TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DERECELİ MANTIKTA TÜREVLER VE BAZI UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Maksude KELEŞ

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer AKIN

Ağustos 2018

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

....
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

....
Prof. Dr. Oktay DUMAN
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 152111003 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Maksude KELEŞ**'in ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"DERECELİ MANTIKTA TÜREVLER VE BAZI UYGULAMALARI"** başlıklı tezi **10.08.2018** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı:	**Prof. Dr. Ömer AKIN** TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri:	**Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU (Başkan)** TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....
	Prof. Dr. Şahin EMRAH Ankara Üniversitesi	....

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Maksude KELEŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DERECELİ MANTIKTA TÜREVLER VE BAZI UYGULAMALARI

Maksude KELEŞ

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ömer AKIN

Tarih: Ağustos 2018

Bu tezde, dereceli küme kavramı ve temel özellikleri verilmiş ardından dereceli sayı ve dereceli sayılar arasındaki önemli aritmetik işlemler incelenmiştir. Ayrıca dereceli diferensiyel denklemler için temel araç olan dereceli mantıkta türev kavramları incelenmiş ve uygulamalarına yer verilmiştir. Uygulamalar bölümünde ise nümerik simülasyonlar kullanılarak doğum ve ölüm oranı sabit SIR epidemik modelinin dereceli mantık yaklaşımıyla analizi yapılmıştır. Son olarak ekonomideki temel büyüme modellerinden Solow büyüme modeli için dereceli çözümler elde edilerek ekonomi analizi açısından önemi gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dereceli sayı, Güçlü genelleştirilmiş türev, Genelleştirilmiş Hukuhara türevi, Solow büyüme modeli.

ABSTRACT

Master of Science

DERIVATIVES IN FUZZY LOGIC AND SOME APPLICATIONS

Maksude KELEŞ

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ömer AKIN

Date: August 2018

In this thesis, fuzzy number and essential arithmetical operations between fuzzy numbers are examined after introducing fuzzy set and its primary properties. Also, differentiation concepts in fuzzy logic, which are the basic instruments for fuzzy differential equations, are examined and their applications are shown. Numerical simulations are used to analyse constant birth-death rate SIR epidemic model with fuzzy logic approach in the applications chapter. Lastly, the significance of fuzzy logic for economic analysis is demonstrated by obtaining fuzzy solutions for the Solow growth model which is one of the main growth models in economy.

Keywords: Fuzzy number, Strongly generalized derivative, Generalized Hukuhara derivative, Solow growth model.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim sırasında beni yönlendiren tez danışmanım Prof. Dr. Ömer AKIN 'a, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve asistan arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca sağladığı burs imkanından dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi'ne teşekkür ederim. Son olarak da maddi ve manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyerek beni teşvik eden sevgili aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

ÇİZELGE LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

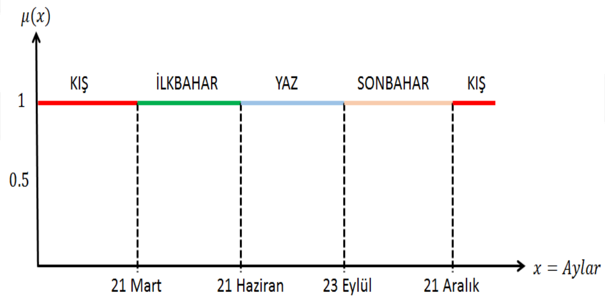
Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mu_A(x)$	$\bar{A}$ kümesinin üyelik fonksiyonu
$A(\alpha)$	$\bar{A}$ kümesinin $\alpha-$kesit kümesi
$\ominus_H$	Hukuhara farkı
$\ominus_{gH}$	Genelleştirilmiş Hukuhara farkı
$K_C(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$ in tüm boş olmayan, kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesi
$\mathscr{F}(X)$	Bir X kümesi üzerindeki dereceli kümelerin ailesi
$\mathscr{F}(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ üzerindeki dereceli kümelerin ailesi
$\mathscr{F}_N(\mathbb{R})$	$\mathbb{R}$ üzerindeki dereceli sayıların ailesi
$d_H(.,.)$	Hausdorff metriği
$d_\infty(.,.)$	Dereceli sayılar için Hausdorff metriği

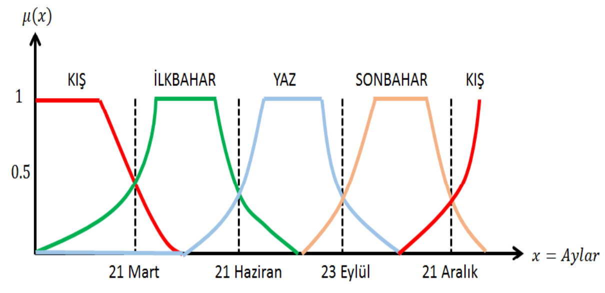
1. GİRİŞ

Günlük hayatta kullandığımız birçok terimde belirsizlikler mevcuttur. Bir nesneyi tanımlarken ya da bir olayı açıklarken kullanılan nicel ve nitel ifadelerde belirsizlik kaçınılmazdır. Dereceli küme teorisi, bu tür belirsizliklerin matematiksel olarak açıklanmasını ve bir fonksiyon yardımıyla ifade edilmesini öngörmüştür.

Mevsimlerin ayrıştırılmasında belirli tarihler kullanılır. Fakat 21 Haziran ilkbahar ile yaz mevsiminin geçiş tarihi olmasına rağmen 20 Haziran ile 22 Haziran tarihleri arasında keskin bir fark gözlemlenemez. Benzer olarak mayıs ayı ile haziran ayının mevsim özelliklerini aynı derecede göstermediğini gözlemleriz. Bu örnektede açıkça görüleceği üzere klasik küme teorisi bu gibi durumlarda gerçeği yansıtmakta yetersiz kalmaktadır.



Şekil 1.1: Aylar ve ait oldukları mevsimlerin klasik küme gösterimi



Şekil 1.2: Aylar ve ait oldukları mevsimlerin dereceli küme gösterimi

Mühendislik ve doğa bilimlerinde, sağlık bilimlerinde, sosyal ve beşeri bilimlerde ortaya

çıkan problemleri çözmek ve bu problemler hakkında analizler yapabilmek için bir matematiksel modele ihtiyaç duyulur. Bu modellerin ifade edilmesinde ise fonksiyonlar ve onların türevlerine başvurulur.
Diferensiyel denklemlerde, fark denklemlerinde veya kısmi türevli denklemlerde modellemeler yapılırken; başlangıç değerlerinde, verilerin toplanmasında veya katsayıların belirlenmesinde ölçüm veya gözlem hataları yapılabilmekte ve bu sebeple bilimsel olaylar tam olarak ifade edilememektedir. Bu tür problemlerin gözlemlendiği durumlarda modellemelerin dereceli diferensiyel denklemler ile verilmesi daha doğru analizlere ulaşmamıza yardımcı olmaktadır.
Bu tezde dereceli difarensiyel denklemler için temel araç olan dereceli mantıktaki türev kavramları incelenmiş ve diğer bilimlere uygulamalarıyla analiz edilmiştir.
İlk olarak dereceli küme teorisi için literatür taraması yapılmış ve dereceli sayılardaki temel kavramlar örnekleriyle incelenmiştir. Burada gerekli olan temel analiz kavramları ise Ekler bölümünde verilmiştir. Ardından dereceli sayı değerli fonksiyonların türevlenebilmeleri için geliştirilen türev çeşitleri incelenmiştir. İlk olarak Puri ve Ralescu [22] tarafından tanıtılan dereceli sayı değerli fonksiyonların Hukahara türevi açıklanmıştır. Sonrasında Bede ve Gal [7] tarafından geliştirilen güçlü genelleştirilmiş türevlenebilme, zayıf genelleştirilmiş türevlenebilme ve son dönemlerde Bede ve Stefanini [9, 25] tarafından literatüre kazandırılan genelleştirilmiş Hukuhara türevi ve genelleştirilmiş türev kavramları incelenmiş ve özellikleri verilmiştir.
Uygulamalar bölümünde deterministik kabul edilen bir sayının dereceli sayı olarak dönüşümü yapılmasıyla elde edilen sonuçların çözümler üzerindeki etkileri analiz edilmiştir. İlk olarak doğum ve ölüm oranı sabit SIR epidemik modelinin başlangıç koşulları dereceli sayı iken analizi, teorik sonuçları desteklemek üzere MATLAB programı kullanılarak yapılmıştır. Ayrıca Solow büyüme modelinin dereceli mantık teorisiyle analizi Zadeh'in genişleme prensibi yardımıyla yapılmış ve ekonomi politikalarının daha etkili ve gerçeğe yakın olmasını sağlayacak bir analiz elde edilmiştir.

2. DERECELİ MANTIKTA TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde dereceli mantığın temel taşları olan bazı kavramlar verilerek örnekleri ile açıklanacaktır. İlk olarak bir kümenin(cümlenin) karakteristik fonksiyonu kavramının tanımını verelim:

Tanım 2.0.1. *X bir evrensel küme ve $A \subseteq X$ olmak üzere,*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

fonksiyonuna A kümesinin X üzerindeki karakteristik fonksiyonu denir ve χ_A sembolüyle gösterilir [6] .

Klasik (crisp) bir kümenin elemanlarını kümeye ait olup olmaması açısından inceleriz. Yani "1" değeri kümeye üye olmayı "0" değeri ise kümeye üye olmamayı belirtirken başka herhangi bir olasılığı içermez. Dereceli mantık teorisi ise getirdiği yaklaşım ile klasik küme teorisinde kullanılan üyelik kavramını kısmi üyelik kavramını da ekleyerek genelleştirir. Yani öğelerin dereceli kümeye aidiyeti $[0,1]$ aralığındaki değerlere sahip olabilir.
Dereceli kümelerde klasik kümelerdeki karakteristik fonksiyon yerini üyelik fonksiyonuna bırakır.

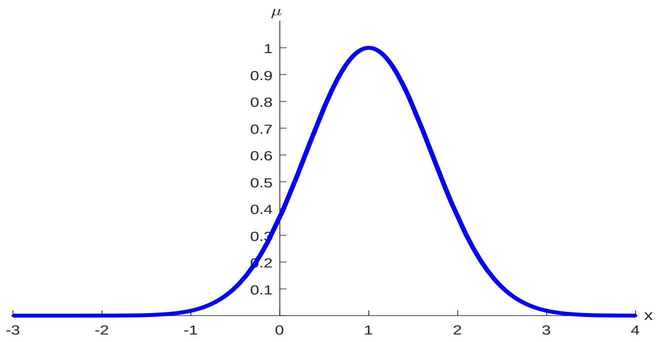
Tanım 2.0.2. *Bir $\bar{A}$ dereceli kümesinin üyelik fonksiyonu*

$$\mu_A(x) : X \to [0,1]$$

ile tanımlanır [27].

$\bar{A}$ dereceli kümesi $\bar{A} = \{(x, \mu_A(x)) \mid \mu_A(x) : X \to [0,1]\}$ biçiminde karakterize edilmiştir. Bir X kümesi üzerindeki dereceli kümelerin ailesi $\mathscr{F}(X)$ ile gösterilmektedir.

Örnek 2.0.1. Grafiği aşağıda verilen $\bar{A}$ dereceli kümesine ait $\mu_A(x) = \exp(-(x-1)^2)$ $x \in \mathbb{R}$ üyelik fonksiyonu için $\mu_A(0) \cong 0.368$, $\mu_A(1) = 1$ ve $\mu_A(3) \cong 0.018$ olarak bulunur.



Şekil 2.1: $\bar{A}$ kümesinin üyelik fonksiyonunun grafiği

2.1 Dereceli Kümelerin Temel Özellikleri

Bu bölümde, tutarlı bir bütünlük sağlayabilme amacı ile ilk olarak dereceli sayı kavramı için gerekli olan destek kümesi, α-kesit kümesi, dereceli konveks küme kavramlarını hatırlatacağız.

Tanım 2.1.1. *Bir $\bar{A} \in \mathscr{F}(X)$ kümesi verilsin. Bu durumda*

$$dest(\bar{A}) = \{x \in X : \ \mu_A(x) > 0\}$$

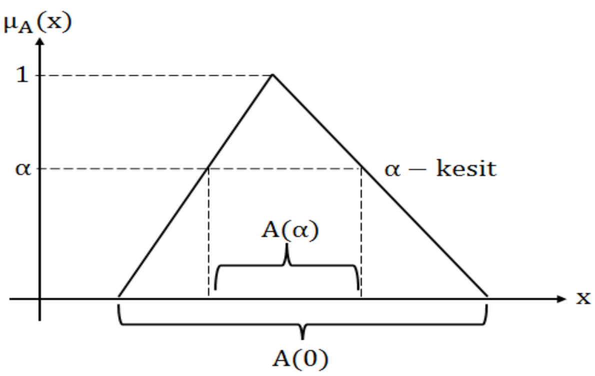
ile tanımlanan fonksiyona $\bar{A}$ ın destek kümesi denir. [17] .

Tanım 2.1.2. *Bir $\bar{A} \in \mathscr{F}(X)$ kümesinin α-kesit kümesi $A(\alpha)$ ile gösterilir ve*

$$A(\alpha) = \begin{cases} \{x \in X : \ \mu_A(x) \geq \alpha\} & , \ \alpha \in (0,1] \\ kap\{x \in X : \ \mu_A(x) > 0\} & , \ \alpha = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [6]. Burada $kap(Z)$, $Z \subseteq X$ kümesinin kapanışını ifade etmektedir.

Bu tanıma göre $\alpha_1 \leq \alpha_2$ iken $A(\alpha_2) \subseteq A(\alpha_1)$ olacağı açıktır.



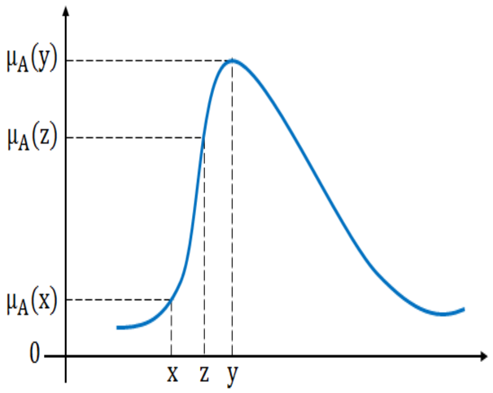
Şekil 2.2: $\bar{A}$ dereceli sayısının α-kesit kümesi

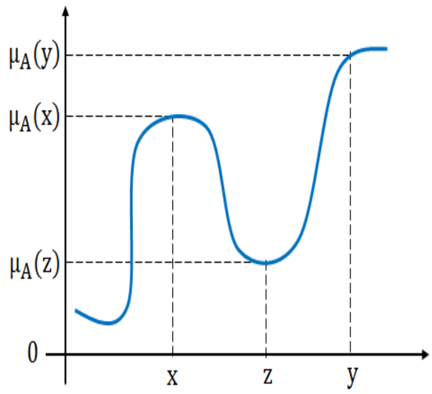
Tanım 2.1.3. *$\bar{A}$, X vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Her $x,y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için*

$$\mu_A(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $\bar{A}$ kümesine dereceli konveks küme denir [17].

Bu durumda dereceli konveks küme, üyelik fonksiyonunun quasi-konkav olmasını gerektirir. Bir başka ifade ile tüm α-kesit kümeleri konveks ise bu α-kesit kümelerinin dereceli kümesi konvekstir.





Şekil 2.3: Konveks ve konveks olmayan dereceli küme

Tanım 2.1.4. *$\bar{A} \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$ kümesi verilsin. Bu takdirde*

1) $A(0)$ kümesi sınırlıdır.

2) $\bar{A}$ dereceli konveks kümedir.

3) $\bar{A}$ dereceli kümesi normaldir. Yani $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ için $\mu_A(x_0) = 1$ dir.

4) $\mu_A(x)$ üyelik fonksiyonu üst yarı süreklidir. Yani $\forall\ \alpha \in [0,1]$ için $\{x \in \mathbb{R} : \mu_A(x) \geq \alpha\}$ kümesi kapalıdır.

*şartları sağlanıyor ise $\bar{A}$ kümesine **dereceli sayı** adı verilir [11].*

Burada $\mathbb{R}$ üzerindeki dereceli sayıların ailesi $\mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ile gösterilmektedir.
Not: $\bar{A} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ olduğundan $\alpha \in [0,1]$ için α-kesit kümeleri reel eksen üzerinde kapalı aralıklar oluşturur. Bu aralıklar $A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$ ile gösterilecektir.
Dereceli kümeler teorisinde L-R dereceli sayıları önemli kabul edilir. Literatürde dereceli sayıların kullanımında en çok karşılaşılan formlar L-R dereceli sayıları ile bunların özel durumları olan üçgensel ve yamuk dereceli sayılarıdır.

Tanım 2.1.5. *$\bar{A} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ dereceli sayısı için, sürekli ve artan $L : [0,1] \to [0,1]$ ve $R : [0,1] \to [0,1]$ fonksiyonları $L(0) = R(0) = 0$ ve $L(1) = R(1) = 1$ şartlarını sağlasın. $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ olacak şekilde reel sayılar olmak üzere $\bar{A}$ dereceli sayısının üyelik fonksiyonu*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , x < a_1 \\ L\left(\dfrac{x-a_1}{a_2-a_1}\right) & , a_1 \leq x < a_2 \\ 1 & , a_2 \leq x < a_3 \\ R\left(\dfrac{a_4-x}{a_4-a_3}\right) & , a_3 \leq x < a_4 \\ 0 & , a_4 \leq x \end{cases}$$

şeklinde ise $\bar{A}$ sayısına L-R dereceli sayısı denir ve $\bar{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)_{L,R}$ ile gösterilir [6].

L-R dereceli sayısını α-kesit kümesi ile ifade edelim. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı dereceli sayıların α-kesit kümelerinin reel eksen üzerinde kapalı aralıklar olduğu bilinmektedir. Bu aralığın uç noktalarını bulmak için aşağıdaki yöntem izlenir:

$$L\left(\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\right) = \alpha \Rightarrow x = a_1 + L^{-1}(\alpha)(a_2-a_1)$$
$$R\left(\frac{a_4-x}{a_4-a_3}\right) = \alpha \Rightarrow x = a_4 - R^{-1}(\alpha)(a_4-a_3)$$

buradan α-kesit kümesi,

$$A(\alpha) = [a_1 + L^{-1}(\alpha)(a_2-a_1)\ ,\ a_4 - R^{-1}(\alpha)(a_4-a_3)]$$

olarak bulunur.

Tanım 2.1.6. *$\bar{A} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ dereceli sayısının üyelik fonksiyonu, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$ olacak şekilde reel sayılar olmak üzere*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , x < a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & , a_1 \leq x < a_2 \\ 1 & , a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3} & , a_3 < x \leq a_4 \\ 0 & , a_4 < x \end{cases}$$

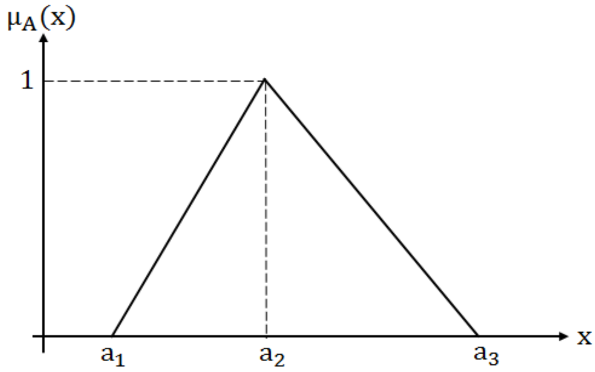
şeklinde ise $\bar{A}$ sayısına yamuk dereceli sayı denir ve $\bar{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ile gösterilir[6].

Verilen yamuk dereceli sayının α-kesit kümesi ise $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere, $A(\alpha) = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1)\ ,\ a_4 - \alpha(a_4 - a_3)]$ şeklindedir. Dikkat edilirse yamuk dereceli sayı L-R dereceli sayının özel bir halidir. Burada L ve R fonksiyonları birim fonksiyon olarak seçilmiştir.

Tanım 2.1.7. *$\bar{A} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ dereceli sayısının üyelik fonksiyonu, $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ olacak şekilde reel sayılar olmak üzere,*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & , \ a_1 \leq x < a_2 \\ \dfrac{a_3 - x}{a_3 - a_2} & , \ a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & , \ a_3 < x \end{cases}$$

şeklinde ise $\bar{A}$ sayısına üçgensel dereceli sayı denir ve $\bar{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ile gösterilir [6].



Şekil 2.4: $\bar{A} = (a_1, a_2, a_3)$ üçgensel dereceli sayısı

Üçgensel dereceli sayının α-kesit kümesi ile ifadesi ise $\alpha \in [0,1]$ olmak üzere, $A(\alpha) = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1)\ ,\ a_3 - \alpha(a_3 - a_2)]$ şeklindedir. $\bar{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ sayısında $a_2 = a_3$ olduğu takdirde, sayının bir üçgensel sayıya denk olduğu görülmektedir.

Tanım 2.1.8. *$\bar{A} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ dereceli sayısının üyelik fonksiyonu, $a > 0$ olmak üzere*

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & , \ x < x_1 - a\sigma_l \\ exp\left(-\dfrac{(x - x_1)^2}{2\sigma_l^2}\right) & , \ x_1 - a\sigma_l \leq x < x_1 \\ exp\left(-\dfrac{(x_1 - x)^2}{2\sigma_r^2}\right) & , \ x_1 \leq x < x_1 + a\sigma_r \\ 0 & , \ x_1 + a\sigma_r \leq x \end{cases}$$

şeklinde ise $\bar{A}$ sayısına Gauss dereceli sayı denir [6]. Bu fonksiyonda x_1 fonksiyon merkezini, a tolerans değerini, σ_l ve σ_r ise sırasıyla sol ve sağ genişliğini ifade eder.

Gauss dereceli sayının α-kesit kümesi ile ifadesi ise,

$$A(\alpha) = \begin{cases} \left[x_1 - \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{2\sigma_l^2}}\right)} \ , \ x_1 + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{2\sigma_r^2}}\right)} \right] & , \ exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \leq \alpha \leq 1 \\ [x_1 - a\sigma_l \ , \ x_1 + a\sigma_r] & , \ 0 < \alpha < exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \end{cases}$$

şeklindedir.

Belirtmek gerekir ki $a \to \infty$ iken bu üyelik fonksiyonu ile tanımlı dereceli küme bir dereceli sayı oluşturmaz. Bunun sebebi ise $a \to \infty$ iken destek fonksiyonunun kompakt olmamasıdır. Bu durumda üyelik fonksiyonunun tanım kümesini $\mathbb{R}$ kümesinin kompakt bir alt aralığına kısıtlanması yardımıyla dereceli sayıya dönüştürülebilir.

Bu dereceli kümelere örnek olarak, aşağıdaki Gauss üyelik fonksiyonunu ele alırsak,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} exp\left(-\frac{(x-x_1)^2}{2\sigma^2}\right) & , \ x_1 - a\sigma \leq x \leq x_1 + a\sigma \\ 0 & , \ x < x_1 - a\sigma \ ve \ x > x_1 + a\sigma \end{cases}$$

Burada α-kesit kümesinin ifadesi,

$$A(\alpha) = \begin{cases} \left[x_1 - \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{2\sigma^2}}\right)} \ , \ x_1 + \sqrt{\ln\left(\frac{1}{\alpha^{2\sigma^2}}\right)} \right] & , \ \alpha \geq exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \\ [x_1 - a\sigma \ , \ x_1 + a\sigma] & , \ \alpha < exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) \end{cases}$$

şeklindedir.

Örnek 2.1.1. $L,R : [0,1] \to [0,1]$ olmak üzere $L(x) = R(x) = x^2$ ve $\bar{A} = (1,2,3,4)_{L,R}$ alınsın. Buna göre $\bar{A}$ sayısına karşılık gelen α-kesit kümesi $A(\alpha) = [1+\sqrt{\alpha} \ , \ 4-\sqrt{\alpha}]$ olur.

Örnek 2.1.2. $\bar{A} = (1,3,5)$ verilsin. Buna göre,
$A(0) = kap(]1,5[) = [1,5]$
$A(0.3) = [1.6 \ , \ 4.4]$
$A(1) = 3$ ve
$A(\alpha) = [1+2\alpha \ , \ 5-2\alpha]$ olur.

Örnek 2.1.3. $X = [0,2]$ ve $\bar{A} \in \mathscr{F}(X)$ olmak üzere $\mu_A(x)$,
$\mu_A(x) = \dfrac{2x-x^2}{9}$ olarak verilsin. Burada $\forall\alpha \in [0,1]$ için
$A(\alpha) = \left[(1-\sqrt{1-9\alpha}) \ , \ (1+\sqrt{1-9\alpha})\right]$ olur.

Tanım 2.1.9 (Zadeh Genişleme Prensibi). *$f : X \to Y$ ve $\bar{A} \in \mathscr{F}(X)$ verilsin. Burada $f^{-1}(y) = \{x \in X \ : \ f(x) = y\}$ ve $f(\bar{A}) = \bar{B}$ olmak üzere Y üzerinde tanımlı $\bar{B} \in \mathscr{F}(Y)$ dereceli kümesi*

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_A(x) \ : \ x \in X\} & , \ f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & , \ f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlıdır [17, 28].

Tanım 2.1.10. *$f : X \to Y$ ve $\bar{A} \in \mathscr{F}(X)$ verilsin. Burada $f^{-1}(y) = \{x \in X \ : \ f(x) = y \in Y\}$ olmak üzere f fonksiyonu tek değişkenli ve bire-bir fonksiyon ise, $\bar{B} \in \mathscr{F}(Y)$ dereceli kümesi*

$$\mu_B(y) = \begin{cases} \mu_A(f^{-1}(y)) & , \ f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0 & , \ f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlıdır [17, 28].

Teorem 2.1.1. *$f : X \to Y$ sürekli fonksiyonu ve $\bar{A} \in \mathscr{F}(X)$ verilsin. Her $\alpha \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.*

$$[f(\bar{A})](\alpha) = f(A(\alpha)) \tag{2.1}$$

Burada $f(A(\alpha)) = \{f(x) : x \in [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]\}$ dir [20].

Örnek 2.1.4. $\bar{A} \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$ kümesinin üyelik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \dfrac{2x - x^2}{9} & , \ x \in [0,2] \\ 0 & , \ x \notin [0,2] \end{cases}$$

ile tanımlansın. $f(x) = x^2$ fonksiyonu için $x \geq 0$ iken Teorem 2.1.1 nin sağlandığını gösterelim. $\bar{A}$ kümesinin $\alpha-$kesit kümesi:

$$A(\alpha) = \left[(1 - \sqrt{1 - 9\alpha}) \ , \ (1 + \sqrt{1 - 9\alpha})\right]$$

olur. Böylece artan f fonksiyonu için

$$\begin{aligned} f(A(\alpha)) &= \left[f(1 - \sqrt{1 - 9\alpha}) \ , \ f(1 + \sqrt{1 - 9\alpha})\right] \\ &= \left[(1 - \sqrt{1 - 9\alpha})^2 \ , \ (1 + \sqrt{1 - 9\alpha})^2\right] \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan $x \geq 0$ için $f(x) = x^2$ fonksiyonu bire-bir olduğundan Tanım

2.1.10 kullanılarak

$$\mu_{f(A)}(y) = \mu_x(f^{-1}(y)) = \begin{cases} \frac{1}{9}(2\sqrt{y} - y) & , y \in [0,4] \\ 0 & , y \notin [0,4] \end{cases}$$

elde edilir. $f(\bar{A})$ fonksiyonun $\alpha-$kesit kümesi de aşağıdaki gibi olur.

$$[f(\bar{A})](\alpha) = \left[(1-\sqrt{1-9\alpha})^2 \ , \ (1+\sqrt{1-9\alpha})^2\right]$$

Görüleceği üzere $[f(\bar{A})](\alpha) = f(A(\alpha))$ gerçeklenir.

Dereceli sayılarla, gerekli cebirsel işlemleri yapmak için α-kesit kümeleri büyük kolaylık sağlamaktadır. Bu sebeple dereceli sayılar ile α-kesit kümeleri arasındaki bağıntıyı açıklayıcı nitelikte olan Negoita ve Ralescu [19] tarafından verilen aşağıdaki teorem çiftini ifade edeceğiz.

Teorem 2.1.2. *$\bar{A} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve $\bar{A}$ ya ait α-kesit kümesi $A(\alpha)$ olsun.*

i) Her $\alpha \in [0,1]$ için $A(\alpha)$ boş olmayan kapalı aralık belirtir.

ii) Eğer $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ ise $A(\alpha_2) \subseteq A(\alpha_1)$ dir.

iii) (α_n), $[0,1]$ daki elemanların azalmayan dizisi ve $\alpha_n \to \alpha \in (0,1]$ ise

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A(\alpha_n) = A(\alpha)$$

dır.

iv) (α_n), $[0,1]$ daki elemanların artmayan dizisi ve $\alpha_n \to 0$ ise

$$kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A(\alpha_n)\right) = A(0)$$

dır (bkz.[19]).

Teorem 2.1.3. *Reel sayıların alt kümelerinin ailesi $\{B(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ verilsin. Burada*

i) Her $\alpha \in [0,1]$ için $B(\alpha)$ boş olmayan kapalı aralık belirtir.

ii) Eğer $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ ise $B(\alpha_2) \subseteq B(\alpha_1)$ dir.

iii) (α_n), $[0,1]$ daki elemanların azalmayan dizisi ve $\alpha_n \to \alpha \in (0,1]$ ise

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B(\alpha_n) = B(\alpha)$$

dır.

iv) (α_n), $[0,1]$ *daki elemanların artmayan dizisi ve* $\alpha_n \to 0$ *ise*

$$kap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B(\alpha_n)\right) = B(0)$$

dır.

özelliklerini sağlayan $\{B(\alpha) : \alpha \in [0,1]\}$ *için* $A(\alpha) = B(\alpha)$ *olacak biçimde (öyleki* $\forall\ \alpha \in [0,1]$ *) yalnız bir* $\bar{A} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ *vardır (bkz.[19]).*

Teorem 2.1.2 ve Teorem 2.1.3 göstermektedir ki α-kesit kümesi ile çalışmak dereceli sayının kendisi ile çalışmaya eşdeğerdir. Her α-kesit kümesine yalnız ve yalnız bir dereceli sayı karşılık gelmektedir.
Goetschel ve Voxman [12], dereceli sayı kavramını farklı bir yönden incelemiş ve bir fonksiyon çifti ile temsilini aşağıdaki teorem ile ifade etmişlerdir. Bu teorem tarafından sağlanan temsil ise dereceli sayının LU(alt-üst sınır) temsili olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.4. $\bar{A} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ *ve* $A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)] = \{x : \ \mu_A(x) \geq \alpha\}$ *verilsin.* $A_1(\alpha), A_2(\alpha) : [0,1] \to \mathbb{R}$ α*-kesit kümesinin belirttiği aralığın sınır noktalarını tanımlamak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.*

i) $A_1(\alpha) \in \mathbb{R}$ *sınırlı, azalmayan,* $\alpha \in (0,1]$ *iken sol-sürekli fonksiyon ve* $\alpha = 0$ *iken sağ-sürekli fonksiyondur.*

ii) $A_2(\alpha) \in \mathbb{R}$ *sınırlı, artmayan,* $\alpha \in (0,1]$ *iken sol-sürekli fonksiyon ve* $\alpha = 0$ *iken sağ-sürekli fonksiyondur.*

iii) $A_1(1) \leq A_2(1)$ *dir.*

(bkz. [12]).

Dereceli sayılardaki aritmetik işlemleri α-kesit kümeleri kullanılarak yapılabilir. $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı dereceli sayıların α-kesit kümeleri aralıklardan oluştuğu için aralık aritmetiği işlemleri α-kesit kümeleri üzerinde de kullanılabilir. Bu sebeple öncelikle aralık aritmetiği işlemlerini hatırlatacağız.

Tanım 2.1.11. $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ *aralıkları verilsin. Burada*

1) Toplama: $A + B = [a_1 + b_1,\ a_2 + b_2]$

2) Çıkarma: $A - B = [a_1 - b_2,\ a_2 - b_1]$

3) Skalarle Çarpma: $\lambda A = \begin{cases} [\lambda a_1, \lambda a_2] & , \lambda \geq 0 \\ [\lambda a_2, \lambda a_1] & , \lambda < 0 \end{cases}$

4) Çarpma: $A.B = [\min\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\},\ \max\{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}]$

5) Bölme: $0 \notin B$ *iken,* $A/B = \left[\min\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\},\ \max\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_1}{b_2}, \frac{a_2}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\}\right]$

olarak tanımlanır[5].

Tanım 2.1.12. $\lambda \in \mathbb{R}$ *ve boş olmayan* $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ *olsun. Burada Minkowski toplamı ve skalerle çarpımı:*

$$A + B = \{a + b\ : a \in A,\ b \in B\}$$

$$\lambda A = \{\lambda a\ : a \in A\}$$

olarak tanımlanır[16].

$K_C(\mathbb{R}^n)$ n-boyutlu öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ nin tüm boş olmayan, kompakt ve konveks alt kümelerinin ailesi olarak gösterilsin.

Teorem 2.1.5. $\mathbb{R}^n$ *nin tüm kompakt ve konveks kümeler ailesi* $K_C(\mathbb{R}^n)$*, Minkowski toplamı ve skalerle çarpımı işlemleri altında kapalıdır [16].*

Aslında bu iki işlem, "+" işlemine göre birim eleman $\{0\}$ ile birlikte $K_C(\mathbb{R}^n)$ üzerinde lineer bir yapı oluşturur. Bu yapı, bir vektör uzayı değildir. Bunun nedeni ise genellikle,

$$A + (-1)A \neq \{0\}$$

olur. Yani toplama işlemine göre her zaman ters elaman mevcut olmadığından $K_C(\mathbb{R}^n)$ bir lineer uzay değildir. Burada $-A = (-1)A = \{-a\ : a \in A\}$ dir.
Şimdi konuya açıklık getirmesi bakımından bir örnek verelim.

Örnek 2.1.5. $K_C(\mathbb{R}^n)$ ailesinin özel olarak $n = 1$ durumu, $K_C(\mathbb{R}) = \mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ aralıklar ailesini oluşturur ki bu, $K_C(\mathbb{R}) = \{A = [a_1, a_2] :\ a_1, a_2 \in \mathbb{R}, a_1 \leq a_2\}$ kümesidir.
Burada $A = [0, 2]$ seçilirse $A - A = [-2, 2] \neq \{0\}$ olduğu görülür.

Bu olumsuzluğu gidermek için bazı alternatif metodlar önerilmiştir. Bunlardan ilki Hukuhara farkıdır[15].

Tanım 2.1.13. $f : (a,b) \to \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ *fonksiyonunun* α*-kesit kümesi* $f(x,\alpha) = [f_1(x,\alpha), f_2(x,\alpha)]$ *ile gösterilsin. Bu takdirde, f fonksiyonunun çapı her sabit* $\alpha \in [0,1]$ *için* $\text{çap}(f(x,\alpha))$ *ile gösterilir ve*

$$\text{çap}(f(x,\alpha))\ : K_C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

$$\text{çap}(f(x,\alpha)) = f_2(x,\alpha) - f_1(x,\alpha)$$

ile ifade edilir.

Tanım 2.1.14. *$A,B \in K_C(\mathbb{R}^n)$ olsun. $A = B + C$ olacak şekilde $\exists\, C \in K_C(\mathbb{R}^n)$ mevcut ise; C kümesine A ve B kümelerinin* ***Hukuhara farkı (H-farkı)*** *denir ve $A \ominus_H B$ ile gösterilir. Bu ise*

$$A \ominus_H B = C \Leftrightarrow A = B + C$$

olarak ifade edilir [15].

Her $A,B \in K_C(\mathbb{R}^n)$ için H-farkı $A \ominus_H A = \{0\}$ ve $(A+B) \ominus_H B = A$ özelliklerini sağlamaktadır.

Örnek 2.1.6. $A = [a_1, a_2]$ için H-farkı; $A \ominus_H A = [c_1, c_2]$ olsun.

$$[a_1, a_2] = [a_1, a_2] + [c_1, c_2]$$

$$\Rightarrow [a_1, a_2] = [a_1 + c_1, a_2 + c_2]$$

$$\Rightarrow [c_1, c_2] = [0, 0] = 0$$

olur.
Fark edileceği üzere özel olarak $A = [0,2]$ seçilirse, Örnek 2.1.5 deki sorun H-farkı ile ortadan kalkmıştır.

$A \ominus_H B$ H-farkının mevcut olması için A kümesi B kümesinin bir $\{c\} + B$ ötelemesini içermelidir. Özel olarak $K_C(\mathbb{R})$ kümesi üzerinde çalışılırsa; $çap(A) \geqslant çap(B)$ olması Hukuhara farkının varlığını garanti eder.
$A = [5,7]$ ve $B = [1,4]$ seçilirse $A \ominus_H B = [4,3]$ olarak hesaplanır ve $[4,3]$ aralık tanımına uygun olmadığından H-farkı mevcut değildir. H-farkının mevcut olmadığı bu durumun üstesinden gelmek için genelleştirilmiş Hukuhara farkı önerilmiştir.

Tanım 2.1.15. *$A,B \in K_C(\mathbb{R}^n)$ olsun. $A = B + C$ veya $B = A + (-1)C$ olacak şekilde $\exists\, C \in K_C(\mathbb{R}^n)$ mevcut ise; C kümesine A ve B kümelerinin* ***genelleştirilmiş Hukuhara farkı (gH-farkı)*** *denir ve $A \ominus_{gH} B$ ile gösterilir. Bu ise*

$$A \ominus_{gH} B = C \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ A = B + C \\ \quad veya \\ (ii)\ B = A + (-1)C \end{cases}$$

olarak ifade edilir [26].

$A \ominus_{gH} B$ gH-farkının mevcut olması için ya A kümesi B kümesinin bir ötelemesini içermelidir ya da B kümesi A kümesinin bir ötelemesini içermelidir. Yani (i) şartından $B + \{c\} \subseteq A$ veya (ii) şartından $A + \{-c\} \subseteq B$ olmalıdır.
gH-farkında (i) ve (ii) şartları aynı anda sağlandığında C tek nokta kümesi olur. Yani $\forall c \in C$ için $B + \{c\} \subseteq A$ ve $A + \{-c\} \subseteq B$ olacağından $B \subseteq A + \{-c\}$ ve $A \subseteq B + \{c\}$ olur. Buradan $A = B + \{c\}$ ve $B = A + \{-c\}$ elde edilir. Diğer taraftan keyfi $c', c'' \in C$

alınırsa $A = B + \{c'\} = B + \{c''\}$ eşitliğinden $c' = c''$ sonucuna varılır. Bu da C kümesinin tek nokta kümesi olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.6. *$A,B,C \in K_C(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, $A \ominus_{gH} B$ farkı mevcut ise aşağıdaki özellikler sağlanır.*

1) *gH-farkı mevcut ise tektir ve H-farkının var olduğu durumda $A \ominus_{gH} B = A \ominus_H B$ dir.*

2) $A \ominus_{gH} A = \{0\}$.

3) $(A+B) \ominus_{gH} B = A$.

4) $\{0\} \ominus_{gH} (A \ominus_{gH} B) = (-B) \ominus_{gH} (-A)$.

5) $(A-B)+B = C \Leftrightarrow A-B = C \ominus_{gH} B$.

6) $(A \ominus_{gH} B) = (B \ominus_{gH} A) = C \Leftrightarrow C = \{0\}$ *ve* $A = B$ *olur. Fakat* $B-A = A-B$ *olması Minkowski aritmetik işlemlerine göre* $A = B$ *şartını genellikle gerektirmez.*

7) $B \ominus_{gH} A$ *mevcut ise ya* $A + (B \ominus_{gH} A) = B$ *ya da* $B - (B \ominus_{gH} A) = A$ *olur ve bu iki eşitlik aynı anda sağlanırsa* $B \ominus_{gH} A$ *farkı tek nokta kümesidir.*

(bkz. [26])

$A,B \in K_C(\mathbb{R}) = \mathbb{I}$ için gH-farkının diğer bir önemli özelliği;

$$d_H(A,B) = 0 \Leftrightarrow A \ominus_{gH} B = \{0\}.$$

Bu özellik sayesinde aralıklar için limit ve süreklilik kavramları Hausdorff metriği ve gH-farkı kullanılarak aşağıdaki teorem ile karakterize edilmiştir.

Teorem 2.1.7. *$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{I}$ aralık değerli fonksiyonu $f(x) = [f_1(x), f_2(x)]$ ile gösterilsin. Bu takdirde;*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) \ominus_{gH} l) = \{0\}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0} (f(x) \ominus_{gH} f(x_0)) = \{0\}.$$

(bkz. [25])

2.2 Dereceli Sayılarda Fark İşlemleri

Tanım 2.2.1. *$\bar{A}, \bar{B} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ olsun. $\bar{A} = \bar{B} + \bar{C}$ olacak şekilde $\exists\, \bar{C} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ dereceli sayısı mevcut ise; $\bar{C}$ sayısına $\bar{A}$ ve $\bar{B}$ sayılarının* ***Hukuhara farkı (H-farkı)*** *denir ve $\bar{A} \ominus_H \bar{B}$ ile gösterilir. Bu ise*

$$\bar{A} \ominus_H \bar{B} = \bar{C} \Leftrightarrow \bar{A} = \bar{B} + \bar{C}$$

olarak ifade edilir [15, 22].

Teorem 2.2.1. *$\bar{A}, \bar{B} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve α-kesit kümeleri $A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$, $B(\alpha) = [B_1(\alpha), B_2(\alpha)]$ olmak üzere $\bar{A} \ominus_H \bar{B}$ mevcut ise H-farkının $\alpha-$kesit kümesi;*

$$[\bar{A} \ominus_H \bar{B}](\alpha) = [A_1(\alpha) - B_1(\alpha),\ A_2(\alpha) - B_2(\alpha)]$$

olarak tanımlıdır. [22]

Tanım 2.2.2. *$\bar{A}, \bar{B} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ olsun. Eğer*

$$\bar{A} \ominus_{gH} \bar{B} = \bar{C} \Longleftrightarrow \begin{cases} (i)\ \bar{A} = \bar{B} + \bar{C} \\ \quad veya \\ (ii)\ \bar{B} = \bar{A} + (-1)\bar{C} \end{cases}$$

*olacak şekilde $\exists\ \bar{C} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ dereceli sayısı mevcut ise $\bar{C}$ sayısına $\bar{A}, \bar{B}$ dereceli sayılarının **genelleştirilmiş Hukuhara farkı (gH-farkı)** denir ve $\bar{A} \ominus_{gH} \bar{B}$ ile gösterilir [24, 25].*

Teorem 2.2.2. *$\bar{A}, \bar{B} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve α-kesit kümeleri $A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$, $B(\alpha) = [B_1(\alpha), B_2(\alpha)]$ olmak üzere $\bar{A} \ominus_{gH} \bar{B}$ mevcut ise gH-farkının $\alpha-$kesit kümesi;*

$$[\bar{A} \ominus_{gH} \bar{B}](\alpha) = [\min\{A_1(\alpha) - B_1(\alpha),\ A_2(\alpha) - B_2(\alpha)\}, \max\{A_1(\alpha) - B_1(\alpha),\ A_2(\alpha) - B_2(\alpha)\}]$$

olarak tanımlıdır[6].

Tanım 2.2.3. *$\bar{A}, \bar{B} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ olsun. Her $\alpha \in [0,1]$ için*

$$[\bar{A} \ominus_g \bar{B}](\alpha) = C(\alpha) = kap \left(\bigcup_{\beta \geqslant \alpha} (A(\beta) \ominus_{gH} B(\beta)) \right)$$

*olacak şekilde $\exists\ \bar{C} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ dereceli sayısının $\alpha-$kesit kümesi mevcut ise $\bar{C}$ sayısına $\bar{A}, \bar{B}$ dereceli sayılarının **genelleştirilmiş farkı (g-farkı)** denir ve $\bar{A} \ominus_g \bar{B} = \bar{C}$ ile gösterilir [9, 24].*

Teorem 2.2.3. *$\bar{A}, \bar{B} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve α-kesit kümeleri $A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$, $B(\alpha) = [B_1(\alpha), B_2(\alpha)]$ olmak üzere $\bar{A} \ominus_g \bar{B}$ g-farkının $\alpha-$kesit kümesi ve $U(\beta) = A_1(\beta) - B_1(\beta)$ ve $V(\beta) = A_2(\beta) - B_2(\beta)$ olmak üzere,*

$$[\bar{A} \ominus_g \bar{B}](\alpha) = \left[\inf_{\beta \geqslant \alpha} \min\{U(\beta), V(\beta)\}, \sup_{\beta \geqslant \alpha} \max\{U(\beta), V(\beta)\} \right]$$

olarak tanımlıdır [9].

Örnek 2.2.1. Aşağıda üyelik fonksiyonları verilen $\bar{A}, \bar{B}$ dereceli sayıları için $\bar{A} \ominus_{gH} \bar{B}$ ve

$\bar{A} \ominus_g \bar{B}$ farklarını hesaplayalım.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x+1 & ,x \in [-1,0] \\ -x+1 & ,x \in \ (0,1] \\ 0 & ,x \notin [-1,1] \end{cases} \quad ve \ \mu_B(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in [-1,1] \\ 0 & ,x \notin [-1,1] \end{cases}$$

Burada her $\alpha \in [0,1]$ için

$$[\bar{A} \ominus_{gH} \bar{B}](\alpha) = [-\alpha, \alpha]$$

olarak hesaplanır. Fakat bu $\alpha-$kesit kümesine karşılık gelecek bir dereceli sayı yoktur. Diğer taraftan her $\alpha \in [0,1]$ için

$$[\bar{A} \ominus_g \bar{B}](\alpha) = C(\alpha) = kap \bigcup_{\beta \geqslant \alpha} [-\beta, \beta] = [-1,1]$$

olarak hesaplanır. Bu $\alpha-$kesit kümesine karşılık gelen dereceli sayı, $\bar{C} = (-1,-1,1,1)$ yamuk dereceli sayıdır.

Yukarıdaki örnekten de görüleceği üzere g-farkı, gH-farkından daha çok dereceli sayı çifti için tanımlıdır. Yani, gH-farkının mevcut olması durumunda g-farkı vardır ve gH-farkına eşittir. Her ne kadar g-farkı tanımladığımız farklar arasında en genel olanı ise de g-farkının da mevcut olmadığı durumlar söz konusudur.

Örnek 2.2.2. Aşağıda üyelik fonksiyonları verilen $\bar{A}, \bar{B}$ dereceli sayıları için $\bar{A} \ominus_{gH} \bar{B}$ ve $\bar{A} \ominus_g \bar{B}$ farklarını hesaplayalım.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in [2,3] \\ 0.5 & ,x \in \ [0,2) \cup (3,5] \\ 0 & ,x \notin [0,5] \end{cases} \quad ve \ \mu_B(x) = \begin{cases} 1 & ,x \in [2,3] \\ 0.5 & ,x \in [-1,2) \cup (3,4] \\ 0 & ,x \notin [-1,4] \end{cases}$$

$$[\bar{A} \ominus_{gH} \bar{B}](\alpha) = \begin{cases} \{0\} & ,\alpha \in (0.5,1] \\ \{1\} & ,\alpha \in [0,0.5] \end{cases}$$

olarak hesaplanır. Diğer taraftan,

$$[\bar{A} \ominus_g \bar{B}](\alpha) = \begin{cases} \{0\} & ,\alpha \in (0.5,1] \\ \{0\} \cup \{1\} & ,\alpha \in [0,0.5] \end{cases}$$

olarak hesaplanır ve bu $\alpha-$kesit kümelerine karşılık gelecek bir dereceli sayı yoktur.

Tanım 2.2.4. *$\bar{A}, \bar{B} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve α-kesit kümeleri $A(\alpha) = [A_1(\alpha), A_2(\alpha)]$, $B(\alpha) = [B_1(\alpha), B_2(\alpha)]$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} d_\infty(\bar{A}, \bar{B}) &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\max\{|A_1(\alpha) - B_1(\alpha)|, |A_2(\alpha) - B_2(\alpha)|\}\} \\ &= \sup_{\alpha \in [0,1]} \{d_H(A(\alpha), B(\alpha))\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $d_\infty : \mathscr{F}_N(\mathbb{R}) \times \mathscr{F}_N(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ metriğine iki dereceli sayı arasındaki Hausdorff metriği denir[11]

Teorem 2.2.4. *$\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $(\mathscr{F}_N(\mathbb{R}), d_\infty)$ metrik uzayı için aşağıdaki özellikler sağlanır [11]:*

1) d_∞ öteleme altında değişmezdir. Yani,
$d_\infty(\bar{A} + \bar{C}, \bar{B} + \bar{C}) = d_\infty(\bar{A}, \bar{B})$

2) $d_\infty(\lambda \bar{A}, \lambda \bar{B}) = |\lambda| \, d_\infty(\bar{A}, \bar{B})$

3) $d_\infty(\bar{A} + \bar{C}, \bar{B} + \bar{D}) \leq d_\infty(\bar{A}, \bar{B}) + d_\infty(\bar{C}, \bar{D})$

Ayrıca $((\mathscr{F}_N(\mathbb{R}), d_\infty)$ tam metrik uzayıdır.

Örnek 2.2.3. $\bar{A} = (1, 2, 5)$ ve $\bar{B} = (-3, 0, 4)$ üçgensel dereceli sayıları için $d_\infty(\bar{A}, \bar{B})$'i hesaplayalım. Bu üçgensel sayıların α-kesit kümeleri; $A(\alpha) = [1 + \alpha, 5 - 3\alpha]$ ve $B(\alpha) = [-3 + 3\alpha, 4 - 4\alpha]$ şeklindedir.

$$d_H(A(\alpha), B(\alpha)) = \max\{|4 - 2\alpha|, |1 + \alpha|\}$$

$$d_\infty(\bar{A}, \bar{B}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{d_H(A(\alpha), B(\alpha))\}$$

$$d_\infty(\bar{A}, \bar{B}) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{\max\{|4 - 2\alpha|, |1 + \alpha|\}\} = 4$$

2.3 Dereceli Sayı Değerli Fonksiyonlarda Türevlenebilme

Bu bölümde dereceli sayı değerli fonksiyonların türevlenebilmeleri için geliştirilen türev çeşitleri incelenecektir. İlk olarak Puri ve Ralescu [22] tarafından tanıtılan dereceli sayı değerli fonksiyonların Hukuhara türevi açıklanacaktır. Sonrasında Bede ve Gal [7] tarafından geliştirilen güçlü genelleştirilmiş türevlenebilme ve zayıf genelleştirilmiş türevlenebilme durumu ve son dönemlerde Bede ve Stefanini [9, 25] tarafından literatüre kazandırılan genelleştirilmiş Hukuhara türevi ve genelleştirilmiş türev incelenecektir.

2.3.1 Hukuhara türevi

Tanım 2.3.1. *$f:(a,b)\to\mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve $x\in(a,b)$ olsun. $\forall h>0$ için $f(x+h)\ominus_H f(x)$, $f(x)\ominus_H f(x-h)$ mevcut ve*

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)\ominus_H f(x)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x)\ominus_H f(x-h)}{h}=f'_H(x)$$

olacak şekilde $f'_H(x)\in\mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ise f, x değerinde Hukuhara türevlenebilir denir. Bu limit değerine ise f nin x deki ***Hukuhara türevi*** *denir[15, 22].*

Örnek 2.3.1. $\bar{A}\in\mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve $g:(a,b)\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu $x_0\in(a,b)$ değerinde türevlenebilir olsun. $f:(a,b)\to\mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu $f(x)=\bar{A}.g(x)$ olarak tanımlansın. Kabul edelim ki, $g'(x_0)>0$ olsun. Bu durumda $\forall h>0$ için g fonksiyonu $[x_0-h,x_0+h]$ aralığında artan fonksiyondur. Yani,

$$g(x_0+h)-g(x_0)=\omega(x_0,h)>0 \quad , \quad g(x_0)-g(x_0-h)=\Omega(x_0,h)>0$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{g(x_0)-g(x_0-h)}{h}=g'(x)$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{\omega(x_0,h)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\Omega(x_0,h)}{h}=g'(x)$$

olarak yazılabilir. Her iki tarafı $\bar{A}$ dereceli sayısı ile çarparsak,

$$\bar{A}g(x_0+h)-\bar{A}g(x_0)=\bar{A}\omega(x_0,h) \quad , \quad \bar{A}g(x_0)-\bar{A}g(x_0-h)=\bar{A}\Omega(x_0,h)$$

$$\bar{A}g(x_0+h)=\bar{A}g(x_0)+\bar{A}\omega(x_0,h) \quad , \quad \bar{A}g(x_0)=\bar{A}g(x_0-h)+\bar{A}\Omega(x_0,h)$$

$$f(x_0+h)=f(x_0)+\bar{A}\omega(x_0,h) \quad , \quad f(x_0)=f(x_0-h)+\bar{A}\Omega(x_0,h)$$

$$f(x_0+h)\ominus_H f(x_0)=\bar{A}\omega(x_0,h) \quad , \quad f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)=\bar{A}\Omega(x_0,h)$$

elde edilir. $f(x_0+h)\ominus_H f(x_0)$ ve $f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)$ Hukuhara farklarının sırasıyla $\bar{A}\omega(x_0,h)\in\mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve $\bar{A}\Omega(x_0,h)\in\mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ olduğu açıktır. f dereceli sayı değerli fonksiyonun x_0 değerindeki Hukuhara türevini hesaplamak için aşağıdaki adımlar izlenir:

$$\frac{f(x_0+h)\ominus_H f(x_0)}{h}=\frac{\bar{A}\omega(x_0,h)}{h} \quad , \quad \frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)}{h}=\frac{\bar{A}\Omega(x_0,h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)\ominus_H f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\bar{A}\omega(x_0,h)}{h} \quad , \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\bar{A}\Omega(x_0,h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)\ominus_H f(x_0)}{h}=\bar{A}\lim_{h\to 0^+}\frac{\omega(x_0,h)}{h} \quad , \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)}{h}=\bar{A}\lim_{h\to 0^+}\frac{\Omega(x_0,h)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)\ominus_H f(x_0)}{h}=\bar{A}g'(x_0) \quad , \quad \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0)\ominus_H f(x_0-h)}{h}=\bar{A}g'(x_0)$$

O halde f fonksiyonun x_0 değerindeki Hukuhara türevi $f'_H(x_0) = \bar{A}g'(x_0)$ olarak hesaplanır. Fakat $g'(x) < 0$ olarak kabul edilirse, $f(x_0+h) \ominus_H f(x_0)$ ve $f(x_0) \ominus_H f(x_0-h)$ Hukuhara farkları hesaplanamayacağı için f fonksiyonunun Hukuhara türevini hesaplayamayız.

Örnek 2.3.2. Özel olarak $\bar{A} = (0,1,2)$ ve $g(x) = \frac{1}{x}$ seçilirse, $f(x) = \bar{A}.g(x)$ için $x_0 \in [1,2]$ değerinde Hukuhara türevinin varlığını inceleyelim.
$C(\alpha) = [\alpha, 2-\alpha]$ olduğunu biliyoruz. Hukuhara türevini hesaplamak için gerekli olan H-farkı $f(x_0+h) \ominus_H f(x_0) = \bar{K} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve $K(\alpha) = [K_1(\alpha), K_2(\alpha)]$ olsun.
Buradan, $f(x_0+h) = f(x_0) + \bar{K}$
$\Longleftrightarrow f(x_0+h,\alpha) = f(x_0,\alpha) + K(\alpha)$
$\Longleftrightarrow [\alpha, 2-\alpha]\frac{1}{x_0+h} = [\alpha, 2-\alpha]\frac{1}{x_0} + [K_1(\alpha), K_2(\alpha)]$
$\Longleftrightarrow \left[\frac{\alpha}{x_0+h}, \frac{2-\alpha}{x_0+h}\right] = \left[\frac{\alpha}{x_0} + K_1(\alpha), \frac{2-\alpha}{x_0} + K_2(\alpha)\right]$
$\Longleftrightarrow \frac{\alpha}{x_0+h} = \frac{\alpha}{x_0} + K_1(\alpha) \quad ve \quad \frac{2-\alpha}{x_0+h} = \frac{2-\alpha}{x_0} + K_2(\alpha)$
$\Longleftrightarrow K_1(\alpha) = \alpha\left(\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}\right) = \alpha N \quad ve \quad K_2(\alpha) = (2-\alpha)\left(\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}\right) = (2-\alpha)N$
Burada $N < 0$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha \leqslant 2-\alpha$ olduğundan $(2-\alpha)N \leqslant \alpha N$ yani $K_2(\alpha) \leqslant K_1(\alpha)$ olur ve bu da $\bar{K} \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ kabulü ile çelişir. O halde $f(x)$ fonksiyonu için Hukuhara türevi mevcut değildir.

2.3.2 Güçlü genelleştirilmiş türev

Tanım 2.3.2. *$f : (a,b) \to \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu ve $x \in (a,b)$ olsun. Bu takdirde,*

(i) Eğer $\forall h > 0$ için $f(x+h) \ominus_H f(x)$ ve $f(x) \ominus_H f(x-h)$ mevcut ve

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) \ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x) \ominus_H f(x-h)}{h} = f'_G(x)$$

(ii) Eğer $\forall h > 0$ için $f(x) \ominus_H f(x+h)$ ve $f(x-h) \ominus_H f(x)$ mevcut ve

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x) \ominus_H f(x+h)}{(-h)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x-h) \ominus_H f(x)}{(-h)} = f'_G(x)$$

(iii) Eğer $\forall h > 0$ için $f(x+h) \ominus_H f(x)$ ve $f(x-h) \ominus_H f(x)$ mevcut ve

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h) \ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x-h) \ominus_H f(x)}{(-h)} = f'_G(x)$$

(iv) Eğer $\forall h > 0$ için $f(x) \ominus_H f(x+h)$ ve $f(x) \ominus_H f(x-h)$ mevcut ve

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x) \ominus_H f(x+h)}{(-h)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x) \ominus_H f(x-h)}{h} = f'_G(x)$$

şartlarından biri sağlanacak şekilde $f'_G(x) \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ mevcut ise f, x değerinde güçlü genelleştirilmiş türevlenebilir denir. Bu limit değerine ise f nin x deki ***güçlü genelleştirilmiş türevi*** *denir[7].*

Teorem 2.3.1. *$f : (a,b) \to \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu $\forall x \in (a,b)$ değerinde (iii) veya (iv) anlamında güçlü genelleştirilmiş türevlenebilir ise $\forall x \in (a,b)$ için $f'_G(x) \in \mathbb{R}$ dir [7].*

2.3.3 Zayıf genelleştirilmiş türev

Tanım 2.3.3. *$F : (a,b) \to \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. $h_n \to 0$ ve artmayan bir dizi olmak üzere $n_0 \in \mathbb{N}$ için,*

$$A^{(1)}_{n_0} = \{n \geqslant n_0 : \exists E^{(1)}_n := F(x_0+h_n) \ominus_H F(x_0)\},$$

$$A^{(2)}_{n_0} = \{n \geqslant n_0 : \exists E^{(2)}_n := F(x_0) \ominus_H F(x_0+h_n)\},$$

$$A^{(3)}_{n_0} = \{n \geqslant n_0 : \exists E^{(3)}_n := F(x_0) \ominus_H F(x_0-h_n)\},$$

$$A^{(4)}_{n_0} = \{n \geqslant n_0 : \exists E^{(4)}_n := F(x_0-h_n) \ominus_H F(x_0)\},$$

olarak tanımlansın. Eğer her artmayan $h_n \to 0$ dizisi için

$$A^{(1)}_{n_0} \cup A^{(2)}_{n_0} \cup A^{(3)}_{n_0} \cup A^{(4)}_{n_0} = \{n \in \mathbb{N}\ ;\ n \geqslant n_0\}$$

olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcut ve $j \in \{1,2,3,4\}$

$$\lim_{h_n \to 0^+\ n\to\infty\ n \in A^{(j)}_{n_0}} d_\infty\left(\frac{E^{(j)}_n}{(-1)^{j+1}h_n}, F'_Z(x_0)\right) = 0$$

olacak şekilde $F'_Z(x_0) \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ mevcut ise, F fonksiyonu ***zayıf genelleştirilmiş türevlenebilir*** *denir [7].*

2.3.4 Genelleştirilmiş Hukuhara türevi

Tanım 2.3.4. *$f : (a,b) \to \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve $x \in (a,b)$ olsun. $\forall h > 0$ için*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) \ominus_{gH} f(x)}{h} = f'_{gH}(x)$$

olacak şekilde $f'_{gH}(x) \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ise f, x değerinde genelleştirilmiş Hukuhara türevlenebilir denir. Bu limit değerine ise f nin x deki ***genelleştirilmiş Hukuhara türevi*** *denir [9, 25].*

Tanım 2.3.5. *$f : (a,b) \to \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu ve $x \in (a,b)$ olsun. Bu takdirde,* *(1) Eğer* $\forall h > 0$ *için* $f(x+h) \ominus_H f(x)$, $f(x) \ominus_H f(x-h)$ *mevcut ve*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x+h)\ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x)\ominus_H f(x-h)}{h} = f'(x)$$

(2) Eğer $\forall h < 0$ *için* $f(x+h) \ominus_H f(x)$, $f(x) \ominus_H f(x-h)$ *mevcut ve*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x+h)\ominus_H f(x)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x)\ominus_H f(x-h)}{h} = f'(x)$$

şartlarından biri sağlanacak şekilde $f'(x) \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ *mevcut ise f, x değerinde türevlenebilir denir. Bu limit değerine ise* f *nin x deki türevi denir[10].*

Tanım 2.3.5 e göre f fonksiyonu (1) şartını sağlıyor ise $(1)-$anlamında türevlenebilir, (2) şartını sağlıyor ise $(2)-$anlamında türevlenebilir ifadelerini kullanacağız.

Teorem 2.3.2. $f : (a,b) \to \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ *fonksiyonunun* $\alpha-$*kesiti her* $\alpha \in [0,1]$ *için* $f(x,\alpha) = [f_1(x,\alpha), f_2(x,\alpha)]$ *olsun. Bu durumda,*

(i) f, $(1)-$*anlamında türevlenebilir ise* $f_1(x,\alpha)$ *ve* $f_2(x,\alpha)$ *fonksiyonları türevlidir ve* $[f'(x)](\alpha) = [f_1'(x,\alpha), f_2'(x,\alpha)]$.

(ii) f, $(2)-$*anlamında türevlenebilir ise* $f_1(x,\alpha)$ *ve* $f_2(x,\alpha)$ *fonksiyonları türevlidir ve* $[f'(x)](\alpha) = [f_2'(x,\alpha), f_1'(x,\alpha)]$.

(bkz.[10]).

Ispat. (**i**). $\forall h > 0$ ve $\alpha \in [0,1]$ iken,

$$\begin{aligned}
[f(x+h)\ominus_H f(x)](\alpha) &= [f_1(x+h,\alpha) - f_1(x,\alpha), f_2(x+h,\alpha) - f_2(x,\alpha)] \\
\frac{[f(x+h)\ominus_H f(x)](\alpha)}{h} &= \frac{1}{h}[f_1(x+h,\alpha) - f_1(x,\alpha), f_2(x+h,\alpha) - f_2(x,\alpha)] \\
&= \left[\frac{f_1(x+h,\alpha) - f_1(x,\alpha)}{h}, \frac{f_2(x+h,\alpha) - f_2(x,\alpha)}{h}\right]
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
[f(x)\ominus_H f(x-h)](\alpha) &= [f_1(x,\alpha) - f_1(x-h,\alpha), f_2(x,\alpha) - f_2(x-h,\alpha)] \\
\frac{[f(x)\ominus_H f(x-h)](\alpha)}{h} &= \frac{1}{h}[f_1(x,\alpha) - f_1(x-h,\alpha), f_2(x,\alpha) - f_2(x-h,\alpha)] \\
&= \left[\frac{f_1(x,\alpha) - f_1(x-h,\alpha)}{h}, \frac{f_2(x,\alpha) - f_2(x-h,\alpha)}{h}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve eşitliğin iki tarafının limiti alınarak $[f'(x)](\alpha) = [f_1'(x,\alpha), f_2'(x,\alpha)]$ elde edilir.

(**ii**). $\forall h < 0$ ve $\alpha \in [0,1]$ iken,

$$\begin{aligned}
[f(x+h) \ominus_H f(x)](\alpha) &= [f_1(x+h,\alpha) - f_1(x,\alpha), f_2(x+h,\alpha) - f_2(x,\alpha)] \\
\frac{[f(x+h) \ominus_H f(x)](\alpha)}{h} &= \frac{1}{h}[f_1(x+h,\alpha) - f_1(x,\alpha), f_2(x+h,\alpha) - f_2(x,\alpha)] \\
&= \left[\frac{f_2(x+h,\alpha) - f_2(x,\alpha)}{h}, \frac{f_1(x+h,\alpha) - f_1(x,\alpha)}{h}\right]
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
[f(x) \ominus_H f(x-h)](\alpha) &= [f_1(x,\alpha) - f_1(x-h,\alpha), f_2(x,\alpha) - f_2(x-h,\alpha)] \\
\frac{[f(x) \ominus_H f(x-h)](\alpha)}{h} &= \frac{1}{h}[f_1(x,\alpha) - f_1(x-h,\alpha), f_2(x,\alpha) - f_2(x-h,\alpha)] \\
&= \left[\frac{f_2(x,\alpha) - f_2(x-h,\alpha)}{h}, \frac{f_1(x,\alpha) - f_1(x-h,\alpha)}{h}\right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve eşitliğin iki tarafının limiti alınarak $[f'(x)](\alpha) = [f_2'(x,\alpha), f_1'(x,\alpha)]$ elde edilir. □

2.3.5 Genelleştirilmiş türev

Tanım 2.3.6. *$f : (a,b) \to \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ve $x \in (a,b)$ olsun. $\forall h > 0$ için*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \ominus_g f(x)}{h} = f_g'(x)$$

olacak şekilde $f_g'(x) \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ ise f, x değerinde genelleştirilmiş türevlenebilir denir. Bu limit değerine ise f nin x deki ***genelleştirilmiş türevi*** *denir [9].*

Örnek 2.3.3. $F : [0, 0.5] \to \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu için $\alpha-$kesit kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$F(x,\alpha) = \begin{cases} [x^2 - 3 + \alpha,\ (1-2\alpha)x^2 - 2\alpha + 2], & \alpha \in [0, 0.5] \\ [x^2 - 3 + \alpha,\ (2\alpha - 1)x^2 - 6\alpha + 4], & \alpha \in (0.5, 1] \end{cases}$$

F fonksiyonunun gH-türevi ve g-türevini inceleyelim.
gH-farkının $\alpha-$kesit kümesi tanımı kullanılarak;

$$[f(x+h) \ominus_{gH} f(x)](\alpha) = [(1-2\alpha)(2xh + h^2)\ ,\ 2xh + h^2]$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\ominus_{gH} f(x)](\alpha)}{h}=[(1-2\alpha)2x,2x]$$

sonucuna ulaşılır. $\alpha=0$ ve $\alpha=0.25$ değerleri için,

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\ominus_{gH} f(x)](0)}{h}=2x$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\ominus_{gH} f(x)](0.25)}{h}=[x,2x].$$

Ayrıca Tanım 2.1.2 den

$$\alpha_1<\alpha_2\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\ominus_{gH} f(x)](\alpha_2)}{h}\subset \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\ominus_{gH} f(x)](\alpha_1)}{h}$$

olduğu bilinmektedir. Fakat $\alpha=0$ ve $\alpha=0.25$ değerleri için, bu şart geçerli olmadığından gH-türevi mevcut değildir. g-türevini hesaplamak için g-farkının $\alpha-$kesit kümesi tanımını kullanalım.
$\beta\leq 0.5$ için;

$$f_1(x+h,\beta)-f_1(x,\beta)=2xh+h^2$$
$$f_2(x+h,\beta)-f_2(x,\beta)=(1-2\alpha)2xh+h^2$$

$\beta>0.5$ için;

$$f_1(x+h,\beta)-f_1(x,\beta)=2xh+h^2$$
$$f_2(x+h,\beta)-f_2(x,\beta)=(2\alpha-1)2xh+h^2$$

$\alpha>0.5$ için;

$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)\ominus_{g} f(x)](\alpha)}{h}=kap\bigcup_{\beta\geqslant\alpha>0.5}[(2\beta-1)2x,2x]=[(2\alpha-1)2x,2x]$$

$\alpha\leqslant 0.5$ için;

$$kap\left(\bigcup_{0.5\geqslant\beta\geqslant\alpha\geqslant 0}[(1-2\beta)2x,2x]\right)\bigcup\left(\bigcup_{\beta>0.5}[(2\beta-1)2x,2x]\right)=[0,2x]$$

$F'_g : [0, 0.5] \to \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu için $\alpha-$kesit kümesi aşağıdaki gibidir:

$$[F'_g(x)](\alpha) = \begin{cases} [0, 2x], & \alpha \in [0, 0.5] \\ [(2\alpha - 1)2x, 2x], & \alpha \in (0.5, 1] \end{cases}$$

Bu örnekten görüleceği üzere gH-türevi olmayan bir fonksiyon için g-türev mevcuttur. Fakat g-türevinin de mevcut olmadığı durumlar vardır.

Örnek 2.3.4. $F : [-1, 1] \to \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu için $\alpha-$kesit kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$F(x, \alpha) = \begin{cases} [10x^2 - 12,\ 10x^2 + 2] & , \alpha \in [0, 0.5] \\ [-1,\ 1] & , \alpha \in (0.5, 1] \end{cases}$$

Buradan $F'_g(x)(\alpha)$;

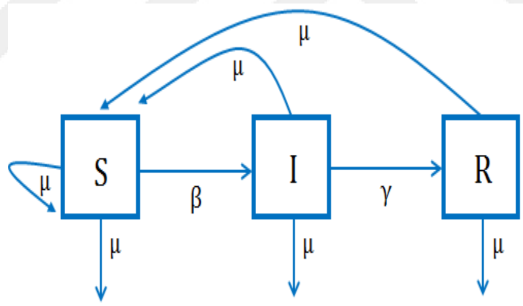
$$F'_g(x)(\alpha) = \begin{cases} \{20x\} \cup \{0\} & , \alpha \in [0, 0.5] \\ \{0\} & , \alpha \in (0.5, 1] \end{cases}$$

elde edilir. Fakat $F'_g(x) \notin \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ olduğundan $F : [-1, 1] \to \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ fonksiyonu için g-türevi mevcut değildir.

3. UYGULAMALAR

3.1 SIR Epidemik Modelinin Dereceli Mantık Teorisi Yaklaşımı ile Analizi

Hastalıkların modellenmesi matematiksel biyolojinin araştırma alanlarının başında gelmektedir. Bu modellerden en önemlileri bulaşıcı hastalıkları inceleyen modellerdir. Bulaşıcı hastalıkların modellenmesi hastalığın boyutunu ve önlenmesini hesaplamak için oldukça önemli bir rol oynamaktadır. Kızamık, kabakulak, kızamıkçık ve suçiçeği gibi bulaşıcı hastalıklar bu tür hastalıklar sınıfındadır. Popülasyondaki bireyler, sağlıklı enfekte ve bağışıklık kazanmış bireyler olmak üzere üç grupta sınıflandırılarak modellenir. Bu tür modeller SIR epidemik modelleri olarak adlandırılır. Bireylerin bağışıklık durumuna bağlı olarak SIR epidemik modelinin SI, SIS ve SIRS gibi varyasyonları vardır.
Herhangi bir t anında popülasyondaki bireyler aşağıdaki şekilde gruplandırılır:
$S(t) :=$ Henüz hasta olmamış (sağlıklı) fakat hastalığa duyarlı bireylerin sayısı,
$I(t) :=$ Enfekte olmuş (hasta) ve hastalığı bulaştırabilecek bireylerin sayısı,
$R(t) :=$ Bağışıklık kazanmış bireylerin sayısı.



Şekil 3.1: Doğum ve ölüm oranı sabit SIR modeli diyagramı

Popülasyonda doğum ve ölüm oranı eşit varsayıldığında SIR modeline karşılık gelen diferensiyel denklem sistemi aşağıdaki gibidir [3, 4, 13]:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \mu(N - S)$$
$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - (\gamma + \mu)I$$
$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \mu R$$
$$S(0) = N_1 > 0, \;\; I(0) = N_2 > 0, \;\; R(0) = N_3 \geqslant 0$$
$$\sum_{i=1}^{3} N_i = N$$

Modelde kullanılan parametrelerin, $\beta, \gamma \in [0,1]$ olmak üzere, anlamları aşağıdaki gibidir.
β :=Hasta birey ile sağlıklı birey arasındaki geçiş oranı
γ :=Hasta birey ile bağışıklık kazanmış birey arasındaki geçiş oranı
μ :=doğum oranı ve ölüm oranı
N :=Popülasyondaki toplam birey sayısı
Modelde popülasyondaki bireylerin doğum ve ölüm oranı μ ile gösterilmiş ve doğum oranı ile ölüm oranına eşit kabul edilmiştir. Bu durumda popülasyondaki toplam birey sayısının değişmediği kolayca görülmektedir. Ayrıca lineer olmayan bu sistem için analitik çözümün olmadığı görülür. Bu sebeple nümerik simülasyonlar yardımıyla elde edilen çözümler incelenecektir.
Denklem sisteminden;

$$\begin{aligned} &\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0 \\ \Rightarrow \quad & S(t) + I(t) + R(t) = N \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.
Şimdi ise başlangıç koşulları dereceli sayı olan F-SIR (Fuzzy-SIR) epidemik modelini inceleyeceğiz. Burada çözümlerin davranışını, teorik sonuçları desteklemek üzere MATLAB programı yardımıyla, nümerik olarak ele alacağız. Kalitatif teoride incelenen diferensiyel denklemin çözümü açık bir şekilde elde edilmeden çözümün nasıl davrandığı anlaşılmaya çalışılır. Örneğin, çözümlerin sınırlılık, yakınsaklık ve salınım gibi özelliklerden hangilerini, hangi şartlar altında sağladığı tespit edilmeye çalışılır. Bu bilgilerden hareketle aşağıdaki örneği analiz edelim.

Örnek 3.1.1. $\beta = 0.003$, $\gamma = 0.5$ ve $\mu = 0.05$ olsun.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -0.003SI + 0.05(1000 - S) \\ \frac{dI}{dt} &= 0.003SI - 0.55I \\ \frac{dR}{dt} &= 0.5I - 0.05R \end{aligned}$$

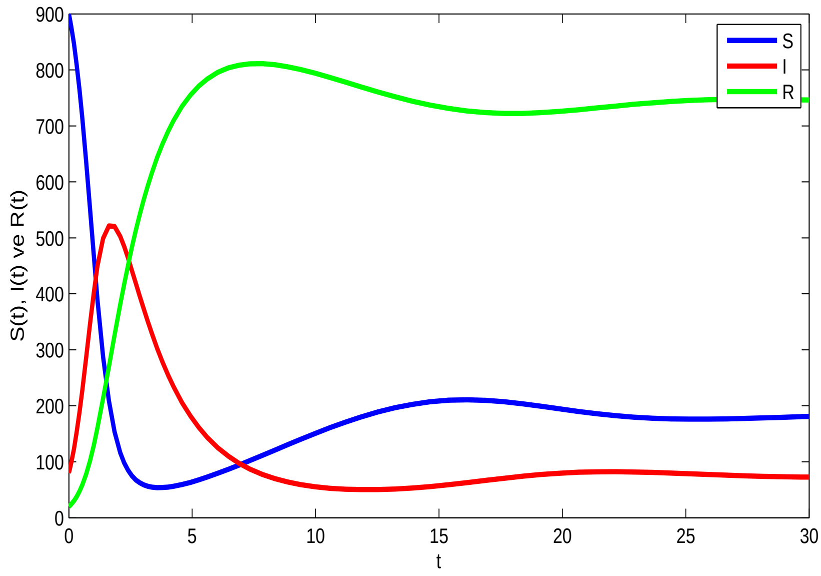
sistemini ele alalım. Başlangıç şartları ise $\overline{S(0)} = (800, 900, 1000) \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$, $\overline{I(0)} = (60, 80, 100) \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$, $\overline{R(0)} = (5, 20, 35) \in \mathscr{F}_N(\mathbb{R})$ olsun. Bu sistem için başlangıç şartlarının $\alpha-$kesit kümeleri aşağıdaki gibi olur.

$$S(t,\alpha) = [S_1(t,\alpha), S_2(t,\alpha)] = [100\alpha + 800\ ,\ 1000 - 100\alpha]$$

$$I(t,\alpha) = [I_1(t,\alpha), I_2(t,\alpha)] = [20\alpha + 60\ ,\ 100 - 20\alpha]$$

$$R(t,\alpha) = [R_1(t,\alpha), R_2(t,\alpha)] = [15\alpha + 5\ ,\ 35 - 15\alpha]$$

Dereceli sistemi çözmeden önce klasik yani dereceli olmayan sistemin çözümlerinin grafiğini verelim. Bilindiği gibi $\alpha = 1$ iken dereceli sistem klasik sisteme dönüşür.



Şekil 3.2: Klasik sistemin çözümlerinin grafiği

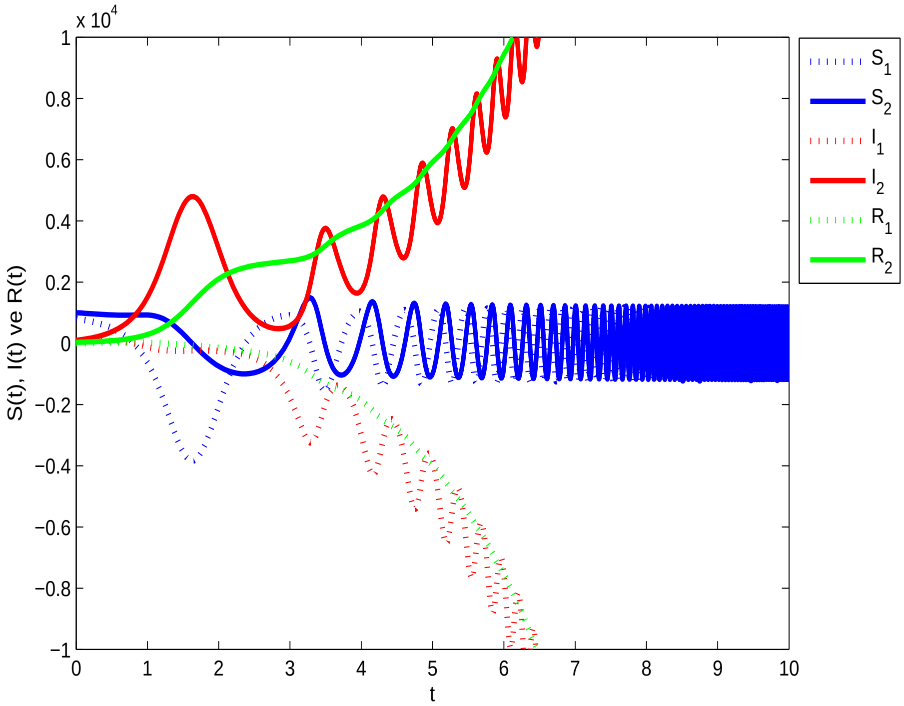
Tanım 2.3.5 e göre $S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ $(1)-$anlamında veya $(2)-$anlamında türevlenebilirdir. O halde sekiz farklı denklem sistemi oluşur. İlk olarak $S(t), I(t)$ ve $R(t)$ üçlüsünün aynı anda $(1)-$anlamında türevlenebilir olduğu durumu inceleyelim.

$$
\begin{aligned}
[S_1'(t,\alpha), S_2'(t,\alpha)] &= -0.003[S_1(t,\alpha), S_2(t,\alpha)].[I_1(t,\alpha), I_2(t,\alpha)] \\
&\quad + 0.05(1000 - [S_1(t,\alpha), S_2(t,\alpha)]) \\
[I_1'(t,\alpha), I_2'(t,\alpha)] &= 0.003[S_1(t,\alpha), S_2(t,\alpha)].[I_1(t,\alpha), I_2(t,\alpha)] - 0.55[I_1(t,\alpha), I_2(t,\alpha)] \\
[R_1'(t,\alpha), R_2'(t,\alpha)] &= 0.5[I_1(t,\alpha), I_2(t,\alpha)] - 0.05[R_1(t,\alpha), R_2(t,\alpha)]
\end{aligned}
$$

Buradan $\alpha = 0$ için

$$
\begin{aligned}
S_1'(t,\alpha) &= -0.003S_2(t,\alpha)I_2(t,\alpha) + 0.05(1000 - S_2(t,\alpha)) & S_1(t,0) &= 800 \\
S_2'(t,\alpha) &= -0.003S_1(t,\alpha)I_1(t,\alpha) + 0.05(1000 - S_1(t,\alpha)) & S_2(t,0) &= 1000 \\
I_1'(t,\alpha) &= 0.003S_1(t,\alpha)I_1(t,\alpha) - 0.55I_2(t,\alpha) & I_1(t,0) &= 60 \\
I_2'(t,\alpha) &= 0.003S_2(t,\alpha)I_2(t,\alpha) - 0.55I_1(t,\alpha) & I_2(t,0) &= 100 \\
R_1'(t,\alpha) &= 0.5I_1(t,\alpha) - 0.05R_2(t,\alpha) & R_1(t,0) &= 5 \\
R_2'(t,\alpha) &= 0.5I_2(t,\alpha) - 0.05R_1(t,\alpha) & R_2(t,0) &= 35
\end{aligned}
$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü MATLAB yardımıyla elde edildiğinde oluşan çözümlerin grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.3: S(t), I(t) ve R(t) (1)-anlamında türevlenebilir iken çözümlerin grafiği

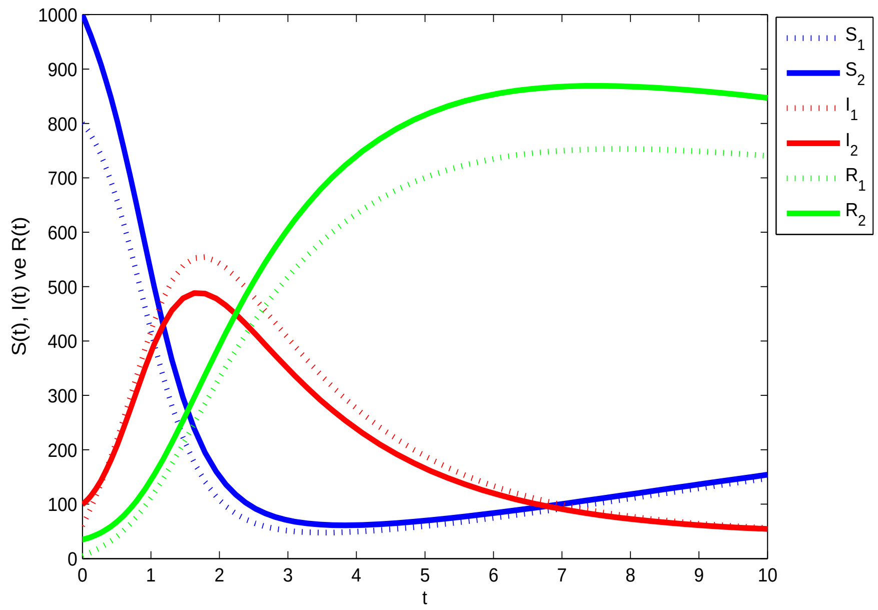
Bu kez $S(t), I(t)$ ve $R(t)$ üçlüsü aynı anda $(2)-$anlamında türevlenebilir olsun. O halde

$$
\begin{aligned}
[S_2'(t,\alpha), S_1'(t,\alpha)] &= -0.003[S_1(t,\alpha), S_2(t,\alpha)].[I_1(t,\alpha), I_2(t,\alpha)] \\
&\quad + 0.05(1000 - [S_1(t,\alpha), S_2(t,\alpha)]) \\
[I_2'(t,\alpha), I_1'(t,\alpha)] &= 0.003[S_1(t,\alpha), S_2(t,\alpha)].[I_1(t,\alpha), I_2(t,\alpha)] - 0.55[I_1(t,\alpha), I_2(t,\alpha)] \\
[R_2'(t,\alpha), R_1'(t,\alpha)] &= 0.5[I_1(t,\alpha), I_2(t,\alpha)] - 0.05[R_1(t,\alpha), R_2(t,\alpha)]
\end{aligned}
$$

Buradan $\alpha = 0$ için

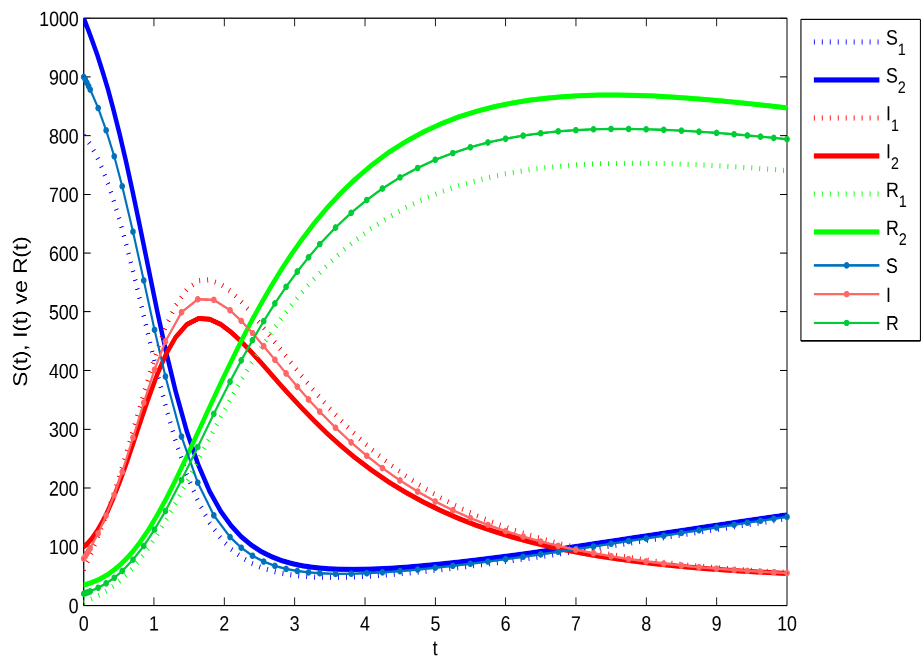
$$
\begin{aligned}
S_1'(t,\alpha) &= -0.003S_1(t,\alpha)I_1(t,\alpha) + 0.05(1000 - S_1(t,\alpha)) && S_1(t,0) = 800 \\
S_2'(t,\alpha) &= -0.003S_2(t,\alpha)I_2(t,\alpha) + 0.05(1000 - S_2(t,\alpha)) && S_2(t,0) = 1000 \\
I_1'(t,\alpha) &= 0.003S_2(t,\alpha)I_2(t,\alpha) - 0.55I_1(t,\alpha) && I_1(t,0) = 60 \\
I_2'(t,\alpha) &= 0.003S_1(t,\alpha)I_1(t,\alpha) - 0.55I_2(t,\alpha) && I_2(t,0) = 100 \\
R_1'(t,\alpha) &= 0.5I_2(t,\alpha) - 0.05R_1(t,\alpha) && R_1(t,0) = 5 \\
R_2'(t,\alpha) &= 0.5I_1(t,\alpha) - 0.05R_2(t,\alpha) && R_2(t,0) = 35
\end{aligned}
$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü MATLAB yardımıyla elde edildiğinde oluşan çözümlerin grafikleri aşağıda verilmiştir.



Şekil 3.4: S(t), I(t) ve R(t) (2)-anlamında türevlenebilir iken çözümlerin grafiği

Tekrar klasik çözüm eğrilerini $S(t), I(t)$ ve $R(t)$ $(2)-$anlamında türevlenebilir iken elde edilen eğrilerle aynı grafik üzerinde inceleyelim.



Şekil 3.5: S(t), I(t) ve R(t) (2)-anlamında türevlenebilir iken çözümlerin grafiği ile klasik sistemin çözümlerinin grafiği

Fark edileceği üzere $S(t), I(t)$ ve $R(t)$ $(2)-$anlamında türevlenebilir iken elde edilen çözüm eğrileri klasik çözümlerle daha tutarlı davranış göstermektedir.
$S(t)$, $I(t)$ ve $R(t)$ için (1)-anlamında ve (2)-anlamında türevlenebildiği diğer durumlar için sistemin çözümleri incelendiğinde bu üçlünün aynı anda (1)-anlamında türevlenebildiği duruma benzer olduğu görülmüştür.

Kalitatif yöntemlerle elde ettiğimiz çözümlerin grafiklerini yukarıda inceledik. Dereceli sayıların $\alpha-$kesit kümesinin oluşturduğu aralığın sol ucunun sağ ucundan küçük veya eşit olması gerektiğini biliyoruz. Fakat çözümlerin grafiklerinden görüleceği üzere bu kurala aykırı durumlar gözlemlenmiştir. Bu tür durumlarda literatürdeki çalışmalardan yola çıkarak şu önerileri verebiliriz. Kuralın bozulduğu aralıklar için B. Bede ve G. Gal [8] çalışmasında çözümün lokal (bölgesel) olarak incelenmesi gerektiğini belirtmiştir. Veya çalıştığımız aralıkta çözümün $\alpha-$kesit kümesinin sınır noktaları min, max fonksiyonlarıyla düzenlenerek çalışılabilir.

3.2 Solow Büyüme Modelinin Dereceli Mantık Teorisi Yaklaşımı ile Analizi

İktisatçıların Gayri Safi Yurtiçi Hasıla'nın (GSYH), yani toplam üretim seviyesinin, nasıl belirlediğini açıklamak için kullandıkları temel modellerin başında Robert Solow tarafından geliştirilen Solow büyüme modeli gelmektedir[23]. Solow modeli, toplam üretim fonksiyonu, fiziki sermaye denklemi ve hanehalkı tarafından yapılan tasarruflar olmak üzere üç temel faktörden oluşmaktadır.
Toplam üretim seviyesini belirlemek için $Y = F(A, K, L)$ fonksiyonu kullanılır. Burada Y toplam üretim seviyesini, A teknoloji seviyesini, K sermaye seviyesini, L ise işgücü seviyesini göstermektedir. Fonksiyonun bileşenlerinden de anlaşılacağı üzere bir ekonomideki toplam üretim seviyesini sermaye, işgücü ve teknoloji belirlemektedir.
Bir ekonomideki fiziki sermaye uzun ömürlü ekipmanlardan oluşmaktadır. Fakat bu ekipmanlar sonsuz ömürlü değildir. Çünkü bu ekipmanlar yıpranma ve aşınmaya maruz kalmaktadır. Bu yıpranmalar yeni yatırımlarla onarılmazsa belirli bir süre sonra kullanılmaz hale gelmektedir. Bu yüzden fiziki sermaye denklemi yıpranmaya ve yatırımlara bağlıdır. Fiziki sermaye denklemi, dinamik bir denklemdir. Yani gelecek yılki fiziki sermaye, bu yılki sermayenin yıpranmamış kısmına ve bu yıl yapılan yatırıma eşittir [1, 2].

$$K_{\text{gelecek yıl}} = K_{\text{cari yıl}} - (\text{Yıpranma Oranı})K_{\text{cari yıl}} + \text{Yatırım}_{\text{cari yıl}}$$

yani

$$K_{t+1} = K_t - \delta K_t + I_t$$

Burada I yatırım miktarını, δ yıpranma oranını alt indesler ise değişkenlerin hangi yıla ait olduğunu göstermektedir.
Hanehalkı tarafından yapılan tasarruflar ise toplam üretim seviyesine ve tüketim seviyesine bağlıdır. Toplam üretim seviyesi aynı zamanda toplam gelir seviyesini gösterdiğinden, gelirimizin tüketim sonrası kalan kısmı tasarruflarımıza eşittir. Yani, $Y_t = S_t + C_t$. Burada, S tasarruf C ise tüketim seviyesini göstermektedir. Keynesyen ekonomi modellerinden bilindiği üzere gelirimizin bir kısmını tüketir bir kısmını da tasarruf ederiz. Yani, $S_t = sY_t$ olarak ifade edilebilir ve s tasarruf oranını göstermektedir.

Denge durumunda hanehalkı tasarruflarını yatırım olarak değerlendireceklerinden $I_t = S_t$ olur. Bu durumda fiziki sermaye denklemi;

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + I_t$$

$$\Rightarrow K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sY_t$$

Üretim fonksiyonu olarak kullanılan en temel form Cobb-Douglas üretim fonkiyonu formudur. Bu forma göre üretim fonksiyonu, $\beta \in (0,1)$ için $Y_t = F(A, K_t, L_t) = AK_t^{\beta}L_t^{1-\beta}$ olarak ifade edilir. Bu formu kullanarak fiziki sermaye denklemi;

$$\Rightarrow K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sAK_t^{\beta}L_t^{1-\beta}$$

olarak elde edilir.
Ekonomide değişkenler genellikle kişi başına düşen karşılığıyla ifade edilir. Böylece nüfusu fazla olan ülkelerle az olan ülkelerin karşılaştırılması daha objektif bir şekilde yapılabilir. Bu yüzden biz de tüm değişkenlerin kişi başına düşen ifadelerini hesaplamak için nüfusa böleceğiz. Kişi başına düşen ifadeleri ise küçük harfle göstereceğiz. Örneğin ekonomideki t yılına ait toplam sermaye K_t ile gösterilmektedir. Toplam sermayeyi kişi başına düşen sermaye olarak ifade etmek için t yılındaki nüfusa bölünür ve k_t olarak gösterilir. Yani, $k_t \equiv K_t/L_t$ olarak tanımlanır.

3.2.1 Fark denkleminden diferensiyel denkleme dönüşüm

Zaman periyotları $(t = 0, 1, ...)$ günleri, haftaları, ayları veya yılları ifade etmektedir. Bir anlamda, zaman birimi önemli değildir. Bu keyfilikten yola çıkarak, zaman birimini mümkün olduğunca küçük yaparak, yani sürekli süreye geçerek dinamiklere bakmak daha uygun olabilir. Modern makroekonominin çoğu (büyüme teorisi dışında) ayrık-zamanlı modeller kullansa da, birçok büyüme modeli sürekli zamanda formülize edilir. Sürekli çalışma zamanları kullanıldığında ayrık zaman modellerinin bazı patolojik sonuçları ortadan kalktığı için sürekli çalışma düzeni bir takım avantajlara sahiptir. Ayrıca, sürekli-zamanlı model dinamikleri analizinde daha fazla esneklik alınımız vardır ve daha geniş bir alanda açık form çözümlere izin vermektedir.
Basit bir fark denklemi ile başlayalım:

$$x(t+1) - x(t) = g(x(t)).$$

Bu denklem, t ile $t+1$ arasında, x deki mutlak büyümenin $g(x(t))$ ile verildiğini belirtir. Bu zaman periyotları arasında, x in nasıl geliştiğini bilmiyoruz. Ancak, t ve $t+1$ çok uzak değilse, $\Delta t \in [0,1]$ için aşağıdaki yaklaşımı yapabiliriz:

$$x(t+\Delta t) - x(t) \approx \Delta t . g(x(t))$$

Eşitliğin her iki tarafını Δt ye bölüp limit değerini hesaplayalım.

$$\lim_{\Delta t \to \infty} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{\Delta t . g(x(t))}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} \approx g(x(t))$$

Analizimizin ilerleyen kısmında herhangi bir değişkenin zamana göre türevi $\frac{dx(t)}{dt} \equiv \dot{x(t)}$ şeklinde gösterilecektir.

3.2.2 Sürekli zaman kullanarak Solow model analizi

Sürekli zaman kullanarak yapacağımız analizler için fark denklemi olarak verdiğimiz eşitliklikleri sürekli zamana dönüşümünü yapmamız gerekmektedir. Sürekli zamanda fonksiyon olarak ifade edilen herhangi bir $x(t)$ değişkeni fark denklemlerinde x_t olarak kullanılmıştı. Bu iki gösterim bizim için bir farklılık oluşturmamaktıdır. Ayrık zaman kullanarak ifade ettiğimiz fiziki sermaye fark denklemi;

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + sAK_t^{\beta} L_t^{1-\beta}$$

$$\Rightarrow K(t+1) = (1-\delta)K(t) + sAK(t)^{\beta} L(t)^{1-\beta}$$

$$\Rightarrow K(t+1) - K(t) = sAK(t)^{\beta} L(t)^{1-\beta} - \delta K(t)$$

Böylece fiziki sermaye fark denkleminden fiziki sermaye diferensiyel denklemine geçiş yapılabilir.

$$\Rightarrow \dot{K(t)} = sAK(t)^{\beta} L(t)^{1-\beta} - \delta K(t)$$

Ekonomi büyüme analizlerinin çoğunda, nüfustaki artış önemli bir rol oynamaktadır. Solow büyüme modelinde de dengeyi nasıl etkilediğini görmek yararlıdır. Bu etkiyi görmek için işgücü piyasasını modelleyeceğiz. Nüfus artış oranını n olarak kabul edersek işgücü piyasası aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$L(t) = e^{nt} L(0)$$

Burada işsizlik oranının değişmediği düşünülmektedir. Çünkü amacımız işsizliğin etkisini ölçmek değil ekonomideki büyümeyi anlamaya çalışmaktır.
$k_t \equiv K_t / L_t$ eşitliğinin her iki tarafının t'ye göre türevini alırsak;

$$\begin{aligned} \dot{k(t)} &= \frac{\dot{K(t)} L(t) - K(t) \dot{L(t)}}{L(t)^2} \\ &= \frac{\dot{K(t)}}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)} \frac{\dot{L(t)}}{L(t)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\dot{K(t)}}{K(t)} \frac{K(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L(t)} \frac{\dot{L(t)}}{L(t)} \\
&= \frac{K(t)}{L(t)} \left(\frac{\dot{K(t)}}{K(t)} - \frac{\dot{L(t)}}{L(t)} \right) \\
\Rightarrow \frac{\dot{k(t)}}{k(t)} &= \frac{\dot{K(t)}}{K(t)} - \frac{\dot{L(t)}}{L(t)}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\begin{aligned}
L(t) = e^{nt} L(0) \quad &\Rightarrow \quad \dot{L(t)} = n e^{nt} L(0) \\
\Rightarrow \quad \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} &= \frac{n e^{nt} L(0)}{e^{nt} L(0)} = n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{K(t)} &= sAK(t)^{\beta} L(t)^{1-\beta} - \delta K(t) \\
\Rightarrow \frac{\dot{K(t)}}{K(t)} &= \frac{sAK(t)^{\beta} L(t)^{1-\beta} - \delta K(t)}{K(t)} \\
\Rightarrow \frac{\dot{K(t)}}{K(t)} &= \frac{sAK(t)^{\beta} L(t)^{1-\beta}}{K(t)} - \frac{\delta K(t)}{K(t)} \\
\Rightarrow \frac{\dot{K(t)}}{K(t)} &= sA \left(\frac{K(t)}{L(t)} \right)^{\beta-1} - \frac{\delta K(t)}{K(t)}
\end{aligned}
$$

Bu iki eşitliği kullanarak;

$$
\begin{aligned}
\frac{\dot{k(t)}}{k(t)} &= \frac{\dot{K(t)}}{K(t)} - \frac{\dot{L(t)}}{L(t)} \\
\Rightarrow \frac{\dot{k(t)}}{k(t)} &= sAk(t)^{\beta-1} - \delta - n \\
\Rightarrow \dot{k(t)} &= sAk(t)^{\beta} - \delta k(t) - nk(t)
\end{aligned}
$$

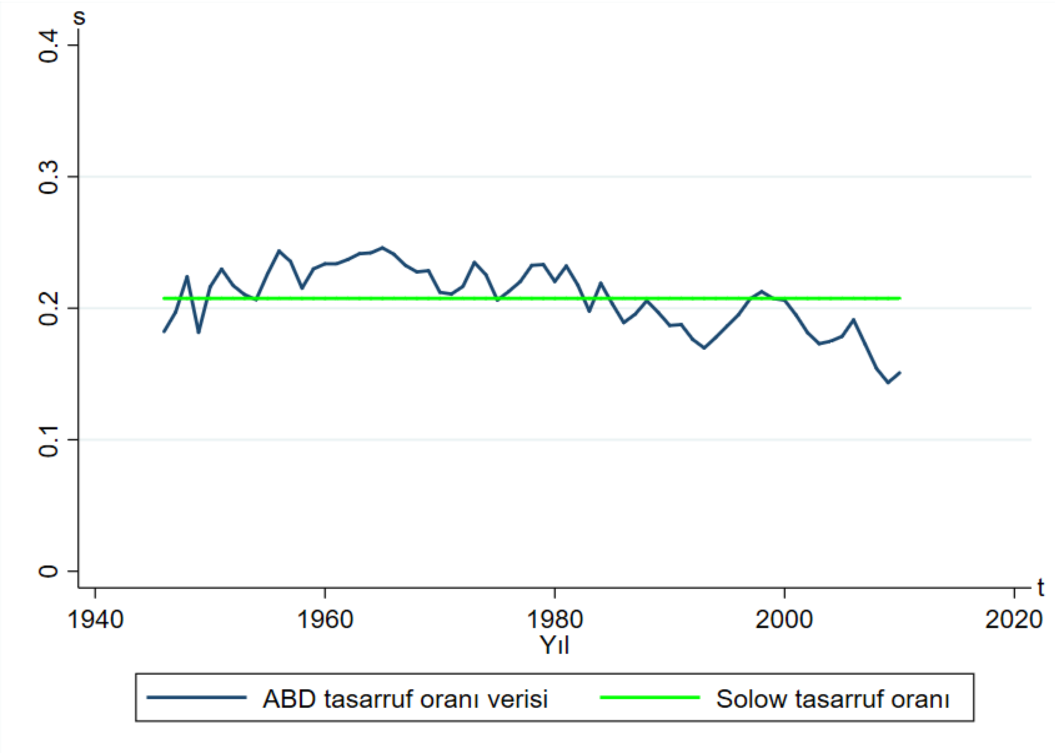
elde edilir. Kişi başına düşen fiziki sermaye diferensiyel denkleminin $k(0) > 0$ başlangıç şartını sağlayacak şekilde genel çözümünü elde etmek için Bernouilli diferensiyel denklemi için $x(t) \equiv k(t)^{1-\beta}$ dönüşümü kullanarak genel çözümü

$$
x(t) = \frac{sA}{n+\delta} + \left[x(0) - \frac{sA}{n+\delta} \right] e^{(\beta-1)(n+\delta)t}
$$

olarak elde edilir. Buna göre,

$$
k(t) = \left\{ \frac{sA}{n+\delta} + \left(k(0)^{1-\beta} - \frac{sA}{n+\delta} \right) e^{(\beta-1)(n+\delta)t} \right\}^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{3.1}
$$

şeklinde bulunur.



Şekil 3.6: 1946-2010 yılları arasındaki ABD tasarruf oranı grafiği

Ekonomi literatüründe Solow büyüme modelindeki parametreler sabit sayı olarak alınmaktadır. Fakat bu varsayım gerçek ile tam olarak örtüşmemektedir. Örneğin Şekil 3.6 de görüleceği üzere 1946-2010 yılları arasındaki Amerika Birleşik Devletleri için tasarruf oranı verisi incelendiğinde aslında tasarruf oranının dereceli sayı olarak incelenmesi daha doğru bir varsayım olacaktır. Yukarıda genel çözümü elde edilen Solow modelini tasarruf oranı dereceli sayı olacak biçimde inceleyelim.

Örnek 3.2.1. Solow büyüme modelinin dereceli çözümünü elde etmek için Zadeh'in genişleme prensibi metodunu kullanalım. (3.1) eşitliğinde $\dfrac{A}{n+\delta} = U$ ve $e^{(\beta-1)(n+\delta)t} = E(t)$ olarak alınsın. Genişleme prensibi gereğince $k(t,\alpha) = [k_1(t,\alpha), k_2(t,\alpha)]$ ve $s(\alpha) = [s_1(\alpha), s_2(\alpha)]$ alınarak,

$$\begin{aligned}
\ln k(t) &= \frac{1}{1-\beta} \ln \left[sU + [k(0)^{1-\beta} - sU] E(t) \right] \\
[\ln k_1(t,\alpha), \ln k_2(t,\alpha)] &= \frac{1}{1-\beta} \ln \left[[s_1U, s_2U] + \left[k(0)^{1-\beta} + [-s_2U, -s_1U] \right] E(t) \right] \\
&= \frac{1}{1-\beta} \ln \left[[s_1U, s_2U] + \left[k(0)^{1-\beta} - s_2U,\ k(0)^{1-\beta} - s_1U \right] E(t) \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{1-\beta}\ln\Big[\big[s_1U + (k(0)^{1-\beta} - s_2U)E(t),\ s_2U + (k(0)^{1-\beta} - s_1U)E(t)\big]\Big]$$

$$\Rightarrow\ \ln k_1(t,\alpha) = \frac{1}{1-\beta}\ln\Big(s_1U + (k(0)^{1-\beta} - s_2U)E(t)\Big)$$

$$\Rightarrow\quad k_1(t,\alpha) = \Big(s_1U + (k(0)^{1-\beta} - s_2U)E(t)\Big)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

$$\therefore k_1(t,\alpha) = \left(s_1\frac{A}{n+\delta} + (k(0)^{1-\beta} - s_2\frac{A}{n+\delta})e^{(\beta-1)(n+\delta)t}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

Diğer yandan,

$$\Rightarrow\ \ln k_2(t,\alpha) = \frac{1}{1-\beta}\ln\Big(s_2U + (k(0)^{1-\beta} - s_1U)E(t)\Big)$$

$$\Rightarrow\quad k_2(t,\alpha) = \Big(s_2U + (k(0)^{1-\beta} - s_1U)E(t)\Big)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

$$\therefore k_2(t,\alpha) = \left(s_2\frac{A}{n+\delta} + (k(0)^{1-\beta} - s_1\frac{A}{n+\delta})e^{(\beta-1)(n+\delta)t}\right)^{\frac{1}{1-\beta}}$$

elde edilir.

Örnek 3.2.2. Veri Temelli Analiz
ABD verilerini kullanarak Solow büyüme modelinin dereceli çözümünün simulasyonunu elde edelim. Bu analizde 1946-2010 yılları baz alınmıştır. Veriler Dünya Bankası veri sistemi kullanılarak elde edilmiştir. Ayrıca, bu bağlamda en önemli çalışmalardan biri olan Thomas Piketty'nin [21] çalışmasıyla elde ettiği veri seti Solow parametrelerin hesaplamasında kullanılmıştır. Bu veri setleri sonucunda elde edilen parametrelerin istatistik bilgisi Çizelge 3.1 de verilmiştir.

Çizelge 3.1: **Özet İstatistik Bilgileri**

	(Gözlem sayısı)	(Ortalama)	(Standart Sapma)	(Minimum)	(Maksimum)
n	65	0.015132	0.016092	-0.037717	0.046371
s	65	0.207519	0.024591	0.143420	0.245913
β	65	0.238013	0.019241	0.199311	0.289278
K	65	9149.905	10543.93	323.3118	37340.44
Y	65	4442.416	4634.952	227.8120	14964.37
k/y	65	1.846261	0.259876	1.419204	2.664739

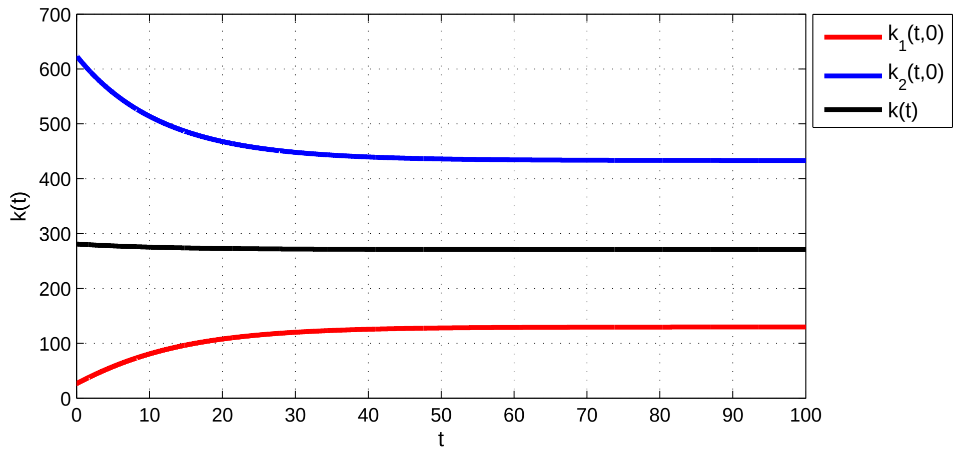
Kaynak: Dünya Bankası & Thomas Piketty veri seti

Hesapladığımız veriler yardımıyla parametreleri $\beta = 0.24$, $n = 0.02$ ve $\bar{s} = (0.12, 0.21, 0.30)$ olarak kullanabiliriz. O halde $s(\alpha) = [0.12 + 0.09\alpha,\ 0.30 - 0.09\alpha]$ dir. Başlangıç değeri için 1946 yılındaki sermaye miktarı $k(0) = 281$ kullanılmıştır. Ayrıca yıpranma oranı $\delta = 0.09$ [18] ve $A = 37$ Solow modelinin diğer parametreleridir.

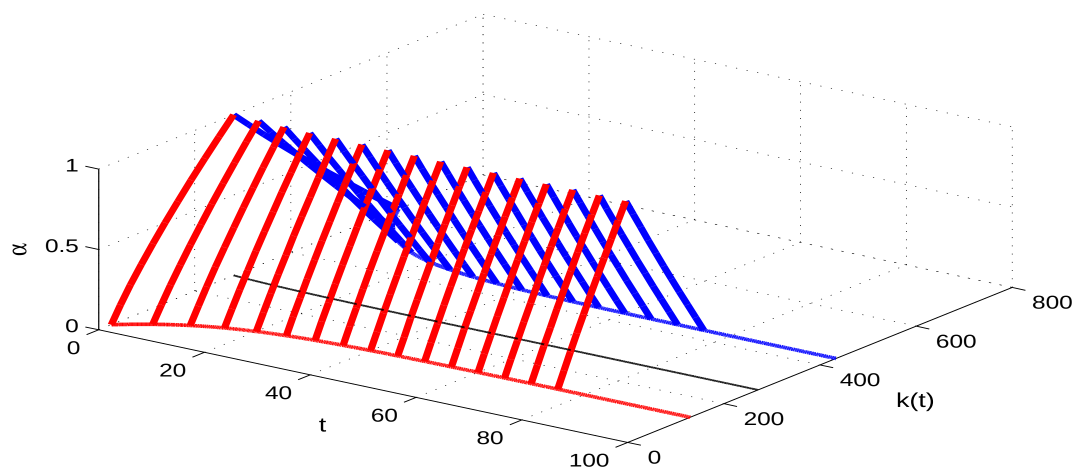
Hesaplanan parametrelere göre $k_1(t,\alpha)$ ve $k_2(t,\alpha)$ ise sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$k_1(t,\alpha)=\left((0.12+0.09\alpha)\frac{37}{0.11}+\left(281^{0.76}-(0.30-0.09\alpha)\frac{37}{0.11}\right)e^{-0.0836\,t}\right)^{\frac{25}{19}}$$
$$k_2(t,\alpha)=\left((0.30-0.09\alpha)\frac{37}{0.11}+\left(281^{0.76}-(0.12+0.09\alpha)\frac{37}{0.11}\right)e^{-0.0836\,t}\right)^{\frac{25}{19}}$$

Zadeh'in genişleme ilkesiyle elde ettiğimiz çözümün grafiği ise aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.7: $k_1(t,0)$, $k_2(t,0)$ ve klasik çözümün grafiği



Şekil 3.8: $k(t,\alpha)$ için üyelik fonksiyonu grafiği

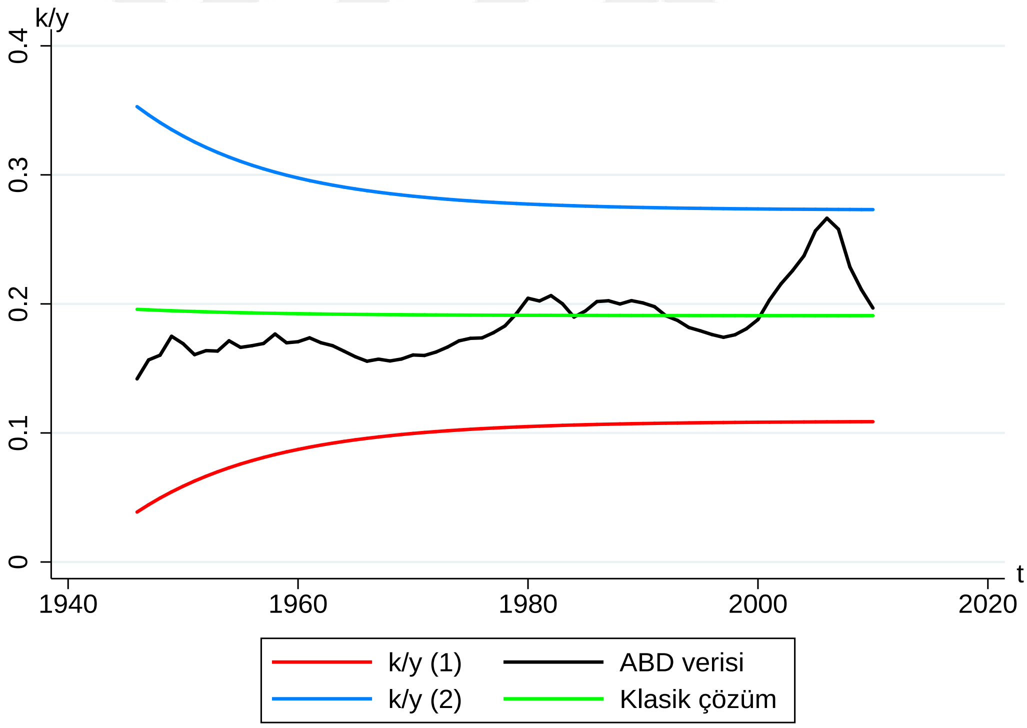
Solow büyüme modelinin önemli sonuçlarından biri fiziki sermaye stokunun GSYH'ye oranının $\left(\frac{K(t)}{Y(t)}\right)$ durağan dengedeki bir ekonomi yani gelişmiş bir ekonomi için sabit olmasıdır. Fakat ABD ekonomisi için bile bu oran sabit değildir. Bu problemin üstesinden gelmek için Zadeh'in genişleme prensibine başvurabiliriz. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$k(t)/y(t) = \left(\frac{s}{n+\delta} + \left(\frac{1}{A}k(0)^{1-\beta} - \frac{s}{n+\delta}\right)e^{(\beta-1)(n+\delta)t}\right)$$

Elde ettiğimiz bu dereceli çözüm için ABD ekonomisi verilerini kullanırsak çözüm aşağıdaki gibi olur.

$$[k/y]_1(t,\alpha) = \left((0.12+0.09\alpha)\frac{100}{11} + \left(\frac{281^{0.76}}{37} - (0.30-0.09\alpha)\frac{100}{11}\right)e^{-0.0836\,t}\right)$$
$$[k/y]_2(t,\alpha) = \left((0.30-0.09\alpha)\frac{100}{11} + \left(\frac{281^{0.76}}{37} - (0.12+0.09\alpha)\frac{100}{11}\right)e^{-0.0836\,t}\right)$$

Fiziki sermaye stokunun GSYH'ye oranının dereceli çözümü, klasik çözümü ve ABD ekonomisi için hesaplanan verilerle elde edilen grafikler aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3.9: Fiziki sermaye stokunun GSYH'ye oranının grafikleri

Grafikten görüleceği üzere klasik çözüm neredeyse sabit olup ortalama değere eşittir. Fakat ABD ekonomisi verisi 2000 yılına kadar ortalamanın etrafında dalganırken 2000 yılı sonrası ani bir yükselişle ortalamadan uzaklaşıp tekrar ortalamaya yaklaşmıştır. Klasik çözümü kabul ederek yapılan analizler sonucunda bu dalgalanmaların sınırını tahmin etmek imkansızdır. Fakat dereceli çözüm ile elde ettiğimiz çözümler hem $\alpha = 1$ için klasik çözümü elde etmemizi sağlarken bununla birlikte $\alpha = 0$ durumu için de bu değerin sınırlarını elde etmemizi sağlamaktadır. Böylece hem ortalamada ekonominin nasıl hareket ettiğini hesaplamış hem de 2009 krizi gibi dünya çapında büyük etkilere sebep olan kırılma noktalarında ekonominin karşılaşabileceği sorunların sınırları tespit edilmiştir. Böylece ekonomi politikalarının daha etkili ve gerçeğe yakın olmasını sağlayacak bir analiz elde edilebilir.

4. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada dereceli küme kavramı ve özellikleri verildikten sonra dereceli sayılar arasındaki önemli aritmetik işlemler tanıtıldı. Ardından Lotfi A. Zadeh tarafından verilen genişleme prensibi açıklanarak Solow büyüme modelinin dereceli çözümünün elde edilmesinde kullanıldı.

Dereceli mantıktaki türev çeşitleri olan Hukuhara türevi, güçlü genelleştirilmiş türev, zayıf genelleştirilmiş türev, genelleştirilmiş Hukuhara türevi ve genelleştirilmiş türev örnekleriyle incelendi.

Uygulamalar bölümünde SIR epidemik modelinin ve Solow büyüme modelinin dereceli mantık bakış açısıyla analizi yapıldı. Burada dereceli diferensiyel denklemlerin çözümü için sık kullanılan bir yöntem olan güçlü genelleştirilmiş türev yöntemi ile SIR epidemik modeli çözümlerin nümerik simülasyonları üzerinden analiz edildi.

Son olarak ekonomide temel büyüme modellerinden olan Solow büyüme modeli için dereceli çözümler elde edilerek ekonomi analizleri açısından önemi gösterildi. Şekil 3.9 dan da görüldüğü üzere dereceli çözümler, ekonomi politikaları için daha güvenli analizlerin yapılmasına yardımcı olmaktadır. Fakat biz her ne kadar bu analizimizi Solow büyüme modeli için yapmış olsak da aslında ekonomi analizleri için daha doğru yöntemin dereceli çözümler olabileceğini gördük. Ekonomi modellerinin dereceli çözümleri literatüre kazandırılarak ekonomide karşılaşılan krizlerin büyük çapta zararlar oluşturulması önlenebilir. Çünkü klasik çözümler sınırlarla ilgilenmek yerine yalnızca ortalamada ekonominin durumunu analiz etmek için kullanılırken dereceli çözümler hem klasik çözümün sonuçlarını içerir hem de çözüm için sınırlar belirleyip ekonominin gidişatını tahmin etmemizde yardımcı olur.

KAYNAKLAR

[1] **Acemoğlu, D.,** (2008). Introduction to modern economic growth, *Princeton University Press.*

[2] **Acemoğlu, D., Laibson D., List J. A.,** (2016). Macroeconomics. Global ed., *Harlow: Pearson.*

[3] **Akın, Ö., Oruç, Ö.,** (2011). Sir epidemic model with fuzzy initial values, *The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society,* 408.

[4] **Allen, L. J.,** (2007). Introduction to mathematical biology, *Pearson/Prentice Hall.*

[5] **Barros, L. C. D., Bassanezi, R. C., Lodwick W. A.,** (2017). A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics: Theory and Applications, *Springer.*

[6] **Bede, B.,** (2013). Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, *Springer.*

[7] **Bede, B., Gal, S. G.,** (2005). Generalizations of the differentiability of fuzzy number valued functions with applications of fuzzy differential equations, *Fuzzy Sets and Systems,* 151, 3, 581–599.

[8] **Bede, B., Gal, S. G.,** (2010). Solutions of fuzzy differential equations based on generalized differentiability, *Communications in Mathematical Analysis,* 9, 2, 22-41.

[9] **Bede, B., Stefanini, L.,** (2013). Generalized differentiability of fuzzy-valued functions, *Fuzzy Sets and Systems,* 230, 119–141.

[10] **Chalco-Cano, Y., Roman-Flores, H.,** (2008). On new solutions of fuzzy differential equations. *Chaos, Solitons & Fractals, 38,* 1, 112-119.

[11] **Diamond, P., Kloeden, P.,** (2000). Metric topology of fuzzy numbers and fuzzy analysis. *In Fundamentals of Fuzzy Sets, Springer,* 583-641.

[12] **Goetschel Jr, R., Voxman, W.,** (1986). Elementary fuzzy calculus, *Fuzzy sets and systems,* 18, 1, 31-43.

[13] **Harko, T., Lobo, F. S., Mak, M. K.,** (2014). Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates, *Applied Mathematics and Computation,* 236, 184-194.

[14] **Hausdorff, F.,** (1962). Set theory (Vol. 119), *American Mathematical Soc..*

[15] **Hukuhara, M.,** (1967). Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe, *Funkcialaj Ekvacioj, 10,* 3, 205-223.

[16] **Lakshmikantham, V., Mohapatra, R. N.,** (2004). Theory of fuzzy differential equations and inclusions, *CRC press.*

[17] **Lee, K. H.,** (2006). First course on fuzzy theory and applications (Vol. 27), *Springer Science & Business Media.*

[18] **Nadiri, M. I., Prucha, I. R.,** (1996). Estimation of the depreciation rate of physical and R&D capital in the US total manufacturing sector, *Economic Inquiry*, *34*, 1, 43-56.

[19] **Negoita, C. V., Ralescu, D. A.,** (1975). Applications of fuzzy sets to systems analysis, *Basel : Birkhäuser.*

[20] **Nguyen, H. T.,** (1978). A note on the extension principle for fuzzy sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *64*, 2, 369-380.

[21] **Piketty, T., Zucman, G.,** (2014). Capital is back: Wealth-income ratios in rich countries 1700–2010, *The Quarterly Journal of Economics*, 129, 3, 1255-1310.

[22] **Puri, M. L., Ralescu, D. A.,** (1983). Differentials of fuzzy functions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 91, 2, 552-558.

[23] **Solow, R. M.,** (1956). A contribution to the theory of economic growth, *The quarterly journal of economics*, *70*, 1, 65-94.

[24] **Stefanini, L.,** (2010). A generalization of Hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic, *Fuzzy sets and systems*, 161, 11, 1564-1584.

[25] **Stefanini, L., Bede, B.,** (2009). Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71, 3-4, 1311-1328.

[26] **Stefanini, L.,** (2008). A generalization of Hukuhara difference for interval and fuzzy arithmetic, *Soft Methods for Handling Variability and Imprecision, in: Series on Advances in Soft Computing*, 48, 1-13.

[27] **Zadeh, L. A.,** (1965). Information and control. *Fuzzy sets*, *8*, 3, 338-353.

[28] **Zadeh, L. A.,** (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning, *Information sciences*, 8, 3, 199-249.

EKLER

EK 1 : Bazı Temel Tanım ve Teoremler

EK 1: Bazı Temel Tanım ve Teoremler

A1.Teorem . *X metrik uzayı üzerinde $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. f fonksiyonunun üst yarı sürekli olması icin gerek ve yeter şart*

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \textit{için} \quad \{x \in X : f(x) < \alpha\} = f^{-1}((-\infty, \alpha))$$

kümesinin açık küme olmasıdır. Veya denk olarak

$$\alpha \in \mathbb{R} \quad \textit{için} \quad \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = f^{-1}([\alpha, \infty))$$

kümesinin kapalı olmasıdır [6].

A2. Tanım. $x \in \mathbb{R}^n$ ve $A, B \in K_C(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere,

$$d_H(A,B) = \max\{d_H^*(A,B), d_H^*(B,A)\}$$

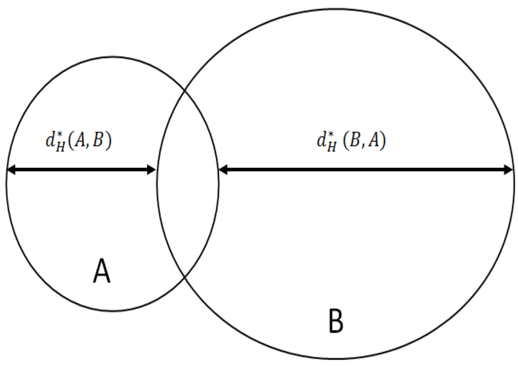
şeklindeki $d_H : K_C(\mathbb{R}^n) \times K_C(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ metriğine **Hausdorff metriği** denir. Burada

$$d_H^*(A,B) = \sup\{d(a,B) \ : a \in A\}$$
$$d_H^*(B,A) = \sup\{d(b,A) \ : b \in B\}$$

ve $\| \, . \, \|$ $\mathbb{R}^n$ üzerinde öklid normunu göstermek üzere

$$d(x,A) = \inf\{\| x - a \| : a \in A\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır [14].



Şekil 4.1: $d_H^*(A,B)$ ve $d_H^*(B,A)$ gösterimi

Not Tek boyutlu durumda ise $K_C(\mathbb{R}) = \mathbb{I}$ aralıklar ailesi olur ve burada Hausdorff metriği, $A = [a_1, a_2]$ ve $B = [b_1, b_2]$ için $d_H : \mathbb{I} \times \mathbb{I} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$$d_H(A,B) = \max\{|a_1 - b_1|, |a_2 - b_2|\}$$

şeklinde tanımlanır.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad	:Maksude Keleş
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum Tarihi ve Yeri	:02.07.1992 Ankara
E-posta	: m.keles@etu.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2014, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2018, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	**Yer**	**Görev**
2015-2018	TOBB ETÜ Matematik Bölümü	Tam Burslu Y.L. Öğrencisi

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Akın, Ö., **Keleş, M.,** (2017). Derivatives in Fuzzy Logic and Some Applications, *Proceedings of ICMME-17: International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, May 11-13, Şanlıurfa, Turkey.

- Akın, Ö., **Keleş, M.,** (2017). Susceptible-Infected-Recovered (SIR) Epidemic Model with a Fuzzy Transmission Parameter, *Proceedings of FUZZYSS-17: The 5th International Fuzzy Systems Symposium*, October 14-15, Ankara, Turkey.
- Akın, Ö., **Keleş, M.,** (2018). An Application of Fuzzy Differential Equations in Economics, *Proceedings of ICMME-18: International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, June 27-29, Ordu, Turkey.