

TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**İKİ HİSSE SENEDİ VE BİR YATIRIMCI GRUP İÇEREN FİNANSAL
PİYASALARIN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ VE KARARLILIK
ANALİZLERİ**

DOKTORA TEZİ
Hatice BULUT

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

NİSAN 2019



Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

.....
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Doktora derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığımı onaylarım.

.....
Prof. Dr. Oktay DUMAN
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 1221111001 numaralı Doktora öğrencisi **Hatice BULUT**'un ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı “**İKİ HİSSE SENEDİ VE BİR YATIRIMCI GRUP İÇEREN FİNANSAL PİYASALARIN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ VE KARARLILIK ANALİZLERİ**” başlıklı tezi **05.04.2019** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Hüseyin MERDAN**
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Jüri Üyeleri: **Prof. Dr. Nuri ÖZALP (Başkan)**
Ankara Üniversitesi

Prof. Dr. Oktay DUMAN
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Prof. Dr. Niyazi ŞAHİN
Ankara Yıldırım Beyazıt Üniversitesi

Dr. Öğr. Üyesi Ayça ÖZDOĞAN ATABAY.....
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Hatice BULUT

ÖZET

Doktora Tezi

İKİ HİSSE SENEDİ VE BİR YATIRIMCI GRUP İÇEREN FİNANSAL PİYASALARIN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ VE KARARLILIK ANALİZLERİ

Hatice BULUT

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Tarih: NİSAN 2019

Bu tezde, iki hisse senedi ve benzer yatırım stratejilerine sahip homojen bir yatırımcı grup içeren bir finansal piyasa için matematiksel model verilmiştir. Piyasadaki nakit miktarının ve hisse senedi sayılarının sabit olduğu ve yatırımcı grubun hisse senedi satın alırken ya da hisse senedini satarken hisse senedi fiyatının yönüne (trend) ve hisse senedinin değerlendirilmesine göre karar verdiği varsayılmıştır. Ayrıca, yatırımcıların hisse senedi satın alırken her iki hisse senedinin fiyatına bağlı bir strateji, fakat hisse senedi satarken diğer hisse senedi fiyatına bağlı olmayan bir strateji izlediği kabul edilmiştir. Bu varsayımlar ve temel mikroekonomik prensipler kullanılarak dinamik sistemler yaklaşımı ile bir matematiksel model elde edilmiştir. Yatırımcıların her bir hisse senedi için hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı strateji izlemesi durumunda matematiksel modelin denge noktaları belirlenerek kararlılık analizleri çalışılmıştır. Denge noktalarının kararlı olması için parametreler üzerine konması gereken şartlar belirlenmiştir. Yatırımcı grubun alım satım kararlarında bir hisse senedi için, sadece bu hisse senedi fiyatının yönünden, diğer hisse senedi için ise sadece bu hisse senedinin değerlendirilmesinden (ya da değer kaybetmesinden) etkilenmesi durumunda elde edilen sistemin denge noktalarının kararlı olması için parametreler üzerine konması gereken şartlar belirlenmiştir.

Yatırımcıların yatırım tercihlerini belirleyen geçiş oranı fonksiyonları için uygun fonksiyonlar seçilerek tezin birinci kısmında elde edilen model için bir örnek model oluşturulmuştur. Eğer yatırımcı grup her iki hisse senedi için alım satım yaparken

sadece hisse senetleri fiyatları için belirlenen değere bağlı bir strateji izlerse, modelin denge noktalarının kararlı olduğu ispatlanmıştır. Yatırımcı grubun alım satım kararlarında her bir hisse senedi için farklı etkilere dayalı yatırım stratejisi (yani bir hisse senedi için sadece bu hisse senedi fiyatının yönüne, diğer hisse senedi için ise sadece hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı olan yatırım stratejisi) izlemesi durumunda elde edilen sistemin denge noktalarının kararlı olması için parametreler üzerine konması gereken şartlar belirlenmiştir. Ayrıca, hisse senedi fiyatının yönüne bağlı büyüklük parametresi (momentum katsayısı) çatallanma parametresi seçilerek sistemde periyodik çözümlerin ortaya çıktığı Hopf çatallanma analizi ile gösterilmiştir. Son olarak, analitik sonuçları desteklemek ve genişletmek için örnekler ve nümerik simülasyonlar verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hisse senedi fiyatlandırması, Matematiksel modelleme, Deterministik model, Kararlılık, Hopf çatallanma, Periyodik çözümler.

ABSTRACT

Doctor of Philosophy

MATHEMATICAL MODELING AND STABILITY ANALYSES OF FINANCIAL MARKETS INVOLVING TWO ASSETS AND ONE TRADING GROUP

Hatice BULUT

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin MERDAN

Date: APRIL 2019

In this thesis, we present a mathematical model for a market involving two stocks which are traded within a single homogeneous group of investors who have a similar motivations and strategies for trading. It is assumed that the market consists of a fixed amount of cash and stocks, and that the trading group is affected by trend and valuation motivations while selling or buying each asset, but follows a strategy in which the buying of an asset depends on the other asset's price while the selling does not. By utilizing these assumptions and basic microeconomics principles, the mathematical model is obtained through a dynamical system approach. We analyse the stability of equilibrium points of the model when the trading group follows a value based strategy for each stocks, and determine the conditions on parameters for stability. For systems in which the group attaches importance to the valuation of one stock and the trend of other stock for trading, we establish conditions for stability.

We form an example for the model defined in the former section by taking appropriate functions for the transition rate functions. We prove that if the group of traders focuses on only fundamental values of each stock, then all equilibria are stable. We establish conditions for stability of system in which the trading group follows a mixed trading strategy, i.e., they follow a pure value-based strategy while selling or buying the first asset, and a pure trend-based strategy while selling or buying the second asset. Moreover, we argue the existence of periodic solutions through a Hopf bifurcation by choosing the momentum coefficient as a bifurcation parameter within this setting.

Finally, we give examples and numerical simulations to support and extend the analytical results.

Keywords: Asset price dynamics, Mathematical modelling, Deterministic model, Stability, Hopf bifurcation, Periodic solutions.



TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca yardımları ve katkılarıyla beni yönlendiren değerli hocam Prof. Dr. Hüseyin MERDAN'a; kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine; desteklerinden ötürü Matematik Bölümü asistanlarına; tez çalışmamdaki yardımlarından dolayı değerli tez izleme kurulu üyeleri Prof. Dr. Nuri ÖZALP'a ve Dr. Öğr. Ayça ÖZDOĞAN ATABAY'a teşekkürlerimi sunarım. Destekleri ile her zaman yanımda olan aileme, arkadaşlarıma ve eşim Akif'e çok teşekkür ederim. Son olarak doktora eğitimimde sağladığı burstan dolayı TÜBİTAK'a ve TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	iv
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
ŞEKİL LİSTESİ	x
ÇİZELGE LİSTESİ	xii
SEMBOL LİSTESİ	xiii
1. GİRİŞ	1
1.1 Tez Çalışmasının Amacı	1
1.2 Dinamik Sistemler	2
1.2.1 Kararlılık analizi	4
1.2.2 Çatallanma teorisine genel bakış	8
1.2.3 Hopf çatallanma teorisi ve önemi	10
1.3 Literatür Taraması	13
2. İKİ HİSSE SENEDİ VE BİR YATIRIMCI GRUP İÇEREN BİR FİNANSAL PİYASANIN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ VE KARARLILIK ANALİZLERİ	21
2.1 Matematiksel Modelleme	21
2.2 Lineer Kararlılık Analizi	24
2.2.1 Sabit yatırım stratejileri	25
2.2.2 Hisse senedinin değerlendirilmesine dayalı yatırım stratejileri	26
2.2.3 Farklı etkilere dayalı yatırım stratejileri	31
3. İKİ HİSSE SENEDİ VE BİR YATIRIMCI GRUP İÇEREN FİNANSAL PİYASA MODELİ İÇİN BİR ÖRNEK	39
3.1 Hisse Senedinin Değerlenmesine Dayalı Yatırım Stratejileri	41
3.2 Farklı Etkilere Dayalı Yatırım Stratejileri	45
3.2.1 Lokal kararlılık analizi	49
3.2.2 Hopf çatallanma analizi	51
4. NÜMERİK SONUÇLAR	55
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	65
KAYNAKLAR	69
EKLER	73
ÖZGEÇMİŞ	77

ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1: Kararlılık çeşitleri.	4
Şekil 1.2: Üzerine yük konmuş çubuğun kararlılık yapısı (Strogatz, 1994). . . .	9
Şekil 1.3: Negatif reel kısma sahip özdeğerlerin kompleks düzlemdeki yerleri (Strogatz, 1994).	10
Şekil 1.4: Örumcek Ağı Teoremi-Fiyatın Dalgalanması (Url-1)	11
Şekil 1.5: Bu grafikte baz yıl olan 2003'ün Ocak ayından, 2018'in Ekim ayı dahil olmak üzere tüm aylarda kuru soğanın fiyat değişimi görülmektedir (Url-2).	12
Şekil 4.1: $q_2^{(2)} = 1$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip birinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(1)}(t)$ $q_2^{(1)} = 0.01$ (karo), 1 (kare), 10 (daire) değerleri için verilmiştir.	56
Şekil 4.2: $q_2^{(2)} = 1$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip ikinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(2)}(t)$ $q_2^{(1)} = 0.01$ (karo), 1 (kare), 10 (daire) değerleri için verilmiştir.	56
Şekil 4.3: $q_2^{(1)} = 1$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip birinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(1)}(t)$ $q_2^{(2)} = 0.01$ (karo), 1 (kare), 10 (daire) değerleri için verilmiştir.	57
Şekil 4.4: $q_2^{(1)} = 1$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip ikinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(2)}(t)$ $q_2^{(2)} = 0.01$ (karo), 1 (kare), 10 (daire) değerleri için verilmiştir.	58
Şekil 4.5: $q_2^{(1)}$ ve $q_1^{(2)}$ parametrelerine bağlı kararlılık bölgesi.	58
Şekil 4.6: $q_1^{(2)} = 0.35$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip birinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(1)}(t)$ $q_2^{(1)} = 0.01$ (karo), 0.2 (kare), 1 (daire), 10 (yıldız) için verilmiştir. .	59
Şekil 4.7: $q_1^{(2)} = 0.35$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip ikinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(2)}(t)$ $q_2^{(1)} = 0.01$ (karo), 0.2 (kare), 1 (daire), 10 (yıldız) için verilmiştir. .	60
Şekil 4.8: (3.21) sisteminin Jakobiyen matrisinin özdeğerlerinin reel kısmının ikinci hisse senedi fiyatının yönüne bağlı büyüklük parametresi $q_1^{(2)}$, ye bağlı grafiği. Bu grafikte, X:= $q_1^{(2)}$ ve Y:=Özdeğerlerin reel kısmı.	60

Şekil	4.9:	$q_2^{(1)} = 0.02$	iken	
		$(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$	başlangıç	
		değerine sahip birinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(1)}(t)$		
		$q_2^{(1)} = 0.11$ (karo), 0.5 (kare), 1 (daire), 1.005 (yıldız) değerleri için		
		verilmiştir.		61
Şekil	4.10:	$q_2^{(1)} = 0.02$	iken	
		$(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$	başlangıç	
		değerine sahip ikinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(2)}(t)$		
		$q_2^{(1)} = 0.11$ (karo), 0.5 (kare), 1 (daire), 1.005 (yıldız) değerleri için		
		verilmiştir.		62
Şekil	4.11:	$q_1^{(2)} = 0.98 < q_{1,k}^{(2)}$	değeri için (3.21) sisteminin	
		$(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_1^{(2)}(0)) = (3.03, 4.6, 0.0049, 0)$	başlangıç	
		değerine sahip çözümlerinin grafikleri.		62
Şekil	4.12:	$q_1^{(2)} = 1 \doteq q_{1,k}^{(2)}$	değeri için (3.21) sisteminin	
		$(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_1^{(2)}(0)) = (3.03, 4.6, 0.0049, 0)$	başlangıç	
		değerine sahip çözümlerinin grafikleri.		63
Şekil	4.13:	$q_1^{(2)} = 1.01 > q_{1,k}^{(2)}$	değeri için (3.21) sisteminin	
		$(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_1^{(2)}(0)) = (3.03, 4.6, 0.0049, 0)$	başlangıç	
		değerine sahip çözümlerinin grafikleri.		63
Şekil	4.14:	$q_1^{(2)} = 1 \doteq q_{1,k}^{(2)}$	iken	
		$(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_1^{(2)}(0)) = (3.03, 4.6, 0.0049, 0)$	başlangıç	
		değerine sahip $(P^{(1)}(t), P^{(2)}(t), \zeta_2^{(1)}(t))$ grafiği solda,		
		$(P^{(1)}(t), P^{(2)}(t), \zeta_1^{(2)}(t))$ grafiği sağda verilmiştir. Grafiklerdeki		
		yıldız sistemin denge noktasını ifade eder.		64
Şekil	4.15:	$(P^{(1)}(t), P^{(2)}(t))$ çözümlerinin grafiği $q_1^{(2)} = 0.9985$ için solda, $q_1^{(2)} =$		
		0.9995 için ortada, $q_1^{(2)} = 1.0005$ için sağda verilmiştir.		64

ÇİZELGE LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 4.1: $q_2^{(1)}$ parametresinin farklı değerleri için (3.6) sisteminin hisse senedi denge fiyatları	55
Çizelge 4.2: $q_2^{(2)}$ parametresinin farklı değerleri için (3.6) sisteminin hisse senedi denge fiyatları.	57
Çizelge 4.3: $q_2^{(1)}$ parametresinin farklı değerleri için (3.21) sisteminin hisse senedi denge fiyatları.	59

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$q_{1,k}^{(2)}$	Çatallanma parametresinin kritik değeri
$\lambda(\mu)$	Özdeğer
$\alpha(\mu)$	Özdeğerin reel kısmı
$\omega(\mu)$	Özdeğerin sanal kısmı
\approx	Yaklaşık olarak eşit
\doteq	Nümerik olarak yaklaşık eşit
$C^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$	\mathbb{R}^n üzerinde tanımlı, m -boyutlu, reel vektör değerli, k -kez türevlenebilen ve türevleri sürekli olan fonksiyonların uzayı, $k, n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\dot{\mathbf{X}}$	\mathbf{X} in t ye göre türevi
$D(\mathbf{F}(\mathbf{X}))$	Jakobiyen matris: $\left(\frac{\partial f_i(\mathbf{X})}{\partial x_j} : i, j = 1, 2, \dots, n \right)$

1. GİRİŞ

1.1 Tez Çalışmasının Amacı

Finansal piyasaların kararlı olması ülke ekonomilerinin istikrarlı olması ve büyümesi açısından oldukça önemlidir. Finansal piyasalarda meydana gelen krizler, belirsizlikler, dalgalanmalar vb. durumlar finansal piyasaların kararlılığını olumsuz yönde etkileyen en önemli faktörlerdendir. Bu nedenle, finansal piyasalarda meydana gelen krizleri ve ardından yaşanan gelişmeleri, yani finansal piyasaların dinamiğini ve kararlılık yapısı ile ilgili soruları açıklayabilecek matematiksel modellerin geliştirilmesine ihtiyaç duyulmaktadır. Finansal piyasaların matematiksel modellemesinde stokastik ve deterministik modeller olmak üzere iki farklı yaklaşım vardır. Stokastik modeller teorik çalışmalar için oldukça kullanışlı fakat pratikte çok dikkate alınmayan varsayımlar üzerine kurulmuştur. Ayrıca bu modeller denge noktası civarındaki varsayımlar üzerine kurulduğundan yatırımcıların ilgisini çeken ani fiyat artışları ya da azalışları, dalgalanmalar, finansal krizler gibi durumları açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Deterministik modeller ise finans piyasalarında sınırlı miktarda para ve hisse senedi olduğu; yani piyasalarda arbitrajın mümkün olmadığı, piyasada farklı görüşte yatırımcılar bulunması nedeniyle hisse senedi için tek bir değer belirlenemeyeceği, hisse senedi fiyatındaki değişimler hem hisse senedi fiyatından hem de hisse senedi fiyatının yönünden etkilendiği varsayımlar oluşturulmuştur. Bu varsayımlar pratikte yaygın olarak kabul gören önemli beklentilere cevap verdiğinden deterministik modeller finansal piyasaların davranışını, piyasalarda meydana gelen köpükleri, hisse senedi fiyatındaki dalgalanmaları açıklamak için alternatif bir bakış açısı ile oluşturulmuştur.

Finansal piyasaların deterministik yaklaşım ile modellenmesi 1990'lı yıllarda başlamış ve günümüze kadar bu alanda pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda bir hisse senedi ve bir ya da çok sayıda yatırımcı grup içeren bir finansal piyasa ele alınarak oluşturulan modeller ve modellerin kararlılık analizleri ile piyasanın davranışı incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında ise literatürde yer alan çalışmalardan farklı olarak birden fazla hisse senedinin işlem gördüğü bir piyasa ele alınarak finansal piyasalara daha iyi bir yaklaşım yapmak amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda iki hisse senedi ve aynı

yatırım stratejilerine sahip bir yatırımcı grup içeren kapalı bir finansal piyasa ele alınmıştır. Hisse senetlerinin yatırımcı gruba rastgele dağıtıldığı ve yatırımcı grubun hisse senedi satın alırken her iki hisse senedinin fiyatına göre karar verdiği, fakat hisse senedi satarken sadece sattığı hisse senedinin fiyatına göre karar verdiği bir yatırım stratejisi izlediği varsayılmıştır. Yatırımcı tercihlerinin hisse senedi fiyatının yönüne ve hisse senedinin değerlendirilmesine göre belirlendiği düşünülerek finansal piyasa için dinamik sistemler yaklaşımı ile matematiksel bir model elde edilmiştir. Elde edilen matematiksel modelin kararlılık analizi yatırımcıların her bir hisse senedi için farklı yatırım stratejisi takip ettiği varsayılarak incelenmiştir.

1.2 Dinamik Sistemler

Dinamik sistemler, durumu en az bir değişkene (zaman, konum vb.) bağlı olarak değişen fiziksel, biyolojik, ekolojik, ekonomik bir olguyu modellemek için kullanılan matematiksel yapılardır. Dinamik, aslında fiziğin bir dalı olup 1600'lü yılların ortalarında Newton'un diferensiyel denklemleri keşfetmesi ile ortaya çıkmıştır (Strogatz, 1994). Fakat günümüzde biyoloji, tıp, psikoloji, ekonomi, kimya, fizik, popülasyon dinamiği, kontrol sistemleri gibi farklı bilim dallarının dahil olduğu disiplinler arası bir çalışma sahası olarak karşımıza çıkmaktadır. Av ile avcı arasındaki ilişkiyi, gezegenlerin hareketini, bir hastalığın popülasyon içerisinde yayılmasını, ülkedeki işsizliğin artışı veya azalışını, bir gazın havada yayılmasını ele alan modeller ise dinamik sistemlere verilebilecek örneklerdendir.

Poincare 1800'li yılların sonunda yaptığı çalışmalar ile dinamik sistemlerin yapısını incelemek için nicel sorular yerine nitel soruları vurgulayan yeni bir geometrik bakış açısı geliştirmiştir. Örneğin; "Gezegenlerin tüm zamanlardaki tam olarak konumu nedir?" (nicel) sorusu yerine "Güneş sistemi kararlı mıdır, yoksa bazı gezegenler belli bir t zamanından sonra güneş sisteminin dışına mı çıkacaktır?" (nitel) sorusunu düşünmüştür. Poincare bu tarz nitel soruları analiz etmek için güçlü bir geometrik bakış açısı geliştirerek dinamiğin modern konularının gelişmesine öncülük etmiştir (Strogatz, 1994). Gerçek yaşam problemlerini ve doğada meydana gelen karmaşık yapıdaki olayları anlamak için diferensiyel denklemler kullanılarak oluşturulan matematiksel modeller (dinamik sistemler) analitik olarak çözümü bulunamasa bile, bu bakış açısı sayesinde modellerin uzun vadedeki davranışları hakkında yorum yapılabilir.

Dinamik sistemler genel olarak iki kategoride incelenirler. Bunlardan ilki ayrık zaman dilimlerindeki değişimlerin fark denklemleri kullanılarak modellendiği ayrık dinamik sistemlerdir. Örneğin; günlük, aylık ya da yıllık işsizlik oranının hesaplanmasında

veya böcek popülasyonlarının modellenmesinde fark denklemleri tercih edilir. Diğer ise, sürekli dinamik sistemler olup, değişimin sürekli zamana göre gerçekleştiği sistemlerin modellenmesi için diferensiyel denklemler kullanılır. Diferensiyel denklemler bağımsız değişken sayısına göre adi ve kısmi diferensiyel denklemler olarak ikiye ayrılır. Eğer sadece tek bir bağımsız değişken var ise bu diferensiyel denkleme adi diferensiyel denklem, eğer birden fazla bağımsız değişken var ise de kısmi diferensiyel denklem denir.

Bu tez çalışmasında finansal piyasaların modellenmesi için adi diferensiyel denklem sistemi kullanılacaktır. Bu nedenle ilk olarak adi diferensiyel denklem teorisi ile ilgili bazı tanımlar ve teoremler verilecektir.

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$, yani $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))^T$ ve $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)^T$, $\forall i = 1, \dots, n$ için $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0 \quad (1.1)$$

birinci mertebeden n tane denklemden oluşan başlangıç değer problemini ele alalım. Eğer, $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ise (1.1) başlangıç değer probleminin bir $\epsilon > 0$ için $(-\epsilon, \epsilon)$ aralığında tek bir çözümü vardır (Strogatz, 1994).

Adi diferensiyel denklemler lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemler olmak üzere ikiye ayrılır. Eğer bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre her mertebeden türevleri denklem içinde yalnızca birinci dereceden ortaya çıkmış ise diferensiyel denklem lineer diferensiyel denklem, aksi takdirde lineer olmayan diferensiyel denklem olarak adlandırılır. Lineer olmayan diferensiyel denklem sistemleri daha ilgi çekicidir. Çünkü, doğadaki pek çok olay lineer olmayan davranış sergiler. Fakat lineer olmayan sistemlerin çoğu analitik olarak çözülemez. Buna karşın, lineer sistemlerin analizi ise lineer olmayan sistemlere göre oldukça kolaydır. Bunun nedeni ise lineer sistemlerin parçalara ayrıldıktan sonra her bölüm ayrı ayrı çözümlenip sonra sistemin çözümü bu çözümleri bir araya getirilerek elde edilmesidir. Böylelikle, karmaşık olan problemler basit formlara indirgenebilir. Bir sistemin parçaları arasında iş birliği olduğunda, birbirleri ile yarış halinde olduklarında ya da birbirlerine müdahale ettiklerinde, bu sistemde lineer olmayan etkileşimler ortaya çıkar. Gerçek yaşam problemleri lineer olmayan davranış sergilediklerinden süperpozisyon fikri, yani sistemin parçalara ayrılması ile çözüm elde edilmesi fikri başarısız olur.

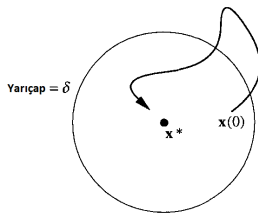
1.2.1 Kararlılık analizi

Dinamik sistemlerde önemli araştırma konularından biri, (1.1) denklemleri ile verilen dinamik sistemin çözümlerinin kararlı olup olmadığıdır. Yani, denge noktasına¹ oldukça yakın başlayan sistemin çözümlerinin $t \rightarrow \infty$ iken nasıl davrandığı merak konusudur.

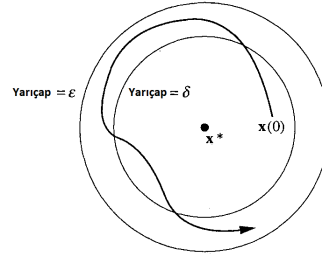
Öncelikle, kararlı denge noktası ve kararsız denge noktası tanımları verilecektir.

Tanım 1.1. \mathbf{X}^* , (1.1) sisteminin bir denge noktası olsun.

- Eğer $\|\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}^*\| < \delta$ iken $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^*$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa denge noktası çekicidir denir. Başka bir ifadeyle, \mathbf{X}^* denge noktasının çekici olması, denge noktasının δ komşuluğunda (yani yakın komşuluğunda) başlayan her çözümün $t \rightarrow \infty$ iken denge noktasına ulaşması demektir (Bakınız Şekil 1.1a).
- $\forall \epsilon > 0$ için $\|\mathbf{X}(0) - \mathbf{X}^*\| < \delta$ olacak şekilde $\exists \delta > 0$ ve de $t \geq 0$ için $\|\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*\| < \epsilon$ ise \mathbf{X}^* denge noktasına Liapunov anlamında kararlıdır denir. Diğer bir deyişle, \mathbf{X}^* denge noktasının Liapunov anlamında kararlı olması için denge noktasının yakın bir komşuluğunda başlayan her çözümün $\forall t > 0$ için denge noktasına yakın kalması gerekmektedir (Bakınız Şekil 1.1b).



(a) Çekici



(b) Liapunov anlamında kararlı

Şekil 1.1: Kararlılık çeşitleri.

- Eğer \mathbf{X}^* denge noktası hem çekici hem de Liapunov kararlı ise, denge noktası yerel asimptotik kararlıdır denir.
- Eğer denge noktası kararlı değil ise \mathbf{X}^* denge noktası kararsızdır denir.

Şimdi de lineer sistemler ve lineer olmayan sistemler için kararlılık analizinin nasıl yapılacağına dair teoriden bahsedilecektir.

¹ $\mathbf{F}(\mathbf{X}^*) = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlayan \mathbf{X}^* noktasına (1.1) sisteminin denge noktası denir.

Lineer Sistemler için Kararlılık Analizi

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ ve \mathbf{A} ise $n \times n$ boyutunda reel bir matris olmak üzere

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (1.2)$$

lineer sistemini ele alalım. (1.2) sisteminin çözümleri, \mathbf{v} sıfırdan farklı skalar bir vektör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\mathbf{X}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v}$$

formundadır. \mathbf{v} ve λ üzerindeki şartları bulmak için bu çözüm sistemde yerine yazılırsa

$$\lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = \mathbf{A} e^{\lambda t} \mathbf{v} \quad (1.3)$$

elde edilir. Burada sıfır olmayan $e^{\lambda t}$ terimi sadeleştirilirse

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (1.4)$$

bulunur ki bu ifade (1.2) sisteminin çözümlerinin mevcut olması için \mathbf{v} vektörünün \mathbf{A} matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü olması gerektiğini söyler. \mathbf{A} matrisinin özdeğerleri ise $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ denkleminin kökleridir. Başka bir ifade ile $a_i, i = 1, \dots, n$, sabit katsayılar olmak üzere $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ denkleminde elde edilen

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (1.5)$$

karakteristik denkleminin kökleri \mathbf{A} matrisinin özdeğerlerini verir.

(1.2) sistemi için orijin her zaman bir denge noktasıdır. Eğer \mathbf{A} matrisinin tüm özdeğerleri için $\text{Re}(\lambda) \neq 0$ ise orijin hiperbolik denge noktası, aksi takdirde yani \mathbf{A} matrisinin en az bir özdeğeri için $\text{Re}(\lambda) = 0$ ise hiperbolik olmayan denge noktası olarak adlandırılır. Aşağıdaki teorem (1.2) sisteminin denge noktası olan orijinin, özdeğerlerin durumuna göre kararlı olup olmadıkları ile ilgilidir.

Teorem 1.1. (1.2) sistemini ele alalım.

- Eğer \mathbf{A} matrisinin tüm özdeğerleri için $\text{Re}(\lambda) < 0$ ise orijin yerel asimptotik kararlıdır.
- Eğer \mathbf{A} matrisinin en az bir özdeğeri için $\text{Re}(\lambda) > 0$ ise orijin kararsızdır.
- Eğer \mathbf{A} matrisinin tüm özdeğerleri sırf sanal ise denge noktası merkezdir, yani Liapunov kararlıdır.

Aşağıdaki teorem ile ifade edilen Routh-Hurwitz kriteri ise n . mertebeden bir polinomun tüm köklerinin negatif reel kısma sahip olması için gerek ve yeter şartı vermektedir.

Teorem 1.2. Routh-Hurwitz Kriteri

$a_i, i = 1, \dots, n$, reel sabitler olmak üzere

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

polinomu verilsin. $P(\lambda)$ polinomunun n . Hurwitz matrisi, a_i katsayıları kullanılarak aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$H_1 = (a_1), H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}$$

ve

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

Burada, eğer $j > n$ ise $a_j = 0$ dir. $P(\lambda)$ polinomunun tüm kökleri negatif ya da negatif reel kısma sahip olması için gerek ve yeter şart tüm Hurwitz matrislerinin determinantının pozitif olmasıdır, yani

$$\det(H_j) > 0, j = 1, 2, \dots, n.$$

$n = 2, 3, 4$ için Routh-Hurwitz kriteri:

$$n = 2 : a_1 > 0, a_2 > 0.$$

$$n = 3 : a_1 > 0, a_3 > 0 \text{ ve } a_1 a_2 > a_3.$$

$$n = 4 : a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0 \text{ ve } a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$$

şeklindedir (Allen, 2007).

Lineer Olmayan Sistemler için Kararlılık Analizi

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$, yani $\mathbf{X}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots, x_n(t))^T$ ve $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, \dots, f_n)^T$,

$\forall i = 1, \dots, n$ için $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonlar ve $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (1.6)$$

lineer olmayan differensiyel denklem sistemini ele alalım.

$$D(\mathbf{F}(\mathbf{X})) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (1.7)$$

olmak üzere

$$\mathbf{J} = D(\mathbf{F}(\mathbf{X}^*)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{X}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{X}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\mathbf{X}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{X}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{X}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\mathbf{X}^*)}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{X}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{X}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\mathbf{X}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (1.8)$$

ifadesine (1.6) sisteminin \mathbf{X}^* denge noktasında hesaplanan Jakobiyen matrisi ve

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{J}\mathbf{X} \quad (1.9)$$

sistemine de (1.6) sisteminin \mathbf{X}^* denge noktasında lineerizasyonu denir. Dikkat edilirse, (1.9) sistemi bir lineer diferensiyel denklem sistemidir. Eğer \mathbf{J} matrisinin tüm özdeğerlerinin reel kısmı sıfırdan farklı ise \mathbf{X}^* denge noktasına hiperbolik denge noktası denir. (1.6) sisteminin denge noktası hiperbolik ise (1.6) lineer olmayan sistemin denge noktası civarındaki yerel davranışı ile (1.9) lineer sisteminin yerel davranışı arasında bir ilişki kurmak mümkündür.

Teorem 1.3. (Hartman-Grobman Teoremi) $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^n$ orijini içeren bir açık küme olmak üzere; $\mathbf{F} \in C^1(\mathbf{E})$ ve ϕ_t (1.6) lineer olmayan sistemin bir akışı² olsun. Kabul edelim ki, $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ³ ve $\mathbf{J} = D\mathbf{F}(\mathbf{0})$ jakobiyen matrisinin tüm özdeğerlerinin reel kısmı sıfırdan farklı olsun. Bu takdirde, $U, V \in \mathbb{R}^n$ açık kümeler olmak üzere her bir $\mathbf{X}_0 \in U$ için sıfırı içeren açık bir $I_0 \in \mathbb{R}$ aralığı vardır ve $\forall \mathbf{X}_0 \in U$ ve $\forall t \in I_0$ için

$$H \circ \phi(t, \mathbf{X}_0) = e^{\mathbf{J}t} H(\mathbf{X}_0)$$

eşitliğini sağlayan bir $H : U \rightarrow V$ homeomorfizmi mevcuttur. Başka bir ifade ile, H

² $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}), \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \mathbf{X} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{F} \in C^1(\mathbf{E})$ başlangıç değer problemini ele alalım. $\phi(t, \mathbf{X}_0)$ başlangıç değer probleminin $I(\mathbf{X}_0)$ aralığında tanımlı bir çözümü olsun. Bu takdirde, $t \in I$ için $\phi_t(\mathbf{X}_0) = \phi(t, \mathbf{X}_0)$ ile tanımlanan eğriye akış denir.

³Sistemin sıfırdan farklı denge noktası değişken değiştirme kullanılarak orijine taşınabilir.

homeomorfizmi (1.6) lineer olmayan sistemin orijin civarındaki yörüngeleri ile (1.9) lineer sisteminin orijin civarındaki yörüngelerini eşler (Perko, 2000).

Hartman-Grobman Teoremi, (1.6) lineer olmayan sistemin denge noktası hiperbolik ise (1.6) sistemi ile bu sistemin lineerizasyonu olan (1.9) lineer sisteminin dinamik yapılarının denge noktası civarında aynı nitel yapıya sahip olduğunu söyler. Böylelikle, (1.6) lineer olmayan sistemin denge noktasının kararlılık yapısını ve sistemin çözümlerinin denge noktası civarındaki yerel davranışını belirlemek için (1.9) lineer sisteminin dinamik yapısını incelemek yeterli olacaktır.

1.2.2 Çatallanma teorisine genel bakış

Gerçek yaşam problemlerini açıklamak, anlamak ve çözmek için kullanılan matematiksel modeller zamandan bağımsız olan ve problemin detaylarını içeren parametreler içerebilirler. Bu parametre değerleri değiştikçe sistemin nitel yapısının nasıl değiştiği sorusu dinamik sistemlerin ilgilendiği bir diğer konudur. Örneğin; parametre değerindeki küçük ya da büyük bir değişiklik sistemde yeni denge noktalarının ortaya çıkmasına veya var olan denge noktalarının yok olmasına veya sistemin denge noktalarının kararlılık yapısının değişmesine neden olabilir. Sistemin yapısında değişime neden olan parametreye **çatallanma parametresi**, meydana gelen bu nitel değişikliklere **çatallanma** adı verilir ve değişikliklerin ortaya çıktığı parametre değerine ise **çatallanma değeri** denir (Strogatz, 1994).

Parametre değeri değişirken sistemde ortaya çıkan çatallanmaya bir örnek vermek için üzerine yük koyulmuş eğilebilen bir çubuğu ele alalım. Eğer çubuk üzerine ağırlığı az olan bir yük konulursa Şekil 1.2a'da görüldüğü gibi eğilmeden yükü taşıyabilir, yani çubuk denge durumunda kalır. Fakat yükün ağırlığı artılırsa çubuk eğilmeye başlar, yani çubuğun denge durumu bozularak kararsız hale geçer (Bakınız Şekil 1.2b). Burada, yük miktarı çatallanma parametresi, çubuğun eğilmeye başladığı yük miktarının değeri ise çatallanma değeridir (Strogatz, 1994).

Birinci mertebeden skalr diferensiyel denklemlerde farklı çatallanma tipleri vardır: eyer düğüm ya da katlı ("saddle-node"), transkritik ("transcritical") çatallanma, tırmık ("pitchfork") çatallanmadır. Eyer düğüm çatallanma sistemin kararlı ve kararsız iki denge noktasının kritik değerde bir araya gelip sonrasında denge noktaların ortadan kaybolduğu ya da yeni denge noktalarının kritik değerde ortaya çıktığı çatallanma tipidir (Strogatz, 2000). Transkritik çatallanmada, biri kararlı diğeri kararsız olan iki denge noktası belli bir parametre değerinden sonra kararlılık yapılarını değiştirirler, yani kararlı denge noktası kararsız olurken kararsız denge noktası kararlı olur. Tırmık



Şekil 1.2: Üzerine yük konmuş çubuğun kararlılık yapısı (Strogatz, 1994).

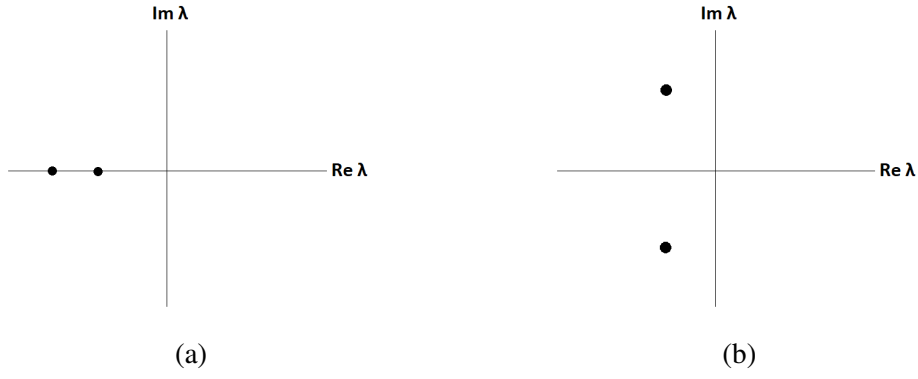
çatallanmada ise bir denge noktası kararlı durumdan kritik değerden sonra kararsız hale geçerken etrafında iki kararlı denge noktası ortaya çıkar. Bu tip çatallanma süperkritik olarak adlandırılır. Tersine, kritik değerden önce kararsız olan iki denge noktasının kritik değerde ortadan kaybolduğu kararlı olan denge noktasının kritik değerden sonra kararsız hale geldiği çatallanma tipi ise subkritik tırmık çatallanmadır (Allen, 2007).

Şimdi de " n -tane birinci mertebeden diferensiyel denklemden oluşan sistemlerde parametre değeri değişirken sistemin dinamik yapısında nasıl değişiklikler olabilir?" sorusuna cevap verelim. Nasıl bir davranış değişikliğinin olabileceğini görmek için aşağıda verilen diferensiyel denklem sistemini ele alalım:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \alpha), \mathbf{X} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (1.10)$$

Kabul edelim ki (1.10) sistemi kararlı bir denge noktasına sahip olsun. Bu denge noktası α parametresi değişirken kararlılığını hangi durumlarda kaybeder? Biliyoruz ki sistemin denge noktalarının kararlılığı Jakobiyen matrisinin özdeğerlerinin reel kısmının işaretine bağlıdır. Eğer özdeğerler kompleks düzlemin sol tarafında yatıyorsa, yani negatif reel kısma sahip ise denge noktası kararlı olur. Özdeğerlerin negatif reel kısma sahip olması ise özdeğerlerin reel ve negatif olması ya da özdeğerlerin kompleks eşlenik ve negatif reel kısma sahip olması ile mümkündür (Bakınız Şekil 1.3).

Denge noktasının kararlılığını kaybetmesi için belirli bir α değerinden sonra bir özdeğerin ya da her iki özdeğerin kompleks düzlemin sağ tarafına geçmesi, yani bu özdeğerin ya da özdeğerlerin reel kısmının bu parametre değerinden sonra pozitif olması gerekir. Bu ise ancak sistemin çatallanma değeri olarak adlandırdığımız parametre değerinde bir çift sanal özdeğere sahip olması (başka bir deyişle reel kısmı



Şekil 1.3: Negatif reel kısma sahip özdeğerlerin kompleks düzlemdeki yerleri (Strogatz, 1994).

sıfır olan özdeğere sahip) ya da sıfır özdeğerine sahip olması ile mümkündür. Eğer özdeğerlerden biri sıfır ise yukarıda verilen üç çatallanma tipinden biri meydana gelebilir. Eğer sistem bir çift sanal özdeğere sahip ise Hopf çatallanmanın ortaya çıkması beklenir. Hopf çatallanma skalar diferensiyel denklemlerde görülmez çünkü skalar diferensiyel denklemler periyodik çözümlere sahip olamazlar (Allen, 2007).

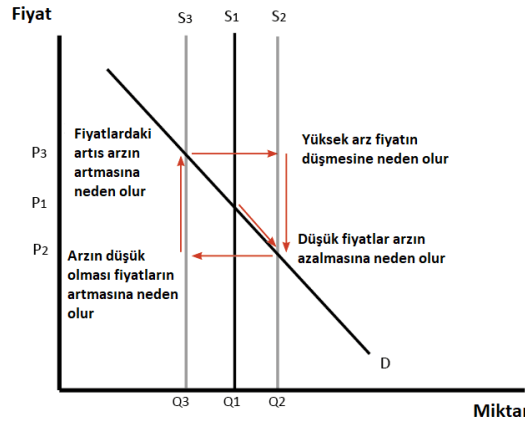
1.2.3 Hopf çatallanma teorisi ve önemi

Dinamik sistemler teorisinin önemli çalışma alanlarından biri olan periyodik çözümler yapay ve doğal pek çok süreçte ortaya çıkmaktadır. Dünyanın kendi etrafında dönmesi ile oluşan gece gündüz döngüsü, kalbin kanı pompalamasını sağlayan nöronların periyodik olarak uyarılıp sönmesi ve uyku döngüsü bu süreçlere örnek verilebilir. Periyodik çözümler farklı dinamik sistemler için farklı anlamlar (sağlıklı olmak, yaşamın devam etmesi vb.) ifade eder. Örneğin; bir av-avcı popülasyonunda görülen periyodik çözümler iki türün aynı anda aynı ortamda birlikte yaşamaya devam edecekleri anlamına gelir. Epilepsi hastalığını modelleyen bir matematiksel modelde ise periyodik çözümlerin ortaya çıkması epilepsi atağının gerçekleştiğinin bir göstergesidir. Çünkü epilepsi hastalığı ile ilgili yapılan çalışmalar sonucunda epilepsi hastaları için elde edilen EEG kayıtlarına göre ataklardan önce beynin sahip olduğu kaotik yapının bozularak periyodik davranışın ortaya çıktığı gözlemlenmiştir. Böylece, periyodik çözümlerin ortaya çıkacağı zamanlar belirlenerek hastalığın tedavisine katkı sağlanabilir (Karaoğlu, 2016). Finansal piyasalardaki hisse senedi fiyatlandırması için kullanılan bir matematiksel modelde periyodik çözümlerin ortaya çıkması ise yatırımcıların bu döngüye göre pozisyon değiştirebileceği ve alım satım stratejilerini belirleyebileceğini gösterir.

Ekonomi alanında en iyi bilinen periyodik davranış örneği ise "Örümcek Ağı

Teoremi" olarak adlandırılır. Örümcek Ağı Teoremi dönemsel ya da sürekli meydana gelen fiyat dalgalanmalarını açıklamak için kullanılan bir teoremdir. Basit bir Örümcek Ağı Modeli'nde, piyasadaki ürün arzının pek çok değişkene (yağış miktarı, doğal afetler vb.) bağlı olarak değiştiği bir tarımsal piyasa ele alınır. Örümcek Ağı Teorisi aşağıdaki varsayımlar üzerine kurulmuştur:

- Tarımsal piyasada çiftçiler piyasa fiyatının ne olacağını bilmeden, bir sene öncesinden ne kadar üreteceklerine karar vermek zorundadır.
- Arzın belirlenmesindeki en önemli faktör bir önceki senenin fiyatlarıdır. Örneğin; domatesin fiyatının geçen sene düşük olması bazı çiftçileri bu sene domates yerine başka bir ürün yetiştirmeye yönlendireceğinden domatesin bu seneki arzı azalacaktır. Tersine domates fiyatının geçen sene yüksek olması çiftçileri domates yetiştirmeye teşvik edeceğinden bu seneki domates arzı artacaktır.
- Tarım ürünleri için talebin fiyat esnekliği oldukça düşüktür. Yani tarım ürününün fiyatındaki değişimin talep üzerine etkisi azdır.



Şekil 1.4: Örümcek Ağı Teoremi-Fiyatın Dalgalanması (Url-1)

Şekil 1.4'de bir Örümcek Ağı Modeli için örnek verilmiştir. Şekildeki D talep eğrisini, S_i , $i = 1, 2, 3$ arz eğrilerini, Q_i , $i = 1, 2, 3$ üretim miktarını, P_i , $i = 1, 2, 3$ piyasa fiyatını ifade eder. S_1 ile belirtilen eğri çiftçinin geçen seneki fiyata bağlı olarak belirlediği arz miktarını ve P_1 ise bu arz miktarına göre oluşacak piyasa fiyatını göstermektedir. Eğer iyi bir hasat dönemi olmuş ise çiftçi beklenenden daha fazla ürün elde edeceğinden arz miktarı artacak (yeni arz eğrisi S_2 olacaktır) ve böylece fiyatlar P_2 seviyesine gerileyecektir. Fiyatların düşmesi bir sonraki sene bazı çiftçilerin piyasadan çıkmasına ve arzın azalmasına neden olacaktır (yeni arz eğrisi S_3 eğrisi olacaktır). Arzın azalması nedeniyle piyasadaki talep karşılanamayacağından

fiyatlar yükselecektir. Yüksek fiyatlar yüksek kar anlamına geldiğinden çiftçiler gelecek sene bu ürünü üretmeye yönelecektir. Böylece ürünün arzı tekrar artacaktır. Böylece çiftçiler hangi üründen ne kadar ekeceklerine karar verirken bir önceki senenin piyasa fiyatlarını dikkate aldıklarından piyasa fiyatı yüksek fiyat ile düşük fiyat arasında salınım yapacaktır (Url-1). Türkiye’de son yıllarda (2003-2018) patates ve soğan fiyatlarında meydana gelen dalgalanmalar Örumcek Ağı Teoremi’ne iyi bir örnektir (Bakınız Şekil 1.5).



Şekil 1.5: Bu grafikte baz yıl olan 2003’ün Ocak ayından, 2018’in Ekim ayı dahil olmak üzere tüm aylarda kuru soğanın fiyat değişimi görülmektedir (Url-2).

Görüldüğü gibi hemen hemen her alanda karşılaştığımız periyodik davranışlar dinamik sistemlerin çözümleri içinde karşımıza çıkan ve araştırılması gereken bir konudur. Bir sistemde periyodik çözümlerin varlığı ise Hopf Çatallanma Teoremi uygulanarak gösterilebilir. Şimdi n tane birinci mertebeden diferensiyel denklemden oluşan diferensiyel denklem sistemi için teoremin ifadesini verelim. Öncelikle, $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mu) \quad (1.11)$$

diferensiyel denklem sistemini ele alalım.

Teorem 1.4. (1.11) sisteminin aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim:

(H1) $I \subset \mathbb{R}$ sıfırın açık bir komşuluğu olmak üzere her $\mu \in I$ için $\mathbf{F}(\mathbf{0}; \mu) = \mathbf{0}$ ve $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ noktası (1.11) sisteminin ayrık denge noktasıdır.

(H2) \mathbf{F} fonksiyonu, $(\mathbf{0}, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ nin bir komşuluğunda \mathbf{X} ve μ ye göre analitiktir.

(H3) $A(\mu) = D\mathbf{F}(\mathbf{0}, \mu)$ Jakobiyen matrisi aşağıdaki formda kompleks eşlenik özdeğer çiftine sahiptir ve

$$\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\omega(\mu), \quad (1.12)$$

$$\omega(0) = \omega_0 > 0, \alpha(0) = 0, \alpha'(0) \neq 0 \quad (1.13)$$

dir.⁴

(H4) $A(0)$ matrisinin geriye kalan $n - 2$ tane özdeğeri negatif reel kısma sahiptir.

Bu takdirde, (1.11) sistemi periyodik çözümler ailesine sahiptir (Hassard ve diğ., 1981).

Asada ve Yoshida (2003), dördüncü dereceden bir polinomun sırf sanal iki köke sahip olması için ve gerek ve yeter şartları aşağıdaki teorem ile vermişlerdir.

Teorem 1.5. (i)

$$\delta(\lambda) = \lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 = 0 \quad (1.14)$$

polinomunun sırf sanal iki köke ve real kısmı sıfır olmayan iki köke sahip olması için gerek ve yeter şart

(A) $b_1b_3 > 0$, $b_4 \neq 0$ ve $\phi \equiv b_1b_2b_3 - b_1^2b_4 - b_3^2 = 0$

(B) $b_1 = 0$, $b_3 = 0$ ve $b_4 < 0$

olmak üzere (A) ya da (B) şartının sağlanmasıdır.

(ii) (1.14) polinomunun sırf sanal iki köke ve real kısmı negatif olan iki köke sahip olması için gerek ve yeter şart

(C) $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_4 > 0$ ve $\phi \equiv b_1b_2b_3 - b_1^2b_4 - b_3^2 = 0$

koşulunun sağlanmasıdır (Asada ve Yoshida, 2003).

Dört tane birinci mertebeden diferensiyel denklemden oluşan bir diferensiyel denklem sisteminin karakteristik denklemi dördüncü dereceden bir denklem olacağından Teorem 1.5 kullanılarak bu sistemin periyodik çözümlere sahip olabilmesi için gerekli olan şartlar belirlenebilir.

1.3 Literatür Taraması

Finansal piyasalar, fonların, fon fazlası olanlardan fon eksikliği olanlara aktarılmasını sağlayan mekanizmalardır. Finansal piyasalar, ellerinde bulunan fonu verimli bir şekilde kullanmayan insanlar ile kullananlar arasında bir kanal görevi görerek daha fazla ekonomik etkinliği teşvik etmek için çok önemlidir. Aslında, iyi işleyen finansal

⁴Burada $\alpha'(0) \neq 0$ şartına transversalite (kesme) şartı denir.

piyasalar yüksek ekonomik büyümenin anahtarıdır ve düşük performanslı finansal piyasalar dünyadaki birçok ülkenin umutsuzca fakir kalmasının nedenidir. Finansal piyasalardaki faaliyetlerin kişisel zenginlik, işletmeler ve tüketicilerin davranışları ve ekonominin döngüsel performansı üzerinde de doğrudan etkileri vardır. Finansal piyasaların pek çok türü vardır: para ve sermaye piyasası, altın piyasası, hisse senedi piyasası, döviz piyasası vb. Hisse senedi piyasası en çok takip edilen finansal piyasalardandır; öyle ki hemen hemen her ülke hisse senedi piyasasına sahiptir (Türkiye'deki hisse senedi piyasası Borsa İstanbul'dur). Hisse senetleri bir şirketteki mülkiyet payını temsil eder ve şirketin kazancı ve varlıkları üzerinde hak talebi oluşturan bir teminattır. Hisse senedi ihraç edilmesi ve bu hisse senetlerinin halka satılması şirketlerin faaliyetlerini finanse etmek için fon toplamalarını sağlayan bir yoldur (Mishkin, 2012).

Finansal krizler veya finansal piyasalarda meydana gelen dalgalanmalar, finansal piyasaların yatırım fırsatlarına sahip kişilere fon sağlama özelliğini kısıtlayabilir ve ekonomi faaliyetlerinde keskin daralmaya neden olabilir. Bu nedenle, finansal krizlerin önlendiği daha istikrarlı bir finansal sistemin varlığı ülke ekonomileri için oldukça önem arz etmektedir. O halde, finansal piyasaların dinamiğini açıklayabilecek ve kararlılık yapısı ile ilgili sorulara çözüm veya çözüm önerisi verebilecek matematiksel modellerin geliştirilmesine gereksinim vardır. Ayrıca, yatırımcılar piyasalardaki hareketliliğin olumsuz etkilerinden korunmak ya da bu etkileri en aza indirecekleri bir güvenli bölge arayışı içerisindeyler. Bahsedilen bu güvenli bölge ise matematiksel modellerin kararlı olduğu parametre kısıtları ile belirlenebilir.

Literatürde hisse senedi piyasalarının matematiksel modellenmesinde stokastik ve deterministik olmak üzere iki farklı yaklaşım vardır. Stokastik yaklaşım ile elde edilen modeller etkin piyasa hipotezi ile pratikte çok fazla dikkate alınmayan üç varsayım dikkate alınarak oluşturulmuştur. Bu varsayımlardan birincisi, arzın ve talebin yalnızca opsiyonun değerine, özel olarak hisse senedinin fiyatına bağlı olduğu, yani matematiksel olarak arzın ve talebin yalnızca fiyatın bir fonksiyonu olduğu kabulüdür. İkincisi, mevcut bütün bilgilerin serbest bir şekilde her yatırımcı tarafından piyasadan elde edilmesi, risk ve getiri bakımından yatırımcıların beklentilerinin birbirleri ile paralellik göstermesi nedeniyle hisse senedi için tek fiyat belirlemeleri ve gelecek bakımından yatırımcıların benzer doğrultuda yatırım stratejileri takip ettikleri kabul edilmektedir. Son olarak, piyasa da sınırsız miktarda sermayenin (nakit, tahvil, hisse senedi, farklı yatırım araçları, vd.) var olduğu (arbitrage argümanı) ve bunun sonucunda da şayet hisse senedi gerçek değerinin altında bir değerde alınıp satılırsa elinde çok parası olan yatırımcıların hemen bu boşluğu doldurarak hisse senedi

fiyatını yine gerçek değerine yükseleceği kabulüdür. Stokastik modeller için ele alınan varsayımlar teorik çalışmalarda kabul görse de yatırımcılar tarafından pratikte dikkate alınmayan ve pek çok araştırmacı tarafından eleştirilen varsayımlardır (Bakınız: Caginalp ve Balenovich, 1999; Caginalp ve Merdan, 2007; Daniel ve Hirshleifer, 1998; Lopes, 1987; Merdan ve diğ., 2016). Ayrıca stokastik modeller teorik ve denge durumuna yakın varsayımlar ile etkin piyasa hipotezlerine dayanarak oluşturulduğundan, bu modeller ani fiyat artışını ya da azalışını, fiyat dalgalanmalarını, piyasada meydana gelen köpükleri ve dolayısıyla finansal krizleri açıklamakta yetersiz kalmaktadır; bu gibi durumları ve kararsızlıkları nadir görülen olaylar olarak değerlendirmektedir.

Finansal piyasaların modellenmesinde kullanılan diğer bir yaklaşım olan deterministik modeller ise diferensiyel denklemler kullanılarak ve stokastik modellerin oluşturulmasında kullanılan varsayımların aksine uygulamada çok kullanılan önemli beklentilere cevap veren aşağıdaki varsayımlar dikkate alınarak oluşturulmuştur:

- (i) Finans piyasalarında sınırlı miktarda para ve hisse senedi vardır. Eğer bir hisse senedi için belirli miktarda sermaye ayrılmış ve bu yönde kullanılmış ise, bu yönde daha fazla sermaye akışının olmasını beklemek mümkün değildir.
- (ii) Hisse senedi fiyatını, hem hisse senedi fiyatının hem de hisse senedi fiyatının yönünün etkilemesi beklenendir. Örneğin, fiyatı yükselen bir hisse senedini, sattıktan sonra yükselmeye devam edeceği beklentisi ile bir yatırımcı satmak istemeyebilir. Bunun aksine, fiyatı düşmeye başlayan bir hisse senedini elinde tutan bir yatırımcı ilerleyen zamanda daha da değer kaybedeceği endişesiyle biran önce satmak isteyebilir. Sonuç olarak, hisse senedi fiyatının yönü (trend), yatırımcıların alım satım stratejilerini belirleyen önemli etkenlerden birisidir ve hisse senedi fiyatındaki değişimi etkiler.
- (iii) Finansal piyasalar, farklı görüşe ve motivasyona sahip, farklı bütçeli yatırımcıların yer aldığı bir platform olup; her bir yatırımcı sahip olduğu motivasyon doğrultusunda hisse senedi fiyatı için farklı değerler belirleyebilir.

Finansal piyasalarda hisse senedi fiyatlarının deterministik yaklaşım ile modellenmesi ilk olarak 1990 yılında Caginalp ve Ermentrout tarafından yapılan bir çalışma ile başlamıştır (Caginalp ve Ermentrout, 1990). Bu çalışmada tek bir hisse senedi ve bu hisse senedinin alım satımını yapan homojen bir yatırımcı grup içeren kapalı, yani içerden dışarıya veya dışardan içeriye, nakit veya hisse senedi akışı olmayan bir

piyasa ele alınmıştır. Bu çalışmada yatırımcıların, hisse senedi fiyatının yönüne (trend) ve yatırımcı tarafından hisse senedi fiyatı için belirlenen değer ile hisse senedinin piyasa değeri arasındaki olan farka bağlı olarak belirlediği alım satım kararlarının hisse senedi fiyatı üzerindeki etkisi incelenmiş ve hisse senedi fiyatı deterministik yolla modellenmiştir. Bu çalışma daha sonra Caginalp ve Balenovich (1999) tarafından yapılan çalışma ile geliştirilmiştir. Bu çalışmada tek bir hisse senedi ve tek bir yatırımcı grup içeren kapalı bir finansal piyasa ele alınmıştır. Piyasadaki nakit miktarı M ve hisse senedi sayısı N olmak üzere likitide terimi $L := M/N$ olarak ilk kez bu çalışmada tanımlanarak, likitidenin piyasa üzerindeki etkisi incelenmiştir. B hisse senedinin toplam varlığa oranını ve $1 - B$ ise piyasadaki nakdin toplam varlığa oranını göstermek üzere

$$B = \frac{NP}{NP + M}, \quad 1 - B = \frac{M}{NP + M}, \quad \frac{B}{1 - B} = \frac{N}{M}P = \frac{P}{L}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Talep fonksiyonu $D = k(1 - B)$ ve arz fonksiyonu $S = (1 - k)B$ dir. Burada, k fonksiyonu bir birim nakdin bir birim hisse senedine çevrilme olasılığı ve $1 - k$ ise bir birim hisse senedinin bir birim nakde çevrilme olasılığını temsil eder ve aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$k := \frac{1}{2}(1 + \zeta).$$

Burada ζ yatırımcıların motivasyon fonksiyonu olmak üzere

$$\zeta := \zeta_1 + \zeta_2, \quad \zeta_1 = q_1 \tau_0 \frac{1}{P} \frac{dP}{dt}, \quad \zeta_2 = q_2 \left(1 - \frac{P}{P_a}\right)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada, q_1 ve q_2 motivasyon fonksiyonlarını etkileyen büyüklük ile ilgili parametreleri, P hisse senedi fiyatını ve P_a ise hisse senedi fiyatı için yatırımcı tarafından belirlenen değeri gösterir.

Hisse senedi fiyatındaki bağlı değişim oranı ise aşırı talep fonksiyonu kullanılarak aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\frac{\tau_0}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{D}{S} - 1. \quad (1.15)$$

Bu formül mikroekonominin standart varsayımın limit formudur (Henderson ve Quandt, 1980). Talep ve arz fonksiyonları (1.15) denkleminde yerine yazılarak ve k ile $1 - k$ fonksiyonları kullanılarak lineer olmayan

$$\left(1 - \frac{Q_1}{P}\right) \frac{dP}{d\tau} + \left(1 + \frac{Q_2}{P_a}\right) = 1 + Q_2$$

diferensiyel denklemi elde edilmiştir. Burada, $\mathbf{P} := \frac{P}{L}$, $\mathbf{P}_a := \frac{P_a}{L}$, $\tau := \frac{t}{\tau_0}$, $Q_1 = 2q_1$ ve $Q_2 = 2q_2$ dir. Yukarıdaki denklemde, eğer Q_2 değeri büyük fakat Q_1 değeri küçük ise $\mathbf{P}_{eq} \approx \mathbf{P}_a$ olur, yani eğer yatırımcılar hisse senedinin gerçek değeri ile hisse senedi fiyatı için belirlenen değer arasındaki sapmaya önem vererek alım satım kararı alırlarsa hisse senedinin denge fiyatı \mathbf{P}_a değerine yaklaşır. Şayet Q_2 yeterince küçük fakat Q_1 büyük ise $\mathbf{P}_{eq} \approx L$ sonucuna ulaşılır.

Çalışmanın sonraki bölümlerinde, yatırımcıların fiyat değişimlerine tepki verme süresi göz önünde bulundurularak yatırımcıların motivasyon fonksiyonları

$$\zeta_1(t) := q_1 c_1 \int_{-\infty}^t \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} e^{-c_1(t-\tau)} d\tau, \quad (1.16)$$

$$\zeta_2(t) := q_2 c_2 \int_{-\infty}^t \frac{P_a(\tau) - P(\tau)}{P_a(\tau)} e^{-c_2(t-\tau)} d\tau \quad (1.17)$$

şeklinde tanımlanarak aşağıdaki diferensiyel denklem sistemi elde edilmiştir:

$$\begin{cases} \frac{\tau_0}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{D}{S} - 1 \\ \frac{dB}{dt} = k(1-B) + (1-k)B + B(1-B) \frac{1}{P} \frac{dP}{dt} \\ \frac{d\zeta_1}{dt} = c_1 \left(\frac{q_1}{P} \frac{dP}{dt} - \zeta_1 \right) \\ \frac{d\zeta_2}{dt} = c_2 \left(q_2 \frac{P_a - P}{P_a} - \zeta_2 \right). \end{cases} \quad (1.18)$$

Caginalp ve Balenovich tarafından elde edilen modelin kararlılık analizi Duran (2011) tarafından nümerik olarak, Yucel (2015) tarafından da teorik olarak incelenmiştir. Yucel tarafından yapılan çalışmada modelin kararlı olabilmesi için parametreler üzerine konması gereken şartlar belirlenmiştir. Merdan, Caginalp ve Troy tarafından 2016 yılında yayınlanan bir çalışmada modelin çatallanma analizi yapılmıştır ve sistemde Hopf çatallanmanın ortaya çıkması, yani sistemin periyodik çözümlere sahip olması için gerekli olan şartlar belirlenmiştir (Merdan ve diğ., 2016).

Finansal piyasaların deterministik yaklaşım ile modellenmesinde önem arz eden bir diğer çalışma da Caginalp ve Merdan tarafından yapılmış ve (1.18) modeli bir hisse senedi ve farklı grupları içeren piyasalar için genelleştirilmiştir (Caginalp ve Merdan, 2007). Bu çalışmada önceki çalışmalardan farklı olarak tek hisse senedinin farklı yatırım stratejilerine sahip sonlu sayıda yatırımcı grupları tarafından alınıp satıldığı bir piyasa ele alınmıştır. Deterministik modellerin oluşturulmasında kullanılan (i)-(iii) varsayımları kullanılmış ve hesaplamaların basit olması için ilk olarak iki yatırımcı

grup içeren kapalı bir piyasa ele alınmıştır. $M_1(t)$ ve $M_2(t)$ sırasıyla birinci ve ikinci grubun sahip olduğu nakit miktarını ve $N_1(t)$ ve $N_2(t)$ sırasıyla birinci ve ikinci grubun sahip olduğu hisse senedi sayısını belirtmek üzere piyasadaki toplam nakit miktarı ve toplam hisse senedi sayısı

$$\begin{aligned} M_1(t) + M_2(t) &= M_0 \\ N_1(t) + N_2(t) &= N_0 \end{aligned}$$

olarak alınmıştır ve M_0 ile N_0 sabit sayılardır. Talep ve arz fonksiyonları ise aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} D &= k_1 M_1 + k_2 M_2 \\ S &= (1 - k_1) N_1 P + (1 - k_2) N_2 P. \end{aligned}$$

Burada, $i = 1, 2$ olmak üzere k_i , i . grup için bir birim nakdin bir birim hisse senedine çevrilme olasılığıdır ve

$$k_i = \frac{1}{2} = \left(1 + \tanh(\zeta_1^{(i)} + \zeta_2^{(i)}) \right)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Yatırımcıların motivasyon fonksiyonları ise

$$\begin{aligned} \zeta_1^{(i)}(t) &:= q_1^{(i)} c_1^{(i)} \int_{-\infty}^t \frac{1}{P(\tau)} \frac{dP(\tau)}{d\tau} e^{-c_1^{(i)}(t-\tau)} d\tau \\ \zeta_2^{(i)}(t) &:= q_2^{(i)} c_2^{(i)} \int_{-\infty}^t \frac{P_a^{(i)}(\tau) - P(\tau)}{P_a^{(i)}(\tau)} e^{-c_2^{(i)}(t-\tau)} d\tau \end{aligned}$$

şeklinde. Yatırımcı grupların sahip olduğu nakit miktarındaki ve hisse senedi sayılarındaki zamana bağlı değişimler $i = 1, 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} P \frac{dN_i}{dt} &= k_i M_i - (1 - k_i) N_i P \\ \frac{dM_i}{dt} &= -k_i M_i + (1 - k_i) N_i P \end{aligned}$$

olarak verilmiştir. Hisse senedi fiyatındaki bağıl değişim oranı ise aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\begin{aligned} \frac{\tau_0}{P} \frac{dP}{dt} &= \frac{D}{S} - 1 \\ &= \frac{k_1 M_1 + k_2 (M_0 - M_1)}{(1 - k_1) N_1 P + (1 - k_2) (N_0 - N_1) P} - 1. \end{aligned}$$

Sonuç olarak, iki yatırımcı grup ve tek hisse senedi içeren kapalı bir piyasa için

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\tau_0}{P} \frac{dP}{dt} = \frac{k_1 M_1 + k_2 (M_0 - M_1)}{(1 - k_1) N_1 P + (1 - k_2) (N_0 - N_1) P} - 1 \\ P \frac{dN_i}{dt} = k_i M_i - (1 - k_i) N_i P \\ \frac{dM_i}{dt} = -k_i M_i + (1 - k_i) N_i P \\ \frac{\zeta_1^{(i)}}{dt} = c_1^{(i)} \left(\frac{q_1^{(i)}}{P} \frac{dP}{dt} - \zeta_1^{(i)} \right) \\ \frac{\zeta_2^{(i)}}{dt} = c_2^{(i)} \left(q_2^{(i)} \frac{P_a^{(i)} - P}{P_a^{(i)}} - \zeta_2^{(i)} \right) \end{array} \right. \quad (1.19)$$

lineer olmayan diferensiyel denklem sistemi elde edilmiş ve bu modeli daha fazla sayıda gruba genellenin özdeş olacağı vurgulanmıştır. Çalışmanın sonraki bölümlerinde piyasaya hisse senedi ya da nakit giriş çıkışının olduğu kabul edilerek sistem genişletilmiştir. Bu durumda piyasadaki toplam nakit miktarı ve toplam hisse senedi sayıları

$$\begin{aligned} M_0(t) &= M_0^{bas} + M_1^{ek}(t) + M_2^{ek}(t) \\ N_0(t) &= N_0^{bas} + N_1^{ek}(t) + N_2^{ek}(t) \end{aligned}$$

şeklinde yeniden tanımlanmıştır ve burada, M_0^{bas} ve N_0^{bas} piyada başlangıçta bulunan toplam nakit miktarını ve hisse senedi sayısını göstermektedir. M_i^{ek} ve N_i^{ek} ise piyasaya hisse senedi ya da nakit girişi ya da çıkışı olması nedeniyle i . grubun sahip olduğu nakit miktarındaki ve hisse senedi sayısındaki artışı ya da azalışı ifade eden zamana bağlı değişkenleridir. O halde her bir yatırımcı grubun sahip olduğu hisse senedi sayısındaki ve nakit miktarındaki zamana bağlı değişim

$$\begin{aligned} P \frac{dN_i}{dt} &= k_i M_i - (1 - k_i) N_i P + P \frac{dN_i^{ek}}{dt} \\ \frac{dM_i}{dt} &= -k_i M_i + (1 - k_i) N_i P + \frac{dM_i^{ek}}{dt} \end{aligned}$$

olarak belirlenmiştir. Caginalp ve Merdan, kapalı olmayan piyasalar için oluşturdukları model ile "Close-End Fund" üzerine çalışma yapmışlar ve elde edilen nümerik sonuçları gerçek piyasa sonuçları ile karşılaştırmışlardır.

(1.19) sisteminin kararlılık analizi Caginalp ve DeSantis tarafından çalışılmıştır ve sistemin denge noktasının hangi şartlar altında kararlı olduğu belirlenmiştir (Caginalp ve DeSantis, 2011). Caginalp, Swigon ve DeSantis tarafından yapılan çalışmada, çok sayıda yatırımcı ve tek hisse senedi içeren bir finansal piyasa düşünülmüştür ve (1.19)

sistemi iyileştirilmiştir. Çalışmada hesaplamaların basit olması için iki yatırımcı grubun olduğu varsayılarak elde edilen sistemin kararlılık analizi çalışılmıştır. Tüm yatırımcıların sadece hisse senedi fiyatı için belirlenen değer ile hisse senedinin piyasa fiyatı arasındaki değişime bağlı bir strateji takip etmesi durumunda, tüm denge noktalarının kararlı olduğu sonucu elde edilmiştir. Ayrıca, biri hisse senedi fiyatı için belirlenen değer ile hisse senedinin piyasa fiyatı arasındaki değişime bağlı bir stratejiye sahip, diğeri ise hisse senedi fiyatının yönüne bağlı stratejiye sahip iki yatırımcı grubu içeren sistemlerde, denge noktalarının kararlı olması için parametreler üzerine konması gereken şartlar tespit edilmiştir.

Literatürde yer alan mevcut deterministik modeller, bir hisse senedi ve farklı görüş ve bütçedeki yatırımcı grupları içeren piyasalar için verilmiştir. Bu tez çalışmasında ise, bir yatırımcı grup ve iki hisse senedi içeren kapalı bir finansal piyasa için

- (i) Finans piyasalarında sınırlı miktarda para ve hisse senedi vardır,
- (ii) Piyasada farklı görüşte yatırımcılar bulunur,
- (iii) Hisse senedi fiyatındaki değişimler hem hisse senedi fiyatından hem de hisse senedi fiyatının yönünden etkilenir

varsayımları kullanılarak bir deterministik model elde edilecektir. Elde edilen model ile mevcut çalışmalara göre piyasalara daha iyi bir yaklaşımda bulunması amaçlanmıştır.

2. İKİ HİSSE SENEDİ VE BİR YATIRIMCI GRUP İÇEREN BİR FİNANSAL PİYASANIN MATEMATİKSEL MODELLEMESİ VE KARARLILIK ANALİZLERİ

2.1 Matematiksel Modelleme

Bu tez çalışmasında, bir yatırımcı grup ve iki hisse senedi içeren kapalı⁵ bir finansal piyasa ele alınmıştır. Yatırımcı grubun "*hisse senedi satın alırken hem satın alacağı hisse senedinin hem de diğer hisse senedinin fiyatına göre karar verdiği; fakat hisse senedi satarken sadece satacağı hisse senedinin fiyatına göre karar verdiği*" bir yatırım stratejisi izlediği varsayılmıştır⁶. Bu varsayım altında yatırımcıların hisse senedi alım satım kararlarını belirleyen geçiş oranı fonksiyonları aşağıda tanımlanmıştır:

$$\begin{cases} k^{(1)}(t) & := k^{(1)}(\zeta_1^{(1)}(t), \zeta_2^{(1)}(t), \zeta_1^{(2)}(t), \zeta_2^{(2)}(t)) \\ k^{(2)}(t) & := k^{(2)}(\zeta_1^{(1)}(t), \zeta_2^{(1)}(t), \zeta_1^{(2)}(t), \zeta_2^{(2)}(t)) \\ \tilde{k}^{(1)}(t) & := \tilde{k}^{(1)}(\zeta_1^{(1)}(t), \zeta_2^{(1)}(t)) \\ \tilde{k}^{(2)}(t) & := \tilde{k}^{(2)}(\zeta_1^{(2)}(t), \zeta_2^{(2)}(t)). \end{cases} \quad (2.1)$$

Burada $k^{(1)}$ ve $k^{(2)}$, hisse senetlerini satın alma ya da satma eğilimlerini içerir. Başka bir deyişle $k^{(1)}$ ve $k^{(2)}$, sırasıyla bir birim nakdin bir birim birinci hisse senedi ve bir birim nakdin bir birim ikinci hisse senedi satın almak için kullanılma olasılığını; $\tilde{k}^{(1)}$ ve $\tilde{k}^{(2)}$ ise hisse senetlerinin satılması olasılığını göstermektedir (Caginalp ve Belanovich, 1999; Caginalp ve Merdan, 2007). Bu nedenle, $k^{(1)}, k^{(2)}, \tilde{k}^{(1)}, \tilde{k}^{(2)} \in [0, 1]$ ve $0 \leq k^{(1)} + k^{(2)} \leq 1$ dir. Geçiş oranı fonksiyonları hisse senedi fiyatının yönüne, hisse senedi fiyatı için yatırımcı grup tarafından belirlenen değere (yani hisse senedinin esas ya da gerçek değerine), piyasadaki yüksek ya da düşük likitide oranına, yatırımcıların piyasa hakkındaki korku veya umutlarını içeren değişkenlere vb. bağlı olabilir. Bu tez çalışmasında yatırımcıların hisse senedi fiyatının yönüne ve hisse senedi için belirlenen

⁵Piyasaya dışarıdan nakit veya hisse senedi girişine ya da piyasadaki nakit veya hisse senedi çıkışına izin verilmeyen piyasalara kapalı finansal piyasa denir.

⁶Gerçek piyasa koşullarında yatırımcıların herhangi bir yatırım aracını satın alırken benzer yatırım araçlarının fiyatını karşılaştırarak karar aldığı, fakat herhangi bir yatırım aracını satarken genellikle sadece bu yatırım aracının fiyatını dikkate alarak karar verdiği gözlemlenmektedir. Bu nedenle bu tez çalışmasında yatırımcı grubun yatırım stratejisi yukarıda ifade edildiği şekilde belirlenmiştir.

değere bağlı olarak hisse senedinin değerlenmesine ya da değer kaybetmesine⁷ göre kararlar aldıkları varsayılmıştır. Yani (2.1) denklemleri ile verilen geçiş oranı fonksiyonlarının bağlı olduğu $\zeta_j^{(i)}$ duyarlılık fonksiyonları hisse senedi fiyatının yönüne ve hisse senedinin değerlenmesine bağlı fonksiyonlardır. Burada, üst indis $i = 1, 2$ duyarlılık fonksiyonunun hangi hisse senedine ait olduğunu; alt indis $j = 1$ ise hisse senedi fiyatının yönüne bağlı bileşeni ve $j = 2$ ise hisse senedinin değerlenmesine bağlı bileşeni ifade eder. Duyarlılık fonksiyonları matematiksel olarak aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\zeta_1^{(i)}(t) := q_1^{(i)} c_1^{(i)} \int_{-\infty}^t \frac{1}{P^{(i)}(\tau)} \frac{dP^{(i)}(\tau)}{d\tau} e^{-c_1^{(i)}(t-\tau)} d\tau, \quad (2.2)$$

$$\zeta_2^{(i)}(t) := q_2^{(i)} c_2^{(i)} \int_{-\infty}^t \frac{P_a^{(i)}(\tau) - P^{(i)}(\tau)}{P_a^{(i)}(\tau)} e^{-c_2^{(i)}(t-\tau)} d\tau. \quad (2.3)$$

Bu tanımlara göre, $\zeta_1^{(i)}(t)$, i . hisse senedi için t zamanından önceki bağlı fiyat değişikliklerinin etkilerinin toplamını ifade ederken $\zeta_2^{(i)}(t)$ ise i . hisse senedinin değerlenmesinden (yani yatırımcıların hisse senedi fiyatı için belirlediği değer ile hisse senedinin gerçek fiyat arasındaki farklılıktan) kaynaklanan etkilerin toplamını temsil eder. Burada, $(c_1^{(i)})^{-1}$ hafıza uzunluğudur ve $(c_2^{(i)})^{-1}$ ise yatırımcının i . hisse senedinin değerlenmesine ne kadar süre sonra tepki vereceğini gösterir. Örneğin; $(c_1^{(i)})$ değeri büyük ise yatırımcılar i . hisse senedi ile ilgili kısa süreli geçmiş bilgiyi hafızasında tutacaklardır; $(c_2^{(i)})$ değerinin büyük olması durumunda ise yatırımcılar i . hisse senedinin değerlenmesine çok çabuk tepki vereceklerdir. $q_1^{(i)}$ ve $q_2^{(i)}$ sırasıyla, yatırımcıların alım satım kararı alırken i . hisse senedi fiyatının yönüne ve i . hisse senedinin değerlenmesine verdikleri önemin büyüklüğünü ifade eder (Caginalp ve Balenovich, 1999; Caginalp ve Merdan, 2007). Bu tanımlardaki $P_a^{(i)}(t)$, i . hisse senedinin esas (başka bir ifadeyle gerçek) değerini, yani yatırımcı grubun hisse sendi fiyatı için belirlediği değeri, $P^{(i)}(t)$ ise i . hisse senedinin t zamanındaki fiyatını ifade eder. Yatırımcı tercihleri için (2.2)-(2.3) denklemlerinin t 'ye göre türevleri Leibnitz kuralı kullanılarak alınırsa aşağıdaki diferensiyel denklemler elde edilir:

$$\frac{d\zeta_1^{(1)}}{dt} = c_1^{(1)} q_1^{(1)} \frac{1}{P^{(1)}} \frac{dP^{(1)}}{dt} - c_1^{(1)} \zeta_1^{(1)}, \quad (2.4)$$

$$\frac{d\zeta_2^{(1)}}{dt} = c_2^{(1)} q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)}(t) - P^{(1)}(t)}{P_a^{(1)}(t)} - c_2^{(1)} \zeta_2^{(1)}, \quad (2.5)$$

⁷Tezin sonraki kısımlarında "hisse senedi için belirlenen değere bağlı olarak hisse senedinin değerlenmesine ya da değer kaybetmesine" ifadesi yerine "hisse senedinin değerlenmesine" ifadesi kullanılacaktır.

$$\frac{d\zeta_1^{(2)}}{dt} = c_1^{(2)} q_1^{(2)} \frac{1}{P^{(2)}} \frac{dP^{(2)}}{dt} - c_1^{(2)} \zeta_1^{(2)}, \quad (2.6)$$

$$\frac{d\zeta_2^{(2)}}{dt} = c_2^{(2)} q_2^{(2)} \frac{P_a^{(2)}(t) - P^{(2)}(t)}{P_a^{(2)}(t)} - c_2^{(2)} \zeta_2^{(2)}. \quad (2.7)$$

Temel mikroekonomi prensiplerini kullanarak talep ve arz fonksiyonlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned} D^{(1)} &= k^{(1)}(t)M & \text{ve} & \quad D^{(2)} = k^{(2)}(t)M, \\ S^{(1)} &= \tilde{k}^{(1)}(t)N^{(1)}P^{(1)}(t) & \text{ve} & \quad S^{(2)} = \tilde{k}^{(2)}(t)N^{(2)}P^{(2)}(t). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Burada, M piyasadaki nakit miktarını, $N^{(1)}$ ve $N^{(2)}$ piyasadaki birinci hisse senedi ve ikinci hisse senedi sayılarını göstermektedir. Kapalı bir finansal piyasa ele alındığı için M , $N^{(1)}$ ve $N^{(2)}$ değerleri sabittir. Her bir hisse senedinin fiyatı aşırı talebe göre aşağıdaki şekilde belirlenir (Caginalp ve Balenovich, 1999):

$$\tau_1 \frac{1}{P^{(1)}} \frac{dP^{(1)}}{dt} = F_1 \left(\frac{D^{(1)}}{S^{(1)}} \right), \quad (2.9)$$

$$\tau_2 \frac{1}{P^{(2)}} \frac{dP^{(2)}}{dt} = F_2 \left(\frac{D^{(2)}}{S^{(2)}} \right). \quad (2.10)$$

Burada; τ_1 ve τ_2 zaman skalası ve F_i , $i = 1, 2$ için $F_i(1) = 0$ şartını sağlayan ve artan bir fonksiyondur; örneğin $F_i(x) = x - 1$ ya da $\log(x)$ olabilir. Böylece, (2.4)-(2.10) denklemleri, (2.1) deki cebirsel denklemler ile birlikte nitel olarak analiz edilebilecek ve nümerik olarak çözülebilecek bir dinamik sistem oluşturur:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1 \frac{1}{P^{(1)}} \frac{dP^{(1)}}{dt} = F_1 \left(\frac{D^{(1)}}{S^{(1)}} \right) \\ \tau_2 \frac{1}{P^{(2)}} \frac{dP^{(2)}}{dt} = F_2 \left(\frac{D^{(2)}}{S^{(2)}} \right) \\ \frac{d\zeta_1^{(1)}}{dt} = c_1^{(1)} q_1^{(1)} \frac{1}{P^{(1)}} \frac{dP^{(1)}}{dt} - c_1^{(1)} \zeta_1^{(1)} \\ \frac{d\zeta_2^{(1)}}{dt} = c_2^{(1)} q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)}(t) - P^{(1)}(t)}{P_a^{(1)}(t)} - c_2^{(1)} \zeta_2^{(1)} \\ \frac{d\zeta_1^{(2)}}{dt} = c_1^{(2)} q_1^{(2)} \frac{1}{P^{(2)}} \frac{dP^{(2)}}{dt} - c_1^{(2)} \zeta_1^{(2)} \\ \frac{d\zeta_2^{(2)}}{dt} = c_2^{(2)} q_2^{(2)} \frac{P_a^{(2)}(t) - P^{(2)}(t)}{P_a^{(2)}(t)} - c_2^{(2)} \zeta_2^{(2)}. \end{array} \right. \quad (2.11)$$

2.2 Lineer Kararlılık Analizi

Bu bölümde (2.11) sisteminin kararlılık yapısı incelenerek denge noktalarının kararlı olabilmesi için parametrelere bağlı koşullar belirlenecektir. Kararlılık analizi aşağıda verilen varsayımlar altında yapılacaktır:

- i. $F_1(x) = F_2(x) = x - 1$ ⁸.
- ii. $P_a^{(1)}$ ve $P_a^{(2)}$ sabit olmak üzere, $P_a^{(1)}(t) = P_a^{(1)} > 0$ $P_a^{(2)}(t) = P_a^{(2)} > 0$ dır.
- iii. $i = 1, 2$ için $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, q_1^{(i)}$ ve $q_2^{(i)}$ pozitif parametrelerdir.
- iv. $\tau_1 = \tau_2 = 1$.

(i)-(iv) varsayımları altında (2.11) sistemini yeniden ifade edersek aşağıdaki diferensiyel denklem sistemi elde edilir:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP^{(1)}}{dt} = \frac{k^{(1)}M}{\tilde{k}^{(1)}N^{(1)}} - P^{(1)} \\ \frac{dP^{(2)}}{dt} = \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}} - P^{(2)} \\ \frac{d\zeta_1^{(1)}}{dt} = c_1^{(1)}q_1^{(1)} \frac{k^{(1)}M}{\tilde{k}^{(1)}N^{(1)}P^{(1)}} - c_1^{(1)}q_1^{(1)} - c_1^{(1)}\zeta_1^{(1)} \\ \frac{d\zeta_2^{(1)}}{dt} = c_2^{(1)}q_2^{(1)} \left(1 - \frac{P^{(1)}}{P_a^{(1)}} \right) - c_2^{(1)}\zeta_2^{(1)} \\ \frac{d\zeta_1^{(2)}}{dt} = c_1^{(2)}q_1^{(2)} \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}P^{(2)}} - c_1^{(2)}q_1^{(2)} - c_1^{(2)}\zeta_1^{(2)} \\ \frac{d\zeta_2^{(2)}}{dt} = c_2^{(2)}q_2^{(2)} \left(1 - \frac{P^{(2)}}{P_a^{(2)}} \right) - c_2^{(2)}\zeta_2^{(2)}. \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Kararlılık analizi için, yatırımcı grubun her bir hisse senedini satın alırken veya satarken sadece tek bir duyarlılık fonksiyonundan etkilendiği, yani yatırımcıların alım satım kararı için sadece ya hisse senedi fiyatının yönüne bağlı duyarlılık fonksiyonunu ya da hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı duyarlılık fonksiyonunu dikkate aldığı varsayılmıştır. (2.12) sisteminin kararlılık analizi aşağıdaki üç durum için incelenmiştir:

Durum 1: Yatırımcıların hisse senedi fiyatının yönünü ve hisse senedinin

⁸ $F_i, i = 1, 2$, fonksiyonu $F_i(1) = 0$ koşulunu sağlayan artan bir fonksiyon olup (örneğin, $F(x) = x - 1$ veya $F(x) = \log(x)$), literatürde yer alan çalışmalarda yaygın olarak $F(x) = x - 1$ olarak alındığından bu tez çalışmasında da $F_1(x) = F_2(x) = x - 1$ olarak alınmıştır (Bakınız: Caginalp ve Merdan, 2007; Caginalp ve DeSantis, 2011; DeSantis ve diğ., 2012).

değerlenmesini dikkate almadan karar verdiği, yani $\zeta_j^{(i)}$ ($i, j = 1, 2$) duyarlılık fonksiyonlarının sabit olduğu ve buna bağlı olarak $k^{(1)}, k^{(2)}, \tilde{k}^{(1)}, \tilde{k}^{(2)}$ geçiş oranı fonksiyonlarının da sabit olduğu varsayılmıştır.

Durum 2: Tüm yatırımcıların sadece hisse senedinin değerlenmesine bağlı bir yatırım stratejisi izlediği varsayılmıştır.

Durum 3: Piyasadaki tüm yatırımcıların birinci hisse senedi alım satımı için o hisse senedinin değerlenmesine bağlı bir yatırım stratejisi, ikinci hisse senedi alım satımı için o hisse senedi fiyatının yönüne bağlı bir yatırım stratejisi izlediği varsayılmıştır.

2.2.1 Sabit yatırım stratejileri

Bu bölümde, $\zeta_1^{(i)}$ ve $\zeta_2^{(i)}$, $i = 1, 2$, duyarlılık fonksiyonlarının sabit olduğu; yani $k^{(i)}$ ve $\tilde{k}^{(i)}$, $i = 1, 2$, geçiş oranı fonksiyonlarının sabit olduğu varsayımı altında elde edilen dinamik sistemin kararlılık yapısı incelenmiştir. Bu varsayım altında (2.12) sistemi aşağıda verilen ayrık sisteme indirgenir:

$$\begin{cases} \frac{dP^{(1)}}{dt} = \frac{k^{(1)}M}{\tilde{k}^{(1)}N^{(1)}} - P^{(1)} \\ \frac{dP^{(2)}}{dt} = \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}} - P^{(2)}. \end{cases} \quad (2.13)$$

(2.13) sisteminin denge noktaları $(P_{eq}^{(1)}, P_{eq}^{(2)}) = \left(\frac{k^{(1)}M}{\tilde{k}^{(1)}N^{(1)}}, \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}} \right)$ dir.

Teorem 2.1. (2.13) sisteminin $(P_{eq}^{(1)}, P_{eq}^{(2)})$ denge noktası Lyapunov kararlı ve çekicidir, yani denge noktaları yerel asimptotik kararlıdır.

İspat. (2.13) sisteminin denge noktaları $(P_{eq}^{(1)}, P_{eq}^{(2)}) = \left(\frac{k^{(1)}M}{\tilde{k}^{(1)}N^{(1)}}, \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}} \right)$ kullanılarak, sistemdeki ilk denklem

$$\dot{P}^{(1)} = P_{eq}^{(1)} - P^{(1)} \quad (2.14)$$

şeklinde yazılabilir. (2.14) denklemini birinci mertebeden bir lineer diferensiyel denklemdir ve aşağıdaki çözüme sahiptir:

$$P^{(1)}(t) = P_{eq}^{(1)} + (P^{(1)}(0) - P_{eq}^{(1)})e^{-t}. \quad (2.15)$$

Benzer şekilde ikinci denklem

$$\dot{P}^{(2)} = P_{eq}^{(2)} - P^{(2)} \quad (2.16)$$

şeklinde yazılabilir ve denklemin çözümü $P^{(2)}(t) = P_{eq}^{(2)} + (P^{(2)}(0) - P_{eq}^{(2)})e^{-t}$ dir.

Dikkat edilirse

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^{(1)}(t) = P_{eq}^{(1)}, \quad (2.17)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^{(2)}(t) = P_{eq}^{(2)} \quad (2.18)$$

dir, yani (2.13) sisteminin denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.

2.2.2 Hisse senedinin değerlendirilmesine dayalı yatırım stratejileri

Bu bölümde, yatırımcı grubun her iki hisse senedi için de sadece hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı yatırım tercihlerine sahip olduğu, yani tüm yatırımcıların her bir hisse senedinin alım satım kararı için hisse senedinin piyasa değeri ($P^{(i)}(t)$) ile hisse senedi fiyatı için yatırımcı tarafından belirlenen değer arasındaki sapmayı dikkate aldığı varsayılmıştır. Bu varsayım altında (2.1) ile verilen geçiş oranı fonksiyonları aşağıdaki forma indirgenir:

$$\begin{cases} k^{(1)}(t) = k^{(1)}(\zeta_2^{(1)}(t), \zeta_2^{(2)}(t)) \\ \tilde{k}^{(1)}(t) = \tilde{k}^{(1)}(\zeta_2^{(1)}(t)) \\ k^{(2)}(t) = k^{(2)}(\zeta_2^{(1)}(t), \zeta_2^{(2)}(t)) \\ \tilde{k}^{(2)}(t) = \tilde{k}^{(2)}(\zeta_2^{(2)}(t)). \end{cases} \quad (2.19)$$

Dikkat edilirse geçiş oranı fonksiyonları sadece hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı duyarlılık fonksiyonlarına bağlıdır ve bu geçiş oranı fonksiyonları kullanılarak (2.12) sistemi aşağıdaki sisteme indirgenir:

$$\begin{cases} \frac{dP^{(1)}}{dt} = \frac{k^{(1)}M}{\tilde{k}^{(1)}N^{(1)}} - P^{(1)} \\ \frac{dP^{(2)}}{dt} = \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}} - P^{(2)} \\ \frac{d\zeta_2^{(1)}}{dt} = c_2^{(1)} q_2^{(1)} \left(1 - \frac{P^{(1)}}{P_a^{(1)}} \right) - c_2^{(1)} \zeta_2^{(1)} \\ \frac{d\zeta_2^{(2)}}{dt} = c_2^{(2)} q_2^{(2)} \left(1 - \frac{P^{(2)}}{P_a^{(2)}} \right) - c_2^{(2)} \zeta_2^{(2)}. \end{cases} \quad (2.20)$$

(2.20) sistemini vektör değerli diferensiyel denklem formunda aşağıdaki şekilde yeniden ifade edebiliriz:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X}). \quad (2.21)$$

Burada, $\mathbf{X} = (P^{(1)}, P^{(2)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_2^{(2)})^T$, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$ ve

$$\begin{aligned} f_1 &:= \frac{k^{(1)}M}{\tilde{k}^{(1)}N^{(1)}} - P^{(1)}, \\ f_2 &:= \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}} - P^{(2)}, \\ f_3 &:= c_2^{(1)}q_2^{(1)} \left(1 - \frac{P^{(1)}}{P_a^{(1)}} \right) - c_2^{(1)}\zeta_2^{(1)}, \\ f_4 &:= c_2^{(2)}q_2^{(2)} \left(1 - \frac{P^{(2)}}{P_a^{(2)}} \right) - c_2^{(2)}\zeta_2^{(2)} \end{aligned}$$

yazılabilir. Öncelikle (2.21) sisteminin denge noktaları bulalım. $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$ denkleminin çözümleri (2.21) sisteminin denge noktalarıdır ve

$$\begin{aligned} E_F^{eq} &= (P_{eq}^{(1)}, P_{eq}^{(2)}, \zeta_{2,eq}^{(1)}, \zeta_{2,eq}^{(2)}) \\ &= \left(P_{eq}^{(1)}, P_{eq}^{(2)}, q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)} - P_{eq}^{(1)}}{P_a^{(1)}}, q_2^{(2)} \frac{P_a^{(2)} - P_{eq}^{(2)}}{P_a^{(2)}} \right) \\ &= \left(\frac{k^{(1)}M}{\tilde{k}^{(1)}N^{(1)}}, \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}}, \zeta_{2,eq}^{(1)}, \zeta_{2,eq}^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

formundadır. Dikkat edilirse; burada iki tane bağımsız parametre vardır ve sistem sonsuz çoklukta denge noktasına sahiptir. (2.21) sisteminin E_F^{eq} denge noktasında hesaplanan Jakobiyan matrisi

$$J(E_F^{eq}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & a & b \\ 0 & -1 & c & d \\ e & 0 & -c_2^{(1)} & 0 \\ 0 & f & 0 & -c_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

olup a, b, c, d, e ve f aşağıda ifade edilmiştir:

$$a = \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) = \frac{M}{N^{(1)}} \frac{\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} \tilde{k}^{(1)} - \frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} k^{(1)}}{(\tilde{k}^{(1)})^2},$$

$$\begin{aligned}
b &= \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) = \frac{M}{\tilde{k}^{(1)} 2N^{(1)}} \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}, \\
c &= \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) = \frac{M}{\tilde{k}^{(2)} N^{(2)}} \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}, \\
d &= \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) = \frac{M}{N^{(2)}} \frac{\frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}} \tilde{k}^{(2)} - \frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}} k^{(2)}}{(\tilde{k}^{(2)})^2}, \\
e &= \frac{\partial f_3}{\partial P^{(1)}}(E_F^{eq}) = \frac{-c_2^{(1)} q_2^{(1)}}{P_a^{(1)}}, \\
f &= \frac{\partial f_4}{\partial P^{(2)}}(E_F^{eq}) = \frac{-c_2^{(2)} q_2^2}{P_a^{(2)}}.
\end{aligned}$$

Kararlılık analizi için kullanılan varsayımlar gereğince, $c_2^{(1)}$, $c_2^{(2)}$, $q_2^{(1)}$, $q_2^{(2)}$ parametreleri ve $P_a^{(1)}$, $P_a^{(2)}$ pozitif olduğundan $e < 0$ ve $f < 0$ dir. $J(E_F^{eq})$ jakobiyen matrisinin karakteristik denklemi aşağıdaki denklem ile ifade edilir:

$$Q_F(\lambda) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0. \quad (2.24)$$

Burada, karakteristik denklemin katsayıları

$$\begin{aligned}
a_1 &= c_2^{(1)} + c_2^{(2)} + 2, \\
a_2 &= 2c_2^{(1)} + 2c_2^{(2)} + c_2^{(1)} c_2^{(2)} - ea - df + 1, \\
a_3 &= c_2^{(1)} + c_2^{(2)} + 2c_2^{(1)} c_2^{(2)} - ea - df - eac_2^{(2)} - dfc_2^{(1)}, \\
a_4 &= c_2^{(1)} c_2^{(2)} - eac_2^{(2)} - dfc_2^{(1)} + ef(ad - bc)
\end{aligned}$$

dir. $Q_F(\lambda)$ karakteristik denkleminin tüm köklerinin reel kısmının negatif olması, yani (2.20) sisteminin E_F^{eq} denge noktasının kararlı olması için parametreler üzerine konması gereken şartlar aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.2. *Eğer*

$$\mathbf{C1:} \quad \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) > 0, \quad \frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) < 0,$$

$$\mathbf{C2:} \quad \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) > 0, \quad \frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) < 0,$$

$$\mathbf{C3:} \quad \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) < 0, \quad \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) < 0,$$

$$\mathbf{C4:} \quad \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) > \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq})$$

şartları sağlanıyor ise (2.24) karakteristik denkleminin kökleri negatif reel kısma sahiptir. Yani (2.20) sisteminin denge noktaları yerel asimptotik kararlıdır.

İspat. *Routh-Hurwitz Teoremi bir polinomun köklerinin kompleks düzlemin sol tarafında yatması, yani köklerin reel kısmının negatif olması için gerek ve yeter şartları vermektedir (Linda, 2007). Buna göre; (2.24) karakteristik denkleminin tüm köklerinin negatif reel kısma sahip olması için gerek ve yeter şart*

$$(1) \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0$$

$$(2) \quad a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$$

koşullarının sağlanmasıdır.

*Kararlılık analizi için kullanılan varsayımlar gereğince $c_2^{(1)}$ ve $c_2^{(2)}$ parametreleri pozitif olduğundan a_1 katsayısı her zaman pozitiftir. Eğer **C1** ve **C2** şartları sağlanırsa,*

$$a = \frac{M}{N^{(1)}} \frac{\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} \tilde{k}^{(1)} - \frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} k^{(1)}}{(\tilde{k}^{(1)})^2} > 0,$$

$$d = \frac{M}{N^{(2)}} \frac{\frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}} \tilde{k}^{(2)} - \frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}} k^{(2)}}{(\tilde{k}^{(2)})^2} > 0$$

olur ve tüm parametrelerin pozitif olduğu varsayımı altında $e < 0$ ve $f < 0$ olduğundan a_3 katsayısı tanımı gereği pozitif olur.

*Dikkat edilirse a_4 katsayısının ilk üç terimi, eğer **C1** ve **C2** şartları sağlanırsa pozitif olur. O halde a_4 katsayısının pozitif olması için aşağıda verilen $ad - bc$ teriminin de*

pozitif olması gerekir:

$$ad - bc = \frac{M^2}{N^{(1)}N^{(2)}(\tilde{k}^{(1)})^2(\tilde{k}^{(2)})^2} \begin{bmatrix} k^{(1)}k^{(2)} \left(\frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} \frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}} \right) \\ -k^{(1)}\tilde{k}^{(2)} \left(\frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}} \right) \\ -\tilde{k}^{(1)}k^{(2)} \left(\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} \frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}} \right) \\ +\tilde{k}^{(1)}\tilde{k}^{(2)} \left(\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}} - \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(2)}} \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} \right) \end{bmatrix}.$$

Eğer **C3** ve **C4** şartları sağlanırsa, $ad - bc > 0$ olur. Sonuç olarak, eğer **C1**, **C2**, **C3** ve **C4** şartları sağlanırsa $a_4 > 0$ şartı sağlanır.

Son olarak yukarıda verilen şartlar altında aşağıda verilen $a_1a_2a_3 > a_3^2 + a_1^2a_4$ koşulunun sağlandığını gösterelim:

$$\begin{aligned} a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 = & -fd[3(c_2^{(1)})^2c_2^{(2)} + 4c_2^{(1)}(c_2^{(2)})^2 + 7c_2^{(1)}c_2^{(2)} + 2(c_2^{(1)})^2 + 3c_2^{(1)} \\ & + 3(c_2^{(2)})^2 + 5c_2^{(2)} + (c_2^{(1)})^3c_2^{(2)} + (c_2^{(1)})^2(c_2^{(2)})^2 + 2(c_2^{(1)})^3 + 2] \\ & -ae[(c_2^{(1)})^2(c_2^{(2)})^2 + 3(c_2^{(1)})^2c_2^{(2)} + 7c_2^{(1)}c_2^{(2)} + 3(c_2^{(1)})^2 + 5c_2^{(1)} \\ & + 2(c_2^{(2)})^2 + 3c_2^{(2)} + (c_2^{(1)})^2(c_2^{(2)})^2 + c_2^{(1)}(c_2^{(2)})^3 + 2(c_2^{(2)})^3 + 2] \\ & + (ae - fd)^2 [c_2^{(1)} + c_2^{(1)}c_2^{(2)} + c_2^{(2)} + 1] \\ & +efbc [(c_2^{(1)})^2 + (c_2^{(2)})^2 + 2c_2^{(1)}c_2^{(2)} + 4c_2^{(1)} + 4c_2^{(2)} + 4] \\ & + 2(c_2^{(1)})^3(c_2^{(2)})^2 + 2(c_2^{(2)})^3(c_2^{(1)})^2 + 8(c_2^{(1)})^2(c_2^{(2)})^2 + 4(c_2^{(1)})^3c_2^{(2)} \\ & + 10(c_2^{(1)})^2c_2^{(2)} + 4c_2^{(1)}(c_2^{(2)})^3 + 10c_2^{(1)}(c_2^{(2)})^2 + 8c_2^{(1)}c_2^{(2)} + 2(c_2^{(1)})^3 \\ & + 4(c_2^{(1)})^2 + 2c_2^{(1)} + 2(c_2^{(2)})^3 + 4(c_2^{(2)})^2 + 2c_2^{(2)}. \end{aligned}$$

Eğer **C1**, **C2**, **C3** şartları sağlanırsa, $fd < 0$, $ae < 0$, $efbc > 0$ olup $a_1a_2a_3 - a_3^2 - a_1^2a_4 > 0$ koşulu tüm pozitif $c_2^{(1)}$ ve $c_2^{(2)}$ parametreleri için gerçekleşir.

Sonuç olarak, eğer **C1**, **C2**, **C3** ve **C4** şartları sağlanırsa Routh-Hurwitz Teoremi gereğince (2.24) karakteristik denkleminin tüm kökleri negatif reel kısma sahiptir; yani (2.20) sisteminin (2.22) denge noktaları yerel asimptotik kararlıdır.

Teorem 2.2'nin finansal piyasalar açısından yorumu. Teorem 2.2'ye göre yatırım kararlarını hisse senedinin değerlenmesine ya da değer kaybetmesine göre alan bir yatırımcı grubu içeren bir sistemin denge noktası **C1**, **C2**, **C3** ve **C4** şartları sağlanırsa

kararlıdır. **C1** şartına göre birinci hisse senedini satın alma olasılığı bu hisse senedine bağlı duyarlılık fonksiyonu arttıkça artar ya da azaldıkça azalır ve hisse senedinin satma olasılığı için ise tam tersi geçerlidir yani; birinci hisse senedini satma olasılığı bu hisse senedine bağlı duyarlılık fonksiyonu arttıkça azalır (ya da tam tersi geçerlidir). **C2** şartı ise ikinci hisse senedi için de **C1** şartı ile verilen açıklamanın geçerli olduğunu söyler. **C3** şartına göre bir hisse senedini satın alma olasılığı diğer hisse senedine bağlı duyarlılık fonksiyonu arttıkça azalır. **C4** şartı ile her bir hisse senedine bağlı duyarlılık fonksiyonunun hisse senedinin satın alma olasılığı üzerine etkisi her bir hisse senedine bağlı duyarlılık fonksiyonun diğer hisse senedinin satın alma olasılığı üzerine etkisinden daha fazla olacağı vurgulanmıştır. Son şarttaki durum, her bir hisse senedine bağlı duyarlılık fonksiyonun kendi hisse senedinin satın alma olasılığı üzerindeki etkisinin, diğer hisse senedini satın alma olasılığı üzerindeki etkisinden daha büyük olması şartıyla garanti edilebilir.

2.2.3 Farklı etkilere dayalı yatırım stratejileri

Bu bölümde, yatırımcıların her bir hisse senedi için farklı yönde yatırım stratejileri izlediği varsayılarak (2.12) sisteminin kararlılık yapısı incelenecektir. Yatırımcı grubun birinci hisse senedi alım satımı için o hisse senedi fiyatının gerçek değeri ile t anındaki fiyatı arasında oluşan farka (yani hisse senedinin değerlenmesine ya da değer kaybetmesine) bağlı bir yatırım stratejisi, ikinci hisse senedi alım satımı için de hisse senedi fiyatının yönüne bağlı bir yatırım stratejisi izlediği kabul edilmiştir. Bu varsayım altında geçiş oranı fonksiyonları aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{cases} k^{(1)}(t) = k^{(1)}(\zeta_2^{(1)}(t), \zeta_1^{(2)}(t)) \\ \tilde{k}^{(1)}(t) = \tilde{k}^{(1)}(\zeta_2^{(1)}(t)) \\ k^{(2)}(t) = k^{(2)}(\zeta_2^{(1)}(t), \zeta_1^{(2)}(t)) \\ \tilde{k}^{(2)}(t) = \tilde{k}^{(2)}(\zeta_1^{(2)}(t)). \end{cases} \quad (2.25)$$

Dikkat edilirse, geçiş oranı fonksiyonları sadece $\zeta_2^{(1)}$ ve $\zeta_1^{(2)}$ fonksiyonlarına bağlıdır. Böylece (2.12) sistemi

$$\begin{cases} \frac{dP^{(1)}}{dt} = \frac{k^{(1)}M}{\tilde{k}^{(1)}N^{(1)}} - P^{(1)} \\ \frac{dP^{(2)}}{dt} = \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}} - P^{(2)} \\ \frac{d\zeta_2^{(1)}}{dt} = c_2^{(1)}q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)} - P^{(1)}}{P_a^{(1)}} - c_2^{(1)}\zeta_2^{(1)} \\ \frac{d\zeta_1^{(2)}}{dt} = c_1^{(2)}q_1^{(2)} \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}P^{(2)}} - c_1^{(2)}q_1^{(2)} - c_1^{(2)}\zeta_1^{(2)} \end{cases} \quad (2.26)$$

sistemine indirgenir. (2.26) sistemi vektör değerli diferensiyel denklem formunda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X}). \quad (2.27)$$

Burada, $\mathbf{X} = (P^{(1)}, P^{(2)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_1^{(2)})^T$, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$ ve

$$\begin{aligned} f_1 &:= \frac{k^{(1)}M}{\tilde{k}^{(1)}N^{(1)}} - P^{(1)}, \\ f_2 &:= \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}} - P^{(2)}, \\ f_3 &:= c_2^{(1)} q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)} - P^{(1)}}{P_a^{(1)}} - c_2^{(1)} \zeta_2^{(1)}, \\ f_4 &:= c_1^{(2)} q_1^{(2)} \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}P^{(2)}} - c_1^{(2)} q_1^{(2)} - c_1^{(2)} \zeta_1^{(2)} \end{aligned}$$

dir. (2.27) sisteminin denge noktaları

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

denklemini çözülerek elde edilir. $f_1 = 0$ ve $f_2 = 0$ denklemlerinden

$$P_{eq}^{(1)} = \frac{k^{(1)}M}{\tilde{k}^{(1)}N^{(1)}}, \quad (2.28)$$

$$P_{eq}^{(2)} = \frac{k^{(2)}M}{\tilde{k}^{(2)}N^{(2)}} \quad (2.29)$$

elde edilir. $f_4 = 0$ ile (2.29) denklemini birlikte çözülürse $\zeta_{1,eq}^{(2)} = 0$ olduğu görülür.

Son olarak, $f_3 = 0$ denklemini çözülürse

$$\zeta_{2,eq}^{(1)} = q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)} - P_{eq}^{(1)}}{P_a^{(1)}} \quad (2.30)$$

elde edilir. Sonuç olarak (2.27) sisteminin denge noktaları

$$\begin{aligned} E_V^{eq} &= (P_{eq}^{(1)}, P_{eq}^{(2)}, \zeta_{2,eq}^{(1)}, \zeta_{1,eq}^{(2)}) \\ &= \left(P_{eq}^{(1)}, P_{eq}^{(2)}, q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)} - P_{eq}^{(1)}}{P_a^{(1)}}, 0 \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

formundadır. (2.27) sisteminin E_V^{eq} denge noktasında hesaplanan Jakobiyen matrisi

$$J(E_V^{eq}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & a & b \\ 0 & -1 & c & d \\ f & 0 & -c_2^{(1)} & 0 \\ 0 & e & -ec & -ed - c_1^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

olup, burada

$$a = \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_V^{eq}) = \frac{M}{N^{(1)}} \frac{\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} \tilde{k}^{(1)} - \frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} k^{(1)}}{(\tilde{k}^{(1)})^2},$$

$$b = \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_V^{eq}) = \frac{M}{\tilde{k}^{(1)} N^{(1)}} \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_1^{(2)}},$$

$$c = \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_V^{eq}) = \frac{M}{\tilde{k}^{(2)} N^{(2)}} \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}},$$

$$d = \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_V^{eq}) = \frac{M}{N^{(2)}} \frac{\frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(2)}} \tilde{k}^{(2)} - \frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(2)}} k^{(2)}}{(\tilde{k}^{(2)})^2},$$

$$e = \frac{\partial f_4}{\partial P^{(2)}}(E_V^{eq}) = -\frac{c_1^{(2)} q_1^{(2)}}{P_{eq}^{(2)}},$$

$$f = \frac{\partial f_3}{\partial P^{(1)}}(E_V^{eq}) = -\frac{c_2^{(1)} q_2^{(1)}}{P_a^{(1)}}$$

dir. $J(E_V^{eq})$ Jakobiyen matrisinin karakteristik denklemi

$$Q_V(\lambda) = \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (2.33)$$

ile verilir ve katsayılar ise

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 + de + c_1^{(2)} + c_2^{(1)}, \\ a_2 &= 2c_1^{(2)} + 2c_2^{(1)} + c_1^{(2)} c_2^{(1)} + ed - af + edc_2^{(1)} + 1, \\ a_3 &= c_1^{(2)} + c_2^{(1)} + 2c_1^{(2)} c_2^{(1)} - af + edc_2^{(1)} - afc_1^{(2)} \\ &\quad - eadf + ebcf, \\ a_4 &= c_1^{(2)} c_2^{(1)} - afc_1^{(2)} \end{aligned}$$

dir. (2.26) sisteminin denge noktalarının kararlı olması için parametreler üzerine

konması gereken şartlar aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.3. *Eğer*

$$\mathbf{K1:} \quad \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_V^{eq}) > 0, \quad \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_V^{eq}) < 0, \quad \frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_V^{eq}) < 0,$$

$$\frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_V^{eq}) < 0, \quad \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_V^{eq}) > 0, \quad \frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_V^{eq}) < 0,$$

$$\mathbf{K2:} \quad 1 - \frac{Mq_1^{(2)}}{N^{(2)}P_{eq}^{(2)}} \frac{\frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(2)}}\tilde{k}^{(2)} - \frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(2)}}k^{(2)}}{(\tilde{k}^{(2)})^2} > 0,$$

$$\mathbf{K3:} \quad c_2^{(1)} + 1 - 2c_1^{(2)} > 0,$$

$$\mathbf{K4:} \quad 1 - \frac{Mc_2^{(1)}q_2^{(1)}}{N^{(1)}P_a^{(1)}} \frac{\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}\tilde{k}^{(1)} - \frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}k^{(1)}}{(\tilde{k}^{(1)})^2} > 0,$$

$$\mathbf{K5:} \quad 1 - \frac{M^2c_2^{(1)}q_2^{(1)}q_1^{(2)}}{N^{(1)}N^{(2)}P_a^{(1)}P_{eq}^{(2)}} \frac{\left(\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_1^{(2)}}\right) \left(\frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}\right)}{\tilde{k}^{(1)}\tilde{k}^{(2)}} > 0$$

şartları sağlanırsa (2.26) sisteminin denge noktası yerel asimptotik kararlıdır.

İspat. (2.26) sisteminin denge noktasının yerel asimptotik kararlı olması için (2.33) karakteristik denkleminin köklerinin ya reel ve negatif ya da kompleks ve negatif reel kısma sahip olması gerekmektedir. Buna göre, Routh-Hurwitz Teoremi gereğince $Q_V(\lambda)$ denkleminin köklerinin negatif reel kısma sahip olması için gerek ve yeter şart

$$(1) \quad a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_4 > 0$$

$$(2) \quad a_1a_2a_3 > a_3^2 + a_1^2a_4$$

şartlarının sağlanmasıdır.

$U = c_1^{(2)} + de$ olmak üzere, $Q_V(\lambda)$ karakteristik denkleminin katsayıları aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$a_1 = c_2^{(1)} + U + 2,$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= c_1^{(2)} + 2c_2^{(1)} + c_2^{(1)}U + U - af + 1, \\
a_3 &= c_1^{(2)} + c_2^{(1)} + c_1^{(2)}c_2^{(1)} + c_2^{(1)}U - af - afU + ebcf, \\
a_4 &= c_1^{(2)}c_2^{(1)} - afc_1^{(2)}.
\end{aligned}$$

Eğer **(K1)** şartı sağlanırsa

$$a = \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_V^{eq}) = \frac{M}{N^{(1)}} \frac{\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} \tilde{k}^{(1)} - \frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} k^{(1)}}{(\tilde{k}^{(1)})^2} > 0,$$

$$b = \frac{\partial f_1}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_V^{eq}) = \frac{M}{\tilde{k}^{(1)} N^{(1)}} \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_1^{(2)}} < 0,$$

$$c = \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_V^{eq}) = \frac{M}{\tilde{k}^{(2)} N^{(2)}} \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}} < 0,$$

$$d = \frac{\partial f_2}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_V^{eq}) = \frac{M}{N^{(2)}} \frac{\frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(2)}} \tilde{k}^{(2)} - \frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(2)}} k^{(2)}}{(\tilde{k}^{(2)})^2} > 0$$

olur. Dikkat edilirse; $q_2^{(1)}$, $q_1^{(2)}$, $c_2^{(1)}$, $c_1^{(2)}$ parametreleri pozitif ve $P_a^{(1)} > 0$, $P_{eq}^{(2)} > 0$ olduğundan $e < 0$ ve $f < 0$ dir. O halde, eğer **K2** şartı da sağlanırsa $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$ olur yani Routh-Hurwitz Teoreminin ilk şartı gerçekleşir.

Şimdi de Routh-Hurwitz Teoreminin ikinci şartını inceleyelim. Öncelikle, $V = c_2^{(1)} - af$, $Y = ebcf$, $Z = c_2^{(1)} + 1$ şeklinde tanımlayalım. Eğer **K1** şartı sağlanırsa $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$ olduğundan $V > 0$, $Y > 0$ olur ve Z tanımı gereği pozitifdir. V , Y , Z kullanılarak $Q_V(\lambda)$ karakteristik denkleminin katsayıları a_1 , a_2 , a_3 , a_4 ve Routh-Hurwitz Teoriminin ikinci şartı $a_1 a_2 a_3 > a_3^2 + a_1^2 a_4$ aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\begin{aligned}
a_1 &= U + Z + 1, \\
a_2 &= c_1^{(2)} + Z + V + UZ, \\
a_3 &= c_1^{(2)}Z + V + UV + Y, \\
a_4 &= c_1^{(2)}V,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 &= U^3 V Z + U^2 V Z^2 + 3U^2 V Z + U^2 Y Z \\
&\quad + U^2 Z^2 c_1^{(2)} + UV^2 Z - UVY + 2UVZ^2 \\
&\quad - 2UVZc_1^{(2)} + 3UVZ + UYZ^2 + 2UYZ \\
&\quad + UYc_1^{(2)} + UZ^3 c_1^{(2)} + 2UZ^2 c_1^{(2)} + UZ(c_1^{(2)})^2 \\
&\quad + V^2 Z + VYZ - VY + VZ^2 - 2VZc_1^{(2)} \\
&\quad + VZ - Y^2 + YZ^2 - YZc_1^{(2)} \\
&\quad + YZ + Yc_1^{(2)} + Z^3 c_1^{(2)} + Z^2 c_1^{(2)} + Z(c_1^{(2)})^2 \\
&= 2UYZ - UVY + YZ - VY \\
&\quad + 2UVZ^2 - 2UVZc_1^{(2)} + VZ^2 - 2VZc_1^{(2)} \\
&\quad + Yc_1^{(2)} - Y^2 + Z(c_1^{(2)})^2 - YZc_1^{(2)} \\
&\quad + [\text{pozitif terimler}] \\
&= \underbrace{2UVZ(Z - c_1^{(2)})}_{(T_1)} + \underbrace{VZ(Z - 2c_1^{(2)})}_{(T_2)} \\
&\quad + \underbrace{UY(2Z - V)}_{(T_3)} + \underbrace{Y(Z - V)}_{(T_4)} \\
&\quad + \underbrace{Y(c_1^{(2)} - Y)}_{(T_5)} + \underbrace{Zc_1^{(2)}(c_1^{(2)} - Y)}_{(T_6)} \\
&\quad + [\text{pozitif terimler}].
\end{aligned}$$

- Eğer $Z - 2c_1^{(2)} = c_2^{(1)} + 1 - 2c_1^{(2)} > 0$ ise, $(T_1) > 0$ (Çünkü, eğer $Z - 2c_1^{(2)} > 0$ ise, $Z - c_1^{(2)} > 0$.) ve $(T_2) > 0$ dir.
- Eğer $Z - V = c_2^{(1)} + 1 - c_2^{(1)} + af = 1 + af > 0$ ise, $(T_3) > 0$ (Çünkü, eğer $Z - V > 0$ ise, $2Z - V > 0$.) ve $(T_4) > 0$ dir.
- Eğer
$$c_1^{(2)} - Y = c_1^{(2)} - bcef = c_1^{(2)} - bc \frac{c_2^{(1)} q_2^{(1)}}{P_a^{(1)}} \frac{c_1^{(2)} q_1^{(2)}}{P_{eq}^{(2)}} = c_1^{(2)} \left(1 - bc \frac{c_2^{(1)} q_2^{(1)} q_1^{(2)}}{P_a^{(1)} P_{eq}^{(2)}}\right) > 0$$
ise, $(T_5) > 0$ ve $(T_6) > 0$ dir.

Sonuç olarak **K1**, **K2**, **K3**, **K4**, **K5** şartları sağlanırsa, $a_1 > 0$, $a_3 > 0$, $a_4 > 0$ ve $a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0$ olup Routh-Hurwitz Teoremi gereğince $Q_V(\lambda)$ karakteristik denkleminin tüm kökleri negatif reel kısma sahiptir. Yani, (2.26) sisteminin denge noktası yerel asimptotik karardır.

Teorem 2.3'ün finansal piyasalar açısından yorumu. **K1** şartına göre birinci hisse senedini satın alma olasılığı bu hisse senedinin değerlenmesine bağlı duyarlılık fonksiyonu arttıkça artar fakat ikinci hisse senedinin fiyatının yönüne bağlı duyarlılık fonksiyonu arttıkça azalır ve birinci hisse senedini satma olasılığı bu hisse senedinin

değerlenmesine bağlı duyarlılık fonksiyonu arttıkça azalır; ikinci hisse senedini satın alma olasılığı ise birinci hisse senedinin değerlenmesine bağlı duyarlılık fonksiyonu arttıkça azalırken bu hisse senedinin fiyatının yönüne bağlı duyarlılık fonksiyonu arttıkça artar ve ikinci hisse senedini satma olasılığı bu hisse senedi fiyatının yönüne bağlı duyarlılık fonksiyonu arttıkça azalır. **K2** şartı, ikinci hisse senedini satın alma olasılığının bu hisse senedini satma olasılığına oranındaki değişim ikinci hisse senedi fiyatının yönüne bağlı duyarlılık fonksiyonuna fazla bağlı olamayacağını söyler. **K3** şartı gereğince yatırımcılar ikinci hisse senedi fiyatındaki değişimlere daha yavaş tepki vermelidir. **K4** şartına göre birinci hisse senedini satın alma olasılığının bu hisse senedini satma olasılığına oranındaki değişim birinci hisse senedinin değerlenmesine bağlı duyarlılık fonksiyonuna fazla bağlı olamayacaktır. Son olarak, **K5** şartı birinci hisse senedinin değerlenmesine bağlı duyarlılık fonksiyonun ikinci hisse senedini satın alma olasılığı üzerindeki etkisi ile ikinci hisse senedinin fiyatının yönüne bağlı duyarlılık fonksiyonun birinci hisse senedini satın alma olasılığı üzerindeki etkisinin çarpımının küçük olması gerektiğini vurgular.



3. İKİ HİSSE SENEDİ VE BİR YATIRIMCI GRUP İÇEREN FİNANSAL PİYASA MODELİ İÇİN BİR ÖRNEK

Bölüm 2’de (2.1) ile verilen denklemler yatırımcı grubun "hisse senedi satın alırken hem satın alacağı hisse senedinin hem de diğer hisse senedinin fiyatına göre karar verdiği; fakat hisse senedi satarken sadece satacağı hisse senedinin fiyatına göre karar verdiği" varsayımı altında tanımlanan geçiş oranı fonksiyonlarının en genel halini temsil etmektedir. Bu bölümde ise geçiş oranı fonksiyonları özel olarak tanımlanarak elde edilecek deterministik modelin kararlılık yapısı incelenecektir. Buna göre geçiş oranı fonksiyonları (2.1) denklemleri için bir örnek oluşturacak şekilde aşağıdaki formda seçilmiştir:

$$\begin{cases} k^{(1)}(t) & := \frac{1}{8}(1 + \tanh(\zeta_1^{(1)}(t) + \zeta_2^{(1)}(t)))(3 + \tanh(-\zeta_1^{(2)}(t) - \zeta_2^{(2)}(t))) \\ k^{(2)}(t) & := \frac{1}{8}(1 + \tanh(\zeta_1^{(2)}(t) + \zeta_2^{(2)}(t)))(3 + \tanh(-\zeta_1^{(1)}(t) - \zeta_2^{(1)}(t))) \\ \tilde{k}^{(1)}(t) & := \frac{1}{2}(1 - \tanh(\zeta_1^{(1)}(t) + \zeta_2^{(1)}(t))) \\ \tilde{k}^{(2)}(t) & := \frac{1}{2}(1 - \tanh(\zeta_1^{(2)}(t) + \zeta_2^{(2)}(t))). \end{cases} \quad (3.1)$$

Burada, geçiş oranı fonksiyonları hisse senedini satın alma veya satma olasılıklarını ifade ettiğinden $k^{(1)}, k^{(2)}, \tilde{k}^{(1)}, \tilde{k}^{(2)} \in [0, 1]$ dir⁹. (3.1)’de verilen fonksiyonları başka şekilde tanımlamak da mümkündür (Bakınız EK 2).

(3.1) denklemleri (2.11) sisteminde yerine yazılarak

$$\begin{cases} \tau_1 \frac{1}{P^{(1)}} \frac{dP^{(1)}}{dt} = F_1 \left(\frac{M(1 + \tanh(\zeta_1^{(1)} + \zeta_2^{(1)}))(3 + \tanh(-\zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(2)}))}{4N^{(1)}P^{(1)}(1 - \tanh(\zeta_1^{(1)} + \zeta_2^{(1)}))} \right) \\ \tau_2 \frac{1}{P^{(2)}} \frac{dP^{(2)}}{dt} = F_2 \left(\frac{M(1 + \tanh(\zeta_1^{(2)} + \zeta_2^{(2)}))(3 + \tanh(-\zeta_1^{(1)} - \zeta_2^{(1)}))}{4N^{(2)}P^{(2)}(1 - \tanh(\zeta_1^{(2)} + \zeta_2^{(2)}))} \right) \\ \frac{d\zeta_1^{(1)}}{dt} = c_1^{(1)} q_1^{(1)} \frac{1}{P^{(1)}} \frac{dP^{(1)}}{dt} - c_1^{(1)} \zeta_1^{(1)} \\ \frac{d\zeta_2^{(1)}}{dt} = c_2^{(1)} q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)}(t) - P^{(1)}(t)}{P_a^{(1)}(t)} - c_2^{(1)} \zeta_2^{(1)} \\ \frac{d\zeta_1^{(2)}}{dt} = c_1^{(2)} q_1^{(2)} \frac{1}{P^{(2)}} \frac{dP^{(2)}}{dt} - c_1^{(2)} \zeta_1^{(2)} \\ \frac{d\zeta_2^{(2)}}{dt} = c_2^{(2)} q_2^{(2)} \frac{P_a^{(2)}(t) - P^{(2)}(t)}{P_a^{(2)}(t)} - c_2^{(2)} \zeta_2^{(2)} \end{cases} \quad (3.2)$$

sistemi elde edilir.

⁹Geçiş oranı fonksiyonları tanh fonksiyonu kullanılarak tanımlanmıştır. Bu nedenle, görüntü kümesi $[0, 1]$ aralığında bulunur. Geçiş oranı fonksiyonları başka fonksiyonlar (örneğin Sigmoid fonksiyonu gibi) kullanılarak da tanımlanabilir.

(3.2) sisteminin kararlılık analizi aşağıdaki varsayımlar altında yapılmıştır:

- i. $F_1(x) = F_2(x) = x - 1$.
- ii. $|\zeta_1^{(1)}(t) + \zeta_2^{(1)}(t)| < \epsilon_1$ ve $|\zeta_1^{(2)}(t) + \zeta_2^{(2)}(t)| < \epsilon_2$ dir, burada ϵ_1 ve ϵ_2 yeterince küçük pozitif sayılardır.
- iii. Hesaplamaları kolaylaştırmak için \tanh fonksiyonunun Taylor seri açılımı kullanılmıştır, yani $\tanh(x) \simeq x$ yaklaşımı kullanılmıştır.

Böylece, ii. ve iii. varsayımları gereğince geçiş oranı fonksiyonları

$$\begin{cases} k^{(1)}(t) \approx \frac{1}{8}(1 + \zeta_1^{(1)}(t) + \zeta_2^{(1)}(t))(3 - \zeta_1^{(2)}(t) - \zeta_2^{(2)}(t)) \\ k^{(2)}(t) \approx \frac{1}{8}(1 + \zeta_1^{(2)}(t) + \zeta_2^{(2)}(t))(3 - \zeta_1^{(1)}(t) - \zeta_2^{(1)}(t)) \\ \tilde{k}^{(1)}(t) \approx \frac{1}{2}(1 - \zeta_1^{(1)}(t) - \zeta_2^{(1)}(t)) \\ \tilde{k}^{(2)}(t) \approx \frac{1}{2}(1 - \zeta_1^{(2)}(t) - \zeta_2^{(2)}(t)) \end{cases} \quad (3.3)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.

- iv. $P_a^{(1)}(t) = P_a^{(1)} > 0$ ve $P_a^{(2)}(t) = P_a^{(2)} > 0$, burada $P_a^{(1)}$ ve $P_a^{(2)}$ sabittir.
- v. $i = 1, 2$ için $c_1^{(i)}, c_2^{(i)}, q_1^{(i)}$ ve $q_2^{(i)}$ parametreleri pozitiftir.
- vi. $\tau_1 = \tau_2 = 1$.

Yukarıda verilen varsayımlar altında, (3.2) sistemi aşağıdaki sisteme dönüşür:

$$\begin{cases} \frac{dP^{(1)}}{dt} = \frac{M(1 + \zeta_1^{(1)} + \zeta_2^{(1)})(3 - \zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(2)})}{4N^{(1)}(1 - \zeta_1^{(1)} - \zeta_2^{(1)})} - P^{(1)} \\ \frac{dP^{(2)}}{dt} = \frac{M(1 + \zeta_1^{(2)} + \zeta_2^{(2)})(3 - \zeta_1^{(1)} - \zeta_2^{(1)})}{4N^{(2)}(1 - \zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(2)})} - P^{(2)} \\ \frac{d\zeta_1^{(1)}}{dt} = c_1^{(1)} q_1^{(1)} \frac{M(1 + \zeta_1^{(1)} + \zeta_2^{(1)})(3 - \zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(2)})}{4N^{(1)}(1 - \zeta_1^{(1)} - \zeta_2^{(1)})P^{(1)}} - c_1^{(1)} q_1^{(1)} - c_1^{(1)} \zeta_1^{(1)} \\ \frac{d\zeta_2^{(1)}}{dt} = c_2^{(1)} q_2^{(1)} \left(1 - \frac{P^{(1)}}{P_a^{(1)}} \right) - c_2^{(1)} \zeta_2^{(1)} \\ \frac{d\zeta_1^{(2)}}{dt} = c_1^{(2)} q_1^{(2)} \frac{M(1 + \zeta_1^{(2)} + \zeta_2^{(2)})(3 - \zeta_1^{(1)} - \zeta_2^{(1)})}{4N^{(2)}(1 - \zeta_1^{(2)} - \zeta_2^{(2)})P^{(2)}} - c_1^{(2)} q_1^{(2)} - c_1^{(2)} \zeta_1^{(2)} \\ \frac{d\zeta_2^{(2)}}{dt} = c_2^{(2)} q_2^{(2)} \left(1 - \frac{P^{(2)}}{P_a^{(2)}} \right) - c_2^{(2)} \zeta_2^{(2)}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Dikkat edilirse, (3.4) sistemi (2.12) sistemi için bir örnek teşkil eder. Bir kez daha, yatırımcı grubun hisse senedi alım satımı için sadece bir duyarlılık fonksiyonundan

etkilendiği varsayılmıştır ve (3.4) sisteminin kararlılık analizi aşağıdaki iki durum için çalışılmıştır:

Durum 1: Tüm yatırımcıların sadece hisse senetlerinin değerlendirilmesine bağlı bir yatırım stratejisi izlediği varsayılmıştır.

Durum 2: Piyasadaki tüm yatırımcıların birinci hisse senedi alım satımı için bu hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı bir yatırım stratejisi, ikinci hisse senedi alım satımı için bu hisse senedi fiyatının yönüne bağlı bir yatırım stratejisi izlediği varsayılmıştır.

3.1 Hisse Senedinin Değerlenmesine Dayalı Yatırım Stratejileri

Bu bölümde, tüm yatırımcıların her iki hisse senedi için de sadece hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı bir yatırım stratejisi izlediği, yani yatırımcı grubun hisse senedinin piyasa fiyatı ile hisse senedi fiyatı için belirlenen değer arasındaki sapmaya odaklandığı ve hisse senedi fiyatının yönünü ihmal ettiği varsayılmıştır. Bu varsayım altında (3.3) denklemi ile verilen geçiş oranı fonksiyonları

$$\begin{cases} k^{(1)} = \frac{1}{8}(1 + \zeta_2^{(1)})(3 - \zeta_2^{(2)}) \\ \tilde{k}^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - \zeta_2^{(1)}) \\ k^{(2)} = \frac{1}{8}(1 + \zeta_2^{(2)})(3 - \zeta_2^{(1)}) \\ \tilde{k}^{(2)} = \frac{1}{2}(1 - \zeta_2^{(2)}) \end{cases} \quad (3.5)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. O halde, (3.4) sistemi aşağıda verilen sisteme dönüşür:

$$\begin{cases} \frac{dP^{(1)}}{dt} = \frac{M(1 + \zeta_2^{(1)})(3 - \zeta_2^{(2)})}{4N^{(1)}(1 - \zeta_2^{(1)})} - P^{(1)} \\ \frac{dP^{(2)}}{dt} = \frac{M(1 + \zeta_2^{(2)})(3 - \zeta_2^{(1)})}{4N^{(2)}(1 - \zeta_2^{(2)})} - P^{(2)} \\ \frac{d\zeta_2^{(1)}}{dt} = c_2^{(1)} q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)} - P^{(1)}}{P_a^{(1)}} - c_2^{(1)} \zeta_2^{(1)} \\ \frac{d\zeta_2^{(2)}}{dt} = c_2^{(2)} q_2^{(2)} \frac{P_a^{(2)} - P^{(2)}}{P_a^{(2)}} - c_2^{(2)} \zeta_2^{(2)}. \end{cases} \quad (3.6)$$

(3.6) sistemi vektör değerli diferensiyel denklem formunda aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (3.7)$$

öyle ki $\mathbf{X} = (P^{(1)}, P^{(2)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_2^{(2)})^T$, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$ ve

$$f_1 := \frac{(1 + \zeta_2^{(1)})(3 - \zeta_2^{(2)})M}{4(1 - \zeta_2^{(1)})N^{(1)}} - P^{(1)}, \quad (3.8)$$

$$f_2 := \frac{(1 + \zeta_2^{(2)})(3 - \zeta_2^{(1)})M}{4(1 - \zeta_2^{(2)})N^{(2)}} - P^{(2)}, \quad (3.9)$$

$$f_3 := c_2^{(1)} q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)} - P^{(1)}}{P_a^{(1)}} - c_2^{(1)} \zeta_2^{(1)}, \quad (3.10)$$

$$f_4 := c_2^{(2)} q_2^{(2)} \frac{P_a^{(2)} - P^{(2)}}{P_a^{(2)}} - c_2^{(2)} \zeta_2^{(2)} \quad (3.11)$$

dir. (3.7) sisteminin denge noktaları

$$\begin{aligned} E_F^{eq} &= (P_{eq}^{(1)}, P_{eq}^{(2)}, \zeta_{2,eq}^{(1)}, \zeta_{2,eq}^{(2)}) \\ &= \left(\frac{(1 + \zeta_{2,eq}^{(1)})(3 - \zeta_{2,eq}^{(2)})M}{4(1 - \zeta_{2,eq}^{(1)})N^{(1)}}, \frac{(1 + \zeta_{2,eq}^{(2)})(3 - \zeta_{2,eq}^{(1)})M}{4(1 - \zeta_{2,eq}^{(2)})N^{(2)}}, \zeta_{2,eq}^{(1)}, \zeta_{2,eq}^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (3.12)$$

formundadır. (3.6) sistemi (2.20) sistemi için bir örnek oluşturduğundan, (2.23) denklemleri kullanılarak (3.7) sisteminin E_F^{eq} denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J(E_F^{eq}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & a & b \\ 0 & -1 & c & d \\ e & 0 & -c_2^{(1)} & 0 \\ 0 & f & 0 & -c_2^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

olup a, b, c, d, e ve f aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} a &= \frac{M(3 - \zeta_{2,eq}^{(2)})}{2N^{(1)}(1 - \zeta_{2,eq}^{(1)})^2}, \\ b &= \frac{-M(1 + \zeta_{2,eq}^{(1)})}{4N^{(1)}(1 - \zeta_{2,eq}^{(1)})}, \\ c &= \frac{-M(1 + \zeta_{2,eq}^{(2)})}{4N^{(2)}(1 - \zeta_{2,eq}^{(2)})}, \\ d &= \frac{M(3 - \zeta_{2,eq}^{(1)})}{2N^{(2)}(1 - \zeta_{2,eq}^{(2)})^2}, \end{aligned}$$

$$e = \frac{-c_2^{(1)}q_2^{(1)}}{P_a^{(1)}},$$

$$f = \frac{-c_2^{(2)}q_2^{(2)}}{P_a^{(2)}}.$$

$J(E_F^{eq})$ Jakobiyen matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

formundadır ve denklemin katsayıları ise

$$a_1 = c_2^{(1)} + c_2^{(2)} + 2,$$

$$a_2 = 2c_2^{(1)} + 2c_2^{(2)} + c_2^{(1)}c_2^{(2)} - ea - df + 1,$$

$$a_3 = c_2^{(1)} + c_2^{(2)} + 2c_2^{(1)}c_2^{(2)} - ea - df - eac_2^{(2)} - dfc_2^{(1)},$$

$$a_4 = c_2^{(1)}c_2^{(2)} - eac_2^{(2)} - dfc_2^{(1)} + ef(ad - bc)$$

dir. (3.6) sistemi (2.20) sisteminin bir örneği olduğundan (3.6) sisteminin denge noktası 2.2 Teoremi ile verilen **C1**, **C2**, **C3** ve **C4** şartları sağlanırsa lokal asimptotik kararlıdır. O halde, **C1**, **C2**, **C3** ve **C4** şartlarını detaylıca analiz edelim. Öncelikle, $\tanh(x) \simeq x$ varsayımı altında $-1 < \zeta_2^{(1)} < 1$ ve $-1 < \zeta_2^{(2)} < 1$ dir. Böylece

$$0 < 1 - \zeta_2^{(1)} < 2, \quad (3.14)$$

$$0 < 1 + \zeta_2^{(1)} < 2, \quad (3.15)$$

$$2 < 3 - \zeta_2^{(1)} < 4, \quad (3.16)$$

$$0 < 1 - \zeta_2^{(2)} < 2, \quad (3.17)$$

$$0 < 1 + \zeta_2^{(2)} < 2, \quad (3.18)$$

$$2 < 3 - \zeta_2^{(2)} < 4 \quad (3.19)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Şimdi de sırayla **C1-C2** şartlarının sağlandığını gösterelim:

- **C1:** $\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) > 0, \frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) < 0$

(3.19) eşitsizliğinden

$$\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) = \frac{1}{8}(3 - \zeta_{2,eq}^{(2)}) > 0$$

ve

$$\frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) = -\frac{1}{2} < 0$$

olur. O halde, **C1** şartı sağlanır.

- **C2:** $\frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) > 0, \frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) < 0$

(3.16) eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) = \frac{1}{8}(3 - \zeta_{2,eq}^{(1)}) > 0$$

ve

$$\frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) = -\frac{1}{2} < 0$$

sonuçlarına ulaşılır, yani **C2** şartının sağlandığı görülür.

- **C3:** $\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) < 0, \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) < 0$

(3.15) ve (3.18) eşitsizliklerine göre,

$$\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) = -\frac{1}{8}(1 + \zeta_{2,eq}^{(1)}) < 0,$$

$$\frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) = -\frac{1}{8}(1 + \zeta_{2,eq}^{(2)}) < 0.$$

olup, **C3** şartı da sağlanır.

- **C4:** $\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) > \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq})$

Öncelikle

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) - \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) \\
&= \frac{1}{8}(3 - \zeta_{2,eq}^{(2)}) \frac{1}{8}(3 - \zeta_{2,eq}^{(1)}) \\
&- \frac{1}{8}(1 + \zeta_{2,eq}^{(1)}) \frac{1}{8}(1 + \zeta_{2,eq}^{(2)}) \\
&= 1 - \frac{1}{2}(\zeta_{2,eq}^{(1)} + \zeta_{2,eq}^{(2)})
\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla görülür. $-1 < \zeta_2^{(1)} < 1$ ve $-1 < \zeta_2^{(2)} < 1$ olduğundan $-2 < \zeta_2^{(1)} + \zeta_2^{(2)} < 2$ dir; böylece

$$\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) - \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(2)}}(E_F^{eq}) \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_F^{eq}) > 0$$

elde edilir, yani, **C4** şartı sağlanır.

Sonuç olarak, (3.6) sistemi için aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Sonuç 3.1. (3.6) sisteminin (3.12) denklemleri ile verilen denge noktası lokal asimptotik karardır.

3.2 Farklı Etkilere Dayalı Yatırım Stratejileri

Yatırımcı grubun her bir hisse senedi için farklı yönde bir yatırım stratejisi izlediği, yani özel olarak, birinci hisse senedi için bu hisse senedinin değerlenmesine bağlı bir yatırım stratejisi izlediği ve ikinci hisse senedi için sadece hisse senedi fiyatının yönüne bağlı bir yatırım stratejisi izlediği varsayılmıştır. Bu varsayım altında (3.3) denklemleri ile verilen geçiş oranı fonksiyonları aşağıdaki formda yeniden yazılabilir:

$$\begin{cases} k^{(1)} = \frac{1}{8}(1 + \zeta_2^{(1)})(3 - \zeta_1^{(2)}) \\ \tilde{k}^{(1)} = \frac{1}{2}(1 - \zeta_2^{(1)}) \\ k^{(2)} = \frac{1}{8}(1 + \zeta_2^{(1)})(3 - \zeta_1^{(2)}) \\ \tilde{k}^{(2)} = \frac{1}{2}(1 - \zeta_1^{(2)}) \end{cases} \quad (3.20)$$

Böylece, (3.20) denklemleri kullanılarak, (3.4) sistemi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP^{(1)}}{dt} = \frac{M(1 + \zeta_2^{(1)})(3 - \zeta_1^{(2)})}{4N^{(1)}(1 - \zeta_2^{(1)})} - P^{(1)} \\ \frac{dP^{(2)}}{dt} = \frac{M(1 + \zeta_1^{(2)})(3 - \zeta_2^{(1)})}{4N^{(2)}(1 - \zeta_1^{(2)})} - P^{(2)} \\ \frac{d\zeta_2^{(1)}}{dt} = c_2^{(1)} q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)} - P^{(1)}}{P_a^{(1)}} - c_2^{(1)} \zeta_2^{(1)} \\ \frac{d\zeta_1^{(2)}}{dt} = c_1^{(2)} q_1^{(2)} \frac{M}{4N^{(2)}P^{(2)}} \frac{(1 + \zeta_1^{(2)})(3 - \zeta_2^{(1)})}{(1 - \zeta_1^{(2)})} - c_1^{(2)} q_1^{(2)} - c_1^{(2)} \zeta_1^{(2)} \end{array} \right. \quad (3.21)$$

sistemine indirgenir. Bu bölümde, (3.21) sisteminin denge noktalarının kararlı olması için parametreler üzerine konması gereken şartlar ve sistemin periyodik çözümlere sahip olması (yani Hopf çatallanmanın ortaya çıkması) için parametrelere bağlı şartlar belirlenecektir.

(3.21) sistemi vektör değerli diferensiyel denklem formunda yazılırsa

$$\mathbf{X}' = \mathbf{F}(\mathbf{X}) \quad (3.22)$$

sistemi elde edilir. Burada, $\mathbf{X} = (P^{(1)}, P^{(2)}, \zeta_2^{(1)}, \zeta_1^{(2)})^T$, $\mathbf{F} = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T$ ve

$$\begin{aligned} f_1 &:= \frac{(1 + \zeta_2^{(1)})(3 - \zeta_1^{(2)})M}{4(1 - \zeta_2^{(1)})N^{(1)}} - P^{(1)}, \\ f_2 &:= \frac{(1 + \zeta_1^{(2)})(3 - \zeta_2^{(1)})M}{4(1 - \zeta_1^{(2)})N^{(2)}} - P^{(2)}, \\ f_3 &:= c_2^{(1)} q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)} - P^{(1)}}{P_a^{(1)}} - c_2^{(1)} \zeta_2^{(1)}, \\ f_4 &:= c_1^{(2)} q_1^{(2)} \frac{M}{4N^{(2)}P^{(2)}} \frac{(1 + \zeta_1^{(2)})(3 - \zeta_2^{(1)})}{(1 - \zeta_1^{(2)})} - c_1^{(2)} q_1^{(2)} - c_1^{(2)} \zeta_1^{(2)} \end{aligned}$$

dir. (3.22) sisteminin denge noktaları

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0}$$

denklemden $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $\zeta_2^{(1)}$, $\zeta_1^{(2)}$ değişkenleri ortak çözümlere elde edilir. $f_1 = 0$ ve $f_2 = 0$ denklemlerinden

$$P_{eq}^{(1)} = \frac{M}{4N^{(1)}} \frac{(1 + \zeta_{2,eq}^{(1)})(3 - \zeta_{1,eq}^{(2)})}{1 - \zeta_{2,eq}^{(1)}}, \quad (3.23)$$

$$P_{eq}^{(2)} = \frac{M}{4N^{(2)}} \frac{(1 + \zeta_{1,eq}^{(2)})(3 - \zeta_{2,eq}^{(1)})}{1 - \zeta_{1,eq}^{(2)}} \quad (3.24)$$

elde edilir. (3.24) denklemi kullanılarak $f_4 = 0$ denklemi çözülürse, $\zeta_{1,eq}^{(2)} = 0$ olduğu görülür. Böylece

$$P_{eq}^{(1)} = \frac{3M}{4N^{(1)}} \frac{1 + \zeta_{2,eq}^{(1)}}{1 - \zeta_{2,eq}^{(1)}}, \quad (3.25)$$

$$P_{eq}^{(2)} = \frac{M}{4N^{(2)}} (3 - \zeta_{2,eq}^{(1)}) \quad (3.26)$$

bulunur. Son olarak, $f_3 = 0$ denklemi kullanılarak

$$\zeta_{2,eq}^{(1)} = q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)} - P_{eq}^{(1)}}{P_a^{(1)}} \quad (3.27)$$

olduğu görülür. (3.25) ve (3.27) denklemleri birlikte kullanılarak

$$\frac{q_2^{(1)}}{P_a^{(1)}} (P_{eq}^{(1)})^2 + (1 - q_2^{(1)} + q_2^{(1)} \frac{3M}{4N^{(1)} P_a^{(1)}}) P_{eq}^{(1)} - \frac{3M}{4N^{(1)}} (1 + q_2^{(1)}) = 0 \quad (3.28)$$

denklemi elde edilir ve (3.28) denklemi $P_{eq}^{(1)}$ değişkeni için çözülerek

$$P_{eq}^{(1)} = \frac{- (1 - q_2^{(1)} + q_2^{(1)} \frac{3M}{4N^{(1)} P_a^{(1)}}) + \sqrt{(1 - q_2^{(1)} + q_2^{(1)} \frac{3M}{4N^{(1)} P_a^{(1)}})^2 + \frac{q_2^{(1)} 3M}{P_a^{(1)} N^{(1)}} (1 + q_2^{(1)})}}{2q_2^{(1)}} \frac{1}{P_a^{(1)}} \quad (3.29)$$

denge noktası bulunur. Dikkat edilirse, (3.28) denkleminin biri pozitif biri negatif olmak üzere iki kökü vardır, fakat $P^{(1)}$ birinci hisse senedinin fiyatı olup negatif olamayacağından pozitif olan kök denge noktası olarak alınmıştır. Sonuç olarak,

(3.22) sisteminin denge noktaları

$$\begin{aligned}
E_V^{eq} &= (P_{eq}^{(1)}, P_{eq}^{(2)}, \zeta_{2,eq}^{(1)}, \zeta_{1,eq}^{(2)}) \\
&= \left(P_{eq}^{(1)}, \frac{M}{4N^{(2)}}(3 - q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)} - P_{eq}^{(1)}}{P_a^{(1)}}), q_2^{(1)} \frac{P_a^{(1)} - P_{eq}^{(1)}}{P_a^{(1)}}, 0 \right) \\
&= \left(\frac{3M(1 + \zeta_{2,eq}^{(1)})}{4N^{(1)}(1 - \zeta_{2,eq}^{(1)})}, \frac{M(3 - \zeta_{2,eq}^{(1)})}{4N^{(2)}}, \zeta_{2,eq}^{(1)}, 0 \right)
\end{aligned} \tag{3.30}$$

formundadır ve bu ifadede $P_{eq}^{(1)}$ (3.29) denklemi ile verilen birinci hisse senedi için denge fiyatıdır.

(3.21) sistemi (2.26) sisteminin bir örneği olduğundan (2.32) denkleminde (3.22) sisteminin E_V^{eq} denge noktasındaki Jakobiyen matrisi

$$J(E_V^{eq}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & a & b \\ 0 & -1 & c & d \\ f & 0 & -c_2^{(1)} & 0 \\ 0 & e & -ec & -ed - c_1^{(2)} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

olup, burada

$$a = \frac{3M}{2N^{(1)}} \frac{1}{(1 - \zeta_{2,eq}^{(1)})^2}, \tag{3.32}$$

$$b = \frac{-M(1 + \zeta_{2,eq}^{(1)})}{4N^{(1)}(1 - \zeta_{2,eq}^{(1)})}, \tag{3.33}$$

$$c = \frac{-M}{4N^{(2)}}, \tag{3.34}$$

$$d = \frac{M}{2N^{(2)}}(3 - \zeta_{2,eq}^{(1)}), \tag{3.35}$$

$$e = -\frac{c_1^{(2)} q_1^{(2)}}{P_{eq}^{(2)}}, \tag{3.36}$$

$$f = -\frac{c_2^{(1)} q_2^{(1)}}{P_a^{(1)}} \tag{3.37}$$

dir. $J(E_V^{eq})$ Jakobiyen matrisinin karakteristik denklemi

$$\lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0$$

ile verilir ve katsayılar aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2 + de + c_1^{(2)} + c_2^{(1)}, \\
a_2 &= 2c_1^{(2)} + 2c_2^{(1)} + c_1^{(2)}c_2^{(1)} + ed - af + edc_2^{(1)} + 1, \\
a_3 &= c_1^{(2)} + c_2^{(1)} + 2c_1^{(2)}c_2^{(1)} - af + edc_2^{(1)} - afc_1^{(2)} \\
&\quad - eadf + ebcf, \\
a_4 &= c_1^{(2)}c_2^{(1)} - afc_1^{(2)}.
\end{aligned}$$

3.2.1 Lokal kararlılık analizi

Bu alt bölümde (3.21) sisteminin denge noktalarının kararlı olabilmesi için parametreler üzerine konması gereken şartlar belirlenecektir. Bölüm 2.2.3'de, Teorem 2.3'de verilen **K1-K5** şartları sağlanırsa (2.26) sisteminin denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğu ispatlanmıştır. (3.21) sistemi (2.26) sisteminin bir örneği olduğundan (3.21) sisteminin denge noktasının da yerel asimptotik kararlı olması için aynı şartların sağlanması gerekmektedir. Öncelikle, $\tanh(x) \simeq x$ olduğu kabul edildiğinde $-1 < \zeta_2^{(1)} < 1$ dir. Bu nedenle,

$$0 < 1 - \zeta_2^{(1)} < 2, \quad (3.38)$$

$$0 < 1 + \zeta_2^{(1)} < 2, \quad (3.39)$$

$$2 < 3 - \zeta_2^{(1)} < 4 \quad (3.40)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Şimdi yukarıda verilen eşitsizlikler kullanılarak, 2.2.3' de verilen **K1** şartının sağlandığını gösterelim:

- (3.39) eşitsizliğinden

$$\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_M^{eq}) = -\frac{1}{8}(1 + \zeta_{2,eq}^{(1)}) < 0$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_M^{eq}) &= \frac{1}{8}(3 - \zeta_{1,eq}^{(2)}) = \frac{3}{8} > 0, \\
\frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_M^{eq}) &= -\frac{1}{2} < 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

- (3.40) eşitsizliği kullanılarak

$$\frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_M^{eq}) = \frac{1}{8}(3 - \zeta_{2,eq}^{(1)}) > 0$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_M^{eq}) &= -\frac{1}{8}(1 + \zeta_{1,eq}^{(2)}) = -\frac{1}{8} < 0, \\ \frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_M^{eq}) &= -\frac{1}{2} < 0 \end{aligned}$$

olduğu görülür.

O halde, **K1** şartı sağlanır, yani;

$$\mathbf{K1:} \quad \begin{aligned} \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_V^{eq}) > 0, \quad \frac{\partial k^{(1)}}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_V^{eq}) < 0, \quad \frac{\partial \tilde{k}^{(1)}}{\partial \zeta_2^{(1)}}(E_V^{eq}) < 0, \\ \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(1)}}(E_V^{eq}) < 0, \quad \frac{\partial k^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_V^{eq}) > 0, \quad \frac{\partial \tilde{k}^{(2)}}{\partial \zeta_1^{(2)}}(E_V^{eq}) < 0 \end{aligned}$$

dir. Böylece, Teorem 2.3 gereğince eğer

$$\begin{aligned} \mathbf{K2:} \quad & 1 - 2q_1^{(2)} > 0, \\ \mathbf{K3:} \quad & c_2^{(1)} + 1 - 2c_1^{(2)} > 0, \\ \mathbf{K4:} \quad & 1 - \frac{3Mc_2^{(1)}q_2^{(1)}}{2N^{(1)}(1 - \zeta_{2,eq}^{(1)})^2} > 0, \\ \mathbf{K5:} \quad & 1 - \frac{M(1 + \zeta_{2,eq}^{(1)})c_2^{(1)}q_2^{(1)}q_1^{(2)}}{4N^{(1)}(1 - \zeta_{2,eq}^{(1)})(3 - \zeta_{2,eq}^{(1)})P_a^{(1)}} > 0. \end{aligned} \tag{3.41}$$

şartları sağlanırsa, (3.21) sisteminin denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

Sonuç olarak; (3.21) sisteminin denge noktalarının kararlı olması için parametreler üzerine konması gereken şartların verildiği sonuç aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.2. (3.21) sisteminin denge noktası, E_M^{eq} , (3.41) denklemi ile verilen **K2-K5** şartları sağlanırsa lokal asimptotik kararlıdır.

3.2.2 Hopf çatallanma analizi

Bu bölümde, (3.21) sisteminde ikinci hisse senedi fiyatının yönüne bağlı büyüklük parametresi olan $q_1^{(2)}$ parametresinin değişimine bağlı olarak ortaya çıkan periyodik çözümlerin varlığı analiz edilecektir. Bunun için $q_1^{(2)}$ parametresi (momentum katsayısı) çatallanma parametresi seçilerek (3.21) sisteminde Hopf çatallanmanın ortaya çıkması için parametrelere bağlı şartlar belirlenecektir.

(3.21) sisteminin E_V^{eq} denge noktasındaki Jakobiyen matrisinin karakteristik denklemini

$$H(\lambda) = \lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0 \quad (3.42)$$

formundadır ve denklemin katsayıları ise

$$a_1 = Aq_1^{(2)} + B, \quad (3.43)$$

$$a_2 = Fq_1^{(2)} + C, \quad (3.44)$$

$$a_3 = Gq_1^{(2)} + D, \quad (3.45)$$

$$a_4 = E \quad (3.46)$$

dir. Burada,

$$A = -2c_1^{(2)},$$

$$B = 2 + c_1^{(2)} + c_2^{(1)},$$

$$C = 1 + 2c_1^{(2)} + 2c_2^{(1)} + c_1^{(2)}c_2^{(1)} + Kq_2^{(1)}c_2^{(1)},$$

$$D = c_1^{(2)} + c_2^{(1)} + 2c_1^{(2)}c_2^{(1)} + Kq_2^{(1)}c_2^{(1)}(1 + c_1^{(2)}),$$

$$E = c_1^{(2)}c_2^{(1)} + Kq_2^{(1)}c_2^{(1)}c_1^{(2)},$$

$$F = -2c_1^{(2)}(1 + c_2^{(1)}),$$

$$G = -2c_1^{(2)}(c_2^{(1)} + Kq_2^{(1)}c_2^{(1)}) + c_1^{(2)}c_2^{(1)}q_2^{(1)}L,$$

öyle ki

$$K = \frac{3M}{2N^{(1)}P_a^{(1)}(1 - \zeta_{2,eq}^{(1)})^2},$$

$$L = \frac{M^2(1 + \zeta_{2,eq}^{(1)})}{16N^{(1)}N^{(2)}P_a^{(1)}(1 - \zeta_{2,eq}^{(1)})}$$

dir. $\tanh(x) \simeq x$ varsayımı altında $-1 < \zeta_2^{(1)} < 1$ dir ve dikkat edilirse K ve L denklemlerindeki parametreler pozitiftir. O halde, $K > 0$ ve $L > 0$ dir. Sonuç olarak,

$A < 0, B > 0, C > 0, D > 0, E > 0, F < 0$ ve G ise pozitif ya da negatif olabilir.

Aşağıda verilen lemma ile (3.21) sisteminin Hopf çatallanmaya sahip olması için parametreler üzerine konması gereken şartlar verilmiştir. Bu teoremin ispatı için Asada ve Yoshida tarafından ispatlanan Teorem 1.5 kullanılmıştır.

Lemma 3.1. *Eğer*

$$P1: G < 0 \text{ ve } q_1^{(2)} < \min\left(-\frac{B}{A}, -\frac{D}{G}\right)$$

$$P2: G \geq 0 \text{ ve } q_1^{(2)} < -(B/A)$$

şartlarından biri sağlanırsa (3.42) de verilen $H(\lambda)$ karakteristik denkleminin sırf sanal eşlenik (basit) iki kökü ve negatif reel kısma sahip iki kökü vardır.

İspat. *Teorem 1.5'ya göre $H(\lambda)$ karakteristik denkleminin sırf sanal eşlenik (basit) iki kökü ve negatif reel kısma sahip iki kökü sahip olması için gerek ve yeter şart $a_1 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0$ ve $\phi = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 = 0$ şartlarının sağlanmasıdır.*

*Öncelikle, kabul edelim ki **P1** şartı sağlansın. O halde, $G < 0$ olduğundan $a_3 = Gq_1^{(2)} + D$, $q_1^{(2)}$ değişkenine bağlı lineer ve azalan bir fonksiyondur. Benzer şekilde, $A < 0$ olduğundan $a_1 = Aq_1^{(2)} + B$ lineer ve azalan bir fonksiyondur. Ayrıca, $q_1^{(2)} = -\frac{B}{A}$ iken $a_1 = 0$, $q_1^{(2)} = -\frac{D}{G}$ iken $a_3 = 0$ ve $q_1^{(2)} = 0$ iken $a_1 = B > 0$ ve $a_3 = D > 0$ dir. Burada $-\frac{B}{A} > 0$ ve $-\frac{D}{G} > 0$ dir. Böylece, $q_1^{(2)} \in [0, \min(-\frac{B}{A}, -\frac{D}{G})]$ iken $a_1 > 0$ ve $a_3 > 0$ olur. a_4 katsayısının tanımı gereği pozitif olduğunu biliyoruz (Bakınız (3.46)).*

Diğer taraftan; ϕ

$$\begin{aligned} \phi(q_1^{(2)}) &= a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 \\ &= AFG(q_1^{(2)})^3 + (CAG - EA^2 + FDA - F^2 + BCF)(q_1^{(2)})^2 \\ &\quad + (ACD - 2ABE - 2GD + BFD + BCG)q_1^{(2)} + (CBD - EB^2 - D^2) \end{aligned} \quad (3.47)$$

şeklinde tanımlanmıştır ve $q_1^{(2)}$ değişkenine bağlı sürekli bir fonksiyondur ve

Şimdi de bazı $q_1^{(2)} > 0$ için ϕ fonksiyonun değerinin 0 olduğunu gösterelim. Dikkat edilirse, $q_1^{(2)} = 0$ iken

$$\begin{aligned} \phi(0) &= CBD - EB^2 - D^2 \\ &= K^2 c_2^{(1)} (q_2^{(1)})^2 - 2Kc_2^{(1)} q_2^{(1)} + c_2^{(1)} \\ &\quad + \text{pozitif terimler} \\ &= c_2^{(1)} (Kq_2^{(1)} - 1)^2 + \text{pozitif terimler} \end{aligned} \quad (3.48)$$

olur, yani $\phi(0) > 0$ dir.

Ayrıca, $\phi(-\frac{B}{A}) = -(-\frac{GB}{A} + D)^2 < 0$ ve $\phi(-\frac{D}{G}) = -(-\frac{AD}{G} + B)^2 E < 0$, böylece $q_1^{(2)} = \min(-\frac{B}{A}, -\frac{D}{G})$ iken $\phi(q_1^{(2)}) < 0$ dir. O zaman, $\phi, q_1^{(2)}$ değişkenine bağlı sürekli bir fonksiyon olduğundan Ara Değer Teoreminden $\exists q_{1,k}^{(2)} \in (0, \min(-\frac{B}{A}, -\frac{D}{G}))$ öyle ki $\phi(q_{1,k}^{(2)}) = 0$ dir. Dahası, $a_1(q_{1,k}^{(2)}) > 0$ ve $a_3(q_{1,k}^{(2)}) > 0$ dir.

Şimdi de **P2** şartının sağlandığını kabul edelim. O halde, $G = 0$ iken $a_3 = D > 0$, ve $G > 0$ iken her $q_1^{(2)} > 0$ değeri için $a_3 = Gq_1^{(2)} + D > 0$ olur. Diğer taraftan, $a_1 = Aq_1^{(2)} + B$, $q_1^{(2)}$ değişkenine bağlı lineer ve azalan bir fonksiyon olup $a_1(-B/A) = 0$ ve $a_1(0) = B > 0$ olduğundan $q_1^{(2)} < -\frac{B}{A}$ iken $a_1 > 0$ olur. Yine, $a_4 > 0$ olduğunu tanımı gereği biliyoruz. Son olarak; $\phi, q_1^{(2)}$ değişkenine bağlı sürekli bir fonksiyondur (Bakınız (3.47)), $\phi(0) > 0$ (Bakınız (3.48)) ve $\phi(-\frac{B}{A}) = -(-\frac{GB}{A} + D)^2 < 0$ dir. O halde, Ara Değer Teoreminden $\exists q_{1,k}^{(2)} \in (0, -\frac{B}{A})$ öyle ki $\phi(q_{1,k}^{(2)}) = 0$.

Sonuç olarak, Teorem 1.5 kullanılarak **P1** ya da **P2** şartı sağlanırsa $H(\lambda)$ karakteristik denkleminin sırf sanal eşlenik iki köke sahip olduğu gösterilmiştir. Dahası, Teorem 1.5 sırf sanal eşlenik iki kökün basit olduğunu da vurgular, çünkü $H(\lambda)$ karakteristik denklemi dördüncü derece bir polinomdur ve diğer iki kök negatif reel kısma sahiptir.

Açıklama 3.1. $q_1^{(2)} = q_{1,k}^{(2)}$ iken ortaya çıkan sırf sanal eşlenik kökler basit olduğundan, transversalite şartı sağlanır, yani

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda(q_1^{(2)})}{dq_1^{(2)}} \right) \Big|_{\{q_{1,k}^{(2)}; E_M^{eq}\}} \neq 0$$

dır.

Teorem 3.1. Eğer **P1** ya da **P2** şartı sağlanırsa (3.21) sisteminde E_M^{eq} denge noktasında Hopf çatallanma ortaya çıkar.

İspat. İspat Lemma 3.1 gereğince aşikardır.



4. NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümün amacı önceki bölümlerde elde edilen analitik sonuçları nümerik simülasyonlar kullanarak desteklemektir. Nümerik simülasyonlar aşağıda verilen iki durum göz önüne alınarak elde edilmiştir:

Durum 1: Tüm yatırımcıların sadece hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı bir yatırım stratejisi izlediği varsayılmıştır.

Durum 2: Piyasadaki tüm yatırımcıların birinci hisse senedi alım satımı için bu hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı bir yatırım stratejisi, ikinci hisse senedi alım satımı için bu hisse senedi fiyatının yönüne bağlı bir yatırım stratejisi izlediği varsayılmıştır.

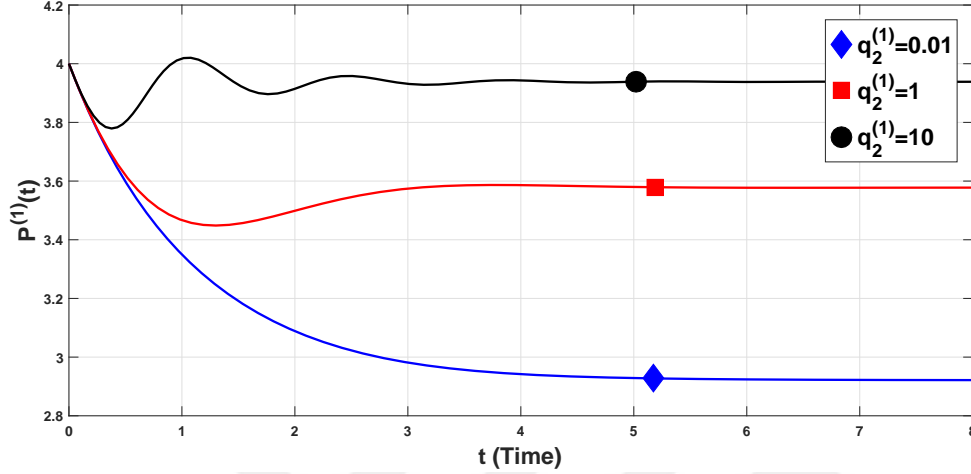
Nümerik çalışmalar için 2400 birim nakit, 600 birim birinci hisse senedi ve 400 birim ikinci hisse senedi içeren kapalı bir finansal piyasa ele alınmıştır. Birinci hisse senedi fiyatı için belirlenen değerin $P_a^{(1)} = 4$ ve ikinci hisse senedi fiyatı için belirlenen değerin ise $P_a^{(2)} = 6$ olduğu varsayılmıştır. Nümerik simülasyonlar MATLAB (R2016a) programının ODE paketi (ode23s) kullanılarak elde edilmiştir.

Durum 1: Bu durum için, hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı zaman parametreleri $c_2^{(1)} = 1$ ve $c_2^{(2)} = 1$ olarak alınmıştır. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2’de ikinci hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı büyüklük parametresi $q_2^{(2)} = 1$ olarak sabitlenmiş ve başlangıç değeri $P^{(1)}(0) = 4$, $P^{(2)}(0) = 6$, $\zeta_2^{(1)}(0) = 0.01$ ve $\zeta_2^{(2)}(0) = 0.01$ olarak alınarak birinci hisse senedine bağlı büyüklük parametresi $q_2^{(1)}$ ’in farklı değerleri için birinci hisse senedi ve ikinci hisse senedi fiyatının çözüm grafikleri çizdirilmiştir. $q_2^{(1)}$ parametresinin farklı değerleri için hesaplanan (3.6) sisteminin denge noktaları Çizelge 4.1’de verilmiştir (Denge noktalarının nümerik olarak hesaplanması ile ilgili detaylı bilgi EK 1’de verilmiştir).

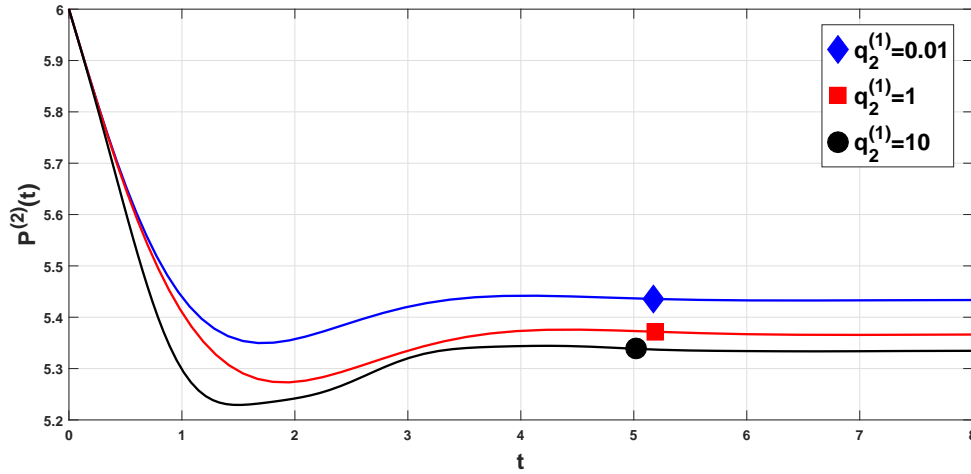
Çizelge 4.1: $q_2^{(1)}$ parametresinin farklı değerleri için (3.6) sisteminin hisse senedi denge fiyatları

$q_2^{(2)}$	$q_2^{(1)}$	$P_{eq}^{(1)}$	$P_{eq}^{(2)}$
1	0.01	2.9213	5.4335
1	1	3.5777	5.3666
1	10	3.9385	5.3346

Şekil 4.1'e ve Şekil 4.2 'e göre denge noktaları Sonuç 3.1'de ifade edildiği gibi her $q_2^{(1)}$ değeri için kararlıdır. Ayrıca, Şekil 4.1'de $q_2^{(1)}$ parametresinin değeri artarken $P_{eq}^{(1)}$ denge fiyatının $P_a^{(1)}$ değerine yaklaştığı, yani, yatırımcı grubun birinci hisse senedinin değerlendirilmesine verdiği önem arttıkça, birinci hisse senedinin denge fiyatının hisse senedi fiyatı için belirlenen değere yaklaştığı gözlemlenmiştir.



Şekil 4.1: $q_2^{(2)} = 1$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip birinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(1)}(t)$ $q_2^{(1)} = 0.01$ (kare), 1 (kare), 10 (daire) değerleri için verilmiştir.



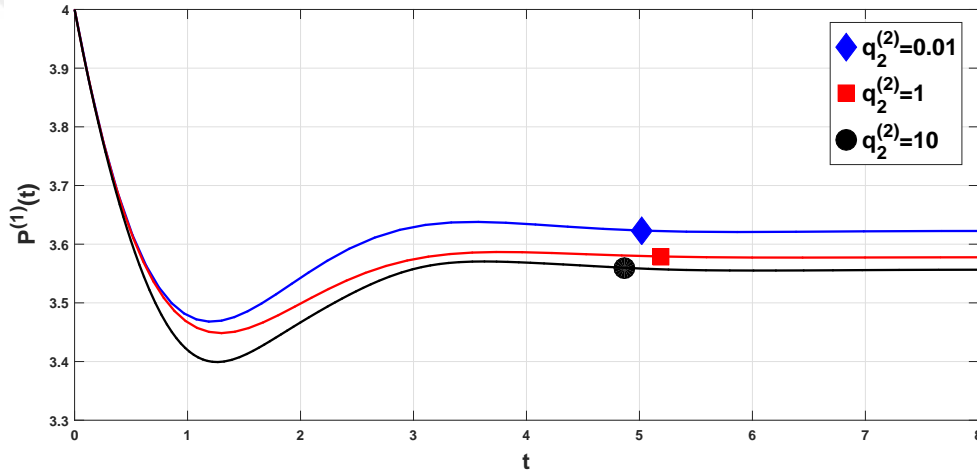
Şekil 4.2: $q_2^{(2)} = 1$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip ikinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(2)}(t)$ $q_2^{(1)} = 0.01$ (kare), 1 (kare), 10 (daire) değerleri için verilmiştir.

Şekil 4.3'te ve Şekil 4.4'te ise birinci hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı büyüklük parametresi $q_2^{(1)} = 1$ alınarak $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$

başlangıç değerine sahip hisse senedi fiyatlarının çözüm grafiği ikinci hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı büyüklük parametresinin farklı değerleri ($q_2^{(2)} = 0.01, 1, 10$) için çizdirilmiştir. $q_2^{(2)}$ parametresine bağlı olarak değişen denge fiyatları Çizelge 4.2’de verilmiştir (Bakınız EK 1).

Çizelge 4.2: $q_2^{(2)}$ parametresinin farklı değerleri için (3.6) sisteminin hisse senedi denge fiyatları.

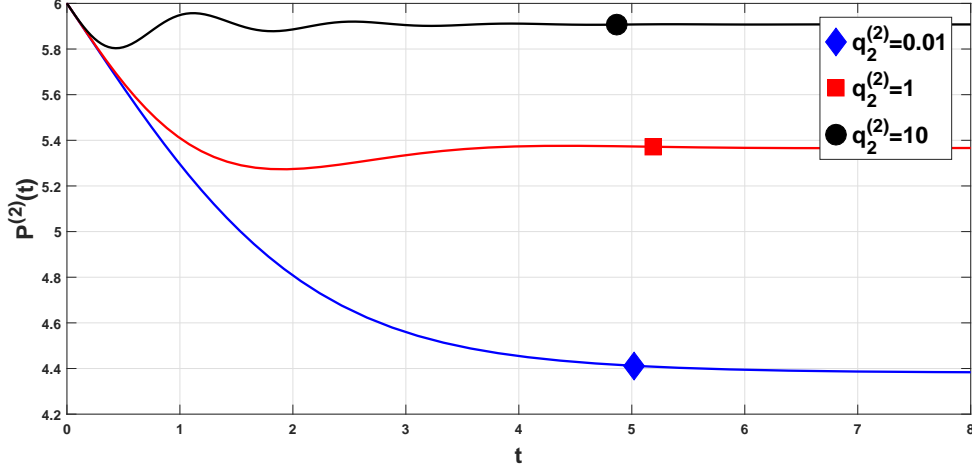
$q_2^{(1)}$	$q_2^{(2)}$	$P_{eq}^{(1)}$	$P_{eq}^{(2)}$
1	0.01	3.6223	4.3819
1	1	3.5777	5.3666
1	10	3.5564	5.9078



Şekil 4.3: $q_2^{(1)} = 1$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip birinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(1)}(t)$ $q_2^{(2)} = 0.01$ (kare), 1 (kare), 10 (daire) değerleri için verilmiştir.

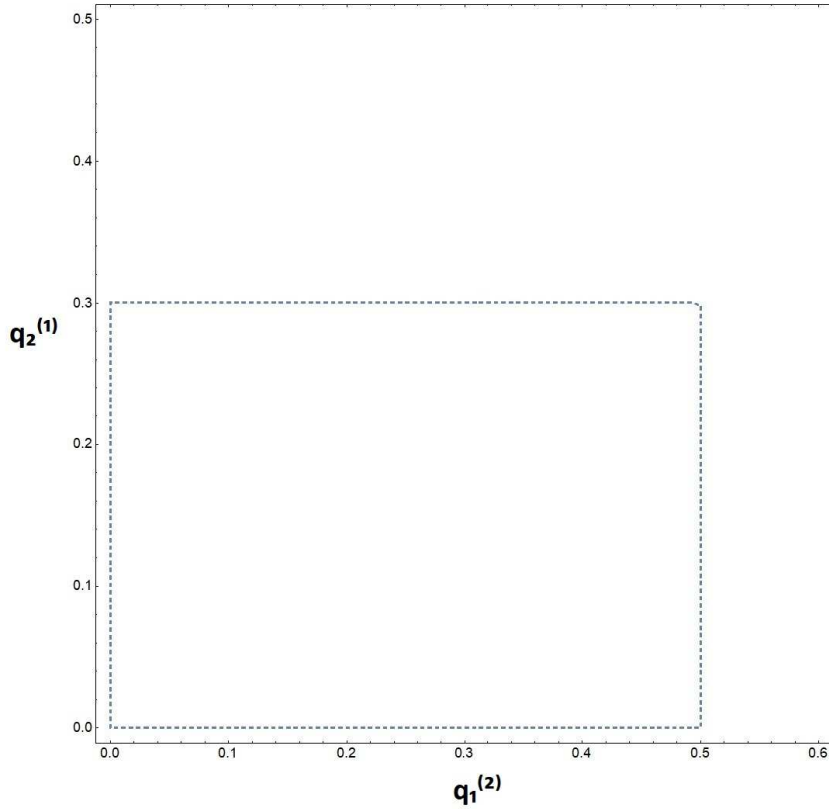
Bu grafikler $q_2^{(2)}$ parametresinin her bir değeri için denge noktasının kararlı olduğunu göstermektedir. Şekil 4.4’e göre, $q_2^{(2)}$ parametresinin değeri artarken, ikinci hisse senedinin denge fiyatı $P_a^{(2)}$ değerine yani, ikinci hisse senedi fiyatı için belirlenen değere yaklaşır.

Durum 2. Her bir hisse senedi alım satımı için farklı yönde yatırım stratejilerinin izlendiği bu durum için birinci hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı zaman parametresi $c_2^{(1)} = 2$ ve ikinci hisse senedi fiyatının yönüne bağlı zaman parametresi $c_1^{(2)} = 1$ olarak alınmıştır. Sonuç 3.2’de verilen şartlar kullanılarak, $q_2^{(1)}$ ve $q_1^{(2)}$ parametrelerine bağlı kararlılık bölgesi oluşturulmuştur. Kararlılık bölgesi içinde yer alan parametre değerleri için (3.21) sisteminin denge noktası kararlı olmak



Şekil 4.4: $q_2^{(1)} = 1$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip ikinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(2)}(t)$ $q_2^{(2)} = 0.01$ (karo), 1 (kare), 10 (daire) değerleri için verilmiştir.

zorundadır. Fakat, kararlılık bölgesi dışında ya da bölgenin sınırında yer alan parametre değerleri için elde edilen denge noktaları kararlı ya da kararsız olabilir.

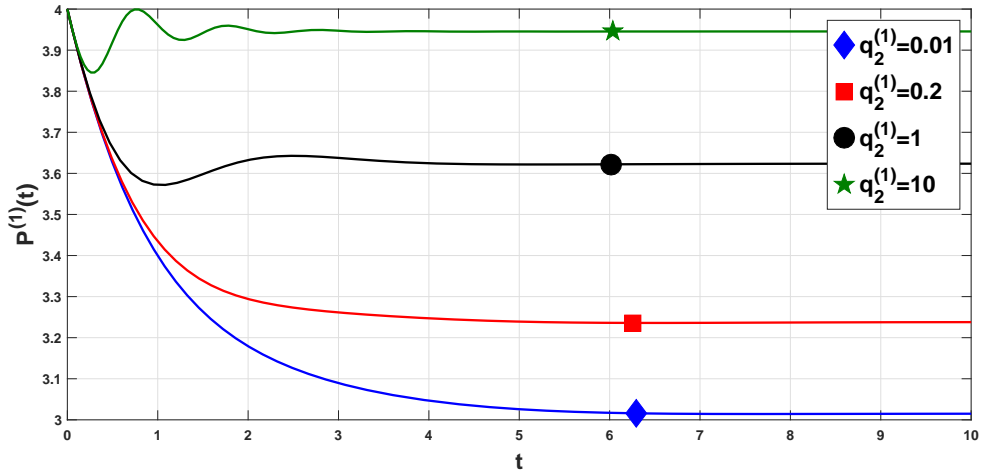


Şekil 4.5: $q_2^{(1)}$ ve $q_1^{(2)}$ parametrelerine bağlı kararlılık bölgesi.

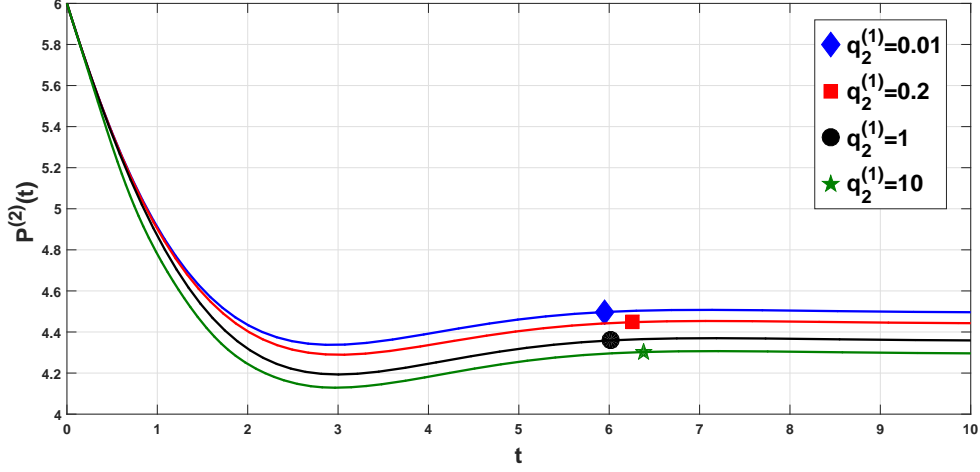
Çizelge 4.3: $q_2^{(1)}$ parametresinin farklı değerleri için (3.21) sisteminin hisse senedi denge fiyatları.

$q_2^{(1)}$	$q_1^{(2)}$	$P_{eq}^{(1)}$	$P_{eq}^{(2)}$
0.01	0.35	3.0148	4.4963
0.2	0.35	3.2377	4.4428
1	0.35	3.6235	4.3588
10	0.35	3.9455	4.2958

Şekil 4.6'da ve Şekil 4.7'de, birinci hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı büyüklük parametresi $q_1^{(2)} = 0.35$ olarak alınmıştır ve ikinci hisse senedi fiyatının yönüne bağlı büyüklük parametresi ise $q_2^{(1)} = 0.01, 0.2, 1$ ve 10 şeklinde değiştirilmiştir. Dikkat edilirse $(q_1^{(2)}, q_2^{(1)}) = (0.35, 0.01)$ ve $(q_1^{(2)}, q_2^{(1)}) = (0.35, 0.2)$ Şekil 4.5'te verilen kararlılık bölgesinin içindedir, fakat $(q_1^{(2)}, q_2^{(1)}) = (0.35, 1)$ ve $(q_1^{(2)}, q_2^{(1)}) = (0.35, 10)$ kararlılık bölgesi dışındadır. Bu parametre değerleri kullanılarak, (3.21) sisteminin $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip olan çözümlerinin ilk iki bileşeninin grafiği çizdirilmiştir. Yukarıda verilen parametre değerleri için, $q_2^{(1)}$ parametresinin her bir değeri için (3.21) sisteminin (3.29)-(3.30) denklemleri ile verilen tek bir denge noktası vardır. Denge fiyatları Çizelge 4.3'te verilmiştir. Şekil 4.6'daki ve Şekil 4.7'deki grafikler $q_2^{(1)}$ parametresine bağlı olarak değişen denge fiyatlarının kararlı olduğunu göstermektedir.

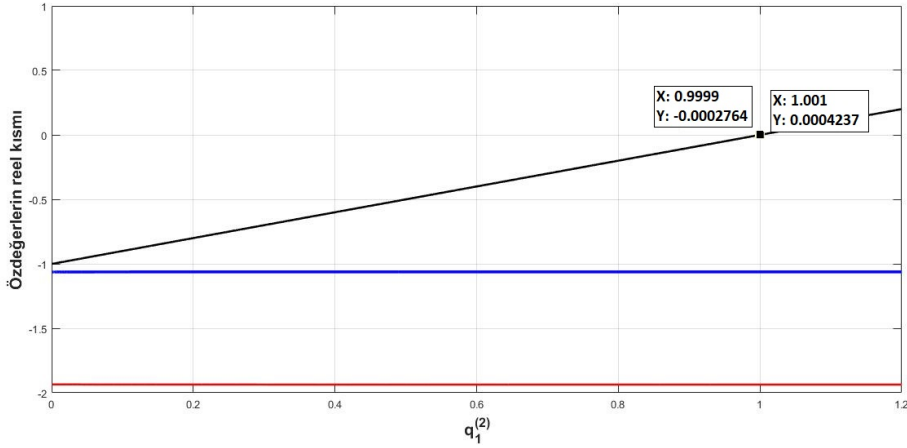


Şekil 4.6: $q_1^{(2)} = 0.35$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip birinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(1)}(t)$ $q_2^{(1)} = 0.01$ (karo), 0.2 (kare), 1 (daire), 10 (yıldız) için verilmiştir.



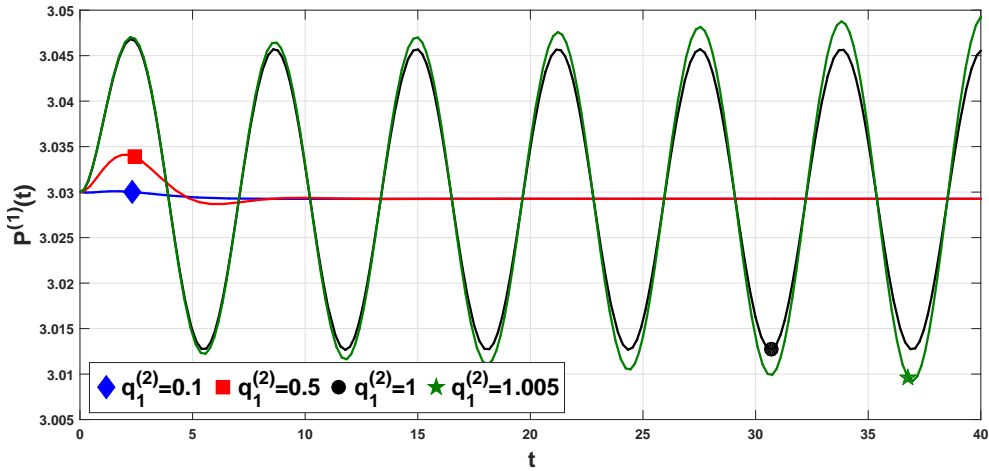
Şekil 4.7: $q_1^{(2)} = 0.35$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip ikinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(2)}(t)$ $q_2^{(1)} = 0.01$ (karo), 0.2 (kare), 1 (daire), 10 (yıldız) için verilmiştir.

Şekil 4.8'de birinci hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı büyüklük parametresi $q_2^{(1)} = 0.02$ olarak alınmış ve yukarıda verilen zaman parametreleri kullanılarak (3.21) sisteminin Jakobiyen matrisinin özdeğerlerinin reel kısmının ikinci hisse senedi fiyatının yönüne bağlı büyüklük parametresi $q_1^{(2)}$ 'ye bağlı grafiği çizdirilmiştir. Bu grafiğe göre, $q_{1,k}^{(2)} \in (0.9999, 1.001)$ kritik değerinden daha büyük $q_1^{(2)}$ değerleri için sistemin denge noktası kararsızdır, çünkü $q_1^{(2)} > q_{1,k}^{(2)}$ iken özdeğerlerden birinin reel kısmı pozitiftir.



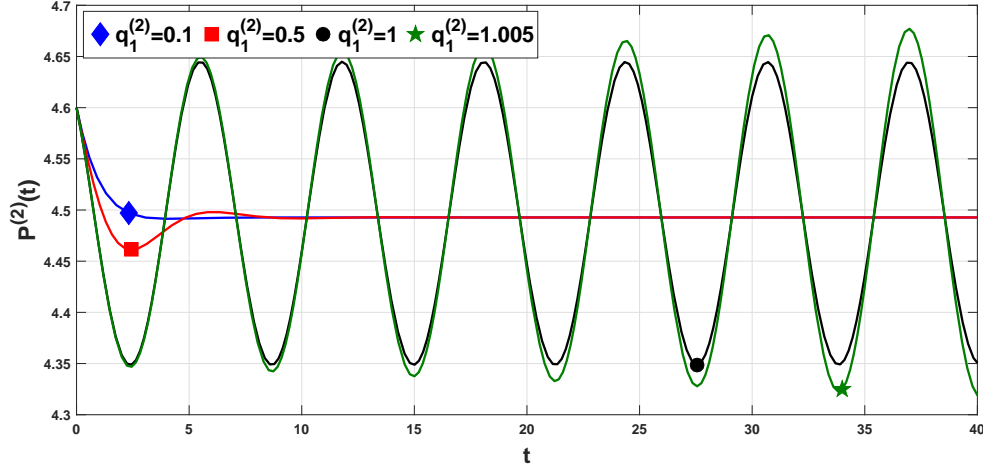
Şekil 4.8: (3.21) sisteminin Jakobiyen matrisinin özdeğerlerinin reel kısmının ikinci hisse senedi fiyatının yönüne bağlı büyüklük parametresi $q_1^{(2)}$ 'ye bağlı grafiği. Bu grafikte, $X:=q_1^{(2)}$ ve $Y:=\text{Özdeğerlerin reel kısmı}$.

Şekil 4.9'da ve 4.10'da birinci hisse senedinin değerlenmesine bağlı büyüklük parametresi $q_2^{(1)} = 0.02$ olarak sabitlenerek ikinci hisse senedi fiyatının yönüne bağlı büyüklük parametresinin $q_1^{(2)} = 0.1, 0.5, 1$ ve 1.005 değerleri için hisse senedi fiyatlarının çözüm grafiği çizdirilmiştir. Bu grafikler için başlangıç değerleri $P^{(1)}(0) = 3.03$, $P^{(2)}(0) = 4.6$, $\zeta_2^{(1)}(0) = 0.0049$, $\zeta_1^{(2)}(0) = 0$ olarak alınmıştır. Dikkat edilirse; $(q_1^{(2)}, q_2^{(1)}) = (0.01, 0.02)$ ve $(q_1^{(2)}, q_2^{(1)}) = (0.5, 0.02)$ noktaları hariç diğer noktalar Şekil 4.5 ile verilen kararlılık bölgesinin dışında yer almaktadır. (3.29) denkleme göre $P_{eq}^{(1)}$ ve $P_{eq}^{(2)}$ denge noktaları $q_1^{(2)}$ parametresinden bağımsızdır, o halde denge noktasının bağlı olduğu diğer parametre değerleri de sabitlendiğinden $(P_{eq}^{(1)}, P_{eq}^{(2)}, \zeta_{2,eq}^{(1)}, \zeta_{1,eq}^{(2)}) = (3.0293, 4.4927, 0.0049, 0)$ sistemin tek denge noktasıdır. Şekil 4.9'a ve Şekil 4.10'a göre, $q_1^{(2)} = 0.1$ ve $q_1^{(2)} = 0.5$ için denge noktası kararlı iken $q_{1,k}^{(2)}$ kritik değerinden büyük olan $q_1^{(2)} = 1.005$ değeri için denge noktası kararsızdır. Ayrıca, $q_1^{(2)} = 1$ iken yani $q_{1,k}^{(2)}$ kritik değerine oldukça yakın iken, sistemde periyodik çözümlerin ortaya çıktığı görülmektedir. Yani, $q_1^{(2)}$ çatallanma parametresi seçilerek, çatallanma parametresinin kritik değeri $q_{1,k}^{(2)}$ için Hopf çatallanmanın ortaya çıktığı vurgulanmıştır (Bakınız Teorem 3.1). Bundan sonraki birkaç simülasyon bu davranışı göstermektedir.



Şekil 4.9: $q_2^{(1)} = 0.02$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_1^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip birinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(1)}(t)$ $q_2^{(1)} = 0.11$ (karo), 0.5 (kare), 1 (daire), 1.005 (yıldız) değerleri için verilmiştir.

Son olarak, (3.21) sisteminde Hopf çatallanmanın ortaya çıktığını gösteren nümerik simülasyonlar elde edilmiştir. Nümerik simülasyonlar için, birinci hisse senedinin değerlenmesine bağlı büyüklük parametresi $q_2^{(1)} = 0.02$ olarak sabitlenmiştir. Diğer parametre değerleri ise $c_2^{(1)} = 2$, $c_1^{(2)} = 1$, $P_a^{(1)} = 4$ ve $P_a^{(2)} = 6$ şeklinde alınarak G ,

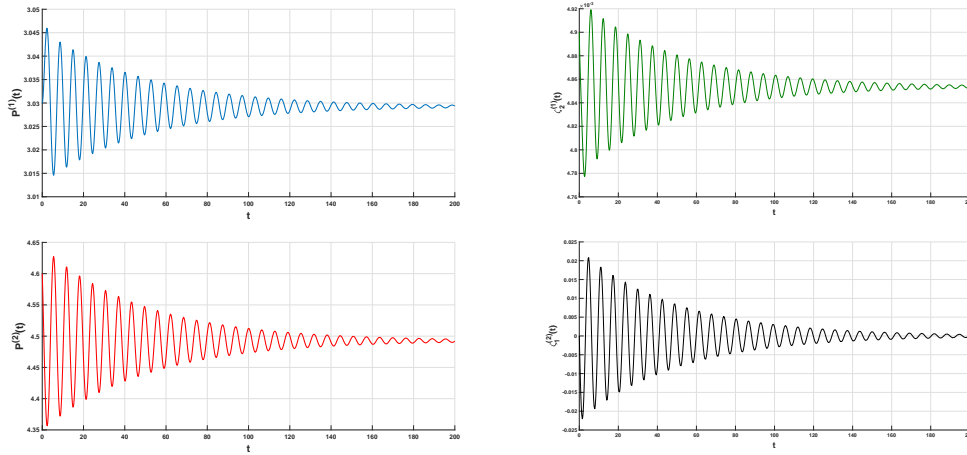


Şekil 4.10: $q_2^{(1)} = 0.02$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_2^{(2)}(0)) = (4, 6, 0.01, 0.01)$ başlangıç değerine sahip ikinci hisse senedi fiyatının çözüm grafiği $P^{(2)}(t)$ $q_2^{(1)} = 0.11$ (karo), 0.5 (kare), 1 (daire), 1.005 (yıldız) değerleri için verilmiştir.

$-\frac{B}{A}$ ve $-\frac{D}{G}$ aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır:

$$G = -4.1514, \quad -\frac{B}{A} = 2.5000 \quad \text{ve} \quad -\frac{D}{G} = 1.7153.$$

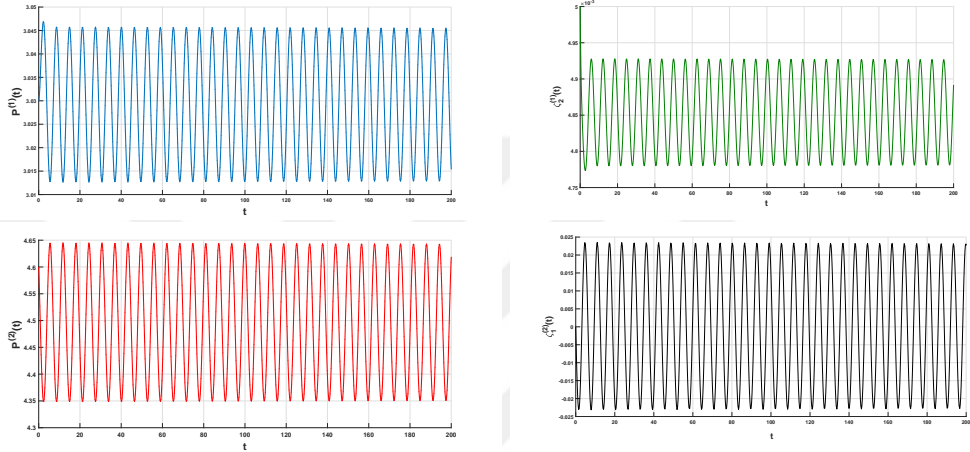
$\phi(q_1^{(2)})$ fonksiyonunun kökleri ise 0.998392869619098, 1.998473892423508, 2.217164421950436 olarak bulunmuştur (Bakınız (3.47)). Böylece, Teorem 3.1'deki **P1** şartına göre, Hopf çatallanma $q_{1,k}^{(2)} \doteq 1 < \min(-\frac{B}{A}, -\frac{D}{G})$ değerinde ortaya çıkar.



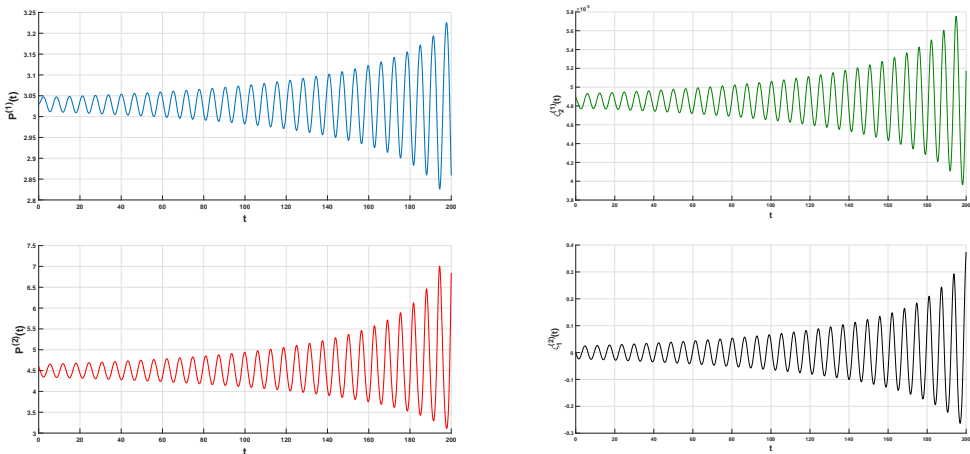
Şekil 4.11: $q_1^{(2)} = 0.98 < q_{1,k}^{(2)}$ değeri için (3.21) sisteminin $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_1^{(2)}(0)) = (3.03, 4.6, 0.0049, 0)$ başlangıç değerine sahip çözümlerinin grafikleri.

Şekil 4.11'de, Şekil 4.12'de ve Şekil 4.13'te başlangıç değer $P^{(1)}(0) = 3.03$, $P^{(2)}(0) = 4.6$, $\zeta_2^{(1)}(0) = 0.0049$ ve $\zeta_1^{(2)}(0) = 0$ alınarak (3.21) sisteminin

çözümlerinin grafiği, sırasıyla $q_1^{(2)} = 0.98 < q_{1,k}^{(2)}$, $q_1^{(2)} = 1 \doteq q_{1,k}^{(2)}$, $q_1^{(2)} = 1.01 > q_{1,k}^{(2)}$ değerleri için çizdirilmiştir. Yukarıda verilen parametre değerleri için sistemin tek denge noktası $(P_{eq}^{(1)}, P_{eq}^{(2)}, \zeta_{2,eq}^{(1)}, \zeta_{1,eq}^{(2)}) = (3.0293, 4.4927, 0.0049, 0)$ dir. Şekil 4.11'de denge noktasının çatallanma parametresinin kritik değeri $q_1^{(2)}$ 'den küçük $q_1^{(2)} = 0.98$ değeri için kararlı olduğu görülmektedir. $q_1^{(2)} = 1$, yani çatallanma parametresinin kritik değerine eşit seçildiğinde sistemin çözüm eğrilerinin periyodik yapıya sahip olduğu Şekil 4.12'de görülmektedir. Şekil 4.13'e göre $q_1^{(2)} = 1,01$ iken, yani çatallanma parametresinin kritik değeri $q_{1,k}^{(2)}$ 'den daha büyük iken, sistemin denge noktası kararsızdır.

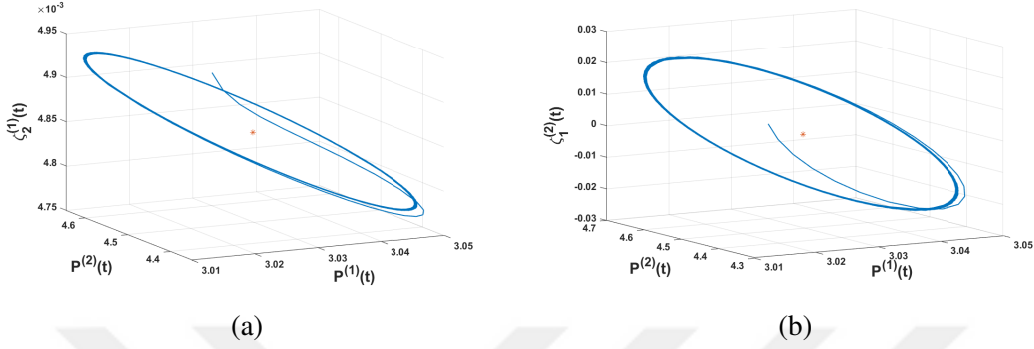


Şekil 4.12: $q_1^{(2)} = 1 \doteq q_{1,k}^{(2)}$ değeri için (3.21) sisteminin $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_1^{(2)}(0)) = (3.03, 4.6, 0.0049, 0)$ başlangıç değerine sahip çözümlerinin grafikleri.



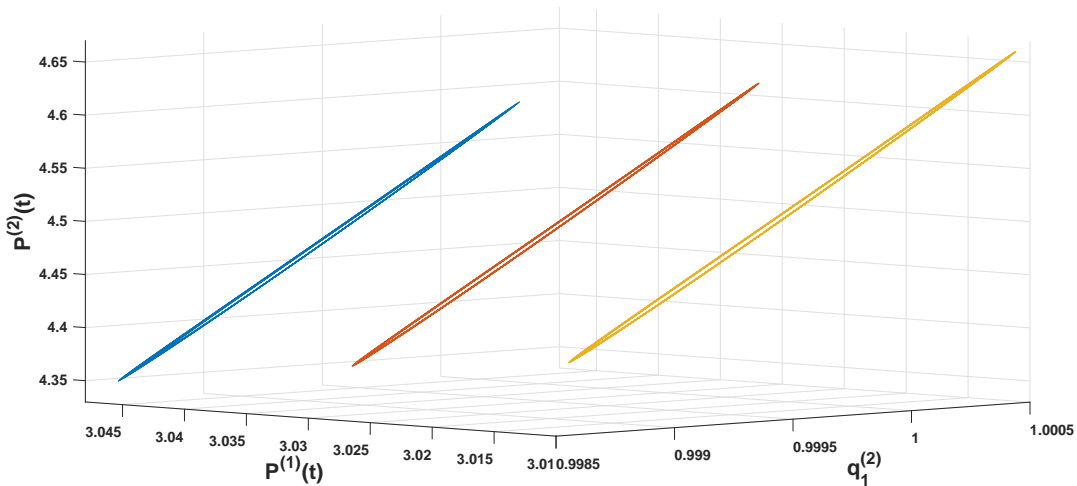
Şekil 4.13: $q_1^{(2)} = 1.01 > q_{1,k}^{(2)}$ değeri için (3.21) sisteminin $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_1^{(2)}(0)) = (3.03, 4.6, 0.0049, 0)$ başlangıç değerine sahip çözümlerinin grafikleri.

$q_1^{(2)} = 1 \doteq q_{1,k}^{(2)}$ iken (3.21) sisteminin birinci ve ikinci hisse senedi fiyatları ile birinci hisse senedine bağlı duyarlılık fonksiyonu çözümlerinin grafiği $(P^{(1)}(t), P^{(2)}(t), \zeta_2^{(1)}(t))$ ile birinci ve ikinci hisse senedi fiyatları ile ikinci hisse senedine bağlı duyarlılık fonksiyonu çözümlerinin grafiği $(P^{(1)}(t), P^{(2)}(t), \zeta_1^{(2)}(t))$ Şekil 4.14'de verilmiştir.



Şekil 4.14: $q_1^{(2)} = 1 \doteq q_{1,k}^{(2)}$ iken $(P^{(1)}(0), P^{(2)}(0), \zeta_2^{(1)}(0), \zeta_1^{(2)}(0)) = (3.03, 4.6, 0.0049, 0)$ başlangıç değerine sahip $(P^{(1)}(t), P^{(2)}(t), \zeta_2^{(1)}(t))$ grafiği solda, $(P^{(1)}(t), P^{(2)}(t), \zeta_1^{(2)}(t))$ grafiği sağda verilmiştir. Grafiklerdeki yıldız sistemin denge noktasını ifade eder.

Son olarak, Şekil 4.15 ile $q_1^{(2)}$ parametresine bağlı çatallanma diyagramı verilmiştir. Şekil 4.15'te $(P^{(1)}(t), P^{(2)}(t))$ çözümlerinin grafiği üç farklı $q_1^{(2)}$ değeri için, yani $q_1^{(2)} = 0.9985, 0.9995, 1.0005$ değerleri için çizdirilmiştir.



Şekil 4.15: $(P^{(1)}(t), P^{(2)}(t))$ çözümlerinin grafiği $q_1^{(2)} = 0.9985$ için solda, $q_1^{(2)} = 0.9995$ için ortada, $q_1^{(2)} = 1.0005$ için sağda verilmiştir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Finansal piyasalarda meydana gelen krizler, fiyat dalgalanmaları, piyasadaki belirsizlikler vb. gelişimler ülke ekonomilerini olumsuz yönde etkileyen faktörlerdendir. Finansal piyasalarda meydana gelen bu olumsuz etkenlerin nedenlerini açıklayabilecek, finansal piyasaların dinamiği ile ilgili sorulara cevap verebilecek matematiksel modellerin geliştirilmesi önem arz etmektedir. Bu amaç doğrultusunda stokastik ve deterministik olmak üzere iki farklı yaklaşım kullanılarak finansal piyasalar için matematiksel modeller oluşturulmuştur. Stokastik modeller teorik çalışmalar için kullanışlı fakat pratikte pek de dikkate alınmayan varsayımlar kullanılarak oluşturulmuştur. Bu modeller ani fiyat artışlarını ya da azalışlarını, piyasadaki kararsızlıkları, fiyat dalgalanmalarını açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Deterministik modeller için kullanılan varsayımlar ise pratikte yaygın olarak kabul gören önemli beklentilere cevap verdiği için bu modeller finansal piyasaların davranışını, piyasalarda meydana gelen köpükleri, hisse senedi fiyatındaki dalgalanmaları açıklamak için alternatif bir bakış açısı ile oluşturulmuştur. Finansal piyasalar için deterministik yaklaşım kullanılarak 1990 yılların başından itibaren pek çok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda bir hisse senedi ve bir ya da çok sayıda yatırımcı grup içeren finansal piyasalar için matematiksel modeller oluşturulmuştur. Ayrıca bu modellerin kararlılık analizi çalışılarak piyasanın dinamiği incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında ise iki hisse senedi ve bu hisse senetlerinin rastgele dağıtıldığı bir yatırımcı grup içeren kapalı bir finansal piyasa ele alınmıştır. Yatırımcı grubun hisse senedi satın alırken her iki hisse senedinin fiyatına bağlı bir strateji, fakat hisse senedi satarken diğer hisse senedi fiyatına bağlı olmayan bir strateji izlediği varsayılmıştır. Yatırımcı tercihlerinin hisse senedi fiyatının yönüne ve hisse senedinin değerlendirilmesine göre belirlendiği düşünülerek finansal piyasa için dinamik sistemler yaklaşımı ile matematiksel bir model elde edilmiştir.

Modelin denge noktaları belirlenmiş, kararlılık analizi çalışılmış ve denge noktalarının kararlı olabilmesi için parametreler üzerine konması gereken şartlar belirlenmiştir. İlk olarak, yatırım tercihlerinin sabit olarak kabul edilmesi durumunda elde edilen modelin denge noktalarının tüm parametre değerleri için kararlı olduğu gösterilmiştir. Daha sonra yatırımcıların her bir hisse senedi alım satımı için hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı bir yatırım stratejisi izlediği varsayımı altında

modelin denge noktalarının kararlı olması için gerekli şartlar bulunmuştur. Bu şartlar hisse senetlerini satın alma veya satma olasılıklarının duyarlılık fonksiyonlarına göre değişimlerine bağlı olarak belirlenmiştir. Eğer bir hisse senedine bağlı duyarlılık fonksiyonunun bu hisse senedinin alım satım yapma oranına etkisi, diğer hisse senedinin duyarlılık fonksiyonunun etkisinden fazla ise modelin denge noktalarının kararlı olacağı sonucuna ulaşılmıştır. Son olarak, her bir hisse senedi için yatırımcı grubun farklı yatırım stratejileri izlediği, yani özel olarak yatırımcıların birinci hisse senedi için hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı yatırım stratejisi, ikinci hisse senedi için hisse senedi fiyatının yönüne bağlı yatırım stratejisi izlediği varsayılarak modelin denge noktalarının kararlı olabilmesi için gerekli şartlar belirlenmiştir. Bu varsayım altında yatırımcı grubun hisse senedi yönüne bağlı olan hisse senedinin fiyatındaki artış ya da azalışa daha yavaş tepki vermesi, hisse senedi yönüne bağlı duyarlılık fonksiyonunun fiyat değişimlerine bağımlılığı oldukça küçük olması durumunda denge noktalarının kararlı olacağı vurgulanmıştır.

Tezin ikinci kısmında geçiş oranı fonksiyonu olarak adlandırılan ve hisse senedini satın alma ya da satma kararını belirleyen fonksiyonlar özel olarak tanımlanarak birinci kısımda elde edilen sistem için bir örnek oluşturulmuştur. İlk önce, yatırımcıların her iki hisse senedi için de sadece hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı olarak alım satım kararı aldıkları düşünülerek modelin kararlılık analizi çalışılmıştır ve tüm parametre değerleri için modelin denge noktalarının kararlı olduğu görülmüştür. İkinci olarak, yatırımcıların birinci hisse senedi için hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı yatırım stratejisi, ikinci hisse senedi için hisse senedi fiyatının yönüne bağlı yatırım stratejisi izlediği varsayılmıştır. Bu durum için de modelin kararlılık analizi çalışılmış ve denge noktalarının kararlı olabilmesi için parametreler üzerine konması gereken şartlar belirlenmiştir. Ayrıca modelin Hopf çatallanma analizi yapılmış ve ikinci hisse senedi fiyatının yönüne bağlı büyüklük parametresi $q_1^{(2)}$ 'in değişimine bağlı olarak ortaya çıkan periyodik çözümlerin varlığı incelenmiştir.

Son bölümde ise, elde edilen analitik sonuçları desteklemek ve geliştirmek için nümerik simülasyonlar elde edilmiştir. Yatırımcı grubun sadece hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı yatırım stratejisi izlediği varsayılarak elde edilen model için yapılan nümerik simülasyonlar analitik sonuçların vurguladığı gibi denge noktasının her parametre değeri için kararlı olduğunu göstermiştir. Ayrıca bir hisse senedinin değerlendirilmesine bağlı büyüklük parametresi arttıkça o hisse senedinin denge fiyatının hisse senedinin esas değerine yaklaştığı sonucuna ulaşılmıştır. Nümerik simülasyonlar hisse senetleri için yatırımcı grubun farklı yatırım stratejileri izlediği durum için elde edilen modelin kararlı denge noktasının hisse senedi fiyatının yönüne

bağlı büyüklük parametresi $q_1^{(2)}$ arttıkça kararsız denge noktasına dönüştüğünü ve $q_{1,k}^{(2)}$ kritik değerinde Hopf çatallanmanın ortaya çıktığını göstermiştir. Periyodik çözümlerin belirlenmesi finansal piyasalar açısından oldukça önemlidir. Klasik ekonomide denge fiyatın tek bir nokta olduğu varsayılmaktadır. Ancak, bu tez çalışması bir dizi parametre değeri için denge noktasının bir limit döngüsü olarak görüleceğini göstermiştir.





KAYNAKLAR

- Allen, L.J.S.**, *An Introduction to Mathematical Biology*, Upper Saddle River, Pearson-Prentice Hall, New Jersey, (2007).
- Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A.J.**, *Investments*, McGraw-Hill Education, New York, (2008).
- Asada, T., Yoshida, H.**, (2003). Coefficient criterion for four-dimensional Hopf bifurcations: a complete mathematical characterization and applications to economic dynamics, *Chaos, Solitons and Fractals*, 18, 525-536, doi:10.1016/S0960-0779(02)00674-4.
- Beard, T., Beil, B.**, (1994). Do people rely on the self-interested maximization of others? An experimental test, *Management Science*, 40, 252-262.
- Caginalp, G., Ermentrout, G.B.**, (1990). A kinetic thermodynamics approach to the psychology of fluctuations in financial markets, *Applied Mathematics Letters*, 3, 17-19, doi:10.1016/0893-9659(90)90038-D.
- Caginalp, G., Ermentrout, G.B.**, (1991). Numerical studies of differential equation related to theoretical financial markets, *Applied Mathematics Letters*, 4, 35-38, doi:10.1016/0893-9659(91)90118-F.
- Caginalp, G., Balenovich, D.**, (1994). Market oscillations induced by the competition between value-based and trend-based investment strategies, *Applied Mathematical Finance*, 1, 129-164, doi:10.1080/13504869400000009.
- Caginalp, G., Porter, D., Smith, V.L.**, (1998). Initial cash/asset ratio and asset prices: An experimental study, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 95, 756-761.
- Caginalp, G., Porter, D., Smith, V.L.**, (2000). Momentum and overreaction in experimental asset markets, *International Journal of Industrial Organization*, 18, 187-204, doi:10.1016/S0167-7187(99)00039-9.
- Caginalp, G., Balenovich, D.**, (1999). Asset flow and momentum: deterministic and stochastic equations, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 357, 2119-2133, doi:10.1098/rsta.1999.0421.
- Caginalp, G., Merdan, H.**, (2007). Asset price dynamics with heterogenous groups, *Physica D*, 225, 43-54, doi:10.1016/j.physd.2006.09.036.

- Caginalp, G., DeSantis, M.,** (2011). Nonlinearity in the dynamics of financial markets, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 12, 1140-1151, doi:10.1016/j.nonrwa.2010.09.008.
- Caginalp, G., DeSantis, M.,** (2011). Multi-group asset flow equations and stability, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B (DCDS-B)*, 16, 109-150, doi:10.3934/dcdsb.2011.16.109.
- Caginalp, G., DeSantis, M.,** (2011). Stock price dynamics: Nonlinear trend, volume, volatility, resistance and money supply, *Quantitative Finance*, 11, 849-861, doi:10.1080/14697680903220356.
- Caginalp, G., DeSantis, M., Swigon, D.,** (2011). Are flash crashes caused by instabilities arising from rapid trading?, *Wilmott magazine*, 46-47.
- Caginalp, G., Ilieva, V.,** (2008). Hybrid methodology for technical analysis, *Nonlinear Analysis Hybrid Systems*, 2, 1144-1151, doi:10.1016/j.nahs.2008.09.007.
- Caginalp, G., Ilieva, V.,** (2008). The dynamics of trader motivations in asset bubbles, *Journal of Economic Behavior Organization*, 66, 641-656, doi:10.1016/j.jebo.2006.01.011.
- Daniel, K.D., Hirshleifer, D., Subrahmanyam, A.,** (1998). Investor psychology and security market under and overreaction, *Journal of Finance*, 53(6), 1839-1885, doi:10.1111/0022-1082.00077.
- Davis, D., Holt, C.,** *Experimental Economics*, Princeton University Press, New Jersey, (1993).
- DeSantis, M., Swigon, D., Caginalp, G.,** (2012). Nonlinear dynamics and stability in a multi-group asset flow model, *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, 11(3), 1114-1148, doi:10.1137/120862211.
- DeSantis, M., Swigon, D.,** (2018). Slow-fast analysis of a multi-group asset flow model with implications for the dynamics of wealth, *PloS one*, 13, e0207764, doi:10.1371/journal.pone.0207764.
- Duran, A.,** (2011). Stability analysis of asset flow differential equations, *Applied Mathematics Letters*, 24(4), 471-477, doi:10.1016/j.aml.2010.10.044.
- Fudenberg, D., Tirole, J.,** *Game Theory*, Massachusetts Institute of Technology, (1991).
- Hale, J., Koçak, H.,** *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, (1991).
- Hassard, B.D., Kazarinoff, N.D., Wan, Y.H.,** *Theory and Application of Hopf Bifurcation*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1981).
- Henderson, J.M., Quant, R.E.,** *Microeconomic Theory, A Mathematical Approach*, McGraw-Hill, (1980).

- Kaldor, N.**, (1934). A classificatory note on the determinateness of equilibrium, *The Review of Economic Studies*, 1(2), 122-136, doi:10.2307/2967618.
- Karaoğlu, E.**, (2016). *Gecikmeli bir yapay sinir ağımodeli ile gecikmeli bir av-cımodelinin kararlılık ve Hopf çatallanma analizleri* (Doktora Tezi), TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Lopes, L.**, (1987). Between hope and fear: the psychology of risk, *Advances in Experimental Social Psychology*, 20, 255-295, doi:10.1016/S0065-2601(08)60416-5.
- Merdan, H., Caginalp, G., Troy, W.C.**, (2016). Bifurcation analysis of a single-group asset flow model, *Quarterly of Applied Mathematics*, 74, 275-297, doi:10.2139/ssrn.2768610.
- Merdan, H., Alisen, M.**, (2011). A mathematical model for asset pricing, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 1449-1456, doi:10.1016/j.amc.2011.06.028.
- Merdan, H., Cakmak, H.**, (2012). Liquidity effect on the asset price forecasting, *Journal of Nonlinear Systems and Applications*, 82-87.
- Mishkin, F.S., Eakins, S.G.**, *Financial Markets and Institutions*, Pearson, (2006).
- Poterba, J.M., Summers, L.H.**, (1988). Mean reversion in stock prices: Evidence and implications, *Journal of Financial Economics*, 22, 27-59, doi:10.3386/w2343.
- Shefrin, H.**, *A Behavioral Approach to Asset Pricing*, Elsevier, New York, (2005).
- Shefrin, H., Statman, M.**, (1985). The disposition to sell winners too early and ride losers too long: Theory and Evidence, *The Journal of Finance*, 40, 777-790, doi:10.2307/2327802.
- Smith, V.L., Suchanek, G.L., Williams, A.W.**, (1988). Bubbles, crashes and endogenous expectations in experimental spot asset markets, *Econometrica*, 56(5), 1119-1151, doi:10.2307/1911361.
- Porter, D., Smith, V.L.**, (1994). Stock market bubbles in the laboratory, *Applied Mathematical Finance*, 1, 111-128, doi:10.1080/13504869400000008.
- Watson, D.S., Getz, M.**, *Price Theory and Its Uses*, University Press of America, Lanham, MD, (1993).
- Wilmott, P.**, *Paul Wilmott introduces Quantitative Finance*, John Wiley & Sons, (2007).
- Yucel, H.**, (2012). *Opsiyon Fiyatlama Modellerinin Kararlılık Analizi* (Yüksek Lisans Tezi), TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

- Url-1** <https://www.economicshelp.org/blog/glossary/cobweb-theory/>, alındığı tarih: 11 Mart 2019.
- Url-2** <https://www.dogrulukpayi.com/bulten/kuru-sogan-enflasyonu>, alındığı tarih: 11 Mart 2019.



EKLER

EK 1 : Denge Noktasının Nümerik Olarak Hesaplanması

EK 2 : Geçiş Oranı Fonksiyonları İçin Bir Örnek

EK 3 : Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü



EK 1: Denge Noktasının Nümerik Olarak Hesaplanması

(3.6) sisteminin denge noktaları sistemin sağ tarafındaki denklemler sıfıra eşitlenerek bulunur. Sistemdeki ilk iki denklemi sıfıra eşitlersek

$$P_{eq}^{(1)} = \frac{(1 + \zeta_{2,eq}^{(1)})(3 - \zeta_{2,eq}^{(2)})M}{4(1 - \zeta_{2,eq}^{(1)})N^{(1)}}, \quad (5.1)$$

$$P_{eq}^{(2)} = \frac{(1 + \zeta_{2,eq}^{(2)})(3 - \zeta_{2,eq}^{(1)})M}{4(1 - \zeta_{2,eq}^{(2)})N^{(2)}} \quad (5.2)$$

elde edilir. Sistemdeki son iki denklem ve (5.1)-(5.2) denklemleri kullanılarak aşağıdaki lineer olmayan denklem sistemi elde edilir:

$$G(\zeta_{2,eq}^{(1)}, \zeta_{2,eq}^{(2)}) = c_2^{(1)} q_2^{(1)} \left(1 - \frac{M(1 + \zeta_{2,eq}^{(1)})(3 - \zeta_{2,eq}^{(2)})}{4N^{(1)}P_a^{(1)}(1 - \zeta_{2,eq}^{(1)})}\right) - c_2^{(1)} \zeta_{2,eq}^{(1)},$$
$$H(\zeta_{2,eq}^{(1)}, \zeta_{2,eq}^{(2)}) = c_2^{(2)} q_2^{(2)} \left(1 - M \frac{(1 + \zeta_{2,eq}^{(2)})(3 - \zeta_{2,eq}^{(1)})}{4N^{(2)}P_a^{(2)}(1 - \zeta_{2,eq}^{(2)})}\right) - c_2^{(2)} \zeta_{2,eq}^{(2)}.$$

Bölüm 4'de, 3.6 sisteminin denge noktalarını nümerik olarak bulmak için ilk olarak tüm parametreler ($c_2^{(1)}$, $c_2^{(2)}$, $q_2^{(1)}$, $q_2^{(2)}$, M , $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $P_a^{(1)}$, $P_a^{(2)}$) sabitlenmiştir ve daha sonra MATLAB programında "fsolve" fonksiyonu kullanılarak

$$\begin{cases} G(\zeta_{2,eq}^{(1)}, \zeta_{2,eq}^{(2)}) = 0 \\ H(\zeta_{2,eq}^{(1)}, \zeta_{2,eq}^{(2)}) = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

denklem sisteminin kökleri, yani (3.6) sisteminin denge noktasının $\zeta_{1,eq}^{(2)}$ ve $\zeta_{1,eq}^{(2)}$ bileşenleri bulunmuştur. Son olarak, bulunan bu değerler (5.1)-(5.2) denklemlerinde yerine yazılarak $P_{eq}^{(1)}$ ve $P_{eq}^{(2)}$ değerleri de hesaplanmıştır. Böylece, 3.6 sisteminin denge noktası nümerik olarak hesaplanmıştır.

EK 2: Geçiş Oramı Fonksiyonları İçin Bir Örnek

(3.1) de verilen $k^{(1)}$ ve $k^{(2)}$ aşığıdaki şekilde de tanımlanabilir:

$$k^{(1)}(t) : = \frac{1 + \tanh(\zeta_1^{(1)}(t) + \zeta_2^{(1)}(t))}{3 + \tanh(\zeta_1^{(2)}(t) + \zeta_2^{(2)}(t))}, \quad (5.4)$$

$$k^{(2)}(t) : = \frac{1 + \tanh(\zeta_1^{(2)}(t) + \zeta_2^{(2)}(t))}{3 + \tanh(\zeta_1^{(1)}(t) + \zeta_2^{(1)}(t))}. \quad (5.5)$$

Sonuç olarak $k^{(1)}, k^{(2)} \in [0, 1]$ dir.



EK 3: Türkçe-İngilizce Matematik Terimleri Sözlüğü

Türkçe terim	İngilizce Terim
Akış	Flow
Aşık olmayan denge noktası	Nontrivial equilibrium point
Çatallanma	Bifurcation
Çekici	Attractive
Değerlenme	Valuation
Denge noktası	Equilibrium point
Geçiş oranı fonksiyonu	Transition rate function
Hisse senedi fiyatının yönü	Trend
Kararlılık	Stability
Karakteristik	Characteristic
Lineer	Linear
Nitel	Qualitative
Özdeğer	Eigenvalue
Özuzay	Eigenspace
Özvektör	Eigenvector
Sırf sanal	Purely imaginary
Subkritik	Subcritical
Süperkritik	Supercritical
Tek katlı (Basit) kök	Simple root
Transversalite (Kesme) koşulu	Transversality condition
Vektör değerli diferensiyel denklem	Vector equation
Yerel (Lokal)	Local

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Hatice BULUT
Uyruđu : T.C.
Dođum Tarihi ve Yeri : 28.03.1987, Adana
E-posta : cakar.hatice@gmail.com

ÖĐRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2010, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi,
Fen Edebiyat Fakóltesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2012, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı
- **Doktora** : 2019, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev
2010-2012	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Tam Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi
2010-2012	TÜBİTAK	Yurtiçi Yüksek Lisans Bursu
2010-2012	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Tam Burslu Doktora Öğrencisi
2012-2017	TÜBİTAK	Yurtiçi Doktora Bursu

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Merdan H., **Bulut H.**, A Mathematical for Asset Pricing, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling (ICAAMM 2017), İstanbul-Turkey, July 3-7, 2017
- Merdan H., **Bulut H.**, Hisse Senedi Fiyatlandırması için Yeni Bir Matematiksel Model, 13. Ankara Matematik Günleri, Ankara-Türkiye, 27-28 Nisan, 2018
- Merdan H., **Bulut H.**, A Novel Mathematical Model for Asset Pricing, 5th International Conference on Complex Dynamical System in Life Sciences: Modeling and Analysis (5thICCDS-2018), Aveiro-Portugal, May 10-12, 2018
- **Bulut H.**, Merdan H., Swigon D., Asset price dynamics for a two-asset market system, International Meeting on Applied Mathematics & Evolution (IMAME 2019), La Rochelle-France, April 16-18, 2019
- **Bulut H.**, Merdan H., Swigon D., Asset price dynamics for a two-asset market system, Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 29:023114, 2019, doi:10.1063/1.5046925

DİĞER YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Vardar Acar C., **Bulut H.**, Bounds On the Expected Value of Maximum Loss of Fractional Brownian Motion, Statistics and Probability Letters, Vol 104, 117-122, 2015
- Vardar Acar C., **Bulut H.**, Some Bounds on the Expected Values of Supremum and of Maximum Loss of Fractional Brownian Motion Using Discretization Method, International Conference on Applied and Computational Mathematics (ICACM), Ankara-Turkey, October 3-6, 2012
- Yalta A.T., **Cakar H.**, Energy Consumption and Economic Growth in China: A Reconciliation, Energy Policy, 41, 666-675, 2012