TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİLER VE TERMAL SALINIMLARIN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bilal CANTÜRK

Mikro ve Nanoteknoloji Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Gökhan Barış BAĞCI

TEMMUZ 2017

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

………………………..
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

……………………….
Prof. Dr. Hamza KURT
Anabilimdalı Başkan Vekili

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 151611009 numaralı Yüksek Lisans Öğrencisi **Bilal CANTÜRK**'ün ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİLER VE TERMAL SALINIMLARIN İNCELENMESİ"** başlıklı tezi **21.07.2017** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Gökhan Barış BAĞCI** ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Turgut BAŞTUĞ (Başkan)** ....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Prof. Dr. Altuğ ARDA ....
Hacettepe Üniversitesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

.

Bilal CANTÜRK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLETİRİLMİŞ ENTROPİLER VE TERMAL SALINIMLARIN İNCELENMESİ

Bilal CANTÜRK

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniveritesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Mikro ve Nanoteknoloji Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Gökhan Barış BAĞCI

Tarih: Temmuz 2017

Boltzmann-Gibbs istatistiğinin uygulama alanı oldukça sınırlıdır. Boltzmann-Gibbs istatistiği, ekstensif sistemler olarak bilinen, en az Avogadro sayısı mertebesinde parçacığın içerildiği, parçacıkların hareketlerinin olabildiğince kaotik olduğu ve parçacıklar arası etkileşimlerin kısa erişimli olduğu sistemlere uygulandığında doğru sonuçlar alınabilmektedir. Ancak bu şartların sağlanmadığı birçok fiziksel, kimyasal ve biyolojik sistemler mevcuttur. Nanoboyuttaki bir aygıtın kendi kütlesel çekimi altında büyümesi, türbülans hareketi yaparak akan bir sıvı akışkanındaki hız vektörleri, nanoboyutta gözeneklere sahip bir ortam ya da zar boyunca moleküllerin difüzyonu ve bir hücre zarındaki iyon geçişleri gibi örnekler, Boltzmann-Gibbs istatistiğinin doğru sonuçlar vermediği sistemlerdir. Boltzmann-Gibbs istatistiğinin açıklayamadığı bu sistemlere kısaca ekstensif-olmayan sistemler denir. Son otuz yıldır bu ekstensif-olmayan sistemlerin analizlerine de uygulanacak şekilde Bolztmann-Gibbs entropisini de kapsayan entropiler üzerinde çalışmalar yapılmaktadır. Genelleştirilmiş entropiler olarak bilinen bu entropiler, Boltzmann-Gibbs entropisine bir ya da birden fazla parametrenin eklenmesi ile elde edilmişlerdir. Bu parametrelerin belirli limitlerinde tekrar Boltzmann-Gibbs entropisi elde edilir. Yapılan bu çalışmalar sonucu birden fazla genelleştirilmiş entropi öne sürülmüştür.

Yakın zamanda entropinin yapısal özellikleri ile formel grup işlemi arasındaki benzerlikten yola çıkarak genelleştirilmiş bu entropileri tek bir entropi altında

birleştirmeye yönelik çalışmalar yapılmıştır. Bütün genelleştirilmiş entropileri birleştiren bu entropiye evrensel entropi denir.

Bu tezin ana konusu evrensel entropiyi grup teorisi esasında inceleyip termodinamiğin üçüncü yasasına ve temel bazı fiziksel geçerlilik şartlarına uyup uymadığını araştırmaktır. Buna ek olarak Tsallis entropisi baz alınarak oluşturulan ekstensif olmayan istatistiksel mekanik çerçevesinde iki uygulamaya yer verilmiş ve termal salınımlar incelenmiştir.

Yapılan çalışmalar sonucu, evrensel entropi dahil diğer bütün genelleştirilmiş entropilerin genelleştirme parametrelerinin fiziksel olarak nasıl belirleneceğinin muğlak kaldığı kanaatine varılmıştır. Shannon-Khinchin'in dördüncü aksiyomunun genişletilmiş hâli olan formel grup işleminin kapalı formunun fiziksel geçerlilik şartları ile uyumlu bir şekilde seçilmemesi sonucu, evrensel entropinin de problemli olduğu vurgulanmıştır. Buna ek olarak genelleştirilmiş entropilerin temelinde yatan birkaç çelişkiye ve probleme değinilmiş ve ekstensif-olmayan istatistiksel mekanik çerçevesinde ergodik hipotezinin yanlış anlaşıldığına dikkat çekilmiştir.

Varılan bu olumsuz sonuçlara rağmen, entropinin yapısal özellikleri ile formel grup yapısı arasındaki benzerliğin genelleştirilmiş entropiyi elde etmek için hâlâ yetkin yöntemlerden biri olarak görülebileceği anlaşılmıştır. Ayrıca genelleştirme parametrelerine başvurmadan, sistemin sıcaklığının dalgalanması hesaba katılıp Boltzmann-Gibbs entropisi yeniden yazıldığında, genelleştirilmiş entropilere benzer entropiler elde edilebilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Entropi, Termodinamiğin üçüncü yasası, Ekstensif sistemler, Ekstensif-olmayan sistemler, Termal dalgalanmalar, Genelleştirme parametreleri.

ABSTRACT

Master of Science

GENERALIZED ENTROPIES AND THE INVESTIGATION OF THERMAL FLUCTUATIONS

Bilal CANTÜRK

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Micro and Nanotechnology Science Programme

Supervisor: Associate Professor Dr. Gökhan Barış BAĞCI

Date: July 2017

The application field of Boltzmann-Gibbs statistic is rather restrictive. It is applied successfully to those systems which contain particles at least at the extent of Avogadro number, which is known as thermodynamic limit, have short-range interaction potential between the particles and whose particles' motions are quite chaotic. These systems are so-called extensive systems. However, there are many systems in Physics, Chemistry and Biology which these conditions don't exist such as the materials growing at nano scale under their gravitation, the velocity vectors of a fluid in the case of turbulence, the diffusion of particles through a porous medium. These systems, which Boltzmann-Gibbs statistic is not obtained, are known as nonextensive systems. For the recent of three decades, a few entropies have been proposed to extend the Boltzmann-Gibbs statistic in a way that can also be applied to the nonextensive systems. These entropies, known as generalized entropies, has been obtained by imposing one or more than one parameter to the Boltzman-Gibbs entropy. These entropies reduce to Boltzmann-Gibbs entropy under the specific limits of their parameter(s).

In recent years, it was noticed a deep similarity between the structural properties of entropy function and the formel group law. This similarity paved the way for unifying the generalized entropies under the name of universal entropy.

The main subject of this thesis is to analyze universal entropy on the ground of group theory and to search whether this entropy satisfies the third law of thermodynamics and some main physical validity conditions, such as Shannon-Khinchin axioms and third law of thermodynamics. In addition, one of the aims of the thesis is to investigate the thermal fluctuation and examine the application of the nonextensive statistical mechanics based on Tsallis entropy.

The results obtained at the end of the thesis can be pointed as follow. The generalized parameter(s) of the entropies, including the universal entropy, is (are) still vague and it seems impossible to give a physical meaning to the parameter (s) by any general manner. Secondly, it has been emphasized that the universal entropy is problematic because of choosing the closed form of the formel group law, which is also the generalizing of the SK-4, inconsistently with the physical validity conditions. In addition, it has been mentioned some antinomies staying on the ground of the generalized entropies and has been drawn attention to the misunderstanding of the ergodic hypothesis.

Despite these unfavorable results, it can be reasonably seen that the aforementioned similarity is still one of the main ways to construct the generalized entropy which also comprises the Boltzmann-Gibbs entropy. On the other hand, it is possible to generalize the Boltzmann-Gibbs entropy by regarding the temperature fluctuation and without imposing any (unphysical) generalized parameter(s).

Key Words: Entropy, Third law of thermodynamic, Extensive systems, Nonextensive systems, Thermal fluctuations, Generalized parameters.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, bilgisinden istifade ettiğim hocam Doç. Dr. Gökhan Barış Bağcı'ya, tezimi okuyup hem içeriğini hem de yazım biçimini anlaşılır kılmamda bana yardımcı olan Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Fazilet Erkekoğlu'na, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Mikro ve Nanoteknoloji Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Turgut Baştuğ'a içtenlikle teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayrıca Y. Lisans öğrenimim boyunca bana sağladığı burs için TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

<u>Sayfa</u>

ÇİZELGE LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
S_{BG}	Boltzmann-Gibbs entropisi
SK-aksiyomları	Shannon-Khinchin aksiyomları
C_{qV}	Sabit hacimde genelleştrilmiş özgülısı
U	Toplam iç enerji
S_q	Tsallis entropisi
S_{BR}	Borges-Roditi entropisi
I_α	Renyi entropisi
k_B	Boltzmann katsayısı
S_{SM}	Sharma-Mittal entropisi
S_U	Evrensel entropi
W	Kompleksiyon sayısı
$S^{\pm}_{a,r}$	(iki parametreli) Evrensel entropi
S_κ	Kaniadakis entropisi
$\beta_{(.)}$	Ters sıcaklık fonksiyonu
$\beta^{\pm}$	Ters sıcaklık fonskiyonu
N	Parçacık sayısı
T	Sıcaklık (kelvin)
p_i	Durum-i'nin olasılığı
F_q	Hemholtz serbest enerjisi
T_p	Sıcaklık

1 GİRİŞ

1.1 Termodinamiğin Temel Kavramları ve Entropinin Tarihsel Gelişimi

Bu giriş kısmında, fiziksel ya da kimyasal bir sistemin ister termodinamik ister istatistiksel bir incelemesi söz konusu olduğunda kullanılmasından vazgeçilemeyen, dahası onlarsız bir analizin eksik kalacağı temel bazı termodinamik kavramların tanımı verildikten sonra termodinamik biliminin tarihsel gelişimi içerisinde entropinin istatistiksel bir kavrama nasıl evrildiğinin bir anlatımı verilecektir. Böylesi bir yaklaşımın teze konu olan araştırmanın sağlam bir zemine oturması için elzem olduğu kanaatine varılmıştır [1].

Termodinamik bilimi fiziksel ya da kimyasal bir sistemde dış etkiler sonucu meydana gelen hâl değişimlerini inceler. Bu hâl değişimleri, dış etkilerin iyice belirlenmiş olmaları şartı altında, sistemin dinamiğini ve denge durumlarını tespit etmemize yarar. Bir *termodinamik sistem*'den bahsedildiğinde genellikle sistemin hâl değişimini ifade eden *hâl fonksiyonu*'nun, *sıcaklık* (T), *hacim* (V) ve *basınç* (P) gibi parametreler aracılığıyla incelenmesi söz konusudur. Söz konusu bu parametrelere *termodinamik değişkenler* denir. Termodinamik değişkenler göz önüne alınan sistemin hacmi ile orantılı ise bu değişkenlere *ekstensif değişken*'ler (*iç enerji* (U) ve *hacim* (V) gibi); orantılı değiller ise *intensif değişken*'ler denir (*basınç* (P) ve *sıcaklık* (T) gibi). Birden fazla değişkenle ifade edilen hâl fonksiyonları, değişkenlerin birbirine bağımlılığından dolayı uzayda bir yüzey belirtirler. Örneğin ideal gaz denklemi olarak da bilinen *BOYLE-MARIOTTE kanunu*

$$\mathrm{PV} = \mathrm{nRT} \tag{1.1}$$

bir hâl fonksiyonu olarak yeniden yazılırsa,

$$\mathrm{f(P, V, T)} = \mathrm{PV} - \mathrm{nRT} = 0 \tag{1.2}$$

şeklinde ifade olunur ve bu fonksiyon (P, V, T) uzayında bir yüzey belirtir. Bir sistemin hâli zamana bağlı olarak değişmiyorsa sistemin *denge*'de olduğu söylenir.

Eğer bu denge durumunda sistemin her yerinde sıcaklık eşitse sistemin *termodinamik denge'*de, sadece kısmi bölgelerde sistemin sıcaklığı eşitse de sistemin *kararlı durum'*da ya da *yerel denge'*de olduğu söylenir [2]. Termodinamik sistem bir hâlden bir başka hâle geçerken bu değişime sebep olan dış etkenler çok yavaş değişiyorlarsa termodinamik sistemin her an yaklaşık olarak termodinamik dengede olduğu söylenebilir. Bu tür hâl değişimlerine *durgunumsu hâl değişimleri* denir [3]. Durgunumsu hâl değişimlerinde sistemde oluşan ufak bir değişimden sonra sistemin tekrar termodinamik dengeye gelmesi yani sistemin her tarafının eşit sıcaklığa erişmesi beklenir. Eğer sistemin hâl değişimi sabit hacim altında gerçekleşiyorsa bu değişime *eşhacimli (isochoric) hâl değişimi* $(\delta V = 0)$, sabit sıcaklık altında gerçekleşiyorsa *izotermal* ya da *eşsıcaklıklı hâl değişimi* $(\delta T = 0)$, sistemin ısısı değişmeksizin gerçekleşiyorsa *adyabatik* ya da *eşısılı hâl değişimi* $(\delta Q = 0)$, basıncı değişmeksizin gerçekleşiyorsa da *eşbasınçlı* ya da *izobar hâl değişimi* $(\delta P = 0)$ denir. Bir termodinamik hâl değişiminde sisteme etkiyen dış parametrelerin değişimi tersindiğinde sistemin hâl değişimi de tersiniyorsa bu hâl değişimine *tersinir*, sistemin hâl değişimi tersinemiyorsa bu hâl değişimine de *tersinmez süreç* denir. Bu kavramlar dışında bir *termodinamik sistemin kararlılığı, termodinamik bir niceliğin ölçülebilirliği* ve *termodinamik potansiyel'*ler gibi termodinamik sistemlerin analizinde ve istatistiğin teorisinde merkezi rol oynayan kavramlar tez içinde yeri geldiğinde ayrıca ayrıntılı olarak açıklanacaktır. Temel kavramlara ilişkin daha ayrıntılı bilgi için Ref. [4, 2, 5]'e bakılabilir.

Bundan sonra termodinamik biliminin tarihsel gelişimi içinde istatistiksel bir yapıya nasıl evrildiği açıklanacaktır. Termodinamik biliminin gelişmesi sanayi devrimiyle beraber icat edilen buhar makinelerin veriminin teorik incelenmesi ile başlamıştır. Babasının bıraktığı yerden çalışmaya devam eden Sadi Carnot, 1824'te yanmalı motorlar üzerine yayımladığı çalışmasında hidrolik makinelerin çalışma prensibine benzetim (*analoji*) yaparak buhar makinelerini incelemiştir [6]. S. Carnot, enerji korunum yasasını kullanarak ve hidrolik makinelerinde iki nokta arasındaki basınç farkıyla oluşan suyun akışı sırasında gücül (*potansiyel*) enerjinin kinetik enerjiye dönüştüğünden yola çıkarak bugün kendi adıyla anılan Carnot çevrimini tasarlamış ve şu iki önemli sonuca ulaşmıştır:

I. Sıcaklıkları farklı iki ısı kaynağı kullanılarak yapılan buhar makineleri arasında en yüksek verimi tersinir makineler verir (*Carnot Teoremi*).

II. Optimal bir ısı makinesinde iş üreten sistemin hacminde bir değişim olmaksızın sistemin sıcaklığında bir değişim olmaz.

Carnot'nun ulaştığı bu sonuçlar klasik termodinamiğin hem başlangıcı hem de temeli olarak görülmesine rağmen uzun süre kimsenin dikkatini çekmemiş, ancak 1845'te İngiliz doğa filozofu ve fizikçi W. Thomson'ın dikkat çekmesi ile sahip olduğu önemin farkına varılmıştır. W. Thomson, Carnot'nun eseri üzerinde çalıştığı sırada çağdaşı ve yurttaşı olan J. Joule ısının iş enerjisine dönüşebilirliği üzerinde çalışıyordu. J. Joule yaptığı deneyler sonucunda o zaman ısı için kullanılan calori birimi ile enerji birimi arasındaki eşdeğerliği saptayarak hem ısının da bir enerji çeşidi olarak kavranmasını sağlamış hem de enerji korunum ilkesini genişletip sağlam bir temele oturtmuştur. J. Joule'un çalışmalarından haberdar olan W. Thomson, Carnot'un çalışmalarında kullandığı enerji korunumu biçimi ile Joule'un saptadığı enerji korunumu arasında açık bir çelişkinin olduğunu fark etmiştir: Jolue'un enerji korunum yasasına göre Carnot çevriminde enerji korunmuyordu, çünkü Carnot ısının tamamının tıpkı suyun potansiyelinin hareket enerjisine dönüşmesi gibi işe dönüştüğünü varsayıyordu. Bu varsayıma göre uç sıcaklıkları farklı olan bir katı çubuk boyunca oluşan ısı akımında mekanik enerjinin üretilmesi gerekirdi ancak bu beklentiyi doğrulayacak herhangi bir şey gözlenemiyordu. Öyleyse Carnot'nun varsayımı ya da başka bir deyişle sıcaklık farkından dolayı varsaydığı ısı potansiyelinin tamamının enerjiye dönüştüğü varsayımı düzeltilmeliydi. Thomson bu düzeltmeyi, Carnot Teoreminin doğruluğunu koruyacak şekilde ve bugün hala geçerliliğini koruyan şu varsayımla yapmıştır: "*Mekanik aygıtlar ısıyı üretebilirken asla tamamen yokedemezler"* [6]. Bununla birlikte Thomson, Carnot'nun enerjinin korunumunu kalori cinsinden ifade edişini terkederek Joule'un saptadığı enerji korunumu kullanmanın, tutarlı bir teori geliştirmek için daha makul olduğunu düşünmüştür. Gerçekten Carnot'nun enerji korunum ifadesinde, sistemin yaptığı iş ile ısı kaynaklarında çekilen ısı (*calori*) birim farlılığından dolayı aynı bir enerji korunumu ilkesi altında değerlendirilemiyordu. Daha sonra Joule'un enerji korunumu tanımı kullanılarak bu zorluk bertaraf edildi. Ancak bu yapılandırmalar bile söz konusu mekanik enerji beklentisinin neden boşa çıktığını açıklayamıyordu. Thomson bu çelişkilerden ve zorluklardan kurtulmak için daha sonraki zamanlarda buhar ile ilgili birçok deney yapmıştır.

Carnot'nun temelini attığı bu termodinamik biliminin temel varsayımlarını kendi içinde tutarlı ve sağlam bir zemine oturtmak, 1850'lerde Alman bilim adamı R.

Clausius'un uzun süren çalışmaları ile mümkün olmuştur. 1864'e dek süren çalışmalarında Clausius'un ilk yaptığı şey, Carnot çevrimini (*çift ısılı makineler*) dikkatli bir analize tabi tutmak olmuştur. Clausius, yaptığı analizlerden sonra Carnot çevriminde aynı anda iki dönüşümün meydan geldiğini tespit etti [7]. Bunlar,

III. Sıcak ısı kaynağından soğuk ısı kaynağına yapılan ısı transferi, (ya da soğuk ısı kaynağından sıcak ısı kaynağına yapılan ısı transferi.)

IV. Isının işe dönüşümü (ya da işin ısıya dönüşümü).

dür. Clausius bu iki dönüşümün birbirine denk olduğunu varsaymıştır: Bu denklik, birinin diğeri ile yer değiştirebileceği anlamında değil, biri olmaksızın diğerinin olamayacağı anlamında bir denkliktir [7]. Bu varsayımla, böylece Thomson'ın katı bir çubuk boyunca meydana gelen ısı akısından neden mekanik bir iş türetilmediği sorusu bertaraf edilmiş olur. Zira katı çubukta ısının sıcak bir ısı kaynağından soğuk bir ısı kaynağına akması söz konusu değildir. Kısacası Thomson'ın incelemelerinde kullandığı örnek çift ısılı bir makine değildir. Clausius, daha sonra Jolue'un ısı ve iş arasında saptadığı denkliği de kullanarak Thomson'ın varsayımını aşağıdaki şekilde bir ilke olarak geliştirdi: "*Bütün durumlarda ısıyla bir iş üretildiği zaman kullanılan ısının bir kısmı üretilen işle orantılı olarak ziyan olur. Tersi bir süreçte ziyan olan bu ısı, üretilmiş olan işe eşit bir iş harcanarak üretilebilir.*" [6]. Bu ilke aynı zamanda termodinamiğin birinci ilkesidir. Clausius, söz konusu dönüşümlerin denkliğini bir eşitliğe bağlamak üzere bunlara birer *denk-değer* atfetti ve bu denk değerlerin birbirine eşit olduğunu varsaydı. Sıcaklığı T_h olan sıcak ısı deposundan çekilen Q_1 ısısı işe dönüştüğünde bu dönüşümün denk değeri,

$$w_1(T) = \frac{Q_1}{T_h} \tag{1.3}$$

olur. Sıcak ısı deposundan sistem yoluyla sıcaklığı T_c olan soğuk ısı deposuna aktarılan ısı Q_2 ise bu ikinci dönüşümünde denk değeri de

$$w_2(T) = Q_2\left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_h}\right) \tag{1.4}$$

olacaktır. Sistem açısından bakıldığında $Q_1 > 0$ iken $Q_2 < 0$ dır. Bu iki dönüşüm bir tam çevrim boyunca gerçekleştiğine ve denk değerler de eşit olduğuna göre,

$$\mathrm{w_1(T) - w_2(T) = \frac{Q_1 + Q_2}{T_h} + \frac{Q_2}{T_c} = 0} \tag{1.5}$$

yazılabilir. Bu eşitlik bütün tersinir çevrimler için doğrudur ve termodinamik süreçten bağımsızdır. Bu eşitlik integral biçiminde ifade edilirse,

$$\mathrm{w} = \oint \frac{\delta \mathrm{Q}}{\mathrm{T}} = 0 \tag{1.6}$$

yazılabilir. Kapalı bir eğri boyunca integrali sıfır olan bu tür fonksiyonlar tam diferansiyellenebilir fonksiyonlar olarak bilinir ve bir sistemin hâlini ifade etmek için adaydırlar. Clausius, bu tam diferansiyellenebilen fonksiyona *entropi* (S) fonksiyonu adını vermiştir. Bu fonksiyonun diferansiyeli,

$$\mathrm{dS} = \frac{\delta \mathrm{Q}}{\mathrm{T}} \tag{1.7}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ifade aslında Carnot teoreminin matematiksel ifadesinden başka bir şey değildir. Termodinamiğin birinci yasası olan enerji korunumu da kullanılarak ister tersinir olsun ister tersinmez olsun termodinamik bir sistemin kapalı bir eğri boyunca evrimi sonucunda bu entropi hâl fonksiyonunun diferansiyeli için,

$$\mathrm{dS} \geq 0 \tag{1.8}$$

yazılabilir. Entropinin bu ifade biçimi aynı zamanda *termodinamiğin ikinci yasasının* ifadesidir ve sözel olarak şöyle ifade edilir: "*Sonucu yalnızca tek bir ısı deposundan çekilmiş olan ısının tümünün işe dönüştürülmesi olan termodinamik bir süreç gerçekleştirilemez*" [3]. Isı ve sıcaklığın bir fonksiyonu olarak yazılmış olan bu entropi ifadesi klasik entropi tanımı olarak bilinir ve makro sistemlerin, başka bir deyişle termodinamik sistemlerin, analizinde başarıyla uygulanır [3, 8].

Açıktır ki Avogadro sayısı ($N_A = 6.02x10^{23} atom$) kadar molekül ya da atom içeren bir sistemin klasik mekanik açısından analizini yapmak imkansızdır. Hatta her bir molekül için en iyi bilgisayarlarla numerik bir çözüm yapılmaya kalkılsa bile bu milyarlarlarca yıl alır. Bu imkansızlıktan ötürü tek tek atomların momentum ve koordinatlarını belirlemek yerine atomların oluşturduğu sisteme, atom kitlesinin ortak davranışını karakterize edecek belli bazı termodinamik değişkenleri atayarak atom kitlesinin zaman içerisindeki davranışını incelemek mümkündür. Ancak yapılan bu çalışmalarda sistemin termodinamik değişkenleri arasındaki bağıntılar salt deneysel sonuçlardan alındığından, termodinamik fenomenolojik bir bilim olarak kalır [9]. Bu yüzden bilim adamları moleküllerden müteşekkil termodinamik sistemlerin denge durumunda istatistiksel bir analizini geliştirmeye yönelmişlerdir. 19. yy'ın ikinci yarısının başlarında gaz moleküllerinden oluşan bir izole sistemde moleküllerin hız dağılımını veren J.C. Maxwell'in çalışmalarının yönlendirmesi ile entropi yasasının istatistiksel bir tanımının üzerinde durulmuştur. Boltzman, Maxwell'in gazların hız dağılımı üzerine yaptığı çalışmalarından yararlanarak 1870'lerde kanonik bir sistemin; β sabit bir sayı ve, H de sistemin hamiltonyeni olmak üzere,

$$\rho = \frac{1}{Z} e^{-\beta H} \tag{1.9}$$

dağılıma uyduğunu bulmuştur. Daha sonra Boltzmann, kanonik ve ergodik[1] bir sistemde dış koşulların ufak bir değişimi sonucu sistemin ısı enerjisindeki değişimi, sisteme sağlanan işin ve sistemin toplam iç enerjisindeki değişimini istatistiksel ortalamalarından yararlanarak,

$$\delta Q = d < H > - < dH > \tag{1.10}$$

şeklinde bulmuştur [6]. Burada, $d < H >$ diferansiyeli, sistemin iç enerjisindeki değişimi, $< dH >$ diferansiyeli de sistem üzerinde yapılan veya sistemin yaptığı işi ifade etmektedir. Denklem (1.10) da verilen entropi diferansiyeli, $\beta < H > + \ln Z$ nin diferansiyeline karşılık gelir. Boltzman bu son sonuçtan yola çıkarak bugün kullanılan biçimiyle izole bir sistem için entropinin istatistiksel bir ifadesini vermiştir [6]:

$$S = -k_B \ln\left(\frac{1}{W}\right) \tag{1.11}$$

[1] Ergodik hipotezi için Refs. [2, 86, 87]'e bakılabilir.

Burada $k_B = 1.38x10^{-13} J/K$ Boltzman sabiti, W da izole sistemin girebileceği toplam mikro durum sayısı ve $1/W$ de bir mikro durumun girilebilir olasılığıdır.

Daha sonraki yıllarda yapılan çalışmaların çoğu entropinin bu istatistiksel tanımlanışına fiziksel bir yorum getirmeye adanmıştır [10, 11]. Özellikle J. W. Gibbs'ın gayretleriyle entropi kavramı istatistiksel açıdan rasyonel bir temele oturtulmuştur. Birbirine benzer N tane sistemin koordinat ve momentumlarının birer boyut olarak değerlendirilmesi ile tanımlanan faz uzayında, $\{q_i, i = 1,2, \dots, 3N\}$ koordinatları konum koordinatlarını ve $\{p_i, i = 1,2, \dots, 3N\}$ koordinatları da momentum koordinatlarını göstermek üzere, entropinin bugün de hala kullanılan aşağıdaki tanımı verilmiştir:

$$S = -k_B \int \rho \ln\rho \, dq_1 dq_2 \dots dq_{3N} dp_1 dp_2 \dots dp_{3N} \qquad (1.12)$$

Bu entropi kesikli olasılık uzayında ise,

$$S = -k_B \sum_{i=1} p_i \ln p_i \qquad (1.13)$$

biçiminde yazılabilir.

Buraya kadar entropinin istatistiksel bir tanıma nasıl evrildiğinin tarihsel gelişimi verilmiştir. Şimdi de entropinin fiziksel bir anlam taşıması için hem klasik termodinamik hem de istatistik fiziği açısından sahip olması gereken bazı temel özellikler verilecektir.

1.2 Entropinin Fiziksel Geçerliliği ve İstatistiksel Olarak Temellendirilmesi

Fiziksel bir sistem termodinamik dengeye ulaştığında denge durumu kararlı bir hâldir. Entropi, enerjinin bir fonksiyonu olarak maksimum bir değere ulaşacaksa ve denge durumunda değişimi sıfır olacaksa bu şartların sağlanması için entropinin iç bükey bir fonksiyon olması gerekir. Bu son özellik termodinamik analiz açısından entropinin fiziksel geçerliliği için zorunlu bir şarttır. Bu şart; entropi, sistemin iç enerjisinin (U), hacminin (V) ve içerdiği toplam molekül sayısının (N) bir fonksiyonu olarak göz önüne alındığında,

$$S(U+\Delta U, V+\Delta V, N) + S(U-\Delta U, V-\Delta V, N) \leq 2S(U,V,N) \qquad (1.14)$$

şeklinde tanımlanır [12]. Entropinin pozitif tanımlılığı ve içbükeyliği dikkate alınarak yukarıdaki denklemin taylor serisi açılımı yapılırsa,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2}\frac{\partial^2 S}{\partial V^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial U\,\partial V}\right)^2 \geq 0 \qquad (1.15)$$

şartına ulaşılır. Sistemin hâlini betimleyecek olan entropi fonksiyonunun, sistemin kararlı denge durumu için sağlaması gereken bu şart, aynı zamanda *Termodinamik Kararlılık* şartı olarak da bilinir. Eğer sistemin hâlini betimleyecek olan başka bir termodinamik potansiyel seçilirse onlar için de termodinamik kararlılık şartı, entropi için tanımlandığına benzer şekilde tanımlanır [4].

Makro ölçekli termodinamik bir sistem zamanla dengeye gelmek istediğinde serbest enerjisini minimize edecek içerecek bir makro durumu seçer. Bu aynı zamanda sistemin hem entropisini maksimum hem de enerjisini minimum kılacak şekilde evrildiğini anlatır. Termodinamiğin birinci yasası ve tersinir sistemler için tanımlandığı göz önüne alındığında, entropinin, bir termodinamik potansiyel; tanımı gereği de differansiyellenebilir ve dışsal (*extensive*) bir fonksiyon olduğu söylenebilir. Denklem (1.12), sistemin girilebilir enerji durumları sayılabilir olduğunda,

$$S[p] = -k_B \sum_{i=1}^{W} p_i \ln p_i \qquad (1.16)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Entropinin olasılık uzayındaki bu ifade biçimine *Boltzmann-Gibbs entropisi* denir ve $S_{BG}[p]$ ile gösterilir. Belirsizlik için, C. E. Shannon'ın öne sürdüğü şartları sağlayacak olan fonksiyonun [13], denklem (1.16) 'daki entropi fonksiyonu ile biçimsel olarak aynı çıkması sonucu; A. Khinchin, bu şartları entropiyi de kapsayacak şekilde aşağıdaki biçimde yeniden tanımlamıştır:

i. *Süreklilik* (SK1): entropi fonksiyonu, $\{p_i, i = 1,2,\dots W\}$ olasılıklarının sürekli ve pozitif bir fonksiyonudur.

ii. *Maksimum ilkesi* (SK2): $S(p_1, p_2, \dots, p_W)$ entropisi, olasılık dağılımı eş olasılıklı (*uniform distribution*) bir dağılım olduğu zaman maksimum değerini alır.

iii. *Genişletilebilirlik (Expansibility)* (SK3): Olasılık değeri sıfır olan bir olay, sitemin entropisini değiştirmez: S $(p_1, p_2, \ldots, p_W, 0)$ = S $(p_1, p_2, \ldots, p_W)$.

iv. *Toplanılabilirlik (Additivity)* (SK4): İstatistiksel bir sistemin, A ve B gibi iki alt sisteminin bileşkesinin entropisi, S(AUB) = S(A) + S(A|B) şeklinde tanımlanır.

Bir entropi fonksiyonunun fiziksel bir sistemi tanımlamak için sağlaması gereken bu aksiyomlara *Shannon-Khinchin Aksiyomları* (SK) denir. İlk aksiyom, entropinin differansiyellenebilir olma özelliğinden, aynı zamanda *içbükeylik ilkesi* olarak da bilinen ikinci aksiyom, kararlı denge durumunda entropinin maksimum olması özelliğinden, üçüncü aksiyom ergodik hipotezinden ve dördüncü aksiyom da entropinin dışsal özelliğinden gelir.

Bir sistemin hâlini betimlemek üzere verilmiş olan bir fonksiyonun ölçülebilir olması için, parametrelerinin sonsuz küçük bir değişimi altında bu hâl fonksiyonundaki değişim de küçük olmalıdır. Entropinin bu olasılık uzayında tekrar ölçülebilir bir fiziksel nicelik olabilmesi için; entropinin kesikli olasılık dağılımı üzerinde tanımını veren denklem (1.16), termodinamik değişkenler cinsinden ifade edilen denklem (1.15)'teki termodinamik kararlılık şartını da bu olasılık dağılımı üzerinde yeniden tanımlamayı gerekli kılar. Bu amaçla, B. Lesche entropinin olasılık uzayında fiziksel bir nicelik olarak ölçülebilirliği için aşağıdaki tanımı vermiştir [14]:

Tanım 1. *Lesche Kararlılığı (Lesche stability): Olasılıkları sayılabilir enerji değerleri alabilen bir sistemin girebileceği mikrodurumlarının bir ölçüsü* $\{p_i, i = 1,2, \ldots, W \mid W \geq 1 \text{ ve } W \in \mathbb{N}\}$ *olsun.* l_1 *normu,*

$$\| p - p' \|_1 = \sum_{i=1}^{W} |p'_i - p_i|$$

şeklinde tanımlanmak üzere, entropinin ölçülebilir olması için gerekli koşul,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \| p - p' \| < \delta \Rightarrow \frac{|S[p'] - S[p]|}{S_{max}} < \varepsilon \ . \qquad (1.17)$$

olacak biçimde en az bir $\delta > 0$ *sayısının var olmasıdır.*

Lesche kararlılığının bu matematiksel ifadesi, herhangi bir fonksiyonun sürekliliğinin tanımından başka bir şey değildir[2]. Bu açıdan bakıldığında Lesche kararlılığının, entropinin termodinamik kararlılık şartını karşılamadığı, sadece sürekliliğini temin eden bir tanım olduğu aşikardır. Bu yüzden, olasılık uzayında tanımlı bir entropinin içbükey olması için de aşağıdaki şartı sağlaması gerekir.

Önerme. *İçbükeylik (Concavity): Birbirinden az farklı iki olasılık dağılımı* $\mathrm{p} := \{\mathrm{p_i}, \mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{W}\}$ ve $\mathrm{p}' \coloneqq \{\mathrm{p}'_\mathrm{i}, \mathrm{i} = 1,2,\dots,\mathrm{W}\}$ *ve* $0 < \lambda < 1$ *olmak üzere* $\mathrm{p}'' = \lambda \mathrm{p} + (1-\lambda)\mathrm{p}'$ *olsun. Bu durumda olasılıkların sürekli bir fonksiyonu olan* $\mathrm{S}[\mathrm{p}]$ *entropisinin içbükey olması için gerek ve yeter şart*,

$$\mathrm{S}[\mathrm{p}''] - (\lambda \mathrm{S}[\mathrm{p}] + (1-\lambda)\mathrm{S}[\mathrm{p}']) \geq 0 \tag{1.18}$$

olmasıdır. Termodinamik kararlılık şartı, denklem (1.17) ve (1.18) birlikte sağlandığında karşılanır. Bu tez çerçevesinde önerilmiş bir entropinin fiziksel geçerliliği önemli olduğundan, öcellikle süreklilik ve içbükeyliği içine alan termodinamiğin üçüncü yasasına merkezi bir önem atfedilecektir.

Entropinin, yukarıdaki şartları sağlamasının yanı sıra termodinamiğin üçüncü yasasını da sağlaması gerekir. İstatistiksel açıdan bakıldığında temel durumu dejenere olmayan bir sistemin sıcaklığı sıfır kelvinde (0 K) olduğunda girebileceği toplam mikrodurum sayısı yalnızca bir tanedir. Dolaysıyla sistem ister dengede olsun ister olmasın, denklem (1.11)'e göre, sıfır kelvinde sahip olacağı entropinin sıfır olacağı kestirilebilir. Termodinamiğin üçüncü yasası diye,

$$\mathrm{T} = \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{S}}\right)_{\mathrm{V,N}} \Rightarrow \lim_{\mathrm{T}\to 0} \left(\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{S}}\right)_{\mathrm{V,N}} \to 0 \tag{1.19}$$

limitine denir. Entropi, iç enerjinin sürekli ve diferansiyellenebilir bir fonksiyonu olduğundan yukarıdaki ifade,

---

[2] Lesche Kararlılığı halihazırda bir entropi fonksiyonun ölçülebilir bir nicelik olması için güçlü bir kıstas olarak yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Ancak buna alternatif ölçütler de önerilmektedir [88]. Bu tezde Lesche kararlılığı yerine daha genel olarak kimi yerde en genel anlamıyla "süreklilik şartı" terimi kullanılacaktır.

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} \Rightarrow \lim_{T \to 0} \left(\frac{\partial S}{\partial U}\right)_{V,N} \to \infty. \qquad (1.20)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Entropinin tanımlamış olduğu sistemin durumu kesin ise kendisinin, bir belirsizlik fonksiyonu olarak, sıfır olması gerekir [13]. Bu bilgi termodinamik açısından sıcaklığın sıfıra gitmesiyle eşdeğerdir. Denklem (1.19) çerçevesinde göz önüne alındıklarında, sıcaklık sıfıra giderken, sistemin enerjisinin azalışı, entropinin azalışına nispeten daha hızlıdır. Sıcaklık sonsuza giderken yine iç enerjideki artma, entropi artışına göre daha hızlı olmalıdır.

Şimdi de olasılık uzayında kanonik dağılıma sahip bir sistem için üçüncü yasayı yazmak üzere aşağıdaki limit göz önüne alınsın,

$$\beta = \frac{1}{T} = \lim_{\delta \to \delta_0} \frac{S[\delta] - S[\delta_0]}{U[\delta] - U[\delta_0]}. \qquad (1.21)$$

Bu limitin $\beta \to +\infty$ değerini verebilmesi için, entropinin pozitif değerli bir fonksiyon olduğu göz önüne alındığında, iç enerji δ parametresine göre hem artan hem sürekli bir fonksiyon hem de bu parametreye göre değişimi entropininkine nispeten daha hızlı olmalıdır. Olasılık dağılımı olan p= $\{p_i, i = 0,1,2, \ldots, W\}$ parametresi bu şartları sağlar. Buna göre β parametresi olasılık uzayında $p_0 = 1 - \sum_{n=1}^{W} p_n$ alınarak,

$$\beta = \sum_{n=1}^{W} \beta_n = \sum_{n=1}^{W} \frac{\partial S}{\partial p_n} \left(\frac{\partial U}{\partial p_n}\right)^{-1} \qquad (1.22)$$

şeklinde yeniden tanımlanabilir [15]. En genel haliyle,

$$S[p] = -p_0 s(p_0) - \sum_{n=1}^{W} p_n s(p_n) \qquad (1.23)$$

$$U = \frac{p_0 u(p_0) E_0}{P} + \frac{\sum_{n=1}^{W} p_n u(p_n) E_n}{P} \qquad (1.24)$$

şeklinde yazılabilir. Burada U iç enerji fonksiyonundaki P argümanı da p= $\{p_i, i = 0,1,2, \ldots, W\}$ olasılık dağılımının bir fonksiyonudur. O da entropi ve iç enerji fonksiyonlarına benzer şekilde $\mathrm{P} = \tau(\mathrm{p_0}) + \tau(\mathrm{p_n})$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda kısmi türevler

$$\frac{\partial S}{\partial p_n} = -p_n \frac{\partial s(p_n)}{\partial p_n} - s(p_n) + p_0 \frac{\partial s(p_0)}{\partial p_0} + s(p_0), \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial p_n} &= \frac{1}{P} E_n \left(p_n \frac{\partial u(p_n)}{\partial p_n} + u(p_n) \right) \\ &- \frac{1}{P} E_0 \left(p_0 \frac{\partial u(p_0)}{\partial p_0} + u(p_0) \right) - \frac{U}{P} \frac{\partial P}{\partial p_n} \end{aligned} \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial P}{\partial p_n} = \frac{\partial \tau(p_n)}{\partial p_n} - \frac{\partial \tau(p_0)}{\partial p_0} \tag{1.27}$$

şeklinde olur. Sıcaklığın sıfıra gitmesi durumunun istatistiksel olarak ele alınan sistemin kesinkes bir şekilde temel duruma, yani bir limit olarak p= $\{p_0 = 1, p_n = 0, n = 1,1,2, \dots, W\}$ olasılık dağılımına geçmesi anlamına geldiği gerçeği göz önüne alınırsa, $\beta \to +\infty \equiv \lim_{\{p_0,p_n\}\to\{0,1\}} \beta \to +\infty \equiv \lim_{\{p_0,p_n\}\to\{0,1\}} \beta_n \to +\infty$ denkliği yazılabilir. Şonuç olarak termodinamiğin üçüncü yasası kesikli olasılık uzayında aşağıdaki şekilde tanımlanabilir [15].

$$\lim_{\{p_0,p_n\}\to\{0,1\}} \beta_n = \lim_{\{p_0,p_n\}\to\{0,1\}} \frac{\partial S}{\partial p_n} \left(\frac{\partial U}{\partial p_n} \right)^{-1} \to +\infty \tag{1.28}$$

Bu kısımda kısaca entropinin fiziksel bir geçerliliği olması için sahip olması gereken asgari özellikler ve uyması gereken şartların öz bir anlatımı verilmiştir. Burada dikkate alınan entropi, ergodik hipotezi uyarınca ele alınan sistemlerin entropisi olarak ele alınmıştır. Literatürde bu entropi kısaca Boltzmann-Gibbs (S_{BG}[p]) entropisi olarak bilinir. S_{BG}[p] entropisinin kökeninde öncellikle seyreltik bir gaz kitlesi için yapılan bir istatistiksel yaklaşımın yattığını belirtmek gerekir. Bu yaklaşımda gaz kitlesinin atomları birbiriyle etkileşmezler ve olabildiğince kaotik bir davranış gösterirler. Bu iki temel özellikten dolayı gaz kitlesinin girebileceği mikrodurumlar birbirlerine göre herhangi bir farklılık göstermezler ve girilebilir olasılıkları birbirlerine eşittir. Bu yaklaşıma kısaca ergodik hipotezi denir. Doğada bulunan sistemlerin çoğunun ve özellikle laboratuvar ortamlarında araştırmaya konu olan sistemlerin seyreltik bir gaz kitlesi gibi davranmadıkları apaçıktır. Örneğin, türbülans, biyolojik sistemler, kimyasal tepkimeler ve yüklü parçacıkların oluşturduğu akışkan benzeri sistemlerde bileşenler arasında elektriksel ve kütle çekimi gibi temel etkileşmeler olur [16]. Bunların yanında sistemin en az bir boyutu nano ölçekli olduğunda artık yüzey gerilmeleri ve kuantum etkileri de etkin olmaya başlarlar. Bu tür sistemlerde, sistemin enerji fonksiyonu olan hamiltonyenin artık tek tek bileşenlerin enerjilerinin doğrusal bir toplamı olmayacağı doğaldır. Bileşenler arası etkileşimlerden kaynaklı ek terimler de gelecektir. Kompleks ya da ekstensif-olmayan (*nonextensiv*e) denilen, söz konusu etkileşimlerin varsayıldığı ya da olduğu sistemler için ergodikliğin bozulduğu iddia edilmekte; bileşenler arası etkileşimler, mikrodurumlar arasında farklar yaratmakta, birini diğerine nispeten daha olası kılabilmektedir. Sonuç olarak böyle bir yaklaşım altında ekstensif-olmayan sistemlerin entropisinin, denklem (1.16) ile verilen $S_{BG}[\mathrm{p}]$ entropisi gibi olmayabileceği iddia edilmiştir [16]. İşte böylesi bir yaklaşımın verdiği motivasyonla son zamanlarda ekstensif-olmayan sistemler için olasılık dağılımı ile birlikte kompleksliğin ölçüsü olarak tanımlanan bir ya da birden fazla parametrelerin fonksiyonu olan entropiler tanımlanmış ve yapılan uygulamalarında başarılı sonuçlar elde edilmiştir [17].

Bu tezin kapsamı, ileri sürülen bu entropileri, evrensel entropi denilen tek bir entropi altında toplamaya yönelik çalışmaların incelenmesini, bu entropinin üçüncü yasaya uygunluğunu, Tsallis entropisinin belirli birkaç sisteme ve termal dalgalanmalara uygulanmasını içerir. *Bu alanda yapılan çalışmalar, özellikle kompleksliğin ölçüsü olarak anılan parametrelerin uygulamada alabilecekleri sayısal değerlerin ve denklem (1.25) ve (1.26)'te örtük olarak verilen* s[p], u[p] *ve* P[p] *fonksiyonlarının fiziksel statüsü hâlâ bir araştırma konusudur.*

2 GENELLEŞTİRİLMİŞ ENTROPİLER

Bu bölümde ekstensif-olmayan (nonekstensif) sistemler için önerilmiş entropilerden yaygın olanların SK aksiyomları, içbükeylik, süreklilik ve üçüncü yasaya ugunluk açısından bir değerlendirilmesi yapıldıktan sonra bütün bu entropileri tek bir teori altında toplayan formel grup kuramına geçilecektir. Son olarak bunlar içerisinden en yaygını olan Tsallis entropisinin termal dalgalanmaya uygulanmasının birkaç örneği verilecektir.

2.1 Genelleştirilmiş Entropiler ve Üçüncü Yasa

Enformasyon teorisinde, belirsizlik fonksiyonunun tanımlanmasında [13] bulunan fonksiyonun biçimi entropinin olasılık uzayındaki fonksiyonel tanımlanması ile aynı olunca entropinin ek parametrelerle yeniden formüle edilmesinin imkanları aranmıştır. Aslında Shannon belirsizlik fonksiyonunu (entropiyi) türetirken göz önüne aldığı sistem oldukça basit ve durumları birbirinden bağımsızdı. Şayet durumlar birbirinden bağımsız değillerse koşullu olasılıkların nasıl yazılacağı ve sistemi etkileyen iç nedenler varsa (stokastik etkiler gibi) bunların nasıl hesaba katılacağı sorusu akla gelir. Bu ve buna benzer sebeplerden ötürü A. Renyi entropi fonksiyonunun daha genel bir tanımını formüle etmiştir [18].

Shannon'ın entropisindeki[3] bu genelleştirme, fizikte de alışılagelmiş entropi tanımında genelliştirmeye gidilmesini tetiklemiştir. Giriş kısmında da bahsedildiği üzere, fizikte kullanıldığı anlamıyla entropiye yönelik genelleştirme teşebbüsü tamamen ergodikliğin reddedilmesine dayanılarak gerçekleştirilmiştir [16].

Boltzmann-Gibbs entropisinin genelleştirilmesine yönelik yapılan ilk entropi önerisi 1988 yılında C. Tsallis tarafından verilmiştir [19]. Tsallis, önerdiği entropinin gerekçesini nano ölçekte yüzey gerilmelerinin ve kuantum etkilerinin belirgin olması,

[3] Shannon entropisi ile Boltzmann-Gibbs entropisi özdeş varsayılacaktır. İlk tanımlama enformasyon teorisinde ikinci tanımlama da istatistiksel fizikte kullanılır. Bu tezde bu ikisi aynı anlamda kullanılacaktır ve S_{BG} ile gösterilecektir.

sistemin ölçeği göz önüne alındığında uzun menzilli denebilecek etkileşimlerin görünmesi ve anormal difüzyon olgusu [20, 21, 22] gibi daha birçok fiziksel olgunun [16] varlığına dayandırmıştır.

Tsallisin önerdiği entropi ifadesi,

$$S_q[p] = k_B \frac{\sum_{i=0}^{W} p_i^q - 1}{1 - q} \tag{2.1}$$

şeklindedir. Tsallisi'in entropi ifadesinde kompleksliği tanımlayan sadece bir tane parametre vardır (q-parametresi). Bu yüzden Tsallis entropisine (S_q) bir parametreli genelleştirilmiş entropi denir. $q \to 1$ limiti durumunda S_q entropisinin S_{BG} entropisini verdiği kolaylıkla görülebilir. Tsallis entropisinin fizik açısından kabul edilebilir bir entropi olması için SK-aksiyomlarını, içbükeylik ve süreklilik şartını sağlaması gerekir ama SK(1-3) aksiyomlarının sağlanmasına rağmen SK4 aksiyomu sağlanmaz. SK4 aksiyomu, S_{BG} entropisi için şart koşulmuştur ve iç enerji, alt sistemlerin enerjilerinin lineer bir toplamı olarak ifade edildiğinde geçerlidir [23]. Bu ise, genelliştirilmiş bir entropinin limit durumunda S_{BG} entropisine indirgendiğinde SK4 aksiyomunu sağlaması gerektiği anlamına gelir. Öyleyse SK4 aksiyomu da ekstensif-olmayan sistemler için genelleştirilmeli ve limit durumunda S_{BG} için şart koşulan biçime indirgenebilmelidir. S. Abe, SK4 aksiyomunu bir parametreli genelleştirilmiş entropiler için aşağıdaki şekilde yeniden formüle etmiştir [24].

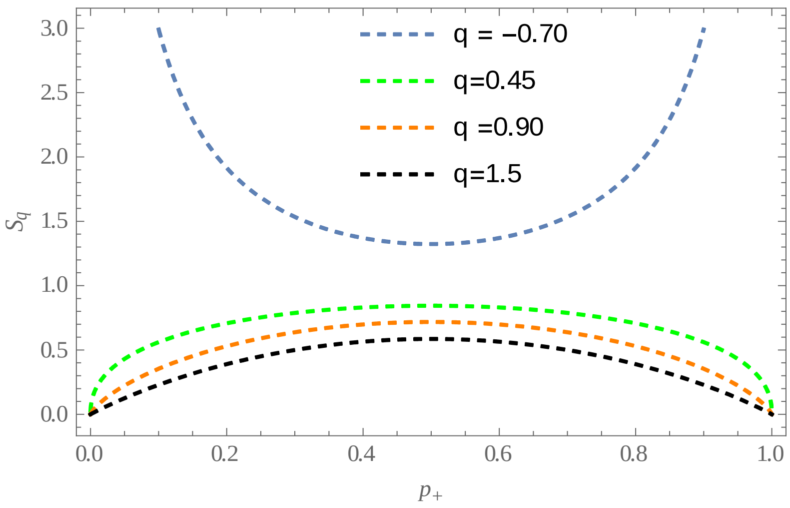
Tanım 2. *Toplanamazlık (Nonadditivity)* (SK4): İstatistiksel bir sistemin A ve B gibi iki alt sisteminin bileşkesinin entropisi, $S_q(AUB) = S_q(A) + S_q(A|B) + (1 - q)S_q(A)S_q(B)$ şeklinde tanımlanır.

Yukarıdaki eşitlikte $q \to 1$ limiti alınırsa ifade SK4 aksiyomuna indirgenir. Burada A-sisteminin olasılık dağılımı $p_i(A) = \{p_i, i = 0,1, \ldots, W_A\}$ ile ve B-sisteminin olasılık dağılımı da $p_j(B) = \{p_j, j = 0,1, \ldots, W_B\}$ ile verildiğinde, S(AUB) entropisine karşılık gelen olasılık dağılımı da $p_{ij}(B, A) = \{p_{ij}, i = 0,1 \ldots, W_A, j = 0,1, \ldots, W_B\} = P\{A = a_i; B = b_j | i = 0,1, \ldots, W_A, j = 0,1, \ldots, W_B\}$ ile verilir. S(A|B) koşullu entropisine karşılık gelen dağılım ise $p_{ij}(B|A) = p_{ij}(A, B)/p_i(A)$ dır. Bu durumda toplanamazlık kriteri ile ona karşılık gelen olasılık ifadesi arasında aşağıdakiler denktir:

i. $p_{ij}(B,A) = p_i(A)p_{ij}(B|A)$

ii. $S_q(AUB) = S_q(A) + S_q(A|B) + \frac{1-q}{k_B}S_q(A)S_q(B)$ (2.2)

Tsallis entropisi hem SK(1-3)'ü hem de (2.2)'yi sağlar [24]. Ayrıca q>0 için içbükeyliği [19] ve süreklilik şartını da [25] sağlar. Bunun için iki durumlu bir $p = \{1-p_+, p_+\}$ olasılık dağılımı varsayılırsa, Tsallis entropisi, $S_q[p] = \frac{(1-p_+)^q + p_+^q - 1}{1-q}$ şeklinde yazılabilir. Şekil 2.1'de görüldüğü gibi q>0 için S_q entropisi içbükey iken q<0 için dışbükey (*convex*) olmaktadır.



Şekil 2.1 İki durumlu olasılık uzayında farklı q değerleri için Tsallis entropisi.

Tsallis, genelleştirdiği bu entropi biçimini metaforik olarak bir diferansiyel denklem çözümüne dayandırır. Aşağıdaki diferansiyel denklem göz önüne alınsın,

$$\frac{dy}{dx} = y^q \; ; q \geq 0 \, , y(0) = 1. \qquad (2.3)$$

Bu denklemde q=0 durumu lineer bir çözümü, q=1 durumu eksponansiyel bir çözümü ve en genel durum ise $y(x) = (1 + (1-q)x)^{1/1-q}$ gibi bir çözümü verir. Burada $q \to 1$ için limit alınırsa çözüm, $y(x) = e^x$'e indirgenir. Tsallis bu benzetmeden yola çıkarak exponansiyel fonksiyonu da $e_q^x = (1 + (1-q)x)^{1/1-q}$ şeklinde genelleştirmeyi önerir. $\lim_{q\to 1} e_q^x = e^x$ olduğu açıktır. Bunun bir sonucu olarak doğal logaritma fonksiyonu da $\ln_q(x) = \frac{x^{1-q}-1}{1-q}$ biçiminde genelleştirilmiş olur. Benzer şekilde $\lim_{q\to 1} \ln_q(x) = \ln(x)$ dir. Bu yeni tanımlarda $e_q^{(.)}$'ye q-eksponansiyeli, $\ln_q(.)$ da q-logaritması denir. Bu genelleştirmelerden sonra akla q-logaritması altında iki değişkenin çarpımının ne olacağı sorusu gelir. Bunun için tanımlardan yola çıkarak,

$$
\begin{aligned}
\ln_q(xy) &= \frac{(xy)^{1-q}-1}{1-q} \\
&= \frac{(x^{1-q}-1)(y^{1-q}-1)+x^{1-q}+y^{1-q}-2}{1-q} \\
&= \frac{x^{1-q}-1}{1-q} + \frac{y^{1-q}}{1-q} + (1-q)\left(\frac{x^{1-q}-1}{1-q}\right)\left(\frac{y^{1-q}-1}{1-q}\right) \\
&= \ln_q(x) + \ln_q(y) + (1-q)\ln_q(x)\ln_q(y)
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

sonucuna varılır. q-logaritmasının bu özelliğine sanki-toplanırlık (*pseudo-additivity*) denir. Burada, q limit durumunda bir alınırsa eşitlik doğal logaritmanın açılımına indirgenir. İlerde genelleştirilmiş istatistik ele alınırken bu sonuçlar kullanılacaktır.

Denklem (1.25), (1.26) ve (1.27)'da kapalı olarak verilen $s[p]$, $u[p]$ ve $\tau[p]$ foksiyonelleri Tsallis entropisi için sırasıyla şu şekildedir [16]:

$$
s(p_n) = \frac{{p_n}^{q-1}-1}{q-1}; u(p_n) = {p_n}^{q-1}; \tau(p_n) = {p_n}^{q}, n = 0,1,\dots,W \tag{2.5}
$$

Bu ifadeler yerlerine konulduğunda S_q entropisi, denklem (2.1) biçiminde olur. Enerji ise,

$$
U = \frac{p_0^q E_0}{\sum_{k=0}^{W} p_k^q} + \frac{\sum_{n=1}^{W} p_n^q E_n}{\sum_{k=0}^{W} p_k^q} \tag{2.6}
$$

biçimini alır. Tsallis entropisinin, hangi şartlarda üçüncü yasaya uyduğunu görmek için önce sırayla S_q ve U'nun kısmi türevleri alınırsa,

$$\frac{\partial S_q}{\partial \mathrm{p_n}} = -\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{q}-1}\left(\mathrm{p_n^{q-1}} - \mathrm{p_0^{q-1}}\right) \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{p_n}} = \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{P}}\left[(\mathrm{E_n} - \mathrm{U})\mathrm{p_n^{q-1}} - (\mathrm{E_0} - \mathrm{U})\mathrm{p_0^{q-1}}\right] \tag{2.8}$$

bulunur. Buna göre β_n de

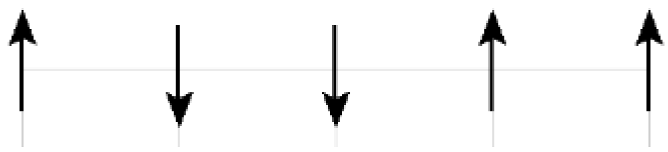
$$\beta_\mathrm{n} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{p_n^{q-1}} - \mathrm{p_0^{q-1}})}{(\mathrm{q}-1)[(\mathrm{E_n} - \mathrm{U})\mathrm{p_n^{q-1}} - (\mathrm{E_0} - \mathrm{U})\mathrm{p_0^{q-1}}]} \tag{2.9}$$

olur. $\mathrm{q} > 1$ ise,

$$\begin{aligned}\lim_{\{\mathrm{p_0},\mathrm{p_n}\}\to\{0,1\}} \beta_\mathrm{n} &= \lim_{\{\mathrm{p_0},\mathrm{p_n}\}\to\{0,1\}} \frac{-(\mathrm{q}-1)^{-1}\mathrm{P}\left(\mathrm{p_n^{q-1}} - \mathrm{p_0^{q-1}}\right)}{(\mathrm{E_n} - \mathrm{U})\mathrm{p_n^{q-1}} - (\mathrm{E_0} - \mathrm{U})\mathrm{p_0^{q-1}}} \\ &= \lim_{\mathrm{p_n}\to 0} \frac{-\left(\mathrm{p_n^{q-1}} - 1\right)}{(\mathrm{q}-1)(\mathrm{E_n} - \mathrm{E_0})\mathrm{p_n^{q-1}}} \\ &= \lim_{\mathrm{p_n}\to 0} \frac{\left(\mathrm{p_n^{1-q}} - 1\right)}{(\mathrm{q}-1)(\mathrm{E_n} - \mathrm{E_0})} \to +\infty\end{aligned} \tag{2.10}$$

dur. Özetle $\mathrm{S_q}$ entropisinin q>1 için üçüncü yasaya uyduğunu söyleyebiliriz. Bu sonuç, örnek olarak sınır koşulları periodik olan 1-boyutlu Ising modeli ile anlaşılır kılınabilir. Ising modelinde magnetik momentlerin oluşturduğu bir örgü göz önüne alınarak, söz konusu momentlerin oluşturduğu sistemin (paramagnetik ya da ferromagnetik malzeme) entropisi, serbest enerjisi ve ısı sığası incelenir [26]. Ising modelinin önemi istatistiksel mekaniğin uygulamasına çok uygun bir örnek teşkil etmesidir. Keza istatistiksel mekaniğin teorisi (Boltzmann-gibbs entropi formalizmi) ile uyumlu deneysel sonuçlar alınması da Ising modelini ileri sürülen genelleştirilmiş entropilerin test edilmesi için önemli bir referans kılmaktadır.

Şimdi, bir boyutta magnetik momentlerin olabildiğince rastgele dizildiği ve her bir momentin iki farklı spine sahip olduğu durum ele alınsın. Momentlerin 1-boyuttaki dizilişi şematik olarak aşağıdaki şekilde gösterilmiştir (Şekil 2.2). Şekilde her bir ok bir spini gösterir ve bu spinler magnetik momentleri temsil etmektedir. Durum-i'deki spin σ_i ile gösterilirse ve periyodik sınır şartından dolayı $\sigma_{N+i} = \sigma_i = \pm 1$ dir.



Şekil 2.2 Bir boyutta dizilmiş momentlerin şematik gösterimi.

Bu durumda sabit bir manyetik alan içine konulmuş bir boyuttaki ve etkileşim halindeki momentlerin toplam enerjisi,

$$E = -J\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \sigma_{i+1} + H\sum_{i=1}^{N} \sigma_i \qquad (2.11)$$

dir. Şimdi de sistem üzerine dış bir manyetik alan uygulanmadığı varsayılsın. Başta spinlerin olabildiğince rasgele dağıldıkları varsayıldığı için korelasyon faktörünün sıfır olduğu yani $< \sigma_i \sigma_j > = < \sigma_i >< \sigma_j >$ eşitliğinin sağlandığı kabul edilebilir. Bu varsayım altında toplam momentlerin oluşturduğu sistemin entropisi basitçe spin çifti başına düşen entropinin N-katı olur. Bu yüzden spin çifti başına düşen entropiyi incelemek ile sistemin entropisini incelemek eş değerdir.

Rastgele seçilen bir spin çiftinin düşük enerji seviyesi olan -J'de bulunma olasılığı p_0, yüksek enerji seviyesi olan +J'de bulunma olasılığı da p_1 olsun. Sistem kanonik olduğu ve sadece bir moment ele alındığında N=1 için temel durumun enerjisi $E_0 = -J$ ($\sigma_1 = -1$ *spin durumunun enerjisi*) ve kararsız durum enerjisi de $E_1 = +J$ ($\sigma_1 = +1$ *spin durumunun enerjisi*) olur. Buna göre spinin toplam iç enerjisi,

$$U = \frac{J(p_1^q - p_0^q)}{p_1^q + p_0^q} \qquad (2.12)$$

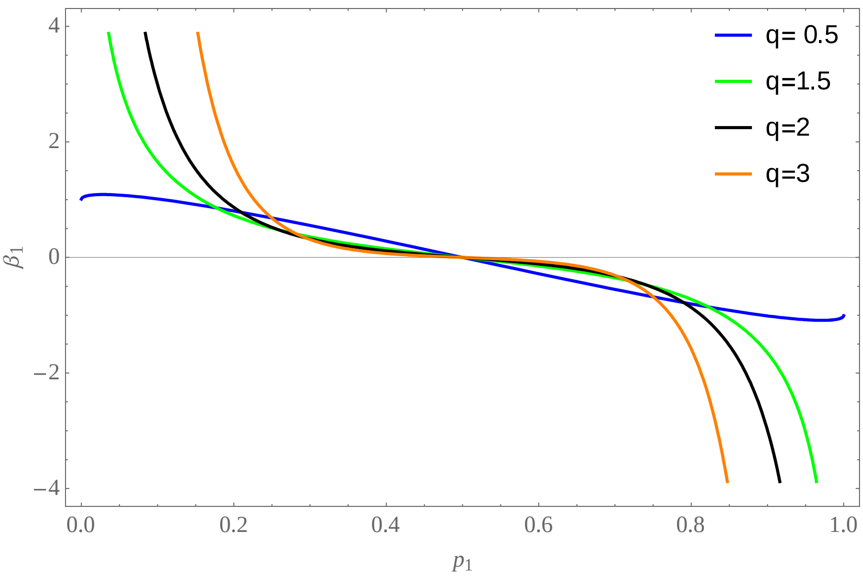
dır. Bu bilgiler ışığında denklem (2.9) N=1 için tekrar yazlılırsa,

$$\beta_1 = \frac{P(p_1^{q-1} - p_0^{q-1})}{(q-1)(E_1 - U)p_1^{q-1} - (E_0 - U)p_0^{q-1}}$$

olur. İç enerjinin ifadesi ve $p_0 = 1 - p_1$ eşitliği yerine konulursa,

$$\beta_1 = \frac{(1-q)^{-1}\left[(p_1^q + (1-p_1)^q)(p_1^{q-1} - (1-p_1)^{q-1})\right]}{\left(1 - \frac{\left(p_1^q-(1-p_1)^q\right)}{p_1^q+(1-p_1)^q}\right)p_1^{q-1} + \left(1 + \frac{\left(p_1^q-(1-p_1)^q\right)}{p_1^q+(1-p_1)^q}\right)(1-p_1)^{q-1}} \tag{2.13}$$

bulunur. Burada basitlik olsun diye J =1 alınmıştır. $\beta_1(p_1)$ fonksiyonun grafiği farklı q-değerleri için Şekil 2.3'te verilmiştir. $\lim_{p_1 \to 0} \beta_1$ limitinin q>1 değerleri için gerçekten sonsuza gittiği, q=0.5<1 için de sonlu bir değere yaklaştığı görülmektedir.



Şekil 2.3 Tsallis entropisinin Ising modeli örneğinde üçüncü yasa testi.

Varılan sonuca bakılarak, Tsallis entropisinin üçüncü yasaya uygunluğu için gereken şartın hem içbükeyliği hem de süreklilik şartını temin ettiği görülmektedir. Bu çok önemli bir sonuçtur çünkü herhangi bir entropinin fiziksel geçerliliği araştırılırken sürekliğine ve içbükeyliğine bakmak yerine üçüncü yasaya bakılarak bu üç koşulun birlikte sağlandığı koşul bulunabilir.

Tsallis entropisi, mevcut genelleştirilmiş entropiler içerisinde fiziksel geçerlilik koşullarını sağlamasından ve kendisine dayalı genelleştirilmiş bir istatistiksel mekaniğin inşasında varılan sonuçların (üleşim fonksiyonu, kanonik sistemlerin olasılık fonksiyonları v.d.) invaryans kalmasından dolayı en yaygın kullanılandır. Tsallis entropisinin bir diğer önemli özelliği tersinmez süreçlerin analizi için uygun bir yöntem olmasıdır [27].

Bir başka entropi de enformasyon teorisinde [18], özellikle biribirinden bağımsız olmayan durumların ve stokastik etkilerin incelenmesinde, tümleşik sistemlerde bilgi iletiminde ve tıpta kalp atış hızlarının [28] ve fractal yapıların incelenmesinde [29, 30] kullanılan Rényi entropisidir. Bir parametreli genelleştirilmiş bir entropi olan Rényi entropisi $p = \{p_i, i = 0,1,..,W\}$ olasılık dağılımına sahip bir sistem için,

$$I_\alpha[p] = \frac{1}{1-\alpha} \ln\left(\sum_{k=0}^{W} p_k^\alpha\right) \; ; \; \alpha > 0, \neq 1 \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanır [18]. Rényi, I_α entropisini $p = \{p_i, i = 0,1,..,W\}$ olasılık dağılımına sahip bir rassal değişkenin belirli bir değerinin, α-derecesinde bir bilgi ölçümü olarak tanımlar. $\alpha \to 1$ limit durumunda I_α entropisi S_{BG} entropisine indirgenir. Rényi entropisinin (I_α) önemli bir özelliği de, $\frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}$ şeklinde tanımlanan Jackson q-türev biçimine göre[4] kanonik bir sistemin serbest enerjisinin (F) eksilisinin α^{-1}-türevine eşit olmasıdır [31], yani

$$I_\alpha = -\frac{d_q F(T)}{d_q T} \quad ; q = \alpha^{-1}, T\text{: sıcaklık} \tag{2.15}$$

dır. Bu ise tersinmez bir süreçte denge dışı bir sistemin [27] serbest enerjisinin Rényi entropisi ile doğrudan ilişkili olduğu anlamına gelir.

Rényi entropisi SK-aksiyomlarını sağlarken $\alpha = 1$ dışındaki değerlerde Lesche sürekliliğini sağlamaz [14]. İçbükeyliği sağlayıp sağlamadığını görmek için kısmi türevlerine bakılabilir.

$$\frac{\partial I_\alpha}{\partial p_n} = \frac{1}{1-\alpha} \frac{\alpha(p_n^{\alpha-1} - p_0^{\alpha-1})}{\sum_{i=0}^{W} p_i^\alpha}; \; p_n = p_0 = \frac{1}{W+1} \text{ ise } \frac{\partial I_\alpha}{\partial p_n} = 0. \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial^2 I_\alpha}{\partial p_n^2} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{(\alpha-1)(p_n^{\alpha-2} + p_0^{\alpha-2}) \sum_{i=0}^{W} p_i^\alpha - \alpha(p_n^{\alpha-1} - p_0^{\alpha-1})^2}{(\sum_{i=0}^{W} p_i^\alpha)^2} \Big|_{p_n=p_0=1/(W+1)}$$

---

[4] $q \to 1$ limiti durumunda Jackson q-türevi normal türeve indirgenir.

$$= \frac{-2a(1+W)^{3-\alpha}}{(1+W)^{2(1-\alpha)}} = -2\alpha(1+W)^{1+\alpha}$$

Varılan sonuca göre $\alpha > 0$ olması durumunda Rényi entropisi, içbükey olur. Rényi entropisinin termodinamiğin üçüncü yasasına uyup uymadığını görmek için önce $u(p_n) = 1$ ve $\tau(p_n) = 1/W + 1\,, n = 0,1,\ldots,W$ alınırsa[5] bu şartlar altında iç enerjinin olasılık uzayındaki kısmi türevini almak kolay olur: $\partial U/\partial p_n = E_n - E_0$. Şimdi de denklem (2.16)'in yardımıyla beta (β_n) fonksiyonu yazılırsa,

$$\beta_n = \frac{\partial I_\alpha}{\partial p_n}(\partial U/\partial p_n)^{-1} = \frac{1}{(1-\alpha)(E_n - E_0)} \frac{\alpha(p_n^{\alpha-1} - p_0^{\alpha-1})}{\sum_{i=0}^{W} p_i^\alpha}$$

bulunur. Burada $\lim_{\{p_0,p_n\}\to\{1,0\}} \beta_n$ limiti alınırsa, $0 < \alpha < 1$ aralığı için ifadenin artı sonsuza gittiği kolaylıkla görülmektedir. Eğer $u(p_n)$ ve $P[p]$ fonksiyonları Tsallis örneğindeki gibi alınırsa Rényi entropisi $\alpha > 1$ için üçüncü yasayı sağlamış olur.

Literatürde bir parametreli ve sıkça uygulama alanı bulan [32, 33, 34] başka bir entropi de Kaniadakis entropisidir. Kaniadakis'in önerdiği entropi,

$$S_\kappa[p] = -k_B \frac{\sum_{i=0}^{W} p_i(p_i^\kappa - p_i^{-\kappa})}{2\kappa}\ ;\ -1 < \kappa < 1, \kappa \neq 0 \qquad (2.17)$$

formunda olup $\kappa \to -\kappa$ değişimi altında invaryans bir entropidir ve $\kappa \to 0$ limitinde S_{BG} entropisine indirgenir. S_κ entropisi κ'nın tanım aralığında hem Lesche sürekliliğini [35, 36] hem içbükey şartını hem de termodinamiğin üçüncü yasasını [15] sağlar. Ayrıca SK(1-3)-aksiyomlarını da sağladığından fiziksel bir entropi adayı olduğu söylenebilir. Ancak diğer entropilerde olduğu gibi bu entropide de κ-parametresinin nasıl belirleneceği problemi halen tam çözülmüş değildir.

Bu entropiler dışında Abe entropisi, Kuantum group entropisi, kara delik entropisi gibi bir parametreli daha birçok entropinin mevcut olduğunu belirtmek gerekir. Ancak burada özellikle yaygın olanları vermekle yetinilmiştir. İleri sürülmüş bir entropinin

---

[5] Bu fonksiyonların nasıl seçilmesi gerektiği kousunda henüz bir uzlaşma yoktur. Burada klasik istatistiğin çerçevesinde kalınarak fonksiyonlar bu şekilde seçilmiştir. Bundan sonra açıkça belirtilmedikleri sürece bu iki fonksiyon böyle alınacaktır.

kabul edilebilir olmasının, fiziksel geçerlilik şartlarını ve en azından SK (1-3) aksiyomlarını sağlaması gerektiğine bağlı olduğunu vurgulamak gerekir.

Şimdi de iki parametreli entropilerden yaygın olan iki tanesi verilecektir. Bunlardan bir tanesi B. D. Sharma ve I.J. Taneja ile D. P. Mittal tarafından bağımsız olarak önerilen Sharma-Mittal entropisi diğeri de yine adı yazarlarından mülhem Borges-Roditi entropisidir. Bunlardan ilki olan ve iki tabanında

$$H_{(\alpha,\sigma)}[p] = (2^{1-\alpha} - 2^{1-\sigma})^{-1} \sum_{i=1}^{n} (p_i^{\alpha} - p_i^{\sigma}) \tag{2.18}$$

biçiminde önerilen [37] Sharma-Mittal entropisi, şu an literatürde daha çok doğal logaritma tabanındaki

$$S_{SM}[p] = \frac{1}{1-r}\left[\left(\sum_{i=0}^{W} p_i^{q}\right)^{\frac{1-r}{1-q}} - 1\right] \tag{2.19}$$

biçimiyle kullanılmaktadır [38]. Denklem (2.18)'de sırasıyla $\alpha \to \sigma = 1$ limit ve değer ataması yapılırsa söz konusu entropi iki tabanında Shannon entropisine indirgenir. Denklem (2.19)'de ise $r \to 1$ limitinde entropi Rényi entropisine indirgenirken $r \to q$ limitinde ise Tsallis entropisine indirgenir. Limit $\{r, q\} \to \{1,1\}$ durumunda ise entropi Boltzmann-Gibbs entropisine indirgenir. Burada bu iki parametreli entropinin dayanağına ilişkin bir parantez açmak gerekir.

Önce bir f(x) fonksiyonu, $f: [0,1] \to R$ sürekli ve $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i y_j) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) + \sum_{j=1}^{n} f(y_j) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\ ;\ \forall x_i, y_j \geq 0\end{gathered} \tag{2.20}$$

olacak şekilde tanımlansın. Böyle bir fonksiyon $\mathrm{f(x) = Cxlnx}$ olur. Bu tanım ve dolaysıyla çözüm denklem (2.20)'deki genelliği kaybetmeden, iki değişkenli bir $f: [0,1]\times[0,1] \to R$ fonksiyonuna

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i y_j, u_i v_i) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i, u_i) + \sum_{j=1}^{n} f(y_j, v_j)$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\;;\; \forall x_i, y_j \geq 0 \tag{2.21}$$
$$\sum_{i=1}^{m} u_i \leq 1\,, \sum_{j=1}^{n} v_j \leq 1\;;\; \forall u_i, v_j \geq 0$$

şeklinde genişletilebilir. Böyle bir fonksiyonun çözümü f(1,1/e) =1 ve f(1/e,1/e) =0 sınır koşulları altında f (x, u) =xln(x/u) iken f(1,1/e) =1 ve f(1/e,1/e) =1/e sınır koşulları altında f (x, u) =xln(u) olur [37]. Denklem (2.20) ve (2.21)'de verilmiş olan tanımların öncelikle enformasyon teorisinde belirsizlik fonksiyonunu genelleştirmeye yönelik çabaların bir ürünü olduğunu belirtmek gerekir. Aynı anda birbirinden bağımsız iki duruma ilişkin yapılan bir belirsizlik ölçümü, kısaca tek tek durumlardaki belirsizlik ölçümlerinin toplamı olarak yazılmak istendiğinde [13]; belirsizliği ölçen fonksiyonun sağlaması gereken şart doğal olarak denklem (2.20)'daki gibi olur [2]. Boltzman-Gibbs entropisini genelleştirmek için önerilen bir parametreli entropilerde kompleskliğin ölçüsü olan parametrenin her bir sistem için sayısal değerinin nasıl belirlenebileceği ve bu entropilerin fiziksel geçerlilik şartları üzerinde henüz tam bir birlik sağlanamadığından doğal olarak iki parametreli genelleştirilmiş entropilerin fiziksel geçerlilik koşulları üzerinde kapsamlı bir incelemenin yapılmış olduğunu beklememek gerekir. Dolayısıyla, iki-parametreli entropiler daha çok enformasyon teorisindeki Shannon entropisini genelleştirmeye yönelik olarak önerilmektedir ve bunların üçüncü yasaya uyup uymadıkları ya da Lesche sürekliliğini sağlayıp sağlamadıkları dikkate alınmaz. Yine bunlara benzer bir teşebbüsle önerilmiş olan Rényi entropisinin Lesche sürekliliğini sağlamadığı daha önce belirtilmişti. Şimdi yukarıda verilmiş olan tanımların iki-parametreli genelleştirilmiş bir entropi elde etmek için yenilenmiş hâllerine bakmak gerekir. Çünkü Sharma-Mittal entropisi, bu yenilenmiş tanımlardan çıkmasının yanında belirsizlik ölçümü hakkında fazladan bir bilgi de vermektedir. Bu entropinin özellikle enformasyon teorisinde şartlı belirsizliğin ölçümünde iyi bir teorik açılım getirdiğini belirtmek gerekir [37].

İlk önce denklem (2.20)'daki ifadeyi de içeren bir genelleştirme,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i y_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} y_j^{\alpha} f(x_i) + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i^{\sigma} f(y_j)\,, \alpha \neq \sigma$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\,;\ \forall x_i, y_j \geq 0 \tag{2.22}$$

şeklinde yapılabilir. Böyle bir genelleştirme ile verilmiş sürekli bir fonksiyonun çözümü $f(x) = C^{-1}(x^{\alpha} - x^{\sigma})$ biçimindedir. Burada $C \neq 0$, $\alpha \neq \sigma$ ve $C, \alpha, \sigma \in \mathbb{R}$ dir. Bu çözümde x-bağımsız değişkeni olasılık uzayındaki bir durumun olasılığı olarak alınır ve sınır şartı $f(1/2) = 1/2$ verilip $H[p] = \sum f(p_i)$ tanımı yapılırsa, denklem (2.18)'deki entropi tanımına ulaşılmış olur. Bu fonksiyon, enformasyon teorisinde aynı anda yapılmış iki belirsizliğin ölçümü olarak ya da bir rastsal değişkenin x-değerini alabilmesinin ölçümü olarak tanımlanacak olursa, söz konusu ölçümlerin birbirlerini etkilediğini gösterir. Aynı entropi fonksiyonu şayet fizikte kullanılırsa yine birbiriyle etkileşimde olacak alt-sistemlerin istatistiğini incelemek için kullanılabilir.

Burada denklem (2.20)'nin fiziksel açıdan önemli olabilecek bir başka genelleştirmesini de vermek yerinde olur:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i y_j) = \sum_{i=1}^{m} f(x_i) + \sum_{j=1}^{n} f(y_j) + C\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_i) f(y_j)$$
$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\,;\ \forall x_i, y_j \geq 0 \tag{2.23}$$

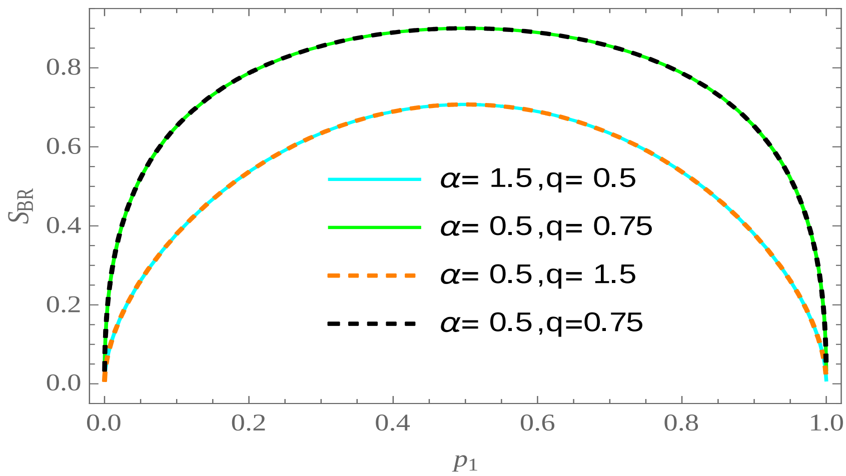
Bu genelleştirmenin önemli olabilecek bir çözümü de $f(x) = C^{-1}(x^{q} - x)$ olarak verilir. Yukarıdakine benzer şekilde $H[p] = \sum f(p_i)$ tanımı yapılıp C=1-q alınırsa, H[p] fonksiyonu S_q entropisinden başka bir şey olmayacaktır. Böylece denklem (2.23) sanki-toplanırlığın bir genelleştirilmiş hâli olmaktadır. Bu genelleştirmelerle ilgili daha fazla bilgi için Ref. [37]'ye bakılabilir.

Sharma-Mittal entropisi parametrelerinin tanımlı aralığında hem içbükeydir hem de Lesche kararlılığını sağlar [21]. Bununla birlikte bu entropi, informasyondaki entropilerin bir genelleştirilmiş hali olarak, SK (1-3) aksiyomlarını sağlarken; SK4 aksiyomunu değil sanki-toplanırlık özelliğini sağlamaktadır. Bunlara ek olarak S_{SM} entropisi $0 < q < 1$ ve $r \in \mathbb{R}$ için termodinamiğin üçüncü yasasını sağlamaktadır [39]. Bir diğer iki-parametreli genelleştirilmiş entropi ise Borges-Roditi'nin [40],

$$S_{BR}[p] = k_B \sum_{i=0}^{W} \frac{p_i^{\alpha} - p_i^{q}}{q - \alpha} \tag{2.24}$$

şeklinde önermiş oldukları entropidir. Bu entropinin nasıl önerildiğini görmek için ilk önce olasılık uzayındaki mikro-durum olasılıklarının sürekli bir fonksiyonu olan şu $T(\theta) = \sum_{i=0}^{W} p_i^{\theta}$ tanımlı fonksiyon ele alınsın. $T(1) = 1$ olduğu açıktır. Jackson q-türevine göre, $S_q[p] = \left(-k\, d_q T(\theta)/d_q\theta\right)|_{\theta=1}$ olduğu da açıktır. S. Abe tarafından önerilen simetrik q-türevi olan $d_q^s f(x)/d_q^s x = [f(qx) - f(q^{-1}x)]/(q - q^{-1})x$ türev biçimini $d_{q,\alpha} f(x)/d_{q,\alpha} x = [f(qx) - f(\alpha x)]/(q - \alpha)x$ şeklinde daha genel hâle getiren Ref. [40]'in yazarları $S_{q,\alpha}(= S_{BR}[p]) = \left(-k\, d_{q,\alpha} T(\theta)/d_{q,\alpha}\theta\right)|_{\theta=1}$ türev tanımından denklem (2.24)'teki entropi tanımına ulaşmışlardır. $S_{BR}[p]$ entropisi SK (1-3) aksiyomlarını sağlamakla birlikte SK4-aksiyomu yerine,

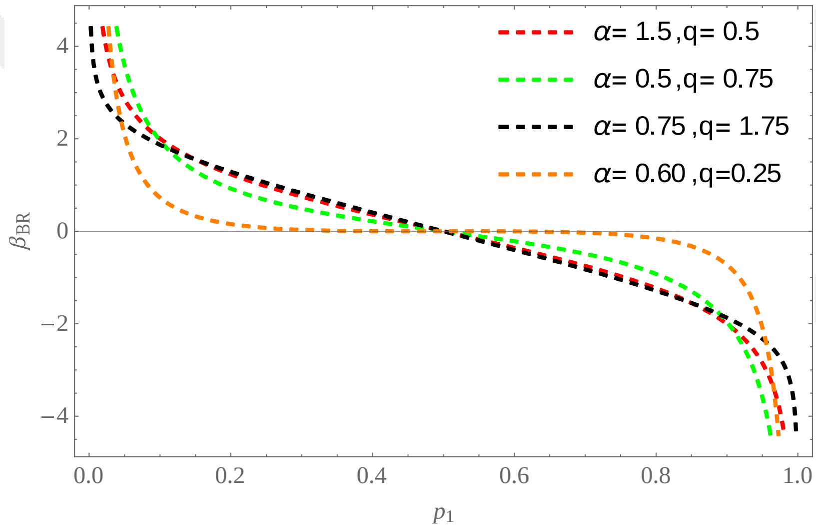
$S_{BR}^{(AUB)} = S_{BR}^{(A)} + S_{BR}^{(B)} + (1-q) S_{BR|\alpha=1}^{(B)} S_{BR}^{(A)} + (1-\alpha) S_{BR}^{(B)} S_{BR|q=1}^{(A)}$ şeklinde bir sanki-toplanırlık özelliğini sağlamaktadır [40]. İki alt-sistem biribirinden bağımsız ise $\alpha = 1$ durumunda bu özellik denklem (2.2)'deki tanıma indirgenmiş olur.



Şekil 2.4 Borges-Roditi entropisinin iki durumlu olasılık uzayında parametrelerinin farklı değerleri için içbükeyliği.

Borges-Roditi entropisi $0 < q < 1 < \alpha$ ya da $0 < \alpha < 1 < q$ şartı altında içbükeyliği ve sürekliliği sağlamaktadır [39, 40]. Bu şartlar aynı zamanda termodinamiğin üçüncü yasasına da uyar (bkz. Şekil 2.4).

Bir kez daha termodinamiğin üçüncü yasasına uyulması için gereken şartın süreklilik ve içbükeyliği de kapsadığını görmek üzere Borges-Roditi entropisine bakılabilir. Şekil 2.4'te, içbükeylik için verilen şartlarda içerilmemelerine rağmen, $\alpha = 0.5, q = 0.75$ ve $a = 0.60$, $q = 0.25$ değerlerinin içbükeyliği sağladığı görülmektedir (Ancak $0 < \{a, q\} < 1$ şartına karşılık gelen bu değerler, ref [41]'de verilen kriterleri sağlamamaktadır). Aynı değerler, yine Ising modeli örnekliğinde üçüncü yasaya uygunluk için kullanılırsa β_{BR} fonksiyonunun değişimi Şekil 2.5'teki gibi olacaktır.



Şekil 2.5 Borges-Roditi entropisinin parametrelerinin farklı değerleri için Ising modeli örnekliğinde üçüncü yasa testi.

Üçüncü yasaya uyup uymadığı test edildiğinde $0 < \alpha < 1$ ve $0 < q < 1$ şartının da sağlandığı görülür [39]. Buraya kadar literatürde sıkça kullanılan genelleştirilmiş entropiler ele alınmıştır. Bunların dışında, bir parametreli olup kullanılan Abe entropisi [42], Landsberg-Vedral entropisi ve Kullback entropisi [21] gibi başka entropiler de mevcuttur.

Son zamanlarda, genelleştirilmiş entropileri, grup teorisinin yapısal özellikleri kullanılarak tek bir entropi altında toplamaya yönelik çalışmalar yapılmaktadır. Sonraki bölümde formel grup işlemi kullanılarak, genelleştirilmiş entropileri kapsayan yeni bir entropinin anlatımı verilecektir.

2.2 Formel Grup Yapısı ve Evrensel Entropi

Birinci dereceden denklemlere seri yaklaşımı ile formel bir çözüm önermeye çalışan S. Lie, böyle bir durumda çözümlerin sağlaması gereken bazı özellikler vermiştir. Bir r-parametreli R-cebirsel yapısı üzerinde aşağıdaki işlem tanımlanmış olsun:

$$\begin{gathered} a = (a_1, a_2, \dots, a_r)\ , b = (b_1, b_2, \dots, b_r)\ ; a, b \in R^r\ ; a * b = \varphi(a, b) \\ z = \varphi(a, b) = a + b + O(2)\ ;\ z_q = \varphi_q(a, b) = a_q + b_q + O(2). \end{gathered} \tag{2.25}$$

Buradaki φ-fonksiyonlarına, S. Lie'nin kullandığı biçimiyle, formel seriler denir. Açılımında da görüldüğü üzere sabit terimleri yoktur. Şimdi,

$$\frac{\partial z_\sigma}{\partial a_\rho} = F_\rho^\sigma(z, a)\ \ ; \sigma = 1,2, \dots, n; \rho = 1,2, \dots, r \tag{2.26}$$

birinci dereceden diferansiyel denklem göz önüne alınsın. Yine buradaki F_ρ^σ fonksiyonları φ-fonksiyonları gibi formel serilerdir. Bu R^r - cebirsel yapısında $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ değişkenleri tanımlanmış olmak üzere $z_\sigma = f_\sigma(x, a)$ şeklinde yazılabilsin. Eğer bu fonksiyonlar denklem (2.26)'i (x, a)-değişkenleri cinsinden sağlayabiliyorlarsa o zaman söz konusu denklemin birer çözümü olurlar. Birinci dereceden diferansiyel denklem olduklarından, $z_i = f_i(x, a)$ ve $z_i = g_i(x, a)$ iki çözüm varsayıldığında, $f_i(x, 0) = g_i(x, 0)$ olduğu taktirde $f_i(x, a) = g_i(x, a)$ yazılabilir [43]. Bu denklem sisteminin integrallenebilir ve tam bir çözümünün olması için $A_{\rho\sigma}^i = \frac{\partial F_\rho^i}{\partial z_j} F_\sigma^j + \frac{\partial F_\rho^i}{\partial a_\sigma} - \frac{\partial F_\sigma^i}{\partial z_j} F_\rho^j - \frac{\partial F_\sigma^i}{\partial a_\rho} = 0$ genel şartının sağlanması gerekir [44]. Aslında bu şart $\frac{\partial z_i}{\partial a_\sigma \partial a_\rho} - \frac{\partial z_i}{\partial a_\rho \partial a_\sigma} = 0$ eşitliğine denktir. Bu da denklemin çözümlerinin düzgün ve ikinci dereceden türevlenebilir olmalarını gerektirir. Seri çözümlerinin, nihayetinde polinom olmalarından dolayı bu şartı sağlayacakları açıktır. Denklem (2.26)'daki denklem sisteminin bazı şartları sağlaması altında bir grup yapısı oluşturduğu görülecektir. Şimdi, $v_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} u_j + O(2)$ olacak şekilde bir

$$v_i = f_i(u_1, u_2, \dots, u_n)\ \ ; i = 1,2, \dots, n \tag{2.27}$$

formel dönüşüm göz önüne alınsın. Eğer determinant $|c_{ij}| \neq 0$ olursa bu dönüşümün benzer şekilde sabit terimsiz ve $\mathrm{f_i}\big(g(\mathrm{v_1}, \mathrm{v_2}, \dots, \mathrm{v_n})\big) = \mathrm{v_i}$ şartını sağlayan bir ters dönüşümü de mevcuttur:

$$\mathrm{u_i} = g_{\mathrm{i}}(\mathrm{v_1}, \mathrm{v_2}, \dots, \mathrm{v_n}) \;\; ; \mathrm{i} = 1,2, \dots, \mathrm{n} \qquad (2.28)$$

Şimdi denklem (2.25)'teki gibi bir $\mathrm{R^r}$ - cebirsel yapı üzerinde φ-işlemi tanımlanmış olsun ve $\mathrm{z}_\rho = \varphi_\rho(\mathrm{x}, \mathrm{b})$, $\mathrm{b}' = \mathrm{b}$ varsayılsın. Bu durumda $\mathrm{R^r}$-cebirsel yapısı üzerinde bir $(\mathrm{x}, \mathrm{b}) \rightarrow (\mathrm{z}, \mathrm{b}')$ dönüşümün varlığı sağlanmış olur. Bu dönüşümün denklem (2.27) ve (2.28)'deki dönüşüm olduğunu ve dolaysıyla $\mathrm{x}_\rho = \psi_\rho(\mathrm{z}, \mathrm{b})$ ve $\varphi(\psi(\mathrm{x}, \mathrm{b}), \mathrm{b}) = \mathrm{x}$ ters dönüşümlerinin de mevcut oldğunu belirtmek gerekir. Bu dönüşümler kullanılarak denklem (2.26),

$$\frac{\partial \mathrm{z}_\rho}{\partial \mathrm{b}_\sigma} = \frac{\partial \varphi_\rho(\mathrm{x}, \mathrm{b})}{\partial \mathrm{b}_\sigma} = \frac{\partial \varphi_\rho(\psi(\mathrm{z}, \mathrm{b}), \mathrm{b})}{\partial \mathrm{b}_\sigma} = \Phi_\sigma^\rho(\mathrm{z}, \mathrm{b}) \qquad (2.29)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Ref. [44]'de bu r-parametreli R-cebirsel yapısı üzerinde tanımlanan $\mathrm{a} * \mathrm{b} = \varphi(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ işleminin aşağıdaki özellikleri sağladığı taktirde bir grup işlemi olacağı gösterilmiştir:

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{i})\ \varphi(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \big(\varphi_1(\mathrm{a}_1, .., \mathrm{a_r}, \mathrm{b}_1, \dots, \mathrm{b_r}), \dots, \varphi_{\mathrm{r}}(\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a_r}, \mathrm{b}_1, \dots, \mathrm{b_r})\big)\\
&(\mathrm{ii})\ \varphi_\rho(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{a}_\rho + \mathrm{b}_\rho + O(2), \rho = 1,2, .., \mathrm{r}\\
&(\mathrm{iii})\ \varphi_\rho(\mathrm{a}, 0) = \mathrm{a}_\rho \text{ ve } \varphi_\rho(0, \mathrm{b}) = \mathrm{b}_\rho\ , \rho = 1,2, .., \mathrm{r}\\
&(\mathrm{iv})\ \varphi(\varphi(\mathrm{a}, \mathrm{b}), \mathrm{c}) = \varphi(\mathrm{a}, \varphi(\mathrm{b}, \mathrm{c}))
\end{aligned} \qquad (2.30)$$

Şimdi denklem (2.30)'daki şartları sağlayan φ-işleminin denklem (2.29)'deki çözüm sistemine benzer bir yapıya sahip olup olmadığına bakmak yararlı olur. Çünkü φ-işlemi denklem (2.29)'u sağlarsa, sahip olacağı özellikler de belirlenmiş olur. Bunun için önce R-cebirsel yapısı üzerinde $\mathrm{z}_\rho = \varphi_\rho(\mathrm{a}, \mathrm{b})$ ile tanımlanmış olan bu φ-işlemi kapalı olduğu varsayılsın. Denklem (2.30-iii) den dolayı, $\varphi_\rho(0, \mathrm{b}) = \mathrm{b}_\rho$ olacağından denklem (2.29)'de $\frac{\partial \varphi_\rho(0,\mathrm{b})}{\partial \mathrm{b}_\sigma} = \delta_\sigma^\rho$ olur. Bu ise, $\Phi_\sigma^\rho(\mathrm{b}, \mathrm{b}) = \delta_\sigma^\rho$ ve dolaysıyla da $\Phi_\sigma^\rho(0,0) = \delta_\sigma^\rho$ demektir. Denklem (2.30-iv) 'deki $\varphi_\rho(\varphi(\mathrm{x}, \mathrm{a}), \mathrm{b}) = \varphi_\rho(\mathrm{x}, \varphi(\mathrm{a}, \mathrm{b}))$

birleşme özelliğinden $t_\lambda = \varphi_\lambda(x,a)$ ve $s_\mu = \varphi_\mu(a,b)$ tanımları yapılır ve türevde zincir kuralı da kullanılırsa, $\frac{\partial\varphi_\rho(t,b)}{\partial b_\sigma} = \frac{\partial\varphi_\rho(x,s)}{\partial s_\mu}\frac{\varphi_\mu(s,b)}{\partial b_\sigma}$ eşitliği yazılabilir. $z_\rho = \varphi_\rho(t,b)$ alınıp denklem (2.29)'den

$$\Phi^\rho_\sigma(z,b) = \Phi^\rho_\mu(z,s)\Phi^\mu_\sigma(s,b) \tag{2.31}$$

eşitliğine ulaşılır. $A^\rho_\mu(z) = \Phi^\rho_\mu(z,0)$ ve $B^\mu_\sigma(b) = \Phi^\mu_\sigma(s,b)$ tanımları yapılarak varılan sonuç aşağıdaki gibi toparlanabilir:

Teorem 1. *r-parametreli R-cebirsel yapısı üzerinde tanımlanan,*

$$(a * b)_\rho = \varphi_\rho(a,b) = c_\rho\,, a,b \in R, \rho = 1,2,\dots,r$$

işlemleri bir grup oluşturuyorsa o zaman bunlar $A^\rho_\mu(0) = \delta^\rho_\mu$; $B^\mu_\sigma(0) = \delta^\mu_\sigma$ *ve* $A^\rho_\mu(b)B^\mu_\sigma(b) = \delta^\rho_\sigma$ *olmak üzere,* $\frac{\partial c_\rho}{\partial b_\sigma} = A^\rho_\mu(c)B^\mu_\sigma(b)$ *şeklindeki bir denklem sisteminin çözümleridirler*.

Sonuç olarak (R, φ) ikilisinin bir grup[6]; grup elemanlarının da denklem (2.29)'daki denklemin formel çözümleri olduklarından, formel bir grup yapısı oluşturduğu söylenebilir. Bu formel grup yapısının genelleştirilmiş entropilerle birebir bir benzerlikleri olduğu aşağıda gösterilecektir.

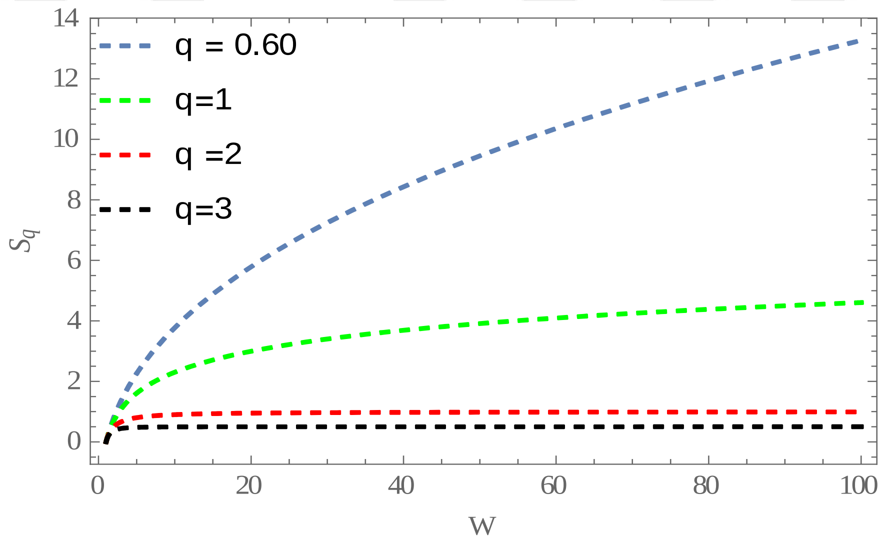
Genelleştirilmiş entropilerin dışsal (extensive) olması istenen bir özelliktir. Yani termodinamik denge durumunda sistemin entropisinin durum ya da parçacık sayısının artışına bağlı olarak bir artış göstermesi gerekir. Boltzmann-Gibbs entropisi denge durumunda $S_{BG}[p] \propto N$ ilişkisini gösterir. SK-4 aksiyomunun genişletilmiş halini sağlayan entropiler de buna benzer bir ilişki gösterirler. Bu doğrusal ilişki, iki alt sistemin bileşimiyle oluşan yeni sistemin enerjisinin, bu iki alt sistemin enerjilerinin doğrusal bir birleşimi şeklinde yazılıp yazılmamasına sıkı sıkıya bağlıdır. Daha önce de belirtildiği gibi genelleştirilmiş entropiler artık SK-4 aksiyomunu değil sanki-toplanırlık özelliği sağlamaktadırlar. Doğal olarak, genelleştirilmiş entropiler ile parçacık sayısı arasında $S_{BG}[p]$ entropisindeki gibi bir doğrusal ilişki beklenmeyebilir.

---

[6] Bir R-cismi üzerinde tanımlanan herhangi bir "*" işleminin bir grup oluşturması için sağlaması gereken şartlar ve grup teorisi hakkında daha fazla bilgi için Ref. [89]'e bakılabilir.

Örneğin Tsallis entropisinin denge durumundaki ifadesi $S_q[p] = \frac{W^{1-q}-1}{1-q}$ şeklindedir. Tsallis entropisinin durum sayısının artışına bağlı değişimi, $0 < q \leq 1$ aralığında dışsal (extensive) bir karakter gösterirken, $q > 1$ için $S_q[p] \to \frac{1}{q-1}$ gibi sonlu bir değere yaklaşmaktadır (bkz.Şekil 2.6). Entropinin ya da genel olarak bir fiziksel niceliğin dışsallığı (extensivity), SK4-aksiyomunda ifade edilen $f(A \otimes B) = f(A) \oplus f(B)$ şeklindeki bir homomorfizma olarak değil, durum sayısındaki artışın fiziksel nicelikte de bir artışa sebep olacağı şekilde bir ilişki olarak yorumlamak gerekir [45]. SK-4 aksiyomu böylesi bir ilişkinin sadece özel bir hâlidir.

Bu bağlamda genelleştirilmiş entropilerin de dışsal olduğu ama toplanırlık özelliğini sağlamayabilecekleri söylenebilir.



Şekil 2.6 Tsallis entropisinin denge durumunda farklı q-değerleri için durum sayısına bağlı değişimi.

İki alt sistemin birleşimini ifade eden sanki-toplanırlık özelliğiyle birlikte entropinin başka özellikleri de bir arada düşünüldüğünde, formel grup yapısıyla sıkı sıkıya bir benzerliğin var olduğu görülecektir. Ortaya çıkarılacak olan söz konusu benzerlik, bunun ilk ortaya konulduğu Ref. [45]'e ve daha sonra bu çalışmanın geliştirilip evrensel entropi logaritmalarının verildiği Ref. [46]'ya dayandırılacaktır.

SK4-aksiyomu ile birlikte entropinin $S\big(A \cup (B \cup C)\big) = S((A \cup B) \cup C)$ birleşme özelliğini sağladığı apaçıktır. Önce iki alt sistemin, bunlar termodinamik dengeye geldikten sonra da bir üçüncü ile bileşimin alınmasında sıranın önemi yoktur. Burada kuvantum mekaniği bağlamında operatörel bir işlem değil, fiziksel iki kompleks alt sistemin arasındaki adyabatik zarın kaldırılıp sistemlerin kendiliğinden termodinamik bir dengeye gelmeleri gibi termodinamiksel bir süreç söz konusudur. Ayrıca $S(A \cup B) = S(B \cup A)$ eşitliğinin sağlandığı açıktır. Bu özelliklerle birlikte Ref. [45]'de $S(A \cup B) = S(A) \ni S(B) = 0$ özelliğinin de sağlanması istenmektedir. Bu özellik, entropisinin sıfır olduğu bir durumda olan bir B-sisteminin bir başka A-sistemiyle bileşiminden oluşan toplam sistemin entropisinin A-sisteminin entropisine eşit olduğunu anlatmaktadır.

Entropi fonksiyonu matematiksel olarak ifade edildikten sonra formel grup yapısıyla olan benzerliği kendiliğinden ortaya çıkacaktır. Durum sayısı W-olan bir sistemin olasılık uzayındaki tanımı, $S: \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ olmak üzere bir $\mathcal{P} = \{p_i, i = 0,1, \ldots, W \mid \forall p_i \in [0,1]\}$ olasılık dağılımı altında verilmektedir. Boltzmann sabiti genelliği bozmadan bir alındığında bu tanım, entropinin, $I = [0,1]$ olmak üzere I^W tanım kümesinden reel sayılara giden sürekli ve düzgün bir fonksiyon olduğunu belirtir[7]. Ref. [45]'de

$$\text{C1.}\ S(A \cup B) \coloneqq \varphi\big(S(A), S(B)\big) = \varphi(x, y) \tag{2.32}$$

tanımı yapılmaktadır. Burada, φ-fonksiyonunun entropinin sürekli ve düzgün olma özelliklerini karşılaması gerekir. Bu tanımla birlikte $\varphi: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olur ve entropinin yukarıda belirtilen özelliklerini de sağlamış olur:

$$\begin{aligned} &\text{C2.}\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x) \\ &\text{C3.}\ \varphi\big(x, \varphi(y, z)\big) = \varphi(\varphi(x, y), z) \\ &\text{C4.}\ \varphi(x, 0) = x \end{aligned} \tag{2.33}$$

Denklem (2.32)'deki fonksiyon tanımı ile birlikte denklem (2.33)'deki özelliklerin sağlanması durumuna alt sistemlerin *güçlü bileşimi,* denklem (2.33-C4)'ün her zaman geçerli ancak C(1-3)'ün en azından bileşik sistem dengedeyken sağlanması durumuna ise alt sistemlerin *zayıf bileşimi* denir [45]. Bu iki tanım, entropinin zaten varolan özellikleri (C2,C3) de kullanılarak SK4-aksiyomunun yani dışsalığın genelleştirilmesinden başka bir şey değildir. Buradaki φ-işlemi, $\varphi(x, y) = x + y + \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j$ şeklinde bir formel seri biçiminde tanımlanırsa, denklem (2.30)'da

---

[7] SK (1-3) aksiyomlarını sağlayan entropi, tanımı gereği böyle bir fonksiyondur.

tanımlanan işlemle $r = 1$ için özdeş olur. Denklem (2.27) ve (2.28)'deki dönüşüm özelliklerini de sağladığından, bunun $\varphi(x, \varphi(x)) = 0$ biçiminde bir tersi de mevcuttur. Bu seri açılımında, $\forall c_{ij} = 0$ alınırsa ifade SK4-aksiyomuna, $c_{11} = (1 - q)$ alınıp diğer c_{ij} katsayıları sıfır alındığında ise Tsallis entropisi için tanımlanan sanki-toplanırlık özelliğine indirgenmiş olur. Ancak bu seri açılımı C2 koşulunu yani değişme özelliğini sağlamamaktadır. Oysa C2 koşulunun da sağlandığı bir formel grup işlemi gereklidir. Ayrıca bu seri açılımında toplama ve çarpma işlemi olmak üzere iki tane işlem yapılmaktadır. Bu yüzden φ-işleminin üzerinde tanımlandığı ve C(1-4) koşullarının sağlandığı cebirsel yapı, birimli ve değişmeli bir $(\mathbb{R}, +, *)$ halkası olmalıdır[8]. φ-işleminin seri açılımındaki katsayıların da reel sayılar olmaları yeterlidir. Böylece bu $\mathbb{R}$-halkası üzerinde tanımlanan φ-işleminin C(1-4) şartlarını sağlaması sonucu, seri açılım için $x + y + \sum_{i,j} c_{ij}x^i y^j = y + x + \sum_{i,j} c_{ij}y^i x^j$ eşitliği yazılabilir. Sonuç olarak, açıkça görüldüğü üzere, iki alt sistemin bileşiminin tanımı olarak φ-işlemi değişmeli bir formel grup yapısı oluşturmaktadır. Bu tespitten sonra, burada önemli olan, bu grup yapısından S(A) entropisinin ne olabileceğini ortaya çıkarmaktır. Böyle bir amaç için Lazard formel grup işlemi (*evrensel formel grup işlemi*) elverişli bir yapıdır.

Evrensel formel grup işleminin yapısını vermeden önce birkaç tanım vermek gerekir. Bir A-halkası üzerinde tanımlanan 1-boyutlu $(r = 1)$ $\varphi(x, y) = x + y + \sum_{i,j} c_{ij}x^i y^j$ şeklinde seri açılımı verilen bir formel grup için öyle bir $g(x) = -x + b_1x^2 + \cdots$ serisi vardır ki $\varphi(x, g(x)) = 0$ dır [47]. Bu özellik, bir grup yapısının teşkili ve iki formel grup yapısı arasında kurulabilecek bir homomorfizma için gereklidir.

Tanım 3. $\varphi(x, y)$ *ve* $\psi(x, y)$ *A-halkası üzerinde tanımlanan iki formel grup işlemi olsun. A-halkası üzerinde* $\varphi(x, y) \xrightarrow{g} \psi(x, y)$ *şeklindeki bir homomorfizma, katsayıları yine A'da olan öyle bir* $g(x) = b_1x + b_2x^2 + \cdots$ *serisidir ki* $g(\varphi(x, y)) = \psi(g(x), g(y))$ *dir.*

[8] Eğer i) $(\mathbb{R}, +)$ bir abel grubu ve $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ olmak üzere ii) x*(y*z) =(x*y*z) (*birleşme*), iii) x*1=1*x=x (*birim eleman*), iv) x*(y+z) =x*y+x*z şartları sağlanıyorsa $(\mathbb{R}, +, *)$ cebirsel yapısı bir (birimli) halka; v) x*y=y*x şartı da sağlanıyorsa değişmeli (ve birimli) bir halka olur.

Benzer şekilde ψ'den φ'ye giden bir $\mathrm{p(x)}$ homomorfizması varsa ve $g\big(\mathrm{p(x)}\big) = \mathrm{x} = \mathrm{p}(g(\mathrm{x}))$ oluyorsa $g(\mathrm{x})$'e bir *izomorfizma* denir. $g(\mathrm{x})$ serisindeki $\mathrm{b_1}$-katsayısının bir olması $g(\mathrm{x})$ serisini bir izomorfizm yapar [47].

Bir A-halkası üzerinde $\mathrm{\varphi(x,y) = x + y + \sum_{i,j} c_{ij} x^i y^j}$ formel grup işlemi tanımlanmış olsun ve $g: A \to B$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda g-işlemi $\mathrm{\varphi(x,y)}$'nin katsayılarına uygulandığında, $g_*\big(\mathrm{\varphi(x,y)}\big) := \mathrm{x + y} + \sum_{\mathrm{i,j}} g(\mathrm{c_{ij}})\mathrm{x^i y^j} = \mathrm{\psi(x,y)}$ işlemi de B-halkası üzerinde yine bir formel grup işlemi olur. İki formel grup işlemi arasında tanımlanan bu homomorfizmadan yararlanarak evrensel formel grup aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 4: $\mathrm{\varphi(x,y)}$, *bir L-halkası üzerinde tanımlanan bir boyutlu ve değişmeli formel bir grup işlemi olsun. Başka bir A-halkası üzerinde tanımlanan her* $\mathrm{\psi(x,y)}$- *formel grup işlemi için* $g_*\big(\mathrm{\varphi(x,y)}\big) = \mathrm{\psi(x,y)}$ *olacak şekilde bir ve yalnız bir* $g: L \to A$ *g-homomorfizması varsa bu durumda* $\mathrm{\varphi(x,y)}$, *evrensel bir formel grup işlemidir*.

Teorem 2. *L-halkası evrensel formel grup işleminin bu tanımıyla bir biçimli, tek türlü olarak belirlenir*.

İspat: φ, L-halkası üzerinde tanımlı bir boyutlu ve değişmeli evrensel bir formel grup işlemi, ψ de $\mathrm{L_2}$-halkası üzerinde φ'ye benzer şekilde tanımlanmış olsun. Bu durumda, tanım gereği, $\mathrm{T: L \to L_2}$ ve $\mathrm{K: L_2 \to L}$ olmak üzere iki tane homomorfizma vardır ve tektirler. Burada birbirinden farklı varsayılan L ve $\mathrm{L_2}$ halkalarının en azından izomorfik oldukları gösterilebilirse, L-halkasının φ-evrensel formel grup işlemi ile tek türlü olarak belirlendiği kanıtlanmış olur. $\mathrm{T_*(\varphi) = \psi}$ ve $\mathrm{K_*(\psi)} = \varphi$ dir. Buradan, $\mathrm{K_*\big(T_*(\varphi)\big) = \varphi \Longrightarrow K_* \circ T_*(\varphi) = \varphi \Longrightarrow K_* \circ T_* = I}$ bulunur. Benzer şekilde $\mathrm{T_* \circ K_* = I}$ sonucuna ulaşılır. Bileşke işlemine göre iki fonksiyonun birleşimi birim fonksiyonu veriyorsa bu iki fonksiyon birbirinin tersidir. Eğer bir fonksiyonun tersi varsa birebir ve örtendir. Bu fonksiyon bir halka homomorfizması ise bu durumda bir izomorfizma olur. Böylece $\mathrm{T = K^{-1}}$ olacağından L ve $\mathrm{L_2}$ izomorfik olur. İzomorfik olan değişmeli ve birimli iki halkanın cebirsel yapısı aynıdır; yani bu iki halka özdeştir.

Bu önemli teorem, üzerinde keyfi, bir boyutlu ve değişmeli bir formel grup işleminin tanımlandığı bir R-halkası ile üzerinde evrensel formel grup işleminin tanımlandığı L-Lazard halkası arasında yalnızca bir homomorfizmanın olacağını söyler. R-halkası, Lazard halkasının kendisi seçildiğinde bir izomorfizm elde edilir. Lazard halkası üzerinde tanımlanan evrensel grup işlemi, yani bir boyutlu ve değişmeli formel grup işlemi, Lazard formel grup işlemi olarak adlandırılır.

Lazard formel grup işlemini tanımlamak için önce tam sayıların oluşturduğu $B = \mathbb{Z}[b_1, b_2, \dots]$ halkası göz önüne alınsın. Daha sonra $(\mathbb{R}, +, *)$-halkası üzerinde bir seri,

$$\mathrm{f(t)} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{b_i} \frac{\mathrm{t}^{i+1}}{i+1} \tag{2.34}$$

$g(\mathrm{t})$ de bileşke işlemine göre $\mathrm{f(t)}$'nin tersi olsun. Yani,

$$g(\mathrm{t}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{a_j} \frac{\mathrm{t}^{j+1}}{j+1} \;, \mathrm{f}\big(g(\mathrm{t})\big) = \mathrm{t}, \mathrm{f} \circ g = \mathrm{I} \tag{2.35}$$

olsun. Lazard formel grup işlemi, $\varphi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) = g(\mathrm{f}(\mathrm{t}_1) + \mathrm{f}(\mathrm{t}_2))$ *olarak verilir*. Bu işlemin C(1-4) koşullarını sağlayıp sağlamadığına bakılabilir. Bunun için önce $g(\mathrm{f}(\mathrm{t}_1) + \mathrm{f}(\mathrm{t}_2))$ fonksiyonunun açılımına bakıldığında, değişkenlerin tanım aralığında tekil noktalar içermediği kolaylıkla görülebilir:

$$\begin{aligned} g\big(f(t_1) + f(t_2)\big) &= \mathrm{a_0 f(t_1)} + \mathrm{a_0 f(t_2)} + \frac{\mathrm{a_1}}{2}\big(\mathrm{f(t_1)} + \mathrm{f(t_2)}\big)^2 + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{a_0 b_i} \frac{\mathrm{t}_1^{i+1}}{i+1} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{a_0 b_j} \frac{\mathrm{t}_2^{j+1}}{j+1} + \sum_{i,j=0}^{\infty} \mathrm{a_1 b_i b_j} \frac{\mathrm{t}_1^{i+1}\mathrm{t}_2^{j+1}}{(i+1)(j+1)} + \cdots \end{aligned}$$

Bu açılımdan görüldüğü üzere $\varphi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2)$ formel grup işlemi nihayetinde katsayıları $\mathbb{R} \otimes B$ halkasına ait olan bir polinomlar halkasıdır. Polinomların türevlenebilir ve düzgün fonksiyonlar olduğu açıktır. Dolayısıyla C1 koşulu sağlanır. C2 koşulunun sağlandığı da açıktır. $\varphi\big(\mathrm{t}_1, \varphi(\mathrm{t}_2, \mathrm{t}_3)\big) = \varphi(\varphi(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2), \mathrm{t}_3)$ birleşme özelliğine bakılırsa,

$$\begin{aligned} \varphi\big(\mathrm{t}_1, \varphi(\mathrm{t}_2, \mathrm{t}_3)\big) &= g\Big(\mathrm{f(t_1)} + \mathrm{f}\Big(g\big(\mathrm{f(t_2)} + \mathrm{f(t_3)}\big)\Big)\Big) \\ &= g\Big(\mathrm{f(t_1)} + \mathrm{f} \circ g\big(\mathrm{f(t_2)} + \mathrm{f(t_3)}\big)\Big) \\ &= g\big(\mathrm{f(t_1)} + \mathrm{f(t_2)} + \mathrm{f(t_3)}\big) \\ &= g\Big(\mathrm{f} \circ g\big(\mathrm{f(t_1)} + \mathrm{f(t_2)}\big) + \mathrm{f(t_3)}\Big) \\ &= g\Big(\mathrm{f}\Big(g\big(\mathrm{f(t_1)} + \mathrm{f(t_2)}\big)\Big) + \mathrm{f(t_3)}\Big) \end{aligned}$$

$$= \varphi(\varphi(t_1, t_2), t_3)$$

bulunur. Dolayısıyla C3 koşulu da sağlanmaktadır. Ayrıca,

$$\varphi(t_1, 0) = g\big(f(t_1) + f(0)\big) = g(f(t_1) + 0) = g\big(f(t_1)\big) = g \circ f(t_1) = t_1$$

olacağından C4 de sağlanır. Böylece Lazard formel grup işleminin istenen koşulları sağlayan ve kendisinden entropi ifadesininin çıkarılacağı uygun bir formel grup işlemi olduğu gösterilmiş bulunmaktadır.

Burada verilmiş olan Lazard formel grup işlemi açıkça yazıldığında,

$$\varphi(t_1, t_2) = t_1 + t_2 + \sum_{i,j} c_{ij} t_1^i t_2^j$$

şeklinde bir seri açılımıdır. Bunun kapalı formunu irdelemeden önce Ref. [45]'te verilen entropi tanımının fiziksel geçerlilik şartlarını sağlayıp sağlamadığını ele almak yararlı olur. Daha önce de belirtildiği gibi, burada iki alt sistemin bileşiminin özelliklerinden yararlanılarak entropi ile Lazard formel grup işlemi arasında birebir bir ilişki kurulmuştur. Konu, bu ilişkiden, gerekli olan bir sistemin entropisini çıkarmaktır. $S(A \cup B) \coloneqq \varphi(x, y) = g(f(x) + f(y))$ denkliğinden sezilebileceği gibi, bir A-sisteminin entropisi ile $g(x)$-fonksiyonu arasında birebir bir ilişki vardır.

Tanım 5: *Keyfi bir fiziksel A-sistemi* $\mathcal{P}^{W+1}$*-olasılık uzayında,* $p = \{p_i, i = 0,1, \ldots, W | \, \forall p_i \in [0,1]\}$ *olasılık dağılımına sahip ve* $g(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{t^{i+1}}{i+1}$; $\forall a_i \geq 0, a_0 \neq 0$ *reel ve tanım aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. A-sisteminin entropisi,* $S_U[p]: \mathcal{P}^{W+1} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *olmak üzere,*

$$S_U[p] \coloneqq k_B \sum_{i=0}^{W} p_i g\left(\ln\left(\frac{1}{p_i}\right)\right) \qquad (2.36)$$

şeklinde tanımlanır [45]. Bu entropi, evrensel formel grup işleminden çıkarıldığı için, evrensel entropi olarak adlandırılır. "U" alt indisi buna işaret eder.

İlk önce bu entropi tanımının hiç olmazsa *zayıf bileşimi* sağladığını göstermek gerekir. Yani, iki alt sistemin bileşiminin entropisi denklem (2.36) ile verildiğinde, bileşik sistem C(1-3) şartlarını termodinamik süreç içerisinde sağlamasa bile en azından denge durumunda sağlamalıdır.

Olasılık dağılımı $\{p_i^A, i=0,1,\ldots,M\}$ olan bir A-sistemi ile olasılık dağılımı $\{p_i^B, i=0,1,\ldots,N\}$ olan bir B-sistemi istatistiksel olarak birbirinden bağımsız olsun. Bu iki sistemin bileşiminin olasılık dağılımı $p_{ij}^{A\cup B} = p_i^A . p_j^B$ olur. Bileşik sistemin entropisi için,

$$
\begin{aligned}
S_U(A\cup B) &:= k_B \sum_{i,j=0}^{M,N} p_{ij}^{A\cup B} g\left(\ln\left(1/p_{ij}^{A\cup B}\right)\right) \\
&= k_B \sum_{i,j=0}^{M,N} p_i^A p_j^B g\left(\ln\left(\frac{1}{p_i^A}\right) + \ln\left(\frac{1}{p_j^B}\right)\right) \\
&= k_B \sum_{i,j=0}^{M,N} p_i^A p_j^B g\left(t_i^A + t_j^B\right) \\
&= k_B \sum_{i,j=0}^{M,N} p_i^A p_j^B g\left(f\left(s_i^A\right) + f\left(s_j^B\right)\right) \\
&= k_B \sum_{i,j=0}^{M,N} p_i^A p_j^B \varphi\left(s_i^A, s_j^B\right) \\
&= k_B \sum_{i,j=0}^{M,N} p_i^A p_j^B \left(s_i^A + s_j^B + \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}\left(s_i^A\right)^m\left(s_j^B\right)^n\right) \\
&= k_B \sum_{i,j=0}^{M,N} p_i^A p_j^B \left(g\left(\ln\frac{1}{p_i^A}\right) + g\left(\ln\frac{1}{p_i^B}\right) + \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}\left(s_i^A\right)^m\left(s_j^B\right)^n\right) \\
&= S_U^A + S_U^B + c_{11} S_U^A S_U^B + k_B \sum_{i,j=0}^{M,N} \sum_{m,n}^{\infty} p_i^A p_j^B c_{mn}\left(s_i^A\right)^m\left(s_j^B\right)^n
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır. Bu sonuç, $\forall c_{mn} = 0$ olduğunda SK4 aksiyomuna, $c_{11} = 1 - q$ ve diğer kalan c_{mn} katsayıları da sıfır olduğunda Tsallis entropisi için sanki-toplanırlık özelliğine indirgenmiş olur. Bileşik sistem dengede değilken yukarıdaki eşitlikte son satırın en sağındaki terim alt sistemlerin bir fonksiyonu olarak yazılamayabilir. Yani, $S(A\cup B) = \varphi(S(A), S(B))$ olacak şekilde bir φ-işlemi sadece $(S(A), S(B))$

değişkenlerinin fonksiyonları olmayabilir. Ancak alt sistemlerin olasılık dağılımları eş-olasılıklı bir dağılım olduğunda,

$$S(A \cup B) = S_U^A + S_U^B + c_{11} S_U^A S_U^B + \sum_{m,n}^{\infty} c_{mn} \left(S_U^A\right)^m \left(S_U^B\right)^n$$

yazılabilir. Böylece sistem dengede olduğunda genelleştirilmiş SK-4 aksiyomu sağlanmaktadır.

Evrensel entropi, $S_U[p]$, reel ve analitik bir fonksiyonun fonksiyoneli olduğundan değişkenlerinin, yani $\{p_i, i = 0,1,2, \dots W\}$ olasılıklarının tanım aralığında sürekli bir fonksiyondur; böylece SK1-aksiyomunu da sağlar. $S_U[p]$'nin, SK(2,3) aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığı, konunun akışı içinde, termodinamiğin üçüncü yasası ile bağlantılarından dolayı bu bölümün sonuna bırakılmıştır.

Ref. [46]'de istatistiksel olarak birbirinden bağımsız iki alt sistemin bileşiminin entropisinin kapalı formu en genel haliyle

$$S(AUB) = \frac{S(A) + S(B) + aS(A)S(B)}{1 + bS(A)S(B)} \tag{2.37}$$

şeklinde önerilmiştir. Doğal olarak buna karşılık gelecek formel grup işleminin kapalı formu,

$$\varphi(x, y) = \frac{x + y + axy}{1 + bxy} \tag{2.38}$$

şeklinde olacaktır. Burada "a" ve "b" katsayıları sıfır alınırsa standart SK-4 aksiyomu, $b = 0$ ve $a = 1 - q$ alınırsa Tsallis entropisi için sanki-toplanırlık özelliği elde edilir. Denklem (2.38)'deki formel grup işleminin, seri açılımı göz önününe alındığında elde edilecek polinomun katsayılarının (a,b) ikilisine bağlı bir fonksiyon olacağı aşikardır. İki değişkenli bir f(x,y) fonksiyonun (0,0) noktası civarında taylor serisi açılımının formel biçimi,

$$f(x, y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + f_{xy}(0,0)xy + \cdots \tag{2.39}$$

göz önüne alındğında ve $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ şartı da uygulandığında

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= x + y + axy - b(xy^2 + yx^2) - abx^2y^2 \\ &\quad + b^2(x^2y^3 + x^3y^2) + ab^2x^3y^3 + \text{yüksek terimler}\end{aligned} \tag{2.40}$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan $\varphi(x,y) \coloneqq g(f(x) + f(y))$ tanımından seri açılım yapıldığında,

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) &= a_0\big(f(x) + f(y)\big) + \frac{a_1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)^2 \\ &\quad + \frac{a_2}{3}\big(f(x) + f(y)\big)^3 + \text{yüksek terimler}\end{aligned} \tag{2.41}$$

yazılabilir. Lagrange yöntemi (*Lagrange inversion theorem*) ile birbirinin tersi olan $f(x), g(x) \in \mathbb{C}\big((x)\big), f \circ g = I$ şeklindeki iki polinom serisinden birisi verilmiş olduğu takdirde diğerinin katsayıları belirlenebilir.

Burada $\mathbb{C}\big((x)\big)$, $\mathbb{C}\big((x)\big) = \{\sum_{k\geq -N} a_k x^k \mid N \in \mathbb{Z},\ a_k \in \mathbb{C}\}$ şeklinde tanımlı polinomlar kümesidir. Önce, $h(x) \in \mathbb{C}\big((x)\big)$, n.ci terimin katsayısı b_n olan bir polinom olduğunda[9], $[x^n]\big(h(x)\big) = b_n$ şeklinde işlem yapan bir $[x^n]$ operatörü tanımlansın. Bu taktirde, f(x) polinomunun katsayıları tersi olduğu $g(x)$ polinomu cinsinden,

$$b_{n-1} = \frac{1}{n}[x^{-1}]\left(\frac{1}{g(x)^n}\right), n = 1,2, \ldots. \tag{2.42}$$

şeklinde tayin edilir. Bu yöntemle, f(x)'in ilk katsayısı,

$$b_0 = [x^{-1}]\left(\frac{1}{g(x)}\right)$$

ın nasıl bulunacağı aşağıda gösterildikten sonra, işlem yoğunluğundan dolayı, diğer ikisi doğrudan verilecektir. Burada bahse konu olan $g(x)$ ve f(x), sırasıyla, $g(x) = \sum_{j=0} a_j \frac{x^{j+1}}{j+1}$ ve $f(x) = \sum_{j=0} b_j \frac{x^{j+1}}{j+1}$ şeklinde iki polinomdur. Bu iki polinom dikkate alındığında, $b_{n-1} \to \frac{b_{n-1}}{n}$ dönüşümünün yapılması gerekir. Bu dönüşüm yapıldığında,

[9] $h(x) \in \mathbb{C}\big((x)\big)$ iken $h(x) = b_{-N}x^{-N} + b_{-N+1}x^{-N+1} + \cdots + b_{-1}x^{-1} + b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \cdots$ şeklinde yazılabilir. Yukarıda adı geçen katsayı, burada görüldüğü üzere x^n teriminin katsayısı olan b_n'dir.

denklem (2.42), $b_{n-1} = [x^{-1}]\left(\frac{1}{g(x)^n}\right)$, $n = 1,2, \ldots$ şekline girer. Eğer $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$ açılımı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots} \\
&= \frac{1}{a_0 x\left(1 + \frac{a_1}{2a_0}x + \frac{a_2}{3a_0}x^2 + O(3)\right)} \\
&= \frac{1}{a_0 x}\left(1 - \frac{a_1}{2a_0}x - \frac{a_2}{3a_0}x^2 + \left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 x^2 + O(3)\right) \\
&= \frac{1}{a_0}x^{-1} - \frac{a_1}{2a_0^2} + \left(\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 - \frac{a_2}{3a_0}\right)x + O(2)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

biçiminde yazılabilir. Bunu dikkate alarak, $b_0 = [x^{-1}]\left(\frac{1}{g(x)}\right) = \frac{1}{a_0}$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Benzer işlemlerle, $b_1 = -\frac{a_1}{a_0^3}$ ve $b_2 = \frac{3a_1^2 - 2a_0a_2}{2a_0^5}$ bulunur. Buna göre

$$f(x) = \frac{1}{a_0}x - \frac{a_1}{2a_0^3}x^2 + \frac{3a_1^2 - 2a_0a_2}{6a_0^5}x^3 + O(4) \tag{2.44}$$

biçiminde açılabilir. Bu ifade, denklem (2.41)'ta yerine yazılıp terimler düzenlenirse $\varphi(x,y)$ için,

$$\varphi(x,y) = x + y + \frac{a_1}{a_0^2}xy + \left(\frac{a_2}{a_0^3} - \frac{a_1^2}{2a_0^4}\right)(xy^2 + yx^2) + \cdots \tag{2.45}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu ifade, denklem (2.40)'daki ifadeye eşitlenirse, $a_0 \in \mathbb{R}$ olmak üzere ilk iki katsayı

$$a_1 = aa_0^2 \quad \text{ve} \quad a_2 = \frac{1}{2}(a^2 - 2b)a_0^3. \tag{2.46}$$

biçiminde bulunur. Serinin diğer terimleri de benzer bir şekilde açılırsa kalan katsayılar,

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \frac{1}{3!}(a^3 - 8ab)a_0^4 \\
a_4 &= \frac{1}{4!}(a^4 - 22a^2b + 16b^2)a_0^5 \\
a_5 &= \frac{1}{5!}(a^5 - 52a^3b + 136ab^2)a_0^6 \\
a_6 &= \frac{1}{6!}(a^6 - 114a^4b + 720a^2b^2 - 272b^3)a_0^7 \\
&\quad \ldots
\end{aligned} \tag{2.47}
$$

şeklinde bulunur [46]. Bütün katsayıların (a,b) ikilisi cinsinden belirlenmiş olduğu açıkça görülmektedir. Ancak a_0-katsayısı belirlenemediği için entropinin kapalı formu (a, b, a_0) -parametrelerinin bir fonksiyonu olarak verilecektir.

Bu safhada, denklem (2.36)'da verilmiş olan entropinin sonlu bir değere sahip olup olmadığı soruşturulmalıdır. Yani hangi şart altında $g(\ln(1/x))$ serisinin sonlu bir değere yakınsayacağı tespit edilmelidir. Aksi takdirde söz konusu entropinin fiziksel geçerliliğinden bahsedilemez. Evrensel entropi,

$$
S_U[p] = \sum_{i=0}^{W}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}p_i(\ln(1/p_i))^{k+1}\right)
$$

şeklinde düzenlenirse; büyük parantez içindeki ifadenin yakınsak olması gerekir. Entropinin içbükeyliğinden yola çıkarak, bu yakınsaklığın, dolaysıyla da katsayıların, sağlaması gereken bir ilişki bulunabilir. Bunun için $p_i \rightarrow x$ değişimi yapılıp büyük parantez içindeki ifadenin ikinci dereceden türevine bakılırsa

$$
\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k+1}x\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{k+1}\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left\{a_0 x\ln\frac{1}{x} + \frac{a_1}{2}x\left(\ln\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots\right\}
$$

$$
= -\frac{1}{x}\left\{a_0 - a_1 + (a_1 - 2a_2)\ln\frac{1}{x} + (a_2 - 3a_3)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^2 + (a_3 - 4a_4)\left(\ln\frac{1}{x}\right)^3 + ..\right\}
$$

bulunur. Bu ifadede görüldüğü gibi $a_k > (k+1)a_{k+1}$ olduğu zaman serinin ikinci dereceden türevi negatif olmaktadır. Bu da serinin yakınsaklığını, dolaysıyla da entropinin içbükeyliğini temin eder.

Eğer b=0 ve $a_0 = 1$ alınırsa denklem (2.47)'deki katsayılar için, $a_k = \frac{1}{k!}a^k, k = 0,1,2, \ldots$ şeklinde bir ifade bulunur. Bu ifade yerine yazılırsa,

$$g(x) = \sum_{k=0} \frac{1}{k!\,(k+1)} a^k x^{k+1} = \frac{1}{a} \sum_{k=0} \frac{(ax)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{ax} - 1}{a}$$

olur. Denklem (2.38)'de, b=0 ve $a = 1 - q$ alındığında, Tsallis entropisinin uyduğu sanki-toplanırlık özelliği elde edilir. Buna göre, $g(x)$ için bulunan bu son ifadede $a = 1 - q$ alınıp denklem (2.36)'teki evrensel entropi ifadesinde yerine yazılırsa, sonucun Tsallis entropisine indirgenmesi gerekir:

$$S_U[p] = k_B \sum_{i=0} p_i g\left(\ln\left(\frac{1}{p_i}\right)\right) \;;\, x = \ln\left(\frac{1}{p_i}\right)$$

$$= k_B \frac{\sum_{i=0} p_i \left(e^{a\ln\left(\frac{1}{p_i}\right)} - 1\right)}{a} = k_B \frac{\sum_{i=0} p_i (p_i^{-a} - 1)}{a} \quad ;a = 1 - q$$

$$= k_B \frac{\sum_{i=0} p_i^q - 1}{1 - q} = S_q[p].$$

Yukarıda seri açılımının katsayıları verilmiş olan $g(x)$ fonksiyonunun kapalı formu, $a_0 = \pm \frac{r}{\sqrt{a^2+4b}}$ eşitiği göz önüne alındığında,

$$g(x) = \frac{2(e^{rt} - 1)}{-a(e^{rt} - 1) \pm \sqrt{a^2 + 4b}(e^{rt} + 1)} \qquad (2.48)$$

şeklini alır [46]. $g(x)$ fonksiyonu için, iki çözümüne bağlı olarak, iki tane evrensel entropi tanımı verilebilir.

Tanım 6: *Keyfi bir fiziksel A-sistemi,* $\mathcal{P}^{W+1}$*-olasılık uzayında,* $p = \{p_i, i = 0,1,\dots,W \mid \forall p_i \in [0,1]\}$ *olasılık dağılımına sahip olsun.*

i. $r > 0$ *olduğunda A- sistemi için en genel haliyle entropi fonksiyonu,*

$$\mathrm{Log}_{a,b,r}^{(+)}(x) := \frac{2(x^r - 1)}{-a(x^r - 1) + \sqrt{a^2 + 4b}(x^r + 1)}, x > 0$$

olmak üzere

$$S_U[p] = S_{a,b,r}^{(+)}[p] \coloneqq k_B \sum_{i=0}^{W} p_i L_{a,b,r}^{(+)}(1/p_i)$$

biçiminde tanımlanır.

ii. $\mathrm{r} < 0$ *olduğunda A-sistemi için en genel haliyle entropi fonksiyonu,*

$$\mathrm{Log}_{a,b,r}^{(-)}(x) := \frac{2(x^r - 1)}{-a(x^r - 1) - \sqrt{a^2 + 4b}(x^r + 1)}, x > 0$$

olmak üzere

$$S_U[p] = S_{a,b,r}^{(-)}[p] \coloneqq k_B \sum_{i=0}^{W} p_i L_{a,b,r}^{(-)}(1/p_i)$$

biçiminde tanımlanır.

Bu entropi ifadeleri, $\sigma \coloneqq \sqrt{a^2 + 4b}$ >0 kısaltması yapılıp açık olarak yazılırsa,

$$S_{a,b,r}^{(\pm)}[p] = k_B \sum_{i=0}^{W} p_i \frac{2(p_i^{-r} - 1)}{-a(p_i^{-r} - 1) \pm \sigma(p_i^{-r} + 1)}, r \in (-\infty, \infty)\backslash 0 \qquad (2.49)$$

şeklinde ifade edilebilir. Evrensel entropinin genelleştirilmiş SK-4 ve SK-1 aksiyomunu sağladığı daha önce belirtilmişti. Üçüncü aksiyomu sağlayıp sağlamadığını görmek üzere entropinin tanım ifadesi ele alınıp $\lim_{x \to 0} x(\ln \frac{1}{x})^k = 0$ eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} S_U[p,0] &= k_B \sum_{i=0}^{W} p_i g\left(\ln\left(\frac{1}{p_i}\right)\right) + k_B \lim_{s \to 0} s g\left(\ln\left(\frac{1}{s}\right)\right) \\ &= k_B \sum_{i=0}^{W} p_i g\left(\ln\left(\frac{1}{p_i}\right)\right) + k_B \lim_{s \to 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} s \left(\ln\left(\frac{1}{s}\right)\right)^{k+1} \\ &= k_B \sum_{i=0}^{W} p_i g\left(\ln\left(\frac{1}{p_i}\right)\right) = S_U[p] \end{aligned}$$

SK-3 aksiyomunun sağlandığı görülür. Son olarak, SK-2 içbükeylik aksiyomunun sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilmesi gerekir. Bunun için, entropinin bir ekstremum noktasına sahip olması ve bu noktada da maksimum olması beklenir. Bunun için, daima $\sum_{i=0}^{W} p_i = 1$ şartı göz önüne alınıp entropinin birinci türevi sıfıra eşitlenerek, eşitliği sağlayan olasılık değeri için ikinci türevin daima sıfırdan küçük olması gerektiği gerçeğinden yararlanılır. Buna göre,

$$\frac{\partial S_{a,b,r}^{(+)}}{\partial p_n}=\frac{2[-(\sigma+a)p_n^{2r}-2(\sigma r-a)p_n^{r}+(\sigma-a)]}{[(\sigma-a)+(\sigma+a)p_n^{r}]^2}-\frac{2[-(\sigma+a)p_0^{2r}-2(\sigma r-a)p_0^{r}+(\sigma-a)]}{[(\sigma-a)+(\sigma+a)p_0^{r}]^2}=0 \tag{2.50}$$

olduğu bulunur. Bu eşitliğin sağlanabilmesi için ise $p_n=p_0=\frac{1}{W+1}, n=1,2,\dots,W$ olması gerekir. Ikinci türev de,

$$\frac{\partial^2 S_{a,b,r}^{(+)}}{\partial p_n^2}=\frac{4r\sigma[(r-1)(\sigma+a)p_n^{2r-1}-(r+1)(\sigma-a)p_n^{r-1}]}{[(\sigma-a)+(\sigma+a)p_n^{r}]^3}+\frac{4r\sigma[(r-1)(\sigma+a)p_0^{2r-1}-(r+1)(\sigma-a)p_0^{r-1}]}{[(\sigma-a)+(\sigma+a)p_0^{r}]^3} \tag{2.51}$$

biçiminde bulunur. Birinci türevden bulunan $p_n=p_0=\frac{1}{W+1}$ değerleri yerlerine konulur ve eşitlik düzenlenirse,

$$\frac{\partial^2 S_{a,b,r}^{(+)}}{\partial p_n^2}=\frac{-8r\sigma(1-r)(1+W)^{1-r}\left((\sigma+a)(1+W)^{-r}+\frac{1+r}{1-r}(\sigma-a)\right)}{\left((\sigma-a)+(\sigma+a)(1+W)^{-r}\right)^3}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sıfırdan küçük olması için sağlanması gereken şartların, $\sigma=\sqrt{a^2+4b}>0$ olduğu da dikkate alınarak varsayımsal bir yolla incelenmesi gerekir. İlk önce $0<r\le 1$ varsayılıp ve $a>0$ kabul edildiğinde $b>\frac{-a^2}{4}$ olması gerektiği kolaylıkla görülür. İkinci olarak yine $0<r\le 1$ tanım aralığında $a\le 0$ kabul edildiğinde, b-parametresinin sıfırdan büyük olması yeterli olur. Bu ifadeler düzenlenirse,

i. $$0<r\le 1\rightarrow\begin{cases} a<0 \text{ ve } b>\frac{-a^2}{4} \\ a\le 0 \text{ ve } b>0\end{cases} \tag{2.52}$$

yazılabilir. Şimdi de $r>1$ varsayılıp $a\le 0$ kabul edildiğinde, $b>\frac{-a^2}{4}$ olması yeterli olur. Yine $r>1$ varsayılıp $a>0$ kabul edildiğinde b'nin hangi şartı sağlaması gerektiği açık değildir. Bahse konu eşitliğin sağ tarafındaki ifadede, paydadaki terim sıfırdan küçük, paydaki büyük parantezin içindeki terim de sıfırdan büyük seçilirse, yani

$$(\sigma - \mathrm{a}) + (\sigma + \mathrm{a})(1 + \mathrm{W})^{-\mathrm{r}} < 0 \ \text{ ve } \ (\sigma + \mathrm{a})(1 + \mathrm{W})^{-\mathrm{r}} + \frac{1 + \mathrm{r}}{1 - \mathrm{r}}(\sigma - \mathrm{a}) > 0$$

alınırsa, $\mathrm{b} < \frac{-\mathrm{a}^2}{4}$ bulunur. Bu ise σ'nın tanım aralığı ile çelişir. Ancak,

$$(\sigma - \mathrm{a}) + (\sigma + \mathrm{a})(1 + \mathrm{W})^{-\mathrm{r}} > 0 \ \text{ ve } \ (\sigma + \mathrm{a})(1 + \mathrm{W})^{-\mathrm{r}} + \frac{1 + \mathrm{r}}{1 - \mathrm{r}}(\sigma - \mathrm{a}) < 0$$

alınırsa, bu eşitlizliklerden b-parametresi için, $\mathrm{b} > \frac{\mathrm{a}^2(1+\mathrm{W})^{\mathrm{r}}(\mathrm{r}^2-1)}{\left((1+\mathrm{w})^{\mathrm{r}}(\mathrm{r}+1)-(\mathrm{r}-1)\right)^2}$ eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitlizliğin sağ tarafı W-parametresinin azalan bir fonksiyonudur. Dolaysıyla $\mathrm{W} = 0$ için b'nin sağlayacağı eşitsizlik, yani ∀W için $\mathrm{b} > \frac{\mathrm{a}^2(\mathrm{r}^2-1)}{4}$ olması, bütün W-değerleri için doğru olacaktır. Bu son bulgular ışığında

$$\text{ii.} \quad \mathrm{r} > 1 \ \rightarrow \begin{cases} \mathrm{a} \leq 0 \ \text{ ve } \mathrm{b} > \frac{-\mathrm{a}^2}{4} \\ \mathrm{a} > 0 \text{ ve } \mathrm{b} > \frac{\mathrm{a}^2(\mathrm{r}^2-1)}{4} \end{cases} \tag{2.53}$$

yazılabilir. İfadelerin simetrikliğinden dolayı, $\mathrm{S}_{\mathrm{a,b,r}}^{(-)}$ entropisi için benzer bir yol takip edildiğinde içbükeylik için sağlanması gereken şartlar,

$$\text{i.} \quad -1 < \mathrm{r} \leq 0 \rightarrow \begin{cases} \mathrm{a} < 0 \ \text{ ve } \mathrm{b} > \frac{-\mathrm{a}^2}{4} \\ \mathrm{a} \leq 0 \text{ ve } \mathrm{b} > 0 \end{cases} \tag{2.54}$$

$$\text{ii.} \quad \mathrm{r} < -1 \quad \rightarrow \begin{cases} \mathrm{a} \leq 0 \ \text{ ve } \mathrm{b} > \frac{-\mathrm{a}^2}{4} \\ \mathrm{a} > 0 \text{ ve } \mathrm{b} > \frac{\mathrm{a}^2(\mathrm{r}^2-1)}{4} \end{cases} \tag{2.55}$$

biçiminde bulunur. Böylece SK(1-4) aksiyomlarının sağlaması gereken koşullar bulunmuş olmaktadır. Burada, içeriğinin fizik çerçevesindeki öneminden dolayı bir entropinin dışsallığının geniş bir kapsamda tekrar ele alınmasında yarar vardır. S_{BG} entropisi, mikrokanonik bir sistem için ele alındığında denklem (1.11)'deki gibi $\mathrm{S}_{\mathrm{BG}}(\mathrm{W}) = \mathrm{k}_{\mathrm{B}}\ln(\mathrm{W})$ yazılabilir. Bu denklemden Boltzmann-Gibbs entropisinin kompleksiyon sayısı W=W(N)'nın bir fonksiyonu olduğu anlaşılmaktadır. Kompleksiyon sayısı da büyük değerleri için asimptotik olarak, yani $\mathrm{k} \in \mathbb{R}^+$ve N de sistemin parçacık sayısı olmak üzere N >> 1 olduğunda, $W(N) \approx k^N$ gibi bir değere yaklaşır. Bu hem termodinamikte hem de standart (ekstensif)[10] istatistiksel mekanik kapsamında ele alınan bütün sistemlerde böyledir. Örneğin, ayırt edilebilir ve titreşim frekansları ω-olan N-tane harmonic salınıcıdan oluşan bir mikrokanonik sistemin entropisi,

$$S_{BG}(W) = S_{BG}(E, V, N) = k_B N \left(1 + \ln \frac{E}{N\hbar\omega}\right) = k_B \ln(W) \qquad (2.56)$$

olmaktadır [2, sf. 157-158]. Buradan, asimptotik olarak, yani $N >> 1$ için, $W(N) \approx (e)^N$ yazılabileceği görülmektedir. *Tanım olarak, bir entropinin enktensif (dışsal) olması, bir sistemin kompleksiyon sayısının* $(W = W(N))$ *büyük değerleri için, entropinin asimptotik olarak sistemin parçacık sayısı ile orantılı bir davranış göstermesi, sistem ekstensif bir sistem ise doğru orantılı bir davranış göstermesi, demektir*. Bu tanımın bir gereği olarak $\lim_{N\to\infty} W(N) \to \infty$ ıraksamanın sağlanması gerekir. İstatistiksel mekaniğin temel taşlarından biri olan kompleksiyon sayısının parçacık sayısına bağlılığının artışlı bir fonksiyon olmasından dolayı $\lim_{N\to\infty} W(N) \to \infty$ ıraksamasının, sistem ister kompleks (nonextensive) olsun ister olmasın, daima sağlanması gerekir. İstatistiksel mekaniğin temelleri itibariyle bu sonuç analitiktir. Bundan dolayı her zaman $\lim_{W\to\infty} S_G(W) \equiv \lim_{N\to\infty} k_B \ln_G(W(N)) \to \infty$ geçerlidir[11]. Bu ıraksamanın yine sağlanması durumunda ekstensif-olmayan sistemler için kompleksiyon sayısının asimptotik davranışı, ekstensif sistemlerdeki gibi $W(N) \approx (k)^N$ olmasını gerektiriyor mu? Bu soruya cevap vermeden önce, bilinenlerin göz önünde bulundurulması gerekir:

i. Sistem ekstensif olsun ya da olmasın, $\lim_{N\to\infty} W(N) \to \infty$ $[\equiv (P \vee \neg P) \Leftrightarrow Q]$.
ii. Sistem ekstensif ise $W(N) \approx (k)^N$ $[\equiv P \implies R]$.
iii. $W(N) \approx (k)^N$ olsun ya da olmasın $\lim_{N\to\infty} W(N) \to \infty$ $[\equiv (\neg R \vee R) \Leftrightarrow Q]$.

---

[10] Tez boyunca "ekstensif" kavramı Boltzmann-Gibbs istatistiği çerçevesinde ele alınan sistemler için kullanılmaktadır.
[11] $S_G(.)$ genelleştirilmiş entropiyi, $\ln_G(.)$ de genelleştrilmiş logaritma fonksiyonunu göstermektedir.

Bu $\{(P \vee \neg P) \Leftrightarrow Q, P \Rightarrow R, (\neg R \vee R) \Leftrightarrow Q\} \equiv \{Q, P \Rightarrow R\}$[12] önermeler grubu tutarlıdır[13]. Bu önermeler grubundan $\neg P \Rightarrow R$, yani "sistem ekstensif değilse $W(N) \approx (k)^N$ dir" önermesi ya da $\neg P \Rightarrow \neg R$, yani "sistem ekstensif değilse $W(N) \approx (k)^N$ değildir" önermesinin çıkarılıp çıkarılamayacağına bakılması gerekir. İlk çıkarım, $\{Q, P \Rightarrow R \therefore \neg P \Rightarrow \neg R\}$, ikinci çıkarım da $\{Q, P \Rightarrow R \therefore \neg P \Rightarrow R\}$ olacaktır. Bu önermelerin geçerliliği doğruluk tablosundan yararlanılarak belirlenebilir. Bunun için matematiksel mantığa başvurulur. Böyle bir analizin yapılması, ekstensif olmayan sistemlerin kompleksiyon sayısının asimptotik davranışının, parçacık sayısı ile nasıl bir ilişki göstereceğinin anlaşılması bakımından önem arz etmektedir. Literatürde sistem ekstensif olsun ya da olmasın, $\lim_{W \to \gg 1} S_G(W) \approx N$ yaklaşımın yapılması hâlâ yaygındır [45, 46, 48, 49]. Dolayısıyla bu analizin yapılması ile bu yaklaşımın zorunlu olup olmadığı gösterilecektir. Her iki çıkarım için doğruluk çizelgesi, Çizelge 2.1'de verilmiştir.

Çizelge 2.1 Birinci (K) ve ikinci (L) çıkarımların geçerliliğini gösteren tablo.

P	R	Q	**¬P ⇒ R** =L	**¬P ⇒ ¬R** =K	**(P ⇒ R)** =Z	**(Q ∧ Z)** = **T**	**T ⇒ L**	**T ⇒ K**
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0	1	1

Tablodan görüldüğü üzere her iki çıkarım da geçerli değildir. Buna göre her ne kadar ekstensif sistemler için $W(N) \approx (k)^N$ ve daima $\lim_{N \to \infty} W(N) \to \infty$ geçerli olsa da ekstensif olmayan sistemlerin kompleksiyon sayısının asimptotik davranışı $W(N) \approx (k)^N$ biçiminde olmak zorunda değildir.

---

[12] Buradaki Q-önermesi, $\lim_{N \to \infty} W(N) \to \infty$ değerine karşılık gelmektedir.

[13] Bu önermelerin biçimselleştirilmiş halleri (parantez içindeki mantıksal önermeler) kullanılarak çözümleyici çizelge yardımı ile tutarlı bir önermeler kümesi teşkil ettikleri gösterilebilir.

Şimdi de $\lim_{W \to \gg 1} S_G(W) \approx N$ yaklaşımının geçerli olup olmadığına bakılabilir:

i. Her halükârda $\lim_{N \to \infty} W(N) \to \infty$ ($\equiv$ Q),

ii. $\lim_{N \to \infty} W(N) \to \infty$ olduğunda $\lim_{W \to \infty} S_G(W) \equiv \lim_{N \to \infty} k_B \ln_G(W(N)) \to \infty$ ve $\lim_{W \to \infty} S_G(W) \to \infty$ olduğunda $\lim_{N \to \infty} W(N) \to \infty$ dur. ($\equiv Q \Leftrightarrow R$),

iii. Sistem ekstensif olduğunda, $\lim_{W \to \infty} S_G(W) \to \infty$ ve $\lim_{W \to \gg 1} S_G(W) \approx N$ dir. ($\equiv$ $P \Longrightarrow (R \wedge D)$)

oldukları bilinmektedir. Burada D-simgesi, "$\lim_{W \to \gg 1} S_G(W) \approx N$" önermesini simgelemektedir. Bulunmak istenen, sistem ekstensif olmadığında hâlâ bu üçünün bir çıkarımı olarak $\lim_{W \to \gg 1} S_G(W) \approx N$, yani $\neg P \Longrightarrow D$ şeklinde bir sonucun geçerli olup olmayacağıdır. Bu çıkarımın denetlenmesi yine doğruluk çizelgesi yardımı ile yukarıdakine benzer bir analiz ile yapılacaktır.

Çizelge 2.2. Önerme, $\neg P \Longrightarrow D$'nin geçerliliğini denetleyen çizelge: bu çizelgedeki kullanılan kısaltmalar için, $Z1 = Q \Leftrightarrow R$; $Z2 = R \wedge D$; $PZ2 = P \Longrightarrow (R \wedge D)$; $Z3 = Q \wedge (Q \Leftrightarrow R) \wedge (P \Longrightarrow (R \wedge D))$; $PD = \neg P \Longrightarrow D$ ve son olarak, $Z3 \Longrightarrow PD = [Q \wedge (Q \Leftrightarrow R) \wedge (P \Longrightarrow (R \wedge D))] \Longrightarrow (\neg P \Longrightarrow D)$ mantıksal işlemlerine denk gelmektedir.

Q	P	R	D	Z1	Z2	PZ2	Z3	PD	**Z3 ⟹ PD**
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1

Çizelge 2.2'de görüldüğü gibi bir tane yanlış durum vardır. Bu da ekstensif olmayan sistemler için $\lim_{W\to\gg 1} S_G(W) \approx N$ yaklaşımının zorunlu olmadığı anlamına gelir[14]. Varılan bu son iki sonuca göre, kompleksiyon sayısının asimptotik davranışı (standard) istatistiksel mekaniğin mevcut yapısıyla çelişmeyecek şekilde $(k)^N$'den farklı olabileceği gibi, $\lim_{W\to\gg 1} S_G(W)$ limiti de N-parçacık sayısı ile doğrusal bir ilişki göstermeyebilir.

Bu sonuçlardan sonra $\lim_{W\to\gg 1} S_G(W)$ davranışının nasıl olacağı, N-parçacık sayısının artan bir fonksiyonu olmak kaydı ile, keyfi kalmaktadır. Yine de ekstensif olmayan sistemler için $\lim_{W\to\gg 1} S_G(W) \approx N$ varsayıldığında kompleksiyon sayısının parçacık sayısı ile nasıl bir ilişki içinde olacağına bakmak yerinde olur.

Eş olasılıklı bir sistem göz önüne alındığında evrensel entropi $S_U(W) = k_B g(\ln(W))$ olur. Boltzmann katsayısı, genelliği bozmadan, bir alınırsa $\lim_{W\to\gg 1} S_U(W) = \lim_{W\to\gg 1} g(\ln(W)) \approx N \;\Rightarrow W(N) \approx \exp(f(N))$ olur. Bu ifadenin Maclaurin seri açılımının ilk iki terimi alınıp daha önce yazılan f(x) fonksiyonun seri açılımı da yazılırsa,

$$W(N) = 1 + f(N) \approx 1 + \frac{1}{a_0}N - \frac{a_1}{2a_0^3}N^2 + \frac{3a_1^2 - 2a_0a_2}{6a_0^5}N^3 + O(4) \quad (2.57)$$

yaklaşımında bulunabilir. Bununla birlikte entropinin sağlaması gereken asgari şart da, yani $\lim_{W\to\infty} S_U(W) \to \infty$ koşulu da değerlendirilirse, ifade daha da basitleştirilebilir. Burada $S_U(W)$ entropisi, $S_{a,b,r}^{(\pm)}(W)$ entropisi ile özdeştir. $S_{a,b,r}^{(+)}(W)$ entropisinin limitine bakıldığında bulunacak sonucun $S_{a,b,r}^{(-)}(W)$ entropisi için de geçerli olduğu görülecektir. Mikrokanonik bir sistem için, mikrodurumlar eş olasılıklı olacaklarına göre, $p_i = \frac{1}{W+1}$ yazılabilir. Buna göre,

---

[14] Bu sonuç, enkstensif olmayan sistemler için bu limitin olamayacağı anlamına gelmez, sadece zorunlu olarak böyle olmayacağını söyler; limit böyle alınırsa herhangi bir çelişkiye düşülmez, yine de öncüllerle tutarlı kalınacaktır.

$$
\begin{aligned}
S_{a,b,r}^{(+)}(W) &= k_B \frac{2((1+W)^r - 1)}{-a((1+W)^r - 1) + \sigma((1+W)^r + 1)} \\
&= k_B \frac{2(1+W)^r[1 - 1/(1+W)^r]}{(1+W)^r[(\sigma - a) + (\sigma + a)/(1+W)^r]} \\
&= k_B \frac{2[1 - 1/(1+W)^r]}{[(\sigma - a) + (\sigma + a)/(1+W)^r]}
\end{aligned} \tag{2.58}
$$

bulunur. $\lim_{W\to\infty} S_{a,b,r}^{(+)}(W) = k_B \frac{2}{\sigma - a} = k_B \frac{2}{\sqrt{a^2+4b}-a}$ olduğu görülmektedir. Bu ifadenin sonsuza yaklaşıyor olabilmesi için b-parametresinin sıfır olması gerekir. Eğer mikrokanonik bir sistem için denklem (2.49)'deki $S_{a,b,r}^{(-)}(W)$ entropisi kullanılırsa, entropinin değeri,

$$
S_{a,b,r}^{(-)}[W] = k_B \frac{2((1/W+1)^{-r} - 1)}{-a((1/W+1)^{-r} - 1) - \sigma((1/W+1)^{-r} + 1)} \tag{2.59}
$$

olur. Bu entropi için de $\lim_{W\to\infty} S_{a,b,r}^{(-)}(W) = k_B \frac{2}{\sigma - a} = k_B \frac{2}{\sqrt{a^2+4b}-a}$ değerine yaklaşır ve bu limitin sonsuza gitmesi için b-parametresinin sıfır olması gerekir. Daha önce de belirtildiği gibi bu limit durumu hem ekstensif hem de ekstensif olmayan sistemler için sağlanmak zorundadır. Bu limitin beraberinde getirdiği b-parametresinin sıfır olma koşulu, daha sonra görüleceği gibi söz konusu entropilerin termodinamiğin üçüncü yasasına uymaları için de gereken bir şart olacaktır. Eğer b=0 alınırsa, denklem (2.47)'daki katsayılar $a_k = \frac{a^k a_0^{k+1}}{(k+1)!}$ şeklinde bir ifadeye indirgenir. Bu genel katsayı terimi, ilgili $g(x)$ serisinde yerine konulur ve b=0 iken $r = a_0 a$ eşitliği kullanılırsa,

$$
g(x) = \sum_{k=0} \frac{1}{k!\,(k+1)} a^k (a_0 x)^{k+1} = \frac{1}{a} \sum_{k=0} \frac{(a a_0 x)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^{rx} - 1}{a} \tag{2.60}
$$

olur. $g(x)$ fonksiyonun tersi olan f(x) de,

$$
f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{r}
$$

şeklinde olur. Eğer bu ifade yerine konulursa,

$$
\begin{aligned}
W(N) \approx \exp\big(f(N)\big) &= \exp\left(\frac{\ln(1 + aN)}{r}\right) \\
&= (1 + aN)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

bulunur. Bulunan bu ifade, daha önce ekstensif olmayan sistemler için ulaşılan, kompleksiyon sayısının asimptotik davranışının k^N biçiminde olmak zorunda olmadığı sonucuyla uyuşmaktadır. Eğer $a = r$ ve $r \to 0$ limiti alınırsa, $W(N) \approx e^N$ limitine yaklaşır, bu da ekstensif sistemler için limit durumudur.

Bu (r,a)-parametreleri fiziksel olarak nasıl yorumlanabilir? Şayet bileşke sistemi oluşturan iki (A,B) alt sistemleri birbirinden farklı ise parametrelerden birinin A-alt sistemini, diğerinin de B-alt sistemini karakterize ettiği yorumunda bulunabilir. Eğer söz konusu iki alt sistem özdeş iseler o zaman a = r demektir. Bu da Tsallis entropisine denk gelir. Bu ise Tsallis entropisinin özdeş iki alt sistemin bileşkesini karakterize etmesi demektir. Söz konusu bu parametreler, ele alınan sistemlerin içsel yapısı ile alakalıdır; yani sistemin yapısal elementleri, eğer ekstensif sistemlerdeki gibi etkileşimsiz değil de birbirleriyle bir fiziksel potansiyelle etkileşiyorlarsa, parametreler, bu etkileşimin dağılıma bir yansımasıdır. Burada, söz konusu etkileşim, sistemin hamiltonyeni yazılırken hesaba katılarak, böylece bu yeni entropilere duyulan gereksinimin ortadan kaldırılabilir olduğu şeklinde bir itirazda bulunulabilir. Bu yaklaşım yapılırken, hâlâ standart Boltzmann-Gibbs dağılımı kullanılırsa, büyük bir hata yapılmış olur; çünkü sistemdeki parçacıkların hareketi Boltzamnn'ın bir varsayım olarak ileri sürdüğü gibi artık kaotik olmayacaktır. Bu kaotik davranışın bir diğer adlandırması olan ergodik hipotezinin, "*fiziksel bir niceliğin zaman ortalamasının topluluk (ensemble) ortalamasına eşit olması*" şeklindeki yorumu doğru değildir[15]. Bu yorum sadece ekstensif sistemler için doğru olmaktadır. Sistem ekstensif olmadığında kesinlikle ekstensif bir sistem gibi evrilmeyecek; dolayısıyla, dağılım da biçimsel olarak, hamiltonyenin nasıl yazıldığından bağımsız bir şekilde, tıpkı ekstensif sistemlerinki gibi exponansiyel yani Boltzman-Gibbs dağılımı olmayacaktır.

---

[15] Bu konuya sonuç kısmında tekrar dönülecektir.

Yukarıdaki yorumun kendi akışı içinde, sırayla a=r indirgenmesiyle ve sonra da $r \to 0$ limiti altında ekstensif olmayan sistemler için $W(N) \approx (1 + aN)^{\frac{1}{r}}$ asimptotik davranışının, ekstensif sistemler için $W(N)) \approx e^{N}$ asimptotik davranışına indirgenmesiyle tamamen bir uyumluluk içinde olduğunu belirtmekte yarar vardır.

Sadece bu limit durumları değil, aynı zamanda üçüncü yasaya uyumluluğun da herhangi bir entropinin fiziksel geçerliliği için önemlidir. Burada Tsallis entropisi çerçevesinde kullanılan ve eskort ortalama diye bilinen denklem (2.6), fiziksel açıdan kararsızlık gösterdiği için [50], onun yerine standart dağılım yani $U = \sum_{i=0}^{W} p_i E_i$ kullanılacaktır.

$S_{a,b,r}^{(\pm)}[p]$ entropileri için β_n sırasıyla,

$$\begin{aligned}\beta_n^{+} &= \frac{\partial S_{a,b,r}^{(+)}}{\partial p_n}\left(\frac{\partial U}{\partial p_n}\right)^{-1} = \frac{1}{E_n - E_n}\frac{\partial S_{a,b,r}^{(+)}}{\partial p_n} \\ &= \frac{1}{E_n - E_n}\frac{2[-(\sigma + a)p_n^{2r} - 2(\sigma r - a)p_n^{r} + (\sigma - a)]}{[(\sigma - a) + (\sigma + a)p_n^{r}]^2} \\ &+ \frac{1}{E_n - E_n}\frac{2[(\sigma + a)p_0^{2r} + 2(\sigma r - a)p_0^{r} - (\sigma - a)]}{[(\sigma - a) + (\sigma + a)p_0^{r}]^2}\end{aligned} \tag{2.62}$$

$$\begin{aligned}\beta_n^{-} &= \frac{\partial S_{a,b,r}^{(-)}}{\partial p_n}\left(\frac{\partial U}{\partial p_n}\right)^{-1} = \frac{1}{E_n - E_n}\frac{\partial S_{a,b,r}^{(-)}}{\partial p_n} \\ &= \frac{1}{E_n - E_n}\frac{2[-(\sigma + a)p_n^{-2r} + 2(\sigma r + a)p_n^{-r} + (\sigma - a)]}{[(\sigma - a) + (\sigma + a)p_n^{-r}]^2} \\ &+ \frac{1}{E_n - E_n}\frac{2[(\sigma + a)p_0^{-2r} - 2(\sigma r + a)p_0^{-r} - (\sigma - a)]}{[(\sigma - a) + (\sigma + a)p_0^{-r}]^2}\end{aligned} \tag{2.63}$$

biçiminde bulunur [51]. Bu fonksiyonların limiti alınırsa,

$$\begin{aligned}\lim_{\{p_n,p_0\}\to\{0,1\}} \beta_n^{+} &\to \frac{2\sigma + r(\sigma - a)}{(E_n - E_0)(\sigma - a)\sigma} \\ \lim_{\{p_n,p_0\}\to\{0,1\}} \beta_n^{-} &\to \frac{2\sigma - r(\sigma - a)}{(E_n - E_0)(\sigma - a)\sigma}\end{aligned} \tag{2.64}$$

değerlerine yaklaşılır. Her iki değerin de sonsuza yaklaşmaları için ya $\sigma = 0$ ya da $\sigma = a > 0$, dolaysıyla σ'nın tanımından, b=0 olması gerekir. Eğer $\sigma = 0$ alınırsa $\beta_n^{\pm} = 0$ olur, ki bu fiziksel olarak kabul edilemez. $\sigma = a > 0$ alınırsa, $\beta_n^{\pm}$ fonksiyonları,

$$\beta_n^{+} = \frac{(1-r)(p_n^{-r} - p_0^{-r})}{a(E_n - E_0)} \text{ ve } \beta_n^{-} = \frac{(1+r)(p_n^{r} - p_0^{r})}{a(E_n - E_0)},$$

eşitliklerine indirgenirler. Bu durumda, $\lim_{\{p_n,p_0\}\to\{0,1\}} \beta_n^{\pm}$ limitlerinin sonsuza ıraksamaları için, sırasıyla $0 < r < 1$ ve $0 > r > -1$ olması gerekir. Böylece evrensel entropinin üçüncü yasaya uyması için gerek ve yeter koşullar aşağıdaki gibi ifade edilebilir [51]:

$$\begin{aligned} &\lim_{\{p_n,p_0\}\to\{0,1\}} \beta_n^{+} \to \infty \iff 0 < r < 1 \text{ ve } a > 0, \qquad b = 0 \\ &\lim_{\{p_n,p_0\}\to\{0,1\}} \beta_n^{-} \to \infty \iff -1 < r < 0 \text{ ve } a > 0, \qquad b = 0 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Daha önce de ifade edildiği gibi, evrensel entropinin üçüncü yasaya uyumluluğundan da b-parametresinin sıfır olması gerektiği sonucuna, böylece, ulaşılmış olur. Bu sonuçlara dayanarak, b-parametresi sıfır alınırsa evrensel entropi,

$$S_{a,b,r}^{(\pm)} = S_{a,r}^{(\pm)} = \frac{k_B}{a} \sum_{i=0}^{W} p_i \left(p_i^{\mp r} - 1\right) \tag{2.66}$$

şeklinde sadeleşecektir. Yukarıda yapılan analizlere ek olarak sistem ister ekstensif olsun ister olmasın, ilgili entropinin termodinamik denge durumundaki mikrokanonik bir sistemde mutlak surette sağlaması gereken iki şart çerçevesinde de evrensel entropi incelenebilir. İlk önce sürekli ve içbükey olan,

$$T(z) = z^{c};\ 0 < z < 1, 0 < c \leq 1, m = z^{-1} \tag{2.67}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon göz önüne alınsın. Bu durumda [41],

i. $$\lim_{W\to\infty} \frac{S_{a,r}^{(\pm)}[zW]}{S_{a,r}^{(\pm)}[W]} = zT\left(\frac{1}{z}\right) = z^{1-c} \tag{2.68}$$

ii. $\lim\limits_{W\to\infty} \frac{S_{a,r}^{(\pm)}[W^{1+m}]}{S_{a,r}^{(\pm)}[W]} W^{m(c-1)} = h_c(m) = (1+m)^d \,, d \geq 0$

şartlarının sağlanması gerekir. Bu iki şarta göre evrensel entropi incelendiğinde, (c,d)-parametrelerinin tanım aralığında iki parametrenin tespit edilmesi gerekir. Söz konusu iki şarta göre $S_{a,r}^{(+)}(W)$ entropisi yazılırsa,

i. $\lim\limits_{W\to\infty} \frac{S_{a,r}^{(+)}(zW)}{S_{a,r}^{(+)}(W)} = \lim\limits_{W\to\infty} \frac{(zW)^r\left(1+\frac{1}{(zW)^r}\right)^r\left(1-\frac{1}{(1+zW)^r}\right)}{W^r\left(1+\frac{1}{W^r}\right)\left(1-\frac{1}{W^r}\right)} = z^r \equiv z^{1-c} \longrightarrow c = 1-r$

olur. Bu eşitlikte bulunan c-değeri $(c-1=-r)$ ikinci eşitlikte yerine yazılırsa,

ii. $\lim\limits_{W\to\infty} \frac{S_{a,b,r}^{(\pm)}[W^{1+m}]}{S_{a,r}^{(\pm)}[W]} W^{-mr} = \lim\limits_{W\to\infty} \frac{W^{(1+m)r-mr}\left(1+\frac{1}{W^{1+m}}\right)^r\left(1-\frac{1}{(1+W^{1+m})^r}\right)}{W^r\left(1+\frac{1}{W^r}\right)\left(1-\frac{1}{W^r}\right)}$

$$= 1 \equiv (1+m)^d \to d = 0$$

sonucuna ulaşılır (basitlik için $k_B = 1$ alınmıştır). Böylece $S_{a,r}^{(+)}[p]$ entropisi için (c,d) parametre ikilisi, bu parametrelerin tanım aralığı ile uyumlu bir şekilde $(1-r, 0)$ olmaktadır. Benzer bir incelemeyle bu iki parametre $S_{a,r}^{(-)}[p]$ entropisi için $(1+r, 0)$ olarak bulunur.

Son olarak, evrensel entropinin Lesche kararlılığını sağlayıp sağlamadığına bakılması gerekir. Burada Lesche kararlılığının tanımına eşdeğer bir başka tanım kullanılarak bu inceleme yapılabilir. Buna göre entropi, (0,1] aralığında diferansiyellenebilir ve içbükey olan bir $g(x)$ fonksiyonu cinsinden, $S_U[p] = \sum_{i=1}^{W} g(p_i)$ şeklinde yazılabiliyorsa ve kendisine karşılık gelen, denklem (2.67)'daki, T(z) fonksiyonunun $z \in [0,1]$ için sürekli olabiliyorsa, entropi Lesche kararlılığını sağlar [41]. Evrensel entropiye karşılık gelen T(z) fonksiyonu, yukarıda tespit edilen c-parametresine göre,

$$T^+(z) = z^{1-r}, r > 0 \text{ ve } T^-(z) = z^{1+r}\,, r < 0$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $0 < r < 1$ olursa $T^+(z)$ fonksiyonu sürekli olur, dolaysıyla da $S_{a,r}^{(+)}$ entropisi Lesche kararlılığını sağlar. $-1 < r < 0$ olursa $T^-(z)$ fonksiyonu sürekli olur, dolaysıyla da $S_{a,r}^{(-)}$ entropisi Lesche kararlılığını sağlamış olur.

Buraya kadar, ileri sürülmüş olan evrensel entropinin fiziksel geçerliliğinin olması için sağlaması gereken kriterler üzerinde bir inceleme yapılmıştır. Ulaşılan sonuçlara göre,

1. Formel grup işleminin kapalı formu denklem (2.38)'deki gibi verildiğinde, elde edilecek evrensel entropi ifadesi denklem (2.49)'deki gibi olmaktadır.
2. Evrensel entropinin SK (1-3) aksiyomlarını, üçüncü yasayı ve Lesche kararlılığını sağlaması durumunda, b-parametresi sıfır olmak zorundadır ve denklem (2.66)'teki gibi yeniden tanımlanır.
3. (a,r) ikili parametresi, bileşke sistemin alt sistemlerinin bir karakteristiği olarak yorumlanabilir. İki alt sistem özdeş olduğunda bu iki parametre eşit olur.
4. Sistem ekstensif olmadığında, mevcut termodinamik ve istatistiksel bilgilerle çelişmeyecek şekilde $\lim_{W\to\gg 1} S_G(W) \approx N$ limiti geçerli olmak zorunda değildir.

Buraya kadar, esas itibariyle formel gurp işlemi denklem (2.38)'deki gibi alındığında ulaşılan sonuçlar incelenmiştir. Bu kapsamda evrensel entropi,

i. $a = r$ ve $r \to 0$ limiti alındığında $S_{a,r}^{(\pm)} \to S_{BG}$, Boltzman-Gibbs entropisine,
ii. $a = r$ ve $r \to 1 - p$ limiti alındığında $S_{a,r}^{(\pm)} \to S_q$, Tsallis entropisine,

indirgenir. Ancak bu minvalde (a,r)-parametrelerinin limit durumları alınarak mevcut evrensel entropiden ne Kaniadakis entropisine ne de Borges-Roditi entropisine geçiş yapmak mümkün değildir. Bu imkansızlığı görmek için söz konusu her iki entropinin kendilerine has sanki-toplanırlık özelliklerine bakmak yeterli olacaktır.

Örneğin Kaniadakis entropisine karşılık gelen sanki-toplanırlık $((SK)' - 4)$ özelliği,

$$S_K(A,B) = S_K(A)S_{R-k}(B) + S_K(B)S_{R-K}(A), \text{öyleki } S_{R-K}[p] = \sum_{i=1}^{W} \frac{p_i^{1+K} + p_i^{1-K}}{2}$$

biçimindedir [52, 53]. Bu eşitlik parametre dönüşümü ile Tsallis entropisinin sanki-toplanırlık özelliğine indirgenemez. Aynı durum, sanki-toplanırlık özelliği,

$$S_{BR}^{(AUB)} = S_{BR}^{(A)} + S_{BR}^{(B)} + (1-q)S_{BR|\alpha=1}^{(B)} S_{BR}^{(A)} + (1-\alpha)S_{BR}^{(B)} S_{BR|q=1}^{(A)}$$

biçiminde verilen Borges-Roditi entropisi için de geçerlidir. Eğer formel grup işlemi, denklem (2.38)'deki gibi değil de denklem (2.33)'deki (C2-4) şartlarını sağlayacak şekilde genel bırakılırsa, bu tez içinde bahsi geçen tüm entropiler bu formel grup yapısından çıkartılabilir. Örneğin ref. [45]'te Kaniadakis entropisi için $g(\mathrm{x})$ fonksiyonu,

$$g(\mathrm{x}) = \frac{\exp(\kappa \mathrm{x}) - \exp(-\kappa \mathrm{x})}{2\kappa} \tag{2.69}$$

biçiminde; Borges-Roditi entropisi için de,

$$g(\mathrm{x}) = \frac{\exp(\mathrm{at}) - \exp(\mathrm{bt})}{\mathrm{a} - \mathrm{b}} \tag{2.70}$$

biçiminde bulunmuştur. Eğer $\mathrm{a} = \kappa$ ve $\mathrm{b} = -\kappa$ alınırsa Borges-Roditi entropisi Kaniadakis entropisine indirgenir. b-parametresi sıfır ve $\mathrm{a} = 1 - \mathrm{q}$ alınırsa Tsallis entropisi elde edilir. Bu entropi aynı zamanda Abe entropisini de içermektedir [39]. Madem, böylece, Borges-Roditi entropisi bu tez kapsamında sözü geçen bütün entropileri, Sharma-Mittal entropisi hariç, kapsamaktadır, öyleyse ona karşılık gelen formel grup işlemini kabul etmek daha doğru olacaktır.

Borges-Roditi entropisine karşılık gelen formel grup işleminin seri açılımı,

$$\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{x} + \mathrm{y} + \alpha_1 \mathrm{xy} + \sum_{\mathrm{j}>2} \alpha_{\mathrm{j}} \left(\mathrm{x}^{\mathrm{j}}\mathrm{y} + \mathrm{xy}^{\mathrm{j}}\right)$$

$$\alpha_1 = \mathrm{a} + \mathrm{b}, \qquad \alpha_{\mathrm{n}} = \frac{(-1)^{\mathrm{n}-1}}{\mathrm{n}!\,(\mathrm{n}-1)} \prod_{\substack{\mathrm{i}+\mathrm{j}=\mathrm{n}-1 \\ \mathrm{i},\mathrm{j}\geq 0}} (\mathrm{ia} + \mathrm{jb})\,,\ \mathrm{n} > 1 \tag{2.71}$$

biçimindedir [45]. Ancak bu entropi biçimine karşılık gelen $g(\mathrm{x})$ fonksiyonunun x=0 noktasında tersi mevcut değildir. Bu ise denklem (2.33)'teki C4 koşuluna uymaz. Borges-Roditi entropisinin fiziksel geçerlilik şartlarını sağlayıp sağlamadığı, bölüm (2.1)'de ele alındığından yukarıda yapılan analizleri burada tekrar etmeye gerek kalmamaktadır.

Eğer formel grup işleminin Borges-Roditi entropisine denk olanı alınırsa, hâlihazırda literatürde kullanılan entropilerin çoğunun tek bir entropi altında toplanabileceği görülerek bu tezin amacına ulaşılmış olacaktır.

Formel grup yapısının özelliklerinden yararlanılarak entropiler ile diğer grup yapıları arasında benzerlikler kurulup, entropiler hakkında daha fazla bilgi edinilebilir [54].

Ekstensif olmayan sistemleri de kapsamak üzere Boltzmann-Gibbs entropisini genişletmeye yönelik yapılan akademik çalışmalar, çoğunlukla entropinin fiziksel geçerlilik şartları dikkate alınmaksızın, oldukça fizikten kopuk salt bir matematiksel düzlemde yapılmaktadır [55, 37, 40, 16, 53, 34]. Genellikle ön şart olarak sadece SK (1-3) aksiyomları dikkate alınmaktadır [24]. Bu tezde ise, nispeten fiziksel şartlara uygun ve termodinamiği de kurulmuş olduğundan, üçüncü bölümde, Tsallis entropisi baz alınarak termal salınımlar incelenecektir

3 EKSTENSİF OLMAYAN İSTATİSTİKSEL MEKANİK

İstatistiksel mekanikte sistemlerin analizinde en çok kullanılan dağılım, kanonik dağılımdır. Genel olarak kanonik bir sistem denildiğinde, sistemin parçacık sayısı sabit iken enerjisinin, kendisi ile dengede olan bir ısı deposu ile değişim içerisinde olduğu anlaşılır. Buna göre kanonik (ve ekstensif) bir sistemin termodinamik potansiyel fonksiyonu, Helmholtz serbest enerji fonksiyonu olup,

$$F = U - TS = -k_B \ln(Z) \tag{3.1}$$

biçiminde tanımlıdır. Bu denklemde Z-değişkeni üleşim fonksiyonu diye bilinir ve kesikli bir olasılık uzayında,

$$Z = \sum_{i=1} \exp(-\beta E_i), \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Kanonik bir sistemde, ön şart olarak olasılıkların toplamı ve sistemin ortalama enerjisi bilinmektedir:

$$\sum_{i=1} p_i = 1 \ \text{ve} \ \sum_{i=1} p_i E_i = U \tag{3.3}$$

Bu şartlar altında ve denklem (1.13) de kullanılarak, *varyasyon fonksiyonu*,

$$\Psi[p] = -\sum_{i=1} p_i \ln p_i + \alpha\left(\sum_{i=1} p_i - 1\right) - \beta\left(\sum_{i=1} p_i E_i - U\right) \tag{3.4}$$

Termodinamik denge durumunda maksimum olur. Yani,

$$\frac{\partial \Psi[p]}{\partial p_i} = \sum_{i=1} (-\ln p_i - 1 + \alpha - \beta E_i) dp_i = 0$$
$$\Rightarrow \ln(p_i) = (\alpha - 1) - \beta E_i$$
$$\Rightarrow p_i = \exp(\alpha - 1)\exp(-\beta E_i)$$

olur. Denklem(3.3)'deki normalizasyon şartı kullanılarak, $\exp(\alpha - 1)$ terimi üleşim fonksiyonu olarak belirlenir ve ekstensif kanonik bir sistemin olasılık dağılımı,

$$p_i = \frac{\exp(-\beta E_i)}{Z}, \beta = 1/k_B T \tag{3.5}$$

biçiminde olur. Bu dağılıma literatürde *Boltzmann-Gibbs dağılımı* denir. Ekstensif olmayan istatistiksel mekanikte[16] entropi değiştiğinde, doğal olarak varyasyon fonksiyonu ve buna bağlı olarak olasılık dağılımı da değişecektir. Olasılık dağılımının,

i. iç enerji ölçümünün referans noktasından bağımsız,
ii. sadece beta (β) çarpanına bağlı ve
iii. bileşke sistemin iç enerjisnin, iki alt sistemin toplam iç enerjisine eşit olması (yani bağımsız iki (A, B)-alt sisteminin bileşkesi olan sistemin toplam enerjisinin $U_q^{A+B} = U_q^A + U_q^B$)

olması istendiğinde Tsallis entropisi için olasılık dağılımı,

$$\begin{gathered} p_i = \frac{e_q^{-\beta_q(E_i - U_q)}}{Z'_q}, U_q = \frac{\sum_{i=1} p_i^q E_i}{\sum_{i=1} p_i^q} \\ Z'_q = \sum_{i=1} e_q^{-\beta_q(E_i - U_q)}, \beta_q = \frac{\beta}{\sum_{i=1} p_i^q} \end{gathered} \tag{3.6}$$

seklinde belirlenir. Denge durumunda ortalama enerjinin sabit olduğu varsayılırsa, olasılık dağılımı,

$$p_i = \frac{e_q^{-\beta'_q E_i}}{Z_q^s}, Z_q^s = \sum_{i=1} e_q^{-\beta'_q(E_i)}, \beta'_q = \frac{\beta_q}{1 + (1 - q)\beta_q U_q} \tag{3.7}$$

---

[16] Daha kesin ve doğru söylemek gerekirse, "istatistiksel mekanik" değil, "istatistiksel termodinamik" kavramını kullanmak gerekir. Çünkü istatistik, tanımı gereği denge durumlarını inceler. Ancak literatürde bu isim kullanılagelmektedir.

şeklinde sadeleşebilir. Ekstensif olmayan istatistiksel mekanik çerçevesinde ele alınan kanonik bir sistemin sıcaklığı, Helmholtz serbest enerjisi, ısı sığası ve entropisi sırasıyla,

$$\frac{1}{T} \coloneqq \frac{\partial S_q}{\partial U_q}, F_q \coloneqq U_q - TS_q = -\frac{1}{\beta}\ln_q(Z_q), C_q \coloneqq T\frac{\partial S_q}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 F_q}{\partial T^2}$$
$$\ln_q(Z_q) = \ln_q(Z'_q) - \beta U_q \text{ ve } S_q = k_B \ln_q(Z_q) + \beta U_q \tag{3.8}$$

biçiminde olur [16]. Ekstensif olmayan istatistiksel mekaniğin çıkış sebebi, daha önce de belirtildiği üzere, sistemin parçacıkları etkileşim halinde olduğunda [56], ya da termodinamik limitten ($N \ll N_A = 6.022x10^{23}$atom) uzaklaşılıp mikro ya da nano seviyedeki sistemler incelendiğinde [57], olasılık dağılımının Boltzmann-Gibbs dağılımı gibi çıkmadığına dair hem teorik analizlerin varlığı hem de yapılan deneylerin mevcudiyetidir.

3.1 Genelleştirilmiş Entropilerin Uygulaması

Burada söz konusu etkileşimi ve boyut etkisini somut kılmak üzere iki tane örnek verildikten sonra ekstensif olmayan sistemlerin termal salınımlarının incelenmesine geçilecektir.

İlk örnek, tez boyunca bahsi geçen anormal difüzyon ile ilgili olacaktır. Normal difüzyon denildiğinde, bir ortam içinde çözünmüş parçacıkların ortam boyunca taşınımı ya da difüzyonu kast edilir. Anormal difüzyonu belirleyen denklem, stokastik termodinamiğin temel denklemlerinden biri olan Fokker-Planck denklemidir. Bu denklem en genel haliyle, $p(x,t)$ fonksiyonu, bu tez çerçevesinde, sürekli olasılık uzayında olasılık yoğunluğu olmak üzere,

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[A(x,t)p(x,t)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(x,t)p(x,t)] \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlıdır. Denklem (3.9)'da A(x,t) ve B(x,t) rassal olmayan iki fonksiyon olup genellikle, A difüze olan parçacıklar üzerine etkiyen sürücü bir kuvveti, B de ortamın difüzyon katsayısını karakterize eder [58]. Bu tez kapsamında ele alınacak örnekte, difüze olan parçacıklar üzerine dışarıdan bir sürücü kuvvet uygulanmayacak ve B-fonksiyonu da zamandan ve konumdan bağımsız difüzyon katsayısı olarak ele alınacaktır (B=D). Bu varsayımlar altında, denklem (3.9), normal difüzyon denklemi olarak bilinen,

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.10}$$

denklemine indirgenir. Normal difüzyon denkleminin başlangıç koşulu, $\delta(x)$ Dirac-delta fonksiyonu olmak üzere, $p(x,0) = \delta(x)$ biçiminde verildiğinde, genel çözümü,

$$p(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Dt}}e^{-x^2/2Dt}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, p(x,t) = 1 \tag{3.11}$$

biçiminde olur. Buna göre x-değişkeninin ikinci momenti,

$$< x^2 > = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x,t)dt = Dt \tag{3.12}$$

şeklinde hesaplanır. İkinci momentin zamana bu şekildeki doğrusal bağımlılığı makro-sistemlerde yaygın olandır. Ancak sistemin en az bir boyutu nano seviyeye indiğinde ve ortam silindirik bir geometriye sahip olduğunda, ikinci momenti zamanın karesiyle orantılı çıkan, süperdifüzyon diye tabir edilen süreçler gerçekleşir [59]. Ya da nano boyutta gözeneklere sahip ortamlarda (porous medium) parçacıkların difüzyonu gerçekleştiğinde, ikinci momentin zamana bağımlılığı denklem (3.12)'teki gibi olmamaktadır. Eğer $< x^2 > (t) \propto t^\alpha$ biçiminde yazılırsa, söz konusu bağımlılık genellikle $\alpha = 1$ biçiminde olmamaktadır. Bu demektir ki Fokker-Plank denklemi bu tür difüzyon olgularını açıklamakta yetersiz kalmaktadır.

Bu sebeplerden dolayı normal difüzyon denklemi aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir,

$$\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 [p(x,t]^v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 [p(x,t]^{2-q}}{\partial x^2}, v := 2-q \tag{3.13}$$

Bu denklemin çözümü, yine normal difüzyondaki başlangış koşulu geçerli olmak üzere, Tsallis dağılımı vermekte olup,

$$
\begin{aligned}
&p_q(x,t) = p_q\left(x/(Dt)^{\frac{1}{3-q}}\right);\\
&p_q(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi A_q}} e_q^{-u^2/A_q} = \frac{1}{\sqrt{\pi A_q}}\left[1 - \frac{(1-q)u^2}{A_q}\right]^{\frac{1}{1-q}}
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

biçimindedir. Denklemdeki A_q-katsayısı şartlı olarak,

$$
A_q = \begin{cases} (q-1)^{0.5}\,\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right), 1 < q < 3 \text{ ise.} \\ 2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , q = 1 \text{ ise} \\ (q-1)^{0.5}\,\Gamma\left(\frac{5-3q}{2(1-q)}\right)\Big/\Gamma\left(\frac{2-q}{1-q}\right), 0 < q < 1 \text{ ise} \end{cases} \tag{3.15}
$$

şeklinde tanımlıdır. Bu çözüme göre x-değişkenin ikinci momenti eskort dağılıma göre hesaplandığında,

$$
< x^2 >_q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 p_q^q(x,t) \Big/ \int_{-\infty}^{+\infty} dx p_q^q(x,t) \ \propto t^{\frac{2}{3-q}}, \qquad q < 3 \tag{3.16}
$$

yaklaşık değeri bulunur [16]. İkinci moment normal dağılımdaki ifadeyi de kapsayacak (q=1) şekilde genişletildiğinde, dağılımının Tsallis dağılımı olduğu görülmektedir. Parçacıkların bir dış kuvvet altındaki difüzyonu için yapılan analizlerde de sitemin dağılımı yine Tsallis dağılımı olmaktadır [60, 61].

Şimdi ikinci bir örnek olarak parçacık sayısının Avogadro sayısından oldukça az olduğu bir durum ele alınacaktır. Sistem ekstensif olmayan kanonik bir sistemdir. Yani ısı deposu ile etkileşim halinde olan sonlu bir sistem, ısı deposu ile birlikte bileşke sistemi oluşturur. Bileşke sistemin enerjisi E, ısı deposunun enerjisi E_2 ve sonlu sistemin enerjisi de E_1 olmak üzere, E=$E_1 + E_2$ dir. Boltzmann-Gibbs dağılımına dayanan istatistiksel mekanikte, denge durumunda bileşke sistemin sıcaklığı sabit ve enerjiden bağımsızdır. Ancak sistem sonlu kabul edildiğinde, yani sistemin parçacık sayısının Avogadro sayısından oldukça az olduğu varsayıldığında (örneğin parçacık sayısı N=1000 olduğunda) sonlu sistemde sürekli sıcaklık dalgalanmaları olacaktır. Buna göre sonlu sistemin sıcaklığındaki dalgalanma, $\beta = 1/k_B T$ olmak üzere,

$$\frac{d}{dE_2}\left(\frac{1}{\beta}\right) = q - 1 \text{ ve } \beta = \frac{d\Omega_2(E_2)/dE_2}{\Omega_2(E_2)} \tag{3.17}$$

şeklinde tanımlandığında, sonlu sistemin olasılık dağılımı,

$$p(E_1) \propto \frac{\Omega_2(E - E_1)}{\Omega(E)} = e_q(-\beta(E)E_1) \tag{3.18}$$

olacaktır [62]. Denklem (3.17), ekstensif olmayan sistemlere ilişkin önerilen Tsallis entropisindeki q-parametresinin fiziksel yorumunu vermesi bakımından önemlidir.

Bileşke sistemin hamiltonyeni,

$$H(p,r) = H_1(p) + H_2(r) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} p_i^2 + V(r), r = (r_1, r_2, \ldots, r_N) \tag{3.19}$$

biçiminde yazılabilir. Buradaki potansiyel fonksiyonu, V(r), ısı deposunun toplam enerjisi olup, $\lambda V(r) = V(\lambda^{-1/\alpha} r)$ homojenlik koşulunu sağlıyor ise [57], bu durumda, sabit K-enerjisinde potansiyel fonksiyona karşılık gelecek olan kompleksiyon sayısı,

$$\Omega_2(K) = \int \delta(V(r) - K)d^{3N}r \tag{3.20}$$

olacaktır. Homojenlik koşulu dikkate alındığında bu kompleksiyon sayısı

$$\begin{aligned}
\Omega_2(\lambda K_0) &= \int \delta(V(r) - \lambda K_0)d^{3N}r = \frac{1}{\lambda}\int \delta(\lambda^{-1}V(r) - K_0)d^{3N}r \\
&= \frac{1}{\lambda}\int \delta\left(V\left(\lambda^{\frac{1}{\alpha}}r\right) - K_0\right)d^{3N}r = \frac{1}{\lambda}\int \delta(V(r') - K_0)\lambda^{-3N/\alpha}d^{3N}r' \\
&= \lambda^{\frac{1}{q-1}}\Omega_2(K_0), \qquad r' = \lambda^{\frac{1}{\alpha}}r, \qquad \frac{1}{q-1} = -\frac{3N}{\alpha} - 1, \lambda > 0
\end{aligned}$$

eşitliği sağlar. Eğer $K = \lambda K_0$ tanımı yapılırsa yukarıdaki varılan sonuçtan, kompleksiyon sayısına ilişkin önemli bir sonuca ulaşılır:

$$\Omega_2(\mathrm{K}) = \left(\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{K}_0}\right)^{\frac{1}{q-1}} \Omega_2(\mathrm{K}_0) = \mathrm{CK}^{\frac{1}{q-1}}, C = K_0^{\frac{1}{1-q}} \Omega_2(\mathrm{K}_0) \tag{3.21}$$

Denklem (3.18)'deki olasılık ifadesi, denklem (3.21)'deki eşitlik kullanılarak tekrar yazılmak istenirse,

$$\begin{aligned} \mathrm{p}(\mathrm{E}_1) \propto \frac{\Omega_2(\mathrm{E}-\mathrm{E}_1)}{\Omega(\mathrm{E})} &\approx \frac{1}{\Omega(\mathrm{E})}\left\{\Omega_2(E) - E_1\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial E_2}\right)_{E_2=E}\right\} \\ &= \frac{1}{\Omega(\mathrm{E})}\left\{\Omega_2(E) - \frac{1}{q-1}\frac{E_1}{E}\Omega_2(E)\right\} \\ &= \frac{\Omega_2(E)}{\Omega(\mathrm{E})}\left\{1 - \frac{1}{q-1}\frac{E_1}{E}\right\} \approx \frac{\Omega_2(E)}{\Omega(\mathrm{E})}\left(1-\frac{E_1}{E}\right)^{\frac{1}{q-1}} \end{aligned}$$

bulunur. Bu son ifade, denklem (3.18)'in sağ tarafındaki terimle karşılaştırıldığında, ters sıcaklık fonksiyonu olan β ve q-parametresi,

$$\beta = \frac{1}{(\mathrm{q}-1)\mathrm{E}}, \qquad \frac{1}{\mathrm{q}-1} = -\frac{3\mathrm{N}}{\alpha} - 1 \Rightarrow \mathrm{q} = \frac{3\mathrm{N}}{3\mathrm{N}+\alpha} \tag{3.22}$$

biçiminde tanımlanır. Böylece sistem sonlu olduğunda sıcaklık, bileşke siteminin enerjisinin bir fonksiyonu; q-parametresi de sonlu sistemin parçacıklarının, içinde etkileştikleri potansiyeli r-uzaklığına bağlayan α-parametresinin bir fonksiyonu olmaktadır. Eğer parçacık sayısı çok büyük alınırsa q-parametresi bir ve sıcaklık (β) da toplam enerjiden bağımsız olur.

Burada yapılan hesaplamalar, üç boyutlu uzayda (d=3) yapılmıştır. Eğer α-parametresi $0 \leq \alpha \leq d$ gibi bir eşitsizliği sağlıyorsa, sonlu sistemin parçacıklarının uzun erişimli bir potansiyel alanında; $\alpha > d$ gibi bir eşitsizliği sağlıyor ise de kısa erişimli bir potansiyel alanında bulunduğu kabul edilir. Bunu daha iyi görmek için sonlu sistemin içinde bulunduğu potansiyel, en genel haliyle

$$\mathrm{V}(\mathrm{r}) \approx -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{r}^{\alpha}}, (\mathrm{A} > 0, \alpha \geq 0) \tag{3.23}$$

tanımlanmış olsun. Bu durumda parçacıkların homojen biçimde sınırlı bir kürede dağıldıkları varsayıldığında parçacık başına düşen ortalama potansiyel enerji [16],

$$\frac{U_{pot}(N)}{N} \propto -A\int_{1}^{N^{\frac{1}{d}}} dr r^{d-1} r^{-\alpha}$$

$$= -\frac{A}{d}\frac{N^{1-\alpha/d}-1}{1-\alpha/d} \approx \begin{cases} -\dfrac{A}{\alpha-d}, & \alpha/d > 1 \text{ ise} \\ -\dfrac{A}{d}\ln(N), & \alpha/d = 1 \text{ ise} \\ \dfrac{-AN^{1-\alpha/d}}{d-\alpha}, & 0 < \alpha/d < 1 \text{ ise.} \end{cases} \tag{3.24}$$

şeklinde olur. Klasik mekanik ve standart istatistiksel mekanik çerçevesinde parçacık başına düşen ortalama enerijinin, en azından $N \to \infty$ limiti durumunda sonlu olması gerekir. Bu şart sağlandığında sistem istatistiksel olarak Boltzmann-Gibbs dağılımına uyar. Yukarıdaki eşitlikten görüldüğü gibi, $\alpha > d$ olduğunda bu koşul sağlanmaktadır. Bu ise, parçacıklar kümesinin, elektrik ve gravitasyon potansiyelleri altında etkileşmekte olduğu ya da bu etkileşmelerin gözardı edilemediği durumlarda ($\alpha < d$), Boltzmann-Gibbs dağılımına uyamayacakları anlamına gelir. Bu tür sistemler artık ekstensif olmamaktadır.

Tsallis entropisine dayalı ekstensif olmayan istatistiksel mekaniğin uygulama alanı, standart istatistiksel mekanik çerçevesinde incelenen seyreltik gazdan [63, 64, 65] optiksel örgülere [66, 67]; siyah cisim ışımasını veren Planck denkleminin genişletiminden [68, 69] kuantum mekaniğinin temel denklemlerinin lineer olmayan denklemlere genişletimine [70, 71, 72]; kimyasal reaksiyonlardan [73] göreli kinetik teoriye [74]; kuantum informasyondan [60] kuantum dolanıklığa [75, 76] kadar geniş bir çerçeveyi kapsamaktadır. Bütün bu uygulama alanlarının temelinde salt bir matematiksel genişletme yatmaktadır. Bu tezde, sonuç kısmında da değinileceği gibi, söz konusu ekstensif olmayan istatistiksel mekaniğin temelinde bazı çelişkiler mevcut olduğundan yukarıda bahsi geçen alanlarla ilgili uygulamalar üzerinde durulmamıştır.

Tsallis entropisi gibi üzerinde ekstensif olmayan istatistiksel bir mekaniğin kurulduğu ve yaygın bir şekilde kullanılan başka bir entropi de Kaniadakis entropisidir. Kaniadakis entropisi daha çok lineer olmayan kinetik teoriye [33], özel göreliliğe [34] ve kuantum dolanıklığa [77] uygulanmıştır. Bu alanda da hâlâ soru işaretleri olduğundan bu tez kapsamında Kaniadakis entropisinin ayrıntılarına girilmeyecektir.

Bir sonraki bölümde genelleştirilmiş entropiler kapsamında termal salınımlar incelenirken özel olarak sadece Tsallis entropisi dikkate alınacaktır. Bu seçimin yapılmasının sebebi nispeten teorisi kurulmuş tek genelleştirilmiş entropinin, Tsallis entropisi olmasıdır.

3.2 Ektensif Olmayan Sistemlerde Termal Salınımlar

Boltzmann-Gibbs istatistiği çerçevesinde ele alınan sistemlerin ortalama enerji ve belirli bir mikrodurumdaki ortalama parçacık sayısı gibi fiziksel nicelikleri, sıcaklığın esas itibariyle parçacıkların hareketiyle ilişkili olmasından dolayı belirli sapmalar gösterirler [2, sf. 191-207, 4, sf. 423-426]. Bu sapmalar parçacık sayısı sonsuz limitine götürüldüğünde sıfıra yaklaşırlar; sadece bu sapmalar değil, örneğin kanonik bir sistemin olasılık dağılımı da mikrokanonik dağılıma yaklaşır. Başka bir deyişle Dirac-delta fonksiyonuna indirgenir. Bu çerçevedeki en önemli nokta, denge durumunda sistemin sıcaklığının sabit varsayılmasıdır. Ancak bölüm (3.1)'de de görüldüğü gibi sistem sonlu olduğundan sıcaklık parametresi enerjiye bağlı çıkmaktadır. Buna ek olarak, kanonik bir sistemin kendisi ile termal etkileşimde olduğu ısı deposu, kelimenin gerçek anlamında bir ısı deposu değil de sonlu enerjiye sahip bir başka sistem olarak dikkate alındığında, sonlu sistemle yaptığı enerji alışverişinden dolayı sıcaklığında dalgalanmalar olacaktır. Buna bağlı olarak sonlu sistemin sıcaklığı da dalgalanmalar gösterecektir. Bu konu aşağıda daha ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Bunun dışında ısı sığası için denklem (3.8)'de verilmiş olan tanım kullanıldığında bazı uygulamalarda ısı sığası negatif çıkmaktadır [64]. Bu anormallik bertaraf edilmek üzere, fiziksel nicelikler tekrar tanımlandığında sıcaklığın ve diğer parametrelerin q-parametresine bağımlılıkları görünür olmaktadır. Bunu daha iyi görmek üzere termodinamiğin sıfırıncı yasası üzerinden bir inceleme yapılabilir.

Termodinamik dengede olan birbirinden bağımsız iki alt sitemin toplam entropisi (bkz. denklem (2.2)) maksimum ve bunların bileşkesi olan sistemin enerjisinin diferansiyeli sıfır, yani $\delta U_q(A,B) = \delta U_q(A) + \delta U_q(B) = 0$ dır. Bundan yararlanarak,

$$0 = \delta S_q(A,B) = \left[1 + \frac{1-q}{k_B} S_q(B)\right] \frac{\partial S_q(A)}{\partial U_q(A)} \delta U_q(A) \\ + \left[1 + \frac{1-q}{k_B} S_q(A)\right] \frac{\partial S_q(B)}{\partial U_q(B)} \delta U_q(B) \tag{3.25}$$

yazılabilir. Bileşke sistemin enerjisi sabit olduğundan

$$\frac{k_B \beta(A)}{1 + (1-q)/k_B\, S_q(A)} = \frac{k_B \beta(B)}{1 + (1-q)/k_B\, S_q(B)} \\ \equiv k_B \beta^*, \qquad k_B \beta = \frac{\partial S_q}{\partial U_q} \tag{3.26}$$

eşitliği sağlanmak zorundadır. Denklem (3.26), genelleştirilmiş entropiler için sıfırıncı yasaya [65] yani, eşitliğin her iki tarafı alt sistemlerin denge durumundaki sıcaklıklarına karşılık gelir. Gerçekten de q-parametresi sıfır alındığında standart termodinamiğin sıfırıncı yasası elde edilir. Denklem (3.26)'ya göre ekstensif olmayan sistemler için sıcaklık,

$$T_p = \frac{1}{k_B \beta^*} = \left(1 + \frac{1-q}{k_B} S_q\right) \frac{1}{k_B \beta} \tag{3.27}$$

biçiminde tanımlanabilir [65]. Denklem (3.8)'deki serbest enerji ifadesi yeniden

$$F'_q = U_q - T_p \frac{k_B}{1-q} \ln\left(1 + \frac{1-q}{k_B} S_q\right) \tag{3.28}$$

biçiminde tanımlanırsa, negatif ısı sığası problemi ortadan kalkar. Bu eşitlikten, $T_p dS_q = \delta O_q$ olduğu da dikkate alınırsa, sisteme verilen ısı,

$$dS_q = \left(1 + \frac{1-q}{k_B} S_q\right) \frac{\delta O_q}{T_p} \tag{3.29}$$

biçimine girmiş olur. Bu son eşitlik, aynı zamanda Clasius'un (ekstensif) termodinamik bir sistem için tanımladığı entropinin, enkstensif olmayan termodinamik bir sisteme nasıl genişlediğini gösterir. Denklem (3.28),

$$U_q = F'_q - T_p\left(\frac{\partial F'_q}{\partial T_p}\right) \tag{3.30}$$

şeklinde düzenlenirse, sabit hacimdeki ısı sığasının yeni ifade biçimi,

$$C_{qV} = \left(\frac{\partial U_q}{\partial T_p}\right)_V = -T_p\left(\frac{\partial^2 F'_q}{\partial T_p^2}\right)_V \tag{3.31}$$

olur. Bu tanımlama dikkate alındığında ekstensif olmayan istatistiksel mekanik çerçevesinde ele alınan klasik gaz kitlesinin, ısı sığası ve ortalama enerjisi

$$C_{qV} = \frac{3}{2}Nk_B\,, \qquad U_q = \frac{3}{2}Nk_B T_p \tag{3.32}$$

şeklinde bulunur [64, 65]. Böylece ısı sığasında ortaya çıkan anormallik bertaraf edilirken, ekstensif olmayan sistemler için tanımlanan sıcaklık, ekstensif sistemlere göre farklı bir şekilde tanımlanmış olmaktadır. Bu ise, ekstensif olmayan sistemlerin sıcaklıklarının, sistemin sadece parçacıklarının hareketiyle tanımlanamayacağı anlamına gelir. Yapılan bu uyarlamalar sonucu, biçimsel olarak, ekstensif olmayan sistemlerin termodinamik niceliklerindeki dalgalanmalar ekstensif sistemlerinkiyle aynı olmaktadır. Buradaki en önemli fark her iki alandaki sıcaklık tanımının farklı oluşudur. Bolztmann-Gibbs istatistiğindeki temel termodinamik denklikleri, ekstensif olmayan alana geçerken biçimsel olarak değişmez tutmak için uyarlamalar yapmak yerine, ekstensif olmayan istatistiğe yol açan sınırlamalar ve koşullar üzerinden bir inceleme yapılırsa ne tür bir sonuca varılacağına bakmak daha tatminkâr olacaktır.

Ekstensif sistemlerde termodinamik limit durumu söz konusudur. Bir örnek vermek gerekirse, şayet ısı deposu düşünsel olarak varsayıldığı gibi sonsuz bir enerji deposu değil de gerçekte olduğu gibi sonlu bir enerji miktarına sahipse, etkileşimde olduğu sonlu sisteme her enerji verişinde sıcaklığında dalgalanma olması, beklenen bir olgudur. Bu durumda sonlu sistemin *ölçülebilir zaman dilimi* boyutunda (10^{-7}s) termodinamik dengede olduğunu söylemek zordur. Üzerinde yapılacak her ölçümün farklı bir sıcaklıkta yapıldığı söylenebilir.

İstatistiksel mekanik çerçevesinde sıcaklık, sistemin enerjisi ile tanımlanacak şekilde doğrudan ilişkilidir ($U = 3/2\,k_B T$). Ölçülebilir zaman dilimi aralığında sonlu sistemin ısı deposuyla enerji alışverişinde bulunmadığı varsayılırsa, sonlu sistem bu zaman diliminde mikrokanonik bir sistem gibi ele alınabilir ve bu zaman dilimine özgü olarak *mikrokanonik sıcaklık* tanımı yapılabilir. Enerji ile sıcaklık arasındaki ilişkiden dolayı, enerjide gerçekleşecek bir dalgalanmaya karşılık mikrokanonik sıcaklıkta da bir dalgalanma olacaktır. Böylece (*mikrokanonik*) *sıcaklık(ın) dalgalanması* diye bir olgudan bahsedilebilir. Eğer sıcaklık uzun bir zaman aralığında sürekli dalgalanma gösterecekse ve bu dalgalanma enerjideki dalgalanmaya bağlı olarak gerçekleşiyorsa, o zaman sıcaklıktaki bu dalgalanmayı istatistiksel olarak tanımlayacak ve enerjinin fonksiyonu olan bir "*sıcaklığın olasılık dağılımı*" nın var olması gerekir.

Bu kavramsallaştırma çerçevesinden bakıldığında, sıcaklık dalgalanmasının söz konusu olduğu sistemler denge dışı sistemler olmaktadır. Bu durumu somutlaştırmak için şu örnek göz önüne alınabilir: yalıtkan zar kullanılarak bir kübik hacim içerisindeki gaz kitlesi sonlu sayıda alt bölümlere ayrılmış ve her birinin sıcaklığı farklı kılınmış olsun. Zarlar kaldırıldığında gaz kitlesi içinde zaman evrimi boyunca sıcaklık değişimi yaşanacaktır. Eğer gaz kitlesi Avogadro sayısından çok az sayıda parçacık içeriyorsa bu sıcaklık değişimi sonsuza dek sürebilir [1, sf. 65-67]. Hâl böyle olunca artık sabit sıcaklıkta, bir fiziksel niceliğin ölçümünden bahsedilemeyecektir. Klasik olarak (ekstensif) sistemin, sıcaklığın sabit olduğu varsayımı altında, bir E_i-enerji seviyesinde bulunma olasılığından bahsediliyordu. Ancak bu sefer sıcaklığın da istatistiksel olarak belirlenmesinden dolayı, sistemin T_i-sıcaklığında E_i-enerji seviyesinde bulunma olasılığının dikkate alınması gerekir. Boltzmann-Gibbs istatistiğinde sıcaklık $\mathrm{T} = (\mathrm{k_B}\beta)^{-1}$ biçiminde tanımlıdır. Bu durumda sıcaklığın olasılık dağılımı da $\mathrm{f} = \mathrm{f}(\beta)$ biçiminde tamımlanabilir. Yeterince ölçüm yapılması durumunda ya da parçacık sayısı (N) yeterince fazla olduğunda bu dağılımın Dirac-delta fonksiyonuna indirgenmesi gerekir. Bunu dikkate alarak Boltzmann-Gibbs dağılımı,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{K(E)} = \int_0^\infty \mathrm{f}(\beta)\mathrm{p(E)}d\beta \\
&\text{i)}\ \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \mathrm{f}(\beta) = \delta(\beta - \beta_0) \qquad (3.33)\\
&\text{ii)}\ \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \mathrm{K(E)} = \lim_{\mathrm{N}\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{f}(\beta)\mathrm{p(E)}d\beta = \mathrm{p(E)}
\end{aligned}$$

biçiminde yeniden tanımlanabilir. Bu düşünceyi sağlamlaştırmak için ideal gaz örneği üzerinden bir inceleme sürdürülebilir. Isı deposu ise etkileşim halinde olan ve n-tane parçacıktan oluşan gaz kitlesi, kanonik bir sistemdir. Eğer sistemin parçacıkları etkileşimsiz olarak kabul edilirse ve bu parçacıkların ısı deposu ile enerji alışverişinde oldukları göz önünde bulundurulursa; her bir parçacığın enerjisine rastsal bir değişken gözü ile bakılabilir ve u_i de i-parçacığının enerjisi olmak üzere sistemin ortalama enerjisi olan,

$$U_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i \tag{3.34}$$

fonksiyonu da bir rastsal değişken olur. Bu durumda ortalama enerjinin de bir olasılık dağılımı olacaktır:

$$g(u) \coloneqq P\{U_n = u\} \tag{3.35}$$

Böylece ortalama enerjinin her bir belirli değerine $(U_n = u)$ bir ters sıcaklık değeri tekabül ettirilebilir $(\beta = \beta(u))$. Bu fonksiyonel ilişkiden dolayı, $u \rightarrow \beta(u)$ şeklinde bir dönüşümle $g(u)$ olasılık dağılımından $f(\beta)$ olasılık dağılımına geçilebilir.

Yapılan incelemeler sonucu, $g(u)$ dağılımı, parçacık sayısı ile eksponansiyel azalmakta ve bu azalma oranı ortalama enerjinin bir fonksiyonu olmaktadır [17]. Yani,

$$g(u) \approx \exp(-nD(u)) \tag{3.36}$$

olmaktadır. Azalma katsayısı kanonik dağılımın birikimli üreteç fonksiyonunun Legendre dönüşümü ile,

$$\begin{gathered} \varphi(k) = \ln E\left[e^{ku(x)}\right] = \ln\sum_{x\epsilon X} p(x)e^{ku(x)} \\ D(u) = uk(u) - \varphi(k(u)) \end{gathered} \tag{3.37}$$

şeklinde hesaplanmaktadır. Bu son eşitlikten $g(u)$ dağılımı yaklaşık olarak belirlenebilir ve buradan

$$f(\beta) = g(u(\beta))\left|\frac{du(\beta)}{d\beta}\right| \tag{3.38}$$

tanımı aracılığıyla $f(\beta)$ dağılımına geçilebilir [17]. Bu prosedürle bulunan $f(\beta)$ dağılımının, parçacık sayısı sonsuza giderken dirac-delta fonksiyonuna yaklaştığı bulunmuştur. Bununla birlikte olasılık dağılımı denklem (3.33)'e göre hesaplandığında bulunan sonuç Tsallis dağılımına benzer bir sonuçtur. Tez kapsamı dışında olduğundan, termal dalgalanmanın teorisini gerektiren bu konuya girilmeyecektir. Daha fazla bilgi için Ref. [17, sf. 159-175]'e bakılabilir.

Bu bölümde genelleştirilmiş entropilerden biri olan Tsallis entropisi çerçevesinde ekstensif olmayan sistemlerin termodinamiği ve termal salınımlarına ilişkin kısa bir inceleme yapılmıştır. Bu inceleme yapılırken ayrıntılara girmekten kaçınılmıştır. Bunun sebebi, bu genelleştirilmiş entropilere ilişkin temelde hala giderilemeyen çok ciddi sorunların ve çelişkilerin mevcut olmasıdır.

4 SONUÇ

Boltzmann-Gibbs dağılımına uymayan, deneysel olarak da gözlenmiş nano ve makro yapılı sistemlerin varlığına tez boyunca değinilmiştir. Bu deneysel gözlemlerin Bolztmann-Gibbs dağılımını genişletmeyi neden zorunlu kıldığı açık değildir. Çünkü Bolztmann-Gibbs istatistiğinin temeli sentetik a priori bazı varsayımlara (ergodik hipotezi, tüm mikrodurumların eş olasılıklı olması ve parçacıkların ayırt edilebilir olması gibi) dayanmaktadır. Bu varsayımların ekstensif olmayan sistemleri içerecek şekilde yeniden nasıl düzenleneceği hâlâ muğlak bir problem olarak durmaktadır. Kuşkusuz bu ekstensif olmayan sistemleri açıklayacak bir istatistiği kurmak, bir ihtiyaç olarak fizikçiler tarafından çalışılmayı beklemektedir. Fakat kurulacak yeni istatistiğin, Bolztmann-Gibbs istatistiğinin temel varsayımlarını ve özelliklerini yeniden düzenlemekle mi yoksa kendine has şartlar üzerinde mi kurulacağı sorusunun cevabı açık değildir. Ancak problemin ele alınış biçiminin istatistiksel fiziğin temelinden başlaması gerektiği gerçeği açıktır. M. Planck'ın, siyah cisim ışımasını açıklamaya çalışırken, klasik mekaniğin ve elektromanyetizmanın temel varsayımlarından biri olan enerjinin sürekliliği varsayımını terkederek doğru sonuca ulaştığını hatırda tutmak gerekir.

Bu bölümde, "ergodik hipotezin ektensif olmayan sistemlerde geçerli olmadığı" savının [16] o kadar da açık olmadığı incelenecektir. Öncelikle, ergodik hipotezi kullanılarak genelleştirilmiş Tsallis entropisi [62, 57] ve q-parametresi gibi bir genelleştirme parametresi gerektirmeyen, dahası Boltzmann-Gibbs entropisini de kapsayacak şekilde, entropiler türetilebileceğini belirtmek gerekir [78].

Ergodik hipotezinin fizikteki kullanımı itibariyle verilen tanımı, zaman üzerinden alınan ortalamanın olasılık üzerinden alınan ortalamaya eşit olduğu şeklindedir. Bu tanımın geçerliliği, ilk bakışta sonlu durum gerektirdiği ve sistemin sonlu bir zaman içinde belirli bir makro duruma karşılık gelen mikrodurumların hepsinden geçmesi gerektiği ortadadır. Bu sözel anlatımın matematiksel ifadesi modern olasılık teorisinde verildiğinden, ergodik hipotezini bu matematiksel tanım çerçevesinde ele almak daha yerinde olur.

Olasılık uzayında tanımlı bir sistem, girilebilir mikrodurum sayısı N olmak ve n-parametresi de zamanı göstermek üzere,

$$P \coloneqq \{p_i(n), i = 1,2,3, \dots, N\} \tag{4.1}$$

biçiminde bir olasılık dağılımı ile gösterilsin. Denklem (4.1)'deki $p_i(n)$ olasılığı "t=n anında i-mikrodurumunun olasılığı" şeklinde okunur. n-adımda mikrodurumlar arasındaki geçiş olasılıkları da

$$P_{ij}(n) = \mathcal{P}\{x_{k+n} = j | x_k = i\} \tag{4.2}$$

biçiminde tanımlanır. Bu koşullu olasılık, sistemin t=k anında i-mikrodurumunda olduğu bilindiğine göre n-adım sonra j-mikrodurumuna geçme olasılığını verir. Buradaki "adım"dan kasıt kesikli zaman ölçeğinde anların sayımıdır. Eğer n-adımda i-mikrodurumundan herhangi bir j-mikrodurumuna bir geçiş olasılığı ve k-adımda da j-mikrodurumundan i-mikrodurumuna ters ya da tekrar bir geçiş olasılığı varsa bu durumda i-mikrodurumu önemlidir denir. Bu tanımın matematiksel ifadesi, "$P_{ij}(n) > 0$ olduğunda $P_{ji}(k) > 0$ ise i-mikrodurumu önemlidir" şeklindedir. Eğer herhangi bir i-mikrodurumundan herhangi bir j-mikrodurumuna n-adımda bir geçiş olasılığı varken, (bu herhangi) j-mikrodumundan (bu herhangi) i-mikrodumuna da k-adımda bir geçiş olasılığı varsa o zaman bu örneklem uzayının iletişimli olduğu söylenir. İletişimli bir örneklem uzayındaki bütün mikrodurumlar tanım gereği önemli durumlar olurlar. Burada,

$$f_{ij}(n) = \mathcal{P}\{x_{k+n} = j, x_{k+n-1} \neq j, x_{k+n-2} \neq j, \dots, x_{k+1} \neq j | x_k = i\} \tag{4.3}$$

tanımını da yapmak gerekir. Bu tanımda sistem t=k anında i-mikrodurumundayken n-adım sonra ilk defa j-mikrodurumunda bulunma olasılığını verir. Bu tanımı özel bir hâli olarak,

$$F_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_i(n) := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n) \tag{4.4}$$

tanımı yapılabilir. Bu tanım da, sistemin n-adım sonra ilk defa tekrar i-mikrodurumunda bulunma olasılıklarını adımlar üzerinden toplamının olasılığını verir. Ergodiklik hipotezini tanımlamak için dört tane tanıma daha ihtiyaç vardır. Bunlar,

Sıfır Durumu: i-mikrodurumu önemli olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty} P_{ii}(n) \to 0$ oluyorsa bu durumda i-mikrodurumu bir sıfır-durumudur,

Tekrarlayan Durum: i-mikrodurumu önemli olsun. Eğer (denklem (4.4)'teki olasılık) F_i=1 ise i-mikrodurumu tekrarlayan bir durumdur,

Pozitif Tekrarlayan Durum: i-mikrodurumu tekrarlayan ve sıfır-olmayan bir durum ise bu taktirde i-mikrodurumu pozitif tekrarlayan bir durumdur (F_i=1 ve $\lim_{n\to\infty} P_{ii}(n) \to \varepsilon \in (0,1]$) ,

Periyodik-olmayan Durum: i-mikrodurumu önemli olsun. $S = \{n_l \mid P_{ii}(n_l) > 0\,, l = 1,2,\dots,m\}$ şeklinde tanımlı bir küme olmak üzere $E.B.O.B(n_1, n_2, \dots, n_m) = 1$ ise i-mikrodurumu periyodik olmayan bir durumdur,

şeklinde sıralanabilir. Bu tanımlardan sonra ergodikliğin tanımı verilebilir.

Ergodik durum ve bir sistemin ergodikliği: i-mikrodurumu önemli olsun. Buna ek olarak eğer i-mikrodurumu pozitif tekrarlayan ve periyodik-olmayan bir durum ise bu taktirde i-mikrodurumu ergodik bir durumdur denir. Eğer sistemin bütün mikrodurumları ergodik ise bu durumda sistemin örneklem uzayının ergodik olduğu söylenir. Bu tanım, matematiksel olarak,

i. F_i=1,
ii. $\lim_{n\to\infty} P_{ii}(n) \to \varepsilon \in (0,1]$ ve
iii. $S = \{n_l \mid P_{ii}(n_l) > 0\,, l = 1,2,\dots,\}$ olmak üzere $E.B.O.B(n_1, n_2, \dots, n_m) = 1$

ise i-mikrodurmu ergodik bir durumdur. Örneklem uzayındaki bütün mikro durumlar ergodik durumlar ise bu durumda sistem ergodiktir denir,

biçiminde ifade edilir.

Bu tanımın eşdeğeri, sistemin bütün mikrodurumlarının birbiriyle iletişimli olduğu durumdur. Termodinamik denge durumunda bir i-mikrodurumun p_i-olasılığı

$$\lim_{n\to\infty} P_{ji}(n) \to \varepsilon = p_i > 0 \tag{4.5}$$

biçiminde tanımlanır. Ekstensif ve ekstensif olmayan sistemler üzerinde konuşurken dikkate alınan olasılıklar, denklem (4.5)'teki p_i-olasılıklarıdır. Bu ise, genelleştirilmiş entropilerden bahsederken bile dikkate alınan olasılıkların ancak denge durumunda sıfır olmayan olasılıklar olduğu demektir. Bu durumda sistemin ergodikliğinin, denge durumundaki olasılıkları belirlemekle doğrudan bir ilişkisi yoktur. Sistemin ergodikliği üzerine yorum yapabilmek için onun zaman içindeki hareketinin de dikkate alınması gerektiği gayet açıktır. Oysa hem Boltzmann-Gibbs istatistiğinde hem de ekstensif olmayan istatistiksel mekanikte sistemin denge durumu incelenmektedir. Bir fiziksel niceliğin zaman ortalamasının topluluk üzerinden ortalamasına eşit olması, yukarıdaki durum tanımları dikkate alındığında, doğrudan doğruya sistemin zaman içindeki hareketi ile ilişkili olarak tanımlanmış olan ergodik hipotezinin bir sonucu ya da özel bir hâli olarak belirir. Sonuç olarak söylemek gerekirse ekstensif olmayan sistemler için önerilmiş olan genelleştirilmiş entropilerde, ergodiklik hipotezinin geçersiz olduğu söylenemez.

Bölüm 3.1'de ekstensif-olmayan istatistiksel mekaniğe verilen örneklerde, ısı deposu ile dengede olan sonlu sistem için q-parametresi ölçülebilir nicelikler cinsinden verilmişken; anormal difüzyon için bu parametre, olasılık dağılımını deneysel verilere uydurmakla belirlenebilir. Bunun sebebi q-parametresinin nasıl belirleneceğine ilişkin bir yöntemin, ya da bu parametrenin fiziksel bir yorumunun verilememiş olmasıdır. Dolayısıyla q-parametresinin fiziksel statüsü hâlâ muğlaktır.

Ayrıca genelleştirilmiş entropilere ilişkin bazı çelişik durumlara değinmek gerekir. Bölüm 2.2'de evrensel entropi incelenirken, fiziksel şartları sağlaması durumunda b-parametresinin sıfır, a-parametresinin de sıfırdan büyük olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Bunlar dikkate alındığında formel grup işleminin kapalı formu, Tsallis entropisine has sanki-toplanırlık özelliğine indirgeniyordu. İki alt sistemin bileşkesi ekstensif olmayan bir sistem oluşturuyorsa, bu bileşke sistemin kompleksiyon sayısının iki alt sistemin kompleksiyon sayılarının çarpımından küçük olması gerekir ($W_{AB} < W_A W_B$) [41]. Bu durumda entropinin artan bir fonksiyon olması ve $\lim_{W\to\infty} S_U(W) \to \infty$ ilişkisinden dolayı bileşke sistemin entropisi de alt sistemlerin entropilerinin toplamından küçük olmalı, yani

$$S_U(A \cup B) \leq S_U(A) + S_U(B)$$

olmalıdır. Oysa $b = 0$ ve $a > 0$ şartları dikkate alındığında evrensel entropinin formel grup işleminin kapalı formu bu şartı sağlamamaktadır:

$$S(A \cup B) \coloneqq \varphi\big(S(A), S(B)\big) = S(A) + S(B) + aS(A)S(B) > S(A) + S(B)$$

Bu sorun, genelleştirilmiş entropilerin temeline ilişkin bir itiraz olması bakımından önemlidir.

İkinci bir çelişik durum ise eskort ortalama diye bilinen ve Tsallis entropisinin genelleştirilmiş entropi olarak kabul edildiği sistemlerde ortalama enerji hesabı için kullanılan,

$$U_q = \sum_{i=1}^{W} p_i^q E_i \Big/ \sum_{i=1}^{W} p_i^q \tag{4.6}$$

eşitliğidir. Tsallis ve Renyi entropileri için denklem (3.4)'teki varyasyon fonksiyonu yazılırken bu eskort ortalama kullanılır. Herhangi bir fiziksel niceliğin ortalama değerini hesaplamak için bu eskort ortalama kullanıldığında söz konusu fiziksel niceliğin kararlılık göstermeyeceği gösterilmiştir [79]. Bunun dışında ontolojik açıdan bakıldığında, eskort ortalamada kullanılan p_i-olasılıklarının, E_i-enerji seviyelerinin ölçümü olarak değerlendirilemezler [80, 81, 82]. Ayrıca bir entropinin Lesche sürekliliğini sağlayıp sağlamadığı test edilmek istendiğinde, Lesche sürekliliğinin tanımı gereği olasılıkların ölçüm olarak tanımlanması gerekir. Dolaysıyla bu şartlar sağlanmak üzere,

$$P_i = \frac{p_i^q}{\sum_{i=1}^{W} p_i^q} \; (\Longrightarrow) \; U_q = \sum_{i=1}^{W} P_i E_i \;\text{ ve }\; S_q = \frac{1 - \left(\sum_{i=1}^{W} P_i^{1/q}\right)^{-q}}{q-1}$$

gibi bir düzenleme yapılmalıdır. Tsallis entropisinin bu yeni şekli dikkate alındığında artık Lesche sürekliliğini sağlayamamaktadır [80].

Bu çelişkilere ek olarak, denge durumunda mikrodurumların olasılıklarını hesaplamak için kullanılan varyasyon fonksiyonunun (mevcut) genelleştirilmiş entropiler için geçerli olmadığı gösterilmiş [83] ve eskort ortalama kullanıldığında genelleştirilmiş entropiler, garip bir şekilde Boltzmann-Gibbs entropisine eşit ya da onun bir katı çıkmaktadırlar [84].

Bütün bu bahsedilen anormalliklerin (ya da çelişik durumlar) tâli değil, temele ilişkin problemler olduğu hatırda tutulmalıdır. Giriş kısmında, entropinin, tarihsel seyri içinde daima fiziksel gerekliliklerle ve gerçekliklerle iç içe giden bir gelişim gösterdiğini ve nihayetinde Boltzmann-Gibbs entropisinin, sistemlerin fiziksel analizleri sonucu matematiksel bir ifade olarak belirdiğini söylemek mümkündür. Oysa önerilen genelleştirilmiş entropiler böylesi bir faaliyetin seyri içinde önerilmiş değil; âdeta bu seyrin tersi bir süreçle önerilmişlerdir. Fakat her matematiksel ifadenin, mutlaka bir fiziksel dayanağı olmak zorunda değildir [85].

Formel grup yapısı ile entropinin özellikleri arasında yadsınamaz bir benzerlik vardır. Bu benzerlikten yola çıkarak genelletirilmiş entropilere teorik bir altyapı verilebilir. Burada temel sorun olarak, formel grup işleminin kapalı biçiminin nasıl olacağı problemi durmaktadır. Eğer tez içinde bahsi geçen gerekli fiziksel şartları sağlayan bir formel grup işlemi tanımlanabilirse, bu formel grup işlemine karşılık gelecek entropi ifadesi bulunabilir. Kuşkusuz bu formel grup işleminin tanımlanmasında matematiksel bir analizin değil fiziksel bir yorumun merkeze alınması gerekir.

Ayrıca sistemde sıcaklık dalgalanması kabul edildiğinde yine Tsallis entropisine benzer bir entropi elde edilebilmektedir. Bu yöntemde, fiziksel bir yorumdan yola çıkılarak (sıcaklık dalgalanmalarının varlığı) yine genelleştirilmiş bir entropiye ulaşıldığından, uygulanabilir yöntemlerden biri olarak görülebilir.

KAYNAKLAR

[1] **Poincaré, H.,** Bilim ve Metot, İstanbul: M.E.B, 1951, sf. 4-5.

[2] **Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H.,** Thermodynamics and Statistical Mechanics, New York, Springer-Verlag, 1995.

[3] **Özemre, A. Y.,** Isı Teorisi, İstanbul, Üniversitesi Yayınları, 1977.

[4] **Callen, H. G.,** Thermodynamics and Introduction to Thermostatistics, New York, JOHN WİLEY & SONS, 1987.

[5] **Huang, K.,** Introduction to Statistical Pysics, New York, Taylor & Francis Inc.,2002.

[6] **Darrigol, O.,** (2003).The Origin of the Entropy Concept, Seminaire Poincaré 2,Paris

[7] **Benguigui, L.,** (2012). The different Paths to Entropy, ArXiv:1209.2268 [physics.hist-ph].

[8] **Çengel, Y. A., Boles, M. A.,** Termodimanik; Mühendislik Yaklaşımıyla, İzmir, Güven yayınları, 2012.

[9] **K. Huang,** Statistical Mechanic, John Wiley & Sons, 1987.

[10] **Camacho, F., Lugo, N. U., Martinez, H. C.,** (2015). The Concept of Entropy, from its origins to teachers, Rev. Mex. de Fis.E, 61, 69-80.

[11] **Planck, M.,** Treatise on Thermodynamics, Dover , 1926.

[12] **Prestipino, S., Giaquinta, V.,** (2003). The Concavity of Entropy and Extremum Principles in Thermodynamics, ArXiv:cond-mat\0306728v1 [cond-mat.stat-mech].

[13] **Shannon**, **C. E.,** (1948). A Mathematical Theory of Communication, The Bell System Technical Journal, 27, sf. 379-423.

[14] **Lesche, B.,** (1982). Instabilities of Rényi Entropies, Journel of Statistical Physics, 27/2, sf. 419-422.

[15] **Bento, E. P., Visvanathan, G. M., da Luz, M.G.E., Silva, R.,** (2015). Third Law of Thermodynamics as a Key Test of Generalized Entropies, Phys. Rev. E, 91.

[16] **Tsallis, C.,** Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics, Approaching a Complex World, New York, Springer, 2009.

[17] **Gell-Mann, M., Tsallis, C.,** Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications, New York, Oxford University Press, 2004.

[18] **Rényi, A.,** (1965). On the Foundations of Information Theory, Review of the International Statistical Institute, 33/1.

[19] **Tsallis, C.,** (1988). Possible Generalizaiton of Boltzmann-Gibbs Statistics, Journal of Statistical Physics, 52/2, sf. 479-487.

[20] **Latora, V., Rapisarda, A., Ruffo, S.,** (1999). Superdifussion and out of Equilibrium Chaotic Dynamics with Many Degrees of Freedom, Phys. Rev. Lett., 83, sf. 2104-2107.

[21] **Beck, C.,** (2009). Generalised Information and Entropy Measures in Physics, J. Contemporary Physics, 50/4, sf. 495-510.

[22] **Abe, S., Thurner, S.,** (2005). Anomalous Difussion in View of Einstein's 1905 Theory of Brownian Motion, Physica A, 356, sf. 403-407.

[23] **Das, S. K., Sengupta, S.,** (2003). Extensivity of Entropy, Indian Journal of Pure and Applied Physics,41, sf. 941-945.

[24] **Abe, S.,** (2000). Axioms and Uniqueness Theorem for Tsallis entropy, Phys. Lett. A,271, sf. 74-79.

[25] **Abe, S.,** (2002). Stability of Tsallis Entropy and Instabilities of Rényi and Normalized Tsallis Entropies: A Basis for q-enponential Distributions, Phys. Rev. E, 66.

[26] **Selinger**, **J.,** Introduction to the Theory of Soft Matter: From Ideal Gases to Liquid Crystals, New york, Springer, 2016, sf. 7-24.

[27] **Mariz, A. M.,** (1992). On the Irreversible Nature of the Tsallis and Rényi Entropies, Phys. Lett. A, 165, sf. 409-411.

[28] **Lake, D. E.,** (2006). Rényi Entropy Measures of Heart Rate Gaussianity, IEEE Transactions on Biomedical Engineering , 55/1, sf. 21-27.

[29] **Büyükkılıç, F., Demirhan, D.,** (1993). A Fractal Approach to Entropy and Distribution Functions, Phys. Lett. A, 181/1, sf. 24-28.

[30] **Beck, C., Schlögl, F.,** Thermodynamics of Chaotic Systems: an Introduction, Great Britain, Cambridge University Press, 1993.

[31] **Baez, B.,** (2011). Rényi Entropy and Free Energy, ArXiv:1102.2098[quant-ph].

[32] **Abul-Magd, A. Y.,** (2007). Nonextensive Random Matrix Theory Based on Kaniadakis Entropy, Phys. Lett. A, 361/6, sf. 450-454.

[33] **Kaniadakis, G.,** (2001). Non-linear Kinetics Underlying Generalized Statistics, Physica A, 296, sf. 405-425.

[34] **Kaniadakis, G.,** (2002). Statistical Mechanics in Context of Special Relativity, Phys. Rev. E,66.

[35] **Abe, S., Kaniadakis, G., Scarfone, A. M.,** (2004). Stabilities of Generalized Entropies, J. Phys. A : Mat. and Gen.,37, sf. 10513–10519.

[36] **Kaniadakis, G., Scarfone, A. M.,** (2004). Lesche Stability of k-Entropy, ArXiv.cond-mat/0310728v2.

[37] **Sharma, B. D., Taneja**, **I. J.,** (1975). Entropy of Type (alfa,beta) and Other Generalized Measures in Information Theory, Metrika, 22/1, sf 205-215.

[38] **Aktürk, E., Bağcı, G. B., Sever**, **R.,** (2007). Is Sharma-Mittal Entropy Really a Step Beyond Tsallis and R´enyi Entropies?, ArXiv:cond-mat/0703277 [cond-mat.stat-mech].

[39] **Canturk, B., Oikonomou, T., Bagci, G. B.,** (gönderildi). The Parameter Space and the Third Law of Thermodynamics for the Borges-Roditi, Abe and Sharma-Mittal Entropies, 2017.

[40] **Borges, E. P., Roditi, I.,** (1998). A Family of Nonextensive Entropies, Phys. Lett. A, 246, sf. 399-402.

[41] **Hanel, R., Thurner, S.,** (2011). A Comprehensive Classification of Complex Statistical Systems and an Ab-initio Derivation of Their Entropy and Distribution Functions, EPL, 93.

[42] **Abe, S.,** (1997). A Note on the q-deformation Theoretic Aspect of the Generalized Entropies in Nonextensive Physics, Phys. Lett. A, 224, sf. 326-330.

[43] **Tang, K.T.,** Mathematical Methods for Engineers and Scientists 2, New York, Springer-Verlag, 2006.

[44] **Bochner, S.,** (1946). Formel Lie Groups, Annal of Mathematics, Second Series, 47/2 sf. 192-201.

[45] **Tempesta, P.,** (2016). Beyond the Shannon-Khinchin Formulation: The Composability Axiom and the Universal-Group Entropy, Ann. Phys. *365*, sf. 180-197.

[46] **Curado, E. M. F., Tempesta, P., Tsallis, C.,** (2016). A New Entropy Based on a Group-Theoritical Structure, Ann. Phys. *366*, sf. 22-31.

[47] **Hazewinkel, M.,** Formal Groups and Applications, New York, Academic Press, 1978.

[48] **Tsallis, C.,** (2009). Nonadditive Entropy and Nonextensife Statistical Mechanics-An Overview after 20 years, Braz. J. Phys., 39/2A, sf. 307-354.

[49] **Tsallis, C.,** (2015). Conceptual Inadequacy of the Shore and Johnson Axioms for Wide Classes of Complex Systems, Entropy, 17, sf. 1-9.

[50] **Abe, S.,** (2008). Instability of q-Averages in Nonextensive Statistical Mechanics, EPL., 84.

[51] **Canturk, B., Oikonomou, T., Bağcı, G. B.,** (2017). Group Theory, Entropy and Third Law of Thermodynamics, Ann. Phys.,77, sf. 62-70.

[52] **Sparavigna, A. C.,** (2015). Relations Between Tsallis and Kaniadakis Entropic Measures and Rigorous Discussion of Conditional Kaniadakis Entropy, International Journal of Sciences,4, sf. 47-50.

[53] **Kaniadakis, G., Scarfone**, **A. M.,** (2002). A New One-parameter Deformation of the Exponential Function, Physica A,305, sf. 69-75.

[54] **Kalogeropoulos, N.,** (2013). Tsallis Entropy Composition and Heisenberg Group, ArXiv:1301.0069v1 [math-ph].

[55] **Kaniadakis, G., Quarati, P., Scarfone, A. M.,** (2002). Kinetic Foundation of Non-conventional Statistic, Physica A,305, sf. 76-83.

[56] **Tsallis, C., Bukman, D. J.,** (1996). Anomalous Difussion in the Presence of Externel Forces: Exact Time Dependent Solutions and Their Thermostatistical Basis, Phys. Rev. E, 54, sf. 2197-2200.

[57] **Adib, A. B., Moreira, A. A., Andrade Jr., J. S., Almeida**, **M.,** (2003). Tsallis Termostatistics for Finite Systems: a Hamiltonien Approach, Physica A, 322, sf. 276-284.

[58] **Gardiner, C. W.,** Handbook of Stochastic Methods, New York, Springer-Verlag, 1985.

[59] **Dong, H., Wen, B., Melnik, R.,** (2014). Relative Importance of Grain Boundries and Size Effects in Thermal Conductivity of Nanocyrstalline Materials, Scientific Reports,4, 2014.

[60] **Plastino, A.R., Plastino, A.,** (1994). Information Theory, Approximate Time Dependent Solutions of Boltzmann's Equation and Tsallis' Entropy, Phys. Lett. A, 193, sf. 251-258.

[61] **Plastino, A.R., Plastino, A.,** (1995). Non-extensive Statistical Mechanics and Generalized Fokker-Planck Equation, Physica A, 222, sf. 347-354.

[62] **Almeida, M. P.,** (2001). Generalized Entropies from First Principles, Physica A, 300, sf. 424-432.

[63] **Tsallis, C., Mendes, R. S., Plastino, A.R. ,** (1998). The Role of Constraints within Generalized Nonextensive Statistics, Physica A, 261, sf. 534-554.

[64] **Abe, S.,** (1999). Thermodynamic Limit of a Classical Gas in Nonextensive Statistical Mechanics: Negative Specific Heat and Polytropism, Phys. Lett. A, 263, sf. 424-429.

[65] **Abe, S., Martinez, S., Pennini, F., Plastino, A.,** (2001). Nonextensive Termodynamic Relations, Phys. Lett. A, 281, sf. 126-130.

[66] **Lutz, E.,** (2003). Anomalous Difusion and Tsallis Statistics in an Optical Lattice, Phys. Rev. A, 67.

[67] **Douglas, P., Bergamini, S., Renzoni, F.,** (2006). Tunable Tsallis Distribution in Dissipative Optical Lattices, Phys. Rev. Lett., 96.

[68] **Pennini, F., Plastino, A., Plastino, A. R.,** (1995). Tsallis entropy and quantal distribution functions, Phys. Lett. A, 208, sf. 309-314.

[69] **Büyükkılıç, F., Demirhan, D., Güleç, A.,** (1995). A Statistical Mechanical Approach to Generalized Statistics of Quantum and Classical Gases, Phys. Lett. A, 197, sf. 209-220.

[70] **Nobre, F. D., Rego-Monteiro, M. A., Tsallis, C.,** (2017). Nonlinear q-generalizations of Quantum Equations: Homogeneous and Nonhomogeneous Cases-An Overview, Entropy,19/1.

[71] **Nobre, F. D., Rego-Monteiro, M. A., Tsallis, C.,** (2011). Nonlinear Relativistic and Quantum Equations with a Common Type of Solutions, Phys. Rev. Lett. ,106.

[72] **Plastino, A. R., Souza, A. M. C., Nobre, F. D., Tsallis, C.,** (2014). Stationary and Uniformly Accelerated States in Nonlinear Quantum Mechanics, Phys. Rev. *A*, 90.

[73] **Yin, C., Du, J.,** (2014). The Power-law Reaction Rate Coefficient for an Elementary Bimolecular Rection, Physica A, no. 395, sf. 416-424.

[74] **de Oliveira, Z. B.B., Silva, R.,** (2016). Relativistic Kinetic Theory and Non-qaussian Statistic, Ann. Phys.,375, sf. 227-232.

[75] **Kim, J. S.,** (2016). Tsallis Entropy and General Polygamy of Multiparty Quantum Entanglement in Arbitrary Dimensions, Phys. Rev. A,94.

[76] **Luo, Y., Tian, T., Shao, Lian-He., Li, Y.** (2016). General Monogamy of Tsallis q-entropy Entanglement in Multiqubit Systems, Phys. Rev. A, 93.

[77] **Ourabah, K., Hamici-Bendimerad, A. H., Tribeche, M.,** (2015). Quantum Entanglement and Kaniadakis Entropy, Phys. Scr., 90.

[78] **Potiguar, F.Q., Costa, U.M.S.,** (2004). Termodynamical Relations for Systems in Contact with Finite Heat Baths, Physica A, 344, sf. 614-618.

[79] **Abe, S.,** (2008). Instability of q-averages in Nonextensive Statistical Mechanics, EPL, 84.

[80] **Lutsko, J.F., Boon, J.P., Grosfils, P.,** (2009). Is the Tsallis Entropy Stable?, EPL, 86.

[81] **Kolmogorov, A. N.,** Foundation of the Theory of Probability, New York, Chelsea Pub. Comp., 1956, sf. 2-8.

[82] **Athreya, K. B., Lahiri, S. N.,** Measure Theory and Probability Theory, New York, Springer, 2006, sf. 9-30.

[83] **Oikonomou, T., Bagci, G. B.,** (2017). Misusing the Entropy Maximization in the Jungle of the Generalized Entropies, Phys. Lett. *A*, 381, sf. 207-211.

[84] **Oikonomou, T., Bagci, G. B.,** (2017) Impossible Mission: Entropy Maximization with Escort Averages, ArXiv:1704.04721[cond-mat.stat-mech].

[85] **Koç, Y.,** Doğanın Kuvantum Mekaniksel Betimlemesi ve Ölçme Sorunu, İstanbul, İstanbul Üniversitesi Yay., 1983, sf. 38-55.

[86] **Feller, W.,** An Introduction to Probability Theory and Its Application Vol 1., New York, John Wiley & Sons, Inc., 1968.

[87] **de Oliveira**, **C. R., Verlang**, **T.,** (2007). Ergodic Hypothesis in Classical Statistical Mechanics, Revista Brasileira de Ensino de Fisica,29/2, sf. 189-201.

[88] **Yamano**, **T.,** (2004). Does the Lesche Condition for Stability Validate Generalized Entropies?, Physics Letter A, 329, sf. 268-276.

[89] **Wybourne**, **B. G.,** Classical Groups for Physicists, New York, John Wiley & Sons, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Bilal Cantürk
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 03.03.1992- Muş
E-posta : bilalcntrk@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2014, Hacettepe Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Fizik Mühendisliği

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2015-2017	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Burslu Y. Lisans Öğrencisi

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **B. Canturk, T. Oikonomou, G. B. Bagci,** (2017). Group Theory, Entropy and Third Law of Thermodynamics, Ann. Phys.,77, sf. 62-70