

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**LESLİE TİPİ BİR AYRIK AV-AVCI POPÜLASYON MODELİNİN
KARARLILIK VE NEIMARK-SACKER ÇATALLANMA ANALİZİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Pınar BAYDEMİR

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Aralık 2018



Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

.....
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığımı onaylarım.

.....
Prof. Dr. Oktay DUMAN
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 162111011 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Pınar BAYDEMİR**'in ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**LESLİE TİPİ BİR AYRIK AV-AVCI POPÜLASYON MODELİNİN KARARLILIK VE NEIMARK-SACKER ÇATALLANMA ANALİZİ**” başlıklı tezi **14.12.2018** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Hüseyin MERDAN**
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Eş Danışman: **Dr. Öğr. Üyesi Esra KARAOĞLU**
Türk Hava Kurumu Üniversitesi

Jüri Üyeleri: **Prof. Dr. Oktay DUMAN (Başkan)**
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Prof. Dr. Niyazi ŞAHİN
Ankara Yıldırım Beyazıt Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Meltem GÖLGELİ
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Pınar BAYDEMİR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LESLİE TİPİ BİR AYRIK AV-AVCI POPÜLASYON MODELİNİN KARARLILIK VE NEIMARK-SACKER ÇATALLANMA ANALİZİ

Pınar BAYDEMİR

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Tarih: Aralık 2018

Bu tezde, Leslie tipi bir ayrik av-avcı popülasyon modelinin dinamik yapısı analiz edilmiştir. Bu model diferensiyel denklem sistemi ile tanımlanan av-avcı popülasyon modelinden Euler metodu kullanılarak elde edilmiştir. Analiz edilen model aynı çevreyi paylaşan ve birbirleriyle etkileşim içinde bulunan iki popülasyonu içermektedir. Lineer olmayan dinamik sistemler yaklaşımıyla modellenen bu popülasyonların zamana göre değişimi fark denklemleri ile ifade edilmiştir. İlk olarak ayrik av-avcı modelinin pozitif denge noktasının varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Ardından bu pozitif denge noktasının kararlı olabilmesi ve bu denge noktasında Flip çatallanma ve Neimark-Sacker çatallanmanın görülebilmesi için gerekli koşullar belirlenmiştir. Daha sonra Merkez Manifold Teoremi ve Çatallanma Teorisi kullanılarak bu koşulların sağlandığı teorik olarak ispatlanmıştır. Elde edilen bu analitik çalışmaları desteklemek amacıyla bazı parametre değerleri belirlenmiştir. Son olarak, bu parametre değerleri için sistemin faz portreleri ve çatallanma diyagramı elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fark denklemleri, Kararlılık analizi, Flip çatallanma, Neimark-Sacker çatallanma.

ABSTRACT

Master of Science

STABILITY AND NEIMARK-SACKER BIFURCATION ANALYSES OF A DISCRETE-TIME PREDATOR-PREY SYSTEM WITH LESLIE TYPE

Pınar BAYDEMİR

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Date: December 2018

In this thesis, the dynamical behaviour of a discrete-time predator-prey model of Leslie type is presented. This model is obtained from continuous-time predator-prey model by using Euler method. The model has two populations which are prey and predator living in the same environment and interacting with each other. In this model the change of populations, modeled by approximation of nonlinear dynamical systems, with respect to time is governed by difference equations. First, the existence of the positive equilibrium point of the discrete system is shown and the conditions for the stability are found. Then, the conditions of existence for Flip bifurcation and Neimark-Sacker bifurcation arising from this positive equilibrium point are determined. More specifically, these bifurcations are driven by using the center manifold theorem and the normal form theory by choosing the integral step size as a bifurcation parameter. Finally, some numerical simulations are presented to support and extend the theoretical results.

Keywords: Difference equation, Stability analysis, Flip bifurcation, Neimark-Sacker bifurcation.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca yardımları ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Hüseyin MERDAN'a ve eş danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Esra KARAOĞLU'na; kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine; değerli jüri üyeleri Prof. Dr. Oktay DUMAN'a, Prof. Dr. Niyazi ŞAHİN'e ve Dr. Öğr. Üyesi Meltem GÖLGELİ'ye teşekkürlerimi sunarım. Destekleri ile her zaman yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Son olarak yüksek lisans eğitimimde sağladığı burstan dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİL LİSTESİ	viii
KISALTMALAR	ix
SEMBOL LİSTESİ	x
RESİM LİSTESİ	xi
1. GİRİŞ	1
1.1 Fark Denklemleri	4
1.1.1 Temel tanım ve notasyonlar	5
1.1.2 Yüksek mertebeden sabit katsayılı fark denklemini sisteme çevirme	6
1.1.3 Birinci mertebeden lineer olmayan fark denklemlerinin analizi	8
2. AYRIK DİNAMİK SİSTEMLERİN ÇATALLANMA ANALİZİ	13
2.1 Flip Çatallanma Normal Formu ve Çatallanma Teorisi	14
2.2 Neimark-Sacker Çatallanma Normal Formu ve Çatallanma Teorisi	16
3. MERKEZ MANİFOLD TEORİSİ	31
3.1 Merkez Manifold Teoremi	31
4. BİR AYRIK AV-AVCI POPÜLASYON MODELİNİN ÇATALLANMA ANALİZİ	35
4.1 Tez Problemi ve Tezin Amacı	35
4.2 Kararlılık Analizi	37
4.2.1 Denge noktası ve karakteristik polinom	37
4.2.2 Denge noktasının kararlılığı	41
4.3 Çatallanma Analizi	43
4.3.1 Flip çatallanma	43
4.3.2 Neimark-Sacker çatallanma	49
5. NÜMERİK SONUÇLAR	55
6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	63
KAYNAKLAR	65
EKLER	67
ÖZGEÇMİŞ	71

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1: Matematiksel Modelleme Süreci	1
Şekil 1.2: Av-Avcı Popülasyon Grafiği	4
Şekil 2.1: Kritik Parametre Değerleri (Kuznetsov, 1998)	13
Şekil 2.2: İkinci İterasyon Fonksiyonu (Kuznetsov, 1998)	14
Şekil 2.3: Flip Çatallanma (Kuznetsov, 1998)	15
Şekil 2.4: Flip Çatallanma Diyagramı (Kuznetsov, 1998)	15
Şekil 2.5: Süperkritik Neimark-Sacker çatallanma (Kuznetsov, 1998)	20
Şekil 2.6: Subkritik Neimark-Sacker çatallanma (Kuznetsov, 1998)	20
Şekil 3.1: Denge noktasının kritik özdeğerleri (Wiggins, 2003)	32
Şekil 5.1: $\delta = 0.2050$ iken $N(0) = 77$, $P(0) = 17$ başlangıç değerine sahip av ve avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği sırasıyla (a) ve (b) şekillerinde, (5.2) sisteminin faz portresi ise şekil (c) de verilmiştir.	56
Şekil 5.2: δ parametresi $0.1 \leq \delta \leq 0.35$ aralığında değişirken av popülasyonunun çatallanma diyagramı şekil (a) da, avcı popülasyonunun çatallanma diyagramı şekil (b) de verilmiştir.	57
Şekil 5.3: (a) ve (b) $\delta = 1.2$ iken $N(0) = 7.4$, $P(0) = 14.9$ başlangıç değerindeki av-zaman, avcı-zaman ilişkisini göstermektedir. Aynı parametre değerlerindeki av-avcı faz portresi ise şekil (c) de gösterildiği gibidir.	58
Şekil 5.4: (a) ve (b) $\delta = 1.9$ iken $N(0) = 7.4$, $P(0) = 14.9$ başlangıç değerindeki av-zaman, avcı-zaman ilişkisini göstermektedir. Aynı parametre değerlerindeki av-avcı faz portresi ise şekil (c) de gösterildiği gibidir.	59
Şekil 5.5: (a) ve (b) $\delta = 2.1$ iken $N(0) = 7.4$, $P(0) = 14.9$ başlangıç değerindeki av-zaman, avcı-zaman ilişkisini göstermektedir. Aynı parametre değerlerindeki av-avcı faz portresi ise şekil (c) de gösterildiği gibidir.	59
Şekil 5.6: (a) ve (b) $\delta = 2.222$ iken $N(0) = 7.4$, $P(0) = 14.9$ başlangıç değerindeki av-zaman, avcı-zaman ilişkisini göstermektedir. Aynı parametre değerlerindeki av-avcı faz portresi ise şekil (c) de gösterildiği gibidir.	60
Şekil 5.7: $N(0) = 7.4$, $P(0) = 14.9$ başlangıç değerindeki av-avcı popülasyon diyagramı $\delta = 2.222222$ iken 1.şekil, $\delta = 2.222227$ iken 2.şekil ve $\delta = 2.22223$ iken 3.şekilde gösterildiği gibidir.	60
Şekil 5.8: (a) ve (b) $\delta = 2.23$ iken $N(0) = 7.5$, $P(0) = 14.5$ başlangıç değerindeki av-zaman, avcı-zaman ilişkisini göstermektedir. Aynı parametre değerlerindeki av-avcı faz portresi ise şekil (c) de gösterildiği gibidir.	61

KISALTMALAR

Y.M.T. : Yüksek mertebeden terimler



SEMBOL LİSTESİ

Bu tezde kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda yer almaktadır.

Simgeler	Açıklama
C^k	k -kez türevlenebilen ve türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayı
T^{-1}	T matris dönüşümünün tersi
O	Büyük-O notasyonu
$(x_1, \dots, x_2)^T$	(x_1, \dots, x_2) vektörünün devriği
A	Sistemin denge noktasında hesaplanan Jakobiyen matrisi
λ	Özdeğer
$\text{Re}(\lambda)$	λ kompleks özdeğerinin reel kısmı
$\text{Im}(\lambda)$	λ kompleks özdeğerinin sanal kısmı
\approx	Yaklaşık olarak eşit
$Df(x, y)$	f fonksiyonunun x ve y ye göre türevi

RESİM LİSTESİ

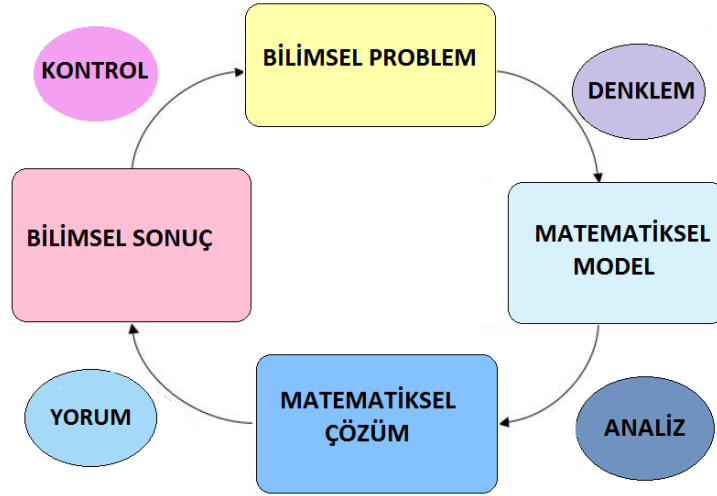
	<u>Sayfa</u>
Resim 1.1: Vito Volterra	2
Resim 1.2: Alfred James Lotka	3



1. GİRİŞ

Matematisel biyoloji her ne kadar açık bir şekilde tanımlanmış olmasa da iyi bilinen, hızla gelişen ve matematiğin en heyecan verici uygulamasıdır. Bir matematikçi için biyoloji yeni ve ilgi çekici dallar ortaya koyarken, bir biyolog için gerçek yaşam problemlerini anlayabilmek ve açıklayabilmek için geliştirilen matematisel modellene güçlü laboratvar tekniklerine uygun yeni araştırma aracı sunar (Murray, 2002).

Biyolojik sistemlerin matematisel modeli oluşturulurken üç temel adım takip edilir (Şekil 1.1). İlk olarak, incelenen sistemi doğru temsil edebilmek için sisteme ait bağımlı ve bağımsız değişkenler belirlenerek matematisel model elde edilir. Daha sonra, analiz ve diferensiyel denklemler gibi matematisel teori ve teknikler kullanılarak modelin davranışı incelenir. Son olarak, anlamlı biyolojik sonuçların elde edilip edilmediğini kontrol edebilmek için modelin sonuçları yorumlanır ve oluşturulan model incelenen sistem ile karşılaştırılır (Allen, 2007).



Şekil 1.1: Matematisel Modelleme Süreci

Biyolojik modeller, dinamik sistemlerde yoğun ilgi duyulan ve çalışılan konulardan bir tanesidir. En çok yapılan çalışmalardan biri ise popülasyon dinamiği incelemesidir. Popülasyon modelleri, tek bir türün analizini veya aynı çevreyi paylaşan iki veya daha fazla biyolojik türün etkileşimini içerir. İki türden oluşan av-avcı sistemleri ele alınırsa avcı şeklinde tanımlanan tür, av olarak tanımlanan türü tüketerek hayatını sürdürür. Avın ise hayatını sürdürebilmesi için avcıdan korunması gerekmektedir. Burada kabulümüz iki türü etkileyen başka bir dış etkinin olmadığıdır. Av, avcı için bir besin kaynağı iken avcının avlanma faaliyetinde bulunması, avın hayatını kaybetmesine yol açmaktadır. Sonuç olarak iki tür arasında besin kaynağı ve düşmanlık ilişkisi bulunmaktadır.

Av-avcı modellerinde, iki türün birbirleriyle etkileşiminin zamana göre değişimi analiz edilmektedir. Kabul edelim ki avcı popülasyonu av popülasyonundan daha yoğun olsun. Bu durumda artan avcı popülasyonu av popülasyonunun azalmasına neden olmaktadır. Av popülasyonunun azalması ise avcı popülasyonunun azalmasına yol açmaktadır. Çünkü avcı popülasyonunun temel besin kaynağı avdır. Buna karşın av popülasyonu azalan avcı popülasyonundan dolayı üreme için elverişli bir ortam bulmaktadır. Dolayısıyla av popülasyonunda artış görülmesi beklenmektedir. Böylece artan av popülasyonu, avcı popülasyonu için uygun beslenme ortamı sağlayıp avcı popülasyonunu tekrar arttırmaktadır. Böylelikle, av ve avcı popülasyonu arasındaki ilişki bir döngü halinde devam etmektedir.

Adriyatik Denizi'ndeki köpek balığı ve köpek balığının yediği balık popülasyonundaki değişiklikleri gözlemlemek için İtalyan Matematikçi Vito Volterra (1926) tarafından av-avcı ilişkisinin klasik modeli geliştirilmiştir.

Öncelikle, bu modelin nasıl oluşturulduğunu inceleyelim.



Resim 1.1: Vito Volterra¹

Matematikte analiz dalının öncülerinden biri olan İtalyan matematikçi Vito Volterra, 3 Mayıs 1860'da Ancona'da doğdu. Pisa Üniversitesi'ne başladıktan sonra (1878-82) Enrico Betti'den etkilenecek analiz ve matematiksel fizik alanında çalışmalar yapmıştır. 1883 yılında aynı üniversitenin Mekanik Kürsüsü'nde profesör oldu. Bir süre Matematiksel Fizik Kürsüsü'nde görev yaptıktan sonra 1892'de Torino Üniversitesi'nin Mekanik Kürsüsü'ne, 1900'de de Roma Üniversitesi'nin Matematik Fizik Kürsüsü'ne getirildi. 1905'te Krallık Senatosu üyeliğine seçilmesiyle siyasal etkinliklere de katılmaya başlayan ve I.Dünya Savaşı sırasında İtalyan Hava Kuvvetleri'ne yeni savaş araçları kazandırmasını amaçlayan bilimsel araştırmalar yapmıştır. Savaşın sona Volterra dikkatini matematiksel biyolojiye ayırmış ve biyolojik süreçlerin soyut matematiksel modelleri (avcı-av sistemleri gibi) üzerine çalışmıştır. Matematiğin 20.yy'daki gelişimini etkilemeyi başaran bilim adamları arasında yer alan Volterra, integral ve integrallli diferensiyel denklemlerin çözümüne, optik, elektromanyetik ve esneklik gibi fizik konularına ve biyolojiye uyguladığı fonksiyonel analiz yöntemleriyle birçok yeni matematik kuruluşuna öncülük etti. Çalışmalarıyla günümüzde hala oldukça aktif olan ve çok sayıda teknik sonuca katkıda bulunan Volterra, 11 Ekim 1940 tarihinde Roma'da vefat etti (Url-1).

$x(t)$ ve $y(t)$ sırasıyla t anındaki av ve avcı popülasyonu olmak üzere

- Eğer ortamda avcı yok ise, av popülasyonu $\frac{dx}{dt} = ax(t)$, pozitif a katsayısı ile orantılı olarak artar,
- Eğer ortamda av yok ise, avcı popülasyonu $\frac{dy}{dt} = -by(t)$, pozitif b katsayısı ile orantılı olarak azalır,
- Av popülasyonu sınırsız besin kaynağına sahiptir.
- Eğer av ve avcı popülasyonunun her ikisi de ortamda bulunuyorsa, bu iki türün birbirleriyle karşılaşma sıklıkları dikkate alınarak av popülasyonunda azalış olması beklenirken, avcı popülasyonunda artışın gerçekleşmesi beklenir. Bu iki popülasyonun karşılaşma sıklığının xy çarpımı ile orantılı olduğu kabul edilir.

¹Bu resim (Anisiu, 2014) makalesinden alınmıştır.

Öyleyse, aşağıdaki av-avcı sistemi elde edilir:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - cxy, \\ \frac{dy}{dt} &= -by + dxy.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Burada a, b, c, d katsayıları pozitifdir.

Amerikalı matematikçi, fiziko kimyacı ve aynı zamanda istatistikçi olan Alfred James Lotka (1920), Vito Volterra'dan bağımsız olarak yaptığı çalışmada aynı biyolojik çevrede bulunan farklı canlı türleri arasındaki ilişkiyi açıklamaya çalışmıştır.



Resim 1.2: Alfred James Lotka²

Alfred James Lotka, 2 Mart 1880'de Lwów, eskiden Polonya'nın bir parçası olan Avusturya-Macaristan'da doğdu. 1901'de İngiltere, Birmingham Üniversitesi Fen Fakültesi'nde eğitim gördükten sonra 1901-1902'de Leipzig Üniversitesi'nde fiziksel kimya alanından mezun oldu, 1909'da Cornell Üniversitesi'nde fizik bölümü yüksek lisans eğitimini tamamladıktan sonra doktora programına devam etti. 1909'den 1912'ye kadar Birmingham Üniversitesi'nde kimya ve fizik asistanı olarak çalıştı. Ayrıca Lotka, Scientific American Supplement dergisinin editörü olup Johns Hopkins Üniversitesi'nde öğretim elemanı olarak çalışmıştır. Her ne kadar bugün ekolojide kullanılan Lotka-Volterra denklemleri için biliniyor olsa da, Lotka, biyo-matematikçi ve biyo-istatistikçiydi. Fizik bilimlerinin prensiplerini biyolojik bilimlere de uyguladı. Lotka'nın en eski yayınlarından biri, 1912'de, Ronald Ross'un ikinci sıtma modeline bir çözüm önerisidir. 1923'te, Ross'un sıtma modellerinin beş bölümlü analizini ve genişlemesini yayımladı, patojen inkübasyonu için zaman gecikmesini modelledi. Lotka, 1925'te, matematiksel biyoloji üzerine yazılmış ilk kitaplardan birini yayınladı. Aynı zamanda Lotka, evrim konusundaki enerji bakış açısı ile de bilinir. Lotka, doğal seleksiyonun kökünde mevcut enerji için organizmalar arasında bir mücadele olduğunu ileri sürdü; Lotka'nın ilkesi, hayatta kalabilen ve zenginleşen organizmaların, enerjilerini rakiplerinden daha verimli bir şekilde ele geçiren ve kullananlar olduğunu belirtmiştir. Lotka, enerji çerçevesini insan toplumuna da genişletmiştir. Özellikle, güneş enerjisinden geri dönüşü olmayan enerjiye dayanan değişimin toplum için benzersiz ve temel zorluklar doğuracağını öne sürmüştür. 1935'te Romola Beattie ile evlenen ve hiç çocuğu olmayan Alfred J. Lotka 5 Aralık 1949'da vefat etti (Anisiu, 2014).

Lotka tarafından 1920 yılında geliştirilen av ve avcı türü arasındaki ilişki, 1926 yılında Volterra tarafından incelenmiştir. Farklı ülkelerde yaşamış bu iki bilim adamı farklı tecrübelerle sahip olmalarına rağmen aynı sonuca ulaşmıştır. Elde ettikleri sonuç iki türün etkileşiminin türlerin periyodik salınım yapmasına neden olmasıdır (Bakınız Şekil 1.2).

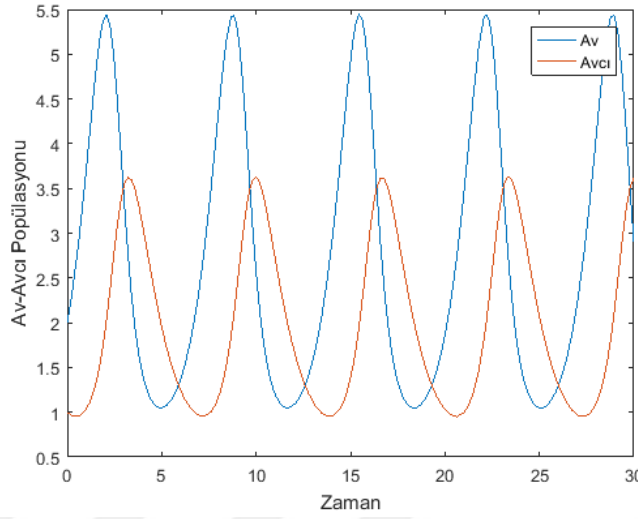
Böylece, av ve avcı popülasyonu arasındaki ilişkiyi modelleyen ve periyodik çözümlere sahip denklemlere Lotka-Volterra denklemleri denilmiştir (Anisiu, 2014).

²Bu resim (Anisiu, 2014) makalesinden alınmıştır.

Periyodik çözümlerin varlığına bir örnek gösterebilmek için (1.1) sistemini ele alalım. Kabul edelim ki $a = 1.2$, $c = 0.6$, $b = 0.8$, ve $d = 0.3$ olsun. O halde (1.1) sistemi

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 1.2x - 0.6xy \\ \frac{dy}{dt} &= -0.8y + 0.3xy\end{aligned}\tag{1.2}$$

olarak elde edilir ve (1.2) sistemin çözümleri Şekil 1.2’de görüldüğü gibi periyodik salınımlar yapar.



Şekil 1.2: Av-Avcı Popülasyon Grafiği

Matematiksel modeller, zaman ve konum etkenlerine bağlı olduğundan adi diferensiyel denklemler, fark denklemleri ya da kısmi diferensiyel denklemler kullanılarak oluşturulur. Bu denklemlerin tanımladığı dinamik sistemler zamana göre kesikli (ayrık) ve sürekli sistemler olarak ikiye ayrılır. Kesikli sistemlerin mevcut olduğu doğa olayları fark denklemleriyle modellenirken, sürekli sistemler için diferensiyel denklemler kullanılarak modelleme yapılır. Yukarıda ifade edilen Lotka-Volterra modeli sürekli sisteme bir örnektir. Bu tezde, lineer olmayan iki boyutlu fark denklem sistemi ele alınacaktır. Bunun için ilk etapta fark denklemlerini tanıtalım.

1.1 Fark Denklemleri

Fark denklemleri diferensiyel denklemlerin nümerik çözümlerinin yanısıra, biyoloji, ekonomi, mühendislik ve savunma gibi alanlarda kullanılan matematiksel modellerde ya doğrudan ya da dolaylı olarak yer almaktadır. Bu denklemlerde türev terimi yerine bilinmeyen fonksiyonun farkları bulunur. Dolayısıyla, fark denklemleri daha çok sürekli olmayan problemleri karakterize eder. Ekonomideki yıllık, aylık ya da günlük fiyat değişiminin hesaplanması, işsizlik oranının hesaplanması ve genetik alandaki kuşaklar arası değişiklikler sürekli olmayan problemlere birer örnektir.

1.1.1 Temel tanım ve notasyonlar

Tanım 1.1. f reel değerli ve reel değişkenli bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x_{t+k}, x_{t+k-1}, \dots, x_t, t) = 0 \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

denklemine k . mertebeden bir fark denklemi denir (Allen, 2007).

Burada x , t nin bir fonksiyonu olup x_t , sistemin t zamanındaki durumunu göstermektedir. Denklemin mertebesinin k olabilmesi için denklemde x_{t+k} ve x_t terimlerinin bulunması gerekmektedir. Literatürdeki mevcut çalışmalarda x_{t+k} yerine bazen $x(t+k)$ da kullanılmaktadır.

Şayet f fonksiyonu, t ye açıkça bağlı değil ise denkleme **otonom**, aksi halde **otonom olmayan** denklem adı verilir.

Tanım 1.2. $x_{t+k} + a_1x_{t+k-1} + \dots + a_kx_t = b_t$ denklemini ele alalım. $j = 1, \dots, k$ olmak üzere a_j ve b_t sabit veya t nin bir fonksiyonu ve x in bir fonksiyonu değilse bu denkleme k . mertebeden lineer fark denklemi denir ($a_k \neq 0$).

$b_t = 0$ ise denklem **homojen**, aksi halde **homojen olmayan** denklem adını alır (Allen, 2007).

Tanım 1.3.

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), t) \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t), t) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), t) \end{cases} \quad (1.4)$$

1.mertebeden n tane fark denklemlerinden oluşan bu ifadeye 1.mertebeden bir fark denklem sistemi denir.

Özel olarak, $i = 1, 2, \dots, n$ için a_{ij} ve b_j katsayıları x_i ye bağlı olmadığından

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + b_j(t)$$

sisteme lineer sistem denir ve

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) := [a_{ij}(t)]_{n \times n}, \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}_{n \times 1}$$

notasyonları altında

$$X(t+1) = A(t)X(t) + B(t) \quad \text{veya} \quad X_{t+1} = A(t)X_t + B(t)$$

olarak ifade edilir (Allen, 2007).

Tanım 1.4. *Fark denkleminin bir çözümü, (1.3) denklemini sağlayan bir $x(t), t = 0, 1, 2, \dots$ fonksiyonu iken fark denklem sisteminin çözümü, (1.4) sistemini sağlayan vektör değerli bir $X(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$ fonksiyonudur (Allen, 2007).*

Örnek. $x_{t+1} = ax_t, a \in \mathbb{R} - \{1\}$ denklemini ele alalım. Burada x_0 biliniyor ise,

$$t = 0 \text{ için } x_1 = ax_0$$

$$t = 1 \text{ için } x_2 = ax_1 = a^2x_0$$

:

$$t = t \text{ için } x_t = a^t x_0$$

$$\text{olup } t \rightarrow \infty \text{ iken } a^t x_0 = \begin{cases} 0, & |a| < 1 \\ \infty, & |a| > 1 \end{cases} \text{ olarak elde edilir.}$$

Çözümlerin ifade edilmesi: Eğer sabit katsayılı lineer bir fark denklemini için çözüm aranıyor ise $x_t = x(t) = \lambda^t$ tipinde çözümler aranır (Allen, 2007).

Örnek. $x_{t+2} + ax_{t+1} + bx_t = 0 \quad a, b \in \mathbb{R}$ denklemini ele alalım.

$$\lambda^{t+2} + a\lambda^{t+1} + b\lambda^t = 0 \Rightarrow \lambda^t(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-a \mp \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

olup denklemin çözümü için üç durum söz konusudur:

Durum 1: Eğer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ise $x(t) = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t$

Durum 2: Eğer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ise $x(t) = c_1\lambda^t + c_2t\lambda^t$

Durum 3: Eğer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ ve $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = a + ib$ ise $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ve $\theta = \text{Arctan}(b/a)$ olmak üzere $x(t) = c_1^* r^t \cos(t\theta) + c_2^* r^t \sin(t\theta)$ şeklinde yazılır.

Çözümlerin Lineer Bağımsızlığı: (Cossaration Matrix)

$$C[x_1(t), x_2(t)] = \det \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1(t+1) & x_2(t+1) \end{bmatrix} \neq 0$$

eşitsizliği $\exists t > 0$ için sağlanıyor ise $x_1(t), x_2(t)$ çözümleri lineer bağımsızdır.

1.1.2 Yüksek mertebeden sabit katsayılı fark denklemini sisteme çevirme

$x(t+k) + a_1x(t+k-1) + \dots + a_kx(t) = b(t)$, k.mertebeden fark denklemi

$$\begin{cases} y_1(t) = x(t) & y_1(t+1) = y_2(t) \\ y_2(t) = x(t+1) & \Rightarrow y_2(t+1) = y_3(t) \\ \vdots & \vdots \\ y_k(t) = x(t+k) & y_k(t+1) = x(t+k) = -a_1x(t+k-1) - \dots - a_kx(t) + b(t) \end{cases}$$

dönüşümü ile

$$\begin{pmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \\ \vdots \\ y_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & & 1 \\ -a_k & \cdots & & & -a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_k(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix},$$

$Y(t+1) = AY(t) + B(t)$ sistemine çevrilir.

Sistemin çözümü: Eğer sabit katsayılı lineer bir fark denklem sistemi için çözüm araniyor ise çözüm adayı $Y(t) = \lambda^t V$ tipindedir. O halde,

$$Y(t+1) = AY(t) \Rightarrow \lambda^{t+1} V = A\lambda^t V \Rightarrow \lambda^t (\lambda I - A)V = 0 \Rightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow P(\lambda) = 0$$

olarak hesaplanır. Burada $P(\lambda)$ karakteristik polinom, λ karakteristik polinomun kökü, yani özdeğeri olup V , λ özdeğerine karşılık gelen özvektördür. Sonuç olarak sistemin lineer bağımsız çözümler kümesi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$i = 1, \dots, n$ ve $Y_i(t) = \lambda_i^t V_i$ olmak üzere $Y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) + \dots + c_n Y_n(t)$ dir. Üstelik bu çözümler için $C[Y_1(t), \dots, Y_n(t)] \neq 0$ dir.

Örnek. $\begin{cases} y_1(t+1) = -2y_1(t) + y_2(t) \\ y_2(t+1) = y_1(t) - 2y_2(t) \end{cases}$ sistemini ele alalım.

Burada $Y(t+1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} Y(t)$ olup

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

ise $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -3$ olarak bulunur. Şimdi de bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri bulalım:

$\lambda_1 = -1$ için $(A - \lambda_1 I)V_1 = 0$ eşitliğini sağlayan V_1 vektörü

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = 1, b = 1 \Rightarrow V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Öyleyse $Y_1(t)$ çözümü $(-1)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ olarak elde edilir.

Benzer şekilde $\lambda_2 = -3$ için $(A - \lambda_2 I)V_2 = 0$ eşitliğini sağlayan V_2 vektörü

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow c + d = 0 \Rightarrow c = 1, d = -1 \Rightarrow V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $Y_2(t)$ çözümü $(-3)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ şeklinde yazılır.

Çözümlerin Cosaration matrisinin determinantı $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{vmatrix} (-1)^t & (-1)^t \\ (-3)^t & -(-3)^t \end{vmatrix} = -2^t \neq 0$$

olup $\{Y_1(t), Y_2(t)\}$ çözüm uzayının bir bazını teşkil eder.

Sonuç olarak sistemin genel çözümü

$$Y(t) = c_1 Y_1(t) + c_2 Y_2(t) = c_1 (-1)^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 (-3)^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

olarak hesaplanır.

1.1.3 Birinci mertebeden lineer olmayan fark denklemlerinin analizi

Tanım 1.5. $x_{t+1} = f(x_t)$ birinci mertebeden otonom lineer olmayan fark denklemini ele alalım. $\bar{x} = f(\bar{x})$ eşitliğini sağlayan sabit çözümüne fark denkleminin denge noktası (denge çözümü) veya f fonksiyonunun sabit noktası denir.

Birinci mertebeden $X_{t+1} = F(X_t)$ sistemi için denge çözümü ise $\bar{X} = F(\bar{X})$ sisteminin çözümü olan \bar{X} sabit değerli vektörüdür (Allen, 2007). Örneğin, $\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases}$ sisteminin denge çözümü $\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{y})$, $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{y})$ eşitliklerini sağlayan (\bar{x}, \bar{y}) çözümleridir. Genel olarak $f(x_{t+k}, \dots, x_t) = 0$ k. mertebeden fark denkleminin denge çözümü ise $f(\bar{x}, \dots, \bar{x}) = 0$ eşitliğini sağlayan \bar{x} sabit çözümüdür.

Not. $x_{t+1} = f(x_t)$ olmak üzere x_0 biliniyor ise,

$$t = 0 \Rightarrow x_1 = f(x_0)$$

$$t = 1 \Rightarrow x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$$

:

$$t = t \Rightarrow x_t = f^t(x_0)$$

gerçeklenir.

Tanım 1.6. $x_{t+1} = f(x_t)$ birinci mertebeden fark denklemini için periyodu m olan bir periyodik çözüm

$$f^m(\bar{x}) = \bar{x} \ni f^i(\bar{x}) \neq \bar{x}, \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad m > 1$$

şartını sağlayan reel değerli bir çözümdür.

$\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m\}$ ($\ni j = 1, 2, \dots, m-1$ için \bar{x}_j 'lerin herbiri periyodu m olan periyodik çözümler) cümlesine **m -döngü** adı verilir.

$\{\bar{x}_1, f(\bar{x}_1), \dots, f^{m-1}(\bar{x}_1)\}$ cümlesine ise \bar{x}_1 in **periyodik yörüngesi** adı verilir.

Benzer tanımlar $X_{t+1} = F(X_t)$ sistemi için de yapılabilir (Allen, 2007).

Tanım 1.7. $x_{t+1} = f(x_t)$ ve $f(\bar{x}) = \bar{x}$ olsun.

- Eğer $\varepsilon > 0$ verildiğinde

$$|x_0 - \bar{x}| < \delta \quad \text{iken} \quad |x_t - \bar{x}| < \varepsilon, \quad (\forall t \geq 0)$$

olacak şekilde $\exists \delta > 0$ mevcut ise \bar{x} sabit çözümüne lokal kararlı denir.

- Eğer $|x_0 - \bar{x}| < \gamma$ koşulunu sağlayan $\exists \gamma > 0$ mevcut ve $\forall x_0$ için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x_t = \lim_{x \rightarrow \infty} f^t(x_0) = \bar{x}$$

ise \bar{x} denge noktası lokal çekici adını alır.

- Eğer \bar{x} hem lokal kararlı hem de lokal çekici ise \bar{x} denge çözümüne lokal asimptotik kararlı denir.

Benzer tanımlar $X_{t+1} = F(X_t)$ sistemi için de yapılabilir. Burada $|\cdot|$ yerine $\|\cdot\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ alınmalıdır (Allen, 2007).

Kararlılık analizi $f(\bar{x}) = \bar{x}$ sağlansın. Öyleyse, $f(x_t)$ fonksiyonunu \bar{x} civarında Taylor serisine açalım:

$$f(x_t) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_t - \bar{x}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_t - \bar{x})^2 + Y.M.T..$$

Burada Y.M.T. ifadesi $(x_t - \bar{x})$ a göre yüksek mertebeden terimleri simgelemektedir.

O halde,

$$x_{t+1} \approx \bar{x} + f'(\bar{x})(x_t - \bar{x}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_t - \bar{x})^2 \quad \text{yazılabilir. Buradan}$$

$$x_{t+1} - \bar{x} \approx f'(\bar{x})(x_t - \bar{x}) + \frac{f''(\xi)}{2}(x_t - \bar{x})^2 \quad \text{olarak elde edilir.}$$

Şimdi de $u_t = x_t - \bar{x}$ alınırsa

$$u_{t+1} \approx f'(\bar{x})u_t + \frac{f''(\bar{x})}{2}u_t^2 \quad \text{olup} \quad u_{t+1} \approx f'(\bar{x})u_0 \text{ bulunur.}$$

Burada denge çözümü $\bar{u} = 0$ olup sonuç olarak

$$t = 0 \Rightarrow u_1 = f'(\bar{x})u_0$$

$$t = 1 \Rightarrow u_2 = f'(\bar{x})u_1 = [f'(\bar{x})]^2 u_0$$

:

$$t = t \Rightarrow u_t = [f'(\bar{x})]^t u_0$$

çözümü elde edilir.

Tanım 1.8. Eğer $|f'(\bar{x})| \neq 1$ ise \bar{x} denge noktasına **hiperbolik denge noktası** denir. Bu durumda lineerleştirilmiş denklem, lineer olmayan denkleme lokal topolojik olarak denktir (Allen, 2007).

Teorem 1.1. $x_{t+1} = f(x_t)$ birinci mertebeden fark denklemini ele alalım. Kabul edelim ki $f(\bar{x}) = \bar{x}$, $\bar{x} \in I = (a, b)$ ve $f \in C(I)$ olsun. O halde aşağıdaki ifadeler sağlanır:

1. $|f'(\bar{x})| < 1$ ise \bar{x} lokal asimptotik kararlıdır.
2. $|f'(\bar{x})| > 1$ ise \bar{x} kararsızdır.
3. $|f'(\bar{x})| = 1$ ise \bar{x} hiperbolik denge noktası değildir (Allen, 2007).

Örnek. $x_{t+1} = r - x_t^2$, $r > 0$ denklemini ele alalım.

Burada $f(x) = r - x^2$ olup $f'(x) = -2x$ dir. Denklemin denge çözümü ise

$$f(\bar{x}) = \bar{x} \Rightarrow r - \bar{x}^2 = \bar{x} \Rightarrow \bar{x}^2 + \bar{x} - r = 0 \Rightarrow \bar{x}_{1,2} = \frac{-1 \mp \sqrt{1+4r}}{2}$$

olarak hesaplanır. Burada

$$f'(\bar{x}_1) = -2 \left(\frac{-1 - \sqrt{1+4r}}{2} \right) = 1 + \sqrt{1+4r}$$

dir. Ayrıca $1 + \sqrt{1+4r} > 1$ olduğundan \bar{x}_1 denge çözümü kararsızdır.

$$f'(\bar{x}_2) = -2 \left(\frac{-1 + \sqrt{1+4r}}{2} \right) = 1 - \sqrt{1+4r}$$

dir. Burada \bar{x}_2 denge çözümünün lokal asimptotik kararlı olması için

$$|1 - \sqrt{1+4r}| < 1 \Leftrightarrow 0 < \sqrt{1+4r} < 2 \Leftrightarrow 0 < 1+4r < 4$$

olup $r > 0$ olduğundan $0 < r < \frac{3}{4}$ şartının sağlanması gerekir.

Eğer $r = \frac{3}{4}$ ise $f'(\bar{x}_2) = -1$ olup \bar{x}_2 hiperbolik denge noktası değildir.

Eğer $r > \frac{3}{4}$ sağlanırsa $f'(\bar{x}_2) < -1$ olup \bar{x}_2 kararsız olur.

Şimdi 2-döngü'nün mevcut olup olmadığını inceleyelim:

$f^2(\bar{x}) = \bar{x}$ şartını sağlayan denge çözümleri

$$(r - \bar{x}^2)^2 = \bar{x} \Rightarrow r - r^2 + 2r\bar{x}^2 - \bar{x}^4 - \bar{x} = 0 \Rightarrow -(\bar{x}^2 + \bar{x} - r)(\bar{x}^2 - \bar{x} + 1 - r) = 0$$

eşitliğini sağlayan

$$\bar{x}_1 = \frac{-1 - \sqrt{1+4r}}{2}, \quad \bar{x}_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4r}}{2}, \quad \bar{x}_3 = \frac{1 + \sqrt{4r-3}}{2}, \quad \bar{x}_4 = \frac{1 - \sqrt{4r-3}}{2}$$

çözümleridir. Burada $f(\bar{x}_1) = \bar{x}_1$ ve $f(\bar{x}_2) = \bar{x}_2$ olduğu için \bar{x}_1 ve \bar{x}_2 denge çözümleri 2-döngü olamaz iken $f(\bar{x}_3) = \bar{x}_4$ ve $f(\bar{x}_4) = \bar{x}_3$ sağlanır ve bu iki çözüm 2-döngüdür.

2-döngü nün kararlılığı için $x = \bar{x}_{3,4}$ için $\left| \frac{d(f^2(x))}{dx} \right| < 1$ olmalıdır.

$$\frac{d(f^2(x))}{dx} = f'(f(x))f'(x) \Rightarrow f'(f(\bar{x}_3))f'(\bar{x}_3) = f'(\bar{x}_4)f'(\bar{x}_3)$$

olarak hesaplanır. Benzer şekilde $f'(f(\bar{x}_4))f'(\bar{x}_4) = f'(\bar{x}_3)f'(\bar{x}_4)$ bulunur. Öyleyse,

$$\left| \frac{d(f^2(\bar{x}_3))}{dx} \right| = (-2\bar{x}_3)(-2\bar{x}_4) < 1 \Leftrightarrow \frac{3}{4} < r < \frac{5}{4}$$

gerçeklenir. Ayrıca $r = \frac{5}{4}$ iken $\bar{x}_3 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}$, $\bar{x}_4 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}$ ve $\frac{d(f^2(\bar{x}_3))}{dx} = -1$ olup hiperbolik olmayan denge çözümleri ortaya çıkar.



2. AYRIK DİNAMİK SİSTEMLERİN ÇATALLANMA ANALİZİ

f fonksiyonu bir analitik fonksiyon olmak üzere, tek bir parametreye bağlı

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

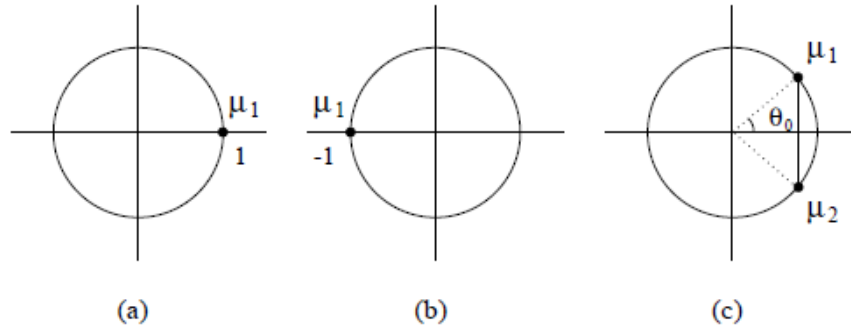
ayrık dinamik sistemini ele alalım.

Kabul edelim ki \bar{x} , (2.1) sisteminin bir hiperbolik denge noktası olsun. Göstereceğiz ki α parametresi değiştikçe sistemin dinamiği değişebilir.

Tanım 2.1. *Parametredeki değişim altında topolojik olarak denk olmayan (Bakınız EK 1) faz portrelerinin meydana gelmesine **çatallanma** denir. Değişen parametre değerine **çatallanma parametresi** denir (Kuznetsov, 1998).*

Bu tezde, parametreye bağlı bir ayrık av-avcı sistemi analiz edilecektir. Parametrenin değişimine bağlı olarak sistemde meydana gelen değişiklikler Bölüm 2.1 ve Bölüm 2.2’de tanımlayacağımız Flip çatallanma ve Neimark-Sacker çatallanma kullanılarak incelenecektir.

(2.1) sisteminin denge noktasının hiperbolik olma şartını bozan üç durumun mevcut olduğu görülebilir. $\mu = f_x(\bar{x})$ sistemin özdeğeri olmak üzere bazı parametre değerleri için ya sistemin bir reel pozitif $\mu_1 = 1$ özdeğeri, ya bir reel negatif $\mu_1 = -1$ özdeğeri ya da kompleks $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta < \pi$ özdeğerleri mevcuttur (Bakınız Şekil 2.1).



Şekil 2.1: Kritik Parametre Değerleri (Kuznetsov, 1998)

Tanım 2.2. *Eğer $\mu_1 = -1$ ve basit ise çatallanma, Flip çatallanma olarak adlandırılır (Kuznetsov, 1998).*

Tanım 2.3. *Eğer $\mu_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta < \pi$ ve basit ise çatallanma, Neimark-Sacker çatallanma olarak adlandırılır (Kuznetsov, 1998).*

Dikkat edilirse Flip çatallanmanın mevcut olabilmesi için $n \geq 1$, Neimark-Sacker çatallanmanın mevcut olabilmesi için de $n \geq 2$ olmalıdır.

2.1 Flip Çatallanma Normal Formu ve Çatallanma Teorisi

Tek bir parametreye bağlı bir boyutlu

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x + x^3 \equiv f(x, \alpha) \equiv f_\alpha(x) \quad (2.2)$$

sistemini ele alalım (Kuznetsov, 1998). Ayrıca f_α fonksiyonunun, orijinin bir komşuluğunda yeterince küçük $|\alpha|$ değerleri için tersi mevcut olsun. Burada $\forall \alpha$ değeri ve $|\alpha|$ nın küçük değerleri için $\bar{x} = 0$ noktası (2.2) sisteminin denge noktasıdır. Burada

$$f_x(x, \alpha) = -(1 + \alpha) + 3x^2 \Rightarrow f_x(0, \alpha) = -(1 + \alpha)$$

olup $\alpha = 0$ için $f_x(0, \alpha) = -1$ olduğundan denge noktası hiperbolik değildir.

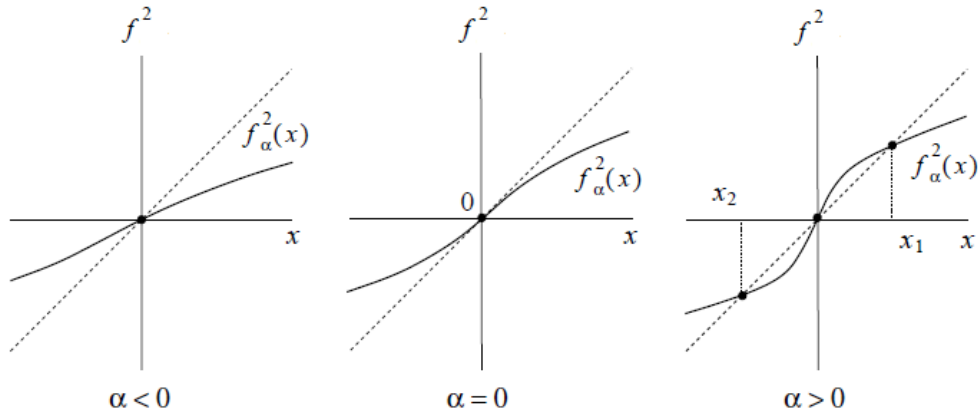
Eğer $\alpha > 0$ ise $f_x(0, \alpha) < -1$ olacağından denge noktası kararsızdır.

Eğer $\alpha < 0$ ise $|f_x(0, \alpha)| < 1$ olması $-2 < \alpha < 0$ olmasını gerektirir. Öyleyse bu aralıktaki α değerleri için denge noktası kararlıdır.

Şimdi de $f^2(x, \alpha)$ fonksiyonunu ele alalım.

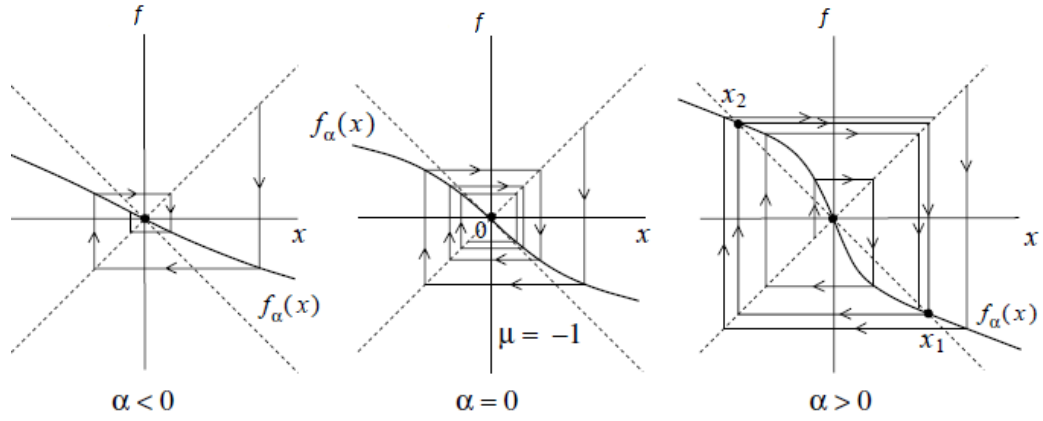
$$\begin{aligned} f^2(x, \alpha) &= f(f(x, \alpha)) = -1(1 + \alpha)[-1(1 + \alpha)x + x^3] + [-1(1 + \alpha)x + x^3]^3 \\ &= (1 + \alpha)^2 x - [(1 + \alpha)(2 + 2\alpha + \alpha^2)]x^3 + O(x^5) \end{aligned}$$

olup $f^2(x, \alpha)$ fonksiyonunun aşikar çözümü $\bar{x} = 0$ dir. Bunun haricinde $|\alpha|$ nın küçük değerleri için yukarıdaki eşitliği sağlayan iki denge çözümü daha mevcuttur. Bu çözümler $\bar{x}_{1,2} = \pm(\sqrt{\alpha} + O(\alpha))$, $\alpha > 0$ olarak hesaplanır (Bakınız Şekil 2.2). Bu iki

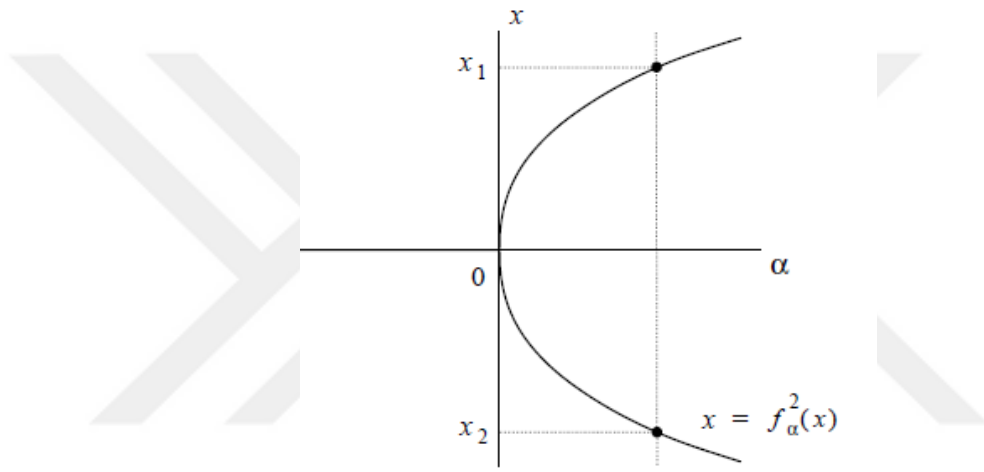


Şekil 2.2: İkinci İterasyon Fonksiyonu (Kuznetsov, 1998)

denge çözümü kararlı olup $\bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$ iken $\bar{x}_2 = f_\alpha(\bar{x}_1)$ ve $\bar{x}_1 = f_\alpha(\bar{x}_2)$ sağlandığından 2-döngü gerçekleşir. (2.2) sisteminin dinamiği Şekil 2.3'te verilmektedir. Burada α sifıra yaklaştıkça iki döngü küçülür ve kaybolur. Bu ise Flip çatallanma olarak adlandırılır.



Şekil 2.3: Flip Çatallanma (Kuznetsov, 1998)



Şekil 2.4: Flip Çatallanma Diyagramı (Kuznetsov, 1998)

Flip çatallanma diyagramını ise (x, α) düzleminde gösterilmiştir (Bakınız Şekil 2.4). Bu diyagramda dikey eksen (2.2) sistemin denge noktalarını ($\alpha < 0$ iken sıfır denge noktası kararlı ve $\alpha > 0$ iken sıfır denge noktası kararsız) gösterirken parabol, $\alpha > 0$ iken iki periyotlu $\{x_1, x_2\}$ kararlı döngüsünü temsil eder.

$x \mapsto -(1 + \alpha)x - x^3$ durumu benzer şekilde çözülebilir. Burada $\alpha \neq 0$ için $\bar{x} = 0$ denge noktası (2.2) sisteminde olduğu gibi aynı kararlılık yapısına sahiptir. Ayrıca $\alpha = 0$ iken bu denge noktası kararsızdır. İkinci iterasyon analiz edildiğinde $\alpha < 0$ iken oluşan iki periyotlu kararsız döngünün $\alpha = 0$ iken kaybolduğu gözlemlenir. Ayrıca yüksek mertebeden terimlerin çatallanma diyagramını etkilemediği görülür (Kuznetsov, 1998).

Lemma 2.1.

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x \mp x^3 + O(x^4)$$

sistemi orijinin komşuluğunda lokal topolojik olarak

$$x \mapsto -(1 + \alpha)x \mp x^3$$

sistemine denktir (Kuznetsov, 1998).

Teorem 2.1.

$$x_{t+1} = f(x_t, \alpha) \quad x_t, \alpha \in \mathbb{R}$$

denklemini ele alalım. Kabul edelim ki $f \in C^k$ ve $\alpha = 0$ iken $\bar{x} = 0$, $f(x, \alpha)$ fonksiyonunun sabit noktası ve $f_x(0, 0) = -1$ olsun. Ayrıca,

$$(F1) \quad \frac{1}{2}(f_{xx}(0, 0))^2 + \frac{1}{3}f_{xxx}(0, 0) \neq 0$$

$$(F2) \quad f_{x\alpha}(0, 0) \neq 0$$

sağlansın. Öyleyse $x_{t+1} = f(x_t, \alpha)$ denklemini

$$\eta_{t+1} = -(1 + \beta)\eta_t \mp \eta_t^3 + O(\eta_t^4)$$

denklemine dönüştüren düzgün koordinat ve parametre dönüşümleri vardır ve bu dönüşümlerin tersi mevcuttur (Kuznetsov, 1998).

2.2 Neimark-Sacker Çatallanma Normal Formu ve Çatallanma Teorisi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

iki boyutlu fark denklem sistemini ele alalım. Burada sistem tek bir parametreye, yani α ya, bağlıdır. Ayrıca $\theta = \theta(\alpha)$, $a = a(\alpha)$ ve $b = b(\alpha) \in C^k$ olup $0 < \theta(0) < \pi$, $a(0) \neq 0$ olarak kabul edilsin.

Sistemin denge noktası tüm α değerleri için $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ dir. Bu denge noktasındaki Jakobiyen matris ise

$$J(0, 0) = (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dir. Buradan $iz(J) = 2(1 + \alpha)\cos\theta$ ve $det(J) = (1 + \alpha)^2$ olmak üzere Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinom aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$F(\lambda) = \lambda^2 - iz(J)\lambda + det(J) = \lambda^2 - 2((1 + \alpha)\cos\theta)\lambda + (1 + \alpha)^2.$$

O halde $F(\lambda)$ karakteristik polinomun kökleri

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{2(1+\alpha)\cos\theta \mp \sqrt{4(1+\alpha)^2\cos^2\theta - 4(1+\alpha)^2}}{2} \\
&= (1+\alpha) \left[\cos\theta \mp \sqrt{\cos^2\theta - 1} \right] \\
&= (1+\alpha) \left[\cos\theta \mp \sqrt{-\sin^2\theta} \right] \\
&= (1+\alpha) [\cos\theta \mp i\sin\theta] \\
&= (1+\alpha)e^{i\theta}
\end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde olup yeterince küçük $|\alpha|$ değerleri için orijinin bir komşuluğunda (2.3) dönüşümünün tersi mevcuttur.

$\alpha = 0$ ve $0 < \theta(0) < \pi$ iken $\lambda_{1,2} = e^{i\theta(0)}$ ise $|\lambda_{1,2}(0)| = 1$ gerçekleşir. Sonuç olarak, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ denge noktası $\alpha = 0$ iken hiperbolik olmayan bir denge noktasıdır.

Şimdi $\alpha = 0$ iken ortaya çıkan çatallanmayı inceleyelim. Analizi yapabilmek için

$$z(t) = x_1(t) + ix_2(t) \tag{2.5}$$

kompleks değişkenini tanımlayalım ve (2.3) sistemini kompleks düzlemde tek bir denkleme indirgeyelim $z(t) = x_1(t) + ix_2(t)$ ise $\bar{z}(t) = x_1(t) - ix_2(t)$ ve $|z|^2 = x_1^2 + x_2^2$ olarak hesaplanır. Öyleyse $d(\alpha) = a(\alpha) + ib(\alpha)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
z(t+1) &= x_1(t+1) + ix_2(t+1) \\
&= (1+\alpha)(x_1\cos\theta - ix_2\sin\theta) + \cos\theta(x_1^2 + x_2^2)(ax_1 - bx_2) - \sin\theta(x_1^2 + x_2^2)(bx_1 + ax_2) \\
&\quad + i \left[(1+\alpha)(x_1\sin\theta + x_2\cos\theta) + \sin\theta(x_1^2 + x_2^2)(ax_1 - bx_2) + \cos\theta(x_1^2 + x_2^2)(bx_1 + ax_2) \right] \\
&= (1+\alpha) [\cos\theta(x_1 + ix_2) + i\sin\theta(x_1 + ix_2)] \\
&\quad + (x_1^2 + x_2^2) [(ax_1 - bx_2)(\cos\theta + i\sin\theta) + i(bx_1 + ax_2)(\cos\theta + i\sin\theta)] \\
&= (1+\alpha)(x_1 + ix_2)(\cos\theta + i\sin\theta) + (x_1^2 + x_2^2)(\cos\theta + i\sin\theta) [a(x_1 + ix_2) + ib(x_1 + ix_2)] \\
&= (1+\alpha)ze^{i\theta} + |z|^2e^{i\theta}(az + ibz) \\
&= [z((1+\alpha) + d|z|^2)]e^{i\theta}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak (2.3) sistemi

$$z_{t+1} = e^{i\theta(\alpha)} z_t (1 + \alpha + d(\alpha)|z_t|^2) \tag{2.6}$$

denkleminde dönüşür. Burada $(1 + \alpha)e^{i\theta(\alpha)} = \lambda(\alpha)$ olup $|\lambda(0)| = 1$ dir.

Şimdi de $\rho = |z|$ olmak üzere $z_t = \rho_t e^{i\varphi_t}$ dönüşümü ile kutupsal forma geçelim:

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= \rho_{t+1} e^{i\varphi_{t+1}} = e^{i\theta(\alpha)} \rho_t e^{i\varphi_t} (1 + \alpha + d(\alpha) |\rho_t e^{i\varphi_t}|^2) \\ &= e^{i(\theta(\alpha) + \varphi_t)} \rho_t (1 + \alpha + d(\alpha) \rho_t^2) \\ &= e^{i(\theta(\alpha) + \varphi_t)} \rho_t (1 + \alpha + (a(\alpha) + ib(\alpha)) \rho_t^2) \end{aligned}$$

olup her iki tarafın mutlak değeri alınırsa:

$$\begin{aligned} |\rho_{t+1}| &= |\rho_t| |1 + \alpha + (a(\alpha) + ib(\alpha)) \rho_t^2| \\ \rho_{t+1} &= \rho_t \left[(1 + \alpha + a(\alpha) \rho_t^2 + b(\alpha) \rho_t^2)^2 \right]^{1/2} \\ &= \rho_t \left\{ (1 + \alpha)^2 \left[\left(1 + \frac{a(\alpha)}{1 + \alpha} \rho_t^2\right)^2 + \frac{b^2(\alpha)}{(1 + \alpha)^2} \rho_t^4 \right] \right\}^{1/2} \\ &= (1 + \alpha) \rho_t \left(1 + \frac{2a(\alpha)}{1 + \alpha} \rho_t^2 + \frac{a^2(\alpha)}{(1 + \alpha)^2} \rho_t^4 + \frac{b^2(\alpha)}{(1 + \alpha)^2} \rho_t^4 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$u := \frac{2a(\alpha)}{1 + \alpha} \rho_t^2 + \frac{a^2(\alpha)}{(1 + \alpha)^2} \rho_t^4 + \frac{b^2(\alpha)}{(1 + \alpha)^2} \rho_t^4$$

olarak tanımlanır ve $\sqrt{1 + u}$ fonksiyonun, $u = 0$ da Taylor Serisi açılımı kullanılırsa:

$$\begin{aligned} \rho_{t+1} &= (1 + \alpha) \rho_t \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2a(\alpha)}{1 + \alpha} \rho_t^2 + \frac{|d(\alpha)|^2}{(1 + \alpha)^2} \rho_t^4 \right) + O(u^2) \right] \\ &= \rho_t \left[(1 + \alpha) + a(\alpha) \rho_t^2 + \frac{|d(\alpha)|^2}{1 + \alpha} \rho_t^4 + O(u) \right] \\ &= \rho_t \left[(1 + \alpha) + a(\alpha) \rho_t^2 + \rho_t^4 R(\rho_t, \alpha) \right], \quad R \in C^k \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanarak (2.3) sisteminin kutupsal formu elde edilir. Aslında burada,

$$\begin{aligned} \rho_{t+1} &= \rho_t e^{i(\theta(\alpha) + \varphi_t)} (1 + \alpha + d(\alpha) \rho_t^2) \\ &= \rho_t e^{i(\theta(\alpha) + \varphi_t)} y = \rho_t e^{i(\theta(\alpha) + \varphi_t)} |y| e^{iQ(\rho_t, \alpha)} \end{aligned}$$

ve üsteller

$$\varphi_{t+1} = \varphi_t + \theta(\alpha) + Q(\rho_t, \alpha)$$

şeklindedir. Sonuç olarak aşağıdaki sistem elde edilir:

$$\begin{cases} \rho_{t+1} = \rho_t (1 + \alpha + a(\alpha)\rho_t^2 + \rho_t^4 R(\rho_t, \alpha)), \\ \varphi_{t+1} = \varphi_t + \theta(\alpha) + Q(\rho_t, \alpha). \end{cases} \quad (2.7)$$

O halde (2.7) sistemi kullanılarak α değeri değiştirken ve kritik değer olan $\alpha = 0$ dan geçerken çatallanma analizi kolayca yapılabilir. Çünkü ρ için yapılan dönüşüm φ açısından bağımsız olup (2.7) sistemi bağımsız iki fark denkleminde oluşmaktadır. Kutupsal denklemlerde denge noktası ρ_t ile verilen denklemden elde edildiği için φ yalnızca dönme açısını belirler. Öyleyse, birinci denklem, birinci mertebeden bir fark denklemdir. Burada $\bar{\rho} = 0$ sistemin bir denge noktası olup yeterince küçük fakat negatif α değerleri için $\bar{\rho} = 0$ kararlı, pozitif α değerleri için ise kararsızdır.

$\rho_{t+1} = f(\rho_t, \alpha)$ olmak üzere $f_{\rho_t} = 1 + \alpha + 3a(\alpha)\rho_t^2 + 5\rho_t^4 R(\rho_t, \alpha) + \rho_t^4 R'(\rho_t, \alpha)$ olarak hesaplanır. Burada $f_{\rho_t}(0) = 1 + \alpha$ olup $-2 < \alpha < 0$ için denge noktası kararlıdır.

$\alpha = 0$ iken denge noktasının kararlılığı $a(0)$ in işareti ile belirlenir.

- Kabul edelim ki $a(0) < 0$ olsun. O halde orijin denge noktası lineer olmayan kararlılık yapısına sahiptir.

Öte taraftan $\alpha > 0$ iken (2.7) sisteminin sıfırdan farklı denge noktası

$$\bar{\rho} = \bar{\rho} (1 + \alpha + a(\alpha)\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^4 R(\bar{\rho}, \alpha)) \Rightarrow 0 = \alpha + a(\alpha)\bar{\rho}^2 + \bar{\rho}^4 R(\bar{\rho}, \alpha) \approx \alpha + a(\alpha)\bar{\rho}^2$$

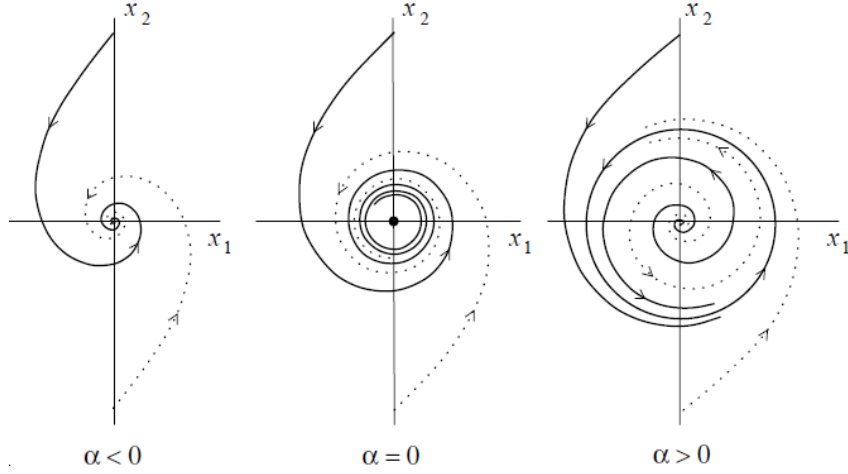
olmak üzere aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\bar{\rho}_0 = \sqrt{-\frac{\alpha}{a(\alpha)}} + O(\alpha).$$

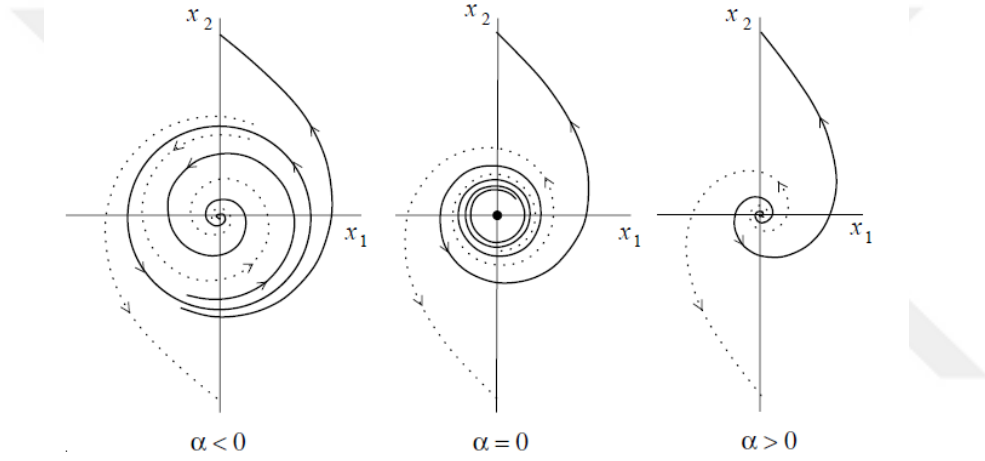
Burada $f_{\rho_t}(\bar{\rho}_0) = 1 - 2\alpha + \theta(\alpha^2)$ olup yeterince küçük α değerleri için $|f_{\rho_t}(\bar{\rho}_0)| < 1$ sağlanacağından $\bar{\rho}_0$ denge noktası kararlıdır. Diğer taraftan φ , α ve ρ ya göre dönme açısını belirler ve yaklaşık olarak $\theta(\alpha)$ ya eşittir. Sonuç olarak faz portresi şu şekilde çizilir:

$\alpha > 0$ durumunda $\bar{\rho} = 0$ kararsız denge noktasının etrafında kapalı bir eğri meydana gelir. Herbir $\alpha > 0$ için bu eğri tektir ve yarıçapı $\rho_0(\alpha)$ dır. Orijin noktası haricinde kapalı eğrinin içinde veya dışında başlayan tüm yörüngeler (2.7) sistemindeki iterasyonları gerçekler. Bu ise Neimark-Sacker çatallanma olarak adlandırılır.

Sistemin denge noktası olan orijin, $\alpha < 0$ iken kararlı, $\alpha > 0$ iken ise kararsızdır. Ayrıca $\alpha = 0$ kritik parametre değerinde bu denge noktası lineer olmayan kararlılık yapısına sahiptir.



Şekil 2.5: Süperkritik Neimark-Sacker çatallanma (Kuznetsov, 1998)



Şekil 2.6: Subkritik Neimark-Sacker çatallanma (Kuznetsov, 1998)

$a(\alpha) < 0$ olduğundan $\alpha = 0$ değerinden önce ortaya çıkan periyodik çözümler kararlı olup bu durum Süperkritik Neimark-Sacker çatallanma olarak adlandırılır (Bakınız Şekil 2.5).

- $a(\alpha) > 0$ durumu da benzer şekilde analiz edilebilir. Burada sistem $\alpha = 0$ değerinde Neimark-Sacker çatallanmaya sahiptir. Bir önceki analizin aksine negatif α değerinde kararsız bir kapalı eğri mevcuttur ve bu eğri α pozitif değerine giderken yok olmaktadır. $a(\alpha) > 0$ olduğundan $\alpha = 0$ değerinden önce ortaya çıkan periyodik çözümler kararsız olup bu durum Subkritik Neimark-Sacker çatallanma olarak adlandırılır (Bakınız Şekil 2.6).

Şimdi (2.3) sistemine yüksek mertebeden terimler ekleyelim ve aşağıdaki sistemi ele alalım:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto (1 + \alpha) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + O(\|x^4\|). \quad (2.8)$$

Burada $O(\|x^4\|)$, α ya bağlı düzgün bir fonksiyondur. Fakat (2.8) sistemi (2.3) sistemine lokal topolojik olarak denk değildir. Bu yüzden yüksek mertebeden terimler sistemin çatallanma davranışını etkiler. Eğer (2.8) sistemi kutupsal formda yazılırsa ρ dönüşümü φ açısına bağlı olacaktır. Bu sistem (2.7) formunda yazılabilir fakat burada R ve Q fonksiyonları 2π -periyotludur. Buna karşın, (2.3) ve (2.8) sistemlerinin faz portreleri benzer özelliklere sahip olduğundan aşağıdaki lemmayı ifade edebiliriz.

Lemma 2.2. $O(\|x^4\|)$ terimleri (2.8) sistemindeki kapalı eğrinin çatallanmasını etkilemez. Yani, kapalı yörünge orijinin solundan sağına geçerken (2.3) sistemindeki aynı yön ve kararlılık yapısı ile çatallanır (Kuznetsov, 1998).

Şimdi de Neimark-Sacker çatallanmaya sahip herhangi 2-boyutlu sistemin (2.8) formuna dönüştürülebileceğini gösterelim.

$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \in C^k$ olmak üzere

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

lineer olmayan sistemini ele alalım. Kabul edelim ki $\alpha = 0$ iken $\bar{x} = (0, 0)$ sistemin bir denge noktası olsun ve bu denge noktasındaki Jakobiyen matrisinin tekrar etmeyen özdeğerleri ise $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$, $0 < \theta_0 < \pi$ olsun. Kapalı Fonksiyon Teoremi (Bakınız Ek 1) gereğince yeterince küçük tüm $|\alpha|$ değerleri için (2.9) sistemi, orijinin bir komşuluğunda $\bar{x}(\alpha)$ denge noktasına sahiptir. Şimdi bu durumu analiz edelim.

$x_{t+1} = f(x_t, \alpha)$ ise $\bar{x} = f(\bar{x}, \alpha)$ olup $G(x, \alpha) = f(\bar{x}, \alpha) - \bar{x}$ olarak tanımlansın. Ayrıca $G(g_1, g_2)$, $V \in \mathbb{R}^3$ (V açık ve orijini içerir) üzerinde C^k fonksiyonu olsun. Öyleyse $G(0, 0) = 0$ ve $\lambda = 1$ Jakobiyen matrisinin bir özdeğeri olmadığından

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - 1 & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} - 1 \end{pmatrix} = J - I \Rightarrow \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right|_{x=0, \alpha=0} = |J(0, 0, 0) - I| \neq 0$$

gerçeklenir. Öyleyse kapalı fonksiyon teoreminden

$$g : W \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ \alpha \mapsto g(\alpha) = (x_1(\alpha), x_2(\alpha))$$

olacak şekilde tek bir g fonksiyonu mevcuttur ve bu fonksiyon yeterince küçük $|\alpha|$

değerleri için (2.9) sisteminin denge noktasını belirler.

Eğer denge noktası sıfırdan farklı ise genelliği bozmadan denge noktası sıfıra taşınarak işlemlere devam edilebilir. Bunun için, $\bar{x} = (0,0)$ civarında $f(x_t, \alpha)$ fonksiyonunu Taylor Serisine açalım:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= f_1(0,0,\alpha) + \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0,0,\alpha)x_1(t) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(0,0,\alpha)x_2(t) + \dots \\ x_2(t+1) &= f_2(0,0,\alpha) + \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(0,0,\alpha)x_1(t) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0,0,\alpha)x_2(t) + \dots \end{aligned}$$

olup yeterince küçük $|\alpha|$ değerleri için $f_1(0,0,\alpha) = f_2(0,0,\alpha) = 0$ olduğundan

$$x_{t+1} = A(\alpha)x_t + f(x_t, \alpha), \quad x_t \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}, f \in C^k \quad (2.10)$$

sistemi elde edilir. Burada $f := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$ şeklindedir ve $i = 1,2$ olmak üzere f_i en az kuadratik terimleri içerir. Ayrıca $f_i(0,0,0) = 0$ ve yeterince küçük $|\alpha|$ değerleri için $f_i(0,0,\alpha) = 0$ sağlanır. $A(\alpha)$ Jakobiyeen matrisini özdeğerleri

$$\lambda_{1,2}(\alpha) = r(\alpha)e^{\mp i\varphi(\alpha)}$$

olup burada $r(0) = 1$, $\varphi(0) = \theta_0$ dir. O halde $r(\alpha) = 1 + \beta(\alpha) \ni \beta \in C^k, \beta(0) = 0$ olarak ifade edilebilir. Kabul edelim ki $\beta'(0) \neq 0$ olsun. Öyleyse, β yı yeni parametre olarak alabilir ve α nın bir fonksiyonu olarak ifade edebiliriz.

Sonuç olarak

$$\lambda(\beta) = (1 + \beta(\alpha))e^{i\theta(\beta)}$$

yazılabilir. Öyleyse, $\lambda_1(\beta) = \lambda(\beta)$, $\lambda_2(\beta) = \bar{\lambda}(\beta)$ olarak yazılabilir. Burada $\theta \in C^k$ ve $\theta(0) = \theta_0$ dir.

Lemma 2.3. *Bir kompleks değişken ve yeni bir parametre tanımlayarak yeterince küçük $|\beta|$ değerleri için (2.10) sistemi*

$$z_{t+1} = \lambda(\beta)z_t + g(z_t, \bar{z}_t, \beta)$$

sistemine dönüştürülebilir. Burada $\beta \in \mathbb{R}, z_t \in \mathbb{C}$, $\lambda(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$ olup g fonksiyonu z_t, \bar{z}_t ve β nın kompleks değerli C^k sınıfından bir fonksiyondur. Ayrıca fonksiyonun (z_t, \bar{z}_t) 'a göre Taylor seri açılımı mevcut olup kuadratik ve daha yüksek kuvvetten terimler içerir ve fonksiyon aşağıdaki şekilde ifade edilir (Kuznetsov, 1998)

$$g(z_t, \bar{z}_t, \beta) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\beta) z_t^k (\bar{z}_t)^l, \quad k, l = 0, 1, \dots$$

İspat. (2.10) sisteminde eğer A matrisi reel ise A^T reel olup, $A_{ij}^T = A_{ji}$, A ve A^T aynı özdeğerlere sahiptir. Fakat, özvektörleri aynı olmak zorunda değildir.

Kabul edelim ki $q(\beta)$, $A(\beta)$ nın $\lambda(\beta)$ özdeğerine karşılık gelen özvektör olsun:

$$A(\beta)q(\beta) = \lambda(\beta)q(\beta) \quad [A(\beta)\bar{q}(\beta) = \bar{\lambda}(\beta)\bar{q}(\beta)].$$

Diğer taraftan, $p(\beta)$, $A^T(\beta)$ nın $\bar{\lambda}(\beta)$ özdeğerine karşılık gelen özvektör olsun:

$$A^T(\beta)p(\beta) = \bar{\lambda}(\beta)p(\beta) \quad [A^T(\beta)\bar{p}(\beta) = \lambda(\beta)\bar{p}(\beta)].$$

Burada $\langle p(\beta), q(\beta) \rangle = 1$, $C^2 : \langle p, q \rangle = \bar{p}_1 q_1 + p_2 \bar{q}_2$ yazılabilir. Öyleyse, $\forall x \in \mathbb{R}^2$ ve yeterince küçük β değeri için

$$x = zq(\beta) + \bar{z}\bar{q}(\beta) \quad (2.11)$$

şeklinde tek türlü yazılabilir. Amacımız (2.11) dönüşümünü kullanarak $x_{t+1} = A(\beta)x_t$ yi $z_{t+1} = \lambda(\beta)z_t$ şeklinde yazabilmektir.

$$x_{t+1} = z_{t+1}q(\beta) + \bar{z}_{t+1}\bar{q}(\beta) \quad \text{ve} \quad x_{t+1} = A(\beta)x_t$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} z_{t+1}q(\beta) + \bar{z}_{t+1}\bar{q}(\beta) &= A(\beta)z_tq(\beta) + A(\beta)\bar{z}_t\bar{q}(\beta) \\ &= z_tA(\beta)q(\beta) + \bar{z}_tA(\beta)\bar{q}(\beta) \\ &= z_t\lambda(\beta)q(\beta) + \bar{z}_t\bar{\lambda}(\beta)\bar{q}(\beta) \end{aligned}$$

olup sonuç olarak

$$x_{t+1} = z_t\lambda(\beta)q(\beta) + \bar{z}_t\bar{\lambda}(\beta)\bar{q}(\beta) \quad (2.12)$$

denklemini elde edilir. Ayrıca $z_{t+1} = \langle p(\beta), x_{t+1} \rangle$ şeklinde yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} \langle p(\beta), x_{t+1} \rangle &= \langle p(\beta), z_{t+1}q(\beta) + \bar{z}_{t+1}\bar{q}(\beta) \rangle \\ &= \langle p(\beta), z_{t+1}q(\beta) \rangle + \langle p(\beta), \bar{z}_{t+1}\bar{q}(\beta) \rangle \\ &= \bar{z}_{t+1} \langle p, q \rangle + z_{t+1} \langle p, \bar{q} \rangle \end{aligned} \quad (2.13)$$

olarak hesaplanır. (2.12) den

$$\begin{aligned} \langle p, x_{t+1} \rangle &= \langle p, z_t\lambda q + \bar{z}_t\bar{\lambda}\bar{q} \rangle \\ &= \bar{z}_t\lambda \langle p, q \rangle + z_t\bar{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle \\ &= \bar{z}_t\lambda \langle p, q \rangle + z_t\bar{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

yazılabilir. Sonuç olarak da aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\bar{z}_{t+1} \langle p, q \rangle + z_{t+1} \langle p, \bar{q} \rangle = \bar{z}_t \lambda \langle p, q \rangle + z_t \lambda \langle p, \bar{q} \rangle. \quad (2.15)$$

Burada $\langle p, \bar{q} \rangle = \langle p, \frac{1}{\lambda} A \bar{q} \rangle = \frac{1}{\lambda} \langle A^T p, \bar{q} \rangle = \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \langle p, \bar{q} \rangle$ ise $\left(1 - \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right) \langle p, \bar{q} \rangle = 0$ elde edilir. Öyleyse, yeterince küçük $|\beta|$ değerleri için $\bar{\lambda} \neq \lambda$ olduğundan $\langle p, \bar{q} \rangle = 0$ olmalıdır. Ayrıca $\langle p, q \rangle = 1$ olup (2.15)'ten

$$z_{t+1} = \lambda(\beta) z_t$$

elde edilir. Şimdi de

$$x_{t+1} = A(\beta)x_t + F(x_t, \beta)$$

denklemini ele alalım. Buradan

$$\begin{aligned} \langle p, x_{t+1} \rangle &= \langle p, A(\beta)x_t \rangle + \langle p, F(x_t, \beta) \rangle \\ z_{t+1} &= \lambda(\beta) z_t + \langle p, F(z_t q(\beta) + \bar{z}_t \bar{q}(\beta)) \rangle \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Burada $g(z_t, \bar{z}_t, \beta) = \langle p, F(z_t q(\beta) + \bar{z}_t \bar{q}(\beta)) \rangle$ olup g fonksiyonunu z ve \bar{z} a göre Taylor serisine açarsak

$$g(z_t, \bar{z}_t, \beta) = \sum_{k+l \geq 2} \frac{1}{k!l!} g_{kl}(\beta) z_t^k (\bar{z}_t)^l, \quad k, l = 0, 1, \dots$$

olup $g_{kl}(\beta) = \frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial \bar{z}^l} \langle p, F((zq(\beta) + \bar{z}\bar{q}(\beta)), \beta) \rangle |_{z=0}$, $k, l = 0, 1, \dots$ ve $k+l \geq 2$ şeklindedir.

Kompleks Değişken Tanımı Altında Neimark-Sacker Çatallanma

Lemma 2.4. $\lambda = \lambda(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$, $g_{ij} = g_{ij}(\beta)$ olmak üzere

$$z_{t+1} = \lambda z_t + \frac{g_{20}}{2} z_t^2 + \frac{g_{11}}{2} z_t \bar{z}_t + \frac{g_{02}}{2} \bar{z}_t^2 + \frac{g_{12}}{2} z_t \bar{z}_t^2 + \frac{g_{21}}{2} z_t^2 \bar{z}_t + \frac{g_{30}}{2} z_t^3 + \frac{g_{03}}{2} \bar{z}_t^3$$

denklemini, $e^{i\theta(0)} \neq 1$ ve $e^{3i\theta(0)} \neq 1$ ise yeterince küçük β değerleri için aşağıdaki parametreye bağlı ve tersi mevcut olan

$$z_t = v_t + \frac{h_{20}}{2} v_t^2 + h_{11} v_t \bar{v}_t + \frac{h_{02}}{2} \bar{v}_t^2$$

dönüşümü ile

$$v_{t+1} = \lambda v_t + \frac{\tilde{g}_{30}}{6} v_t^3 + \frac{\tilde{g}_{21}}{2} v_t^2 \bar{v}_t + \frac{\tilde{g}_{12}}{2} v_t \bar{v}_t^2 + \frac{\tilde{g}_{03}}{6} \bar{v}_t^3 + O(|v_t|^4) \quad (2.16)$$

kuadratik terimleri olmayan denkleme dönüştürülebilir (Kuznetsov, 1998).

İspat. Kabul edelim ki

$$v_t = Az_t + Bz_t^2 + Cz_t\bar{z}_t + D\bar{z}_t^2 + O(|z_t|^3)$$

olsun. Belirsiz katsayılar yöntemi ile

$$v_t = z_t - \frac{h_{20}}{2}z_t^2 - h_{11}z_t\bar{z}_t - \frac{h_{02}}{2}\bar{z}_t^2 + O(|z_t|^3)$$

şeklinde hesaplanır. Buradan

$$\begin{aligned} v_{t+1} &= z_{t+1} - \frac{h_{20}}{2}z_{t+1}^2 - h_{11}z_{t+1}\bar{z}_{t+1} - \frac{h_{02}}{2}\bar{z}_{t+1}^2 + O(|z_{t+1}|^3) \\ &= \lambda v_t + \left(\frac{g_{20}}{2} + (\lambda - \lambda^2)\frac{h_{20}}{2}\right)v_t^2 + (g_{11} + (\lambda - \lambda\bar{\lambda})h_{11})v_t\bar{v}_t + \left(\frac{g_{02}}{2} + (\lambda - \bar{\lambda}^2)\frac{h_{02}}{2}\right)\bar{v}_t^2 \\ &\quad + \left[\frac{g_{20}h_{20}}{2} - \frac{\lambda^2 h_{20}h_{20}}{2} + \frac{g_{11}h_{02}}{2} - \frac{\lambda\bar{\lambda}h_{11}h_{02}}{2} + \frac{g_{30}}{6} - \frac{\lambda g_{20}h_{20}}{2} - \frac{\lambda g_{02}h_{11}}{2} + \lambda^3\right]v_t^3 \\ &\quad + \left[(g_{20} + (1 + \lambda)g_{11} - \lambda^2 h_{20})h_{11} + \frac{(1 - 2\lambda)g_{11}h_{20}}{2} - \frac{\lambda\bar{\lambda}(h_{11}h_{20} + 2h_{11}^2)}{2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{g_{02}h_{02} + g_{21}}{2} - \frac{\bar{\lambda}^2 h_{20}^2}{2} - \frac{\bar{\lambda}(g_{20}h_{11} + g_{02}h_{02})}{2}\right]v_t^2\bar{v}_t \\ &\quad + \left[\frac{(h_{02} - \lambda h_{11})g_{20}}{2} + \frac{(g_{11} - \lambda^2 h_{02} - \lambda\bar{\lambda}h_{11} - \lambda g_{02})h_{20}}{2}\right]v_t\bar{v}_t^2 \\ &\quad + \left[\frac{(g_{11} + g_{02} - \lambda\bar{\lambda}h_{11} - \bar{\lambda}^2 h_{02} - \bar{\lambda}g_{11})h_{11}}{2} + \frac{g_{12} - \bar{\lambda}g_{11}h_{02}}{2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{(g_{11} - \lambda\bar{\lambda}h_{11} - \bar{\lambda}^2 h_{20} - \bar{\lambda}g_{20})h_{02}}{2} + \frac{g_{02}h_{20}}{2} + \frac{g_{03}}{6} - \frac{\bar{\lambda}^2 g_{02}h_{11}}{2}\right]\bar{v}_t^3 \\ &\quad + O(|v_t|^4) \end{aligned} \tag{2.17}$$

olarak elde edilir. İfadeleri sadeleştirirsek

$$\begin{aligned} v_{t+1} &= \lambda v_t + \left(\frac{g_{20} + (\lambda - \lambda^2)h_{20}}{2}\right)v_t^2 + (g_{11} + (\lambda - \lambda\bar{\lambda})h_{11})v_t\bar{v}_t \\ &\quad + \left(\frac{g_{02} + (\lambda - \bar{\lambda}^2)h_{02}}{2}\right)\bar{v}_t^2 + \frac{\tilde{g}_{30}}{6}v_t^3 + \frac{\tilde{g}_{21}}{2}v_t^2\bar{v}_t + \frac{\tilde{g}_{12}}{2}v_t\bar{v}_t^2 + \frac{\tilde{g}_{03}}{6}\bar{v}_t^3 \\ &\quad + O(|v_t|^4) \end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemde eğer

$$h_{20} = \frac{g_{20}}{\lambda(\lambda - 1)}, \quad h_{11} = \frac{g_{11}}{\lambda(\bar{\lambda} - 1)} \quad \text{ve} \quad h_{02} = \frac{g_{02}}{\bar{\lambda}^2 - \lambda}$$

seçilirse kuadratik terimler elenir ve sonuç olarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$v_{t+1} = \lambda v_t + \frac{\tilde{g}_{30}}{6} v_t^3 + \frac{\tilde{g}_{21}}{2} v_t^2 \bar{v}_t + \frac{\tilde{g}_{12}}{2} v_t \bar{v}_t^2 + \frac{\tilde{g}_{03}}{6} \bar{v}_t^3 + O(|v_t|^4).$$

$\beta = 0$ iken $\lambda(0) \neq 1$ olduğundan ve $\lambda(0)(\lambda(0) - 1) \neq 0$, $\bar{\lambda}(0) \neq 1$ olduğundan $\lambda(0)(\bar{\lambda}(0) - 1) \neq 0$ ve de hipotez gereği $e^{3i\theta(0)} \neq 1$ sağlandığından $\bar{\lambda}^2(0) - \lambda(0) \neq 0$ gerçekleşir. O halde $\beta = 0$ ın bir komşuluğunda h_{02}, h_{11}, h_{20} tanımlıdır. Dolayısıyla dönüşüm tanımlıdır.

Lemma 2.5. (2.16) denklemi $e^{2i\theta(0)} \neq 1$ ve $e^{4i\theta(0)} \neq 1$ şartları altında

$$w_t = v_t + \frac{h_{30}}{6} w_t^3 + \frac{h_{21}}{2} w_t^2 \bar{w}_t + \frac{h_{12}}{2} w_t \bar{w}_t^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{w}_t^3 + O(|w_t|^4)$$

dönüşümü ile tek bir kübik terim içeren

$$w_{t+1} = \lambda w_t + c_1 w_t^2 \bar{w}_t + O(|w_t|^4) \quad (2.19)$$

denklemine dönüştürülebilir. Burada $c_1 = c_1(\beta)$ dir (Kuznetsov, 1998).

İspat. Bir önceki lemmada olduğu gibi belirsiz katsayılar yöntemi ile

$$w_t = v_t - \frac{\tilde{h}_{30}}{6} v_t^3 - \frac{\tilde{h}_{21}}{2} v_t^2 \bar{v}_t - \frac{\tilde{h}_{12}}{2} v_t \bar{v}_t^2 - \frac{\tilde{h}_{03}}{6} \bar{v}_t^3$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak,

$$w_{t+1} = v_{t+1} - \frac{\tilde{h}_{30}}{6} v_{t+1}^3 - \frac{\tilde{h}_{21}}{2} v_{t+1}^2 \bar{v}_{t+1} - \frac{\tilde{h}_{12}}{2} v_{t+1} \bar{v}_{t+1}^2 - \frac{\tilde{h}_{03}}{6} \bar{v}_{t+1}^3$$

olup hipotez gereğince

$$\begin{aligned} w_{t+1} = \lambda w_t + & \left(\frac{\tilde{g}_{30} + (\lambda - \lambda^3)h_{30}}{6} \right) w_t^3 + \left(\frac{\tilde{g}_{21} + (\lambda - \lambda^2 \bar{\lambda})h_{21}}{2} \right) w_t^2 \bar{w}_t \\ & + \left(\frac{\tilde{g}_{12} + (\lambda - \lambda \bar{\lambda}^2)h_{12}}{2} \right) w_t \bar{w}_t^2 + \left(\frac{\tilde{g}_{03} + (\lambda - \bar{\lambda}^3)h_{03}}{6} \right) \bar{w}_t^3 + O(|w_t|^4) \end{aligned} \quad (2.20)$$

olarak elde edilir.

Amacımız $w_t^2 \bar{w}_t$ terimi dışındaki kübik terimleri yok etmek olduğu için

$$h_{30} = \frac{\tilde{g}_{30}}{\lambda^3 - \lambda}, \quad h_{12} = \frac{\tilde{g}_{12}}{\bar{\lambda}|\lambda|^2 - \lambda} \quad \text{ve} \quad h_{03} = \frac{\tilde{g}_{03}}{\bar{\lambda}^3 - \lambda}$$

olarak seçilir.

Burada $\beta = 0$ iken $\lambda^2(0) \neq 1$ olup $(\lambda^2(0) - 1)\lambda(0) = \lambda^3(0) - \lambda(0) \neq 0$ sağlanır. $\lambda(0) \neq \bar{\lambda}(0)$ ve $|\lambda(0)| = 1$ olup $\bar{\lambda}(0)|\lambda(0)|^2 - \lambda(0) \neq 0$ bulunur. Sonuç olarak $\beta = 0$ in bir komşuluğunda dönüşüm tanımlıdır.

Dikkat edilirse $h_{21} = \frac{\tilde{g}_{21}}{\lambda - \lambda|\lambda|^2}$ alınırsa her $\theta(0)$ için $1 - |\lambda(0)|^2$ ifadesi sıfıra eşit olacağından $\beta = 0$ iken h_{21} tanımlı değildir. O halde dönüşümün mevcut olabilmesi için $h_{21} = 0$ olmalıdır.

Sonuç olarak, $c_1 = \frac{\tilde{g}_{21}}{2}$ alınarak dönüşüm β parametresine bağlı olur ve aşağıdaki denklem elde edilir:

$$w_{t+1} = \lambda w_t + c_1 w_t^2 \bar{w}_t + O(|w_t|^4).$$

Burada $c_1(\beta)$ katsayısı aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$c_1(\beta) = \frac{g_{20}g_{11}(1-2\lambda)}{2(\lambda^2-\lambda)} + \frac{|g_{11}|^2}{1-\bar{\lambda}} + \frac{g_{21}}{2} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\bar{\lambda}^2-\lambda)^2}. \quad (2.21)$$

Böylelikle lemmanın ispatı tamamlanır ve aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 2.2. $x_t \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f \in C^k$ olmak üzere

$$x_{t+1} = f(x_t, \alpha) \quad (2.22)$$

sistemi yeterince küçük $|\alpha|$ değerleri için $\bar{x} = 0$ denge noktasına sahip olsun. Bu denge noktasındaki Jakobiyen matrisinin özdeğerleri ise

$$\lambda_{1,2} = r(\alpha)e^{\mp i\varphi(\alpha)} \ni r(0) = 1, \varphi(0) = \theta_0$$

olsun. Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

(N1.) $r'(0) \neq 0$

(N2.) $e^{ik\theta_0} \neq 1$, $k = 1, 2, 3, 4$.

Öyleyse, (2.22) sistemini

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \end{pmatrix} &\mapsto (1+\beta) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &+ (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + O(\|y^4\|). \end{aligned} \quad (2.23)$$

sistemine dönüştüren tersi mevcut olan parametre ve koordinat dönüşümleri mevcuttur. Burada $\theta(0) = \theta_0$ ve $a(0) = \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0}c_1(0))$ olup $c_1(0)$ katsayısı (2.21) denkleminde verildiği gibidir.

İspat. Bir önceki lemmadan biliyoruz ki (2.22) sistemi

$$w_{t+1} = \lambda(\beta)w_t + c_1(\beta)w_t|w_t|^2 + O(|w_t|^4)$$

kompleks normal formuna dönüştürülebilir. Burada $\lambda(\beta) = (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}$ dir. O halde denklemini aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned} w_{t+1} &= (1 + \beta)e^{i\theta(\beta)}w_t + c_1(\beta)w_t|w_t|^2 + O(|w_t|^4) \\ &= e^{i\theta(\beta)} \left[(1 + \beta)w_t + e^{-i\theta(\beta)}c_1(\beta)w_t|w_t|^2 \right] + O(|w_t|^4) \\ &= e^{i\theta(\beta)} \left[(1 + \beta)w_t + (\cos\theta(\beta) - i\sin\theta(\beta))c_1(\beta)w_t|w_t|^2 \right] + O(|w_t|^4) \\ &= e^{i\theta(\beta)} \left[1 + \beta + (\cos\theta(\beta)c_1(\beta)|w_t|^2 + (-i\sin\theta(\beta)c_1(\beta))|w_t|^2) \right] w_t + O(|w_t|^4) \\ &= e^{i\theta(\beta)} \left[1 + \beta + (a(\beta) + ib(\beta))|w_t|^2 \right] w_t + O(|w_t|^4) \\ &= e^{i\theta(\beta)} \left[1 + \beta + d(\beta)|w_t|^2 \right] w_t + O(|w_t|^4). \end{aligned}$$

Şimdi de yukarıdaki denklemini reel koordinant sisteminde yazalım. Bunun için $w_t = y_1(t) + iy_2(t)$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} w_{t+1} &= y_1(t+1) + iy_2(t+1) \\ &= e^{i\theta(\beta)} \left[1 + \beta + d(\beta)(y_1^2(t) + y_2^2(t)) \right] (y_1(t) + iy_2(t)) + Y.M.T. \\ &= e^{i\theta(\beta)} \left[1 + \beta + (a(\beta) + ib(\beta))(y_1^2(t) + y_2^2(t)) \right] (y_1(t) + iy_2(t)) + Y.M.T. \\ &= e^{i\theta(\beta)} \left[1 + \beta + (a(\beta)y_1(t) - b(\beta)y_2(t))(y_1^2(t) + y_2^2(t)) \right] \\ &\quad + ie^{i\theta(\beta)} \left[1 + \beta + (a(\beta)y_2(t) - b(\beta)y_1(t))(y_1^2(t) + y_2^2(t)) \right] \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Burada

$$\begin{aligned} y_1(t+1) &= e^{i\theta(\beta)} \left[1 + \beta + (a(\beta)y_1(t) - b(\beta)y_2(t))(y_1^2(t) + y_2^2(t)) \right] \\ y_2(t+1) &= ie^{i\theta(\beta)} \left[1 + \beta + (a(\beta)y_2(t) - b(\beta)y_1(t))(y_1^2(t) + y_2^2(t)) \right] \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla (2.23) sistemini elde etmiş oluruz. Burada

$$a(\beta) = \text{Re}(d(\beta)) = \text{Re}(e^{-i\theta(\beta)}c_1(\beta))$$

olduğu için

$$a(0) = \text{Re}(e^{-i\theta(0)}c_1(0))$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.3 (Genel Neimark-Sacker Çatallanma Teoremi (Kuznetsov, 1998)). $x_t \in \mathbb{R}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f \in C^k$ olmak üzere

$$x_{t+1} = f(x_t, \alpha)$$

sistemi $\alpha = 0$ iken $\bar{x} = 0$ denge noktasına sahip olsun. Bu denge noktasına karşılık gelen özdeğerler ise $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ olsun. Ayrıca sistem, Teorem 2.2'deki hipotezleri ve **N1**, **N2** şartlarını sağlasın. Buna ek olarak $a(0) \neq 0$ olsun. Öyleyse, α soldan sağa $\alpha = 0$ noktasından geçerken orijinin komşuluğunda tek bir kapalı yörünge ortaya çıkar.

Burada $a(0)$ kapalı yörüngeyi yönünü ve kararlılığını belirler. $a(0) < 0$ ise çatallanma süperkritik Neimark-Sacker, $a(0) > 0$ ise subkritik Neimark-Sacker çatallanma adını alır. Ayrıca $a(0)$ aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$a(0) = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\theta_0} g_{21}}{2} \right) - \operatorname{Re} \left(\frac{(1 - 2e^{-i\theta_0})e^{-2i\theta_0} g_{20}g_{11}}{2(1 - e^{-i\theta_0})} \right) - \frac{|g_{11}|^2}{2} - \frac{|g_{02}|^2}{4}.$$



3. MERKEZ MANİFOLD TEORİSİ

Merkez Manifold Teorisi, bir dinamik sistemin boyutunu indirger ve denge noktası civarında sistemi lineerleştirerek işlemleri daha basit hale getirir. Bu teknik, dinamik sistemlerin yerel (lokal) analizinde uygulanabilen en önemli yöntemlerden birisidir (Wiggins, 2003).

Bu bölümde, ayrıık bir fark denklem sisteminde Flip çatallanma analizi için gerekli olan Merkez Manifold Teoremine yer verilecektir.

3.1 Merkez Manifold Teoremi

Bu tezde, ayrıık bir fark denklem sisteminin denge noktasının merkez manifoldu ele alınacaktır. Burada "sistemin denge noktasının merkez manifoldu" ifadesinin yerine "sistemin merkez manifoldu" ifadesi kullanılacaktır.

İlk olarak,

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

sistemi ele alalım. Kabul edelim ki $\bar{x} = 0$ denge noktasına karşılık gelen Jakobiyeen matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun. Ayrıca kabul edelim ki denge noktası hiperbolik olmasın. Öyleyse, birim çember üzerinde yer alan, mutlak değeri bire eşit olan özdeğerler mevcuttur. Ek olarak, kabul edelim ki mutlak değeri birden büyük olan n_+ özdeğer, mutlak değeri bire eşit olan n_0 özdeğer ve mutlak değeri birden küçük olan n_- özdeğer mevcut olsun (Bakınız Şekil 3.1). Burada birim çemberin içindeki özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $\{e_1, e_2, \dots, e_{n_-}\}$ olmak üzere

$$E^{n_-} = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_{n_-}\}$$

uzayı sistemin *Kararlı Altuzayı*, birim çemberin dışındaki özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $\{e_{n_-+1}, e_{n_-+2}, \dots, e_{n_-+n_+}\}$ olmak üzere

$$E^{n_+} = \text{span}\{e_{n_-+1}, e_{n_-+2}, \dots, e_{n_-+n_+}\}$$

uzayı ise sistemin *Kararsız Altuzayı* olarak tanımlanır (Wiggins, 2003).

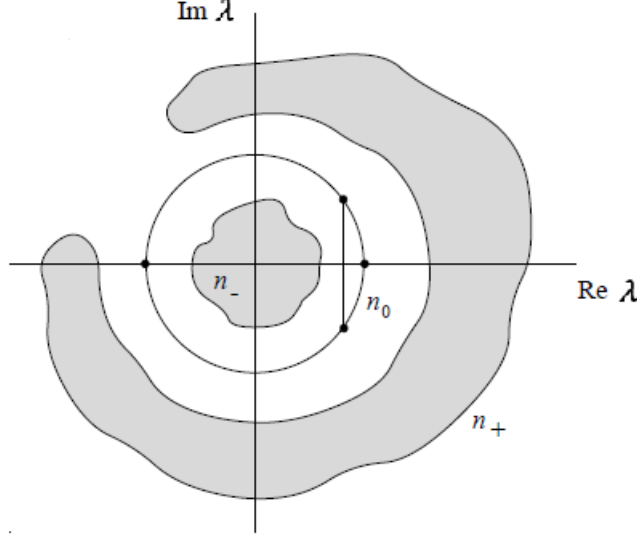
Birim çemberin üzerindeki bütün özdeğerlere karşılık gelen özvektörler $\{e_{n_-+n_++1}, \dots, e_{n_-+n_++n_0}\}$ olmak üzere

$$E^{n_0} = \text{span}\{e_{n_-+n_++1}, \dots, e_{n_-+n_++n_0}\}$$

uzayına sistemin *Merkez Altuzayı* denir (Wiggins, 2003).

Burada başlangıç noktası eğer E^{n-} uzayından seçilirse bu noktanın iterasyonları denge noktasına yakınsıyor iken, E^{n+} uzayından seçilen başlangıç noktasının iterasyonları ıraksar.

E^{n_0} uzayından alınan noktanın iterasyonları ise ne yakınsar ne de ıraksar. Ayrıca



Şekil 3.1: Denge noktasının kritik özdeğerleri (Wiggins, 2003)

$E^{n+} = \emptyset$ olması durumunda sistemdeki tüm yörüngeler E^{n_0} uzayına yakınsar. O halde sistemlerin uzun süreli davranışlarını incelemek için sistemlerin E^{n_0} uzayına indirgenmiş halini analiz edebiliriz.

$(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n-}$ ve orijinin bir komşuluğunda $f, g \in C^r (r \geq 2)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} x &\mapsto Ax + f(x, y), \\ y &\mapsto By + g(x, y), \end{aligned} \quad (3.2)$$

sistemini ele alalım. Burada A, özdeğerlerin mutlak değeri bire eşit olan $n_0 \times n_0$ matrisi iken, B özdeğerlerin mutlak değeri birden küçük olan $n_- \times n_-$ matrisidir. Ayrıca kabul edelim ki $f(0, 0) = g(0, 0) = Df(0, 0) = Dg(0, 0) = 0$ sağlansın.

Açıkça görülüyor ki (3.2) sisteminin denge noktası $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ olup bu denge noktasının kararlılığını araştırmak için lineerizasyon yöntemi bir sonuç vermez. Bu analizi aşağıdaki teorem ile verebiliriz (Wiggins, 2003).

Teorem 3.1 (Varlık (Wiggins, 2003)). *Yeterince küçük δ değerleri için*

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n_0} \times \mathbb{R}^{n-} \mid y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

(3.2) sistemin bir C^r merkez manifoldudur. Ayrıca, yeterince küçük u değerleri için (3.2) sistemi

$$u \mapsto Au + f(u, h(u)), \quad u \in \mathbb{R}^{n_0} \quad (3.3)$$

sistemine lokal topolojik olarak denktir. Bir başka ifadeyle, sistemler aynı nitel yapıya sahiptir.

İspat. Bakınız Carr (1981).

Dikkat edilirse teoremdaki $h(0) = 0$ ve $Dh(0) = 0$ şartı $W^c(0)$ merkez manifoldunun E^{n_0} Merkez Altuzayına teğet olduğunu söyler.

Sıradaki teorem $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$ denge noktasının kararlılık yapısı ile (3.3) sistemin $\bar{u} = 0$ denge noktasının kararlılık yapısı arasındaki ilişkiyi ifade eder.

Teorem 3.2 (Kararlılık (Wiggins, 2003)). *Eğer (3.3) sistemin sıfır çözümü kararlı (lokal asimptotik kararlı) (kararsız) ise (3.2) sistemin sıfır çözümü de kararlı (lokal asimptotik kararlı) (kararsız) olur.*

Kabul edelim ki (3.3) sistemin sıfır çözümü kararlı olsun. Ayrıca kabul edelim ki yeterince küçük (\bar{x}, \bar{y}) değerleri için (x_n, y_n) (3.1) sisteminin bir çözümü olsun. Öyleyse, k ve β katsayıları pozitif ve $\beta < 1$ olmak üzere her n değeri için (3.3) sisteminin bir u_n çözümü vardır öyle ki

$$|x_n - u_n| \leq k\beta^n \quad \text{ve} \quad |y_n - h(u_n)| \leq k\beta^n$$

sağlanır.

İspat. Bakınız Carr (1981).

Şimdi de (3.2) sistemin merkez manifoldunu hesaplayalım. Sistemi aşağıda gösterildiği gibi ifade edebiliriz:

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = By_n + g(x_n, y_n). \end{cases}$$

Burada $y_n = h(x_n)$ olarak alınırsa

$$\begin{cases} x_{n+1} = Ax_n + f(x_n, h(x_n)) \\ y_{n+1} = h(x_{n+1}) = Bh(x_n) + g(x_n, h(x_n)) \end{cases}$$

bulunur. İkinci deklemden, $h(x_{n+1}) = h(Ax_n + f(x_n, h(x_n))) = Bh(x_n) + g(x_n, h(x_n))$ olduğundan aşağıdaki denklem elde edilir

$$N(h(x)) = h(Ax + f(x, h(x))) - Bh(x) + g(x, h(x)) = 0.$$



4. BİR AYRIK AV-AVCI POPÜLASYON MODELİNİN ÇATALLANMA ANALİZİ

4.1 Tez Problemi ve Tezin Amacı

Bu tezde, Leslie tipi bir ayrik av-avcı popülasyon modelinin çatallanma analizi incelenecektir. İlk olarak

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = r_1 N(t) - \varepsilon P(t) N(t) \\ \frac{dP(t)}{dt} = P(t) \left(r_2 - \theta \frac{P(t)}{N(t)} \right) \end{cases} \quad (4.1)$$

denklem sistemi ile verilen sürekli av-avcı sistemi ile başlayalım. Burada r_1, ε, r_2 ve θ katsayıları pozitifdir ve

$N(t)$: t anındaki av popülasyonunu

$P(t)$: t anındaki avcı popülasyonunu

r_1 : av popülasyonunun büyüme oranını

r_2 : avcı popülasyonunun büyüme oranını

ε : av popülasyonunun ölüm oranını

θ : avcı popülasyonunun ölüm oranını

göstermektedir.

Zhou ve arkadaşları (2005) bu modelin dinamiği üzerinde etkili olan Allee etkisini incelemiştir. Modelin gecikmeli halinin Kararlılık ve Hopf Çatallanma analizi Çelik (2008) tarafından çalışılmıştır. Karaoğlu ve Merdan (2014) modele iki gecikme ekleyerek ortaya çıkan Hopf çatallanmasına ayrıntılı bir şekilde yer vermişlerdir.

Bu tezde, yukarıda bahsedilen çalışmalardan farklı olarak böcek, kelebek ve bitki gibi ardışık popülasyonları çakışmayan, yani bir sonraki popülasyona bir önceki popülasyonun katkısı olmayan türlerin analizine yer verilecektir. Bunun için, (4.1) modeli Euler metodunu kullanarak ayrıklaştırıp, ayrıklaştırılmış sistemin kararlılık ve çatallanma analizi yapılacaktır. (4.1) modelinin dinamiği üzerindeki Allee etkisi Çelik ve Duman (2009), kararlılık yapısı ve denge noktasında ortaya çıkan Flip çatallanma ise Sucu (2016) tarafından çalışılmıştır. Bu tezde ise (4.1) modelinde periyodik çözümlerin ortaya çıktığı Neimark-Sacker çatallanma analizine yer verilecektir.

Bir $N(t)$ fonksiyonunun bir t_0 noktasındaki türevi

$$N'(t_0) = \lim_{t_1 \rightarrow t_0} \frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0}$$

olarak ifade edilir. Bu türev değeri t_0 'a yakın t_1 değerleri için

$$N'(t_0) \approx \frac{N(t_1) - N(t_0)}{t_1 - t_0}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\delta = t_1 - t_0$ ayırıklaştırma adımı olarak seçilirse

$$N(t_1) \approx N(t_0) + \delta N'(t_0) \quad (4.2)$$

olarak yazılabilir. Öyleyse, (4.1) modelindeki

$$N'(t_0) = r_1 N(t_0) - \varepsilon P(t_0) N(t_0)$$

denklemini

$$N(t_1) \approx N(t_0) + \delta N(t_0)(r_1 - \varepsilon P(t_0))$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan

$$N_{t+1} = N_t + \delta N_t (r_1 - \varepsilon P_t) \quad (4.3)$$

denklemini elde edilir. Bu işlem Euler metodu olarak adlandırılır. Benzer şekilde

$$P_{t+1} = P_t + \delta P_t \left(r_2 - \theta \frac{P_t}{N_t} \right) \quad (4.4)$$

denklemini de elde edilir. Sonuç olarak Euler metodu ile (4.1) sistemine karşılık gelen

$$\begin{pmatrix} N_{t+1} \\ P_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_t + \delta N_t (r_1 - \varepsilon P_t) \\ P_t + \delta P_t (r_2 - \theta \frac{P_t}{N_t}) \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

ayrık av-avcı sistemi elde edilir. Bu sistem tek bir parametreye, δ ya bağlıdır. Modelde $r_1 N_t$ ifadesi av popülasyonunun sınırsız bir büyümeye sahip olduğunu gösterirken, tepki fonksiyonu εP_t bu büyümenin sınırsız olmadığını söyler. Ayrıca bu modelde avcının yaşaması ortamdaki av popülasyonu ile ilişkilendirilir. Burada δ ayırıklaştırma adımı olup çatallanma parametresi olarak kullanılacaktır.

(4.1) sisteminde av ve avcı popülasyonlarındaki değişim mevcut av ve avcı popülasyonları ile ilişkilendirilmiş ve bu ilişki diferensiyel denklemlerle gösterilmiştir. Popülasyonların üremesinin kesikli olduğu durumlarda $t + 1$ dönemdeki popülasyon t dönemdeki popülasyona bağlı olarak değişmektedir. Dolayısıyla zaman değişkeni bir ayrık değişken olup popülasyonlardaki değişim fark denklemleri ile ifade edilmektedir. Bu şekilde oluşturulan (4.5) sistemine yaz aylarında domates bitkisinin yapraklarından beslenen beyaz sera sineğini örnek verebiliriz.

4.2 Kararlılık Analizi

Av-avcı popülasyon modelleri üzerine yapılan çalışmaların temel amaçlarından birisi ileri zamandaki popülasyon davranışlarının incelenmesi; denge noktalarının (şayet var ise) kararlı olabilmesi için gerekli şartların belirlenmesidir.

Bu bölümde ilk olarak (4.5) sisteminin pozitif denge noktası bulunacak ve sistemin bu denge noktasında lokal kararlı olabilmesi için gerekli şartlar belirlenecektir. Ardından δ çatalanma parametresi değiştiğinde bu pozitif denge noktasında ortaya çıkan Flip ve Neimark-Sacker çatalanma gözlemlenecektir.

4.2.1 Denge noktası ve karakteristik polinom

(4.5) sistemin denge noktaları aşağıdaki denklemleri sağlayan (\bar{N}, \bar{P}) değerleridir

$$\begin{cases} \bar{N} = \bar{N} + \delta \bar{N}(r_1 - \varepsilon \bar{P}), \\ \bar{P} = \bar{P} + \delta \bar{P} \left(r_2 - \theta \frac{\bar{P}}{\bar{N}} \right). \end{cases} \quad (4.6)$$

Öyleyse,

$$\bar{N} = \bar{N} + \delta \bar{N}(r_1 - \varepsilon \bar{P}) \Rightarrow \delta \bar{N}(r_1 - \varepsilon \bar{P}) = 0$$

olup $\delta \neq 0$ olmak üzere

$$\bar{N} = 0 \quad \text{veya} \quad \bar{P} = \frac{r_1}{\varepsilon} \quad (4.7)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$\bar{P} = \bar{P} + \delta \bar{P} \left(r_2 - \theta \frac{\bar{P}}{\bar{N}} \right) \Rightarrow \delta \bar{P} \left(r_2 - \theta \frac{\bar{P}}{\bar{N}} \right) = 0$$

olup $\delta \neq 0$ olmak üzere

$$\bar{P} = 0 \quad \text{veya} \quad \bar{N} = \frac{\theta \bar{P}}{r_2} \quad (4.8)$$

olarak bulunur. Burada $\bar{N} = 0$ olması biyolojik açıdan ilgi çekici bir durum değildir. Ayrıca modelde avcının yaşaması ortamdaki av sayısı ile ilişkilendirmiştik. Bu yüzden $\bar{N} \neq 0$ olup sistemin tek denge noktası

$$(\bar{N}, \bar{P}) = \left(\frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2}, \frac{r_1}{\varepsilon} \right) \quad (4.9)$$

olarak elde edilir. r_1, r_2, ε ve θ katsayıları pozitif olduğu için elde edilen bu denge noktası da pozitifdir.

Karakteristik Polinom

(\bar{N}, \bar{P}) denge noktasına karşılık gelen karakteristik polinomu bulmak için (4.5) sistemini ele alalım. Denklemin sağ tarafındaki ifadeleri

$$\begin{cases} f(N_t, P_t) = N_t + \delta N_t(r_1 - \varepsilon P_t) \\ g(N_t, P_t) = P_t + \delta P_t(r_2 - \theta \frac{P_t}{N_t}) \end{cases} \quad (4.10)$$

ile gösterelim. Öyleyse,

$$J(N, P) = \begin{pmatrix} f_N(N, P) & f_P(N, P) \\ g_N(N, P) & g_P(N, P) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \delta(r_1 - \varepsilon P) & -\delta \varepsilon N \\ \frac{\delta \theta P^2}{N^2} & 1 + \delta r_2 - \frac{2\delta \theta \varepsilon}{N} \end{pmatrix}$$

olmak üzere (4.5) sistemin denge noktasındaki Jakobiyeen matrisi

$$\bar{J} := J(\bar{N}, \bar{P}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\delta \theta r_1}{r_2} \\ \frac{\delta r_2^2}{\theta} & 1 - \delta r_2 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

olarak bulunur. Burada $iz(\bar{J}) = 2 - \delta r_2$ ve $det(\bar{J}) = 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2$ dir.

Jakobiyeen matrisine karşılık gelen karakteristik polinom

$$\lambda^2 - iz(\bar{J})\lambda + det(\bar{J}) = \lambda^2 - (2 - \delta r_2)\lambda + (1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2) \quad (4.12)$$

olup, bu polinomun kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \delta r_2 \mp \delta \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{2} \quad (4.13)$$

şeklindedir.

Teorem 1.1 den biliyoruz ki ayrık sistemlerde bir sistemin denge noktasının lokal kararlı olabilmesi için karakteristik polinomun köklerinin mutlak değerce birden küçük, kararsız olabilmesi için en az bir kökün mutlak değerce birden büyük, çatallanmanın ortaya çıkabilmesi için de kökün mutlak değerinin bire eşit olması gerekmektedir. Bu yüzden, karakteristik polinomun köklerini analiz edebilmek için aşağıdaki lemma kullanılacaktır.

Lemma 4.1. Kabul edelim ki $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C$ ikinci dereceden reel katsayılı bir polinom olsun ve λ_1 ile λ_2 , $F(\lambda)$ polinomunun iki kökü olsun. Öyleyse,

1. $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow F(1) > 0, F(-1) > 0$, ve $C < 1$,
2. $\lambda_1 = -1$ ve $|\lambda_2| \neq 1 \Leftrightarrow F(-1) = 0$ ve $B \neq 0, 2$,
3. $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, |\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1 \Leftrightarrow B^2 - 4C < 0$ ve $C = 1$

dir.

İspat. İspat iki durumda ele alınacaktır. Birinci durum $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olması, ikinci durum ise $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ olmasıdır.

Durum I - Kabul edelim ki $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olsun. λ_1 ve λ_2 , $F(\lambda)$ polinomunun kökleri olduğundan

$$F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan

$$F(1) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)$$

$$F(-1) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)$$

olarak bulunur.

1. Hipotezden $|\lambda_1| < 1$ ise $-1 < \lambda_1 < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ ise $-1 < \lambda_2 < 1$ olduğunu biliyoruz.

O halde $F(1) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) > 0$ ve $F(-1) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) > 0$ gerçekleşir.

Son olarak her λ_1, λ_2 değeri için $\lambda_1 \lambda_2 \leq |\lambda_1 \lambda_2| = |\lambda_1| |\lambda_2|$ olup hipotezden $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ eşitsizliklerini kullanırsak $C = \lambda_1 \lambda_2 < 1$ bulunur.

Tersine, kabul edelim ki $F(-1) > 0, F(1) > 0$ ve $C < 1$ olsun. Öyleyse,

$F(1) > 0$ ise $(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) > 0$ olup **i)** $(1 - \lambda_1) > 0$ ve $(1 - \lambda_2) > 0$ veya

$$\text{ii) } (1 - \lambda_1) < 0 \text{ ve } (1 - \lambda_2) < 0$$

$F(-1) > 0$ ise $(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) > 0$ olup **iii)** $(1 + \lambda_1) > 0$ ve $(1 + \lambda_2) > 0$ veya

$$\text{iv) } (1 + \lambda_1) < 0 \text{ ve } (1 + \lambda_2) < 0$$

$C < 1$ ise **v)** $\lambda_1 \lambda_2 < 1$ sağlanır.

Yukarıdaki ifadelerden **ii)** ve **v)** koşulu aynı anda sağlanmaz. Çünkü **ii)** koşulunun sağlanması durumunda $\lambda_1 > 1$ ve $\lambda_2 > 1$ olup $\lambda_1 \lambda_2 > 1$ gerçekleşeneğinden bu durum **v)** koşulu ile çelişir.

Benzer şekilde **iv)** ve **v)** koşulu da aynı anda sağlanmaz. Çünkü **iv)** koşulunun sağlanması durumunda $\lambda_1 < -1$ ve $\lambda_2 < -1$ olup $\lambda_1 \lambda_2 > 1$ gerçekleşeneğinden bu durum **v)** koşulu ile çelişir.

O halde, $F(-1) > 0$, $F(1) > 0$ ve $C < 1$ hipotezlerinin gerçeklenebilmesi için

$$\text{i) } 1 - \lambda_1 > 0 \quad \text{ve} \quad 1 - \lambda_2 > 0$$

$$\text{iii) } 1 + \lambda_1 > 0 \quad \text{ve} \quad 1 + \lambda_2 > 0$$

$$\text{v) } \lambda_1 \lambda_2 < 1$$

koşullarının aynı anda sağlanması gerekmektedir. Şimdi **i)**, **iii)** ve **v)** koşulları altında $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ ifadelerinin gerçeklendiğini gösterelim:

$$\text{i) } (1 - \lambda_1) > 0 \Rightarrow \lambda_1 < 1$$

$$\text{iii) } (1 + \lambda_1) > 0 \Rightarrow \lambda_1 > -1$$

olup $-1 < \lambda_1 < 1$ ise $|\lambda_1| < 1$ gerçekenir.

Benzer şekilde

$$\text{i) } (1 - \lambda_2) > 0 \Rightarrow \lambda_2 < 1$$

$$\text{iii) } (1 + \lambda_2) > 0 \Rightarrow \lambda_2 > -1$$

olup $-1 < \lambda_2 < 1$ ise $|\lambda_2| < 1$ olarak bulunur.

2. Kabul edelim ki $\lambda_1 = -1$ ve $|\lambda_2| \neq 1$ olsun. $F(-1) = 0$ ve $B \neq 0, 2$ olduğunu gösterelim.

$F(-1) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)$ olup hipotez gereği $\lambda_1 = -1$ ise $F(-1) = 0$ olarak bulunur. Ayrıca $B = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -(-1 + \lambda_2) = 1 - \lambda_2$ olmak üzere $\lambda_2 \neq -1, 1$ olduğundan $B \neq 0, 2$ elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki $F(-1) = 0$ ve $B \neq 0, 2$ olsun. O halde

$F(-1) = 0$ ise $(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) = 0$ olup $\lambda_1 = -1$ veya $\lambda_2 = -1$ ya da $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -1$ olmalıdır.

$B \neq 0, 2$ ise $-(\lambda_1 + \lambda_2) \neq 0, 2$ dir. Eğer $\lambda_1 = -1$ ve $B \neq 0, 2$ ise $-(-1 - \lambda_2) \neq 0, 2$ buradan $\lambda_2 \neq -1, 1$ olup $|\lambda_2| \neq 1$ olarak bulunur. Eğer $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = -1$ olarak alınırsa $\lambda_1 + \lambda_2 = -2$ olup $B = 2$ olarak bulunur. Bu ise hipotez ile çelişir.

Benzer şekilde, $\lambda_2 = -1$ ve $B \neq 0, 2$ olduğunu varsayalım. O halde $-(\lambda_1 - 1) \neq 0, 2$ olup $\lambda_1 \neq -1, 1$ bulunur. Bu da bize $|\lambda_1| \neq 1$ olduğunu söyler.

3. Bu madde kompleks kökler için geçerlidir.

Böylelikle ispatın ilk kısmı tamamlanır. Şimdi de ikinci durumu ele alalım.

Durum II - Kabul edelim ki $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ olsun.

1. Farz edelim ki $a, b \in \mathbb{R}$ ($b \neq 0$) olmak üzere $\lambda_1 = a + ib$ ve $\lambda_2 = a - ib$ olsun. O halde $|\lambda_1| = |\lambda_2| = a^2 + b^2$ dir.

Öncelikle $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ olmak üzere $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$ ve $C < 1$ olduğunu gösterelim.

$F(1) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) = (1 - (a + ib))(1 - (a - ib)) = (1 - a)^2 + b^2 > 0$. Benzer şekilde, $F(-1) = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) = (1 + (a + ib))(1 + (a - ib)) = (1 + a)^2 + b^2 > 0$ gerçekleşir. Son olarak, $C = \lambda_1\lambda_2 = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 < 1$ şartı sağlanır.

Tersine, kabul edelim ki $F(1) > 0, F(-1) > 0$ ve $C < 1$ sağlansın. Hipotezden, $C = \lambda_1\lambda_2 = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$ sağlanır. Böylelikle birinci maddenin ispatını tamamlanır.

2. Bu madde sadece reel kökler için geçerlidir.

3. $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ olsun. Göstermeliyiz ki $B^2 - 4C < 0$ ve $C = 1$ şartları sağlanır.

Eğer $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ ise $a^2 + b^2 = 1$ dir. $B = -(\lambda_1 + \lambda_2) = -(a + ib + a - ib) = -2a$ ve $C = \lambda_1\lambda_2 = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = 1$ olup $C = 1$ şartı sağlanır. Öte yandan, $B^2 - 4C = (-2a)^2 - 4(a^2 + b^2) = -4b^2 < 0$ gerçekleşir.

Şimdi de kabul edelim ki $C = 1$ ve $B^2 - 4C < 0$ olsun. O halde göstermeliyiz ki $F(\lambda)$ polinomunun $\lambda_1 = a + ib$ ve $\lambda_2 = a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ ($b \neq 0$) olmak üzere $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ koşulunu sağlayan kompleks iki kökü vardır.

$B = -(\lambda_1 + \lambda_2)$ ve $C = 1$ olduğundan $B^2 - 4C < 0$ ise $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 < 0$ olarak bulunur. Eğer $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ olsaydı $\lambda_1 = \lambda_2$ iken $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ iken $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 > 0$ olurdu. Bu ise $B^2 - 4C < 0$ olması ile çelişir. O halde kökler reel olamaz.

Hipotezden $C = 1$ ise $\lambda_1\lambda_2 = a^2 + b^2 = 1$ olması $|\lambda_1| = 1$ ve $|\lambda_2| = 1$ olduğunu söyler.

Böylelikle lemmanın ispatı tamamlanır ve sonuç olarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1. *Birinci dereceden lineer olmayan fark denklemlerinden oluşan bir sistemi ele alalım ve kabul edelim ki $F(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C \ni B, C \in \mathbb{R}$, sistemin denge noktasındaki Jakobiye matrisine karşılık gelen karakteristik polinomu olsun. Öyleyse,*

1. $F(1) > 0, F(-1) > 0$ ve $C < 1$ ise denge noktası kararlıdır,
2. $B \neq 0, 2$ ve $F(-1) = 0$ ise Flip çatallanma ortaya çıkabilir,
3. $B^2 - 4C < 0$ ve $C = 1$ ise Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkabilir.

4.2.2 Denge noktasının kararlılığı

Bu bölümde, (4.5) sistemin $(\bar{N}, \bar{P}) = \left(\frac{\theta r_1}{\epsilon r_2}, \frac{r_1}{\epsilon} \right)$ denge noktasının lokal olarak kararlı olabilmesi için gerekli şartlar belirlenecektir.

Burada, denge noktasına karşılık gelen karakteristik polinom

$$F(\lambda) = \lambda^2 - (2 - \delta r_2)\lambda + (1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2) \quad (4.14)$$

olarak kullanılacaktır.

Teorem 4.1 gereğince (\bar{N}, \bar{P}) denge noktasının kararlı olabilmesi için $F(1) > 0$, $F(-1) > 0$ ve $C = 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 < 1$ şartlarının aynı anda sağlanması gerekmektedir. Öyleyse bu koşulların hangi şartlar altında sağlanacağını belirleyelim.

- (4.14) denkleminde $F(1) = 1 - 2 + \delta r_2 + 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 = \delta^2 r_1 r_2$ olarak hesaplanır. Burada r_1 ve r_2 pozitif olduğundan $\forall \delta > 0$ için $F(1) > 0$ sağlanır.
- $F(-1) = \delta^2 r_1 r_2 - 2\delta r_2 + 4 = (\delta - \bar{\delta}_1)(\delta - \bar{\delta}_2)$ olup $F(-1)$ polinomunun kökleri

$$\bar{\delta}_1 = \frac{r_2 - \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1 r_2} \quad \text{ve} \quad \bar{\delta}_2 = \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1 r_2}$$

şeklindedir.

Eğer $r_2 > 4r_1$ ise $F(-1)$ polinomu iki reel köke sahiptir. Ayrıca, $r_2^2 - 4r_1 r_2 > 0$ ise $r_2^2 > r_2^2 - 4r_1 r_2 > 0$ yazılabilir. Burada eşitsizliğin her iki tarafının karekökü alınırsa

$$\bar{\delta}_1 = \frac{r_2 - \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1 r_2} > 0$$

olarak elde edilir. Öte yandan,

$$\frac{r_2 - \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1 r_2} < \frac{r_2 + \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1 r_2}$$

olduğundan

$$0 < \bar{\delta}_1 < \bar{\delta}_2$$

gerçeklenir. Öyleyse, $F(-1)$ polinomunun işaret tablosu aşağıdaki şekilde oluşturulur:

	0	$\bar{\delta}_1$	$\bar{\delta}_2$
$F(-1)$	+	-	+

Sonuç olarak, $r_2 > 4r_1$ iken $0 < \delta < \bar{\delta}_1$ veya $\delta > \bar{\delta}_2$ ise $F(-1) > 0$ sağlanır.

Eğer $r_2 < 4r_1$ ise $F(-1)$ polinomu reel köke sahip olmadığından $\forall \delta > 0$ için $F(-1) > 0$ sağlanır.

Eğer $r_2 = 4r_1$ ise de $F(-1)$ çift katlı köke sahip olup $\forall \delta > 0$ için $F(-1) > 0$ sağlanır.

- Şimdi de $C = 1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 < 1$ olduğu durumu ele alalım.

Eğer $1 - \delta r_2 + \delta^2 r_1 r_2 < 1$ ise $r_2 \delta (\delta r_1 - 1) < 0$ gerçekleşir. Burada δ ve r_2 parametreleri pozitif olduğundan $\delta < \frac{1}{r_1}$ olarak elde edilir.

Yukarıdaki şartlara ek olarak,

$$\bar{\delta}_1 < \frac{1}{r_1} < \bar{\delta}_2$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülmektedir. Bir önceki sonuçtan $\delta < \frac{1}{r_1}$ olduğunu biliyoruz. O halde $\delta > \bar{\delta}_2$ olamaz. Böylelikle aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1. *Eğer $F(\lambda)$ karakteristik polinomu aşağıdaki şartlardan birini sağlıyor ise (\bar{N}, \bar{P}) denge noktası kararlıdır:*

i) $r_2 > 4r_1$ iken $0 < \delta < \bar{\delta}_1$,

ii) $r_2 \leq 4r_1$ iken $0 < \delta < \frac{1}{r_1}$.

4.3 Çatallanma Analizi

Bu bölümde (\bar{N}, \bar{P}) denge noktasında Flip ve Neimark-Sacker çatallanmanın görülebilmesi için hangi şartların sağlanması gerektiği analiz edilecektir. Bu çalışma için δ ayırıklaştırma adımı, çatallanma parametresi olarak seçilecek ve Merkez Manifold Teoremi ve Çatallanma Teorisi (Bakınız: Kuznetsov, 1998) kullanılacaktır.

4.3.1 Flip çatallanma

Teorem 4.1'den biliyoruz ki $F(-1) = 0$ ve $-(2 - \delta r_2) \neq 0$ ise, (\bar{N}, \bar{P}) denge noktasında Flip çatallanma görülebilir.

Biliyoruz ki $F(-1) = (\delta - \bar{\delta}_1)(\delta - \bar{\delta}_2) = 0$ ise $r_2 \geq 4r_1$ iken $\delta = \bar{\delta}_1$ ya da $\delta = \bar{\delta}_2$ dir. Ayrıca $-(2 - \delta r_2) \neq 0$ ise $\delta \neq \frac{2}{r_2}, \frac{4}{r_2}$ gerçekleşir. O halde, aşağıdaki teoremi elde edebiliriz.

Teorem 4.2. *Eğer $F(\lambda)$ karakteristik polinomu aşağıdaki şartları sağlıyorsa (\bar{N}, \bar{P}) denge noktasında Flip çatallanma ortaya çıkabilir:*

$$r_2 \geq 4r_1 \text{ ve } \delta = \bar{\delta}_1 \quad \text{veya} \quad \delta = \bar{\delta}_2 \ni \delta \neq \frac{2}{r_2}, \frac{4}{r_2}.$$

Eğer $\delta = \bar{\delta}_1$ seçilirse karakteristik polinomun kökleri aşağıdaki şekilde bulunur:

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{ve} \quad \lambda_2 = 3 - \bar{\delta}_1 r_2 \ni |\lambda_2| \neq 1. \quad (4.15)$$

Sonuç olarak, (\bar{N}, \bar{P}) denge noktasında Flip çatallanma görülebilir. Çatallanmanın var olduğunu analitik olarak gösterebilmek için Kuznetsovun Flip Çatallanma Teoremi kullanılacaktır (Bakınız: Kuznetsov, 1998).

Teorem 4.3. *Birinci mertebeden bir fark denklem sistemi olan*

$$X_{t+1} = f(X_t, \delta), \quad X_t, \delta \in \mathbb{R},$$

sistemini ele alalım. Kabul edelim ki $\delta = 0$ iken $X(0) = 0$, $f(X_t, \delta)$ fonksiyonunun sabit noktası olsun. Ayrıca f fonksiyonu analitik olup $f_X(0,0) = -1$ sağlansın. Öyleyse,

$$F1) \frac{1}{2}(f_{XX}(0,0))^2 + \frac{1}{3}f_{XXX}(0,0) \neq 0$$

$$F2) f_{X\delta}(0,0) \neq 0$$

şartlarının sağlanması durumunda sistemde Flip çatallanma ortaya çıkar (Kuznetsov, 1998).

Teoremi uygulayabilmek için iki boyutlu (4.5) sistemini bir boyutlu sisteme çevirmemiz gerekmektedir. Bunun için Merkez Manifold Teoremi kullanılacaktır. Öncelikle işlemleri basitleştirmek için sistemin denge noktasını orijine taşıyalım. Bunun için (4.10) denklemlerini ele alalım.

$$\begin{cases} f(N, P) = N + \delta N(r_1 - \varepsilon P) \\ g(N, P) = P + \delta P(r_2 - \theta \frac{P}{N}) \end{cases} \quad (4.16)$$

olmak üzere $f(N, P)$ ve $g(N, P)$ fonksiyonlarını (\bar{N}, \bar{P}) denge noktasında Taylor Serisine açalım:

$$\begin{aligned} N_{t+1} &= f(\bar{N}, \bar{P}) + f_N(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N}) + f_P(\bar{N}, \bar{P})(P_t - \bar{P}) \\ &+ \frac{1}{2}[f_{NN}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})^2 + 2f_{NP}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P}) + f_{PP}(\bar{N}, \bar{P})(P_t - \bar{P})^2] \\ &+ \frac{1}{6}[f_{NNN}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})^3 + 3f_{NNP}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})^2(P_t - \bar{P}) \\ &+ 3f_{NPP}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P})^2 + f_{PPP}(\bar{N}, \bar{P})(P_t - \bar{P})^3] + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{t+1} &= g(\bar{N}, \bar{P}) + g_N(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N}) + g_P(\bar{N}, \bar{P})(P_t - \bar{P}) \\ &+ \frac{1}{2}[g_{NN}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})^2 + 2g_{NP}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P}) + g_{PP}(\bar{N}, \bar{P})(P_t - \bar{P})^2] \\ &+ \frac{1}{6}[g_{NNN}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})^3 + 3g_{NNP}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})^2(P_t - \bar{P}) \\ &+ 3g_{NPP}(\bar{N}, \bar{P})(N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P})^2 + g_{PPP}(\bar{N}, \bar{P})(P_t - \bar{P})^3] + \dots \end{aligned}$$

şeklinde olup burada $\bar{N} = \frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2}$ ve $\bar{P} = \frac{r_1}{\varepsilon}$ olmak üzere

- $f(\bar{N}, \bar{P}) = \bar{N}$ ve $g(\bar{N}, \bar{P}) = \bar{P}$
- $f_N = 1 + \delta r_1 - \delta \varepsilon P$ ise $f_N(\bar{N}, \bar{P}) = 1 + \delta r_1 - \delta \varepsilon \frac{r_1}{\varepsilon} = 1$
- $f_P = -\delta \varepsilon P$ ise $f_P(\bar{N}, \bar{P}) = -\delta \varepsilon \frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2} = -\frac{\delta \theta r_1}{r_2}$
- $f_{NN}(\bar{N}, \bar{P}) = 0$, $f_{NP}(\bar{N}, \bar{P}) = -\delta \varepsilon$ ve $f_{PP}(\bar{N}, \bar{P}) = 0$
- $f_{NNN}(\bar{N}, \bar{P}) = f_{NNP}(\bar{N}, \bar{P}) = f_{NPP}(\bar{N}, \bar{P}) = f_{PPP}(\bar{N}, \bar{P}) = 0$
- $g_N(\bar{N}, \bar{P}) = \frac{\delta r_2^2}{\theta}$
- $g_P(\bar{N}, \bar{P}) = 1 - \delta r_2$
- $g_{NN}(\bar{N}, \bar{P}) = -\frac{2\delta \varepsilon r_2^3}{\theta^2 r_1}$
- $g_{NP}(\bar{N}, \bar{P}) = \frac{2\delta \varepsilon r_2^2}{\theta^2 r_1}$
- $g_{PP}(\bar{N}, \bar{P}) = -\frac{2\delta \varepsilon r_2}{r_1}$
- $g_{NNN}(\bar{N}, \bar{P}) = \frac{6\delta \varepsilon^2 r_2^4}{\theta^3 r_1^2}$
- $g_{NNP}(\bar{N}, \bar{P}) = -\frac{4\delta \varepsilon^2 r_2^3}{\theta^2 r_1^2}$
- $g_{NPP}(\bar{N}, \bar{P}) = \frac{2\delta \varepsilon^2 r_2^2}{\theta r_1^2}$
- $g_{PPP}(\bar{N}, \bar{P}) = 0$ dir.

Sonuç olarak aşağıdaki denklemleri elde ederiz:

$$N_{t+1} = \bar{N} + (N_t - \bar{N}) - \frac{\delta \theta r_1}{r_2} (P_t - \bar{P}) - \varepsilon \delta (N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P}) + \dots$$

$$P_{t+1} = \bar{P} + \frac{\delta r_2^2}{\theta} (N_t - \bar{N}) + (1 - \delta r_2)(P_t - \bar{P}) - \frac{\varepsilon \delta r_2^3}{\theta^2 r_1} (N_t - \bar{N})^2 + \frac{2\varepsilon \delta r_2^2}{\theta r_1} (N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P}) - \frac{\varepsilon \delta r_2}{r_1} (P_t - \bar{P})^2 + \frac{\varepsilon^2 \delta r_2^4}{\theta^3 r_1^2} (N_t - \bar{N})^3 - \frac{2\varepsilon^2 \delta r_2^3}{\theta^2 r_1^2} (N_t - \bar{N})^2 (P_t - \bar{P}) + \frac{\delta \varepsilon^2 r_2^2}{\theta r_1^2} (N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P})^2 + \dots$$

Böylelikle (4.5) sistemi aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{pmatrix} N_{t+1} \\ P_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\delta \theta r_1}{r_2} \\ \frac{\delta r_2^2}{\theta} & 1 - \delta r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_t - \bar{N} \\ P_t - \bar{P} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Burada

$$\begin{aligned}
f_1 &= -\varepsilon\delta(N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P}), \\
f_2 &= -\frac{\varepsilon\delta r_2^3}{\theta^2 r_1^2}(N_t - \bar{N})^2 + \frac{2\varepsilon\delta r_2^2}{\theta r_1}(N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P}) - \frac{\varepsilon\delta r_2}{r_1}(P_t - \bar{P})^2 \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2\delta r_2^4}{\theta^3 r_1^2}(N_t - \bar{N})^3 - \frac{2\varepsilon^2\delta r_2^3}{\theta^2 r_1^2}(N_t - \bar{N})^2(P_t - \bar{P}) + \frac{\delta\varepsilon^2 r_2^2}{\theta r_1^2}(N_t - \bar{N})(P_t - \bar{P})^2 + \dots
\end{aligned}$$

şeklindedir. Şimdi de aşağıdaki dönüşümleri tanımlayalım:

$$\begin{cases} U_t = N_t - \bar{N}, \\ V_t = P_t - \bar{P}, \\ \tilde{\delta} = \delta - \bar{\delta}. \end{cases}$$

Öyleyse $U_{t+1} = N_{t+1} - \bar{N}$ ve $V_{t+1} = P_{t+1} - \bar{P}$ olup (4.17) sistemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{pmatrix} U_{t+1} \\ V_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\tilde{\delta}\theta r_1}{r_2} \\ \frac{\tilde{\delta}r_2^2}{\theta} & 1 - \tilde{\delta}r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_t \\ V_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \\ f_2(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

öyle ki

$$\begin{aligned}
f_1(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) &= -\frac{\tilde{\delta}\theta r_1}{r_2}V - \varepsilon\tilde{\delta}UV - \varepsilon\tilde{\delta}UV + Y.M.T., \\
f_2(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \bar{\delta}) &= \frac{\tilde{\delta}r_2^2}{\theta}U - \tilde{\delta}r_2V - \tilde{\delta}\frac{\varepsilon r_2^3}{\theta^2 r_1}U^2 + 2\tilde{\delta}\frac{\varepsilon r_2^2}{\theta r_1}UV - \tilde{\delta}\frac{\varepsilon r_2}{r_1}V^2 + \tilde{\delta}\frac{\varepsilon^2 r_2^4}{\theta^3 r_1^2}U^3 \\
&\quad - 2\tilde{\delta}\frac{\varepsilon^2 r_2^3}{\theta^2 r_1^2}U^2V + \tilde{\delta}\frac{\varepsilon^2 r_2^2}{\theta r_1^2}UV^2 - \tilde{\delta}\frac{\varepsilon r_2^3}{\theta^2 r_1}U^2 + 2\tilde{\delta}\frac{\varepsilon r_2^2}{\theta r_1}UV - \tilde{\delta}\frac{\varepsilon r_2}{r_1}V^2 + \tilde{\delta}\frac{\varepsilon^2 r_2^4}{\theta^3 r_1^2}U^3 \\
&\quad - 2\tilde{\delta}\frac{\varepsilon^2 r_2^3}{\theta^2 r_1^2}U^2V + \tilde{\delta}\frac{\varepsilon^2 r_2^2}{\theta r_1^2}UV^2 + Y.M.T..
\end{aligned}$$

Burada (4.18) sistemin denge noktası (0,0) dır. Sonuç olarak, (4.5) sisteminin denge noktası orijine taşınmış ve bu sistemin dinamik yapısına lokal topolojik olarak denk olan (4.18) sistemi elde edilmiştir.

(4.15) den biliyoruz ki $F(\lambda)$ karakteristik polinomunun kökleri, bir başka deyişle \bar{J} matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = -1$ ve $\lambda_2 = 3 - \tilde{\delta}_1 r_2$ şeklindedir. O halde bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri birer sütun kabul eden aşağıdaki tersinir T matrisini inşa

edebiliriz:

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{\bar{\delta}\theta r_1}{r_2} & -\frac{\bar{\delta}\theta r_1}{r_2} \\ -2 & 2 - \bar{\delta}r_2 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Buradan

$$\begin{pmatrix} U_t \\ V_t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

dönüşümünü kullanarak (4.18) sisteminin her iki tarafını soldan T^{-1} matrisi ile çarparsak

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(X_t, Y_t) \\ g_2(X_t, Y_t) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

sistemini elde edebiliriz. Burada

$$g_1(X_t, Y_t) = \alpha_1 X_t^2 + \alpha_2 X_t Y_t + \alpha_3 \bar{\delta} X_t + \alpha_4 \bar{\delta} Y_t + \alpha_5 X_t^3 + \alpha_6 \bar{\delta} X_t^2 + Y.M.T.$$

$$g_2(X_t, Y_t) = \beta_1 X_t^2 + \beta_2 X_t Y_t + \beta_3 \bar{\delta} X_t + \beta_4 \bar{\delta} Y_t + \beta_5 X_t^3 + \beta_6 \bar{\delta} X_t^2 + Y.M.T.$$

şeklindedir.

Buradaki katsayılar aşağıda yer aldığı gibidir:

$$\alpha_1 = \frac{6\bar{\delta}^2 \varepsilon r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{4\bar{\delta} \varepsilon r_2}{r_1(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{\bar{\delta}^3 \varepsilon r_1 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{4\bar{\delta} \varepsilon}{(\bar{\delta}r_2 - 4)},$$

$$\alpha_2 = \frac{2\bar{\delta}^3 \varepsilon r_2^2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{2\bar{\delta}^3 \varepsilon r_1 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} + \frac{4\bar{\delta} \varepsilon r_2 (2 - \bar{\delta}r_2)}{r_1(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{\bar{\delta}^2 \varepsilon r_2 (2 - \bar{\delta}r_2)}{(\bar{\delta}r_2 - 4)},$$

$$\alpha_3 = \frac{2r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{\bar{\delta} r_1 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{r_2 (2 - \bar{\delta}r_2)}{\bar{\delta}(\bar{\delta}r_2 - 4)},$$

$$\alpha_4 = -\frac{r_2 (2 - \bar{\delta}r_2)}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{\bar{\delta} r_1 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{r_2 (2 - \bar{\delta}r_2)^2}{2\bar{\delta}(\bar{\delta}r_2 - 4)},$$

$$\alpha_5 = -\frac{\bar{\delta}^4 \varepsilon^2 r_1 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{4\bar{\delta}^2 \varepsilon^2 r_2}{r_1(\bar{\delta}r_2 - 4)} + \frac{4\bar{\delta}^3 \varepsilon^2 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)},$$

$$\alpha_6 = \frac{4\bar{\delta} \varepsilon r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{\bar{\delta}^2 \varepsilon r_1 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{4\varepsilon r_2}{r_1(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{2\varepsilon (2 - \bar{\delta}r_2)}{(\bar{\delta}r_2 - 4)},$$

$$\beta_1 = -\frac{4\bar{\delta}^2 \varepsilon r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} + \frac{4\bar{\delta} \varepsilon r_2}{r_1(\bar{\delta}r_2 - 4)} + \frac{\bar{\delta}^3 \varepsilon r_1 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{4\bar{\delta} \varepsilon}{(\bar{\delta}r_2 - 4)},$$

$$\beta_2 = -\frac{2\bar{\delta}^3 \varepsilon r_2^2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} + \frac{2\bar{\delta}^3 r_1 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{4\bar{\delta} \varepsilon r_2 (2 - \bar{\delta}r_2)}{r_1(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{2\bar{\delta}^2 \varepsilon r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)},$$

$$\beta_3 = \frac{\bar{\delta} r_1 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{2r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} + \frac{2r_2}{\bar{\delta}(\bar{\delta}r_2 - 4)},$$

$$\begin{aligned}\beta_4 &= \frac{r_2(2 - \bar{\delta}r_2)}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} + \frac{\bar{\delta}r_1r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{r_2(2 - \bar{\delta}r_2)}{\bar{\delta}(\bar{\delta}r_2 - 4)}, \\ \beta_5 &= \frac{\bar{\delta}^4 \varepsilon^2 r_1 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} + \frac{4\bar{\delta}^2 \varepsilon^2 r_2}{r_1(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{4\bar{\delta}^3 \varepsilon^2 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)}, \\ \beta_6 &= -\frac{4\bar{\delta}\varepsilon r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} + \frac{\bar{\delta}^2 \varepsilon r_1 r_2}{(\bar{\delta}r_2 - 4)} + \frac{4\varepsilon r_2}{r_1(\bar{\delta}r_2 - 4)} - \frac{4\varepsilon}{(\bar{\delta}r_2 - 4)}.\end{aligned}$$

Merkez Manifold Teoremini kullanılarak (4.5) sistemine karşılık gelen $W^c(0,0,0)$ merkez manifoldu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$W^c(0,0,0) = \{(X_t, Y_t, \tilde{\delta}) \in \mathbb{R}^3 : Y_t = h(X_t) = h_1 X_t^2 + h_2 X_t \tilde{\delta} + h_3 \tilde{\delta}^2\}. \quad (4.22)$$

Ayrıca, $W^c(0,0,0)$ merkez manifoldu

$$N(h(X_t)) = h(-X_t + g_1(X_t, h(X_t))) - \lambda_2 h(X_t) - g_2(X_t, h(X_t)) = 0 \quad (4.23)$$

denklemini sağlar. Buradan

$$\begin{aligned}N(h(X_t)) &= (h_1 - h_1(3 - \bar{\delta}r_2) - \beta_1)X_t^2 + (\beta_5 + h_1\beta_2 - 2h_1\alpha_1)X_t^3 \\ &\quad + (h_2 - 2h_1\alpha_3 - h_2(3 - \bar{\delta}r_2 - \beta_3))\tilde{\delta}X_t + (h_2\alpha_1 - h_2\beta_2 - h_1\beta_4 - \beta_6)\tilde{\delta}X_t^2 \\ &\quad + (h_2\alpha_3 - h_3\beta - h_2\beta_4)\tilde{\delta}^2X_t + (h_3 - h_3(3 - \bar{\delta}r_2))\tilde{\delta}^2 - \beta_4h_3\tilde{\delta}^3\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Buradaki katsayılar

$$h_1 = \frac{-4\bar{\delta}\varepsilon - 4\bar{\delta}^2\varepsilon r_2 + \bar{\delta}^3\varepsilon r_1 r_2 + \frac{4\bar{\delta}\varepsilon r_2}{r_1}}{(\bar{\delta}r_2 - 4)(\bar{\delta}r_2 - 2)},$$

$$h_2 = \frac{4 - \bar{\delta}(2r_2 - r_1 r_2 \bar{\delta})}{\bar{\delta}(\bar{\delta}r_2 - 4)^2},$$

$$h_3 = 0$$

şeklinde hesaplanır. Sonuç olarak (4.21) sistemi

$$X_{t+1} = -X_t + g_1(X_t, h(X_t)) \quad (4.24)$$

bir boyutlu sistemine indirgenir. Burada g_1 aşağıda gösterildiği gibidir:

$$\begin{aligned}g_1(X_t, h(X_t)) &= \alpha_1 X_t^2 + (h_1 \alpha_1 + \alpha_5) X_t^3 + (\alpha_2 h_2 + h_1 \alpha_4 + \alpha_6) \tilde{\delta} X_t^2 \\ &\quad + (\alpha_4 h_2) \tilde{\delta}^2 X_t + \alpha_3 \tilde{\delta} X_t.\end{aligned}$$

Bu sistemin denge noktasının $(0, 0)$ olduğu açıktır. (4.24) denkleminde

$$f_X(X, \tilde{\delta}) = -1 + 2\alpha_1 X + 3(h_1 \alpha_1 + \alpha_5)X^2 + 2(\alpha_2 h_2 + h_1 \alpha_4 + \alpha_6)\tilde{\delta}X + (\alpha_4 h_2)\tilde{\delta}^2 + \alpha_3 \tilde{\delta}$$

olup $f_X(0, 0) = -1$ sağlanır. Teorem 4.3 gereğince

$$f_{XX}(0, 0) = 2\alpha_1$$

$$f_{XXX}(0, 0) = 6(h_1 \alpha_1 + \alpha_5)$$

olup

$$\frac{1}{2}(f_{XX}(0, 0))^2 + \frac{1}{3}f_{XXX}(0, 0) = 2\alpha_1^2 + 2(h_1 \alpha_1 + \alpha_5)$$

olarak hesaplanır. Ayrıca,

$$f_{X\alpha}(0, 0) = \alpha_3$$

olarak bulunur. Sonuç olarak (4.24) sisteminde Flip çatallanmanın görülebilmesi için gerekli şartlar belirlenmiş olur.

Sonuç 4.2. (4.24) sistemi

$$F1) 2\alpha_1^2 + 2(h_1 \alpha_1 + \alpha_5) \neq 0$$

$$F2) \alpha_3 \neq 0$$

şartları altında Flip çatallanmaya sahiptir.

4.3.2 Neimark-Sacker çatallanma

Teorem 4.1'den biliyoruz ki eğer $B^2 - 4C < 0$ ve $C = 1$ şartları sağlanırsa (\bar{N}, \bar{P}) denge noktasında Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkabilir. Şimdi bu iki koşulun sağlanması için gerekli şartları belirleyelim.

$C = 1$ ise $\delta^2 r_1 r_2 = \delta r_2$ olup $\delta, r_2 \neq 0$ olduğundan $\delta = \frac{1}{r_1}$ olarak bulunur. Ayrıca, $B^2 - 4C < 0$ ise $\delta^2 r_2 (r_2 - 4r_1) < 0$ olup $r_2 > 0$ olduğundan $r_2 < 4r_1$ sağlanır. O halde, aşağıdaki teoremi elde edebiliriz.

Teorem 4.4. *Eğer $F(\lambda)$ karakteristik polinomu aşağıdaki şartları sağlıyorsa (\bar{N}, \bar{P}) denge noktasında Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkabilir:*

$$\delta = \frac{1}{r_1} \quad \text{ve} \quad r_2 < 4r_1.$$

Çatallanmanın var olduğunu analitik olarak gösterebilmek için Neimark-Sacker

Çatallanma Teoremi kullanılacaktır (Bakınız: Kuznetsov, 1998).

Teorem 4.5.

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}(X_t, Y_t, \delta) \\ \tilde{g}(X_t, Y_t, \delta) \end{pmatrix}$$

sistemi yeterince küçük δ değerleri için $(0,0)$ denge noktasına sahip olsun ve bu denge noktasındaki Jakobiyen matrisinin özdeğerleri $\lambda_{1,2} = r(\delta)e^{\mp i\theta(\delta)} \ni r(\delta) = 1$ ve $\theta(\delta) = \theta_0$ olsun.

Kabul edelim ki aşağıdaki şartlar sağlansın:

(N.S.1) $r'(\delta) \neq 0$,

(N.S.2) $e^{ik\theta_0} \neq 1, k=1,2,3,4$.

Ek olarak $a(\delta) = \text{Re}(e^{i\theta_0}c_1(\delta)) \neq 0$ olsun. Öyleyse δ soldan sağa δ_c değerinden geçerken orijinin bir komşuluğunda kapalı yörünge ailesi ortaya çıkar. Burada

$$a(\delta) = \text{Re} \left(\frac{e^{-i\theta_0}g_{21}}{2} \right) - \text{Re} \left(\frac{(1-2e^{-i\theta_0})e^{-2i\theta_0}g_{20}g_{11}}{2(1-e^{-i\theta_0})} \right) - \frac{|g_{11}|^2}{2} - \frac{|g_{02}|^2}{4}$$

dir.

Açıklama 4.1. $a(\delta)$ katsayısı kapalı yörüngenin yönünü ve kararlılığını belirler.

- Eğer $a(\delta) < 0$ ise Süperkritik Neimark-Sacker çatallanma
- Eğer $a(\delta) > 0$ ise Subkritik Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkar.

Şimdi teoremi uygulayabilmek için (4.18) sistemini tekrar hatırlayalım:

$$\begin{pmatrix} U_{t+1} \\ V_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-\tilde{\delta}\theta r_1}{r_2} \\ \frac{\tilde{\delta}r_2^2}{\theta} & 1 - \tilde{\delta}r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_t \\ V_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \delta) \\ f_2(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \delta) \end{pmatrix}$$

olup yukarıdaki ifadede

$$f_1(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \delta) = -\frac{\tilde{\delta}\theta r_1}{r_2}V - \varepsilon\tilde{\delta}UV - \varepsilon\tilde{\delta}UV + Y.M.T.,$$

$$\begin{aligned} f_2(U_t, V_t, \tilde{\delta}, \delta) &= \frac{\tilde{\delta}r_2^2}{\theta}U - \tilde{\delta}r_2V - \tilde{\delta}\frac{\varepsilon r_2^3}{\theta^2 r_1}U^2 + 2\tilde{\delta}\frac{\varepsilon r_2^2}{\theta r_1}UV - \tilde{\delta}\frac{\varepsilon r_2}{r_1}V^2 + \tilde{\delta}\frac{\varepsilon^2 r_2^4}{\theta^3 r_1^2}U^3 \\ &\quad - 2\tilde{\delta}\frac{\varepsilon^2 r_2^3}{\theta^2 r_1^2}U^2V + \tilde{\delta}\frac{\varepsilon^2 r_2^2}{\theta r_1^2}UV^2 - \tilde{\delta}\frac{\varepsilon r_2^3}{\theta^2 r_1}U^2 + 2\tilde{\delta}\frac{\varepsilon r_2^2}{\theta r_1}UV - \tilde{\delta}\frac{\varepsilon r_2}{r_1}V^2 + \tilde{\delta}\frac{\varepsilon^2 r_2^4}{\theta^3 r_1^2}U^3 \\ &\quad - 2\tilde{\delta}\frac{\varepsilon^2 r_2^3}{\theta^2 r_1^2}U^2V + \tilde{\delta}\frac{\varepsilon^2 r_2^2}{\theta r_1^2}UV^2 + Y.M.T. \end{aligned}$$

dir. Notasyonları kolaylaştırmak için f_1 ve g_1 fonksiyonlarını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$f_1 = a_{13}V + a_{14}UV + a_{15}UV,$$

$$f_2 = a_{23}U^2 + a_{24}UV + a_{26}U^3 + a_{27}U^2V.$$

(4.18) sistemin Jakobiyen matrisine karşılık gelen karakteristik polinom

$$F(\lambda) = \lambda^2 - (2 - \bar{\delta}r_2)\lambda + (1 - \bar{\delta}r_2 + \bar{\delta}^2r_1r_2)$$

şeklinde olup bu polinomun kökleri

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \bar{\delta}r_2 \mp \sqrt{\bar{\delta}^2(r_2^2 - 4r_1r_2)}}{2}$$

olarak hesaplanmıştı. Teorem 4.1 gereğince $r_2 < 4r_1$ ve $\bar{\delta} = \frac{1}{r_1}$ şartları altında

$$\lambda_{1,2}(\bar{\delta}) = 1 - \frac{r_2}{2r_1} \mp i \frac{\sqrt{4r_1r_2 - r_2^2}}{2r_1} \quad (4.25)$$

olup $|\lambda_{1,2}| = 1$ olarak elde edilir.

Şimdi de kabul edelim ki $\mu := \text{Re}(\lambda) = 1 - \frac{r_2}{2r_1}$ ve $\omega := \text{Im}(\lambda) = \frac{\sqrt{4r_1r_2 - r_2^2}}{2r_1}$ olsun.

Ayrıca,

$$J(\bar{\delta}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\theta}{r_2} \\ \frac{r_2^2}{\theta r_1} & 1 - \frac{r_2}{r_1} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

olarak tanımlansın. $\lambda_1 = \mu - i\omega$ özdeğerini ele alalım ve bu özdeğere karşılık gelen özvektörün reel ve imajiner kısmı birer sütun olacak şekilde aşağıdaki T matrisini inşa edelim:

$$T = \begin{pmatrix} -a_{12} & 0 \\ a_{11} - \mu & \omega \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Eğer

$$\begin{pmatrix} U_t \\ V_t \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix}$$

dönüşümü kullanılırsa, (4.18) sisteminin normal formu aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}(X_t, Y_t) \\ \tilde{g}(X_t, Y_t) \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Yukarıdaki ifadede

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= a_{14}(a_{11} - \mu)X_t^2 + a_{14}\omega X_t Y_t, \\ \tilde{g} &= \left[\frac{a_{23}a_{12}^2}{\omega} - \frac{(a_{11} - \mu)^2 a_{14}}{\omega} - \frac{a_{12}a_{24}(a_{11} - \mu)}{\omega} \right] X_t^2 - [a_{14}(a_{11} - \mu) - a_{12}a_{24}] X_t Y_t \\ &\quad + [a_{27}a_{12}^2] X_t^2 Y_t + \left[\frac{a_{27}a_{12}^2(a_{11} - \mu)}{\omega} - \frac{a_{26}a_{12}^3}{\omega} \right] X_t^3\end{aligned}$$

dir.

Sonuç olarak, yukarıdaki fonksiyonlar kullanılarak sıfırdan farklı $a(\delta)$ katsayısı aşağıdaki şekilde bulunur (Guckenheimer, 1983):

$$a\left(\frac{1}{r_1}\right) = \left[-Re\left(\frac{(1-2\lambda)\bar{\lambda}^2}{1-\lambda}\xi_{20}\xi_{11}\right) - \frac{1}{2}|\xi_{11}|^2 - |\xi_{02}|^2 + Re(\bar{\lambda}\xi_{21}) \right] \quad (4.29)$$

ve bu eşitlikte

$$\begin{aligned}\xi_{20} &= \frac{1}{8} [(\tilde{f}_{xx} - \tilde{f}_{yy} + 2\tilde{g}_{xy}) + i(\tilde{g}_{xx} - \tilde{g}_{yy} - 2\tilde{f}_{xy})], \\ \xi_{11} &= \frac{1}{4} [(\tilde{f}_{xx} + \tilde{f}_{yy}) + i(\tilde{g}_{xx} + \tilde{g}_{yy})], \\ \xi_{02} &= \frac{1}{8} [(\tilde{f}_{xx} - \tilde{f}_{yy} + 2\tilde{g}_{xy}) + i(\tilde{g}_{xx} - \tilde{f}_{yy} + 2\tilde{f}_{xy})] \\ \xi_{21} &= \frac{1}{16} [(\tilde{f}_{xxx} + \tilde{f}_{yyy} + \tilde{g}_{xxy} + \tilde{g}_{yyy}) + i(\tilde{g}_{xxx} + \tilde{g}_{xyy} - \tilde{f}_{xxy} - \tilde{f}_{yyy})]\end{aligned}$$

dır. Bu ise bize pozitif denge noktası civarında Neimark-Sacker çatallanmanın var olduğunu gösterir.

Kompleks Değişken Tanımı Altında Neimark-Sacker Çatallanma

Şimdi (\bar{N}, \bar{P}) denge noktasında ortaya çıkan Neimark-Sacker çatallanma, kompleks değişken tanımlanarak analiz edilecektir.

Öncelikle (4.28) sistemini ele alalım:

$$\begin{pmatrix} X_{t+1} \\ Y_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & -\omega \\ \omega & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_t \\ Y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{f}(X_t, Y_t) \\ \tilde{g}(X_t, Y_t) \end{pmatrix}.$$

Bu sisteme $Z_t = X_t + iY_t$ kompleks dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}Z_{t+1} &= X_{t+1} + iY_{t+1} = \mu X_t - \omega Y_t + \tilde{f} + i(\omega X_t + \mu Y_t + \tilde{g}) \\ &= (\mu + i\omega)(X_t + iY_t) + \tilde{f} + i\tilde{g} = \lambda Z_t + g(Z_t, \bar{Z}_t, \bar{\delta})\end{aligned} \quad (4.30)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$g(Z_t, \bar{Z}_t, \bar{\delta}) = \frac{g_{20}}{2} Z_t^2 + \frac{g_{11}}{2} Z_t \bar{Z}_t + \frac{g_{02}}{2} \bar{Z}_t^2 + \frac{g_{12}}{2} Z_t \bar{Z}_t^2 + \frac{g_{21}}{2} Z_t^2 \bar{Z}_t + \frac{g_{30}}{2} Z_t^3 + \frac{g_{03}}{2} \bar{Z}_t^3$$

şeklinde yazılabilir.

Dikkat edilirse (4.30) denklemini, Lemma 2.4'ün hipotezlerini sağlar. Öyleyse Lemma 2.4 gereğince (4.30) denklemini, parametreye bağlı ve tersi mevcut olan

$$Z_t = V_t + \frac{h_{20}}{2} V_t^2 + h_{11} V_t \bar{V}_t + \frac{h_{02}}{2} \bar{V}_t^2$$

dönüşümü ile kuadratik terimleri olmayan

$$V_{t+1} = \lambda V_t + \frac{\tilde{g}_{30}}{6} V_t^3 + \frac{\tilde{g}_{21}}{2} V_t^2 \bar{V}_t + \frac{\tilde{g}_{12}}{2} V_t \bar{V}_t^2 + \frac{\tilde{g}_{03}}{6} \bar{V}_t^3 + O(|V_t|^4) \quad (4.31)$$

denklemine dönüşür. Ayrıca Lemma 2.5 gereğince (4.31) sistemi parametreye bağlı ve tersi mevcut olan

$$V_t = W_t + \frac{h_{30}}{6} W_t^3 + \frac{h_{21}}{2} W_t^2 \bar{W}_t + \frac{h_{12}}{2} W_t \bar{W}_t^2 + \frac{h_{03}}{6} \bar{W}_t^3 + O(|W_t|^4)$$

dönüşümü ile tek bir kübik terim içeren

$$W_{t+1} = \lambda W_t + c_1 W_t^2 \bar{W}_t + O(|W_t|^4) \quad (4.32)$$

denklemine dönüşür. Burada $c_1 = c_1(\bar{\delta})$ olup aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$c_1\left(\frac{1}{r_1}\right) = \frac{g_{20}g_{11}(1-2\lambda)}{2(\lambda^2-\lambda)} + \frac{|g_{11}|^2}{1-\bar{\lambda}} + \frac{g_{21}}{2} + \frac{|g_{02}|^2}{2(\bar{\lambda}^2-\lambda)^2}.$$

Öte yandan, $r(\bar{\delta}) = |\lambda(\bar{\delta})|$ ve $\lambda = \frac{2 - \bar{\delta}r_2 \mp \sqrt{\bar{\delta}^2(r_2^2 - 4r_1r_2)}}{2}$ olmak üzere

$$r(\bar{\delta}) = \left(\frac{4 - 4r_2\bar{\delta} + 4r_1r_2\bar{\delta}^2}{4} \right)^{1/2}$$

şeklindedir. Buradan

$$r'(\bar{\delta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{4 - 4r_2\bar{\delta} + 4r_1r_2\bar{\delta}^2}{4} \right)^{-1/2} \left(\frac{-4r_2 + 8r_1r_2\bar{\delta}}{4} \right)$$

olarak hesaplanır. $r'\left(\frac{1}{r_1}\right) = 4r_2$ bulunur. Burada r_2 parametresi pozitif olduğundan $r'(\bar{\delta})$ sıfırdan farklı bulunur. Böylelikle Teorem 2.2 hipotezleri ve **N1** şartı sağlanır.

Ayrıca $k = 1, 2, 3, 4$ için $e^{ik\theta(\delta)}$ değeri birden farklı olup **N2** şartı gerçekleşir. Sonuç olarak Teorem 2.2 kullanılarak Teorem 4.5 elde edilir. Burada çatallanma parametresi δ olarak seçilmiştir.



5. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde, dördüncü bölümde bulunan teorik sonuçları nümerik örneklerle desteklemek ve δ çatallanma parametresinin (4.5) sisteminin dinamiği üzerindeki etkisini göstermek amaçlanmaktadır. Bunun için MATLAB programı kullanılarak (4.5) sistemi için aşağıdaki simülasyonlar elde edilmiştir.

Nümerik simülasyonlar için

$$r_1 = 0.45, \quad r_2 = 10, \quad \varepsilon = 0.03, \quad \theta = 50 \quad (5.1)$$

parametre değerleri kullanılmıştır. Bu parametre değerleriyle, (4.5) sistemi

$$\begin{pmatrix} N_{t+1} \\ P_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_t + \delta N_t (0.45 - (0.03)P_t) \\ P_t + \delta P_t (10 - 50 \frac{P_t}{N_t}) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

sistemine dönüşür.

Bu sistemin

$$(\bar{N}, \bar{P}) = \left(\frac{\theta r_1}{\varepsilon r_2}, \frac{r_1}{\varepsilon} \right) = (75, 15)$$

olmak üzere tek denge noktası vardır ve kritik çatallanma değeri

$$\delta_c = \frac{r_2 - \sqrt{r_2^2 - 4r_1 r_2}}{r_1 r_2} = 0.2099$$

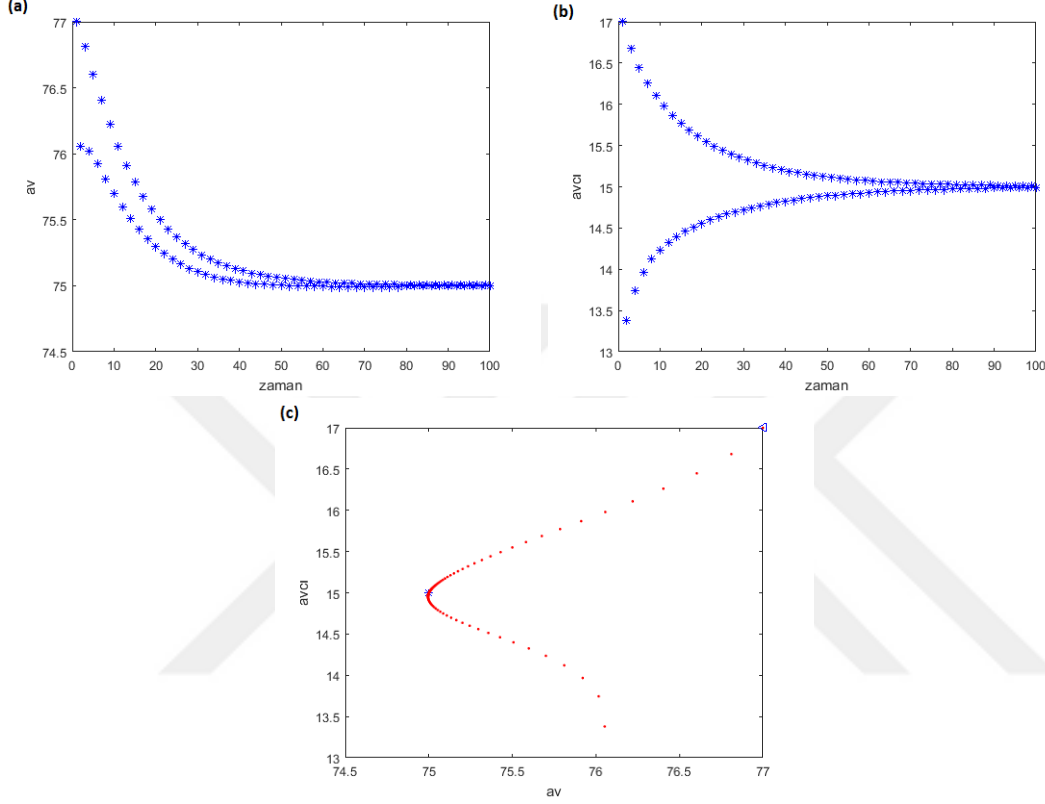
olarak hesaplanır. Bölüm 4.3.1'de belirlenen şartlar altında bu denge noktasının kararlılığını kaybedebileceği ve bu denge noktasında Flip çatallanmanın ortaya çıkabileceğini gösterdik. Buradan yola çıkarak, bu bölümde (\bar{N}, \bar{P}) denge noktasının kararlılığıyla ilgili nümerik örneklere yer verilecektir. (5.1) parametre değerleri ele alındığında sıfırdan farklı

$$\alpha_1^2 + 2(h_1 \alpha_1 + \alpha_5) = 1.2871$$

$$\alpha_3 = -0.0127$$

değerleri elde edilip **F1** ve **F2** şartlarının sağlandığı görülür. Dolayısıyla, $\delta_c = 0.2099$ parametre değerinde denge noktası Flip çatallanmaya sahiptir.

Şekil 5.1'de görüldüğü gibi, $\delta = 0.2050$ olarak, yani $\delta_c = 0.2099$ çatallanma değerinden küçük seçilirse, sistemin tek denge noktası kararlı olur. Böylelikle başlangıçta ortamda bulunan $N(0) = 77$ av sayısı salınım yaparak zamanla 75 noktasına yaklaşırken başlangıçta ortamda bulunan $P(0) = 17$ avcı sayısı benzer şekilde zamanla 15 noktasına yaklaşır ve bir süre sonra her ikisi de bu noktalarda dengede kalır.



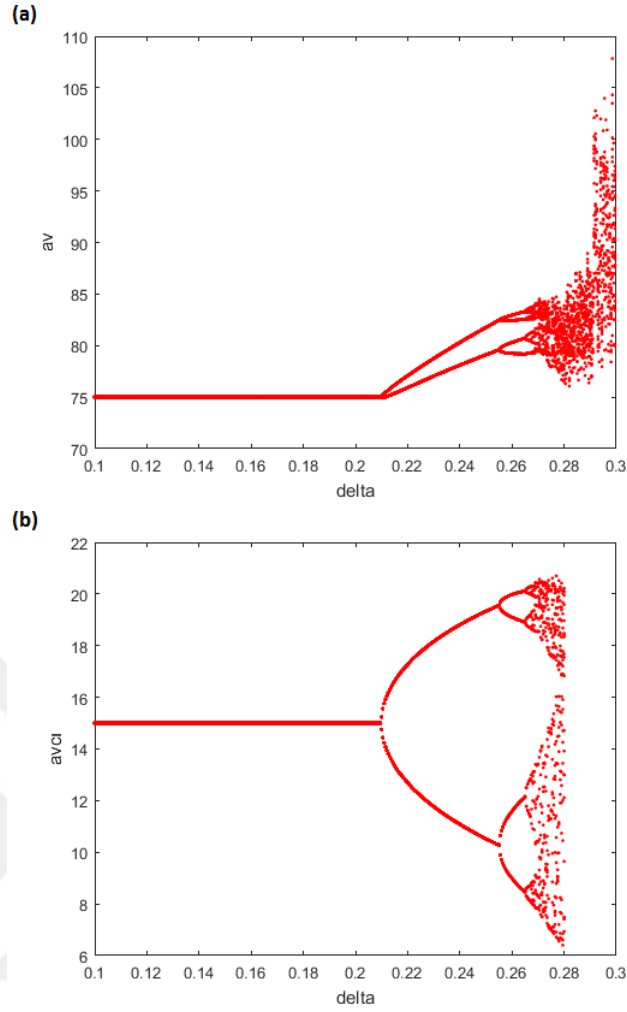
Şekil 5.1: $\delta = 0.2050$ iken $N(0) = 77$, $P(0) = 17$ başlangıç değerine sahip av ve avcı popülasyon yoğunluğunun çözüm grafiği sırasıyla (a) ve (b) şekillerinde, (5.2) sisteminin faz portresi ise şekil (c) de verilmiştir.

Şekil 5.2 bize $\delta_c = 0.2099$ değerinde Flip çatallanmanın ortaya çıktığını söyler. Bir başka ifadeyle, $\delta_c = 0.2099$ değerinden önce av ve avcı popülasyonu için tek denge noktası mevcut iken, $\delta_c = 0.2099$ değerinde her iki popülasyon için artık iki döngü mevcuttur. Ayrıca daha büyük δ çatallanma değerleri için kaosu ortaya çıktığı görülür.

Şimdi de sistemin periyodik çözümlerini inceleyelim. Bunun için,

$$r_1 = 0.45, \quad r_2 = 0.10, \quad \varepsilon = 0.03, \quad \theta = 0.05 \quad (5.3)$$

parametre değerleri kullanılmıştır.



Şekil 5.2: δ parametresi $0.1 \leq \delta \leq 0.35$ aralığında değişirken av popülasyonunun çatallanma diyagramı şekil (a) da, avcı popülasyonunun çatallanma diyagramı şekil (b) de verilmiştir.

(5.3) parametre değerleriyle (4.5) sisteminin denge noktası

$$(\bar{N}, \bar{P}) = (7.5, 15),$$

kritik çatallanma değeri ise

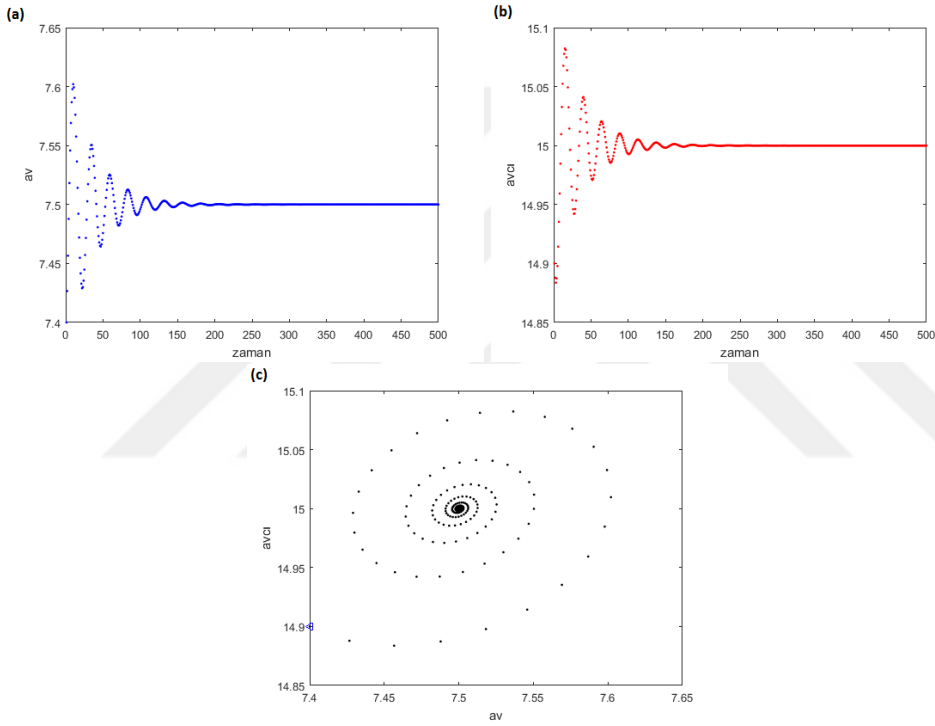
$$\delta = 2.\bar{2}$$

olarak bulunur ve Neimark-Sacker Çatallanma teoremi gereğince sıfırdan küçük

$$a(\delta) = -3.1410e - 04$$

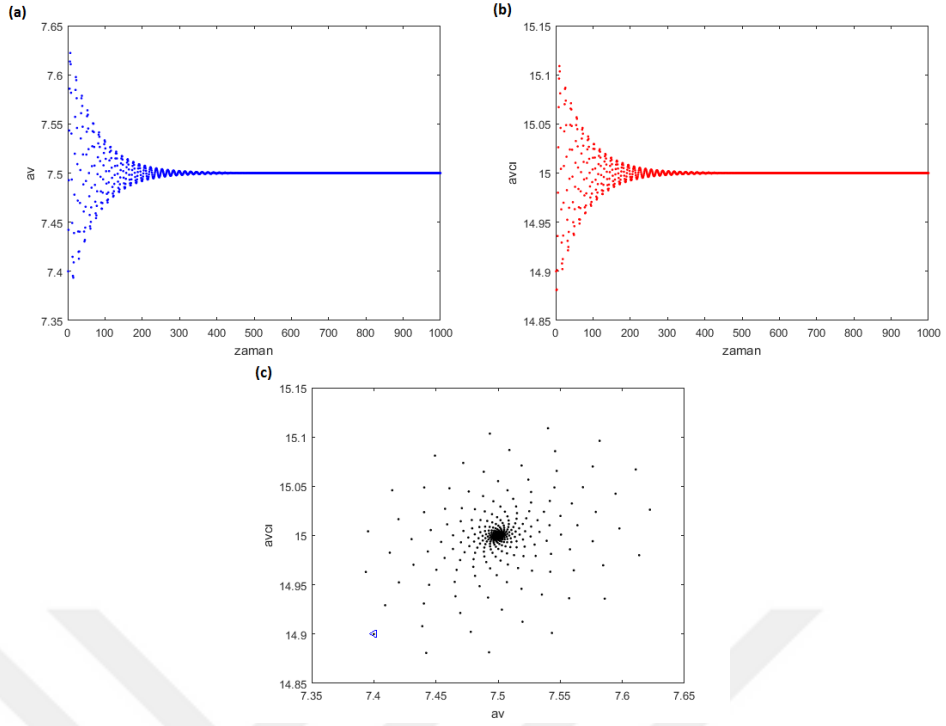
katsayısı hesaplanır. Bu katsayı bize δ parametre değerinin δ_c parametre değerinden geçerken periyodik çözümlerin var olduğunu ve çatallanmanın süperkritik olduğunu gösterir. Şekil 5.3'ten Şekil 5.8'e kadar bu sonucu destekleyen nümerik simülasyonlara yer verilmiştir. Bu gösterimleri sırasıyla incelemek gerekirse,

- $\delta = 1.2 < \delta_c = 2.\bar{2}$ iken denge noktası kararlıdır.
- $\delta = 1.9$ ve $\delta = 2.1$ iken, bir başka ifadeyle δ_c parametre değerine yakın fakat hala küçük δ parametre değerleri için, denge noktası lineer olmayan kararlıdır.
- $\delta = 2.222$ iken denge noktasında periyodik çözümler ortaya çıkar.
- $\delta = 2.222222$, $\delta = 2.222227$ ve $\delta = 2.22223$ parametre değerleri için 4.5 sisteminin tek denge noktası farklı periyotlara sahip üç farklı periyodik çözüme sahiptir. Bu ise bize sistemin süperkritik Neimark-Sacker çatallanmaya sahip olduğunu gösterir.
- Son olarak, $\delta = 2.3 > \delta_c$ iken denge noktası kararsızdır.

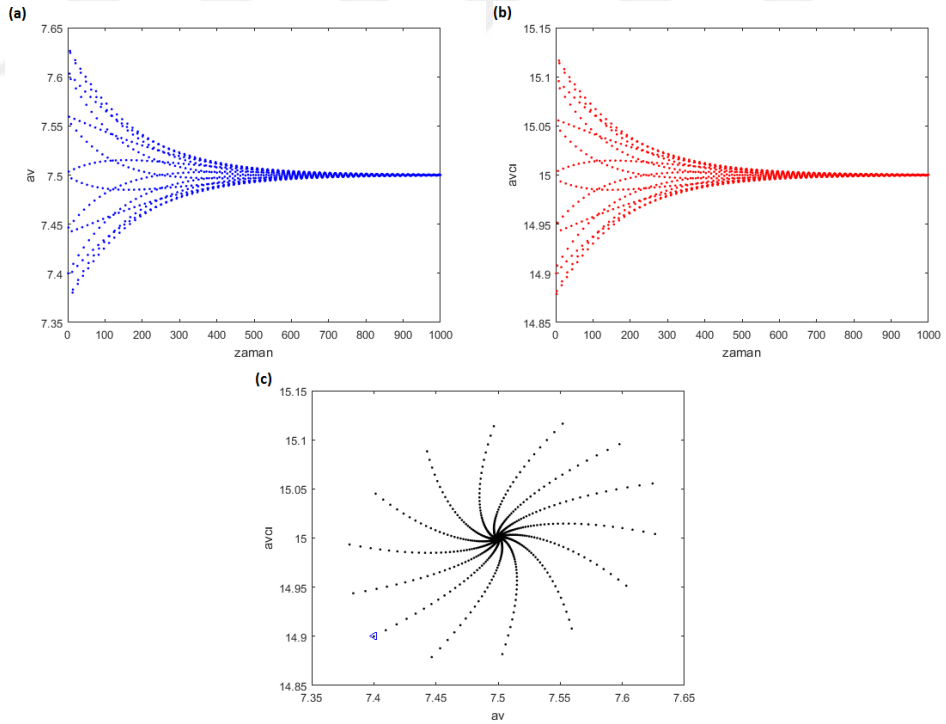


Şekil 5.3: (a) ve (b) $\delta = 1.2$ iken $N(0) = 7.4$, $P(0) = 14.9$ başlangıç değerindeki av - $zaman$, $avci$ - $zaman$ ilişkisini göstermektedir. Aynı parametre değerlerindeki av - $avci$ faz portresi ise şekil (c) de gösterildiği gibidir.

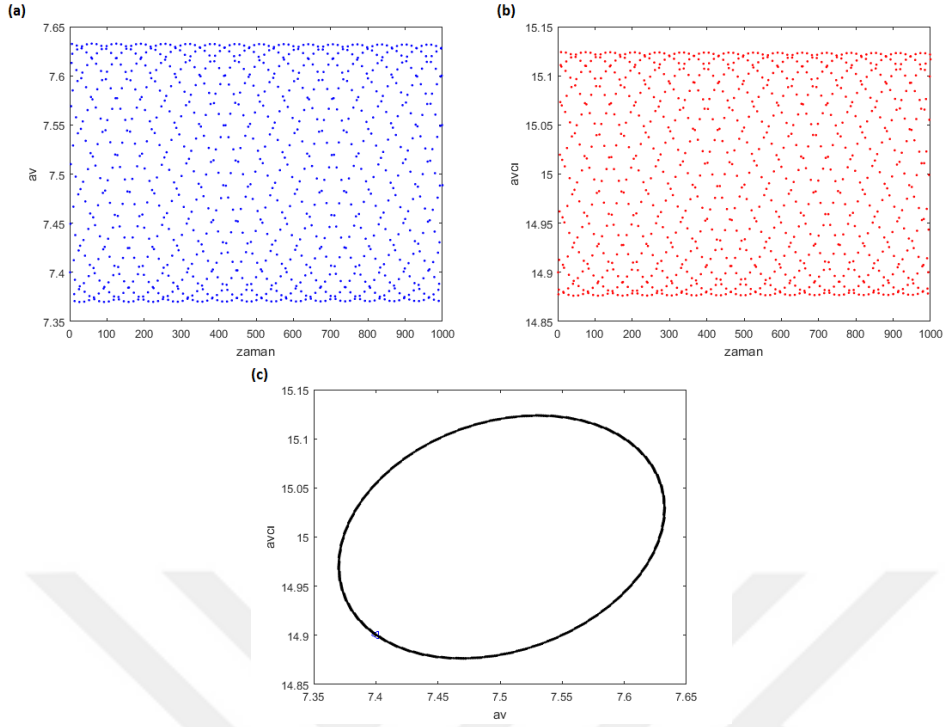
Bu sonuç, $\delta_c = 1/r_1$ çatallanma parametre değeri değiştikçe denge noktasının kararlılık yapısının değiştiğini ve periyodik çözümlerin ortaya çıktığını, bir başka ifadeyle, av popülasyonunun doğum oranının azalmasının kararlı denge noktasını periyodik bir çözüme dönüştürdüğünü söyler.



Şekil 5.4: (a) ve (b) $\delta = 1.9$ iken $N(0) = 7.4$, $P(0) = 14.9$ başlangıç değerindeki av-zaman, avcı-zaman ilişkisini göstermektedir. Aynı parametre değerlerindeki av-avcı faz portresi ise şekil (c) de gösterildiği gibidir.

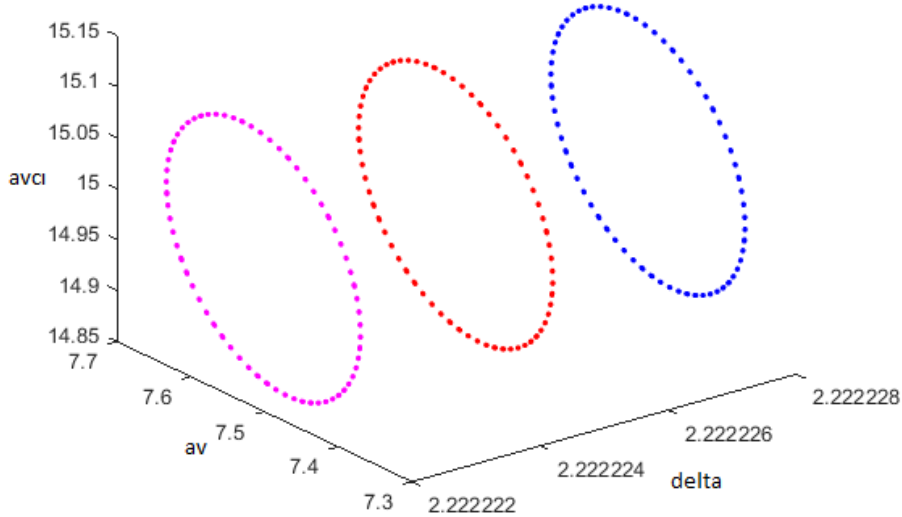


Şekil 5.5: (a) ve (b) $\delta = 2.1$ iken $N(0) = 7.4$, $P(0) = 14.9$ başlangıç değerindeki av-zaman, avcı-zaman ilişkisini göstermektedir. Aynı parametre değerlerindeki av-avcı faz portresi ise şekil (c) de gösterildiği gibidir.

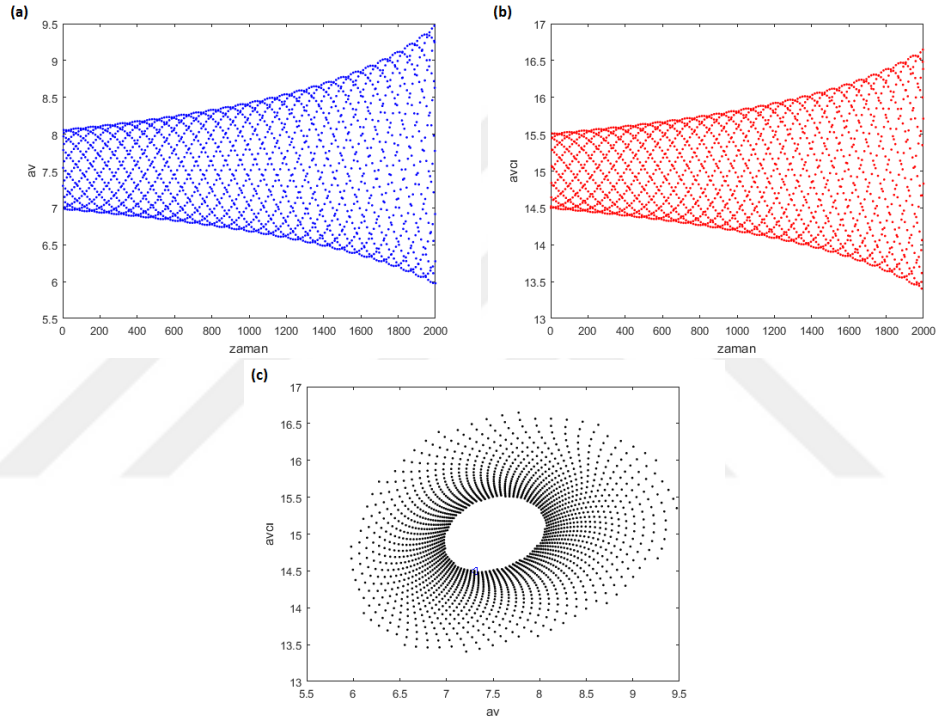


Şekil 5.6: (a) ve (b) $\delta = 2.222$ iken $N(0) = 7.4$, $P(0) = 14.9$ başlangıç değerindeki av-zaman, avcı-zaman ilişkisini göstermektedir. Aynı paramre değerlerindeki av-avcı faz portresi ise şekil (c) de gösterildiği gibidir.

Çatallanma Diyagramı



Şekil 5.7: $N(0) = 7.4$, $P(0) = 14.9$ başlangıç değerindeki av-avcı popülasyon diyagramı $\delta = 2.222222$ iken 1.şekil, $\delta = 2.222227$ iken 2.şekil ve $\delta = 2.22223$ iken 3.şekilde gösterildiği gibidir.



Şekil 5.8: (a) ve (b) $\delta = 2.23$ iken $N(0) = 7.5$, $P(0) = 14.5$ başlangıç değerindeki av-zaman, avcı-zaman ilişkisini göstermektedir. Aynı parametre değerlerindeki av-avcı faz portresi ise şekil (c) de gösterildiği gibidir.



6. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Gerçek yaşamda karşılaşılan bir problemi anlayabilmenin, açıklayabilmenin ve bu probleme çözüm üretebilmenin bir yolu problemi matematiksel model ile ifade edip bu modelin analiz edilmesidir (Kayan, 2018).

Biyolojik sistemlerde herbir popülasyon diğer popülasyonlarla etkileşim halindedir. Bu etkileşim bazıları ile yoğun olurken bazılarıyla ise zayıf olmaktadır. Popülasyonlar arasındaki bu etkileşimi anlayabilmek için biyolojik modeller geliştirilmiştir. Dinamik sistemlerde önemli çalışma alanına sahip bu modellerden en çok yapılan çalışmalar arasında popülasyon modelleri yer almaktadır. Av-avcı modelleri aynı çevreyi paylaşan iki tür arasındaki ilişkiyi gösteren bir popülasyon modelidir.

Av-avcı ilişkisi bir döngü halinde ilerlemektedir. Bu döngüyü açıklamak için tavşan ile beslenen vaşak türünü ele alalım. Burada tavşan ortamdaki diğer yiyeceklerden (örneğin bitkilerden) beslenir. İlk olarak, kabul edelim ki tavşan popülasyonu artsın. O halde daha çok besin bulan vaşak popülasyonu da artacaktır, fakat artan vaşak popülasyonu tavşan popülasyonunu azaltacaktır. Azalan tavşan popülasyonu karşısında ortamda fazla olan vaşak popülasyonu ya kendi aralarında rekabete girecek ya da besin bulamayıp azalacaktır. Sonuç olarak azalan vaşak popülasyonu tekrar tavşan popülasyonunun artmasına neden olacaktır ve döngü bu şekilde devam edecektir. Tam tersine, tavşan popülasyonunun artması halinde de bir benzer döngü ifade edilebilir.

Yukarıda bahsedilen tavşan ve vaşak popülasyonlarının sayısı bir sonraki popülasyon dönemini (ay, yıl, vb.) etkileyeceği için diferensiyel denklemlerle modellenir. Yaz aylarında domates bitkisinin yapraklarındaki öz suyundan beslenen beyaz sera sineğini ele alırsak, bu iki popülasyonun bir sonraki popülasyona katkısı olmayacağı için model fark denklemleri ile kurulur. Ayrıca bu modeller birden fazla parametre de içerebilir. Modeli analiz ederken parametrelerdeki değişimin modelin dinamiği üzerindeki etkisi de dikkate alınmalıdır.

Bu tezde, tek bir parametre, δ ya bağlı av-avcı sistemi ele alınmış ve bu parametre değeri değişirken sistemde ne gibi değişikliklerin meydana geldiği analiz edilmiştir. Burada δ , çatallanma parametresi olarak alınmış ve bu parametre değeri değiştikçe sistemin denge noktasının kararlılık yapısının da değiştiği analitik olarak hesaplanmıştır. Ayrıca bu değişimle birlikte sistemde Flip çatallanma ve Neimark-Sacker çatallanmanın ortaya çıkabilmesi için hangi şartların sağlanması gerektiği belirlenmiştir. Bu şartlara ek olarak, merkez manifold teoremi kullanılarak sistemin boyutu indirgenmiş ve çatallanma teoremi (Kuznetsov, 1998) kullanılarak Flip çatallanmanın özellikleri belirlenmiştir.

Neimark-Sacker çatallanma sistemin denge noktasının kararlılık yapısı değişirken periyodik çözümlerin ortaya çıktığı veya kaybolduğu bir çatallanma çeşididir. İncelenen sistem için sağlıklı olmak ve yaşamaya devam etmek gibi olumlu durumlar periyodik çözümlerle temsil edilebildiği gibi epilepsi atakları veya Alzaymır hastalığı gibi olumsuz şeyler de periyodik çözümlerle ifade edilebilir (Kayan, 2018). Ele aldığımız sistem için periyodik çözümler aynı çevrede yaşayan ve birbirleriyle av-avcı ilişkisinde bulunan iki türün aynı anda aynı ortamda yaşayabileceğini gösterir. Analiz edilen sistemde Neimark-Sacker çatallanmanın ortaya çıkabilmesi için δ çatallanma parametresi $\delta = 1/r_1$ olarak hesaplanmıştır. Burada r_1 avın büyüme oranını göstermektedir. MATLAB programı kullanılarak elde edilen nümerik sonuçlarla δ çatallanma parametresi arttıkça farklı periyotlara sahip (artan periyotlu) periyodik çözümlerin ortaya çıktığı tespit edilmiştir. Sonuç olarak, avcı popülasyonun büyüme oranındaki azalış, periyodik çözümlerin periyodunu arttırmış, yani sistemin dinamiğinin kendini yenileme süresini geciktirmiştir.



KAYNAKLAR

- Allen, L.J.S.**, *An Introduction to Mathematical Biology*, Upper Saddle River, Pearson-Prentice Hall, New Jersey, (2007).
- Anisiu, M.C.**, (2014) Lotka, Volterra and their model, *Didactica Mathematica*, 32,9-17.
- Bayraktar, M.**, *Analiz*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, (2010).
- Boshan C., Jiejie C.**, (2012) Bifurcation and chaotic behaviour of a discrete singular biological economic system, *Appl. Math and Comp.*, 219, 2371-2386.
- Carr, J.**, *Applications of Center Manifold Theory* New York, Heidelberg, Springer-Verlag, Berlin, (1981).
- Çelik, C.**, (2008). The stability and Hopf Bifurcations for a predator-prey system with time delay, *Chaos Solutions Fract.*, 37, 87-99.
- Çelik, C.**, (2009). Hopf bifurcation of a ratio dependent predator-prey system with time delay, *Chaos Solutions Fract.*, 42, 1474-1484.
- Değirmenci, E.**, (2011). Dağılmalı gecikmeli bir av-avcı sisteminde Hopf çatallanma ve kararlılık analizi (Yüksek Lisans Tezi), Bahçeşehir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.
- Çelik, C., Duman O.**, (2009). Allee effect in a discrete-time predator-prey system *Chaos Solutions Fract.* 40, 1956-1962.
- Elabbasy E.M., Elsadany A.A., Zhang Y.**, (2014) Bifurcation analysis and chaos in a discrete reduced Lorenz system, *Appl. Math and Comp.*, 228, 184-194.
- Guckenheimer J., Holmes P.** *Nonlinear oscillations, dynamical system and bifurcation of vector fields* Springer, New York, (1983).
- Hu D., Cao H.**, (2015) Bifurcation and chaos in a discrete-time predator-prey system of Holling and Leslie type, *Commun Nonlinear Sci Simulat.*, 22, 702-715
- Karaoğlu, E., Merdan H.**, (2014) Hopf bifurcation analysis for a ratio-dependent predator-prey system involving two delays, *ANZIAM Journal*, 55, 214-231, doi:10.1017/S1446181114000054.
- Karaoğlu, E., Merdan H.**, (2014) Hopf bifurcations of a ratio-dependent predator-prey model involving two discrete maturation time delays, *Chaos Solutions Fract.*, 68, 159-168, doi:10.1016/j.chaos.2014.07.011.

- Kayan, Ş.**, (2018) Tek gecikme içeren reaksiyon-difüzyon sistemleri için Hopf çatlama analizi algoritması ve uygulamaları (Doktora Tezi), TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Kolman, B., Hill, D.R.**, *Elementary Linear Algebra with Applications*, Pearson Education, Upper Saddle River, New Jersey, (2008).
- Kuang, Y.**, (2002). Basic properties of mathematical population models, *J. Biomathematics.*, 17, 129-142.
- Kuznetsov, Y.A.**, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, New York, (1998).
- MATLAB** version 7.10.0. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., (2010).
- Merdan H., Duman O.**, (2009) On the stability analysis of a general discrete-time population model involving predation and Allee effects *Chaos Solutions Fract.*, 40, 1169-1175.
- Murray, J.D.**, *Mathematical Biology I: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, (2002).
- Strogatz, S.**, *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*, Perseus Books Publishing, New York, (1994).
- Sucu, G.**, (2016) Bir Ayrık Av-Avcı Modelinin Çatlama Analizi (Yüksek Lisans Tezi), TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Wiggins, S.**, *Introduction To Applied Nonlinear Dynamical Systems And Chaos*, Springer-Verlag, New York, (2003).
- Yıldız, C.**, *Genel Topoloji*, Gazi Kitabevi, Ankara, (2005).
- Zhou S.R., Liu Y.F., Wang G.**, (2005) The stability of predator-prey system subject to the Allee effects *Theor Populat Biol.*, 67,23-31.
- Url-1** <https://www.britannica.com/biography/Vito-Volterra>, alındığı tarih: 07 Ekim 2018.

EKLER

EK 1 : Bazı Temel Teoremler ve Kavramlar

EK 2 : Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü



EK 1: Bazı Temel Teoremler ve Tanımlar

Kapalı Fonksiyon Teoremi . (Bayraktar, 2010)

Kabul edelim ki $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ açık bir küme ve $(x_0, y_0) \in U$ öyle ki $x_0 \in \mathbb{R}^n, y_0 \in \mathbb{R}^m$ olsun. Ayrıca $F : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, şeklinde tanımlı bir F fonksiyonu

1. $F(x_0, y_0) = 0$ dır.
2. $F \in C^\infty(N_\delta(x_0, y_0))$ dır. Yani, pozitif bir δ değeri için $N_\delta(x_0, y_0)$ komşuluğunda, F fonksiyonunun türevleri (her mertebeye) süreklidir.
3. $\det(F_y(x_0, y_0)) \neq 0$ öyle ki $F_y(x, y) = \left(\frac{\partial F_k(x, y)}{\partial y_j} \right), 1 \leq k, j \leq m$.

şartlarını gerçeklesin. O halde,

- a) $F(x, f(x)) \equiv 0$ olacak şekilde, $x_0 \in V \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesinde tanımlı bir tek $y = f(x)$ fonksiyonu vardır
- b) $y_0 = f(x_0)$ dır.
- c) $f \in C^\infty(V)$ ve $x \in V$ için

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial f_k(x, y)}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq k \leq m, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$F_y(x, y) = \left(\frac{\partial F_k(x, y)}{\partial y_j} \right), \quad 1 \leq k, j \leq m,$$

$$F_x(x, y) = \left(\frac{\partial F_k(x, y)}{\partial x_i} \right), \quad 1 \leq k \leq m, \quad 1 \leq i \leq n$$

olup

$$\det(F_y(x, f(x))) \neq 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f(x)}{\partial x} = -[F_y(x, f(x))]^{-1} F_x(x, f(x))$$

olarak hesaplanır.

Topolojik Denklik

f fonksiyonu analitik olmak üzere, parametreye bağlı

$$x \mapsto f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}^1 \quad (6.1)$$

ayrık dinamik sistemini ele alalım. Bu sistemin Jakkobiyen matrisinin $(0,0)$ noktasındaki değeri $A(\alpha)$ olsun.

İlk olarak, $\alpha = 0$ olduğu durumu ele alalım. Burada $f(x, 0) = f(x)$ olmak üzere (6.1) sistemi

$$x \mapsto f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (6.2)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $A := A(0)$ olarak tanımlanabilir. Böylelikle lineer olmayan (6.2) sistemi

$$x \mapsto Ax \quad (6.3)$$

lineer sistemine çevrilebilir. Dikkat edilirse orijin hem (6.2) sistemi hem de (6.3) sistemin denge noktasıdır.

Şimdi de kabul edelim ki $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerleri A Jakobiyen matrisine karşılık gelen özdeğerler olsun. Ayrıca kabul edelim ki reel kısmı negatif olan n_- tane, reel kısmı pozitif olan n_+ tane ve reel kısmı sıfır olan n_0 tane özdeğer mevcut olsun. Burada tüm özdeğerlerin reel kısmı sıfırdan farklı ise hiperbolik denge noktası olarak adlandırılır.

Tanım. Kabul edelim ki ϕ , (6.2) sisteminin denge noktasını içeren, ψ ise (6.3) sistemin denge noktasını içeren bir açık küme olmak üzere ϕ deki yörüngeleri ψ deki yörüngelere eşleyen bir $H : \phi \rightarrow \psi$ homeomorfizmi¹ mevcut olsun. Bu taktirde, (6.2) sistemi ile (6.3) sistemine orijinin civarında topolojik olarak denktir denir.

¹ ϕ ve ψ topolojik uzaylar olmak üzere $H : \phi \rightarrow \psi$ bir fonksiyon olsun. Ayrıca, H fonksiyonu sürekli olup H fonksiyonunun tersi H^{-1} mevcut ve sürekli olsun. Bu taktirde H fonksiyonuna *homeomorfizm* denir (Yıldız, 2005).

EK 2: Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü

Türkçe terim

İngilizce Terim

Adi diferensiyel denklem

Ordinary differential equation

Ayrık av-avcı modeli

Discrete-time predator-prey model

Çatallanma

Bifurcation

Denge noktası

Equilibrium Point

Değişmez

Invariant

Düzgün

Smooth

Hiperbolik

Hyperbolic

Kararlılık

Stability

Karakteristik

Characteristic

Lineer

Linear

Manifold (Çok Katlı)

Manifold

Merkez Manifold

Center Manifold

Nitel

Qualitative

Özdeğer

Eigenvalue

Özvektör

Eigenvector

Subkritik

Subcritical

Süperkritik

Supercritical

Süperpozisyon Prensibi

Principle of Superposition

Topolojik Olarak Denklik

Topologically Equivalent

Yerel (Lokal)

Local

Yön

Direction

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Pınar BAYDEMİR
Uyruğu : T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri : 27.03.1993, Kütahya
E-posta : pinarbydmr@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2016, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2018, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2016-2018	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Baydemir P.**, Merdan H., Karaoğ E., 2018. Bifurcations of a Discrete-time Predator-Prey System with Leslie Type, Fifth International Conference on Complex Dynamical Systems in Life Sciences: Modeling and Analysis (5thICCDs'2018), May 10-12, University of Aveiro, Aveiro, Portugal.
- **Baydemir P.**, Merdan H., Karaoğlu E., 2018. Bir Av-Avcı Popülasyon Modelinin Çatallanma Analizi, 13. Ankara Matematik Günleri-AMG 2018, 27-28 Nisan, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

