TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TOPLAM SÜRECİ YARDIMIYLA LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİNİN ÇALIŞILMASI

DOKTORA TEZİ

İsmail ASLAN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Oktay DUMAN

NİSAN 2019

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

....
Prof.Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Doktora derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

....
Prof.Dr. Oktay DUMAN
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 142111008 numaralı Doktora öğrencisi **İsmail ASLAN**'ın ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"TOPLAM SÜRECİ YARDIMIYLA LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİNİN ÇALIŞILMASI"** başlıklı tezi **8 Nisan 2019** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı:	**Prof.Dr. Oktay DUMAN** TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri:	**Prof.Dr. Cihan ORHAN (Başkan)** Ankara Üniversitesi	....
	Prof.Dr. Mustafa BAYRAKTAR TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....
	Prof.Dr. Emin ÖZÇAĞ Hacettepe Üniversitesi	....
	Prof.Dr. Ogün DOĞRU Gazi Üniversitesi	....

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

İsmail ASLAN

ÖZET

Doktora Tezi

TOPLAM SÜRECİ YARDIMIYLA LİNEER OLMAYAN OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİNİN ÇALIŞILMASI

İsmail ASLAN

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Oktay DUMAN

Tarih: Nisan 2019

Bu tezde konvolüsyon tipindeki lineer olmayan integral operatörlerinin toplanabilme metotları yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Toplanabilme metotlarının kullanımı sayesinde bilinen yaklaşım sonuçlarının daha genel versiyonları elde edilmiştir.

Bilindiği üzere bir toplanabilme metodu, ıraksak bir diziyi (bir anlamda) yakınsak yapabildiği gibi yakınsak bir dizinin de yakınsama oranını hızlandırabilmektedir. Örneğin, sürekli ve periyodik bir fonksiyonun Fourier serisi ıraksak olabilse de onun aritmetik ortalaması (yani, Cesàro toplamı) daima fonksiyonun kendisine yakınsar. Bir diğer örnek ise, yakınsak bir dizinin uygun bir alt dizi matris dönüşümü, dizinin yakınsaklık oranını hızlandırır. Tüm bu durumlar toplanabilme teorisinin önemini ortaya koymaktadır.

Toplanabilme teorisi şimdiye kadar yaklaşımlar teorisi başta olmak üzere matematiğin birçok alanında yer almaktadır. Örneğin fonksiyonlar teorisinde analitik devam ilkesinde, uygulamalı matematikte lineer denklem sistemlerinin çözümleri için iterasyon metotlarının üretiminde ve yukarıda belirtildiği üzere yaklaşımlar teorisinde Fourier serilerinin yakınsamasında kullanılmıştır.

Bu tezde, Bell tarafından 1971 yılında tanımlanan genel bir toplanabilme metodu, ilk kez lineer olmayan operatörlerin yaklaşımında kullanılmıştır. Bu sayede Angeloni ve Vinti'nin 2006 yılında elde ettikleri sonuçlar geliştirilmiştir.

Bu çalışmada negatif olmayan regüler matris aileleri göz önüne alınmıştır. Toplanabilme metodu, klasik yakınsaklığın yanı sıra, Cesàro tarafından verilen aritmetik ortalama yakınsaklık, Lorentz tarafından verilen hemen hemen yakınsaklık ve Jurkat ve Peyerimhoff tarafından verilen dereceli yakınsaklık gibi bilinen pek çok yakınsaklık metodunu içermektedir.

Lineer olmayan operatörler ile önce tek değişkenli ve 2π periyotlu fonksiyonlara daha sonra da çok değişkenli fonksiyonlara yaklaşılmıştır. Yaklaşımlarda hem salınım yarı-normu hem de klasik supremum normu göz önüne alınacaktır. Salınım yarı-normuna göre yaklaşımda sınırlı salınımlı fonksiyonlar kullanılırken, supremum normuna göre yaklaşımda ise düzgün sürekli fonksiyonlar dikkate alınmıştır.

Daha sonra uygun Lipschitz sınıfları yardımıyla yakınsaklık oranları hesaplanmıştır. Elde edilen yaklaşım sonuçları kullanılarak mutlak süreklilik ve düzgün süreklilik için bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir. Son olarak, tezde ispatlanan yaklaşım sonuçlarını desteklemek için çeşitli operatör dizileri inşa edilmiş ve bunların yaklaşımı grafikler üzerinden gösterilmiş ve hata tahminleri de sayısal olarak hesaplanmıştır.

Lineer olmayan operatörler üzerinde inceleme yapılması ve toplanabilme teorisindeki yöntemlerin etkin bir şekilde kullanılması göz önüne alındığında bu tezde elde edilen sonuçlar, literatüre özgün bir katkı sunmuş olup gelecekte konuyla ilgili yapılacak incelemeler için de bir temel olacağını ümit ederiz.

Anahtar Kelimeler: Lineer olmayan operatörler, İntegral operatörleri, Konvolüsyon tipinde operatörler, Toplanabilme metodu, Sınırlı salınımlılık, Düzgün yakınsaklık, Yaklaşım hızı, Düzgün süreklilik, Mutlak süreklilik.

ABSTRACT

Doctor of Philosophy

STUDY OF APPROXIMATION PROPERTIES OF NONLINEAR OPERATORS
VIA SUMMABILITY PROCESS

İsmail ASLAN

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof.Dr. Oktay DUMAN

Date: April 2019

In this thesis, the nonlinear integral operators of the convolution type are investigated with the help of summability methods. More general versions of the known approximation results are obtained through the use of summability methods.

As known, a summability method can make a divergent sequence convergent (in some sense) and may accelerate the rate of convergence of a convergent sequence. For example, although the Fourier series of a continuous and periodic function may be divergent, its arithmetic mean (that is, Cesàro mean) always approaches to the function itself. In another example, a suitable sub-sequence matrix transformation of a convergent sequence accelerates the rate of convergence of the sequence. All these cases reveal the importance of summability theory.

The theory of summability has so far been involved in many areas of mathematics, particularly in the approximation theory. For instance, it is used for the principle of analytic continuation in function theory, for the production of iterative methods for the solution of linear equation systems in applied mathematics and for the convergence of Fourier series in the approximation theory as mentioned above.

In this thesis, a general summability method defined by Bell in 1971 is used in the convergence of nonlinear operators for the first time. In this way, Angeloni and Vinti's results which are obtained in 2006 are improved.

In this study, the family of non-negative regular matrices are considered. These methods contain not only the classical convergence but also the arithmetic mean convergence given by Cesàro, the almost convergence introduced by Lorentz, and the order summability defined by Jurkat and Peyerimhoff.

With nonlinear operators, we first approximate to univariate and 2π-periodic functions and then to multivariate functions. In the approximations, both variation semi-norm and classical supremum norm will be considered. We use functions of bounded variations in the variation seminorm, while uniformly continuous functions in the supremum norm.

After that, rates of convergence are calculated with the help of suitable Lipschitz classes. Using the estimation results obtained, some characterizations of absolute continuity and uniform continuity are given. Finally, in order to support our approximation results we construct some sequences of operators and display their graphs and also compute the error estimations numerically.

Considering the investigation on nonlinear operators and using summability methods effectively, the results obtained in this thesis offer an original contribution to the literature and we expect that it provides a basis for studies in the future.

Keywords: Nonlinear operators, Integral operators, Convolution type operators, Summability method, Bounded variation, Uniform convergence, Order of approximation, Uniform continuity, Absolute continuity.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Prof.Dr. Oktay DUMAN'a, kıymetli tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine, tez çalışmamdaki yardımlarından dolayı değerli tez izleme kurulu üyeleri Prof.Dr. Mustafa BAYRAKTAR'a ve Prof.Dr. Ogün DOĞRU'ya, yapıcı yorumlarından dolayı değerli jüri üyeleri Prof.Dr. Cihan ORHAN'a ve Prof.Dr. Emin ÖZÇAĞ'a, karşılaştığım zorluklarda yardımlarını esirgemeyen TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü ve Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü asistan arkadaşlarıma, bugünlere gelmemde büyük emek gösteren aileme, destekleriyle daima yanımda olan eşim Nisa ASLAN'a ve son olarak maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine, Orta Doğu Teknik Üniversitesine ve Hacettepe Üniversitesine çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

KISALTMALAR

bkz. : bakınız
d.d. : diğer durumlarda

SEMBOL LİSTESİ

Bu çalışmada kullanılmış olan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathscr{A}-\lim x = L$	$x=(x_k)$ dizisinin $\mathscr{A}-$limiti
$AC[a,b]$	$[a,b]$ aralığındaki mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
$AC_{2\pi}$	2π periyotlu ve $[-\pi,\pi]$ aralığındaki mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
$AC_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$	$\mathbb{R}^N$ de lokal mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
$AC\left(\mathbb{R}^N\right)$	$\mathbb{R}^N$ de Tonelli anlamda sınırlı ve lokal mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı
$B_{2\pi}$	2π periyotlu ve ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar uzayı
$B\left(\mathbb{R}^N\right)$	$\mathbb{R}^N$ de ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar uzayı
$BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$	$\mathbb{R}^N$ de sınırlı ve düzgün sürekli fonksiyonlar uzayı
$BV[a,b]$	$[a,b]$ aralığındaki sınırlı salınımlı fonksiyonlar uzayı
$BV_{2\pi}$	2π periyotlu sınırlı salınımlı fonksiyonlar uzayı
$BV\left(\mathbb{R}^N\right)$	$\mathbb{R}^N$ de Tonelli anlamda sınırlı salınımlı fonksiyonlar uzayı
$C_{2\pi}$	2π periyotlu ve $[-\pi,\pi]$ aralığındaki sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_c\left(\mathbb{R}^N\right)$	$\mathbb{R}^N$ de kompakt destekli fonksiyonlar uzayı
$L^1_{2\pi}$	2π periyotlu, ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$	$\mathbb{R}^N$ de ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^p(E)$	E kümesi üzerinde p'inci kuvveti integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$m(J)$	J aralığının uzunluğu
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+_0$	Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^N$	N-boyutlu reel sayılar uzayı
$UC\left(\mathbb{R}^N\right)$	$\mathbb{R}^N$ de düzgün sürekli fonksiyonlar uzayı
$V_{[a,b]}[f]$	f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki salınımı
$V_{2\pi}[f]$	f fonksiyonunun $[-\pi,\pi]$ aralığındaki salınımı
$V[f]$	f fonksiyonunun $\mathbb{R}^N$ deki salınımı
$\|f\|_1$	f fonksiyonunun $[-\pi,\pi]$ aralığındaki L^1 normu
$\|f\|_{\mathbf{1}}$	f fonksiyonunun $\mathbb{R}^N$ deki L^1 normu
$\|f\|_J$	f fonksiyonunun J aralığındaki supremum normu
$\|f\|_{2\pi}$	f fonksiyonunun $[-\pi,\pi]$ aralığındaki supremum normu
$\|f\|_\infty$	f fonksiyonunun $\mathbb{R}^N$ deki supremum normu
$\#A$	A kümesinin eleman sayısı
$\mathbf{0}$	$(0,\cdots,0)\in\mathbb{R}^N$
$[m]$	m reel sayısının tam değeri
$\Longleftrightarrow$	ancak ve ancak

1. GİRİŞ

Butzer ve Nessel [16] da singüler ve konvolüsyon tipindeki lineer integral operatörlerinin yakınsaklık durumlarını incelemişlerdir. Burada hem $[-\pi, \pi]$ kapalı aralığında 2π periyotlu fonksiyonlara hem de reel eksen üzerinde tanımlı fonksiyonlara yaklaşımlar araştırılmıştır. Düzgün ve noktasal yakınsaklıkların incelendiği bu çalışmada yaklaşım oranları da verilen Lipschitz sınıfları yardımıyla gösterilmiş ayrıca bazı fonksiyon uzaylarının karakterizasyonları verilmiştir. Daha sonra Bardaro ve arkadaşları [12] de bu operatörlerin hem periyodik fonksiyonlar kullanarak bir boyutta hem de N-boyutta salınım anlamda yakınsaklıklarını ele alıp yine yaklaşım hızlarını hesaplamışlardır. Burada çok değişkenli durumu incelerken [38] de tanımı verilen Tonelli anlamda salınım kavramından yararlanmışlardır. 2006 yılında ise Angeloni ve Vinti bu çalışmaları daha ileri götürerek [4, 5] te lineer olmayan durum için de benzer yaklaşımlar elde etmişlerdir. Ayrıca bazı mutlak sürekli uzayların karakterizasyonlarını da vermişlerdir (bkz. [6–8]). Bu tezdeki temel amacımız Angeloni ve Vinti'nin çalışmalarını toplanabilme teorisi yardımıyla geliştirmek olmuştur. Bunun için 1971 yılında Bell [13, 14] tarafından ortaya atılan $\mathscr{A}$-toplam süreci kavramından yararlanacağız. Hemen belirtelim ki $\mathscr{A}$-toplanabilme ve daha özel yaklaşım metotları şimdiye kadar pozitif lineer operatörlerin yaklaşımında sıklıkla kullanılmıştır (bkz. [1, 3, 10, 11, 17, 18, 30, 37]). Bell tipindeki toplam süreci, klasik yakınsaklığın yanısıra Cesàro tarafından [15, 22] de verilen aritmetik ortalama yakınsaklık, Lorentz tarafından [29] da verilen hemen hemen yakınsaklık ve Jurkat ve Peyerimhoff tarafından [25] te verilen dereceli yakınsaklık gibi pekçok yakınsaklık metodunu içermektedir. Ayrıca uygun toplanabilme metotları kullanılarak dizilerin yakınsama hızları da arttırılabilmektedir (bkz. [19, 26, 35, 40]).

Bu tezde $\mathscr{A}$-toplanabilme yardımıyla ilk kez lineer olmayan konvolüsyon tipindeki integral operatörlerinin yaklaşımları incelenmiştir. Tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde bazı temel kavramların ve toplanabilme metodunun tanımları hatırlatılmıştır. Ayrıca tek ve çok değişkenli durumlarda salınım anlamda yaklaşım kavramlarından bahsedilmiştir. Üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümler tezin orijinal sonuçlarının bulunduğu bölümlerdir. Üçüncü bölümde tek ve çok değişkenli durumlar için salınım anlamda yaklaşım yapılmış ve tanımlanan Lipschitz sınıfları yardımıyla yakınsaklık oranları hesaplanmıştır. Tek değişkenli durumda periyodik fonksiyonlardan faydalanılmıştır. Çok değişkenli durumda Tonelli anlamda salınım yaklaşımı yapılmıştır. Dördüncü bölümde yine tek ve çok değişkenli fonksiyonlara supremum normu kullanılarak yaklaşım yapılmış ve yaklaşım hızları elde edilmiştir. Beşinci bölümde, önceki bölümlerde tanımlanan operatörler yardımıyla mutlak sürekli ve düzgün sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde bazı karakterizasyonlar verilmiştir. Altıncı bölüm ise sonuçlara ve uygulamalara ayrılmıştır. Bu bölümde $\mathscr{A}$ yerine bazı özel matrisler seçilerek çalışmamızın [4, 5] te verilen yaklaşımı daha da ileriye götürdüğü sonuçlar üzerinden açıklanmıştır. Daha sonra uygun çekirdek fonksiyonları seçilerek Wolfram Mathematica 10.4 ve Scientific WorkPlace 5.5 programları yardımıyla görsel örnekler üzerinden ve salınım hesaplamalarıyla tez desteklenmiştir. Son olarak konuyla ilgili gelecekte nelerin yapılabileceği üzerinde durulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. İlk olarak $\mathscr{A}$-toplanabilme kavramı tanıtılmış daha sonra tek boyutta salınım yaklaşımının tanımı üzerinde durulmuştur. Son olarak da N-boyutta Tonelli anlamda salınım kavramı hatırlatılacaktır.

2.1 $\mathscr{A}$-Toplanabilme

Bu kısımda Cesàro toplanabilirlik (aritmetik ortalama yakınsaklık), hemen hemen yakınsaklık ve toplanabilme metodu ele alınmıştır.

Tanım 2.1.1 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *reel terimli keyfi bir dizi olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k = L$$

olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (x_k) dizisi L sayısına "aritmetik ortalama yakınsaktır" denir [15, 22].

Teorem 2.1.1 $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *reel terimli keyfi bir dizi olmak üzere* $\lim_{k\to\infty}x_k = L$ *ise*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k = L$$

dir. Yani bütün yakınsak dizilerin aritmetik ortalaması da aynı sayıya yakınsaktır [15].

Teorem 2.1.1 in tersi genelde doğru değildir (bkz. $x_n = (-1)^n$).

Lorentz tarafından tanımlanan hemen hemen yakınsaklığın tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.2 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *keyfi reel dizisi verilmiş ve*

$$c_n^{\upsilon} := \frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1}x_k \;\; (n,\upsilon \in \mathbb{N})$$

olarak tanımlanmış olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty}c_n^{\upsilon} = L \;\; (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olacak şekilde bir $L \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (x_n) dizisi L ye "hemen hemen yakınsaktır" denir [29].

Hemen hemen yakınsak dizilerle ilgili bir özellik aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.1.2 *Hemen hemen yakınsak bütün diziler sınırlıdır, yani bir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi hemen hemen yakınsak ise*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| = M < \infty$$

olacak şekilde bir $M \geq 0$ reel sayısı vardır [29].

Dikkat edilirse Teorem 2.1.2 aritmetik ortalaması yakınsak olan diziler için genelde geçerli değildir. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilebilir.

Örnek 2.1.1 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dizisi aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$x_n := \begin{cases} \sqrt[3]{n}; & n = m^3 \\ 0; & n \neq m^3,\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Diğer taraftan $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$m^3 \leq n < (m+1)^3 \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ her zaman vardır. (x_n) dizisinin tanımı dikkate alındığında

$$\frac{1+2+\ldots+m}{n} = \frac{m(m+1)}{2n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \frac{1+2+\ldots+m+1}{n} = \frac{(m+1)(m+2)}{2n}$$

eşitsizliği kolayca görülebilir. Burada (2.1) deki eşitsizlik göz önüne alınırsa

$$\frac{m(m+1)}{2(m+1)^3} < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \frac{(m+1)(m+2)}{2m^3}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ iken $m \to \infty$ olacağından sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = 0$$

olduğu görülür. Fakat (x_n) dizisi sınırlı olmadığından ne alışılmış anlamda yakınsak ne de hemen hemen yakınsaktır. Bu durum aritmetik ortalama yakınsak dizilerin her zaman hemen hemen yakınsak olmadığını gösterir. Halbuki hemen hemen yakınsaklığın tanımı gereği $\upsilon = 1$ durumunu da kapsadığından hemen hemen yakınsaklık, aritmetik ortalama yakınsaklığı gerektirir.

Tez boyunca kullanılacak olan toplanabilme metodunun tanımı aşağıdadır.

Tanım 2.1.3 $\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \left\{\left(a_{nk}^{\upsilon}\right)\right\}$ $(k, n, \upsilon \in \mathbb{N})$ *reel (kompleks) terimli matrisler dizisi verilsin. Keyfi $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için*

$$t_n^{\upsilon} := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} x_k$$

dizisi $n \to \infty$ iken bir L reel (kompleks) sayısına υ ye göre düzgün olacak şekilde yakınsıyorsa (x_k) dizisi L sayısına "$\mathscr{A}$-toplanabilirdir" denir ve bu durum

$$\mathscr{A} - \lim x = L$$

şeklinde gösterilir [13] (ayrıca bkz. [36]). Burada her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için yukarıdaki serinin yakınsak olduğu kabul edilmektedir.

Tez boyunca $\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \left\{\left(a_{nk}^{\upsilon}\right)\right\}$ matrisler dizisi "toplanabilme metodu" ya da "toplam süreci" olarak da adlandırılacaktır.

Bir toplanabilme metodunun regüler olması şu şekilde tanımlanır:

Tanım 2.1.4 *$\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \left\{\left(a_{nk}^{\upsilon}\right)\right\}$ bir toplanabilme metodu olsun. Eğer verilen bir $x = (x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi bir L sayısına yakınsak iken*

$$\mathscr{A} - \lim x = L$$

oluyorsa $\mathscr{A}$ matrisler ailesine "regülerdir" denir [14].

Regüler toplanabilme metotlarına örnek olarak aşağıda (2.2) ve (2.3) te tanımlanan Cesàro ve hemen hemen yakınsaklık metotları verilebilir.

Regülerliğin bir karakterizasyonu Bell tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.1.3 *Verilen bir $\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \left\{\left(a_{nk}^{\upsilon}\right)\right\}$ toplanabilme metodunun regüler olması için gerek ve yeter koşul*

1. *her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}^{\upsilon} = 0$ (υ ye göre düzgün),*
2. *$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} = 1$ (υ ye göre düzgün),*
3. *her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|a_{nk}^{\upsilon}\right| < \infty$, ve öyle N, M pozitif tamsayıları vardır ki her $n \geq N$ ve her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left|a_{nk}^{\upsilon}\right| < M$*

şartlarının sağlanmasıdır [14].

Bundan sonra tez boyunca $\mathscr{A}$ toplanabilme metodu terimleri negatif olmayan reel terimli regüler matrisler ailesi olarak kabul edilecektir.

$\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\}$ toplanabilme metodunun başlıca özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- eğer A^{υ} matrisinde her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $A^{\upsilon} = I$ birim matrisi alınırsa toplanabilme metodunun klasik anlamda yakınsaklığa indirgendiği kolayca görülebilir,

- eğer A^{υ} yerine

$$C_1 = (c_{nk}) = \begin{cases} \frac{1}{n}; & 1 \leq k \leq n \\ 0; & d.d. \end{cases} \tag{2.2}$$

  Cesàro matrisi alınırsa $\mathscr{A}$-toplanabilirlik, aritmetik ortalama yakınsaklığa dönüşür. Dolayısıyla Fourier serileri gibi klasik yakınsaklığı her zaman gerçeklenmeyen diziler için de yaklaşım elde edilebilir [15],

- eğer $\mathscr{A}$ yerine

$$F^{\upsilon} = (c_{nk}^{\upsilon}) = \begin{cases} \frac{1}{n}; & \upsilon \leq k \leq n+\upsilon-1 \\ 0; & d.d. \end{cases} \tag{2.3}$$

  olmak üzere $\mathscr{F} = \{F^{\upsilon}\}$ hemen hemen yakınsaklık matrisi alınırsa toplanabilme metodunun hemen hemen yakınsaklığa indirgendiği kolayca görülür [29],

- bunlarla birlikte $\mathscr{A}$-toplanabilirliğin Jurkat ve Peyerimhoff tarafından [24, 25] te verilen dereceli yakınsaklığı içerdiği de bilinmektedir,

- ayrıca $\mathscr{A}$ matrisler ailesinde uygun altdizi dönüşümleri kullanılarak herhangi bir yakınsak dizinin yaklaşım hızı arttırılabilir [19, 26, 35, 40],

- regüler matrisler göz önüne alınırsa klasik yaklaşım elde edilir.

Tanım 2.1.5 *Eğer $\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\}$ metodunda her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için A^{υ} matrisinin her satırı sonlu sayıda sıfırdan farklı terim içeriyorsa, yani her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\#\left\{k \in \mathbb{N} \colon a_{nk}^{\upsilon} \neq 0\right\}$ sonlu ise $\mathscr{A}$ metoduna "satır sonludur" denir.*

2.2 Salınım Anlamda Yaklaşım

Bu kısımda reel sayılar kümesinde (Jordan anlamda) sınırlı salınım yapan fonksiyonlar yardımıyla tanımlanan salınım yarı-normunun tanımı verilecek ve salınım anlamda yakınsaklık tanımlarından bahsedilecektir. Bu yarı-norm daha sonra inşa ettiğimiz operatör dizisinin yaklaşımında kullanılacaktır.

Tanım 2.2.1 $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ve*

$$\mathscr{P} = \{P = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\} : P,\ [a,b] \text{ aralığının bir parçalanması } \}$$

olsun. Eğer

$$V_{[a,b]}[f] := \sup_{P \in \mathscr{P}} \sum_{i=1}^{m} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$

olmak üzere

$$V_{[a,b]}[f] = M < \infty$$

olacak şekilde bir M pozitif reel sayısı varsa f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında "sınırlı salınımlıdır" denir. $[a,b]$ aralığında sınırlı salınımlı fonksiyonların uzayı $BV[a,b]$ ile gösterilir. Ayrıca $V_{[a,b]}[f]$ değerine de f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki "salınım yarı-normu" ya da "salınımı" denir [9].

Dikkat edilirse burada $V_{[a,b]}[f]$ değeri gerçekten bir yarı-normdur. Çünkü $c \neq 0$ olmak üzere

$$f(x) \equiv c$$

sabit fonksiyonu düşünüldüğünde $V_{[a,b]}[f] = 0$ olmasına rağmen $f(x) \not\equiv 0$ olur.

Sınırlı salınım yapan fonksiyonların başlıca özellikleri aşağıda verilmiştir.

- f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlıdır,
- f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında ölçülebilirdir,
- f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında hemen hemen her yerde türevlenebilir ve

$$\int_a^b |f'(x)|\, dx < \infty$$

  olur,
- $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere eğer f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olarak türevlenebiliyorsa, yani türevi var ve sürekli ise

$$V_{[a,b]}[f] = \int_a^b |f'(x)|\, dx$$

  gerçeklenir.

Sınırlı salınım yapan fonksiyonların en önemli özelliği aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.2.1 (Jordan Ayrıştırma Teoremi) *$f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere f fonksiyonunun sınırlı salınımlı olması için gerek ve yeter koşul $f(x) = p(x) - n(x)$ olacak şekilde p ve n monoton artan fonksiyonlarının bulunmasıdır [9].*

Sonuç 2.2.1 *Monoton fonksiyonlar Riemann anlamda integrallenebilir olduğundan verilen bir $f \in BV[a,b]$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Riemann integrallenebilirdir, yani*

$$\int_a^b |f(x)|\, dx < \infty$$

olur.

Sınırlı salınımlı fonksiyonlarla ilgili diğer bir önemli tanım şu şekildedir:

Tanım 2.2.2 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu verilsin. Verilen her* $\varepsilon>0$ *sayısına karşılık* $[a,b]$ *aralığının ikişer ayrık* $\{(a_k,b_k)\}_{k=1}^{n}$ *açık alt aralıkları için*

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta \text{ iken } \sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ *sayısı bulunabiliyorsa, bu durumda* f *fonksiyonuna* $[a,b]$ *aralığında "mutlak süreklidir" denir ve bu fonksiyonların uzayı* $AC[a,b]$ *ile gösterilir [34].*

Tanım 2.2.3 $f:[a,b]\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *fonksiyonu verildiğinde, her* $x,y\in[a,b]$ *için*

$$|f(x)-f(y)|\leq C|x-y|$$

olacak şekilde bir $C>0$ *sabit sayısı varsa* f *fonksiyonuna* $[a,b]$ *aralığında "Lipschitz süreklidir" ya da kısaca "Lipschitz" denir [34].*

Yukarıdaki tanımlardan Lipschitz sürekli fonksiyonların mutlak sürekliliği ve mutlak sürekliliğin de düzgün sürekliliği gerektirdiği kolayca görülebilir.

Önerme 2.2.1 *Her* $f\in AC[a,b]$ *için* $f\in BV[a,b]$ *olur yani* $I=[a,b]$ *aralığında mutlak sürekli olan her fonksiyon aynı zamanda bu aralıkta sınırlı salınımlıdır [9].*

Önerme 2.2.2 *Eğer* $f\in AC[a,b]$ *ise*

$$V_{[a,b]}[f]=\int_a^b|f'(x)|\,dx$$

gerçeklenir [34].

f fonksiyonu 2π periyotlu olmak üzere özel olarak $[a,b]=[-\pi,\pi]$ alındığında

- $BV[-\pi,\pi]=BV_{2\pi}$,
- $V_{[-\pi,\pi]}[f]=V_{2\pi}[f]$,
- $AC[-\pi,\pi]=AC_{2\pi}$,
- $L_{2\pi}^{1}=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\mid f,\ [-\pi,\pi] \text{ de ölçülebilir ve } \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx<\infty\right\}$,
- $\|f\|_1=\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx$

gösterimlerinden faydalanılacaktır.

2.3 Tonelli Anlamda Yaklaşım

Çok değişkenli durumlar için birden fazla sınırlı salınımlılık tanımı vardır. Bu tanımlardan başlıcaları Vitali, Arzelà, Fréchet ve Tonelli tarafından verilmiştir (bkz. [9]). Bu kısımda çalışmaya uygunluğu açısından Tonelli'nin yaklaşımı tercih edilmiştir. Bu tanım doğrultusunda N-boyuttaki karmaşıklığı gidermek için bazı gösterimlere gereksinim duyulmaktadır.

Tez boyunca çok değişkenli durumlar incelenirken aşağıdaki gösterimler dikkate alınacaktır.

- $\mathbb{R}^N = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) : \forall i = 1, \ldots, N,\, x_i \in \mathbb{R}\}$,
- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ olmak üzere $x'_j = \left(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_N\right) \in \mathbb{R}^{N-1}$ ve $\mathbf{x} = (x'_j, x_j)$,
- $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}$,
- $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f(\mathbf{x}) = f(x'_j, x_j)$,
- $L^1\left(\mathbb{R}^N\right) = \left\{f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \mid f \text{ ölçülebilir ve } \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} < \infty\right\}$,
- $\|f\|_{\mathbf{1}} = \int_{\mathbb{R}^N} |f(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x}$,
- $I = \Pi_{i=1}^N [a_i, b_i]$ ile $\mathbb{R}^N$ de N-boyuttaki kapalı aralık gösterilecektir,
- $I'_j = [a'_j, b'_j]$ ile $\mathbb{R}^{N-1}$ de $I'_j = \Pi_{i=1, i\neq j}^N [a_i, b_i]$ aralığı gösterilecektir. Ayrıca $I = I'_j \times \left[a_j, b_j\right]$ olarak gösterilecektir,
- $V_{[a_j,b_j]}[f(x'_j, \cdot)]$ ile f fonksiyonunun j inci koordinatına göre bir boyuttaki salınımı yani $g_j(x_j) := f(x'_j, x_j)$ fonksiyonunun salınımı gösterilecektir,
- ϕ_j ile aşağıda tanımı verilen $N-1$ katlı integral gösterilecektir:

  $$\phi_j(f, I) := \int_{a'_j}^{b'_j} V_{[a_j,b_j]}\left[f\left(x'_j, \cdot\right)\right] dx'_j,$$

- Φ ile

  $$\Phi(f, I) := \left\{\sum_{j=1}^N \phi_j^2(f, I)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

  Öklid normu gösterilecektir. Burada herhangi bir $j = 1, \ldots, N$ için $\phi_j(f, I) = \infty$ ise $\Phi(f, I) = \infty$ olur.

Yukarıdaki gösterimler ışığında Tonelli anlamda sınırlı salınımlılığın tanımı şu şekildedir:

Tanım 2.3.1 *$\{J_1, \ldots, J_m\}$ kümesi I aralığının bir parçalanması olmak üzere*

$$V_I[f] := \sup_{\{J_1,\ldots J_m\}} \sum_{k=1}^{m} \Phi(f,I)$$

ifadesine f fonksiyonunun $I \subset \mathbb{R}^N$ deki "salınımı" yada "salınım yarı-normu" denir. Benzer şekilde

$$V[f] := \sup_{I \subset \mathbb{R}^N} V_I[f]$$

ifadesine f fonksiyonunun $\mathbb{R}^N$ üzerindeki "salınımı" ya da "salınım yarı-normu" denir [34].

Tanım 2.3.2 *$f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ olmak üzere $V[f] < \infty$ ise f fonksiyonuna $\mathbb{R}^N$ de "sınırlı salnımlıdır" denir ve bu fonksiyonların uzayı $BV(\mathbb{R}^N)$ ile gösterilir [4].*

Yukarıdaki tanımlar dikkate alındığında eğer $f \in BV(\mathbb{R}^N)$ ise $\nabla f := (f_{x_1}, \ldots, f_{x_n})$ vektörü $\mathbb{R}^N$ de hemen hemen her yerde mevcuttur ve $\nabla f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ gerçeklenir [33, 39].

N-boyutta ihtiyaç duyulan Tonelli anlamda mutlak süreklilik tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.3 *$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $I = \Pi_{i=1}^{N}[a_i, b_i]$ aralığı ve her $j = 1, \ldots, N$ için $g_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{R}$, $g_j(x_j) = f(x'_j, x_j)$ fonksiyonu hemen hemen her $x'_j \in [a'_j, b'_j]$ vektörü için mutlak sürekli ise f fonksiyonuna "lokal mutlak süreklidir" denir ve bu fonksiyonların uzayı $AC_{loc}(\mathbb{R}^N)$ ile gösterilir. Bununla birlikte $\mathbb{R}^N$ deki mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı $AC(\mathbb{R}^N) := BV(\mathbb{R}^N) \cap AC_{loc}(\mathbb{R}^N)$ şeklinde tanımlanmıştır [4].*

Burada Burkill-Cesari integral teorisinden bilinmektedir ki verilen bir $f \in AC(\mathbb{R}^N)$ fonksiyonu için

$$V[f] = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \tag{2.4}$$

gerçeklenir [21, 33, 39].

Tanım 2.3.4 *$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ kümesinin kapanışı kompakt oluyorsa f fonksiyonuna "kompakt desteklidir" denir ve $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ ile gösterilir [34].*

Tezde ihtiyaç duyulan bazı eşitsizlikler ve gerekli bazı teoremler aşağıda sıralanmıştır.

Teorem 2.3.1 (Hölder Eşitsizliği) *E ölçülebilir bir küme olmak üzere μ, E üzerinde bir ölçü olsun ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olacak şekilde $1 \leq p, q \leq \infty$ verilsin. Eğer $f \in L^p(E)$ ve $g \in L^q(E)$ ise $f.g \in L^1(E)$ olur ve*

$$\int_E |(f.g)(x)| \, d\mu(x) \leq \left(\int_E |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g(x)|^q \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği gerçeklenir [34].

Teorem 2.3.2 (Minkowski Eşitsizliği) *E ölçülebilir bir küme olmak üzere μ, E üzerinde bir ölçü olsun ve $1 \leq p \leq \infty$ verilsin. Eğer $f,g \in L^p(E)$ ise $f+g \in L^p(E)$ olur ve ayrıca*

$$\left(\int_E |(f+g)(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_E |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_E |g(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliği gerçeklenir [34].

Teorem 2.3.3 (Genelleştirilmiş Minkowski İntegral Eşitsizliği) *Varsayalım ki (E_1,μ_1) ve (E_2,μ_2) iki ölçü uzayı ve $F : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu takdirde $1 \leq p < \infty$ olmak üzere*

$$\left(\int_{E_2} \left| \int_{E_1} F(x,y) \, d\mu_1(x) \right|^p d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |F(x,y)|^p \, d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu_1(x)$$

eşitsizliği gerçeklenir (bkz. [23, 41]).

İspat. $p=1$ durumu için ispat Fubini Teoremi'nden gösterilebilir. $p>1$ ise

$$I := \int_{E_2} \left| \int_{E_1} F(x,y) \, d\mu_1(x) \right|^p d\mu_2(y)$$

olmak üzere üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
I &= \int_{E_2} \left| \int_{E_1} F(x,y) \, d\mu_1(x) \right|^{p-1} \left| \int_{E_1} F(x,y) \, d\mu_1(x) \right| d\mu_2(y) \\
&\leq \int_{E_2} \left| \int_{E_1} F(z,y) \, d\mu_1(z) \right|^{p-1} \left(\int_{E_1} |F(x,y)| \, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y) \\
&= \int_{E_2} \left(\int_{E_1} \left| \int_{E_1} F(z,y) \, d\mu_1(z) \right|^{p-1} |F(x,y)| \, d\mu_1(x) \right) d\mu_2(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Fubini Teoremi'nden

$$I \leq \int_{E_1} \left(\int_{E_2} \left| \int_{E_1} F(z,y) \, d\mu_1(z) \right|^{p-1} |F(x,y)| \, d\mu_2(y) \right) d\mu_1(x) \tag{2.5}$$

olduğu kolayca görülebilir. Burada ilk integralin içerisinde $q := p/(p-1)$ olarak alınıp Hölder eşitsizliği kullanıldığında

$$
\begin{aligned}
&\int_{E_2} \left| \int_{E_1} F(z,y)\, d\mu_1(z) \right|^{p-1} |F(x,y)|\, d\mu_2(y) \\
&\leq \left(\int_{E_2} \left| \int_{E_1} F(z,y)\, d\mu_1(z) \right|^{q(p-1)} d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{E_2} |F(x,y)|^p\, d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2.6) \\
&= \left(\int_{E_2} \left| \int_{E_1} F(z,y)\, d\mu_1(z) \right|^{p} d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{E_2} |F(x,y)|^p\, d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği gerçeklenir. Dolayısıyla (2.5) te (2.6) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$
\begin{aligned}
I &\leq \int_{E_1} \left(\int_{E_2} \left| \int_{E_1} F(z,y)\, d\mu_1(z) \right|^{p} d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{E_2} |F(x,y)|^p\, d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu_1(x) \\
&= \left(\int_{E_2} \left| \int_{E_1} F(z,y)\, d\mu_1(z) \right|^{p} d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{q}} \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |F(x,y)|^p\, d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu_1(x) \\
&= \left(\int_{E_2} \left| \int_{E_1} F(x,y)\, d\mu_1(x) \right|^{p} d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{q}} \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |F(x,y)|^p\, d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu_1(x)
\end{aligned}
$$

olur. Son olarak $1 - 1/q = 1/p$ olduğundan

$$
\left(\int_{E_2} \left| \int_{E_1} F(x,y)\, d\mu_1(x) \right|^{p} d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_{E_1} \left(\int_{E_2} |F(x,y)|^p\, d\mu_2(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu_1(x)
$$

gerçeklenir. □

Sonuç 2.3.1 *Yukarıda verilen Teorem 2.3.1, Teorem 2.3.2 ve Teorem 2.3.3 te μ ölçüsü olarak sayma ölçüsü alındığında verilen teoremlerin ayrık versiyonlarının da (toplam versiyonlarının da) geçerli olduğu görülür.*

Teorem 2.3.4 (Fubini-Tonelli Teoremi) *(X,μ) ve (Y,ν) ölçü uzayları σ-sonlu ve tam olsun. Ayrıca pozitif f fonksiyonu $X \times Y$ üzerinde $(\mu \times \nu)$-ölçülebilir olsun. Bu durumda hemen hemen her $x \in X$ için $f(x,\cdot)$ ν-ölçülebilirdir ve X üzerinde hemen hemen her yerde tanımlanan $g(x) := \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ fonksiyonu μ-ölçülebilirdir. Benzer* *şekilde hemen hemen her $y \in Y$ için $f(\cdot, y)$ μ-ölçülebilir ve Y üzerinde hemen hemen her yerde tanımlanan $h(y) := \int_Y f(x,y)\, d\mu(x)$ fonksiyonu ν-ölçülebilirdir. Hatta, eğer*

$$\int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty$$

ya da

$$\int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty$$

sağlanıyorsa f fonksiyonu $X \times Y$ üzerinde $\mu \times \nu$ ölçüsüne göre integrallenebilirdir ve

$$\begin{aligned} \int\limits_Y \left(\int\limits_X f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) &= \int\limits_X \left(\int\limits_Y f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \iint\limits_{X \times Y} f(x,y)\, d(\mu \times \nu) \end{aligned}$$

gerçeklenir [20].

3. SALINIM YARI-NORMUNA GÖRE YAKLAŞIM

Bu bölümde daha önce Angeloni ve Vinti tarafından [4, 5] te çalışılan lineer olmayan konvolüsyon tipindeki integral operatörleri ele alınacaktır. Hem tek boyutta hem de N-boyutta verilen operatörlerin toplanabilme metodu yardımıyla salınım yaklaşımları ve yakınsaklık hızları incelenecek ve [4] teki ispatlarda yapılan bazı hatalar giderilecektir.

3.1 Periyodik Fonksiyonlara Salınım Anlamda Yaklaşım

Bu kısımda 2π periyotlu fonksiyonlardan faydalanılacaktır. Daha önce [4] te çalışılan periyodik durum daha da genelleştirilecek ve uygulanan yaklaşımın daha genel koşullar altında da gerçeklendiği gösterilecektir. Ayrıca tanımlanacak olan Lipschitz sınıfları yardımıyla yaklaşım oranları hesaplanacaktır.

[4, 5] te yapılan çalışmanın periyodik hali aşağıda verilmiştir.

$f \in BV_{2\pi}$ olmak üzere

$$T_w(f;s) = \int_{-\pi}^{\pi} K_w(t, f(s-t))\,dt, \quad w > 0, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

operatörü verilsin. Burada $K_w : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ öyle ki her $t, u \in \mathbb{R}$ için

$$K_w(t,u) = L_w(t) H_w(u), \; H_w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

olmak üzere H_w (w ya göre düzgün) Lipschitz sürekli, $H_w(0) = 0$ ve her $w > 0$ için $L_w \in L^1_{2\pi}$ şeklinde tanımlıdır. Angeloni ve Vinti (3.1) de,

$K_w.1)$. $L_w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $L_w \in L^1_{2\pi}$, $\|L_w\|_1 \leq A$, olacak şekilde bir $A > 0$ sayısı vardır ve her $w > 0$ için $A_w := \int_{-\pi}^{\pi} L_w(t)\,dt$ şeklinde tanımlanırsa $\lim_{w\to\infty} A_w = 1$ gerçeklenir,

$K_w.2)$. her sabit bir $\delta > 0$ için $w \to \infty$ iken$\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |L_w(t)|\,dt \to 0$ olur,

$K_w.3)$. $G_w(u) := H_w(u) - u$, $u \in \mathbb{R}$, $w > 0$ olmak üzere her sınırlı $J \subset \mathbb{R}$ aralığı için

$$w \to \infty \text{ iken } \frac{V_J[G_w]}{m(J)} \to 0 \text{ (J ye göre düzgün)}$$

şartları altında verilen $f \in AC_{2\pi}$ fonksiyonu için

$$w \to \infty \text{ iken } V_{2\pi}[T_w(f) - f] \to 0$$

yaklaşımını elde etmişlerdir. Ayrıca bazı Lipschitz sınıfları tanımlayarak

$$V_{2\pi}[T_w(f) - f] = O\left(\xi\left(w^{-1}\right)\right)$$

yakınsaklık oranını da hesaplamışlardır. Bu kısımda [4] te çalışılan yukarıdaki yaklaşım daha da genelleştirilecek ve toplam süreci yardımıyla lineer olmayan integral operatörleri için yaklaşım elde edilecektir. Ayrıca tanımlanacak olan Lipschitz sınıfları yardımıyla yakınsaklık oranları da çalışılmıştır.

3.1.1 Salınım Anlamda Toplam Süreci

Öncelikle (3.1) de verilen lineer olmayan operatörleri toplanabilme metodu kullanarak aşağıdaki şekilde genelleştireceğiz.

Daha önce de belirtildiği üzere $\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \left\{\left(a^{\upsilon}_{nk}\right)\right\}$ terimleri negatif olmayan regüler matrisler ailesi olmak üzere, lineer olmayan

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^{\upsilon}_{nk} \int_{-\pi}^{\pi} K_k(t, f(x-t))dt, \quad n, \upsilon \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

operatörü verilsin. Burada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir, 2π periyotlu ve operatörü iyi tanımlı yapan fonksiyonlardır. $\{K_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ölçülebilir fonksiyonlar ailesi olmak üzere $K_k : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve her $s,t \in \mathbb{R}$ için $K_k(s,t) = L_k(s)H_k(t)$ biçimindedir. Burada $L_k \in L^1_{2\pi}$ ve $H_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H_k(0) = 0$ ve (k ya göre düzgün) Lipschitz süreklidir, yani $|H_k(x) - H_k(y)| \leq C|x-y|$ her $x,y \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{N}$ olacak şekilde bir $C > 0$ sabit sayısı vardır.

Bundan sonra tez boyunca H_k fonksiyonları k ya göre düzgün Lipschitz sürekli kabul edilecektir.

Uyarı 3.1.1 *Burada dikkat edilirse $\mathscr{A} = \{I\}$ birim matrisi alındığında (3.2) de verilen operatörün (3.1) de verilen operatöre dönüştüğü görülebilir. Ayrıca herhangi bir $\mathscr{A}-$toplanabilme metodu için (3.2) deki operatörler (3.1) de verilen operatörler yardımıyla aşağıdaki şekilde yazılabilir:*

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty} a^{\upsilon}_{n,k} T_k(f;x)$$

Bu nedenle (3.2) deki $\mathscr{T}_{n,\upsilon}$ operatörlerine T_k operatölerinin toplam süreci adı verilir (benzer ifadeler Altomare ve Nishishiraho'nun [2, 31, 32] deki çalışmalarında da farklı operatörler için kullanılmıştır.

(3.2) de tanımlanan operatörün $n \to \infty$ iken

$$V_{2\pi}[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f] \to 0 \ \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

yaklaşımını elde edebilmek için L_k ve H_k üzerinde bazı doğal koşullara ihtiyaç vardır:

(i) $\sup\limits_{n,\upsilon\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \|L_k\|_1 = M < \infty$ olacak şekilde bir $M > 0$ reel sayısı vardır,

(ii) $\mathscr{A} - \lim \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} L_k(t)dt \right) = 1,$

(iii) her sabit $\delta > 0$ için $\mathscr{A} - \lim \left(\int\limits_{\pi\geq|t|\geq\delta} |L_k(t)|\,dt \right) = 0,$

(iv) $G_k(u) := H_k(u) - u$ $(u \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N})$ olarak tanımlanmak üzere her $J \subset \mathbb{R}$ aralığı için $\lim_{k\to\infty} \frac{V_J[G_k]}{m(J)} = 0$ (J ye göre düzgün) olur, yani her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $k_0 = k_0(\varepsilon) > 0$ vardır ki $k \geq k_0$ iken her $J \subset \mathbb{R}$ için $V_J\,[G_k] < \varepsilon m\,(J)$ gerçeklenir (burada $m\,(J)$, J aralığının uzunluğudur).

Uyarı 3.1.2 *(i), (ii) ve (iii) koşulları $K_w.1)$. ve $K_w.2)$. koşulları ile karşılaştırıldığında, daha genel şartlar olduğu kolaylıkla görülebilir.*

Uyarı 3.1.3 *(3.2) de tanımlanan operatörlerde H_k üzerine konulan Lipschitz koşulu yerine (iv) koşulu da alınabilir. Bu durumda H_k asimptotik olarak Lipschitz sürekli olurdu. Çünkü $\varepsilon = 1$ seçilirse öyle bir k_0 sayısı vardır ki her $k \geq k_0$ için $V_J\,[G_k] < m\,(J)$ olur. Buradan $u < v$ olmak üzere her $k \geq k_0$ için*

$$\begin{aligned} |H_k\,(u) - H_k\,(v)| &\leq |H_k\,(u) - u - [H_k\,(v) - v]| + |u - v| \\ &\leq V_{[u,v]}\,[G_k] + |u - v| \leq 2\,|u - v| \end{aligned}$$

gerçeklenir. Dolayısıyla (3.2) ve (3.16) da verilen operatörler asimptotik olarak tanımlı olurdu ve buradaki toplamlar belirli bir k_0 sayısından itibaren başlardı.

Aşağıdaki lemma, (3.2) de tanımlanan operatörlerin $BV_{2\pi}$ uzayı altındaki görüntüsünün yine $BV_{2\pi}$ uzayında kaldığını göstermektedir.

Lemma 3.1.1 *(i) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde her $f \in BV_{2\pi}$ için öyle bir $D > 0$ sayısı vardır ki her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için*

$$V_{2\pi}\,[\mathscr{T}_{n,\upsilon}\,(f)] \leq DV_{2\pi}\,[f]$$

gerçeklenir.

İspat. $\{x_0 = -\pi, ..., x_m = \pi\}$, $[-\pi, \pi]$ aralığının keyfi bir parçalanması olsun. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} |\mathscr{T}_{n,\upsilon}\,(f;x_i) - \mathscr{T}_{n,\upsilon}\,(f;x_{i-1})| \\ &= \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t)(H_k\,(f\,(x_i - t)) - H_k\,(f\,(x_{i-1} - t)))dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\,|H_k\,(f\,(x_i - t)) - H_k\,(f\,(x_{i-1} - t))|\,dt \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte H_k nın Lipschitz sürekli olduğu düşünüldüğünde

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m}\left|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x_i)-\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x_{i-1})\right| \\
&\leq C\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}|L_k(t)|\left|f(x_i-t)-f(x_{i-1}-t)\right|dt
\end{aligned}$$

gerçeklenir. Burada toplamlar yer değiştirilip sonlu toplam içeri alındığında

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x_i)-\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x_{i-1})\right|\leq C\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}|L_k(t)|V_{2\pi}[f(\cdot-t)]\,dt$$

bulunur. f fonksiyonu 2π periyotlu olduğundan $V_{2\pi}[f(\cdot-t)]=V_{2\pi}[f]$ olur. Dolayısıyla (i) şartından

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\left|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x_i)-\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x_{i-1})\right| &\leq CV_{2\pi}[f]\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}|L_k(t)|\,dt \\
&\leq CMV_{2\pi}[f]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. $D:=CM$ yazarak $[-\pi,\pi]$ aralığında bütün parçalanmalar üzerinden supremum alınırsa lemmanın ispatı tamamlanır. □

Sıradaki lemma benzer bir durumun $AC_{2\pi}$ uzayı için de sağlandığını göstermektedir.

Lemma 3.1.2 *(i) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde her $f\in AC_{2\pi}$ ve $\forall n,\upsilon\in\mathbb{N}$ için $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\in AC_{2\pi}$ dir.*

İspat. Hipotezden her $\varepsilon>0$ için öyle bir $\delta>0$ sayısı vardır ki $\{(x_i,y_i)\}_{i=1,\ldots,m}$ ailesi $[-\pi,\pi]$ nin ikişer ayrık alt aralıkları olmak üzere $\sum_{i=1}^{m}(y_i-x_i)<\delta$ iken

$$\sum_{i=1}^{m}|f(y_i)-f(x_i)|<\varepsilon$$

olur. Diğer taraftan Lemma 3.1.1 den

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;y_i)-\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x_i)\right|\leq C\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}|L_k(t)|\sum_{i=1}^{m}|f(y_i-t)-f(x_i-t)|\,dt$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $f\in AC_{2\pi}$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{m}(y_i-t-(x_i-t))=\sum_{i=1}^{m}(y_i-x_i)<\delta$$

iken

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;y_i)-\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x_i)\right|<\varepsilon C\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}|L_k(t)|\,dt$$

gerçeklenir ve son olarak (i) şartından

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;y_i) - \mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x_i) \right| < \varepsilon CM$$

elde edilir. Burada $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{CM}$ alınırsa ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 3.1.3 *f sürekli ve $[-\pi,\pi]$ aralığında sınırlı salınımlı olsun. Eğer her sınırlı J aralığı için*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{V_J[G_k]}{m(J)} = 0 \text{ (J ye göre düzgün)}$$

oluyorsa

$$\lim_{k\to\infty} V_{2\pi}[H_k \circ f - f] = 0$$

gerçeklenir [5].

Lemma 3.1.4 *$f \in L^1_{2\pi}$ olmak üzere $L^1_{2\pi}$ uzayında $T_a(f;x) := f(x-a)$ öteleme operatörü süreklidir.*

İspat. Sürekli fonksiyonlar uzayı $L^1_{2\pi}$ uzayında yoğun olduğundan

$$\|f-g\|_1 < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $g \in C[-\pi,\pi]$ vardır. Buradan g sürekli olduğundan $|a| < \delta$ için

$$\begin{aligned} \|f(\cdot-a)-f(\cdot)\|_1 &\le \|f(\cdot-a)-g(\cdot-a)\|_1 + \|g(\cdot-a)-g(\cdot)\|_1 \\ &\quad + \|g-f\|_1 \\ &< \varepsilon + \varepsilon(2\pi) + \varepsilon = \varepsilon(2\pi+2) \end{aligned}$$

elde edilir ve $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2\pi+2}$ alınırsa ispat tamamlanır. $\square$

Gerekli ön bilgiler verildiğine göre artık yaklaşım teoremine geçilebilir.

Teorem 3.1.1 *$(i)-(iv)$ koşullarının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde her $f \in AC_{2\pi}$ için*

$$\lim_{n\to\infty} V_{2\pi}[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f] = 0 \text{ (υ ye göre düzgün),} \tag{3.3}$$

gerçeklenir.

İspat. $\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$ kümesi $[-\pi, \pi]$ aralığının keyfi bir parçalanması olsun. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} \left|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f; x_i) - f(x_i) - \mathscr{T}_{n,\upsilon}(f; x_{i-1}) + f(x_{i-1})\right| \\
&= \sum_{i=1}^{m} \Bigg| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t) \{H_k(f(x_i - t)) - f(x_i - t) \\
&- H_k(f(x_{i-1} - t)) + f(x_{i-1} - t)\} dt \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t) \ \{f(x_i - t) - f(x_i) - f(x_{i-1} - t) + f(x_{i-1})\} dt \\
&+ \{f(x_i) - f(x_{i-1})\} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t) dt - 1 \right) \Bigg| \\
&\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)| \, |H_k(f(x_i - t)) - f(x_i - t) \\
&- H_k(f(x_{i-1} - t)) + f(x_{i-1} - t)| \, dt \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)| \ |f(x_i - t) - f(x_i) - f(x_{i-1} - t) + f(x_{i-1})| \, dt \\
&+ |f(x_i) - f(x_{i-1})| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t) dt - 1 \right|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $[-\pi, \pi]$ aralığının keyfi parçalanmaları üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned}
V_{2\pi}[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f] \leq & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)| \, V_{2\pi}[H_k \circ f(\cdot - t) - f(\cdot - t)] \, dt \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)| \, V_{2\pi}[f(\cdot - t) - f(\cdot)] \, dt \\
& + V_{2\pi}[f] \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t) dt - 1 \right| \\
& := I_1(n, \upsilon) + I_2(n, \upsilon) + I_3(n, \upsilon)
\end{aligned}$$

bulunur. f fonksiyonu 2π periyotlu olduğundan her $t \in \mathbb{R}$ için
$V_{2\pi}[H_k \circ f(\cdot - t) - f(\cdot - t)] = V_{2\pi}[H_k \circ f - f]$ olur. Dolayısıyla her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için

$$I_1(n, \upsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} V_{2\pi}[H_k \circ f - f] \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)| \, dt$$

bulunur. Diğer yandan, Lemma 3.1.3 uyarınca (iv) şartının her $f \in AC_{2\pi}$ için

$$\lim_{k\to\infty} V_{2\pi}[H_k \circ f - f] = 0$$

yaklaşımını gerektirdiğini biliyoruz. O zaman verilen keyfi bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir $k_0 := k_0(\varepsilon)$ bulunabilir ki her $k > k_0$ için

$$V_{2\pi}[H_k \circ f - f] < \varepsilon \tag{3.4}$$

gerçeklenir. Bu yüzden $I_1(n,\upsilon)$ de verilen toplam

$$\sum_{k=1}^{k_0} a_{nk}^{\upsilon} V_{2\pi}[H_k \circ f - f] \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\,dt + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} V_{2\pi}[H_k \circ f - f] \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\,dt$$

şeklinde ikiye ayrılırsa (3.4) ten

$$I_1(n,\upsilon) \le \sum_{k=1}^{k_0} a_{nk}^{\upsilon} V_{2\pi}[H_k \circ f - f] \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\,dt + \varepsilon \sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\,dt$$

elde edilir. Burada sol tarafta bulunan toplam sonlu olduğundan

$$D = \max_{k\in\{1,2,\cdots,k_0\}} \left(V_{2\pi}[H_k \circ f - f] \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\,dt \right)$$

şeklinde tanımlanırsa $\mathscr{A}$ nın regülerliğinden öyle bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n > n_0$ için

$$\sum_{k=1}^{k_0} a_{nk}^{\upsilon} V_{2\pi}[H_k \circ f - f] \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\,dt < Dk_0\varepsilon$$

yazılabilir. Sonsuz toplamda da (i) koşulu dikkate alındığında yeterince büyük n sayıları için

$$I_1(n,\upsilon) < (Dk_0 + M)\,\varepsilon \tag{3.5}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Öte yandan f fonksiyonu mutlak sürekli olduğundan hemen hemen her yerde türevlenebilirdir. Dolayısıyla $L_{2\pi}^1$ de öteleme operatörünün sürekliliğinden

$$\lim_{t\to 0} V_{2\pi}[f(\cdot - t) - f(\cdot)] = \lim_{t\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f'(s-t) - f'(s) \right| ds = 0 \tag{3.6}$$

olduğu görülebilir. Bu takdirde verilen keyfi bir $\varepsilon > 0$ için

$$V_{2\pi}[f(\cdot - t) - f(\cdot)] < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta := \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır. Dolayısıyla $I_2(n,\upsilon)$ de verilen integral ilgili delta komşuluğunun içi ve dışı olarak parçalandığında,

$$I_2(n,\upsilon) < \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{|t|<\delta} |L_k(t)|\,dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\pi\ge|t|\ge\delta} |L_k(t)|\, V_{2\pi}[f(\cdot - t) - f(\cdot)]\,dt$$

bulunur. Burada (i) şartından

$$\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{|t|<\delta} |L_k(t)|\, dt < M\varepsilon$$

eşitsizliği gerçeklenir. İkinci toplamda ise $V_{2\pi}[\cdot]$ nın bir yarı-norm olduğu düşünülürse

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\pi\geq|t|\geq\delta} |L_k(t)|\, V_{2\pi}\left[f(\cdot - t) - f(\cdot)\right] dt \leq 2V_{2\pi}[f] \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\pi\geq|t|\geq\delta} |L_k(t)|\, dt$$

eşitsizliği elde edilir. (iii) koşulundan öyle bir $n_1 \in \mathbb{N}$ bulunabilir ki her $n > n_1$ için

$$I_2(n,\upsilon) < \left(M + 2V_{2\pi}[f]\right)\varepsilon \tag{3.7}$$

olur. Benzer şekilde (ii) den öyle bir n_2 sayısı vardır ki her $n > n_2$ için

$$I_3(n,\upsilon) < V_{2\pi}[f]\varepsilon \tag{3.8}$$

gerçeklenir. Son olarak $n' := \max\{n_0,\ n_1,\ n_2\}$ olarak tanımlanırsa (3.5), (3.7) ve (3.8) den her $n > n'$ için

$$V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\right] < \varepsilon\left(Dk_0 + 2M + 3V_{2\pi}[f]\right)$$

bulunur. Önerme 2.2.1 den her $f \in AC_{2\pi}$ için $V_{2\pi}[f] < \infty$ olacağından (3.3) yaklaşımı ispatlanır. □

Uyarı 3.1.4 *Yukarıdaki teoremde (3.6) da verilen eşitlikte $L_{2\pi}^1$ uzayındaki öteleme operatörünün sürekliliğinden faydalanılarak*

$$\lim_{t\to 0} V_{2\pi}\left[f(\cdot - t) - f(\cdot)\right] = 0$$

olduğu gösterilmiştir. Halbuki [4] teki yazarlar Teorem 1 in ispatında öteleme operatörünün sürekliliğinden

$$\lim_{t\to 0} V_{2\pi}\left[H_k \circ f(\cdot - t) - H_k \circ f(\cdot)\right] = 0$$

olduğunu kullanmışlardır. Fakat burada seçilen $\delta > 0$ sayısı sadece ε sayısına değil k ya da bağlı olabilir. Bu da sabit bir δ sayısı için $\lim_{k\to\infty} \int_{\pi\geq|t|\geq\delta} |L_k(t)|\, dt = 0$ şartının kullanılmasında bir probleme sebep olabilmektedir, çünkü yeterince büyük k lar için ortak bir δ sayısı var olmayabilir. Bundan dolayı yukarıda kullanılan ispat tekniği [4] tekinden daha güvenlidir.

3.1.2 Salınım Anlamda Yakınsaklık Oranları

Bu kısımda bazı Lipschitz sınıfları tanımlanarak fark operatörleri yardımıyla (3.2) de verilen operatörlerin yakınsaklık oranları araştırılacaktır.

Verilen bir $\alpha > 0$ sayısı için

$$\begin{aligned} VLip_{2\pi}(\alpha) &:= \left\{ f \in AC_{2\pi} : t \to 0 \text{ iken } V_{2\pi}\left[\Delta_t(f)\right] = O\left(|t|^{\alpha}\right)\right\}, \\ VLip^*_{2\pi}(\alpha) &:= \left\{ f \in AC_{2\pi} : t \to 0 \text{ iken } V_{2\pi}\left[\Delta^*_t(f)\right] = O\left(|t|^{\alpha}\right)\right\} \end{aligned}$$

Lipschitz sınıfları tanımlansın. Burada Δ_t ve Δ^*_t fark operatörleri her $s,t \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} \Delta_t(f;s) &:= f(s-t) - f(s) \\ \Delta^*_t(f;s) &:= f(s+t) + f(s-t) - 2f(s) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $f,g \in AC_{2\pi}$ için

$$t \to 0 \text{ iken } f(t) = O(g(t))$$

gösterimi ile $|t| < \delta$ iken $|f(t)| \leq N|g(t)|$ olacak şekilde N, $\delta > 0$ sayılarının var olduğu belirtilmektedir.

Bu tanımlardan yola çıkarak aşağıdaki sonuçlara ulaşılır (bkz. [12, 16, 28]):

- $\alpha > 0$ için $VLip_{2\pi}(\alpha) \subset VLip^*_{2\pi}(\alpha)$ olur. Çünkü verilen bir $f \in VLip_{2\pi}(\alpha)$ için öyle bir $L_1, L_2, \delta_1, \delta_2 > 0$ vardır ki $|t| < \delta_1$ iken

  $$V\left[f(\cdot + t) - f(\cdot)\right] \leq L_1 |t|^{\alpha}$$

  ve $|t| < \delta_2$ için

  $$V\left[f(\cdot - t) - f(\cdot)\right] \leq L_2 |t|^{\alpha}$$

  gerçeklenir. Buradan $|t| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ olduğunda $L = \max\{L_1, L_2\}$ olmak üzere

  $$\begin{aligned} V\left[f(\cdot+t) + f(\cdot-t) - 2f(\cdot)\right] &\leq V\left[f(\cdot+t) - f(\cdot)\right] + V\left[f(\cdot-t) - f(\cdot)\right] \\ &\leq 2L|t|^{\alpha} \end{aligned}$$

  eşitsizliği elde edilir. Bu da $VLip_{2\pi}(\alpha) \subset VLip^*_{2\pi}(\alpha)$ olduğunu gösterir.

- Eğer $f' \in VLip_{2\pi}(\alpha)$ ise $f \in VLip^*_{2\pi}(\alpha+1)$ olur.

- $\alpha > 1$ ise $VLip_{2\pi}(\alpha)$ sadece sabit fonksiyonlardan oluşur, aynı durum $\alpha > 2$ iken $VLip^*_{2\pi}(\alpha)$ sınıfı için de geçerlidir.

Şimdi

$$\Psi := \left\{ \xi : \mathbb{R}^+_0 \to \mathbb{R}^+_0 \mid \xi(t)\ t = 0 \text{ da sürekli, } \xi(0) = 0 \text{ ve } t > 0 \text{ için } \xi(t) > 0 \right\}$$

kümesi verilsin. Herhangi bir $\xi \in \Psi$ ve negatif olmayan regüler toplanabilme metodu $\mathscr{A} = \{[a^{\nu}_{nk}]\}$ için aşağıdaki yakınsaklık oranlarına ihtiyaç duyulmaktadır:

$$n \to \infty \text{ iken } \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t)dt - 1 \right) = O(\xi(n^{-1})) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}), \tag{3.9}$$

ve her sabit $\delta > 0$ için;

$$n \to \infty \text{ iken } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{|t|<\delta} |t|^{\alpha} |L_k(t)| \, dt = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}), \tag{3.10}$$

$$n \to \infty \text{ iken } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\pi \geq |t| \geq \delta} |L_k(t)| \, dt = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}). \tag{3.11}$$

Teorem 3.1.2 *Verilen $\{L_k\}$ çekirdek dizisi için $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_k\|_1 = M < \infty$, $M > 0$ olsun ve verilen $\xi \in \Psi$ ve $\alpha > 0$ için (3.9), (3.10), (3.11) şartları sağlansın. Ayrıca $\{\beta_k\}$ sıfıra yaklaşan pozitif terimli bir dizi olmak üzere aşağıdaki koşulları gerçeklediğini kabul edelim:*

her $k \in \mathbb{N}$ ve her sınırlı $J \subset \mathbb{R}$ aralığı için

$$\frac{V_J[G_k]}{m(J)} \leq \beta_k \tag{3.12}$$

ve

$$n \to \infty \text{ iken } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \beta_k = O(\xi(n^{-1})) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}). \tag{3.13}$$

Bu durumda aşağıdaki yaklaşımlar elde edilir:

(a) *Her $f \in VLip_{2\pi}(\alpha)$ için*

$$n \to \infty \text{ iken } V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\right] = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}).$$

(b) *Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $L_k(t)$ bir çift fonksiyonsa, yani her $t \in \mathbb{R}$ için $L_k(t) = L_k(-t)$ oluyorsa her $f \in VLip_{2\pi}^{*}(\alpha)$ için*

$$n \to \infty \text{ iken } V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\right] = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}),$$

gerçeklenir.

İspat. (a) Teorem 3.1.1 in ispatından,

$$\begin{aligned} V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\right] &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} V_{2\pi}\left[H_k \circ f - f\right] \|L_k\|_1 \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)| V_{2\pi}\left[\Delta_t(f)\right] dt \\ &+ V_{2\pi}[f] \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t)dt - 1 \right| \\ &:= F_1(n,\upsilon) + F_2(n,\upsilon) + F_3(n,\upsilon) \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir. [5] ten (3.12) nin her $k \in \mathbb{N}$ için

$$V_{2\pi}\left[H_k \circ f - f\right] \leq \beta_k$$

eşitsizliğini gerektirdiği bilinmektedir. Burada $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_k\|_1 = M < \infty$ olduğundan

$$F_1(n,\upsilon) \leq M \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \beta_k$$

bulunur. Dolayısıyla (3.13) ten $n \to \infty$ iken

$$F_1(n,\upsilon) = O(\xi(n^{-1})) \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

yazılabilir. Diğer yandan $f \in VLip_{2\pi}(\alpha)$ olduğundan öyle $N, \delta > 0$ sayıları vardır ki, $F_2(n,\upsilon)$ deki integral ilgili δ komşuluğun içi ve dışı olmak üzere ikiye ayrılırsa

$$F_2(n,\upsilon) \leq N \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|t|<\delta} |t|^{\alpha} |L_k(t)|\, dt + 2V_{2\pi}[f] \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\pi\geq|t|\geq\delta} |L_k(t)|\, dt$$

olur. Bu eşitsizlikte (3.10) ve (3.11) hipotezleri göz önüne alınırsa $n \to \infty$ iken

$$F_2(n,\upsilon) = O(\xi(n^{-1})) \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

olduğu görülür. Son olarak (3.9) koşulu düşünüldüğünde yine $n \to \infty$ iken

$$F_3(n,\upsilon) = O(\xi(n^{-1})) \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

olur ve bu da yeterince büyük n ler için

$$V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\right] = O(\xi(n^{-1})) \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

olmasını gerektirir.

(b) L_k çift fonksiyon olduğundan aşağıdaki eşitlik gerçeklenir:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} L_k(t)\ \{f(x_i - t) - f(x_i) - f(x_{i-1} - t) + f(x_{i-1})\}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} L_k(t)\ \{f(x_i - t) - f(x_i) - f(x_{i-1} - t) + f(x_{i-1})\}\, dt \right. \\
&\left. + \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t)\ \{f(x_i + t) - f(x_i) - f(x_{i-1} + t) + f(x_{i-1})\}\, dt \right).
\end{aligned}$$

Dolayısıyla Teorem 3.1.1 in ispatından

$$\begin{aligned}
V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\right] \leq & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} V_{2\pi}\left[H_k \circ f - f\right] \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\, dt \\
& + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\, V_{2\pi}\left[\Delta_t^*(f)\right] dt \\
& + V_{2\pi}[f] \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t) dt - 1 \right|
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. $\sup_{k\in\mathbb{N}}\|L_k\|_1 = M < \infty$ ve $f \in VLip^{*}_{2\pi}(\alpha)$ olduğundan

$$\begin{aligned} V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\right] \leq{} & M\sum_{k=1}^{\infty} a^{\upsilon}_{nk}\beta_k + \frac{N}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a^{\upsilon}_{nk}\int\limits_{|t|<\delta} |t|^{\alpha}\left|L_k(t)\right| dt \\ & + 2V_{2\pi}[f]\sum_{k=1}^{\infty} a^{\upsilon}_{nk}\int\limits_{\pi\geq|t|\geq\delta} \left|L_k(t)\right| dt \\ & + V_{2\pi}[f]\left|\sum_{k=1}^{\infty} a^{\upsilon}_{nk}\int\limits_{-\pi}^{\pi} L_k(t)dt - 1\right| \end{aligned}$$

olacak şekilde $N, \delta > 0$ sayıları vardır. Dolayısıyla (3.9), (3.10), (3.11) ve (3.13) ten yeterince büyük n ler için

$$V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\right] = O(\xi(n^{-1})) \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

olduğu görülür. □

Uyarı 3.1.5 *Dikkat edilirse [4] te yazarlar $VLip^{\mathscr{H}}_{2\pi}(\tau)$ ve $VLip^{*\mathscr{H}}_{2\pi}(\tau)$ Lipschitz sınıflarını aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır:*

$$\begin{aligned} VLip^{\mathscr{H}}_{2\pi}(\tau) &:= \left\{f \in AC_{2\pi} : t \to 0 \text{ iken } V_{2\pi}\left[\Delta_t\left(H_k \circ f\right)\right] = O\left(\tau(t)\right)\right\}, \\ VLip^{*\mathscr{H}}_{2\pi}(\tau) &:= \left\{f \in AC_{2\pi} : t \to 0 \text{ iken } V_{2\pi}\left[\Delta^{*}_t\left(H_k \circ f\right)\right] = O\left(\tau(t)\right)\right\}. \end{aligned}$$

Burada $\mathscr{H} := \{H_k\}$ ve

$$\mathscr{T} := \left\{\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}_{0} \mid \tau \text{ ölçülebilir, } t = 0 \text{ da sürekli ve } t \neq 0 \text{ için } \tau(t) > 0\right\}$$

ile verilmektedir. Örneğin $\tau(t) = |t|^{\alpha}$ alınırsa $\mathscr{H}$ çekirdeğinden dolayı $VLip^{\mathscr{H}}_{2\pi}(\tau)$ ve $VLip^{*\mathscr{H}}_{2\pi}(\tau)$ sınıflarının elemanlarını belirlemek $VLip_{2\pi}(\alpha)$ ve $VLip^{*}_{2\pi}(\alpha)$ sınıflarına oranla çok daha zordur. Bundan dolayı $VLip_{2\pi}(\alpha)$ ve $VLip^{*}_{2\pi}(\alpha)$ sınıfları [4] teki Teorem 2 ye göre daha çok uygulanabilir gözükmektedir.

3.2 Çok Değişkenli Fonksiyonlara Salınım Anlamda Yaklaşım

Angeloni ve Vinti aşağıda verilen operatörlerin Tonelli anlamda salınımlarını incelemişlerdir [4, 5].

$f \in BV\left(\mathbb{R}^N\right)$ olmak üzere

$$T_w(f;\mathbf{x}) = \int\limits_{\mathbb{R}^N} K_w\left(\mathbf{t}, f\left(\mathbf{x}-\mathbf{t}\right)\right) d\mathbf{t},\ \ w > 0, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N, \tag{3.14}$$

operatörü tanımlansın. Burada $K_w(\mathbf{t},s) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ öyle ki her $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^N$, $s \in \mathbb{R}$ için $K_w(\mathbf{t},s) = L_w(\mathbf{t})H_w(s)$ şeklinde verilmiştir. $H_w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H_w(0) = 0$ ve H_w Lipschitz sürekli (w ya göre düzgün) ve $\{L_w\} \subset L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ dir. Yazarlar [4, 5] numaralı makalelerde

$$w \to \infty \text{ iken } V\left[T_w(f) - f\right] \to 0 \tag{3.15}$$

yaklaşımını elde etmek için aşağıdaki şartları kullanmışlardır:

K$_w$.**1**). $\|L_w\|_{\mathbf{1}} \leq A$ olacak şekilde $A > 0$ sayısı vardır ve $\lim_{w\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} L_w(\mathbf{t})\, d\mathbf{t} = 1$,

K$_w$.**2**). her sabit $\delta > 0$ sayısı için $\lim_{w\to\infty} \int_{|\mathbf{t}|\geq\delta} |L_w(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} = 0$ sağlanır,

K$_w$.**3**). $G_w := H_w(u) - u$ olmak üzere her sınırlı $J \subset \mathbb{R}$ aralığı için $w \to \infty$ iken

$$\frac{V_J\left[G_w\right]}{m(J)} \to 0 \ \ (J \text{ ye göre düzgün}).$$

Bu şartlar altında Angeloni ve Vinti her $f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için (3.15) yaklaşımının doğruluğunu göstermişlerdir. Şimdi bu yaklaşımın toplam süreci yardımıyla daha genel şartlar altında tanımlayacağımız operatörler için de sağlandığı gösterilecektir. Ayrıca uygun Lipschitz sınıfları yardımıyla elde edilen yakınsaklık hızı da hesaplanacaktır.

3.2.1 Tonelli Salınımda Toplam Süreci

Bu bölümde negatif olmayan bir toplanabilme metodu yardımıyla tanımlanan aşağıdaki operatörleri göz önüne alacağız:

$$\mathcal{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} K_k(\mathbf{t}, f(\mathbf{x}-\mathbf{t}))\, d\mathbf{t}, \ \ n,\upsilon \in \mathbb{N}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N. \tag{3.16}$$

Burada $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, ölçülebilir, sınırlı ve (3.16) yı iyi tanımlı yapan fonksiyonlardır. (3.16) tanımında K_k ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere $K_k(\mathbf{t}, s) = L_k(\mathbf{t}) H_k(s)$ olarak verilmiştir öyle ki $\{L_k\} \subset L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ ve $H_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $H_k(0) = 0$ ve H_k Lipschitz süreklidir.

Uyarı 3.2.1 *Yukarıda $\mathcal{A} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa (3.16) da tanımlanan operatörün (3.14) te verilen operatöre dönüştüğü kolayca görülebilir. Dolayısıyla bu çalışma [4, 5] teki sonuçlardan daha genel durumları kapsamaktadır.*

Yaklaşım teoremini elde edebilmek için aşağıdaki koşullara ihtiyaç duyulmaktadır.

(I) $\sup\limits_{n,\upsilon\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \|L_k\|_{\mathbf{1}} = M < \infty$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır,

(II) $\mathcal{A} - \lim \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right) = 1$,

(III) her sabit $\delta > 0$ sayısı için $\mathscr{A}-\lim\left(\int\limits_{|\mathbf{t}|\geq\delta}|L_k(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}\right)=0,$

(iv) $G_k(u) := H_k(u) - u$ $(u \in \mathbb{R},\, k \in \mathbb{N})$ olmak üzere her $J \subset \mathbb{R}$ sınırlı aralığı için

$$\lim_{k\to\infty}\frac{V_J[G_k]}{m(J)} = 0 \ \ (J \text{ ye göre düzgün}).$$

Lemma 3.2.1 *(I) koşulunun sağlandığını varsayalım. O zaman her $f \in BV(\mathbb{R}^N)$ için öyle bir $D > 0$ sayısı vardır ki her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için*

$$V[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)] \leq DV[f]$$

gerçeklenir.

İspat. $I = \Pi_{i=1}^{N}[a_i, b_i]$ ve $\{J_1, \ldots, J_m\}$ kümesi I aralığının bir parçalanması olsun ve $q = 1, 2, \ldots, m$ için N-boyutlu J_q alt aralığı $J_q = \Pi_{j=1}^{N}[{}^q a_j, {}^q b_j]$ ile gösterilsin. Ayrıca $j = 1, \ldots, N$ ve $q = 1, \ldots, m$ için $\{s_j^0 = {}^q a_j, \ldots, s_j^\lambda = {}^q b_j\}$ kümesi de $[{}^q a_j, {}^q b_j]$ aralığının keyfi bir parçalanması olsun. Bu durumda C sayısı Lipschitz sabiti olmak üzere

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu=1}^{\lambda}\left|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;(s'_j,s_j^{\mu}))-\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;(s'_j,s_j^{\mu-1}))\right| \\
&=\sum_{\mu=1}^{\lambda}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^N}L_k(\mathbf{t})[H_k(f(s'_j-t'_j,s_j^{\mu}-t_j))\right.\\
&\left.-H_k(f(s'_j-t'_j,s_j^{\mu-1}-t_j))]d\mathbf{t}\right| \\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|L_k(\mathbf{t})|\sum_{\mu=1}^{\lambda}\left|f(s'_j-t'_j,s_j^{\mu}-t_j)-f(s'_j-t'_j,s_j^{\mu-1}-t_j)\right|d\mathbf{t}
\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada $\left[{}^q a_j, {}^q b_j\right]$ aralığının parçalanmaları üzerinden supremum alınırsa

$$V_{\left[{}^q a_j,{}^q b_j\right]}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f;\left(s'_j,\cdot\right)\right)\right] \leq C\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^N}|L_k(\mathbf{t})|V_{\left[{}^q a_j,{}^q b_j\right]}\left[f\left(s'_j-t'_j,\cdot-t_j\right)\right]d\mathbf{t}$$

olduğu görülür. Buradan

$$\Phi_j\left(\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f),J_q\right) := \int\limits_{a'_j}^{b'_j}V_{\left[{}^q a_j,{}^q b_j\right]}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f;\left(s'_j,\cdot\right)\right)\right]ds'_j$$

olarak tanımlanırsa, Fubini-Tonelli Teoremi'nden aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}\Phi_j\left(\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f),J_q\right) &\leq C\int_{a'_j}^{b'_j}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|L_k(\mathbf{t})|V_{[{}^q a_j,{}^q b_j]}\left[f\left(s'_j-t'_j,\cdot-t_j\right)\right]d\mathbf{t}\right)ds'_j\\
&=C\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{a'_j}^{b'_j}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|L_k(\mathbf{t})|V_{[{}^q a_j,{}^q b_j]}\left[f\left(s'_j-t'_j,\cdot-t_j\right)\right]d\mathbf{t}\right)ds'_j\\
&=C\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{\mathbb{R}^N}\left(|L_k(\mathbf{t})|\int_{a'_j}^{b'_j}V_{[{}^q a_j,{}^q b_j]}\left[f\left(s'_j-t'_j,\cdot-t_j\right)\right]ds'_j\right)d\mathbf{t}\\
&=C\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|L_k(\mathbf{t})|\Phi_j\left(f(\cdot-\mathbf{t}),J_q\right)d\mathbf{t}.\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\Phi\left(\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f),J_q\right):=\left\{\sum_{j=1}^{N}\Phi_J^2\left(\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f),J_q\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanırsa Fubini-Tonelli Teoremi'nden

$$\begin{aligned}\Phi\left(\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f),J_q\right) &\leq C\left\{\sum_{j=1}^{N}\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|L_k(\mathbf{t})|\Phi_J\left(f(\cdot-\mathbf{t}),J_q\right)d\mathbf{t}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\\
&=C\left\{\sum_{j=1}^{N}\left[\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}|L_k(\mathbf{t})|\Phi_J\left(f(\cdot-\mathbf{t}),J_q\right)d\mathbf{t}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

gerçeklenir. Bu eşitsizlikte iki kez genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\Phi\left(\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f),J_q\right) &\leq C\int_{\mathbb{R}^N}\left[\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}|L_k(\mathbf{t})|\Phi_J\left(f(\cdot-\mathbf{t}),J_q\right)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}d\mathbf{t}\\
&=C\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}|L_k(\mathbf{t})|\left[\sum_{j=1}^{N}\Phi_J^2\left(f(\cdot-\mathbf{t}),J_q\right)\right]^{\frac{1}{2}}d\mathbf{t}\\
&=C\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|L_k(\mathbf{t})|\Phi\left(f(\cdot-\mathbf{t}),J_q\right)d\mathbf{t}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}V_I\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\right] &= \sup_{\{J_1,\ldots,J_m\}}\sum_{q=1}^{m}\Phi\left(\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f),J_q\right)\\
&\leq C\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|L_k(\mathbf{t})|V_I\left[f(\cdot-\mathbf{t})\right]d\mathbf{t}\end{aligned}$$

bulunur. Her $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^N$ için

$$V[f(\cdot - \mathbf{t})] = V[f]$$

olduğundan tüm $I \subset \mathbb{R}^N$ aralıkları üzerinden $\mathbb{R}^N$ de supremum alınırsa aşağıdaki eşitsizlik kolayca yazılabilir:

$$\begin{aligned} V[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)] &= \sup_{I \subset \mathbb{R}^N} V_I[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)] \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| V[f(\cdot - \mathbf{t})] \, d\mathbf{t} \\ &\leq CMV[f]. \end{aligned}$$

Son olarak $D := CM$ şeklinde tanımlandığında $f \in BV(\mathbb{R}^N)$ olduğundan ispat tamamlanır. □

Lemma 3.2.2 (I) *koşulunun sağlandığını kabul edelim. Eğer* $f \in AC(\mathbb{R}^N)$ *ise her* $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ *için* $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) \in AC(\mathbb{R}^N)$ *gerçeklenir.*

İspat. $f \in AC(\mathbb{R}^N) \subset AC_{loc}(\mathbb{R}^N)$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $g_j(x_j) := f(x'_j, x_j)$ fonksiyonunu lokal mutlak sürekli yapan bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $I = \Pi_{i=1}^{N}[a_i, b_i]$ olmak üzere $\{(\alpha_j^{\mu}, \beta_j^{\mu})\}_{\mu=1,\ldots,\lambda}$ ailesi

$$\sum_{\mu=1}^{\lambda} \left(\beta_j^{\mu} - \alpha_j^{\mu}\right) < \delta$$

olacak şekilde her $j = 1, \ldots, N$ için $[a_j, b_j]$ aralığının çakışmayan alt aralıkları olsun. Bu takdirde üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} I &= \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left| \mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f; \left(s'_j, \beta_j^{\mu}\right)\right) - \mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f; \left(s'_j, \alpha_j^{\mu}\right)\right) \right| \\ &= \sum_{\mu=1}^{\lambda} \Bigg| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) \Big[H_k\left(f\left(s'_j - t'_j, \beta_j^{\mu} - t_j\right)\right) \\ &\quad - H_k\left(f\left(s'_j - t'_j, \alpha_j^{\mu} - t_j\right)\right) \Big] d\mathbf{t} \Bigg| \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left| f\left(s'_j - t'_j, \beta_j^{\mu} - t_j\right) - f\left(s'_j - t'_j, \alpha_j^{\mu} - t_j\right) \right| d\mathbf{t} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada

$$\sum_{\mu=1}^{\lambda} \left(\beta_j^{\mu} - t_j - \left[\alpha_j^{\mu} - t_j\right]\right) = \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left(\beta_j^{\mu} - \alpha_j^{\mu}\right) < \delta$$

olduğundan her $j = 1, \ldots, N$ için

$$I \leq CM\varepsilon$$

gerçeklenir. Bu ise $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) \in AC_{loc}(\mathbb{R}^N)$ olduğunu kanıtlar. Son olarak Lemma 3.2.1 den $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) \in AC(\mathbb{R}^N)$ olduğu kolayca elde edilir. □

Lemma 3.2.3 *$f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ olmak üzere eğer (iv) şartı sağlanırsa*

$$\lim_{k\to\infty} V\left[H_k \circ f - f\right] = 0$$

olur [5].

Lemma 3.2.4 *$f \in L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ olmak üzere $L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ uzayında $T_{\mathbf{a}}(f;\mathbf{x}) := f(\mathbf{x}-\mathbf{a})$ öteleme operatörü süreklidir [27].*

İspat. Kompakt destekli sürekli fonksiyonlar uzayı $L^1\left(\mathbb{R}^N\right)$ de yoğun olduğundan her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ için

$$\|f-g\|_{\mathbf{1}} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $g \in C_c\left(\mathbb{R}^N\right)$ vardır. Ayrıca g sürekli ve kompakt destekli olduğundan $|\mathbf{a}| < \delta$ iken

$$\|g(\cdot-\mathbf{a}) - g(\cdot)\|_{\mathbf{1}} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned}\|f(\cdot-\mathbf{a}) - f(\cdot)\|_{\mathbf{1}} &\leq \|f(\cdot-\mathbf{a}) - g(\cdot-\mathbf{a})\|_{\mathbf{1}} + \|g(\cdot-\mathbf{a}) - g(\cdot)\|_{\mathbf{1}} + \|g-f\|_{\mathbf{1}} \\ &< 3\varepsilon\end{aligned}$$

gerçeklenir. □

Bu kısımdaki yaklaşım teoremi aşağıda verilmektedir.

Teorem 3.2.1 *Kabul edelim ki $(I)-(III)$ ve (iv) sağlansın. O zaman her $f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için*

$$\lim_{n\to\infty} V\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\right] = 0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

gerçeklenir.

İspat. $I = \Pi_{i=1}^N [a_i, b_i]$ ve $\{J_1, \ldots, J_m\}$ ailesi $q = 1, 2, \ldots, m$ için $J_q = \Pi_{j=1}^N \left[{}^q a_j, {}^q b_j\right]$ olacak şekilde I aralığının bir parçalanması olsun. Her $j = 1, \ldots, N$ ve $q = 1, \ldots, m$ için $\{s_j^0 = {}^q a_j, \ldots, s_j^\lambda = {}^q b_j\}$ kümesi de $\left[{}^q a_j, {}^q b_j\right]$ aralığının keyfi bir parçalanması olsun. Buradan uygun terimler eklenip çıkartılarak

$$\begin{aligned}L :=& \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left| \mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f; \left(s_j', s_j^\mu\right)\right) - f\left(s_j', s_j^\mu\right) - \mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f; \left(s_j', s_j^{\mu-1}\right)\right) + f\left(s_j', s_j^{\mu-1}\right)\right| \\ =& \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) \left[H_k\left(f\left(s_j' - t_j', s_j^\mu - t_j\right)\right) - f\left(s_j' - t_j', s_j^\mu - t_j\right)\right.\right. \\ &- \left.H_k\left(f\left(s_j' - t_j', s_j^{\mu-1} - t_j\right)\right) + f\left(s_j' - t_j', s_j^{\mu-1} - t_j\right)\right] d\mathbf{t} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) \left[f\left(s_j' - t_j', s_j^\mu - t_j\right) - f\left(s_j', s_j^\mu\right)\right. \\ &- \left.f\left(s_j' - t_j', s_j^{\mu-1} - t_j\right) + f\left(s_j', s_j^{\mu-1}\right)\right] d\mathbf{t} \\ &+ \left.\left\{f\left(s_j', s_j^{\mu-1}\right) - f\left(s_j', s_j^\mu\right)\right\} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - 1\right)\right|\end{aligned} \tag{3.17}$$

elde edilir. Dolayısıyla üçgen eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
L \leq & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \sum_{\mu=1}^{\lambda} \Big| H_k\left(f\left(s_j'-t_j', s_j^{\mu}-t_j\right)\right) - f\left(s_j'-t_j', s_j^{\mu}-t_j\right) \\
& - H_k\left(f\left(s_j'-t_j', s_j^{\mu-1}-t_j\right)\right) + f\left(s_j'-t_j', s_j^{\mu-1}-t_j\right)\Big| d\mathbf{t} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \sum_{\mu=1}^{\lambda} \Big| f\left(s_j'-t_j', s_j^{\mu}-t_j\right) - f\left(s_j', s_j^{\mu}\right) \\
& - f\left(s_j'-t_j', s_j^{\mu-1}-t_j\right) + f\left(s_j', s_j^{\mu-1}\right)\Big| d\mathbf{t} \\
& + \sum_{\mu=1}^{\lambda} \left| f\left(s_j', s_j^{\mu}\right) - f\left(s_j', s_j^{\mu-1}\right)\right| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - 1 \right|
\end{aligned}
$$

olduğu kolayca görülür. Eşitsizliğin sağında $[{}^q a_j, {}^q b_j]$ aralığının bütün parçalanmaları üzerinden supremum alınırsa,

$$
\begin{aligned}
L \leq & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| V_{[{}^q a_j, {}^q b_j]} \left[H_k\left(f\left(s_j'-t_j', \cdot - t_j\right)\right) - f\left(s_j'-t_j', \cdot - t_j\right)\right] d\mathbf{t} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| V_{[{}^q a_j, {}^q b_j]} \left[f\left(s_j'-t_j', \cdot - t_j\right) - f\left(s_j', \cdot\right)\right] d\mathbf{t} \\
& + V_{[{}^q a_j, {}^q b_j]} \left[f\left(s_j', \cdot\right)\right] \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - 1 \right|
\end{aligned}
$$

bulunur. Fubini-Tonelli Teoremi'nden her $j = 1, \ldots, N$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\Phi_j\left(\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f, J_q\right) := & \int_{{}^q a_j'}^{{}^q b_j'} V_{[{}^q a_j, {}^q b_j]} \left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f; (s_j', \cdot)\right) - f\left(s_j', \cdot\right)\right] ds_j' \\
\leq & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \Phi_j\left(H_k\left(f(\cdot - \mathbf{t})\right) - f(\cdot - \mathbf{t}), J_q\right) d\mathbf{t} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \Phi j\left(f(\cdot - \mathbf{t}) - f(\cdot), J_q\right) d\mathbf{t} \\
& + \Phi_j\left(f, J_q\right) \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - 1 \right|.
\end{aligned}
$$

Burada

$$
\Phi\left(\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f, J_q\right) := \left\{ \sum_{j=1}^{N} \Phi_j^2\left(\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f, J_q\right) \right\}^{\frac{1}{2}}
$$

şeklinde tanımlanırsa Minkowski eşitsizliğiden her $q = 1,\ldots,m$ için

$$\begin{aligned}
&\Phi\left(\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f, J_q\right) \\
&\leq \left\{ \sum_{j=1}^{N} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \, \Phi_j \left(H_k\left(f(\cdot - \mathbf{t})\right) - f(\cdot - \mathbf{t}), J_q \right) d\mathbf{t} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left\{ \sum_{j=1}^{N} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \, \Phi_j \left(f(\cdot - \mathbf{t}) - f(\cdot), J_q \right) d\mathbf{t} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left\{ \sum_{j=1}^{N} \Phi_j^2\left(f, J_q\right) \right\}^{\frac{1}{2}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - 1 \right| \\
&:= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

gerçeklenir. I_1 terimine iki kez genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left\{ \sum_{j=1}^{N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} |L_k(\mathbf{t})| \, \Phi_j \left(H_k\left(f(\cdot - \mathbf{t})\right) - f(\cdot - \mathbf{t}), J_q \right) \right) d\mathbf{t} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} |L_k(\mathbf{t})| \, \Phi_j \left(H_k\left(f(\cdot - \mathbf{t})\right) - f(\cdot - \mathbf{t}), J_q \right) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{t} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{N} \left[a_{nk}^{\upsilon} |L_k(\mathbf{t})| \, \Phi_j \left(H_k\left(f(\cdot - \mathbf{t})\right) - f(\cdot - \mathbf{t}), J_q \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} d\mathbf{t}
\end{aligned}$$

olur. Fubini-Tonelli Teoremi'nden

$$I_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \, \Phi \left(H_k\left(f(\cdot - \mathbf{t})\right) - f(\cdot - \mathbf{t}), J_q \right) d\mathbf{t}$$

elde edilir. Benzer şekilde I_2 için de iki kez genelleştirilmiş Minkowski eşitsizliği ve bir kez Fubini-Tonelli Teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
I_2 &= \left\{ \sum_{j=1}^{N} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \left| L_k(\mathbf{t}) \right| \Phi_j \left(f\left(\cdot - \mathbf{t}\right) - f\left(\cdot\right), J_q \right) d\mathbf{t} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{j=1}^{N} \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \left| L_k(\mathbf{t}) \right| \Phi_j \left(f\left(\cdot - \mathbf{t}\right) - f\left(\cdot\right), J_q \right) \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}} d\mathbf{t} \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^N} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \left| L_k(\mathbf{t}) \right| \left(\sum_{j=1}^{N} \Phi_j^2 \left(f\left(\cdot - \mathbf{t}\right) - f\left(\cdot\right), J_q \right) \right)^{\frac{1}{2}} d\mathbf{t} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left| L_k(\mathbf{t}) \right| \Phi \left(f\left(\cdot - \mathbf{t}\right) - f\left(\cdot\right), J_q \right) d\mathbf{t}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. I_3 terimi için

$$I_3 = \Phi\left(f, J_q\right) \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - 1 \right|$$

eşitliği Φ nin tanımından açıktır. Tüm bu eşitsizlikler dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
V_I\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f\right) - f\right] = \sup_{\{J_1,\ldots,J_m\}} & \sum_{q=1}^{m} \Phi\left(\mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f\right) - f, J_q\right) \\
\leq & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left| L_k(\mathbf{t}) \right| V_I\left[H_k\left(f\left(\cdot - \mathbf{t}\right)\right) - f\left(\cdot - \mathbf{t}\right)\right] d\mathbf{t} \\
+ & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left| L_k(\mathbf{t}) \right| V_I\left[f\left(\cdot - \mathbf{t}\right) - f\left(\cdot\right)\right] d\mathbf{t} \\
+ & V_I\left[f\right] \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - 1 \right|
\end{aligned}$$

gerçeklenir ve $I \subset \mathbb{R}^N$ keyfi olduğundan I aralıkları üzerinden supremum alınırsa

$$\begin{aligned}
V\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f\right) - f\right] = & \sup_{I \subset \mathbb{R}^N} V_I\left[f\right] \\
\leq & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left| L_k(\mathbf{t}) \right| V\left[H_k\left(f\left(\cdot - \mathbf{t}\right)\right) - f\left(\cdot - \mathbf{t}\right)\right] d\mathbf{t} \\
+ & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} \left| L_k(\mathbf{t}) \right| V\left[f\left(\cdot - \mathbf{t}\right) - f\left(\cdot\right)\right] d\mathbf{t} \\
+ & V\left[f\right] \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - 1 \right| \\
:= & P_1 + P_2 + P_3
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Keyfi $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^N$ için

$$V\left[H_k\left(f\left(\cdot-\mathbf{t}\right)\right)-f\left(\cdot-\mathbf{t}\right)\right]=V\left[H_k\left(f\right)-f\right]$$

eşitliği her zaman doğrudur, dolayısıyla Lemma 3.2.3 ten $\forall\varepsilon>0$, $\exists k_0\in\mathbb{N}$ vardır ki her $k>k_0$ için

$$V\left[H_k\left(f\right)-f\right]<\varepsilon$$

olur. Dolayısıyla P_1 ifadesindeki toplam k_0 dan itibaren bölünürse (I) şartından

$$P_1<\sum_{k=1}^{k_0}a_{nk}^{\upsilon}V\left[H_k\left(f\right)-f\right]\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|L_k(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}+\varepsilon M$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan,

$$D=\max_{1\leq k\leq k_0}\left\{V\left[H_k\left(f\right)-f\right]\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|L_k(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}\right\}$$

yazarak aşağıdaki eşitsizlik kolaylıkla görülebilir:

$$\sum_{k=1}^{k_0}a_{nk}^{\upsilon}V\left[H_k\left(f\right)-f\right]\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|L_k(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}\leq D\sum_{k=1}^{k_0}a_{nk}^{\upsilon}.$$

$\mathscr{A}$ regüler olduğundan $1\leq k\leq k_0$ için k dan bağımsız bir $n_0'=n_0'(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayısı bulunabilir öyle ki her $n>n_0'$ için $a_{nk}^{\upsilon}<\varepsilon$ sağlanır. Bu nedenle

$$\sum_{k=1}^{k_0}a_{nk}^{\upsilon}V\left[H_k\left(f\right)-f\right]\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|L_k(\mathbf{t})\right|d\mathbf{t}<Dk_0\varepsilon$$

eşitsizliği gerçeklenir. Öte yandan P_2 de $f\in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ olduğundan (2.4) uyarınca

$$V\left[f\left(\cdot-\mathbf{t}\right)-f\left(\cdot\right)\right]=\int\limits_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla f\left(\mathbf{s}-\mathbf{t}\right)-\nabla f\left(\mathbf{s}\right)\right|d\mathbf{s} \tag{3.18}$$

olduğunu biliyoruz. Burada öteleme operatörünün sürekliliği düşünüldüğünde, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ vardır, öyle ki $|\mathbf{s}-\mathbf{t}-\mathbf{s}|=|\mathbf{t}|<\delta$ iken $V\left[f\left(\cdot-\mathbf{t}\right)-f\left(\cdot\right)\right]<\varepsilon$ olur. P_2 deki integral buradaki δ sayısından faydalanılarak ilgili δ komşuluğunun içi ve dışı olmak üzere parçalanırsa aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}P_2=&\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta}\left|L_k(\mathbf{t})\right|V\left[f\left(\cdot-\mathbf{t}\right)-f\left(\cdot\right)\right]d\mathbf{t}\\&+\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|\geq\delta}\left|L_k(\mathbf{t})\right|V\left[f\left(\cdot-\mathbf{t}\right)-f\left(\cdot\right)\right]d\mathbf{t}.\end{aligned}$$

Dolayısıyla (3.18) den

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta}\left|L_k(\mathbf{t})\right|V\left[f\left(\cdot-\mathbf{t}\right)-f\left(\cdot\right)\right]d\mathbf{t}<\varepsilon M$$

ve (III) şartından, yeterince büyük n ler için,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|\mathbf{t}|\geq\delta} |L_k(\mathbf{t})| V[f(\cdot-\mathbf{t})-f(\cdot)]\, d\mathbf{t} \leq 2V[f] \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|\mathbf{t}|\geq\delta} |L_k(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}$$
$$< 2V[f]\,\varepsilon$$

olur. Son olarak (II) den yeterince büyük n ler için

$$P_3 < V[f]\,\varepsilon$$

gerçeklenir. Bu ise, yeterince büyük n ler için

$$V[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f] < \varepsilon\,(k_0 D + 2M + 3V[f])$$

olduğunu gösterir. □

Uyarı 3.2.2 *Teorem 3.2.1 in ispatında ∇f nin $L^1(\mathbb{R}^N)$ uzayında sürekliliği için*

$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{0}} V[f(\cdot-\mathbf{t})-f(\cdot)] = \lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{0}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla f(\mathbf{s}-\mathbf{t}) - \nabla f(\mathbf{s})|\, d\mathbf{s} = 0$$

kullanılmıştır, dolayısıyla buradaki δ sadece f ve ε a bağlıdır. Fakat [4] te yazarlar

$$\lim_{\mathbf{t}\to\mathbf{0}} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |\nabla(H_k\circ f)(\mathbf{s}-\mathbf{t}) - \nabla(H_k\circ f)(\mathbf{s})|\, d\mathbf{s} = 0$$

olduğunu kullanmışlar yani $\nabla(H_k\circ f)$ nin sürekliliğinden faydalanmışlardır. Buradaki δ sayısı k ya da bağlıdır, dolayısıyla sabit bir $\delta > 0$ sayısı için geçerli olan $\mathbf{K}_w.\mathbf{2}$). hipotezi burada geçerli olmayabilir. Bu yüzden Teorem 3.2.1 de kullanılan ispat tekniği daha uygundur.

3.2.2 Tonelli Salınımda Yakınsaklık Oranları

Bu kısımda (3.16) da verilen operatörlerin salınım anlamda yaklaşım oranları hesaplanacaktır. Bunun için bazı Lipschitz sınıflarına ihtiyaç vardır. Verilen $\alpha > 0$ sayısı için $\mathbf{t},\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ ve $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)$ olmak üzere Lipschitz sınıfları aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} VLip_N(\alpha) &:= \left\{ f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right) : \mathbf{t}\to\mathbf{0} \text{ iken } V[\Delta_{\mathbf{t}}(f)] = O\left(|\mathbf{t}|^{\alpha}\right) \right\}, \\ VLip_N^*(\alpha) &:= \left\{ f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right) : \mathbf{t}\to\mathbf{0} \text{ iken } V[\Delta_{\mathbf{t}}^*(f)] = O\left(|\mathbf{t}|^{\alpha}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} (\Delta_{\mathbf{t}})(f;\mathbf{x}) &:= f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) - f(\mathbf{x}), \\ (\Delta_{\mathbf{t}}^*)(f;\mathbf{x}) &:= f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) + f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) - 2f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

olarak tanımlıdır.

$\Psi := \left\{ \xi : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+ \; | t=0 \text{ da sürekli}, \; \xi(0)=0 \text{ ve her } t>0 \text{ için } \xi(t)>0 \right\}$ kümesi verilsin. Yaklaşım oranlarının hesaplanabilmesi için $\xi \in \Psi$ olmak üzere

$$n \to \infty \text{ iken } \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t} - 1 \right) = O(\xi(n^{-1})) \;\; (\upsilon \text{ ye göre düzgün}), \tag{3.19}$$

her sabit $\delta > 0$ için;

$$n \to \infty \text{ iken } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{|\mathbf{t}|<\delta} |L_k(\mathbf{t})| \, |\mathbf{t}|^{\alpha} \, d\mathbf{t} = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \;\; (\upsilon \text{ ye göre düzgün}), \tag{3.20}$$

$$n \to \infty \text{ iken } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{|\mathbf{t}|\geq\delta} |L_k(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t} = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \;\; (\upsilon \text{ ye göre düzgün}) \tag{3.21}$$

hipotezlerine ihtiyaç duyulmaktadır.

Teorem 3.2.2 *(L_k) çekirdek fonksiyonlarının bir dizisi ve M pozitif bir sayı olmak üzere $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_k\|_{\mathbf{1}} = M < \infty$ olacak şekilde bir M sayısı var olsun. Kabul edelim ki $\xi \in \Psi$ ve $\alpha > 0$ için (3.19), (3.20), (3.21) sağlansın. Ayrıca $\{\beta_k\}$ sıfıra yakınsayan pozitif terimli bir dizi olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ ve her sınırlı $J \subset \mathbb{R}$ aralığı için*

$$\frac{V_J[G_k]}{m(J)} \leq \beta_k \tag{3.22}$$

ve

$$n \to \infty \text{ iken } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \beta_k = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \;\; (\upsilon \text{ ye göre düzgün}) \tag{3.23}$$

gerçeklensin. Bu takdirde aşağıdaki yaklaşımları elde ederiz:

(a) *Her $f \in VLip_N(\alpha)$ için*

$$n \to \infty \text{ iken } V\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\right] = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \;\; (\upsilon \text{ ye göre düzgün}). \tag{3.24}$$

(b) *Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $L_k(\mathbf{t})$ bir çift fonksiyonsa, yani her $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^N$ için $L_k(\mathbf{t}) = L_k(-\mathbf{t})$ oluyorsa (3.24) yaklaşımı $f \in VLip_N^*(\alpha)$ için de geçerlidir.*

İspat. (a) Teorem 3.2.1 den aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$\begin{aligned} V\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\right] &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} V\left[H_k(f) - f\right] \|L_k\|_{\mathbf{1}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \, V\left[\Delta_{\mathbf{t}}(f)\right] d\mathbf{t} \\ &\quad + V[f] \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - 1 \right| \\ &:= R_1 + R_2 + R_3. \end{aligned}$$

R_1 de (3.22) koşulu göz önüne alındığında [5] ten her $k \in \mathbb{N}$ için

$$V\left[H_k(f) - f\right] \leq \beta_k$$

olduğu bilinmektedir. Burada $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_k\|_1 = M < \infty$ hipotezinden

$$R_1 \leq M \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \beta_k$$

olduğu görülür. Dolayısıyla (3.23) ten $n \to \infty$ iken

$$R_1 = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

elde edilir. R_2 incelendiğinde $f \in VLip_N(\alpha)$ olduğundan öyle $L, \delta > 0$ sayıları vardır ki $|\mathbf{t}| < \delta$ için

$$V\left[\Delta_{\mathbf{t}}(f)\right] \leq L|\mathbf{t}|^{\alpha}$$

olur. Buradan yola çıkılarak R_2 deki integral ilgili δ komşuluğun içi ve dışı olarak ikiye parçalanırsa

$$R_2 \leq L \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta} |\mathbf{t}|^{\alpha} |L_k(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t} + 2V[f] \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|\mathbf{t}|\geq\delta} |L_k(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte (3.20) ve (3.21) şartları dikkate alındığında $n \to \infty$ iken

$$R_2 = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

sağlanır. Son olarak R_3 te (3.19) hipotezi ele alındığında yeterince büyük n ler için

$$R_3 = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}),$$

olduğu görülebilir. Buradan, yeterince büyük n ler için

$$V\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\right] = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

sonucuna ulaşılır.

(b) Bu kısmın ispatı için $n \to \infty$ iken $R_2 = O(\xi\left(n^{-1}\right))$ olduğunu göstermek yeterlidir. (3.17) den

$$\begin{aligned} U \ := \sum_{\mu=1}^{\lambda} \Bigg| & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) \Big[f\left(s_j' - t_j', s_j^{\mu} - t_j\right) - f\left(s_j', s_j^{\mu}\right) \\ & - f\left(s_j' - t_j', s_j^{\mu-1} - t_j\right) + f\left(s_j', s_j^{\mu-1}\right)\Big] d\mathbf{t} \Bigg| \end{aligned} \tag{3.25}$$

olduğu görülür. $f \in VLip_N^*(\alpha)$ olduğundan (3.25) teki integral uygun bir δ komşuluğundan itibaren parçalanırsa

$$
\begin{aligned}
U := &\sum_{\mu=1}^{\lambda}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta}L_k(\mathbf{t})\left[f\left(s_j'-t_j',s_j^{\mu}-t_j\right)-f\left(s_j',s_j^{\mu}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.-\ f\left(s_j'-t_j',s_j^{\mu-1}-t_j\right)+f\left(s_j',s_j^{\mu-1}\right)\right]d\mathbf{t}\right|\\
&+\sum_{\mu=1}^{\lambda}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|\geq\delta}L_k(\mathbf{t})\left[f\left(s_j'-t_j',s_j^{\mu}-t_j\right)-f\left(s_j',s_j^{\mu}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.-\ f\left(s_j'-t_j',s_j^{\mu-1}-t_j\right)+f\left(s_j',s_j^{\mu-1}\right)\right]d\mathbf{t}\right|
\end{aligned}
$$

olur. Burada δ komşuluğunun dışında kalan kısıma Teorem 3.2.1 deki adımlar uygulanarak

$$
2V[f]\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|\geq\delta}|L_k(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}
$$

ifadesi elde edilir. Bu parça (3.21) den $n\to\infty$ iken $O(\xi\left(n^{-1}\right))$ ifadesine eşit olur. Diğer taraftan δ komşuluğunun içinde kalan kısım aşağıdaki şekilde iki parçaya ayırılıp $\mathbf{t}=-\mathbf{u}$ değişken değiştirmesi yapıldığında, $L_k(\mathbf{t})$ çift olduğundan

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\mu=1}^{\lambda}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta}L_k(\mathbf{t})\left[f\left(s_j'-t_j',s_j^{\mu}-t_j\right)-f\left(s_j',s_j^{\mu}\right)\right.\right.\\
&\left.\left.-\ f\left(s_j'-t_j',s_j^{\mu-1}-t_j\right)+f\left(s_j',s_j^{\mu-1}\right)\right]d\mathbf{t}\right|\\
&=\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{\lambda}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta}L_k(\mathbf{t})\left[f\left(s_j'-t_j',s_j^{\mu}-t_j\right)-f\left(s_j',s_j^{\mu}\right)\right.\right.\\
&\left.-\ f\left(s_j'-t_j',s_j^{\mu-1}-t_j\right)+f\left(s_j',s_j^{\mu-1}\right)\right]d\mathbf{t}\\
&+\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{u}|<\delta}L_k(-\mathbf{u})\left[f\left(s_j'+u_j',s_j^{\mu}+u_j\right)-f\left(s_j',s_j^{\mu}\right)\right.\\
&\left.\left.-\ f\left(s_j'+u_j',s_j^{\mu-1}+u_j\right)+f\left(s_j',s_j^{\mu-1}\right)\right]d\mathbf{u}\right|\\
&\leq\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta}|L_k(\mathbf{t})|\,V\left[\Delta_{\mathbf{t}}^{*}(f)\right]d\mathbf{t}
\end{aligned}
$$

bulunur. Son olarak $f\in VLip_N^{*}(\alpha)$ olduğundan (3.20) den yeterince büyük n ler için

$$
\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta}|L_k(\mathbf{t})|\,V\left[\Delta_{\mathbf{t}}^{*}(f)\right]d\mathbf{t}=O(\xi\left(n^{-1}\right))
$$

olduğu görülür. □

Uyarı 3.2.3 *[4] teki çalışmada* $\mathscr{H} := (H_k)$ *ve* τ *ölçülebilir olmak üzere* $\tau : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}_0^+$, $\mathbf{t} = \mathbf{0}$ *da sürekli ve* $\mathbf{t} \neq \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ *için* $\tau(\mathbf{t}) > 0$ *koşulları sağlanacak şekilde aşağıdaki Lipschitz sınıfları tanımlanmıştır:*

$$\begin{aligned} VLip_N^{\mathscr{H}}(\tau) &= \left\{ f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right) : \mathbf{t} \to \mathbf{0} \text{ iken } V\left[\Delta_{\mathbf{t}}\left(H_k \circ f\right)\right] = O\left(\tau\left(\mathbf{t}\right)\right) \right\}, \\ VLip_N^{*\mathscr{H}}(\tau) &= \left\{ f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right) : \mathbf{t} \to \mathbf{0} \text{ iken } V\left[\Delta_{\mathbf{t}}^*\left(H_k \circ f\right)\right] = O\left(\tau\left(\mathbf{t}\right)\right) \right\}. \end{aligned}$$

Fakat buradaki sınıfların elemanlarını bulmak H_k *Lipschitz çekirdeğine bağlı olduğundan çok zor olabilir. Dolayısıyla tezde kullanılan* $VLip_N(\alpha)$ *ve* $VLip_N^*(\alpha)$ *sınıflarının [4] te kullanılan sınıflardan daha uygulanabilir olduğu görülmektedir.*

4. SUPREMUM NORMUNA GÖRE YAKLAŞIM

Bu bölümde [4, 5] te çalışılan salınım yarı-normu yerine klasik supremum normu kullanılarak toplanabilme metodu yardımıyla elde edilen operatörlerin yaklaşımları araştırılacaktır. Hem bir boyutta hem de N boyuttaki durumlar incelenecek ve yaklaşım oranları verilecektir.

4.1 Periyodik Fonksiyonlara Düzgün Yaklaşım

Bu kısımda (3.2) de tanımlanan operatörlerin supremum norma göre yaklaşımları incelenecektir. Ayrıca Lispchitz sınıfları tanımlanarak yaklaşım oranları çalışılacaktır.

Burada 2π periyotlu ve ölçülebilir sınırlı fonksiyonların uzayı $B_{2\pi}$ ve 2π periyotlu ve sürekli fonksiyonların uzayı $C_{2\pi}$ ile gösterilecektir. Ayrıca verilen $f \in B_{2\pi}$ fonksiyonunun $[-\pi, \pi]$ aralığındaki supremum normu

$$\|f\|_{2\pi} := \sup_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x)|$$

ile gösterilecektir.

4.1.1 Düzgün Yaklaşımda Toplam Süreci

Daha önce (3.2) de tanımlanan lineer olmayan operatörler

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} K_k(t, f(x-t))dt, \quad n, \upsilon \in \mathbb{N},$$

tipinde verilmişti. Bu kısımda

$$n \to \infty \text{ iken } \|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\|_{2\pi} \to 0 \text{ (}\upsilon\text{ ye göre düzgün)}$$

yaklaşımını elde etmek hedeflenmiştir. Bu yaklaşımı gösterebilmek için gerekli bazı koşullara ihtiyaç vardır. Burada daha önce verilen (i),(ii) ve (iii) koşullarıyla birlikte (iv) yerine aşağıdaki koşul göz önüne alınacaktır:

$(iv)'$ her sınırlı $J \subset \mathbb{R}$ aralığı için

$$\lim_{k\to\infty} \|G_k\|_J = \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{u\in J} |G_k(u)| \right) = 0$$

gerçeklenir. Burada yaklaşım J ye göre düzgün olmak zorunda değildir.

İlk olarak $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)$ nin iyi tanımlılığını gösterelim.

Lemma 4.1.1 *(i) şartının sağlandığını kabul edelim. Bu takdirde her $f \in B_{2\pi}$ için öyle bir $D \geq 0$ sayısı vardır ki her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için*

$$\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\|_{2\pi} \leq D\|f\|_{2\pi}$$

gerçeklenir, yani $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(B_{2\pi}) \subset B_{2\pi}$ olur.

İspat. $f \in B_{2\pi}$ verilsin. H_k Lipschitz sürekli ve $H_k(0) = 0$ olduğundan her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\,|H_k(f(x-t))|\,dt \\ &\leq C\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\,|f(x-t)|\,dt \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada f sınırlı olduğundan

$$|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x)| \leq C\|f\|_{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\,dt$$

olduğu görülür. (i) şartı dikkate alınıp $x \in [-\pi, \pi]$ üzerinden supremum alınırsa

$$\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\|_{2\pi} \leq CM\|f\|_{2\pi}$$

gerçeklenir. $D := CM$ alınarak ispat tamamlanır. □

Sıradaki lemma ile $C_{2\pi}$ uzayından alınan bir fonksiyonun operatör altındaki görüntüsünün de $C_{2\pi}$ uzayında olduğu gösterilecektir.

Lemma 4.1.2 *(i) şartının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda her $f \in C_{2\pi}$ ve her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) \in C_{2\pi}$ olur.*

İspat. f, $[-\pi, \pi]$ de düzgün sürekli olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır ki $|x-y| < \delta$ iken her $t \in \mathbb{R}$ için $|f(x-t) - f(y-t)| < \varepsilon$ olur. Öte yandan H_k Lipschitz sürekli olduğundan her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için

$$|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x) - \mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;y)| \leq C\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(t)|\,|f(x-t) - f(y-t)|\,dt$$

gerçeklenir. Burada f fonksiyonunun düzgün sürekliliği ve (i) şartı dikkate alındığında

$$|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x) - \mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;y)| \leq CM\varepsilon$$

bulunur ve $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{CM}$ alındığında ispat tamamlanır. □

Şimdi aşağıdaki yaklaşım teoremini elde edebiliriz.

Teorem 4.1.1 *$(i)-(iii)$ ve $(iv)'$ koşullarının gerçeklendiğini kabul edelim. O zaman her $f\in C_{2\pi}$ için*

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\|_{2\pi}=0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

olur.

İspat. Uygun terimler eklenip çıkarılarak üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x)-f(x)| &\le \sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}|L_k(t)|\,|H_k(f(x-t))-f(x-t)|\,dt\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}|L_k(t)|\,|f(x-t)-f(x)|\,dt\\ &+|f(x)|\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}L_k(t)dt-1\right|\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $x\in[-\pi,\pi]$ aralığı üzerinden supremum alındığında

$$\begin{aligned}\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\|_{2\pi} &\le \sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}|L_k(t)|\,\|H_k(f(\cdot-t))-f(\cdot-t)\|_{2\pi}dt\\ &+\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}|L_k(t)|\,\|f(\cdot-t)-f(\cdot)\|_{2\pi}dt\\ &+\|f\|_{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}L_k(t)dt-1\right|\end{aligned}\tag{4.1}$$

olduğu görülür. f fonksiyonu 2π periyotlu olduğundan her $t\in\mathbb{R}$ için

$$\|H_k(f(\cdot-t))-f(\cdot-t)\|_{2\pi}=\|H_k(f)-f\|_{2\pi}$$

sağlanır. Ayrıca f sınırlı olduğundan öyle $C_1,C_2\in\mathbb{R}$ sayıları vardır ki her $x\in\mathbb{R}$ için $C_1\le f(x)\le C_2$ olur. Bu yüzden $J:=[C_1,C_2]$ olarak tanımlanırsa

$$|G_k(f(x))|\le\|G_k\|_J=\sup_{u\in J}|H_k(u)-u|$$

bulunur, yani

$$\|H_k(f)-f\|_{2\pi}\le\|G_k\|_J\tag{4.2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer taraftan f düzgün sürekli olduğundan her $\varepsilon>0$ için öyle bir $\delta:=\delta(\varepsilon)$ vardır ki $|t|<\delta$ iken

$$\|f(\cdot-t)-f(\cdot)\|_{2\pi}<\varepsilon\tag{4.3}$$

olur. (4.1) de (4.2) ve (4.3) eşitsizlikleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\left\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\right\|_{2\pi} \leq & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\left\|G_k\right\|_J \int_{-\pi}^{\pi}\left|L_k(t)\right| dt \\
& +\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{|t|<\delta}\left|L_k(t)\right| dt \\
& +\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\pi \geq|t| \geq \delta}\left|L_k(t)\right|\|f(\cdot-t)-f(\cdot)\|_{2\pi} dt \\
& +\|f\|_{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t) dt-1\right| \\
& := J_1(n, \upsilon)+J_2(n, \upsilon)+J_3(n, \upsilon)+J_4(n, \upsilon)
\end{aligned}$$

elde edilir. $(iv)'$ şartından her $\varepsilon>0$ için bir $k_0:=k_0(\varepsilon,J)\in\mathbb{N}$ vardır, öyle ki $k>k_0$ için $\|G_k\|_J<\varepsilon$ olur. O zaman $J_1(n,\upsilon)$ ifadesindeki toplam k_0 dan itibaren parçalanırsa $E:=\max_{k\in\{1,2,\ldots,k_0\}}\left(\|G_k\|_J\int_{-\pi}^{\pi}|L_k(t)|\,dt\right)$ olarak tanımlanmak üzere

$$J_1(n,\upsilon)\leq E\sum_{k=1}^{k_0}a_{nk}^{\upsilon}+M\varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir. $\mathscr{A}$ nın regülerliğinden yeterince büyük n ler için

$$J_1(n,\upsilon)\leq(Ek_0+M)\,\varepsilon$$

olduğu açıktır. $J_2(n,\upsilon)$ ye bakıldığında (i) koşulundan her $n,\upsilon\in\mathbb{N}$ için

$$J_2(n,\upsilon)\leq M\varepsilon$$

gerçeklenir. $J_3(n,\upsilon)$ de f fonksiyonu sınırlı olduğundan

$$J_3(n,\upsilon)\leq 2\|f\|_{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{\pi\geq|t|\geq\delta}|L_k(t)|\,dt$$

olur. Dolayısıyla (iii) koşulundan yeterince büyük n ler için

$$J_3(n,\upsilon)\leq 2\|f\|_{2\pi}\,\varepsilon$$

elde edilir. Son olarak yine f fonksiyonu sınırlı olduğundan (ii) şartından yeterince büyük n ler için

$$J_4(n,\upsilon)\leq\|f\|_{2\pi}\,\varepsilon$$

eşitsizliği görülür. Bu da istenilen yaklaşımın gerçeklendiğini gösterir. □

Uyarı 4.1.1 *Eğer* (i) *şartı yerine* $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_k\|_1 = M < \infty$ *ve* $(iv)'$ *şartı yerine her sınırlı* $J \subset \mathbb{R}$ *için,*

$$\mathscr{A} - \lim \|G_k\|_J = 0$$

şartı getirilirse Teorem 4.1.1 de verilen yaklaşım halen geçerlidir. Çünkü $J_1(n,\upsilon)$ *terimi incelendiğinde, yeni şartlar altında*

$$J_1(n,\upsilon) \leq M \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \|G_k\|_J$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$n \to \infty \text{ iken } J_1(n,\upsilon) \to 0 \;\; (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olduğu kolayca görülebilir.

4.1.2 Düzgün Yaklaşımda Yakınsaklık Oranları

Teorem 4.1.1 de verilen yaklaşımın oranını hesaplayabilmek için aşağıdaki Lipschitz sınıflarına ihtiyaç duyulmaktadır. $\alpha > 0$ ve Δ_t ve Δ_t^* daha önce tanımlanan fark operatörleri olmak üzere

$$Lip_{2\pi}(\alpha) := \left\{ f \in C_{2\pi} : t \to 0 \text{ iken } \|\Delta_t(f)\|_{2\pi} = O\left(|t|^{\alpha}\right) \right\},$$
$$Lip_{2\pi}^*(\alpha) := \left\{ f \in C_{2\pi} : t \to 0 \text{ iken } \|\Delta_t^*(f)\|_{2\pi} = O\left(|t|^{\alpha}\right) \right\}$$

sınıfları verilsin. Bu durumda aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.1.2 $M > 0$ *olmak üzere* $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_k\|_1 = M < \infty$ *olsun ve verilen* $\xi \in \Psi$ *ve* $\alpha > 0$ *için (3.9), (3.10) ve (3.11) şartları gerçeklensin. Ayrıca* $\{\gamma_k\}$ *sıfıra yakınsayan pozitif terimli bir dizi olmak üzere her* $k \in \mathbb{N}$ *ve her sınırlı* $J \subset \mathbb{R}$ *aralığı için*

$$\|G_k\|_J \leq \gamma_k \tag{4.4}$$

ve

$$n \to \infty \text{ iken } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \gamma_k = O(\xi(n^{-1})) \; (\upsilon \text{ ye göre düzgün}) \tag{4.5}$$

olsun. O zaman aşağıdaki yaklaşımlar gerçeklenir:

(a) *Her* $f \in Lip_{2\pi}(\alpha)$ *için*

$$n \to \infty \text{ iken } \|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\|_{2\pi} = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \;\; (\upsilon \text{ ye göre düzgün}). \tag{4.6}$$

(b) *Eğer her* $k \in \mathbb{N}$ *için* L_k *bir çift fonksiyonsa, (4.6) yaklaşımı* $f \in Lip_{2\pi}^*(\alpha)$ *için de geçerlidir.*

İspat. (a) $f \in Lip_{2\pi}(\alpha)$ olduğundan Teorem 4.1.1 in ispatından

$$\begin{aligned}\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\|_{2\pi} \leq\, & M\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\gamma_k \\ & + N\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|t|<\delta} |t|^{\alpha}\,|L_k(t)|\,dt \\ & + 2\,\|f\|_{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{\pi\geq|t|\geq\delta} |L_k(t)|\,dt \\ & + \|f\|_{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{-\pi}^{\pi} L_k(t)dt-1\right|\end{aligned}$$

eşitsizliği kolayca görülebilir. Burada (4.5) ten

$$M\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\gamma_k = O(\xi(n^{-1}))\ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olur. (3.10) ve (3.11) şartlarından

$$N\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|t|<\delta} |t|^{\alpha}\,|L_k(t)|\,dt = O(\xi(n^{-1}))\ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

ve

$$2\,\|f\|_{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{\pi\geq|t|\geq\delta} |L_k(t)|\,dt = O(\xi(n^{-1}))\ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

elde edilir. Son olarak (3.9) dan

$$\|f\|_{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{-\pi}^{\pi} L_k(t)dt-1\right| = O(\xi(n^{-1}))\ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

bulunur.

(b) L_k nın çift fonksiyon olduğu kullanılarak aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{-\pi}^{\pi} L_k(t)\,\{f(x-t)-f(x)\}\,dt \\ &\quad = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} L_k(t)\,\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}\,dt.\end{aligned}$$

Dolayısıyla Teorem 4.1.1 in ispatından

$$
\begin{aligned}
\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\|_{2\pi} \leq\ & M\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\gamma_k \\
& +\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|t|<\delta} |L_k(t)|\,\|\Delta_t^*(f)\|_{2\pi}\,dt \\
& +2\,\|f\|_{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\pi\geq|t|\geq\delta} |L_k(t)|\,dt \\
& +\|f\|_{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{-\pi}^{\pi} L_k(t)dt-1\right|
\end{aligned}
$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada $f\in Lip_{2\pi}^{*}(\alpha)$ olduğu düşünüldüğünde

$$
\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|t|<\delta} |L_k(t)|\,\|\Delta_t^*(f)\|_{2\pi}\,dt \leq \frac{N}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|t|<\delta} |L_k(t)|\,|t|^{\alpha}\,dt
$$

olacak şekilde $\delta,N>0$ sayıları vardır. Bu yüzden (3.10) uyarınca yeterince büyük n ler için

$$
\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|t|<\delta} |L_k(t)|\,\|\Delta_t^*(f)\|_{2\pi}\,dt = O(\xi(n^{-1}))\ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})
$$

yaklaşımı elde edilir. Diğer parçalar (a) şıkkında olduğu gibi $\xi(n^{-1})$ hızında sıfıra yaklaştığından (4.6) ispatlanmış olur. □

Uyarı 4.1.2 *Eğer (4.4) ve (4.5) şartları her sınırlı $J\subset\mathbb{R}$ aralığı için*

$$
n\to\infty \text{ iken } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\|G_k\|_J = O(\xi(n^{-1}))\ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})
$$

şartıyla yer değiştirirse Teorem 4.1.2 halen geçerlidir (bkz. Uyarı 4.1.1).

4.2 Çok Değişkenli Fonksiyonlara Düzgün Yaklaşım

Bu kısımda (3.14) te tanımlanan operatörler yardımıyla N değişkenli sınırlı ölçülebilir reel fonksiyonların supremum norm altında yaklaşımları incelenecektir. Ayrıca uygun fonksiyon sınıfları tanımlanarak yaklaşım oranları hesaplanacaktır.

Burada $\mathbb{R}^N$ de ölçülebilir sınırlı reel fonksiyonların uzayı $B\left(\mathbb{R}^N\right)$ ve düzgün sürekli reel fonksiyonların uzayı ise $UC\left(\mathbb{R}^N\right)$ ile gösterilecektir. $f\in B\left(\mathbb{R}^N\right)$ fonksiyonu için $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ olmak üzere $f(\mathbf{x})$ in $\mathbb{R}^N$ üzerindeki supremum normu alışıldığı gibi

$$
\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N}|f(\mathbf{x})| := \|f\|_{\infty}
$$

ile gösterilecektir. Ayrıca $BUC\left(\mathbb{R}^N\right) := B\left(\mathbb{R}^N\right)\cap UC\left(\mathbb{R}^N\right)$ olarak tanımlanmıştır.

4.2.1 Çok Değişkenli Düzgün Yaklaşımda Toplam Süreci

Daha önce (3.16) da tanımlanan lineer olmayan operatörler

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} K_k(\mathbf{t}, f(\mathbf{x}-\mathbf{t}))\, d\mathbf{t}, \ \ n,\upsilon \in \mathbb{N}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N,$$

şeklinde verilmişti. Bu kısımda $f \in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ olmak üzere $n \to \infty$ iken

$$\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\|_{\infty} \to 0 \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

yaklaşımını elde etmek hedeflenmektedir. Bu yaklaşımı gösterebilmek için bazı koşullara ihtiyaç vardır. Bunlar (I), (II) ve (III) şartlarına ek olarak daha önce Alt bölüm 4.1.1 de tanımlanan

$(iv)'$ Her sınırlı $J \subset \mathbb{R}$ aralığı için

$$\lim_{k\to\infty} \|G_k\|_J = \lim_{k\to\infty} \left(\sup_{u\in J} |G_k(u)| \right) = 0$$

şartına ihtiyaç vardır.

Aşağıdaki lemmada her $n,\upsilon \in \mathbb{N}$ ve her $f \in B\left(\mathbb{R}^N\right)$ için $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)$ nin iyi tanımlı olduğu gösterilmektedir.

Lemma 4.2.1 *(I) koşulunun sağlandığını kabul edelim. O zaman her $f \in B\left(\mathbb{R}^N\right)$ için öyle bir $D \geq 0$ sayısı vardır ki*

$$\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\|_{\infty} \leq D\,\|f\|_{\infty}$$

gerçeklenir, yani $\mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(B\left(\mathbb{R}^N\right)\right) \subset B\left(\mathbb{R}^N\right)$ olur.

İspat. H_k Lipschitz sürekli ve $H_k(0) = 0$ olduğundan üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x})| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(\mathbf{t}) H_k(f(\mathbf{x}-\mathbf{t}))|\, d\mathbf{t} \\ &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(\mathbf{t})|\, |f(\mathbf{x}-\mathbf{t})|\, d\mathbf{t}. \end{aligned}$$

eşitsizliği kolayca bulunur. Burada f fonksiyonunun sınırlı olduğu (I) şartı ile birlikte dikkate alındığında her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ için

$$|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x})| \leq C\,\|f\|_{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(\mathbf{t})|\, d\mathbf{t} \leq CM\,\|f\|_{\infty}$$

elde edilir. Son olarak bu eşitsizlikte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ üzerinden supremum alınırsa $D := CM$ yazarak her $n,\upsilon \in \mathbb{N}$ için

$$\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\|_{\infty} \leq D\,\|f\|_{\infty}$$

sonucuna ulaşılır. □

Sıradaki lemma ile f sınırlı ve düzgün sürekli iken $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)$ nin de $\mathbb{R}^N$ üzerinde sınırlı ve düzgün sürekli olduğu gösterilmektedir.

Lemma 4.2.2 *(I) koşulunun sağlandığını kabul edelim. Eğer $f \in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ ise her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) \in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ olur.*

İspat. f düzgün sürekli olduğundan verilen $\varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı vardır ki $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| < \delta$ iken her $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^N$ için $|f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) - f(\mathbf{y}-\mathbf{t})| < \varepsilon$ olur. Ayrıca H_k Lipschitz sürekli olduğundan

$$|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x}) - \mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{y})| \leq C\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})|\,|f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) - f(\mathbf{y}-\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Dolayısıyla

$$|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x}) - \mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{y})| \leq C\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}$$

olmak zorundadır. Ve son olarak (I) şartından

$$|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x}) - \mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{y})| \leq CM\varepsilon$$

elde edilir. Ayrıca f sınırlı olduğundan Lemma 4.2.1 den ispat tamamlanır. □

Teorem 4.2.1 *$(I)-(III)$ ve $(iv)'$ şartlarının sağlandığını kabul edelim. O zaman her $f \in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için*

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\|_{\infty} = 0 \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

olur.

İspat. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})|\,|H_k \circ f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) - f(\mathbf{x}-\mathbf{t})|\,d\mathbf{t} \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})|\,|f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) - f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{t} \\
&+ |f(x)| \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t})\,d\mathbf{t} - 1 \right| \\
&=: I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ üzerinden supremum alınırsa aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir:

$$
\begin{aligned}
\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\|_\infty \leq & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \, \|H_k \circ f(\cdot - \mathbf{t}) - f(\cdot - \mathbf{t})\|_\infty \, d\mathbf{t} \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \, \|f(\cdot - \mathbf{t}) - f(\cdot)\|_\infty \, d\mathbf{t} \\
& + \|f\|_\infty \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} L_k(\mathbf{t}) d\mathbf{t} - 1 \right| \\
& =: I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}
$$

Her $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^N$ için $\|H_k \circ f(\cdot - \mathbf{t}) - f(\cdot - \mathbf{t})\|_\infty = \|H_k \circ f - f\|_\infty$ olur. Diğer taraftan $\mathbb{R}^N$ de f sınırlı olduğundan öyle $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ sayıları vardır ki her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ için $C_1 \leq f(\mathbf{x}) \leq C_2$ yazılabilir. O zaman $J = [C_1, C_2]$ olarak alınırsa

$$
|G_k(f(\mathbf{x}))| \leq \|G_k\|_J = \sup_{u \in J} |H_k(u) - u|
$$

olur ve buradan

$$
\|H_k \circ f - f\|_\infty \leq \|G_k\|_J
$$

olduğunu görmek zor değildir. Bunu I_1 de kullanırsak

$$
I_1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \|G_k\|_J \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t}
$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca $(iv)'$ şartından her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $\forall k > k_0$ için $\|G_k\|_J < \varepsilon$ olur. Bundan dolayı I_1 deki toplam aşağıdaki gibi ikiye parçalanırsa (I) dan

$$
\begin{aligned}
I_1 & < \sum_{k=1}^{k_0} a_{nk}^{\upsilon} \|G_k\|_J \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t} + \varepsilon M \\
& \leq D \sum_{k=1}^{k_0} a_{nk}^{\upsilon} + \varepsilon M,
\end{aligned}
$$

elde edilir, burada $D := \max_{1 \leq k \leq k_0} \{\|G_k\|_J \int_{\mathbb{R}^N} |L_k(\mathbf{t})| \, d\mathbf{t}\}$ olarak tanımlıdır. Dolayısıyla $\mathscr{A} = \left\{ \left[a_{nk}^{\upsilon} \right] \right\}$ regüler olduğundan yeterince büyük n ler için

$$
I_1 < (Dk_0 + M)\,\varepsilon
$$

olduğu görülür. Diğer taraftan f düzgün sürekli olduğundan, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ vardır öyle ki $|\mathbf{x} - \mathbf{t} - \mathbf{x}| = |\mathbf{t}| < \delta$ iken $|f(\mathbf{x} - \mathbf{t}) - f(\mathbf{x})| < \varepsilon$ olur. Bu yüzden I_2 deki integral aşağıdaki gibi ilgili δ komşuluğunun içi ve dışı olarak iki parçaya ayırılırsa (I) ve (III)

şartlarından

$$
\begin{aligned}
I_2 = & \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta} |L_k(\mathbf{t})| \, \|f(\cdot - \mathbf{t}) - f(\cdot)\|_{\infty} \, d\mathbf{t} \\
& \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|\mathbf{t}|\geq\delta} |L_k(\mathbf{t})| \, \|f(\cdot - \mathbf{t}) - f(\cdot)\|_{\infty} \, d\mathbf{t} \\
& < \varepsilon M + 2 \|f\|_{\infty} \varepsilon
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son olarak (II) şartından yeterince büyük n ler için $I_3 < \|f\|_{\infty} \varepsilon$ gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar. □

Uyarı 4.2.1 *Yukarıdaki teoremde (I) şartı yerine $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_k\|_{\mathbf{1}} = M < \infty$ ve $(iv)'$ şartı yerine her $J \subset \mathbb{R}$ sınırlı aralığı için*

$$\mathscr{A} - \lim \|G_k\|_J = 0$$

alınırsa Teorem 4.2.1 geçerliliğini korur (bkz. Uyarı 4.1.1).

4.2.2 Çok Değişkenli Düzgün Yaklaşımda Yakınsaklık Oranları

Bu kısımda Teorem 4.2.1 de yapılan yaklaşımın hızı incelenecektir. Bunun için gerekli bazı fonksiyon sınıfları aşağıda verilmiştir.

$\alpha > 0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
Lip_N(\alpha) &:= \left\{ f \in BUC\left(\mathbb{R}^N\right) : \mathbf{t} \to \mathbf{0} \text{ iken } \|\Delta_{\mathbf{t}}(f)\|_{\infty} = O\left(|\mathbf{t}|^{\alpha}\right) \right\}, \\
Lip_N^*(\alpha) &:= \left\{ f \in BUC\left(\mathbb{R}^N\right) : \mathbf{t} \to \mathbf{0} \text{ iken } \|\Delta_{\mathbf{t}}^*(f)\|_{\infty} = O\left(|\mathbf{t}|^{\alpha}\right) \right\}
\end{aligned}
$$

olarak tanımlansın. O zaman aşağıdaki yaklaşım oranları elde edilir.

Teorem 4.2.2 *$M > 0$ olmak üzere $\sup_{k\in\mathbb{N}} \|L_k\|_{\mathbf{1}} = M < \infty$ olsun ve $\xi \in \Psi$ ve $\alpha > 0$ için (3.19), (3.20), (3.21) koşulları sağlansın. Ayrıca $\{\gamma_k\}$ sıfıra yaklaşan pozitif terimli bir dizi olmak üzere her $k \in \mathbb{N}$ ve her sınırlı $J \subset \mathbb{R}$ aralığı için*

$$\|G_k\|_J \leq \gamma_k \tag{4.7}$$

ve

$$n \to \infty \text{ iken } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \gamma_k = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}) \tag{4.8}$$

olsun. O zaman aşağıdaki yaklaşımlar doğrudur:

(a) *Her $f \in Lip_N(\alpha)$ için*

$$n \to \infty \text{ iken } \|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\|_{\infty} = O\left(\xi(n^{-1})\right) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün}). \tag{4.9}$$

(b) *Eğer her $k\in\mathbb{N}$ için L_k çift ise (4.9) yaklaşımı $f\in Lip_N^*(\alpha)$ için de geçerlidir.*

İspat. (a) $f\in Lip_N(\alpha)$ olduğundan Teorem 4.2.1 den uygun bir $\delta>0$ sayısı için

$$\begin{aligned}\left\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\right\|_\infty &\le M\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\gamma_k\\ &+L\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta}|L_k(\mathbf{t})|\,|\mathbf{t}|^{\alpha}\,d\mathbf{t}\\ &+2\|f\|_\infty\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|\ge\delta}|L_k(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}\\ &+\|f\|_\infty\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^N}L_k(\mathbf{t})d\mathbf{t}-1\right|\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada (4.8) den

$$M\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\gamma_k=O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)\ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olduğu açıktır. Diğer yandan (3.20) den

$$L\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta}|L_k(\mathbf{t})|\,|\mathbf{t}|^{\alpha}\,d\mathbf{t}=O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)\ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

gerçeklenir. Ve son olarak (3.19) ve (3.21) şartlarından

$$2\|f\|_\infty\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{|\mathbf{t}|\ge\delta}|L_k(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}=O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)\ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

ve

$$\|f\|_\infty\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int\limits_{\mathbb{R}^N}L_k(\mathbf{t})d\mathbf{t}-1\right|=O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)\ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olduğu görülür. Bu da (4.9) yaklaşımını ispatlar.

(b) Bu kısım için Teorem 4.2.1 de geçen aşağıdaki durumu incelemek yeterlidir. L_k

çift olduğundan $\mathbf{t} = -\mathbf{u}$ değişken değiştirmesiyle

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta} L_k(\mathbf{t}) \left[f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) - f(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{t} \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta} L_k(\mathbf{t}) \left[f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) - f(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{t} \right. \\
&\left. + \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|\mathbf{u}|<\delta} L_k(\mathbf{t}) \left[f(\mathbf{x}+\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{t} \right| \\
&= \frac{1}{2} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta} L_k(\mathbf{t}) \left[f(\mathbf{x}+\mathbf{t}) - f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) - 2f(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{t} \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta} \left| L_k(\mathbf{t}) \right| \left| \Delta_{\mathbf{t}}^{*}(f) \right| d\mathbf{t}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak $f \in Lip_N^{*}(\alpha)$ olduğundan

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|\mathbf{t}|<\delta} L_k(\mathbf{t}) \left[f(\mathbf{x}-\mathbf{t}) - f(\mathbf{x}) \right] d\mathbf{t} \right| = O\left(\xi\left(n^{-1} \right) \right) \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

gerçeklenir. $\square$

Uyarı 4.2.2 *Eğer (4.7) ve (4.8) koşulları her sınırlı $J \subset \mathbb{R}$ aralığı için*

$$n \to \infty \text{ iken } \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \left\| G_k \right\|_J = O\left(\xi\left(n^{-1} \right) \right) \text{ (υ ye göre düzgün)}$$

koşuluyla değiştirilirse Teorem 4.2.2 geçerliliğini korur.

5. MUTLAK VE DÜZGÜN SÜREKLİLİK İÇİN KARAKTERİZASYONLAR

Bu bölümde üçüncü ve dördüncü bölümlerde elde edilen yaklaşımlar kullanılarak terimleri negatif olmayan regüler matrisler yardımıyla bazı mutlak sürekli ve düzgün sürekli uzayların karakterizasyonları yapılacaktır. Bu bölüme ait uygulamalara altıncı bölümde yer verilecektir.

5.1 Mutlak Sürekli Uzayların Karakterizasyonu

Bu kısımda (3.2) ve (3.16) da tanımlanan lineer olmayan operatörler yardımıyla sınırlı salınımlılık teorisinde önemli yerleri olan $AC_{2\pi}$ ve $AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ uzaylarının karakterizasyonu verilecektir. Bu karakterizasyonlar verilen bir $\mathscr{A}$ regüler matrisi için yapılacağından $\mathscr{A}$ yerine özel matrisler alındığında farklı birçok karakterizasyonun ortaya çıktığı görülecektir.

5.1.1 $AC_{2\pi}$ Uzayının Karakterizasyonu

$(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ çekirdek dizisi aşağıdaki koşulu gerçeklesin:
Her $n,\upsilon\in\mathbb{N}$ ve her $\varepsilon>0$ için $[-\pi,\pi]$ nin çakışmayan $\{(\alpha_i,\beta_i)\}_{i=1}^{m}$ alt aralıklarında

$$\sum_{i=1}^{m}(\beta_i-\alpha_i)<\delta$$

için

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\left|L_k(\beta_i)-L_k(\alpha_i)\right|<\varepsilon \tag{5.1}$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı mevcuttur.

Uyarı 5.1.1 *Burada dikkat ediniz ki eğer $\mathscr{A}$ metodu satır sonlu ise $L_k\in AC_{2\pi}$ olduğunda (5.1) koşulu gerçeklenecek şekilde bir $\delta>0$ sayısı bulunabilir.*

Lemma 5.1.1 *Kabul edelim ki (L_k) dizisi (5.1) koşulunu gerçeklesin. Ayrıca $H_k(0)=0$ ve H_k Lipschitz sürekli olsun. Bu durumda her $f\in BV_{2\pi}$ için $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\in AC_{2\pi}$ olur.*

İspat. (L_k) 2π periyotlu olduğundan, operatörde $s-t=z$ değişken değiştirmesi yapılırsa (3.2) operatörü aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}L_k(s-z)H_k(f(z))\,dz. \tag{5.2}$$

$\{(\alpha_i,\beta_i)\}_{i=1}^{m}$ ailesi $[-\pi,\pi]$ nin çakışmayan alt aralıkları olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{m}(\beta_i-\alpha_i)<\delta$$

iken

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\left|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\beta_i)-\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\alpha_i)\right|\\&\leq C\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi}\left|L_k(\beta_i-z)-L_k(\alpha_i-z)\right|\left|f(z)\right|dz\\&=C\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\left|L_k(\beta_i-z)-L_k(\alpha_i-z)\right|\left|f(z)\right|dz\end{aligned}$$

gerçeklenir. Burada

$$\sum_{i=1}^{m}(\beta_i-z-(\alpha_i-z))=\sum_{i=1}^{m}(\beta_i-\alpha_i)<\delta$$

ve (L_k) (5.1) koşulunu sağladığından

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\beta_i)-\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\alpha_i)\right|<C\left\|f\right\|_1\varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla $f\in BV_{2\pi}$ olduğundan ispat tamamlanır. □

Bu kısımdaki karakterizasyon teoremi aşağıda verilmiştir.

Teorem 5.1.1 *(L_k) dizisinin (5.1) koşulunu sağladığını kabul edelim. Ayrıca $(i)-(iv)$ koşulları da gerçeklensin. Bu durumda her $f\in BV_{2\pi}$ için*

$$f\in AC_{2\pi}\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\right]=0\ \textit{(υ'ye göre düzgün)}$$

olur.

İspat. Eğer $f\in AC_{2\pi}$ ise Teorem 3.1.1 den

$$\lim_{n\to\infty}V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\right]=0$$

olacağını biliyoruz. Kabul edelim ki $\lim_{n\to\infty}V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\right]=0$ sağlansın. Lemma 5.1.1 den, $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\in AC_{2\pi}$ olur. Diğer taraftan $AC_{2\pi}$ uzayı $BV_{2\pi}$ uzayının salınım yarı-normuna göre kapalı alt uzayı olduğundan (bkz. [12]) $\lim_{n\to\infty}V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\right]=0$ ise $f\in AC_{2\pi}$ olmak zorundadır. □

5.1.2 $AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ Uzayının Karakterizasyonu

(L_k) çekirdek dizisi aşağıdaki koşulu gerçeklesin:
Keyfi $I=\prod_{i=1}^{N}[a_i,b_i]\subset\mathbb{R}^N$ aralığında her $j=1,\ldots,N$ için $[a_j,b_j]$ nin çakışmayan $\{(\alpha_j^{\rho},\beta_j^{\rho})\}_{\rho=1,\ldots,\lambda}$ alt aralıkları verildiğinde her $n,\upsilon\in\mathbb{N}$ ve her $\varepsilon>0$ için

$$\sum_{\rho=1}^{\lambda}\left(\beta_j^{\rho}-\alpha_j^{\rho}\right)<\delta$$

için

$$\sum_{\rho=1}^{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\left|L_k\left(s_j',\beta_j^{\rho}\right)-L_k\left(s_j',\alpha_j^{\rho}\right)\right|<\varepsilon \tag{5.3}$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı mevcuttur.

Uyarı 5.1.2 *$\mathscr{A}$ metodu satır sonlu olduğunda eğer $L_k\in AC_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ ise* (5.3) *koşulu gerçeklenecek şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır.*

Lemma 5.1.2 *Kabul edelim ki (L_k) dizisi* (5.3) *koşulunu gerçeklesin ve ayrıca $H_k(0)=0$ ve H_k Lipschitz sürekli olsun. Bu durumda verilen her $f\in BV\left(\mathbb{R}^N\right)$ için $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ olur.*

İspat. Lemma 5.1.1 de olduğu gibi $\mathbf{s}-\mathbf{t}=\mathbf{z}$ değişken değiştirmesi yapılırsa (3.16) da verilen operatör

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{z})=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{\mathbb{R}^N}L_k(\mathbf{s}-\mathbf{z})H_k(f(\mathbf{z}))\,d\mathbf{z} \tag{5.4}$$

formunda yazılabilir. (L_k) (5.3) şartını sağladığından $\{(\alpha_j^{\rho},\beta_j^{\rho})\}_{\rho=1,\ldots,\lambda}\subset\left[a_j,b_j\right]$ için

$$\sum_{\rho=1}^{\lambda}\left(\beta_j^{\rho}-\alpha_j^{\rho}\right)<\delta$$

iken

$$\begin{aligned}
&\sum_{\rho=1}^{\lambda}\left|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;(s_j',\beta_j^{\rho}))-\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;(s_j',\alpha_j^{\rho}))\right|\\
&\leq C\sum_{\rho=1}^{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{\mathbb{R}^N}\left|L_k(\mathbf{s}_j'-z_j',\beta_j^{\rho}-z_j)-L_k(\mathbf{s}_j'-z_j',\alpha_j^{\rho}-z_j)\right||f(\mathbf{z})|\,d\mathbf{z}\\
&=C\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{\rho=1}^{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\left|L_k(\mathbf{s}_j'-z_j',\beta_j^{\rho}-z_j)-L_k(\mathbf{s}_j'-z_j',\alpha_j^{\rho}-z_j)\right||f(\mathbf{z})|\,d\mathbf{z}\\
&<C\|f\|_{\mathbf{1}}\,\varepsilon
\end{aligned}$$

gerçeklenir. $f\in BV\left(\mathbb{R}^N\right)$ olduğundan $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\in AC_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ bulunur. Diğer taraftan Lemma 3.2.1 den $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\in BV\left(\mathbb{R}^N\right)$ olacağından $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ elde edilir. $\square$

Teorem 5.1.2 *(L_k) dizisinin (5.3) şartını sağladığını kabul edelim ve $(I)-(III)$ ve (iv) koşulları gerçeklensin. O zaman her $f \in BV\left(\mathbb{R}^N\right)$ için*

$$f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} V\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\right]=0 \text{ (υ'ye göre düzgün)}$$

olur.

İspat. Eğer $f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ ise Teorem 3.2.1 den

$$\lim_{n\to\infty} V\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\right]=0$$

elde edilir. Öte yandan (L_k) dizisi (5.3) koşulunu gerçeklediğinden Lemma 5.1.2 uyarınca $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) \in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ olur. $BV\left(\mathbb{R}^N\right)$ uzayı Tonelli anlamda salınım yarı-normuna göre $AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ uzayında kapalı olduğundan (bkz. [12])

$$\lim_{n\to\infty} V\left[\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\right]=0$$

limitinden $f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ olmak zorundadır. □

5.2 Düzgün Sürekli Uzayların Karakterizasyonu

Bu kısımda (3.2) ve (3.16) daki operatörlerden faydalanılarak $UC_{2\pi}$ ve $BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ uzaylarının karakterizasyonları verilecektir.

5.2.1 $UC_{2\pi}$ Uzayının Karakterizasyonu

(L_k) çekirdek dizisi aşağıdaki koşulu gerçeklesin:
Her $n,\upsilon \in \mathbb{N}$ ve her $\varepsilon > 0$ için $x,y \in [-\pi,\pi]$ ve $|x-y| < \delta$ iken

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\left|L_k(x)-L_k(y)\right| < \varepsilon \tag{5.5}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur.

Uyarı 5.2.1 *Eğer $\mathscr{A}$ metodu satır sonlu ise bu durumda $L_k \in UC_{2\pi}$ olduğunda (5.5) koşulu gerçeklenecek şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir.*

Lemma 5.2.1 *Kabul edelim ki (L_k) dizisi (5.5) koşulunu gerçeklesin ve ayrıca $H_k(0)=0$ ve H_k Lipschitz sürekli olsun. O zaman her $f \in B_{2\pi}$ için $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) \in UC_{2\pi}$ olur.*

İspat. (5.2) den (3.2) operatörü aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;z)=\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\int_{-\pi}^{\pi} L_k(s-z)H_k(f(z))\,dz.$$

$H_k(0) = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;y) - \mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x)| &\leq C \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} |L_k(y-z) - L_k(x-z)| \, |f(z)| \, dz \\
&= C \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} |L_k(y-z) - L_k(x-z)| \, |f(z)| \, dz
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur. Burada (L_k) dizisi (5.5) özelliğini sağladığından dolayı $x, y \in [-\pi, \pi]$ için

$$|x - y| = |x - z - (y - z)| < \delta$$

iken

$$|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;y) - \mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x)| < C \|f\|_1 \varepsilon$$

gerçeklenir. □

Teorem 5.2.1 *(L_k) dizisinin (5.5) şartını sağladığını kabul edelim ve ayrıca $(i) - (iii)$ ve (iv') koşulları gerçeklensin. O zaman her $f \in B_{2\pi}$ için*

$$f \in UC_{2\pi} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\|_{2\pi} = 0 \text{ (υ'ye göre düzgün)}$$

olur.

İspat. Teorem 4.1.1 den $f \in UC_{2\pi}$ için $\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\|_{2\pi} = 0$ olduğu görülebilir. Diğer yandan Lemma 5.2.1 den $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) \in UC_{2\pi}$ olur. Burada $UC_{2\pi}$ uzayı $B_{2\pi}$ uzayının kapalı alt uzayı olduğundan $\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) - f\|_{2\pi} = 0$ ise $f \in UC_{2\pi}$ bulunur. □

5.2.2 $BUC(\mathbb{R}^N)$ Uzayının Karakterizasyonu

(L_k) dizisi aşağıdaki koşulu gerçeklesin:
Her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ ve her $\varepsilon > 0$ için $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N$ olmak üzere, $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \delta$ iken

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} |L_k(\mathbf{x}) - L_k(\mathbf{y})| < \varepsilon \tag{5.6}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı mevcuttur.

Uyarı 5.2.2 *Eğer $\mathscr{A}$ metodu satır sonlu ise $L_k \in UC(\mathbb{R}^N)$ olduğunda (5.6) koşulu gerçeklenecek şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir.*

Lemma 5.2.2 *Kabul edelim ki (L_k) dizisi (5.6) koşulunu gerçeklesin ve ayrıca $H_k(0) = 0$ ve H_k Lipschitz olsun. O zaman her $f \in B(\mathbb{R}^N)$ için $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f) \in BUC(\mathbb{R}^N)$ olur.*

İspat. (5.4) ten (3.16) da verilen operatör

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{z})=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{\mathbb{R}^N}L_k(\mathbf{s}-\mathbf{z})H_k(f(\mathbf{z}))\,d\mathbf{z}$$

formunda yazılabilir. $H_k(0)=0$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{y})-\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x})| &\leq C\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}\int_{\mathbb{R}^N}|L_k(\mathbf{y}-\mathbf{z})-L_k(\mathbf{x}-\mathbf{z})|\,|f(\mathbf{z})|\,d\mathbf{z}\\ &= C\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}^{\upsilon}|L_k(\mathbf{y}-\mathbf{z})-L_k(\mathbf{x}-\mathbf{z})|\,|f(\mathbf{z})|\,d\mathbf{z}\end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Burada (L_k) dizisi (5.6) özelliğini sağladığından dolayı

$$|\mathbf{x}-\mathbf{y}|=|\mathbf{x}-\mathbf{z}-(\mathbf{y}-\mathbf{z})|<\delta$$

iken

$$|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{y})-\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x})|<C\,\|f\|_{\mathbf{1}}\,\varepsilon$$

olur. Ayrıca Lemma 4.2.1 den $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\in B(\mathbb{R}^N)$ olduğundan $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ elde edilir. □

Teorem 5.2.2 *(L_k) dizisinin (5.6) koşulunu gerçeklediğini kabul edelim ve ayrıca $(I)-(III)$ ve (iv') şartları sağlansın. O zaman her $f\in B\left(\mathbb{R}^N\right)$ için*

$$f\in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\|_{\infty}=0\ (\upsilon\text{'ye göre düzgün})$$

olur.

İspat. Teorem 4.2.1 den $f\in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için $\lim_{n\to\infty}\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\|_{\infty}=0$ olduğu bilinmektedir. Öte yandan Lemma 5.2.2 den $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)\in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ olur. $BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ uzayı $B\left(\mathbb{R}^N\right)$ uzayının kapalı alt uzayı olduğundan $\lim_{n\to\infty}\|\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)-f\|_{\infty}=0$ iken $f\in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ gerçeklenir. □

6. SONUÇLAR VE UYGULAMALAR

Bu bölümde önceki bölümlerde yapılan çalışmaların bazı sonuçları verilecektir. Daha sonra yaklaşımımızla ilgili olarak bazı örnekler verilecektir.

6.1 Salınım Yarı-Normuna Göre Yaklaşım Sonuçları

6.1.1 Teorem 3.1.1 in Sonuçları

[4, 5] te çalışılan ve (3.1) de verilen lineer olmayan operatörün kesikli hali

$$T_n\left(f;x\right) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t, f(x-t))dt \tag{6.1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $K_n\left(t,s\right) = L_n\left(t\right) H_n\left(s\right)$ biçimindedir. Öte yandan (3.2) de tanımlanan operatör

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f;x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} T_k\left(f;x\right) \tag{6.2}$$

formunda yazılabilir. Buradan hareketle aşağıdaki sonuçları elde etmek mümkündür.

- Teorem 3.1.1 de her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{I\}$ alınırsa

  $$\mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f;x\right) = T_n\left(f;x\right)$$

  eşitliği görülür. Bundan dolayı her $f \in AC_{2\pi}$ için

  $$\lim_{n\to\infty} V_{2\pi}\left[T_n\left(f\right) - f\right] = 0$$

  yaklaşımı elde edilir. Bu da [4] te yapılan yaklaşımın kesikli halidir.

- Benzer şekilde $\mathscr{A} = \{C_1\}$ Cesàro matrisi alındığında

  $$\mathscr{T}_{n,\upsilon}\left(f;x\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k\left(f;x\right)$$

  sağlanır. Bu da her $f \in AC_{2\pi}$ için

  $$\lim_{n\to\infty} V_{2\pi}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k\left(f\right) - f\right] = 0$$

  yaklaşımının gerçeklendiğini gösterir. Yani ilgili operatörün aritmektik ortalaması f fonksiyonuna salınım anlamda yakınsaktır.

- $\mathscr{A} = \mathscr{F} = \{F^{\upsilon}\}$ olarak tercih edilirse

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} T_k(f;x)$$

olur. Buradan her $f \in AC_{2\pi}$ için

$$\lim_{n\to\infty} V_{2\pi}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} T_k(f) - f\right] = 0 \ \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

sonucuna ulaşılır.

- Özel olarak $H_k(s) = s$ olduğunda yapılan yaklaşımın lineer operatörler için de gerçeklendiği görülebilir. Dolayısıyla ilave olarak $\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{I\}$ alınırsa [12] deki yaklaşımın kesikli hali elde edilir.

6.1.2 Teorem 3.1.2 nin Sonuçları

(6.2) de verilen eşitlik dikkate alındığında aşağıdaki sonuçlara ulaşmak mümkündür.

- Teorem 3.1.2 de her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{A} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa her $f \in AC_{2\pi}$ için $n \to \infty$ iken

$$V_{2\pi}[T_n(f) - f] = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)$$

elde edilir.

- Yine $\mathscr{A} = \{C_1\}$ Cesàro matrisi alındığında her $f \in AC_{2\pi}$ için $n \to \infty$ iken

$$V_{2\pi}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k(f) - f\right] = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)$$

olduğu kolayca görülebilir.

- $\mathscr{A} = \mathscr{F}$ hemen hemen yakınsaklık matrisi alındığında her $f \in AC_{2\pi}$ için $n \to \infty$ iken

$$V_{2\pi}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} T_k(f) - f\right] = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \ \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

elde edilir.

- Özel olarak $H_k(s) = s$ olduğunda lineer operatörler için de yaklaşım hızı hesaplanabildiği görülür. Üstelik $\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{I\}$ alınırsa [12] de verilen yaklaşım oranı elde edilir.

6.1.3 Teorem 3.2.1 in Sonuçları

(3.16) da verilen

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\mathbb{R}^N} K_k(\mathbf{t}, f(\mathbf{x}-\mathbf{t}))\, d\mathbf{t}$$

operatörü incelendiğinde $T_k(f;\mathbf{x})$ (3.14) te verilen operatörün kesikli hali olmak üzere

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} T_k(f;\mathbf{x}) \tag{6.3}$$

olduğu kolayca görülebilir. Bu nedenle aşağıdaki sonuçları elde etmek mümkündür.

- Teorem 3.2.1 de her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için özel olarak $\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{I\}$ birim matrisi alındığında her $f \in AC(\mathbb{R}^N)$ için

  $$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x}) = T_n(f;\mathbf{x})$$

  gerçeklenir. Buradan Angeloni ve Vinti tarafından [4] te elde edilen her $f \in AC(\mathbb{R}^N)$ için

  $$\lim_{n\to\infty} V[T_n(f) - f] = 0$$

  yaklaşımı görülür.

- Eğer her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{A} = \{C_1\}$ Cesàro matrisi alınırsa

  $$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k(f;\mathbf{x})$$

  eşitliği elde edilir. Bu da her $f \in AC(\mathbb{R}^N)$ için

  $$\lim_{n\to\infty} V\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k(f) - f\right] = 0$$

  yaklaşımının gerçeklendiğini gösterir. Yani T_k operatörünün aritmetik ortalaması f fonksiyonuna salınım anlamda yakınsaktır.

- $\mathscr{A} = \mathscr{F} = \{F^{\upsilon}\}$ olduğunda

  $$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x}) = \frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} T_k(f;\mathbf{x})$$

  sağlanır. Bu yüzden her $f \in AC(\mathbb{R}^N)$ için

  $$\lim_{n\to\infty} V\left[\frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} T_k(f) - f\right] = 0 \ \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

  sonucuna ulaşılır.

- Özel olarak $H_k(s) = s$ olduğunda N-boyutta yapılan yaklaşımın lineer operatörler için de gerçeklendiği görülebilir. Buna ilaveten $\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{I\}$ alınırsa [12] deki N-boyutta yapılan yaklaşımın kesikli hali elde edilir.

6.1.4 Teorem 3.2.2 nin Sonuçları

(6.3) ifadesi göz önüne alındığında aşağıdaki sonuçları elde etmek mümkündür.

- Teorem 3.2.2 de her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{A} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa her $f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için $n \to \infty$ iken
$$V\left[T_n(f) - f\right] = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)$$
elde edilir. Yani daha önce [4] te gerçeklenen yaklaşıma ulaşılır.

- Her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{A} = \{C_1\}$ Cesàro matrisi alındığında her $f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için $n \to \infty$ iken
$$V\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k(f) - f\right] = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)$$
olduğu kolayca görülebilir.

- $\mathscr{A} = \mathscr{F}$ hemen hemen yakınsaklık matrisi alındığında her $f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için $n \to \infty$ iken
$$V\left[\frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} T_k(f) - f\right] = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$
sağlanır.

- Özel olarak $H_k(s) = s$ olduğunda N-boyutta verilen lineer operatörler için de yaklaşım hızı hesaplanabildiği görülür. Üstelik $\mathscr{A} = \{A^\upsilon\} = \{I\}$ alınırsa [12] de çok değişkenli durum için verilen yaklaşım oranı elde edilir.

6.2 Supremum Normuna Göre Yaklaşım Sonuçları

6.2.1 Teorem 4.1.1 in Sonuçları

(6.2) de verilen eşitlik dikkate alındığında $\mathscr{A}$ matrisler ailesi yerine özel seçimler yapılarak aşağıdaki sonuçları elde etmek mümkündür.

- Teorem 4.1.1 de her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{A} = \{A^\upsilon\} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa
$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x) = T_n(f;x)$$
sağlanır. Bundan dolayı her $f \in UC_{2\pi}$ için
$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(f) - f\|_{2\pi} = 0,$$
yaklaşımı elde edilir.

- Benzer şekilde $\mathscr{A} = \{C_1\}$ Cesàro matrisi alındığında

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k(f;x)$$

sağlanır. Dolayısıyla her $f \in UC_{2\pi}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k(f) - f\right\|_{2\pi} = 0$$

yaklaşımı gerçeklenir.

- $\mathscr{A} = \mathscr{F} = \{F^{\upsilon}\}$ olarak tercih edilirse

$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} T_k(f;x)$$

olur. Buradan her $f \in UC_{2\pi}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} T_k(f) - f\right\|_{2\pi} = 0 \ \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$

olur.

- Özel olarak $H_k(s) = s$ olduğunda yapılan yaklaşımın lineer operatörler için de gerçeklendiği görülebilir. Bu koşula ek olarak $\mathscr{A} = \{A^{\upsilon}\} = \{I\}$ alınırsa [16] daki yaklaşımın kesikli hali elde edilir.

6.2.2 Teorem 4.1.2 nin Sonuçları

Uygun Lipschitz sınıfları altında (6.2) dikkate alındığında aşağıdaki sonuçlar görülebilir.

- Teorem 4.1.2 de her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{A} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa her $f \in UC_{2\pi}$ için $n \to \infty$ iken

$$\|T_n(f) - f\|_{2\pi} = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)$$

sağlanır.

- Eğer $\mathscr{A} = \{C_1\}$ Cesàro matrisi alınırsa her $f \in UC_{2\pi}$ için $n \to \infty$ iken

$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k(f) - f\right\|_{2\pi} = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)$$

sonucu elde edilir.

- $\mathscr{A}=\mathscr{F}$ hemen hemen yakınsaklık matrisi alındığında her $f\in UC_{2\pi}$ için $n\to\infty$ iken
$$\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1}T_k(f)-f\right\|_{2\pi}=O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)\ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$
gerçeklenir.

- Özel olarak $H_k(s)=s$ olduğunda hesaplanan yaklaşım hızının lineer operatörler için de gerçeklendiği görülebilir. Bu şarta ek olarak $\mathscr{A}=\{A^{\upsilon}\}=\{I\}$ alınırsa [12] deki yaklaşım oranı elde edilir.

6.2.3 Teorem 4.2.1 in Sonuçları

(6.3) te $\mathscr{A}$ yerine özel seçimler yapılarak aşağıdaki sonuçları elde etmek mümkündür.

- Teorem 4.2.1 de her $\upsilon\in\mathbb{N}$ için $\mathscr{A}=\{A^{\upsilon}\}=\{I\}$ birim matrisi alınırsa her $f\in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için
$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x})=T_n(f;\mathbf{x})$$
gerçeklendiğinden
$$\lim_{n\to\infty}\|T_n(f)-f\|_{\infty}=0$$
yaklaşımı elde edilir.

- Eğer $\mathscr{A}=\{C_1\}$ Cesàro matrisi olarak alınırsa
$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x})=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}T_k(f;\mathbf{x})$$
sağlanır. Buradan hareketle her $f\in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için
$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}T_k(f)-f\right\|_{\infty}=0$$
yaklaşımı gerçeklenir.

- $\mathscr{A}=\mathscr{F}=\{F^{\upsilon}\}$ alınırsa
$$\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f;\mathbf{x})=\frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1}T_k(f;\mathbf{x})$$
olur. Buradan her $f\in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için
$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1}T_k(f)-f\right\|_{\infty}=0\ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$
olur.

- Özel olarak $H_k(s)=s$ olduğunda yapılan yaklaşımın lineer operatörler için de gerçeklendiği görülebilir. Bu koşula ek olarak $N=1$ ve $\mathscr{A}=\{A^{\upsilon}\}=\{I\}$ alınırsa [16] daki yaklaşımın kesikli hali elde edilir.

6.2.4 Teorem 4.2.2 nin Sonuçları

Benzer şekilde $\mathscr{A}$ yerine uygun seçimler yapılarak aşağıdaki sonuçların sağlandığı görülebilir.

- Teorem 4.2.2 de her $\upsilon \in \mathbb{N}$ için $\mathscr{A} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa her $f \in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için $n \to \infty$ iken
$$\|T_n(f) - f\|_\infty = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)$$
olur.

- Eğer $\mathscr{A} = \{C_1\}$ Cesàro matrisi alınırsa her $f \in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için $n \to \infty$ iken
$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_n(f) - f \right\|_\infty = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)$$
gerçeklenir.

- $\mathscr{A} = \mathscr{F}$ alındığında her $f \in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için $n \to \infty$ iken
$$\left\| \frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} T_n(f) - f \right\|_\infty = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right) \ (\upsilon \text{ ye göre düzgün})$$
olduğu kolayca görülebilir.

- Özel olarak $H_k(s) = s$ olduğunda hesaplanan yaklaşım hızının lineer operatörler için de gerçeklendiği görülebilir. Bu koşula ek olarak $N = 1$ ve $\mathscr{A} = \{A^\upsilon\} = \{I\}$ alınırsa [12] deki yaklaşım oranı elde edilir.

6.3 Mutlak Ve Düzgün Süreklilik İçin Karakterizasyon Sonuçları

6.3.1 Teorem 5.1.1 in Sonuçları

Eğer Teorem 5.1.1 de

- $\mathscr{A} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa her $L_k \in AC_{2\pi}$ için
$$T_n(f;x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t, f(x-t))dt$$
olmak üzere
$$f \in AC_{2\pi} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} V_{2\pi}\left[T_n(f) - f\right] = 0$$
yaklaşımı gerçeklenir [4].

- Eğer $\mathscr{A} = \{C_1\}$ alınırsa (5.1) ve $(i)-(iv)$ koşulları altında

$$f \in AC_{2\pi} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} V_{2\pi}\left[\frac{T_1(f)+\ldots+T_n(f)}{n} - f\right] = 0$$

  elde edilir.

- Ve son olarak $\mathscr{A} = \mathscr{F}$ alındığında (5.1) ve $(i)-(iv)$ koşulları altında

$$f \in AC_{2\pi} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} V_{2\pi}\left[\frac{T_\upsilon(f)+\ldots+T_{n+\upsilon-1}(f)}{n} - f\right] = 0$$

(υ ye göre düzgün)

  sağlanır.

6.3.2 Teorem 5.1.2 nin Sonuçları

Eğer Teorem 5.1.2 de

- $\mathscr{A} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa $L_k \in AC\left(\mathbb{R}^N\right)$ için

$$T_n(f;\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} K_n(\mathbf{t}, f(\mathbf{x}-\mathbf{t}))d\mathbf{t}$$

  olmak üzere

$$f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} V_{2\pi}\left[T_n(f) - f\right] = 0$$

  yaklaşımı gerçeklenir [4].

- Eğer $\mathscr{A} = \{C_1\}$ alınırsa (5.3), $(I)-(III)$ ve (iv) koşulları altında

$$f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} V_{2\pi}\left[\frac{T_1(f)+\ldots+T_n(f)}{n} - f\right] = 0$$

  elde edilir.

- Ve son olarak $\mathscr{A} = \mathscr{F}$ alındığında (5.3), $(I)-(III)$ ve (iv) koşulları altında

$$f \in AC\left(\mathbb{R}^N\right) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} V_{2\pi}\left[\frac{T_\upsilon(f)+\ldots+T_{n+\upsilon-1}(f)}{n} - f\right] = 0$$

(υ ye göre düzgün)

  sağlanır.

6.3.3 Teorem 5.2.1 in Sonuçları

Eğer Teorem 5.2.1 de

- $\mathscr{A} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa $L_k \in UC_{2\pi}$ ise

  $$T_n(f;x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t, f(x-t))dt$$

  olmak üzere

  $$f \in UC_{2\pi} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|T_n(f) - f\|_{2\pi} = 0$$

  yaklaşımı gerçeklenir.

- Eğer $\mathscr{A} = \{C_1\}$ alınırsa (5.5), $(i)-(iii)$ ve $(iv)'$ koşulları altında

  $$f \in UC_{2\pi} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{T_1(f) + \ldots + T_n(f)}{n} - f \right\|_{2\pi} = 0$$

  elde edilir.

- Ve son olarak $\mathscr{A} = \mathscr{F}$ alındığında (5.5), $(i)-(iii)$ ve $(iv)'$ koşulları altında

  $$f \in UC_{2\pi} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{T_\upsilon(f) + \ldots + T_{n+\upsilon-1}(f)}{n} - f \right\|_{2\pi} = 0$$

  (υ ye göre düzgün)

  sağlanır.

6.3.4 Teorem 5.2.2 nin Sonuçları

Eğer Teorem 5.2.2 de

- $\mathscr{A} = \{I\}$ birim matrisi alınırsa $L_k \in UC(\mathbb{R}^N)$ ise

  $$T_n(f;\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^N} K_n(\mathbf{t}, f(\mathbf{x}-\mathbf{t}))d\mathbf{t}$$

  olmak üzere

  $$f \in BUC(\mathbb{R}^N) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \|T_n(f) - f\|_\infty = 0$$

  yaklaşımı gerçeklenir.

- Eğer $\mathscr{A} = \{C_1\}$ alınırsa (5.6), $(I)-(III)$ ve $(iv)'$ koşulları altında

  $$f \in BUC(\mathbb{R}^N) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| \frac{T_1(f) + \ldots + T_n(f)}{n} - f \right\|_\infty = 0$$

  elde edilir.

- Ve son olarak $\mathscr{A} = \mathscr{F}$ alındığında (5.6), $(I)-(III)$ ve $(iv)'$ koşulları altında
$$f \in BUC\left(\mathbb{R}^N\right) \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left\|\frac{T_\upsilon(f)+\ldots+T_{n+\upsilon-1}(f)}{n}-f\right\|_\infty = 0$$
(υ ye göre düzgün)

  sağlanır.

6.4 Salınım Yaklaşımının Uygulaması

6.4.1 Periyodik Durum

Bu kısımda uygun bir f fonksiyonu tanımlanıp (3.2) de verilen operatör için özel L_k ve H_k çekirdekleri alınarak yaklaşım hızları yardımıyla Teorem 3.1.1 in gerçeklendiği gösterilecektir.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere
$$f(x) = \frac{1+\sin x}{2} \tag{6.4}$$
şeklinde tanımlansın. f fonksiyonunun $AC_{2\pi} \subset C_{2\pi}$ uzayında bulunduğu açıktır.

$\mathscr{A}$ yerine $\{C_1\} = \{(c_{nk})\}$ Cesàro matrisi alınsın. Bu durumda $\mathscr{T}_{n,\upsilon}(f)$ operatörü υ ye bağlı olmadığından $\mathscr{T}_n(f)$ olarak yazılabilir.

Eğer $[0,\infty)$ aralığında
$$H_k(u) := \begin{cases} u+\log\left(1+\dfrac{u}{k}\right); & \text{eğer } 0\le u\le 1\\ u+\log\left(1+\dfrac{1}{ku}\right); & \text{eğer } u>1\end{cases} \tag{6.5}$$
olarak tanımlanıp negatif tarafta da orjine göre simetriği alınırsa (bkz. [4]) $H_k(0)=0$, H_k Lipschitz sürekli ve (iv) koşulları gerçeklenir.

L_k ise $[-\pi,\pi]$ aralığında
$$L_k(t) := \begin{cases} \left(1+(-1)^k\right)k; & \text{eğer } |t| \le \frac{1}{2k}\\ 0; & \text{eğer } \pi \ge |t| \ge \frac{1}{2k}\end{cases} \tag{6.6}$$
şeklinde tanımlanıp $[-\pi,\pi]$ aralığının dışında da kendini tekrar ettiği düşünüldüğünde Teorem 3.1.1 in tüm şartları sağlanır.

Buradan
$$\lim_{n\to\infty} V_{2\pi}\left[\mathscr{T}_n(f)-f\right] = 0 \tag{6.7}$$
yaklaşımı elde edilir. (3.9)−(3.13) koşullarını elde edebilmek için $\xi:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ aşağıdaki gibi tanımlansın:
$$\xi(u) := \begin{cases} u\ln\left(\dfrac{1}{u}+1\right); & \text{eğer } u>0\\ 0; & \text{eğer } u=0.\end{cases} \tag{6.8}$$

Bu durumda $\xi \in \Psi$ olduğu açıktır. Özel olarak $\alpha = 1$ alınırsa, sabit bir $\delta > 0$ ve yeterince büyük n değerleri için boş küme üzerindeki toplam sıfır kabul edilerek

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk} \int\limits_{|t|<\delta} |t|\,|L_k(t)|\,dt = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2\delta}\right]} \left(1+(-1)^k\right) k \int\limits_{|t|<\delta} |t|\,dt + \frac{1}{n} \sum_{k=\left[\frac{1}{2\delta}\right]+1}^{n} \int\limits_{|t|<\delta} |t|\,|L_k(t)|\,dt$$

eşitliği yazılabilir. Burada $[\cdot]$ ile bir sayının tam değeri ifade edilmiştir. Eğer

$$B_1 := B_1(\delta) = \sum_{k=1}^{\left[\frac{1}{2\delta}\right]} \left(1+(-1)^k\right) k \int\limits_{|t|<\delta} |t|\,dt$$

olarak tanımlanırsa

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk} \int\limits_{|t|<\delta} |t|\,|L_k(t)|\,dt \leq \frac{B_1}{n} + \frac{4}{n} \sum_{k=1}^{n} k \int_0^{\frac{1}{2k}} t\,dt = \frac{B_1}{n} + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

ifadesi elde edilir. Yeterince büyük n değerleri için

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 2\ln(n+1)$$

olduğundan $n \to \infty$ iken

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk} \int\limits_{|t|<\delta} |t|\,|L_k(t)|\,dt = O\left(\frac{\ln(n+1)}{n}\right)$$

olduğu görülür. Burada (6.8) de tanımlanan ξ fonksiyonu dikkate alındığında $n \to \infty$ iken

$$\sum_{k=1}^{n} c_{nk} \int\limits_{|t|<\delta} |t|\,|L_k(t)|\,dt = O\left(\xi\left(n^{-1}\right)\right)$$

olur, yani (3.10) koşulu gerçeklenir. Benzer şekilde aynı ξ fonksiyonu için (3.9) ve (3.11) şartlarının da sağlandığı görülebilir. Diğer taraftan, [5] ten her sınırlı $J \subset \mathbb{R}$ aralığı için

$$\frac{V_J[G_k]}{m(J)} \leq \frac{2}{k}$$

eşitsizliği bilinmektedir. Dolayısıyla $\{\beta_k\} = \{\frac{2}{k}\}$ olarak tanımlandığında (3.12) ve (3.13) şartlarının sağlandığını görmek zor değildir. Sonuç olarak $(i)-(iv)$ ve (3.9)$-$(3.13) koşullarının tümü sağlanmıştır. Tablo 6.1 ve Tablo 6.2 den (6.7) deki yaklaşımın hem çift hem de tek n değerleri için gerçeklendiği görülmektedir.

Tablo 6.1: n nin tek değerleri için salınım yarı-normuna göre hata oranı

n (tek değerler)	$V_{2\pi}[\mathscr{T}_n(f)-f]$
45	1.8847×10^{-2}
61	1.8186×10^{-2}
101	1.5287×10^{-2}
209	1.0397×10^{-2}
321	7.9277×10^{-3}

Tablo 6.2: n nin çift değerleri için salınım yarı-normuna göre hata oranı

n (çift değerler)	$V_{2\pi}[\mathscr{T}_n(f)-f]$
40	6.9209×10^{-2}
52	5.7471×10^{-2}
100	3.5439×10^{-2}
200	2.0696×10^{-2}
500	9.8618×10^{-3}

Diğer bir örnek şu şekildedir:

- Özel olarak $\mathscr{A}$ yerine (2.3) te tanımı verilen $\mathscr{F}=\{(c_{nk}^{\upsilon})\}$ hemen hemen yakınsaklık matrisi alınsın.

- $[0,\infty)$ aralığında

$$H_k(u) := \begin{cases} u+e^{u/k}-1; & \text{eğer } 0\le u<1 \\ u+e^{1/(ku)}-1; & \text{eğer } u\ge 1 \end{cases} \tag{6.9}$$

  olarak tanımlanıp negatif tarafta da orijine göre simetriği alınıp genişletilsin (bkz. [6]).

- L_k ise $t\in[-\pi,\pi]$ için

$$L_k(t) := \begin{cases} \frac{4k^2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{k^2}-t^2}; & \text{eğer } |t|\le\frac{1}{k} \text{ ve } k=m^2\ (m\in\mathbb{N}) \\ \frac{2k^2}{\pi}\sqrt{\frac{1}{k^2}-t^2}; & \text{eğer } |t|\le\frac{1}{k} \text{ ve } k\ne m^2 \\ 0; & \text{d.d.} \end{cases} \tag{6.10}$$

  olarak tanımlanıp $[-\pi,\pi]$ aralığının dışında kendini tekrar ettiği düşünülsün.

Doğrudan görülebilir ki

$$\sup_{n,\upsilon\in\mathbb{N}}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon}\|L_k\|_1 = \sup_{n,\upsilon\in\mathbb{N}}\frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1}\int_{-\pi}^{\pi}|L_k(t)|\,dt \le 2$$

olur, yani (i) şartı sağlanır. Benzer şekilde her $n, \upsilon \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t)dt - 1 \right| &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} L_k(t)dt - 1 \right| \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=\upsilon\ (k=m^2)}^{n+\upsilon-1} 1 \\
&\leq \frac{\sqrt{n+\upsilon-1} - \sqrt{\upsilon} + 1}{n} \\
&= \frac{n-1}{n\left(\sqrt{n+\upsilon-1} + \sqrt{\upsilon}\right)} + \frac{1}{n} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{n+\upsilon-1} + \sqrt{\upsilon}} + \frac{1}{n} \\
&\leq \frac{2}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği görülebilir, yani (ii) şartı da sağlanır. $\delta > 0$ verildiğinde eğer $\upsilon \geq [\frac{1}{\delta}] + 1$ ise $k = \upsilon, \upsilon+1, ..., n+\upsilon-1$ için $\delta > \frac{1}{\upsilon} \geq \frac{1}{k}$ olur. Bu sebepten (6.10) dan

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |L_k(t)|\, dt = \frac{1}{n} \sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |L_k(t)|\, dt = 0$$

olur. Ayrıca eğer $\upsilon \leq [\frac{1}{\delta}]$ ise o zaman yeterince büyük n ler için

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |L_k(t)|\, dt \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{[\frac{1}{\delta}]} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |L_k(t)|\, dt = \frac{B_2}{n}$$

olduğu görülebilir, burada $B_2 := B_2(\delta) = \sum_{k=1}^{[\frac{1}{\delta}]} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |L_k(t)|\, dt$ olarak tanımlanmıştır. Son iki ifadeden (iii) şartının sağlandığı kolayca görülür. [6] dan (6.9) da verilen H_k nın (iv) şartını sağladığı bilinmektedir.

Son olarak $(3.9)-(3.13)$ şartlarını elde edebilmek için yine (6.8) de verilen ξ fonksiyonu seçilip $\alpha = 1$ alınsın. Verilen bir $\delta > 0$ için eğer $\upsilon \leq [\frac{1}{\delta}]$ ise yeterince büyük n değerleri için

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int_{|t|<\delta} |t|\,|L_k(t)|\, dt &= \frac{1}{n} \sum_{k=\upsilon}^{[\frac{1}{\delta}]} \int_{|t|<\delta} |t|\,|L_k(t)|\, dt \\
&\quad + \frac{1}{n} \sum_{k=[\frac{1}{\delta}]+1}^{n+\upsilon-1} \int_{|t|<\delta} |t|\,|L_k(t)|\, dt \\
&\leq \frac{B_3}{n} + \frac{2}{n} \sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} \int_{0}^{1/k} tL_k(t)dt
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $B_3 := B_3(\delta) = \sum_{k=1}^{[\frac{1}{\delta}]} \int_{|t|<\delta} |t|\,|L_k(t)|\,dt$ olarak tanımlanmıştır. Bu eşitsizlikte (6.10) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|t|<\delta} |t|\,|L_k(t)|\,dt &\leq \frac{B_3}{n} + \frac{8}{\pi n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} k^2 \int\limits_{0}^{1/k} t\sqrt{\frac{1}{k^2}-t^2}dt \\ &= \frac{B_3}{n} + \frac{8}{3\pi n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1}\frac{1}{k}\end{aligned}$$

gerçeklenir. Yeterince büyük n ler için

$$\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1}\frac{1}{k} \leq 2\ln(n+1)$$

olduğu kullanılarak, eğer $\upsilon \leq [\frac{1}{\delta}]$ ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|t|<\delta} |t|\,|L_k(t)|\,dt = O\left(\xi(n^{-1})\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde eğer $\upsilon \geq [\frac{1}{\delta}]+1$ ise yeterince büyük n ler için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}^{\upsilon} \int\limits_{|t|<\delta} |t|\,|L_k(t)|\,dt &= \frac{1}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} \int\limits_{|t|<\frac{1}{k}} |t|\,|L_k(t)|\,dt \\ &= \frac{2}{n}\sum_{k=\upsilon}^{n+\upsilon-1} \int\limits_{0}^{1/k} tL_k(t)dt \\ &= O\left(\xi(n^{-1})\right)\end{aligned}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak $\alpha = 1$ için (3.10) şartı gerçeklenir. Benzer şekilde (3.9) ve (3.11) şartları kolayca görülebilir. Ayrıca [6] dan her sınırlı $J \subset \mathbb{R}$ aralığı için

$$\frac{V_J[G_k]}{m(J)} \leq \frac{2e}{k}$$

olduğundan $\{\beta_k\} = \{\frac{2e}{k}\}$ olarak tanımlayarak (3.12) ve (3.13) şartlarının sağlandığı görülebilir.

6.4.2 Periyodik Olmayan Durum

Bu kısımda $N = 1$ özel durumu için Teorem 3.2.1 in bir uygulaması gösterilecektir.

$$f(x) = e^{-1/(1+x^2)},\ L_k(t) = \begin{cases} \left((-1)^k+1\right)k; & \text{eğer } |t| \leq \frac{1}{2k} \\ 0; & \text{eğer } |t| > \frac{1}{2k}\end{cases}$$

ve H_k (6.5) te olduğu gibi

$$H_k(u) := \begin{cases} u + \log\left(1+\frac{u}{k}\right); & \text{eğer } 0 \le u < 1 \\ u + \log\left(1+\frac{1}{ku}\right); & \text{eğer } u \ge 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Burada negatif eksende $H_k(u)$ nun orjine göre simetriği alınarak genişletildiği düşünülsün. $\mathscr{A} = \{C_1\} = \{(c_{nk})\}$ (Cesàro matrisi) alındığında

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}; & 1 \le k \le n \\ 0; & k > n \end{cases}$$

Teorem 3.2.1 in tüm şartları sağlanmış olur. Bu yüzden $f \in AC(\mathbb{R})$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} V\left[\mathscr{T}_n(f) - f\right] = 0$$

gerçeklenir. Bu yaklaşımın n nin tek ve çift değerleri için gerçeklendiği aşağıda verilen Tablo 6.3 ve Tablo 6.4 ten görülebilir.

Tablo 6.3: n nin tek değerleri için $\mathbb{R}$ de salınım yarı-normuna göre hata oranı

n (tek değerler)	$V\left[\mathscr{T}_n(f) - f\right]$
15	9.5982×10^{-2}
55	5.5228×10^{-2}
125	3.2527×10^{-2}
225	2.1358×10^{-2}
625	9.7510×10^{-3}
985	6.7704×10^{-3}

Tablo 6.4: n nin çift değerleri için $\mathbb{R}$ de salınım yarı-normuna göre hata oranı

n (çift değerler)	$V\left[\mathscr{T}_n(f) - f\right]$
10	2.3338×10^{-2}
50	8.4149×10^{-2}
100	5.0622×10^{-2}
250	2.4830×10^{-2}
600	1.2182×10^{-2}
1000	7.9532×10^{-3}

6.5 Düzgün Yaklaşımın Uygulaması

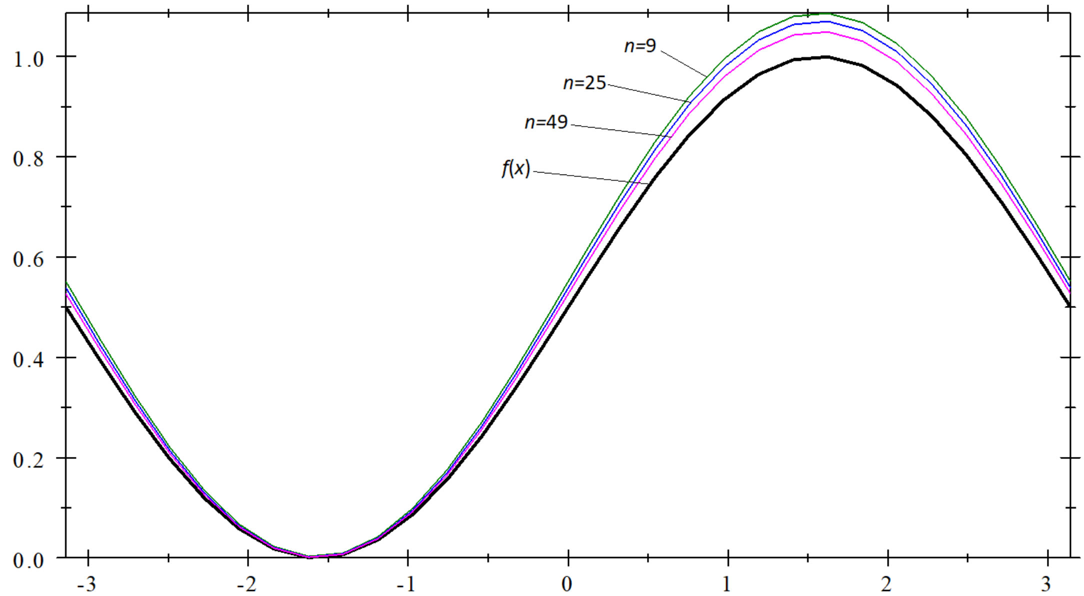
6.5.1 Periyodik Durum

$\mathscr{A} = \{C_1\} = \{(c_{nk})\}$, Cesàro matrisi alınıp $f(x)$, $H_k(u)$ ve $L_k(t)$ sırasıyla (6.4), (6.5) ve (6.6) da olduğu gibi tanımlandığında f fonksiyonu aynı zamanda $C_{2\pi}$ uzayının da bir elemanı olduğundan

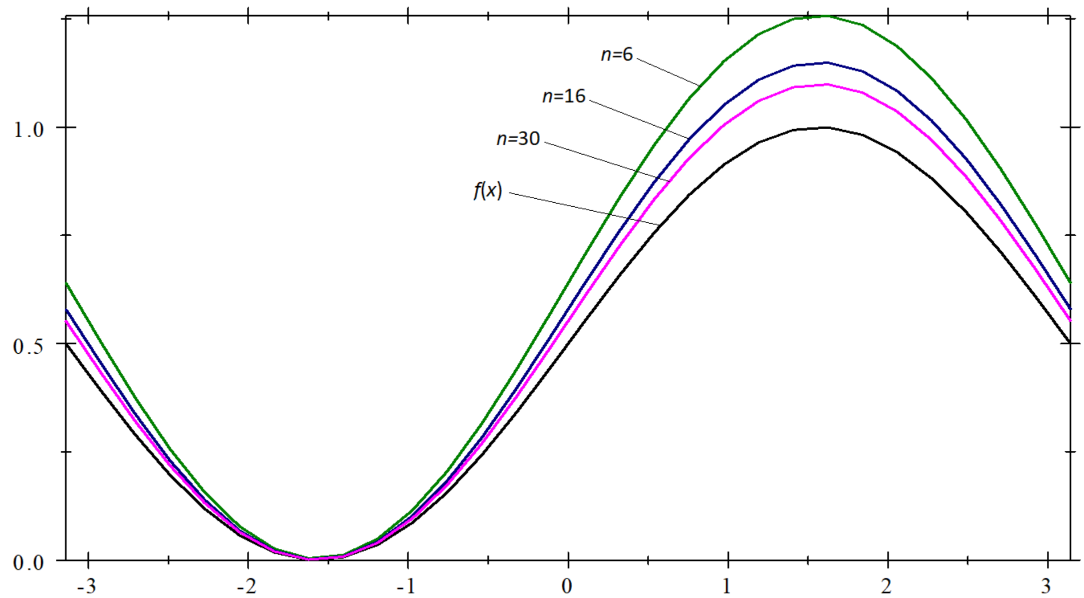
$$\lim_{n\to\infty} \left\|\mathscr{T}_n(f) - f\right\|_{2\pi} = 0$$

yaklaşımı gerçeklenir.

Şekil-6.1 ve Şekil-6.2 den bu yaklaşımın hem tek hem de çift n değerleri için sağlandığı gözükmektedir.



Şekil 6.1: n nin tek değerleri için f fonksiyonuna yaklaşım



Şekil 6.2: n nin çift değerleri için f fonksiyonuna yaklaşım

6.5.2 Periyodik Olmayan Durum

Bu kısımda $N = 2$ durumu için bir örnek alınarak Teorem 4.2.1 in gerçeklendiği grafik üzerinden gösterilecektir.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(x,y) = e^{-1/(1+x^2+y^2)}$$

olarak tanımlansın. Ayrıca L_k çekirdeği

$$L_k(t_1,t_2) := \begin{cases} \frac{4k^2}{\pi}\left((-1)^k+1\right); & \text{eğer } \sqrt{t_1^2+t_2^2} \leq \frac{1}{2k} \\ 0; & \text{eğer } \sqrt{t_1^2+t_2^2} > \frac{1}{2k} \end{cases}$$

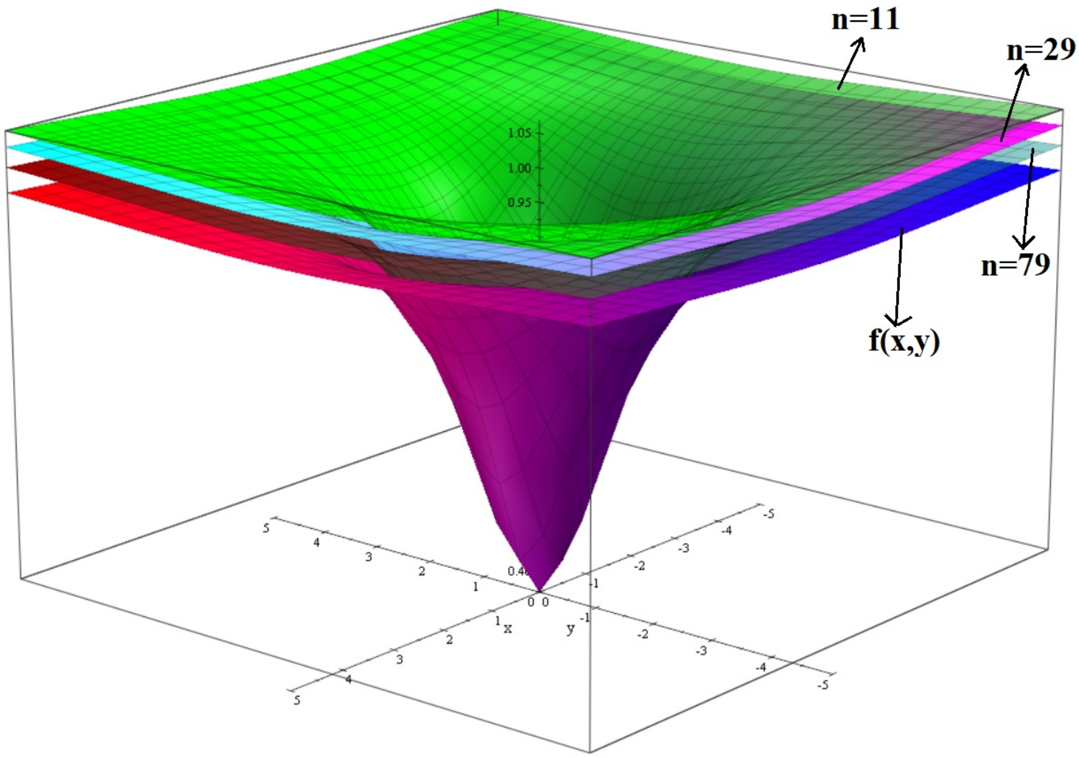
ve H_k (6.5) te olduğu gibi tanımlansın. Yine $\mathscr{A} = \{C_1\} = \{(c_{nk})\}$ Cesàro matrisi alındığında

$$\mathscr{T}_n(f;(x,y)) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k(f;(x,y))$$

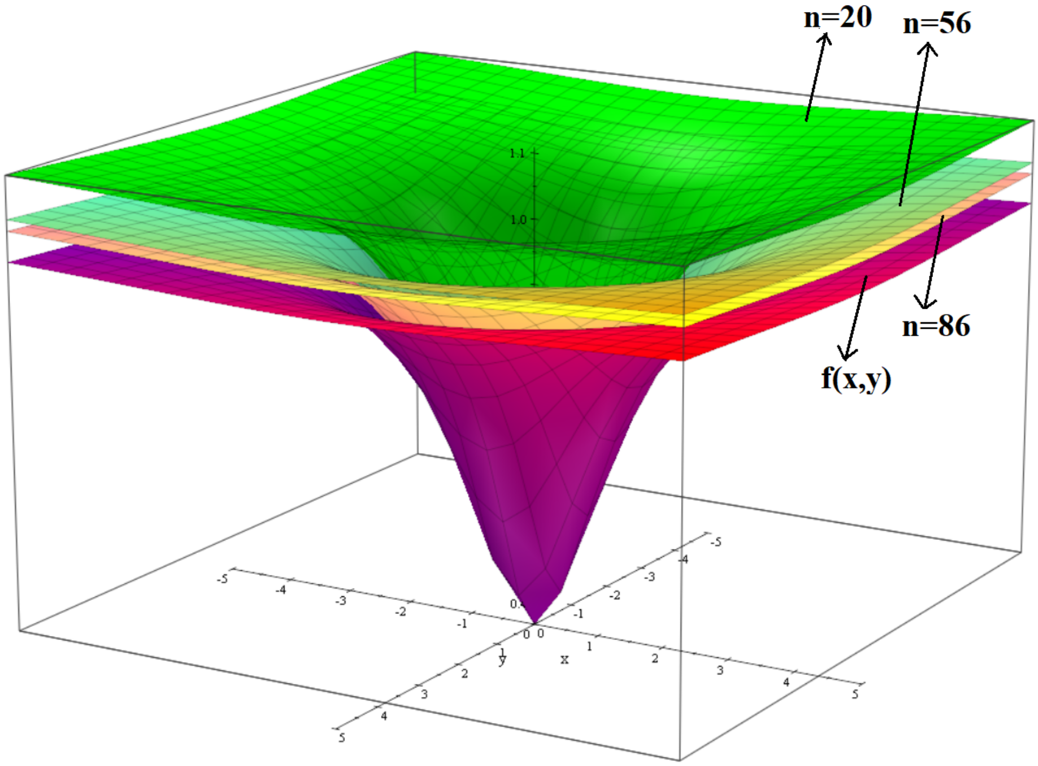
elde edilir. Yukarıda verilen tanımlar altında Teorem 4.2.1 in tüm şartları (3.16) operatörü için sağlanır. Ayrıca $f \in BUC\left(\mathbb{R}^N\right)$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathscr{T}_n(f) - f\|_\infty = 0$$

yaklaşımı gerçeklenir. Bu durum Şekil 6.3 ve Şekil 6.4 ten de görülebilir.



Şekil 6.3: n nin tek değerleri için f fonksiyonuna yaklaşım



Şekil 6.4: n nin çift değerleri için f fonksiyonuna yaklaşım

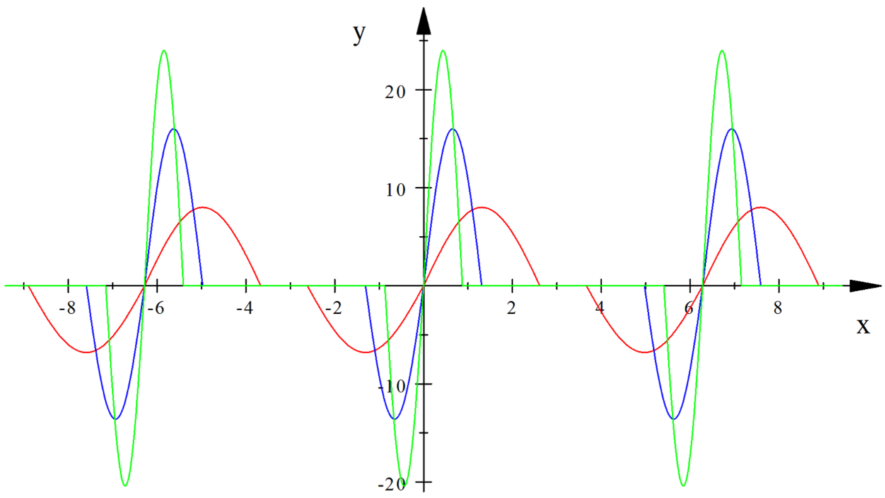
6.6 Karakterizasyonların Uygulaması

6.6.1 Periyodik Durumda Karakterizasyonun Uygulaması

Bu kısımda (5.1) ve (5.5) şartlarını sağlayan bir (L_k) fonksiyon dizisinin varlığı gösterilecektir. Özel olarak $\mathscr{A} = \{C_1\}$ alınırsa L_k $[-\pi, \pi]$ aralığında aşağıdaki gibi tanımlanıp tüm $\mathbb{R}$ ye genişletildiğinde

$$L_k(t) := \begin{cases} ((-1)^k+1)2k\sin\left(\frac{3kt}{5}\right); & \text{eğer } 0 \le t \le \frac{5\pi}{3k} \\ ((-1)^k+1)\frac{17}{10}k\sin\left(\frac{3kt}{5}\right); & \text{eğer } -\frac{5\pi}{3k} \le t < 0 \\ 0; & \text{eğer } \pi \ge |t| > \frac{5\pi}{3k} \end{cases}$$

(5.1) ve (5.5) şartlarının sağlandığı kolayca görülebilir. Bu çekirdek dizisi k nın bazı özel değerleri için çizdirildiğinde Şekil 6.5 grafiği elde edilir.



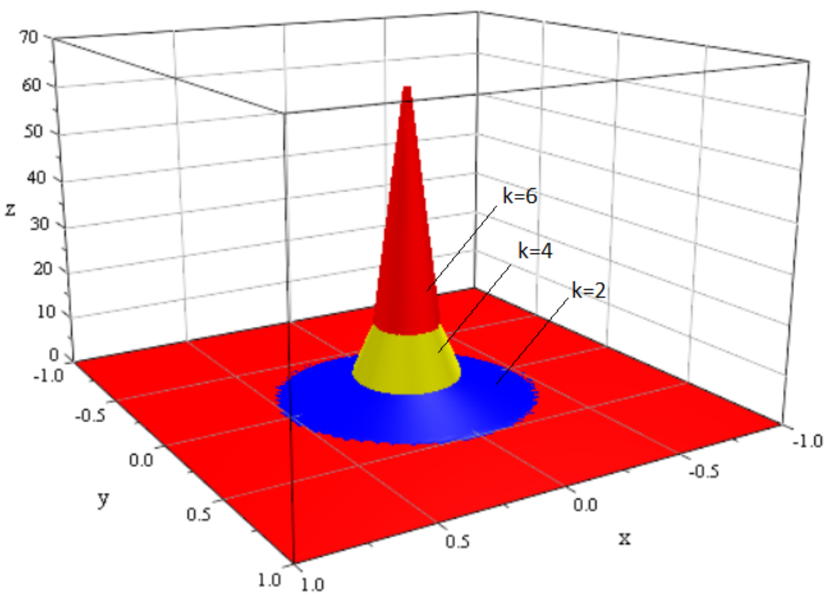
Şekil 6.5: 2π periyotlu çekirdek fonksiyonu dizisi

6.6.2 Periyodik Olmayan Durumda Karakterizasyonun Uygulaması

Bu kısımda (5.3) ve (5.6) şartlarını sağlayan bir (L_k) fonksiyon dizisinin varlığı grafik üzerinden gösterilecektir. $\mathscr{A} = \{C_1\}$ alınsın. L_k çekirdek dizisi $\mathbb{R}^2$ de

$$L_k(x,y) = \begin{cases} \left(\left(-1\right)^k + 1\right) \frac{3k^3}{\pi} \left(\frac{1}{k} - \sqrt{x^2+y^2}\right); & \text{eğer } \sqrt{x^2+y^2} \le \frac{1}{k} \\ 0; & \text{eğer } \sqrt{x^2+y^2} > \frac{1}{k} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. (5.3) ve (5.6) şartlarının sağlandığı kolayca görülebilir. Bu çekirdek dizisi k nın bazı özel değerleri için çizdirildiğinde Şekil 6.6 grafiği elde edilir.



Şekil 6.6: $k = 2,4,6$ için 2-boyutta çekirdek fonksiyonu dizisi

Not. Bu tezde Tablo 6.1−6.4 te bulunan değerler ve Şekil 6.3−6.6 da çizdirilen grafikler için Scientific WorkPlace 5.5 programı kullanılmıştır. Şekil 6.1 ve Şekil 6.2 grafikleri için de Wolfram Mathematica 10.4 programından yararlanılmıştır.

6.7 Konuyla İlgili Gelecekte Yapılabilecek Çalışmalar

Gelecekte [4] te verilen lineer olmayan çok değişkenli operatörlerin Haar ölçüsü altında Musielak ve Orlicz tarafından verilen φ-salınımlarının ve yaklaşım oranlarının araştırılması planlanmaktadır. Ayrıca bu yaklaşımların bir uygulaması da yapılabilir. Yine bu yaklaşımlardan faydalanarak $AC_{\varphi}(\mathbb{R}), AC_{\varphi}(\mathbb{R}^N), AC_{\varphi}(\mathbb{R}_+)$ ve $AC_{\varphi}(\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}})$ uzaylarının karakterizasyonları da verilmesi düşünülmektedir. Bunlara ek olarak yüksek lisans tezimizde incelenen Baskakov tipinde verilmiş Korovkin teorisine de tezde yapılan salınım anlamda yaklaşımların uygulanabilirliği araştırılacaktır. Son olarak tezde çalışılan yaklaşım tekniklerinin sinyal analizi ve görüntü işleme alanlarında uygulamaları araştırılacaktır.

KAYNAKLAR

[1] **Aguilera, F., Cárdenas-Morales, D., Garrancho, P.,** Optimal simultaneous approximation via $\mathscr{A}$-summability, *Abstr. Appl. Anal.*, 2013, Art. ID 824058, 5 pp.

[2] **Altomare, F., Campiti, M.,** Korovkin Type Approximation Theory and its Applications, *Walter de Gruyter Publ.*, Berlin, 1994.

[3] **Anastassiou, G. A., Duman, O.,** Towards intelligent modeling: statistical approximation theory, *Intelligent Systems Reference Library*, 14. Springer-Verlag, Berlin, 2011.

[4] **Angeloni, L., Vinti, G.,** Convergence in variation and rate of approximation for nonlinear integral operators of convolution type, *Results Math.*, 49 (2006), no. 1-2, 1–23.

[5] **Angeloni, L., Vinti, G.,** Erratum to: Convergence in variation and rate of approximation for nonlinear integral operators of convolution type, *Results Math.*, 57 (2010), no. 3-4, 387–391.

[6] **Angeloni, L., Vinti, G.,** Convergence in variation and a characterization of the absolute continuity, *Integral Transforms and Special Functions*, 26 (2015), 829-844.

[7] **Angeloni, L., Vinti, G.,** A characterization of absolute continuity by means of Mellin integral operators, *Z. Anal. Anwend*, 34(3)(2015), 343-356.

[8] **Angeloni, L., Vinti, G.,** A concept of absolute continuity and its characterization in terms of convergence in variation, *Math. Nachr.*, 289(16)(2016), 1986-1994.

[9] **Appel, J., Banaś, J., Merentes, N.,** Bounded Variation and Around, *Walter de Gruyter GmbH*, Berlin/Boston, 2014.

[10] **Aslan, İ., Duman, O.,** A summability process on Baskakov-type approximation, *Period. Math. Hungar.*, 72 (2016), no. 2, 186–199.

[11] **Atlıhan, Ö. G., Orhan, C.,** Summation process of positive linear operators, *Comput. Math. Appl.*, (2008), no. 5, 1188–1195.

[12] **Bardaro, C., Butzer, P. L., Stens, R. L., Vinti, G.,** Convergence in variation and rates of approximation for Bernstein-type polynomials and singular convolution integrals, *Analysis*, (Munich) 23 (2003), no. 4, 299–340.

[13] **Bell, H. T.,** $\mathscr{A}$-summability, *Dissertation, Lehigh University*, Bethlehem, Pa., 1971.

[14] **Bell, H. T.,** Order summability and almost convergence, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38 (1973), 548–552.

[15] **Boos, J.,** Classical and modern methods in summability, *Oxford University Press*, Oxford (2000).

[16] **Butzer, P. L., Nessel, R. J.,** Fourier analysis and approximation, *Volume 1: One-dimensional theory. Pure and Applied Mathematics*, Vol. 40. Academic Press, New York London, 1971.

[17] **Cárdenas-Morales, D.,** $\mathscr{A}$-summability of sequences of linear conservative operators, *Mathematical analysis, approximation theory and their applications*, 463–482, Springer Optim. Appl., 111, Springer, 2016.

[18] **Cárdenas-Morales, D.,** $\mathscr{B}$-statistical $\mathscr{A}$-summability in conservative approximation, *Math. Inequal. Appl.*, 19 (2016), no. 3, 923–936.

[19] **Dawson, D. F.,** Matrix summability over certain classes of sequences ordered with respect to rate of convergence, *Pacific J. Math.*, 24 (1968), 51–56.

[20] **DiBenedetto, E.,** Real Analysis (second edition), *Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher*, 2016.

[21] **Giusti, E.,** Minimal surfaces and functions of bounded variation, *Monographs in Mathematics*, vol. 80, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[22] **Hardy, G. H.,** Divergent series, *Oxford Univ. Press*, London, 1949.

[23] **Hardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.,** Inequalities. Cambridge Mathematical Library (second ed.), *Cambridge: Cambridge University Press*, (1952), ISBN 0-521-35880-9.

[24] **Jurkat, W. B., Peyerimhoff, A.,** Fourier effectiveness and order summability, *J. Approx. Theory*, 4 (1971) 231–244.

[25] **Jurkat, W. B., Peyerimhoff, A.,** Inclusion theorems and order summability, *J. Approx. Theory*, 4 (1971) 245–262.

[26] **Keagy, T. A., Ford, W. F.,** Acceleration by subsequence transformations, *Pacific J. Math.*, 132 (1988), no. 2, 357–362.

[27] **Krishna, B. A., Justin, R. P.,** Continuity of translation operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, Vol. 139, 2011, 4027-4040.

[28] **Lasser, R.,** Introduction to Fourier series, *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, 199. Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.

[29] **Lorentz, G. G.,** A contribution to the theory of divergent sequences, *Acta Math.*, 80 (1948) 167–190.

[30] **Mohapatra, R. N.,** Quantitative results on almost convergence of a sequence of positive linear operators, *J. Approx. Theory*, 20 (1977) 239–250.

[31] **Nishishiraho, T.,** Convergence of positive linear approximation processes, *Tôhoku Math. Journ.*, 35, 441-458 (1983).

[32] **Nishishiraho, T.,** Convergence rates of summation processes of convolution type operators, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 11(1), 137-156 (2010).

[33] **Radó, T.,** Length and Area, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, vol. 30, American Mathematical Society, New York, 1948.

[34] **Royden, H. L., Fitzpatrick, P. M.,** Real Analysis (4th edition), *Pearson Education*, 2010.

[35] **Smith, D. A., Ford, W. F.,** Acceleration of linear and logarithmical convergence, *Siam J. Numer. Anal.*, 16 (1979), 223–240.

[36] **Stieglitz, M.,** Eine verallgenmeinerung des begriffs festkonvergenz, *Mathematica Japonica*, vol. 18, pp. 53-70, 1973.

[37] **Swetits, J. J.,** On summability and positive linear operators, *J. Approx. Theory*, 25 (1979) 186–188.

[38] **Tonelli, L.,** Su alcuni concetti dell'analisi moderna, *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa*, (2) 11 (1942), 107-118.

[39] **Vinti, C.,** Perimetro-variazione, *Ann. Sculo Norm. Sup. Pisa*, 18 (1964), no. 3, 201–231.

[40] **Wimp, J.,** Sequence Transformations and Their Applications, *Academic Press*, New York, 1981.

[41] **Zygmund, A.,** Trigonometric Series, *Volume I, Cambridge University Press*, 1968, pp. 18-19.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad	: İsmail Aslan
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum Tarihi ve Yeri	: 01.07.1988 Bursa
E-posta	: iaslan@etu.edu.tr; ismail-aslan@hacettepe.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2011, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2014, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz
- **Doktora** : 2019, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Fonksiyonlar Teorisi ve Fonksiyonel Analiz

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	Yer	Görev/Ödüller
2012-2014	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Tam Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi
2014-2017	Orta Doğu Teknik Üniversitesi	Araştırma Görevlisi
2014-2019	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Araştırma Burslu Doktora Öğrencisi
2016-2018	TÜBİTAK	2211-A Doktora Bursu
2017-2019	Hacettepe Üniversitesi	Araştırma Görevlisi

Yıl	Yer	Görev/Ödüller
2018	Eötvös Loránd Üniversitesi	ICPAM Konferansı En İyi Sunum Ödülü

YABANCI DİL: İngilizce (A3)

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR VE SUNUMLAR:

- **Aslan, İ.**, Duman, O., 2017. Summability Process on the Approximation by Nonlinear Integral Operators of Convolution Type, International Conference on Mathematics and Mathematics Education, May 11-13, Şanlıurfa, Turkey.
- **Aslan, İ.**, Duman, O., 2017. Approximation by nonlinear integral operators with the help of summation methods, The International Society for Analysis, its Applications and Computation, August 14-18, Vaxjo, Sweden.
- **Aslan, İ.**, Duman, O., 2018. Lineer Olmayan İntegral Operatörleriyle Yaklaşımda Bell-Tipinde Toplanabilme Metodu, 13. Ankara Matematik Günleri, 27-28 Nisan, Ankara, Türkiye.
- **Aslan, İ.**, Duman, O., 2018. Summability method in the approximation by nonlinear integral operators in N-dimension BV-space, 2018 The 7th International Conference on Pure and Applied Mathematics, July 10-13, Budapest, Hungary.

DİĞER YAYINLAR VE SUNUMLAR:

- **Aslan, İ.**, Duman, O., 2014. Summability Process on the Baskakov type Approximation theory, International Conference "Mathematics Days in Sofia", July 07-10, Sofia, Bulgaria.
- **Aslan, İ.**, Duman, O., 2014. Application of Summability Process on Baskakov Type Korovkin Theory, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, November 06-09, Antalya, Turkey.
- **Aslan, İ.**, Duman, O., 2016. A summability process on Baskakov-type approximation, Periodica Mathematica Hungarica, 72(2), 186-199.
- **Aslan, İ.**, Duman, O., 2016. A Generalized Version of the Korovkin Theory, Emerging Trends In Applied Mathematics And Mechanics, May 30 - June 03, Perpignan, France.
- **Aslan, I.**, Duman, O., 2019. Application of Summability Process on the Mellin-type Nonlinear Integral Operators, The First International Workshop On Constructive Mathematical Analysis, February 11-13, Konya, Turkey.
- **Aslan, I.**, Duman, O., 2019. Summability on Mellin-type nonlinear integral operators, Integral Transform. Spec. Funct. (*kabul edildi*).