puan tercihini cebirsel-biçimsel argümandan yana düşük puan tercihini ise deneysel argümandan yana kullanacağını belirtmiştir (Bkz. Tablo 32). Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 4 öğrencinin argüman değerlendirme sürecinde ikna edici buldukları toplam 16 cevaptan 3 tanesi cebirsel-biçimsel argüman olurken, 4 tanesi deneysel argüman olmuştur. Sonuç olarak MÖ1 kodlu matematik öğretmeni ile matematik eğitiminden sorumlu olduğu öğrencilerin ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerilerinin benzeşmediği sonuçlarına ulaşılmıştır. MÖ2 kodlu matematik öğretmeni ispat oluşturma sürecinde tüm önermelerde cebirsel-biçimsel argüman kullanmıştır (Bkz. Tablo 33). Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 3 öğrencinin ispat oluşturma sürecinde verdikleri toplam 12 cevaptan 4'ü öğretmenin cevabı ile benzeşmektedir. Yine MÖ2 kodlu matematik öğretmeni argüman değerlendirme sürecinde yüksek puan tercihini iki önermede cebirsel-biçimsel argümandan yana diğer iki önermede ise görsel argümandan yana kullanacağını; düşük puan tercihini tüm önermelerde deneysel argümandan yana kullanacağını belirtmiştir (Bkz. Tablo 33). Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 3 öğrencinin argüman değerlendirme sürecinde ikna edici buldukları toplam 12 cevaptan 3 tanesi görsel argüman ve 4 tanesi cebirsel-biçimsel argüman ve olmuştur. Sonuç olarak MÖ2 kodlu matematik öğretmeni ile matematik eğitiminden sorumlu olduğu öğrencilerin ispat oluşturma becerileri benzeşmezken argüman değerlendirme becerilerinin çoğunlukla benzeştiği sonuçlarına ulaşılmıştır. MÖ3 kodlu matematik öğretmeni ispat oluşturma sürecinde tüm önermelerde cebirsel-biçimsel argüman kullanmıştır (Bkz. Tablo 34). Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 2 öğrencinin ispat oluşturma sürecinde verdikleri toplam 8 cevaptan hiçbiri öğretmenin cevabı ile benzeşmemektedir. Yine MÖ3 kodlu matematik öğretmeni argüman değerlendirme sürecinde tüm önermelerde yüksek puan tercihini cebirsel-biçimsel argümandan yana düşük puan tercihini ise deneysel argümandan yana kullanacağını belirtmiştir (Bkz. Tablo 34). Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 2 öğrencinin argüman değerlendirme sürecinde ikna edici buldukları toplam 8 cevaptan 5 tanesi cebirsel-biçimsel argüman olurken, 1 tanesi deneysel argüman olmuştur. Sonuç olarak MÖ3 kodlu matematik öğretmeni ile matematik eğitiminden sorumlu olduğu öğrencilerin ispat oluşturma becerileri benzeşmezken argüman değerlendirme becerilerinin çoğunlukla benzeştiği sonuçlarına ulaşılmıştır. MÖ4 kodlu matematik öğretmeni ispat oluşturma sürecinde tüm önermelerde deneysel argüman kullanmıştır (Bkz. Tablo 35). Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 3 öğrencinin ispat oluşturma sürecinde verdikleri toplam 12 cevaptan 10'u öğretmenin cevabı ile benzeşmektedir. Yine MÖ4 kodlu matematik öğretmeni argüman değerlendirme sürecinde yüksek puan tercihini tüm önermelerde görsel argümandan yana diğer iki önermede ise görsel argümandan yana kullanacağını; düşük puan tercihini iki önermede anlatımsal-sözel, bir önermede cebirsel-biçimsel ve bir önermede deneysel argümandan yana belirtmiştir (Bkz. Tablo 35). Matematik eğitiminden sorumlu olduğu 3 öğrencinin argüman değerlendirme sürecinde ikna edici buldukları toplam 12 cevaptan 4 tanesi görsel argüman olmuştur. Sonuç olarak MÖ4 kodlu matematik öğretmeni ile matematik eğitiminden sorumlu olduğu öğrencilerin ispat oluşturma becerilerinin çoğunlukla benzeştiği argüman değerlendirme becerilerinin ise benzeşmediği sonuçlarına ulaşılmıştır.

Öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerilerinin ilişkili olduğu alan yazınca belirtilmektedir (Healy ve Hoyles, 2000; Knuth, 2002a, 2002b). Buna karşın çalışmada elde edilen sonuçlarda 4 öğretmenden 3'ünün ispat oluşturma becerilerinin matematik eğitiminden sorumlu olduğu öğrencilerle benzeşmediği, yalnızca 1'inin benzeştiği sonuçlarına ulaşılmıştır. Ayrıca 4 öğretmenden 2'sinin argüman değerlendirme becerilerinin matematik eğitiminden sorumlu olduğu öğrencilerde benzeşmediği, diğer 2'sinin benzeştiği sonuçlarına ulaşılmıştır. Bu farklılığın oluşmasında öğrencilerin matematik dersine giren öğretmenlerin zaman zaman değişmesinden kaynaklı olabileceği düşünülmektedir. Nitekim öğrenciler, öğretmenlerinin yarı dönemde ya da yılsonunda değiştiğini belirtmişlerdir.

Çalışmadan elde edilen bu bulgular bir sonraki bölümde özetlenip sonuçlandırılacak olup, elde edilen sonuçlardan yola çıkarak matematik öğretmenlerine ve matematik araştırmacılarına yönelik önerilerde bulunulacaktır.

BÖLÜM VI

SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmanın bu bölümü araştırmanın sonuçları ve araştırmanın sonuçlarından yola çıkarak matematik öğretmenlerine ve ileride yapılacak çalışmalara yönelik önerileri ortaya koyacak şekilde iki başlık olarak sunulacaktır.

Sonuçlar

Bu çalışmanın sonuçları, belirlenen amaçlı örneklemdeki öğrencilerin, sayılar öğrenme alanına ait bir matematiksel ifadeyi doğrularken genellikle deneysel (empirik) argümanlardan ve anlatımsal-sözel (narrative) argümanlardan yararlanma eğiliminde olduklarını ortaya çıkarmıştır. Yapılan bireysel görüşmelerde deneysel argüman kullanan öğrenciler örnek ile doğrulamayı yeterli bulduklarını, anlatımsal-sözel argümanları kullanan öğrenciler ise örnekler verdikten sonra genellemeye yönelik sözel açıklamalar ile daha ikna edici cevaplar oluşturduklarını belirtmişlerdir. Yani öğrencilerin büyük bir kısmı doğrulama yaparken ispat olmayan yöntemleri (deneysel argümanlar) veya informal ispat yöntemlerini (anlatımsal-sözel argüman) kullanmışlardır. Az da olsa formal ispat yöntemlerinden olan cebirsel-biçimsel argümanları kullanma eğilimi gösteren öğrencilerin bulunduğu da çalışma sonucunda görülmüştür. Çalışmaya katılan öğrencilerden hiç birinin görsel argüman oluşturmaması da dikkat çekmiştir.

Öğrencilerin sayılar öğrenme alanındaki matematiksel ifadelere yönelik araştırmacı tarafından hazırlanan argümanları değerlendirme sürecinde ise kendilerine sunulan deneysel, anlatımsal-sözel, görsel ve cebirsel-biçimsel argümanlardan her birini ikna edici bulan öğrenci sayılarının birbirine yakın olduğu gözlemlenmiştir. Öğrencilerin kendilerine sunulan farklı düzeydeki argümanların hepsini yakın sayılarda öğrencinin ikna edici bulması, öğrencilerin argüman değerlendirme sürecinde zorlandıklarını ve bu süreçte matematiksel ispatların genel özelliklerini göz önünde bulundurmadıklarını göstermiştir. Yapılan bireysel görüşmelerde ise öğrencilerin, deneysel argümanları ve anlatımsal-sözel argümanları kendi cevapları ile olan benzerliğinden ötürü ikna edici buldukları; görsel argümanları ise açıklayıcı ve ilgi çekici olmasından dolayı ikna edici buldukları belirlenmiştir. Cebirsel-biçimsel argümanları ise daha genel ifadeler içerdiğinden ötürü öğrencilerin ikna edici argüman olarak değerlendirdikleri görülmüştür. Ayrıca matematiksel doğrulamalarında deneysel argümanları kullanan öğrenciler, sunulan argümanlardan deneysel argümanları ve görsel argümanları ikna edici bulma eğiliminde oldukları gözlenmiştir. Kendi doğrulamalarında anlatımsal-sözel argümanları kullanan öğrencilerin ise, sunulan argümanlardan yine anlatımsal-sözel argümanları ikna edici bulma eğiliminde oldukları; sınırlı sayıda olsa da kendi doğrulamalarında cebirsel-biçimsel argümanları kullanan öğrencilerin ise sunulan argümanlardan cebirsel-biçimsel argümanları ikna edici bulma eğiliminde oldukları görülmüştür.

Bu çalışmanın sonuçları, çalışmaya katılan matematik öğretmenlerinin sayılar öğrenme alanına ait bir matematiksel ifadeyi doğrularken genellikle cebirsel-biçimsel argümanları kullandıklarını ortaya çıkarmıştır. Doğrulamalarında formal ispat yöntemleri kullanan öğretmenlerin, aynı matematiksel ifadelere yönelik kendilerine sunulana farklı düzeydeki argümanlardan, cebirsel-biçimsel ve görsel argümanları yüksek puanla değerlendirirken, deneysel argümanları ise düşük puanla değerlendirdikleri görülmüştür. Yapılan bireysel görüşmelerde ise matematik öğretmenleri, cebirsel-biçimsel argümanları daha genel olması ve tüm sayıları içermesinden ötürü daha yüksek puanla değerlendirdikleri; görsel argümanları anlaşılabilir, akılda kalıcı ve öğrenci seviyesine daha uygun olmasından dolayı yüksek puan ile değerlendirdikleri; deneysel argümanları ise belirli örneklere dayalı olması ve örnek kullanımının bir ispat oluşturmayacağından ötürü düşük puanla değerlendikleri görülmüştür. Ayrıca öğretmenler, deneysel argümanların genellenebilir olmadığına yönelik görüşler de belirtmişlerdir.

Bu çalışmanın sonuçları, çalışmaya katılan matematik öğretmenlerinin ve matematik eğitiminden sorumlu oluğu öğrencilerin ispat oluşturma becerileri karşılaştırıldığında çoğunlukla benzeşmediğini ortaya çıkarmıştır. Ayrıca çalışmaya katılan matematik öğretmenlerinin ve matematik eğitiminden sorumlu oluğu öğrencilerin argüman değerlendirme becerileri karşılaştırıldığında yarısının benzeştiğini diğer yarısının benzeşmediğini ortaya çıkarmıştır. Çalışmaya matematik öğretmenlerinin, deneysel argümanların genellenebilir olmadığına yönelik görüş bildirmeleri ve doğrulamalarında genellikle cebirsel-biçimsel argüman kullanmalarına karşın matematik eğitiminden sorumlu oldukları öğrencilerin doğrulamalarında sıklıkla deneysel argüman kullanmaları dikkat çekicidir. Bu duruma sebep olarak matematik öğretmenlerinin derslerinde cebirsel-biçimsel argümanlara daha az, deneysel argümanlara ise daha sık yer vermesinden kaynaklı olabileceği düşünülmektedir.

Öneriler

Çalışmanın amacı doğrultusunda, zaman içerisinde sınırlandırılmış bir veya birkaç durumu çoklu kaynakları içeren veri toplama araçları (gözlemler, görüşmeler, görsel-işitseller, dokümanlar, raporlar) ile derinlemesine incelendiğinden dolayı durum araştırması (case study) modeline göre uygulanmıştır. Araştırmadan elde edilen sonuçların matematik öğretmenlerine ve alanda araştırma yapacak araştırmacılara ışık tutması açısından öneriler, (1) Matematik öğretmenlerine yönelik ve (2) Araştırmacılara yönelik olmak üzere iki alt başlık halinde sunulmuştur.

Matematik Öğretmenlerine Yönelik Öneriler

1. Öğrenciler tüm sınıf seviyelerinde ispat yapma konusunda zorluklar yaşamaktadırlar (Reid ve Knipping, 2010). Yapılan çalışmalar öğrencilerin formal ispatlar yerine örnek vererek doğrulama eğiliminde olduklarını belirtmektedirler (Aylar, 2014; Chazan, 1993; Çalışkan, 2012; Healy ve Hoyles, 2000; Harel ve Sowder, 1998; Knuth, 2002a; Knuth ve diğerleri, 2002; Özer ve Arıkan, 2002; Reid ve Knipping, 2010). Bu çalışmanın öğrencilere ait bulguları da bu sonucu destekler niteliktedir. Bu durumun bir nedeni olarak, ispat kavramının matematik müfredatındaki görünürlüğünün sınırlı olması düşünülebilir. Bu sebeple matematik öğretim programlarında ispatın görünürlüğünün artırılmasına yönelik çalışmalar yapılması önerilmektedir. Ayrıca bu sürecin uygulayıcısı konumunda bulunan matematik öğretmenlerinin, öğrenciler için zenginleştirilmiş fırsatlar sunması ve öğretim sürecinde farklı ispat yöntemlerine yer vermesi, öğrencilerin matematiği anlama düzeylerini ve muhakeme yeteneklerini arttıracağı düşünülmektedir.

2. Çalışmanın bulguları, öğrencilerin formal ispat yöntemlerinden ziyade informal ispat yapma eğiliminde olduklarını açığa çıkarmıştır. Öğrencilerin formal ispat yöntemlerinin yanı sıra, yaş ve seviyeleri ile uyumlu informal ispat yöntemlerini kullanımlarının desteklenmesi ve bu yönde teşvik edilmesi, sınıf içinde muhakeme becerilerini arttırmaya yönelik fırsatların sağlanması, ispat becerisinin gelişiminde önemli adımlardan biri olduğu düşünülmektedir. Bu

sebeple öğrencilerin sınıf ortamında anlatımsal-sözel ve görsel argümanlara dayalı informal ispat yöntemlerini kullanmalarının teşvik edilmesi önerilmektedir. Öğrencilerin bilişsel gelişimine uygun ispatların sunulması onların anlamlı öğrenmeler sağlamasına katkı sağlayacaktır.

3. Öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin gelişimi için gerekli olan sınıf ortamlarının hazırlanması, matematik öğretmenlerinin ispat becerilerinin istenilen düzeyde olmasını gerektirir. Bu çalışmanın bulguları çalışmaya katılan matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme ve ispat oluşturma kriterleri konusunda bilgi sahibi olduklarını göstermiştir. Matematik öğretmenlerinin ispat becerileri ve gayretlerinin yanı sıra, matematiksel ispat öğretim yöntem ve teknikleri ve öğretim materyalleri hakkında da bilgi sahibi olmalarının önemi yadsınamaz. Ayrıca öğrencilerin kişisel ispat bilgileri hakkında ve oluşturabilecekleri farklı argüman seviyeleri hakkında bilgi sahibi olmaları gerekliliği önerilmektedir.

4. Öğrencilerin bir matematiksel önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını nedenleriyle birlikte öğrenmesi, onların muhakeme becerilerini arttırması ve anlamlı öğrenmenin sağlanması için önemli bir araçtır. Bu nedenle, öğretim süreçlerinde ispatlayan ispatlardan ziyade açıklayıcı ispatlara daha fazla yer verilmesi de önerilmektedir.

5. İspatlama süreçlerine sadece geometri konularında yer verilmemesi gerektiği, matematiğin tüm süreçlerinde yer alması gerektiği çoğu araştırmacı tarafından bildirilmiştir (Aylar, 2014; Ball ve diğerleri, 2002; Bell, 1976; Bieda, 2010; Fischbein, 1982; Knuth, 2002a) Matematikte öğrenilen bilgilerin mantıksal temellere oturtulması için ispata tüm öğrenme alanlarında yer verilmesi gerekliliği önerilmektedir.

Araştırmacılara Yönelik Öneriler

1. Bu araştırma, bir devlet okulunda akademik başarı seviyesi yüksek öğrencilerin oluşturduğu, altı 7. sınıf, altı 8. sınıf öğrencisi ve dört matematik öğretmeni ile sınırlıdır. Gelecek çalışmalarda, daha fazla öğrenci ve daha fazla öğretmenle çalışmalar yapılması önerilebilir. Ek olarak çalışma daha geniş bir yelpazeye

ayrılarak akademik başarısı orta seviyede ve düşük seviyede öğrenciler de sürece dahil edilerek daha genel sonuçlara ulaşılabilir.

2. Bu çalışmadan elde edilen bulgular, cebir bilgisi ile ispat oluşturma ve argüman değerlendirme becerisi arasında bir ilişkinin olduğunu ortaya koymaktadır. Bu ilişki daha derinlemesine araştırılabilir, ortaokul öğrencilerinin cebir konu alanına ilişkin yeterlikleri ile ispat becerileri arasındaki ilişki başka çalışmalara konu olabilir.

3. Eğitim kademelerinin çoğunda doğrulama yöntemi olarak deneysel argümanlar kullanılmasının sebeplerinin ve doğrulamalarda tek örnek, birden fazla örnek veya kritik örnek vermenin daha derinlemesine değerlendirilmesinin yeni araştırmalara konu olabileceği düşünülmektedir.

4. Ülkemiz sınavların yoğun olduğu bir eğitim sistemine sahiptir. Bu sebeple ortaokuldan liseye, liseden üniversiteye geçiş sınavlarının muhakeme ve ispat yapabilme becerilerini ne ölçüde test edebildiği yeni araştırmalara konu olabilir.

5. Matematik öğretmenlerinin, öğrencilerin ispat becerilerinin gelişimindeki rolü düşünüldüğünde, matematik öğretmenlerinin matematik eğitimi sürecinde ispat öğretimine yönelik tutumlarının incelenmesi yeni araştırmalara konu olabilir.

6. İspat öğretiminin nasıl gerçekleştirilebileceği veya ispat öğretiminde etkin stratejilerin belirlenmesi başka bir çalışmanın konusu olarak ele alınabilir.

KAYNAKÇA

Albayrak-Bahtiyari, Ö. (2010). *8. sınıf matematik öğretiminde ispat ve muhakeme kavramlarının ve önemlerinin farkındalığı*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Almeida, D. (2000). A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications form mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. *31*(6), 869–890.

Almeida, D. (2001). Pupils' proof potential, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(1), 53-60.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can hhe genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(4), 479–488.

Altıparmak, K. ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi, 6*(1), 25-37.

Altun, M. (2007). *Eğitim fakülteleri ve matematik öğretmenleri için ortaöğretimde matematik öğretimi*. Bursa: Alfa Aktüel Yayınevi.

Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof: History and epistemology. P. Boero (Editör), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* içinde (s. 27-42). Rotterdam: Sense Publishers.

Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Yayınlanmamış doktora tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

Aslan, S. (2014). Öğrencilerin yazılı bilimsel argüman oluşturma ve değerlendirme becerilerinin incelenmesi. *Eğitimde Kuram ve Uygulama, 10*(1), 41-74.

Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Aylar, E. ve Şahiner, Y. (2016). Yedinci sınıf öğrencilerinin ispat becerileri ve tercihlerinin incelenmesi. *Ahi Evran Üniversitesi Kırşehir Eğitim Fakültesi Dergisi, 17*(3), 559-579.

Baki, A. (2008). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. En Pimm, D. (Editör), *Mathematics, teachers and children* içinde (s. 216-235). Londra: Hodder ve Stoughton.

Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N. ve Movshovitz-Hadar, N. (2002). The teaching of proof. L. I. Tatsien (Editör), *Proceedings of the international congress of mathematicians* içinde (s. 907–920). Beijing: Higher Education Press.

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D. ve Dreyfus, T. (2002). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. A. D. Cockburn ve E. Nardi (Editörler), *Proceedings of the 26th annual meeting of the international group for the psychology of mathematics education* içinde (s. 57-64). Norwich, UK.

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1/2), 23-40.

Biber, A. Ç. ve Tuna, A. (2017). Ortaokul matematik kitaplarındaki öğrenme alanları ve Bloom Taksonomisine göre karşılaştırılmalı analizi. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 36*(1), 161-174.

Bieda, K. N. (2010). Enacting proof-related tasks in middle school mathematics: Challenges and opportunities. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 351–382.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI) (2010). Common Core State Standards for mathematics. http://corestandards.org/asserts/CCSSI_Math%20Standards.pdf adresinden alınmıştır.

Cooper, J., Walkington, C., Williams, C., Akinsiku, O., Kalish, C., Ellis, A., ve diğerleri. (2011). *Adolescent reasoning in mathematics: Exploring middle school students' strategic approaches to empirical-based justifications.* Cognitive Science Society 33. yılı konferansında sunuldu, Boston, MA.

Creswell, J. W. (2013). *Nitel araştırma yöntemleri* (çev. M. Bütün ve S. B. Demir). Siyasal Yayınları.

Çalışkan, Ç. (2012). *8.sınıf öğrencilerinin matematik başarılarıyla ispat yapabilme seviyelerinin ilişkilendirilmesi.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Uludağ Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bursa.

Çontay, E. G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalar*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Denizli.

Davey, L. (1991). The application of case study evaluations. *Practical Assessment, Research ve Evaluation, 2*(9), 1-2.

De Villiers, M.D. (1990). The role and function of proofs in mathematics, *Pythagoras, 24*, 17-24.

Dede, Y. ve Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi 4*(2), 47-71.

Dede, Y. (2013). Matematikte ispat: Önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. İ. Ö. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır ve A. Delice (Editörler). *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (s. 15-34). Ankara: Pegem Akademi.

Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi.* Yayınlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For The Learning of Mathematics, 3*(2), 9-18.

Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true? *School Science and Mathematics, 106*(3), 124-132.

Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2012). Üniversite öğrencilerinin ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 1*(4), 56–64.

Gökkurt, B., Deniz, D., Akgün, L., ve Soylu, Y. (2014). Matematik alanında ispat yapma süreci üzerine yapılmış bazı araştırmalardan bir derleme. *Başkent University Journal of Education, 1*(1), 55-63.

Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi.* Yayınlanmamış doktora lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Güner, P. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Güven, B., Çelik D. ve Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi, *Çağdaş Eğitim Dergisi, 316,* 35– 45.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*, 6-13.

Hanna, G. (2000a). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5–23.

Hanna, G. (2000b). A critical exemination of three factors in the decline of proof, *Interchange, 31* (1), 21–33.

Hanna, G. ve Jahnke, N. (1993). Proof and application., *24*, 421-438.

Hanna, G. (2008). Beyond verification: Proof can teach new methods. http://www.unige.ch/math/EnsMath/Rome2008/ WG1/Papers/HANNA.pdf adresinden alınmıştır.

Hanna, G. ve Barbeau, E. (2008). Proof as bearers of mathematical knowledge, *ZDM Mathematics Education, 40,* 345- 353.

Harel, G. ve Sowder, L. (1998). Types of students' justifications. *The Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Healy, L. ve Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra, *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396–428.

Hersch, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics,24*(4), 389-399.

İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış doktora tezi. Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 53–60.

Knuth, E. J. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379–405.

Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5,* 61-88.

Knuth, E. J., Slaughter, M., Choppin, J. M. ve Sutherland, J. (2002). Mapping the conceptual terrain of middle school students' competencies in justifying and proving. D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant, ve K. Noony (Editörler). *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* içinde (s. 1693–1700).

Knuth, E.J., Choppin, J.M. ve Bieda, K.N. (2009). Proof: Examples and beyond. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(4), 206-211.

Küchemann, D. ve Hoyles, C. (2005). Pupils' awareness of structure on two number/algebra questions. Marianna Bosch (Editör). *Proceedings of the Fourth Conference of the European society for Research in Mathematics Education* içinde (s. 438–447). Spain: Sant Feliu de Guixols.

Le Compte, M. D. ve Goetz, J. P. (1982). Problems of reliability and validity in ethnographic research. *Review of Educational Research, 52*(1), 31-60.

Lee, J. K. (2002). Philosophical perspectives on proof in mathematics education, *Philosophy of Mathematics Education,* 16.

Maher, C.A. ve Martino, A.M. (1996). The development of the idea of mathematical proof: A 5-year case study. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 194–214.

Mansi, K. E. (2003). *Reasoning and geometric proof in mathematics education: A review of the literature,* Degree of Master of Science, North Carolina State University.

Martin, W. G. ve Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 41-51.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.

MEB (2005). *İlköğretim matematik dersi (6, 7, ve 8. Sınıflar) matematik dersi öğretim programı.* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

MEB(2013). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) öğretim programı*. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

MEB (2018). *Matematik dersi öğretim programı (İlkokul ve Ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. Sınıflar).* Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.

Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lover secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 47-68.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E. ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri, *Kastamanu Eğitim Dergisi, 14*(1), 147-160.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Özer, Ö. ve Arıkan, A., (2002, 16-18 Eylül). *Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri.* V. Ulusal Fen Bilimleri Ve Matematik Eğitimi Kongresi'nde sunuldu, Ankara.

Öztürk, M. (2017). *Matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin bilişsel açısından incelenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Raman, M. J. (2002). *Proof and justification in collegiate calculus*. Doctoral dissertation, University of California: Berkeley.

Reid, D. A. ve Knipping, C. (2010). Proof in mathematics education research. *Learning and Teaching*. Rotterdam: Sense Publishers.

Ross, K. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proof in school mathematics. *American Mathematical Monthly*, 3, 252-255.

Polya, G. (1981), *Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving.* New York: Wiley.

Quinn, A. L. (2009). Count on number theory to inspire proof, *Mathematics Teacher, 103*(4), 298-304.

Schoenfeld, A. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*, 55–80.

Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher, 78*, 448-456.

Stylianides A. J. (2007a). Proof and proving in school mathematics. *Journal of Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Stylianides, A. J. (2007b). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 1-20.

Stylianides, G. J. (2008). An analytic framework of reasoning and proving. *For the Learning of Mathematics, 28*(1), 9-16.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning and proving in school mathematics text books. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 258-288.

Tall, D. (Editör) (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. O. (1998). The cognitive development of proof: Is mathematical proof for Al lor for some? Z. Usiskin (Editör), *Developments in school mathematics education around the world* içinde (s. 117-136). Reston, VA: NCTM.

TDK (2019, Haziran 15). Büyük Türkçe sözlük. http://sozluk.gov.tr/ adresinden alınmıştır.

Tucker, T. W. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary Issues in Mathematics Education*, *36*, 31-35.

Tuncer, G. (2014). *Matematik bölümü öğrencilerinin ispat algıları.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Uğurel, I. (2010). *Ortaöğretim matematik programının temel ögeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24,* 234-243.

Umland, K., ve Sriraman, B. (2014). Argumentation in mathematics education. S. Lerman (Editör). *Encyclopedia of mathematics educatio* içinde (s. 46-48). Dordrecht: Springer.

Ülker, E. (2018). *Ortaokulda ispata giriş: Gerçekçi matematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımı.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Waring, S. (2000). *Can you prove it? Develoing concept of proof in primary and secondary school.* Leicester, UK: The Mathematical Association.

Weber, K (2006). Investigating and teaching the processes used to construct proofs. *Research in Collegiate Mathematics Education, 6,* 197-232.

Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. B. (2006). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi, 40*(1), 181–213.

Yıldırım, C. (1996). *Matematiksel Düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yıldırım, A. (1999). Nitel araştırma yöntemlerinin temel özellikleri ve eğitim araştırmalarındaki yeri ve önemi. *Eğitim ve Bilim, 23*(112), 7-17.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2013). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yılmaz, K. (2015). *Matematiksel modellerle teorem ispatlarının ilköğretim matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerine, ispatla ilgili görüşlerine ve akademik başarılarına etkisi.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Zaimoğlu, Ş. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kastamonu.

Zeybek Şimşek, Z., Üstün, A. ve Birol, A. (2018), Matematiksel ispatların ortaokul matematik ders kitaplarındaki yeri. *İlköğretim Online,17*(3), 1317-1335.

Zeybek-Şimşek, Z. ve Üstün, A. (2019). 7. sınıf öğrencilerinin dörtgenler konusundaki ispat seviyelerinin incelenmesi. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 13*(1), 196-216.

EKLER

Ek 1. İspat Beceri Testi

Çok değerli katılımcı,

Dört sorudan oluşan İspat Beceri Testi, öğrencilerin ve matematik öğretmenlerinin matematiksel ispat yapabilme becerileri hakkında bilgi toplamak amacıyla hazırlanmıştır. Bu araştırmadan elde edilen veriler, bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Elde edilen bulgular ve sonuçların yayınlanması aşamasında kesinlikle isminiz ya da diğer şahsi bilgileriniz belirtilmeyecektir. Lütfen soruları dikkatle okuyarak yanıtlamaya çalışınız. Katkılarınız için teşekkür ederiz.

Adınız ve Soyadınız :

Durumunuz:

○ 7. Sınıf Öğrencisi

○ 8. Sınıf Öğrencisi

○ Matematik Öğretmeni

1. *"Herhangi 3 tek sayının toplamı yine tektir." ifadesini ispatlayanız.*

2. *"Herhangi 2 çift sayının toplamı yine çift bir sayıdır."* ifadesini ispatlayanız.

3. *"Ardışık 3 tam sayının toplamı daima 3'ün katıdır." ifadesini ispatlayanız.*

4. *"$n^2 + n$çifttir."*ifadesini ispatlayanız.

Ek 2-a. Argüman Değerlendirme Testi

(Öğrenci)

Çok değerli katılımcı,

Dört adet matematiksel ifadeye verilebilecek muhtemel cevaplardan (matematiksel argümanlar) ve bu cevapların değerlendirilmesi için 5'er soruluk anketlerden oluşan Argüman Değerlendirme Testi, öğrencilerin matematiksel ispat sürecinde argüman tercihleri hakkında bilgi toplamak amacıyla hazırlanmıştır.

Bu araştırmadan elde edilen veriler, bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Elde edilen bulgular ve sonuçların yayınlanması aşamasında kesinlikle isminiz ya da diğer şahsi bilgileriniz belirtilmeyecektir. Lütfen soruları dikkatle okuyarak yanıtlamaya çalışınız. Katkılarınız için teşekkür ederiz.

Adınız ve Soyadınız :

Durumunuz:

○ 7. Sınıf Öğrencisi

○ 8. Sınıf Öğrencisi

1. Bir matematik öğretmeni sınıfındaki öğrencilerden aşağıdaki ifadenin doğruluğunu ispatlamalarını istiyor.

"Herhangi 3 tek sayının toplamı tektir."

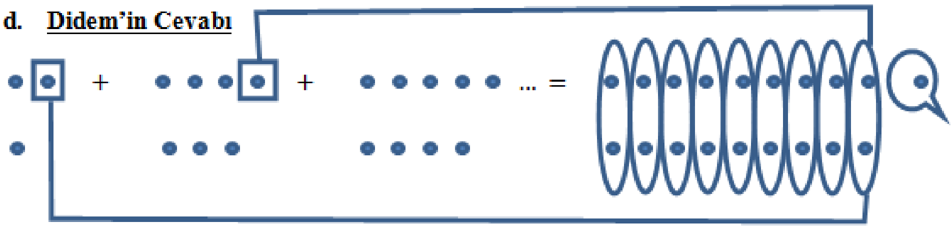
Bu soruya karşılık sınıftaki bazı öğrencilerin verdiği cevaplar aşağıda verilmiştir:

a. **<u>Arzu'nun Cevabı</u>**
Üç tek sayı; T_1, T_2 ve T_3 olsun.
İki tek sayının toplamı $(T_1 + T_2)$ olur.
Elde ettiğimiz bu çift sayı ile diğer tek sayıyı topladığımızda
$(T_3 + \text{Çift})$sonuç yine tek olur.

b. **<u>Batuhan'ın Cevabı</u>**
$1 + 3 + 5 = 9$, $3 + 7 + 11 = 21$, $13 + 15 + 17 = 45$ …
Örneklerden de anlaşılacağı üzere sonuç tek olur.

c. **<u>Cemile'nin Cevabı</u>**
a, b ve c birer tam sayı ise;
$(2a + 1)$, $(2b + 1)$ ve $(2c + 1)$ birer tek sayıdır. Bu üç tek sayının toplamı;
$(2a + 1) + (2b + 1) + (2c + 1) = 2.(a + b + c + 1) + 1$ olur.
$2.(a + b + c + 1)$ çift olduğuna göre bu ifadeye 1 eklenince sonuç tek olur.

d. **<u>Didem'in Cevabı</u>**



Sondaki pul 2'li oluşturmuyor.

Üç tek sayıyı sayma pulları ile modelleyip ikişerli gruplandırdığımızda hep 1 sayma pulu dışarıda kalır.

Yani sonuç tektir.

Size göre hangi öğrencinin cevabı daha geçerlidir? Neden?

2. Bir matematik öğretmeni sınıfındaki öğrencilerden aşağıdaki ifadenin doğruluğunu ispatlamalarını istiyor.

"Herhangi 2 çift sayının toplamı yine çift bir sayıdır."

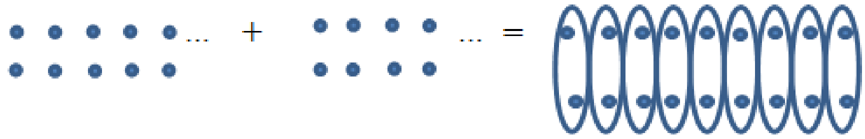
Bu soruya karşılık sınıftaki bazı öğrencilerin verdiği cevaplar aşağıda verilmiştir:

a. **Ahmet'in Cevabı**
Birler basamağı 0,2,4,6,8 olan sayılar çift sayıdır. İki çift sayı $Ç_1$ ve $Ç_2$ olsun.
Bu iki çift sayının toplamının $(Ç_1 + Ç_2)$ birler basamağı 0,2,4,6,8 olur.
Bu sebeple sonuç çifttir.

b. **Berke'nin Cevabı**
$2 + 2 = 4$, $4 + 2 = 6$, $6 + 4 = 10$, …
Örneklerden anlaşılacağı üzere sonuç çifttir.

c. **Canan'ın Cevabı**
A ve B birer tam sayı ise
2.A ve 2.B iki çift sayı olur. Bu iki çift sayının toplamı;
$2.A + 2.B = 2.(A + B)$
Sonuç 2'nin katıdır ve bu yüzden sonuç çifttir.

d. **Deniz'in Cevabı**



İki çift sayıyı sayma pulları ile modelleyip ikişerli gruplandırdığımızda açıkta pul kalmaz. Yani çift olur.

Size göre hangi öğrencinin cevabı daha geçerlidir? Neden?

3. Bir matematik öğretmeni sınıfındaki öğrencilerden aşağıdaki ifadenin doğruluğunu ispatlamalarını istiyor.

"Ardışık 3 tam sayının toplamı daima 3'ün katıdır."

Bu soruya karşılık sınıftaki bazı öğrencilerin verdiği cevaplar aşağıda verilmiştir:

a. **Aslı'nın Cevabı**

Tersten gidelim. Ardışık üç tam sayının toplamı 3'ün katı olsun.
Bu toplama (3a) dersek ortanca sayıyı bulmak için (3a)'yı 3'e böleriz ve (a) buluruz.
(a) ortanca sayı ise 1 eksiği $(a-1)$, 1 fazlası $(a+1)$ diğer sayılar olur.
$(a-1)$, a , $(a+1)$ ardışık üç sayıdır.

b. **Banu'nun Cevabı**

$1+2+3=6$, $2+3+4=9$, $5+6+7=18$, $14+15+16=45$, ...
Örneklerden de anlaşılacağı üzere sonuç hep 3'ün katı olur.

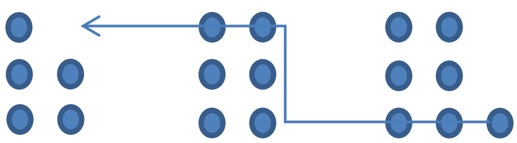
c. **Cevat'ın Cevabı**

Ardışık 3 sayı ya tek sayı ile başlar, ya çift sayı ile başlar.

(Çift ile başlayan durum)
A bir tam sayı olsun
$2A+(2A+1)+(2A+2)=$
$6A+3 = 3.(2A+1)$
olur ve sonuç 3'ün katıdır.

(Tek ile başlayan durum)
B bir tam sayı olsun.
$(2B+1)+(2B+2).(2B+3)=$
$6B+6=3.(2B+2)$
olur ve sonuç 3'ün katıdır.

d. **Esin'in Cevabı**



Ardışık üç tam sayının toplamı sayma pulları ile modellendiğinde; en büyük sayıdaki fazlalık en küçüğüne eklendiğinde birbirine eşit 3 sayı oluşur. Bu sebeple sonuç 3'ün katı olur.

Size göre hangi öğrencinin cevabı daha geçerlidir? Neden?

4. Bir matematik öğretmeni sınıfındaki öğrencilerden aşağıdaki ifadenin doğruluğunu ispatlamalarını istiyor.

“$n^2 + n$ çifttir.”

Bu soruya karşılık sınıftaki bazı öğrencilerin verdiği cevaplar aşağıda verilmiştir:

a. <u>Alper’in Cevabı</u>

İki durum vardır.

1. durum: n tek ise n^2’de tektir. $n^2 + n$ iki tek sayının toplamı çifttir
2. durum: n çift ise n^2’de çifttir. $n^2 + n$ iki çift sayının toplamı çifttir.

b. <u>Bengü’nün Cevabı</u>

$n = 3$ olsun.

$n^2 + n = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$ olur.

$n = 6$ olsun.

$n^2 + n = 6^2 + 6 = 36 + 6 = 42$ olur.

c. <u>Cahit’in Cevabı</u>

İki durum vardır.

1. Durum: n tek ise

   $n = 2a + 1$ olsun.

   $n^2 + n = (2a + 1)^2 + (2a + 1) = 4a^2 + 4a + 1 + 2a + 1 = 4a^2 + 6a + 2 =$

   $2.(2a^2 + 3a + 1)$ olur. Yani sonuç 2’nin katıdır.

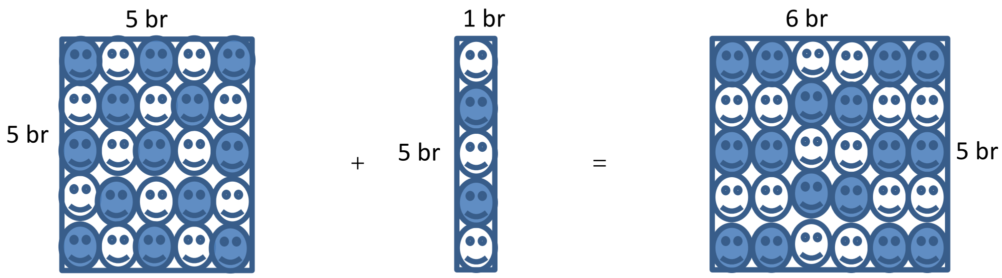
2. Durum: n çift ise

   $n = 2a$ olsun

   $n^2 + n = (2a)^2 + 2a = 4a^2 + 2a = 2.(2a^2 + a)$ olur. Yani sonuç yine çifttir.

d. <u>Derya’nın Cevabı</u>

$n = 5$ olsun.



Görüldüğü üzere bir sayıyı karesiyle topladığımızda bir kenar uzunluğu diğer kenar uzunluğunun 1 birim fazlası olan (ardışık) dikdörtgen elde ederiz. Ardışık iki sayıdan bir tanesi daima çift olacağı için bu dikdörtgenin alanı da çift olur.

Size göre hangi öğrencinin cevabı daha geçerlidir? Neden?

Ek 2-b. Argüman Değerlendirme Testi

(Öğretmen)

Çok değerli katılımcı,

Dört adet matematiksel ifadeye verilebilecek muhtemel cevaplardan (matematiksel argümanlar) oluşan Argüman Değerlendirme Testi, matematik öğretmenlerinin, öğrencilerin matematiksel ispat yeteneklerini nasıl değerlendirdikleri ve argüman tercihleri hakkında bilgi toplamak amacıyla hazırlanmıştır.

Bu araştırmadan elde edilen veriler, bilimsel bir araştırmada kullanılacaktır. Elde edilen bulgular ve sonuçların yayınlanması aşamasında kesinlikle isminiz ya da diğer şahsi bilgileriniz belirtilmeyecektir. Lütfen soruları dikkatle okuyarak yanıtlamaya çalışınız. Katkılarınız için teşekkür ederiz.

Adınız ve Soyadınız :

1. Bir matematik sınavında öğrencilerden aşağıdaki ifadenin ispatlanmasını istediğinizi düşünün.

"Herhangi 3 tek sayının toplamı tektir."

Bu soruya karşılık sınıftaki bazı öğrencilerin verdiği yanıtlar şöyledir:

a. **Arzu'nun Cevabı**

Üç tek sayı; T_1, T_2 ve T_3 olsun.

İki tek sayının toplamı $(T_1 + T_2)$ olur.

Elde ettiğimiz bu çift sayı ile diğer tek sayıyı topladığımızda $(T_3 + \text{Çift})$ sonuç yine tek olur.

b. **Batuhan'ın Cevabı**

$1 + 3 + 5 = 9$, $3 + 7 + 11 = 21$, $13 + 15 + 17 = 45$ …

Örneklerden de anlaşılacağı üzere sonuç tek olur.

c. **Cemile'nin Cevabı**

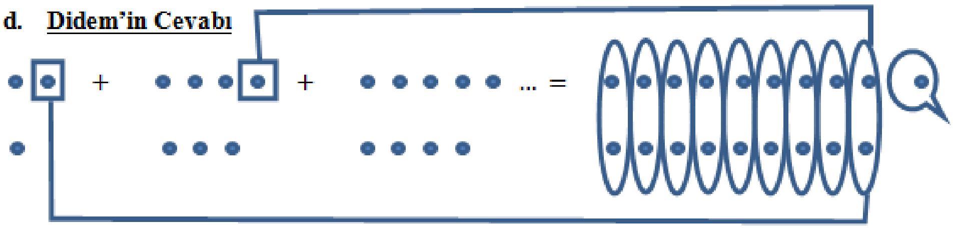
a, b ve c birer tam sayı ise;

$(2a + 1)$, $(2b + 1)$ ve $(2c + 1)$ birer tek sayıdır. Bu üç tek sayının toplamı;

$(2a + 1) + (2b + 1) + (2c + 1) = 2.(a + b + c + 1) + 1$ olur.

$2.(a + b + c + 1)$ çift olduğuna göre bu ifadeye 1 eklenince sonuç tek olur.

d. **Didem'in Cevabı**



Sondaki pul 2'li oluşturmuyor.

Üç tek sayıyı sayma pulları ile modelleyip ikişerli gruplandırdığımızda hep 1 sayma pulu dışarıda kalır. Yani sonuç tektir.

Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

2. Bir matematik sınavında öğrencilerden aşağıdaki ifadenin ispatlanmasını istediğinizi düşünün.

“Herhangi 2 çift sayının toplamı yine çift bir sayıdır.”

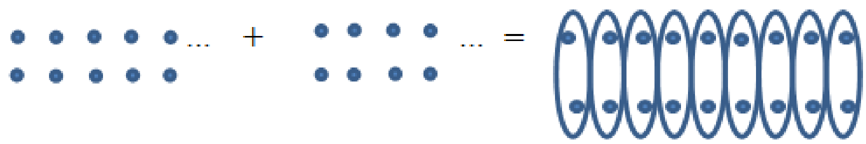
Bu soruya karşılık sınıftaki bazı öğrencilerin verdiği yanıtlar şöyledir:

a. **<u>Ahmet’in Cevabı</u>**
Birler basamağı 0,2,4,6,8 olan sayılar çift sayıdır. İki çift sayı $\text{Ç}_1 \ ve \ \text{Ç}_2$ olsun.
Bu iki çift sayının toplamının $(\text{Ç}_1 + \text{Ç}_2)$ birler basamağı 0,2,4,6,8 olur.
Bu sebeple sonuç çifttir.

b. **<u>Berke’nin Cevabı</u>**
$2 + 2 = 4$, $4 + 2 = 6$, $6 + 4 = 10$, …
Örneklerden anlaşılacağı üzere sonuç çifttir.

c. **<u>Canan’ın Cevabı</u>**
A ve B birer tam sayı ise
2.A ve 2.B iki çift sayı olur. Bu iki çift sayının toplamı;
$2.A + 2.B = 2.(A + B)$
Sonuç 2’nin katıdır ve bu yüzden sonuç çifttir.

d. **<u>Deniz’in Cevabı</u>**



İki çift sayıyı sayma pulları ile modelleyip ikişerli gruplandırdığımızda açıkta pul kalmaz. Yani çift olur.

Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

3. Bir matematik sınavında öğrencilerden aşağıdaki ifadenin ispatlanmasını istediğinizi düşünün.

"Ardışık 3 tam sayının toplamı daima 3'ün katıdır."

Bu soruya karşılık sınıftaki bazı öğrencilerin verdiği yanıtlar şöyledir:

a. **<u>Aslı'nın Cevabı</u>**
Tersten gidelim. Ardışık üç tam sayının toplamı 3'ün katı olsun.
Bu toplama (3a) dersek ortanca sayıyı bulmak için (3a)'yı 3'e böleriz ve (a) buluruz.
(a) ortanca sayı ise 1 eksiği $(a-1)$, 1 fazlası $(a+1)$ diğer sayılar olur.
$(a-1)$, a , $(a+1)$ ardışık üç sayıdır.

b. **<u>Banu'nun Cevabı</u>**
$1+2+3=6$, $2+3+4=9$, $5+6+7=18$, $14+15+16=45$, ...

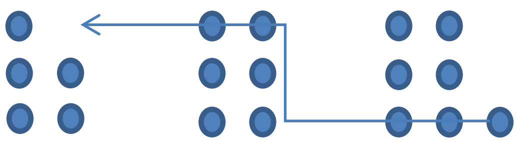
Örneklerden de anlaşılacağı üzere sonuç hep 3'ün katı olur.

c. **<u>Cevat'ın Cevabı</u>**
Ardışık 3 sayı ya tek sayı ile başlar, ya çift sayı ile başlar.

(Çift ile başlayan durum)
A bir tam sayı olsun
$2A+(2A+1)+(2A+2)=$
$6A+3 \;=\; 3.(2A+1)$
olur ve sonuç 3'ün katıdır.

(Tek ile başlayan durum)
B bir tam sayı olsun.
$(2B+1)+(2B+2).(2B+3)=$
$6B+6=3.(2B+2)$
olur ve sonuç 3'ün katıdır.

d. **<u>Esin'in Cevabı</u>**



Ardışık üç tam sayının toplamı sayma pulları ile modellendiğinde; en büyük sayıdaki fazlalık en küçüğüne eklendiğinde birbirine eşit 3 sayı oluşur. Bu sebeple sonuç 3'ün katı olur.

Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

4. Bir matematik sınavında öğrencilerden aşağıdaki ifadenin ispatlanmasını istediğinizi düşünün.

“$n^2 + n$ çifttir.”

Bu soruya karşılık sınıftaki bazı öğrencilerin verdiği yanıtlar şöyledir

a. <u>Alper’in Cevabı</u>

İki durum vardır.

1. durum: n tek ise n^2’de tektir. $n^2 + n$ iki tek sayının toplamı çifttir
2. durum: n çift ise n^2’de çifttir. $n^2 + n$ iki çift sayının toplamı çifttir.

b. <u>Bengü’nün Cevabı</u>

$n = 3$ olsun.

$n^2 + n = 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12$ olur.

$n = 6$ olsun.

$n^2 + n = 6^2 + 6 = 36 + 6 = 42$ olur.

c. <u>Cahit’in Cevabı</u>

İki durum vardır.

3. Durum: n tek ise

$n = 2a + 1$ olsun.

$n^2 + n = (2a + 1)^2 + (2a + 1) = 4a^2 + 4a + 1 + 2a + 1 = 4a^2 + 6a + 2 =$

$2.(2a^2 + 3a + 1)$ olur. Yani sonuç 2’nin katıdır.

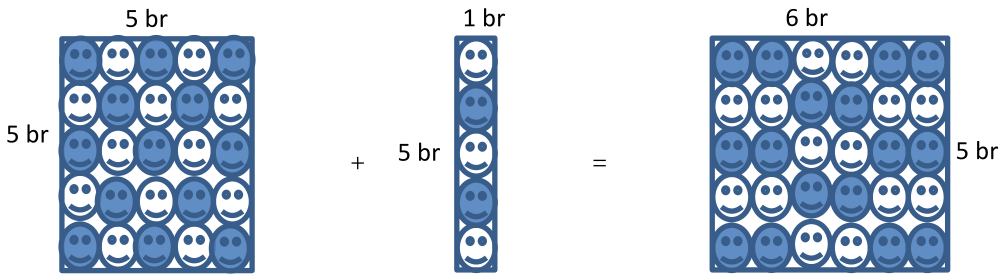
4. Durum: n çift ise

$n = 2a$ olsun

$n^2 + n = (2a)^2 + 2a = 4a^2 + 2a = 2.(2a^2 + a)$ olur. Yani sonuç yine çifttir.

d. <u>Derya’nın Cevabı</u>

$n = 5$ olsun.



Görüldüğü üzere bir sayıyı karesiyle topladığımızda bir kenar uzunluğu diğer kenar uzunluğunun 1 birim fazlası olan (ardışık) dikdörtgen elde ederiz. Ardışık iki sayıdan bir tanesi daima çift olacağı için bu dikdörtgenin alanı da çift olur.

Hangi öğrencinin cevabına daha yüksek puan verirsiniz? Neden?

Hangi öğrencinin cevabına daha düşük puan verirsiniz? Neden?

Ek 3. Veli İzin Formu

Sayın Veli;

Çocuğunuzun katılacağı bu çalışma, "İspat Beceri Testi ve Argüman Değerlendirme Testi" adıyla yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerilerinin ve argüman tercihlerinin incelenmesi amaçlanmaktadır.

Araştırma Uygulaması: Anket formu ve Görüşme şeklindedir.

Araştırma T.C. Milli Eğitim Bakanlığı'nın ve okul yönetiminin de izni ile gerçekleşmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çocuğunuz çalışmaya katılıp katılmamakta özgürdür. Araştırma çocuğunuz için herhangi bir istenmeyen etki ya da risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun katılımı **tamamen sizin isteğinize bağlıdır**, reddedebilir ya da herhangi bir aşamasında ayrılabilirsiniz. Araştırmaya katılmamama veya araştırmadan ayrılma durumunda öğrencilerin akademik başarıları, okul ve öğretmenleriyle olan ilişkileri etkilemeyecektir.

Çalışmada öğrencilerden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir.

Uygulamalar, genel olarak kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden çocuğunuz kendisini rahatsız hissederse cevaplama işini yarıda bırakıp çıkmakta özgürdür. Bu durumda rahatsızlığın giderilmesi için gereken yardım sağlanacaktır. Çocuğunuz çalışmaya katıldıktan sonra istediği an vazgeçebilir. Böyle bir durumda veri toplama aracını uygulayan kişiye, çalışmayı tamamlamayacağını söylemesi yeterli olacaktır. Anket çalışmasına katılmamak ya da katıldıktan sonra vazgeçmek çocuğunuza hiçbir sorumluluk getirmeyecektir.

Onay vermeden önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla,

Araştırmacı :İbrahim TURAN
İletişim bilgileri : 0506 253 7710 – ibrahimturan1988@gmail.com

Velisi bulunduğum .... sınıfı .... numaralı öğrencisi ....
……………………………'in yukarıda açıklanan araştırmaya katılmasına izin veriyorum.
(Lütfen formu imzaladıktan sonra çocuğunuzla okula geri gönderiniz*).

…./…../…………
İsim-Soyisim İmza:

Veli Adı-Soyadı :
Telefon Numarası :

Ek 4. Gönüllü Katılım Formu

Sayın Katılımcımız,

Katılacağınız bu çalışma, "İspat Beceri Testi ve Argüman Değerlendirme Testi" adıyla yapılacak bir araştırma uygulamasıdır.

Araştırmanın Hedefi: Matematik akademik başarısı yüksek ortaokul 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin ispat yapabilme becerilerinin ve argüman tercihlerinin incelenmesi amaçlanmaktadır.

Araştırmanın Nedeni: Tez çalışması

Araştırmanın Yapılacağı Yer: Okul içinde herhangi bir yer.

Araştırma Uygulaması: Anket formu ve Görüşme

Araştırma T.C. Milli Eğitim Bakanlığı'nın ve okul/kurum yönetiminin izni ile gerçekleşmektedir. Araştırma uygulamasına katılım tamamıyla gönüllülük esasına dayalı olmaktadır. Çalışmada sizden kimlik belirleyici hiçbir bilgi istenmemektedir. Cevaplar tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir. Veriler sadece araştırmada kullanılacak ve üçüncü kişilerle paylaşılmayacaktır.

Uygulamalar, kişisel rahatsızlık verecek sorular ve durumlar içermemektedir. Ancak, katılım sırasında sorulardan ya da herhangi başka bir nedenden rahatsız hissederseniz cevaplama işini yarıda bırakabilirsiniz.

Katılımı onaylamadan önce sormak istediğiniz herhangi bir konu varsa sormaktan çekinmeyiniz. Çalışma bittikten sonra bizlere telefon veya e-posta ile ulaşarak soru sorabilir, sonuçlar hakkında bilgi isteyebilirsiniz. Saygılarımızla,

Araştırmacı :İbrahim TURAN
İletişim Bilgileri : 0506 253 7710 – ibrahimturan1988@gmail.com

Yukarıda bilgileri bulunan araştırmaya katılmayı kabul ediyorum.

…./…../…………
İsim-Soyisim
İmza:

Katılımcı Adı-Soyadı :
Telefon Numarası :

Ek 5. Üniversite Uygulama Etik Kurul Onayı

T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER ARAŞTIRMALARI ETİK KURULU
KARAR BELGESİ

KARAR TARİHİ	OTURUM NO	KARAR SAYISI
30.05.2019	03	06

ÇALIŞMANIN TÜRÜ	Yüksek Lisans Tez Çalışması
BAŞLIK	Matematik Akademik Başarısı Yüksek 7. Sınıf ve 8. Sınıf Öğrencilerinin İspat Yapabilme Süreçlerinin ve Bu Süreçler Hakkında Öğretmen Görüşlerinin İncelenmesi
PROJE/TEZ YÜRÜTÜCÜSÜ	Dr. Öğr. Üyesi Zülfiye ZEYBEK ŞİMŞEK
TEZ YAZARI	İbrahim TURAN Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Öğrencisi
RAPORTÖR GÖRÜŞÜ	OLUMLU
KARAR	UYGUNDUR

Prof. Dr. Eren YÜRÜDÜR
Etik Kurul Başkanı
(İmza)

Doç. Dr. Mehmet KARGÜN
Başkan Yardımcısı
(İmza)

Doç. Dr. Yücel EROL
Üye
(İmza)

Doç. Dr. Emine ÖĞÜK
Üye
(İmza)

Doç. Dr. Mehmet Serkan UMUZDAŞ
Üye
(İmza)

Doç. Dr. Fatih YAZICI
Üye
(İmza)

Dr. Öğr. Üyesi Özlem GÖK
Üye
(İmza)

Ek 6. Uygulama İzin Formu

T.C.
TOKAT VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 27001677-20-E.12656263 02/07/2019
Konu : Araştırma İzni Verilmesi

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : a)Milli Eğitim Bakanlığına Bağlı Okul ve Kurumlarda Yapılacak Araştırma ve Araştırma Desteğine Yönelik İzin ve Uygulama Yönergesi.
b) 31/03/2019 tarihli ve 27001677/600/6557371 sayılı Valilik Makam Onayı.
c) Araştırma İzinleri İnceleme Komisyonunun 28/06/2019 tarihli tutanağı.
d) Gaziosmanpaşa Üniversitesi Rektörlüğü Öğrenci İşleri Daire Başkanlığının 13/06/2019 tarih ve 8382 sayılı yazısı.

Gaziosmanpaşa Üniversitesi'nin ilgi (d) talebi gereği Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi İbrahim TURAN 08.07.2019-19.07.2019 tarihleri arasında Tokat/Turhal ilçe Milli Eğitim Müdürlüğü Alparslan Ortaokulu öğretmen ve öğrencilerine yönelik "Matematik Akademik Başarısı Yüksek Ortaokul 7. Ve 8. Sınıf Öğrencilerinin İspat Yapabilme Süreçlerinin ve Bu Sürüçler Hakkında Öğretmen Görüşlerinin İncelenmesi" ile ilgili ölçek uygulaması konusunda hazırlamış olduğu bilimsel amaçlı anket çalışmasını uygulamak istemektedir.

Söz konusu bilimsel amaçlı çalışmanın Tokat/Turhal ilçe Milli Eğitim Müdürlüğü Alparslan Ortaokulu öğretmen ve öğrencilerine belirtilen tarihlerde uygulama yapılması Müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamınızca da uygun görüldüğü takdirde Olur'unuza arz ederim.

Murat KÜÇÜKALİ
İl Milli Eğitim Müdürü

OLUR
02/07/2019

Dr. Mehmet GÖDEKMERDAN
Vali a.
Vali Yardımcısı

Ek:
1-Tutanak
2-Anket
3-Tez Çalışması Araştırma İzni Onay Formu
4-GOP Ünv.Rektörlüğü yazısı

Adres: Gop Bulvarı 60100 Tokat/Merkez
Elektronik Ağ: www.mebb.gov.tr
e-posta: stratejigelistirme60@meb.gov.tr

Bilgi için: Güven KÖKSAL
Tel: 0 (356) 214 10 17
Faks: 0 (356) 214 11 86

Ek 7. Öz Geçmiş

Adı Soyadı	İbrahim TURAN
Kişisel Bilgiler	Uyruğu: T.C. Doğum Tarihi ve Yeri: 15.10.1988 / Turhal
İletişim Bilgileri	Tel: 0 506 253 77 10 E-posta: ibrahimturan1988@gmail.com
Öğrenim Bilgileri	Lise: 2003–2007 Turhal Şeker Anadolu Öğretmen Lisesi Lisans: 2007–2011 Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği
İş Deneyimi	2011–2013: Milli Eğitim Bakanlığı Tokat İl Milli Eğitim Müdürlüğü Yeşilyurt Kuşçu Ortaokulu Matematik Öğretmeni 2013-2014: Milli Eğitim Bakanlığı Mardin İl Milli Eğitim Müdürlüğü Nusaybin Gazipaşa Ortaokulu Yedek Subay Öğretmen 2014-2015: Milli Eğitim Bakanlığı Tokat İl Milli Eğitim Müdürlüğü Yeşilyurt Kuşçu Ortaokulu Matematik Öğretmeni 2015-2017: Milli Eğitim Bakanlığı Tokat İl Milli Eğitim Müdürlüğü Pazar Üzümören Ortaokulu Matematik Öğretmeni 2017-2019: Milli Eğitim Bakanlığı Tokat İl Milli Eğitim Müdürlüğü Turhal Alparslan Ortaokulu Müdür Yardımcısı 2019-halen: Milli Eğitim Bakanlığı Tokat İl Milli Eğitim Müdürlüğü Turhal Ahmet Dinçer İmam Hatip Ortaokulu Matematik Öğretmeni