TOBB EKONOMİ VE TEKNOLOJİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER İNDİRGEME DİZİLERİNİN BAZI TERS TOPLAMLARININ HESAPLANMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Didem ERSANLI

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emrah KILIÇ

TEMMUZ 2019

Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

....
Prof. Dr. Osman EROĞUL
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans derecesinin tüm gereksinimlerini sağladığını onaylarım.

....
Prof. Dr. Oktay DUMAN
Anabilimdalı Başkanı

TOBB ETÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172111001 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi **Didem ERSANLI**'nın ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı **"LİNEER İNDİRGEME DİZİLERİNİN BAZI TERS TOPLAMLARININ HESAPLANMASI"** başlıklı tezi **31.7.2019** tarihinde aşağıda imzaları olan jüri tarafından kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı:	**Prof. Dr. Emrah KILIÇ** TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri:	**Prof. Dr. Adnan TERCAN (Başkan)** Hacettepe Üniversitesi	....
	Doç. Dr. Zülfükar SAYGI TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	....

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, alıntı yapılan kaynaklara eksiksiz atıf yapıldığını, referansların tam olarak belirtildiğini ve ayrıca bu tezin TOBB ETÜ Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlandığını bildiririm.

Didem Ersanlı

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LİNEER İNDİRGEME DİZİLERİNİN BAZI TERS TOPLAMLARININ HESAPLANMASI

Didem Ersanlı

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emrah Kılıç

Tarih: Temmuz 2019

Bu tezde, $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ ve $V_0 = 2$, $V_1 = p$ başlangıç koşulları olmak üzere her $n \geq 2$ için

$$U_n = pU_{n-1} + rU_{n-2} \text{ ve } V_n = pV_{n-1} + rV_{n-2},$$

kuralları ile tanımlanan ikinci basamaktan lineer homojen indirgeme dizileri $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ ile çalışacağız. Bu dizilerin terimlerini ihtiva eden aşağıdaki ters toplamları hesaplayacağız:

$$\sum_{k=0}^{n} (-r)^k \frac{V_{k+d+1}}{U_{k+d}U_{k+d+1}U_{k+d+2}} \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} (-r)^k \frac{U_{k-d}}{U_{k+d}U_{k+d+1}U_{k+d+2}}$$

ve X_n, U_n ya da V_n olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{n} (-r)^k \frac{U_{k+c}U_{k+c+1} \dots U_{k+c+m-1}}{X_{k+d}X_{k+d+1} \dots X_{k+d+m+1}}.$$

Anahtar Kelimeler: Ters toplamlar, q-Analiz, Basit kesirlere ayırma yöntemi, Teleskop yaratma.

ABSTRACT

Master of Science

EVALUATION FOR CERTAIN RECIPROCAL SUMS OF LINEAR RECURRENCE SEQUENCES

Didem Ersanlı

TOBB University of Economics and Technology
Institute of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emrah Kılıç

Tarih: July 2019

In this thesis, we will consider second order linear homogeneous recurrences $\{U_n\}$ and $\{V_n\}$ defined by the rules for $n \geq 2$

$$U_n = pU_{n-1} + rU_{n-2} \text{ and } V_n = pV_{n-1} + rV_{n-2},$$

where the initial conditions $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ and $V_0 = 2$, $V_1 = p$, respectively. We will evaluate the following reciprocal sums including terms of these sequences

$$\sum_{k=0}^{n} (-r)^k \frac{V_{k+d+1}}{U_{k+d}U_{k+d+1}U_{k+d+2}} \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} (-r)^k \frac{U_{k-d}}{U_{k+d}U_{k+d+1}U_{k+d+2}}$$

and

$$\sum_{k=0}^{n} (-r)^k \frac{U_{k+c}U_{k+c+1}\dots U_{k+c+m-1}}{X_{k+d}X_{k+d+1}\dots X_{k+d+m+1}}$$

where X_n is U_n or V_n.

Keywords: Reciprocal sums identities, q-Calculus, Partial fraction decomposition, Telescobing idea.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve ilgiyle elinden gelenden fazlasını sunan, her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağım kıymetli danışmanım Prof. Dr. Emrah KILIÇ'a ve tecrübelerinden faydalandığım TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine; değerli jüri üyeleri Prof. Dr. Adnan TERCAN'a ve Doç. Dr. Zülfükar SAYGI'ya; sağladığı burstan dolayı TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesine teşekkürlerimi sunarım. Son olarak destekleri ile her zaman yanımda olan bu hayattaki en büyük şansım olan kıymetli aileme ve sevgili arkadaşlarıma sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGE LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

Bu tezde kullanılan simgeler açıklamaları ile birlikte aşağıda yer almaktadır.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
P_n	n. Pell sayısı
Q_n	n. Pell-Lucas sayısı
J_n	n. Jakobsthal sayısı
j_n	n. Jakobsthal-Lucas sayısı
W_n	n. Horadam sayısı
T_n	n. Tribonacci sayısı
$\{U_n(p,r)\}$	Genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\{V_n(p,r)\}$	Genelleştirilmiş Lucas dizisi
$\{u_n\}$	k-basamaktan genelleştirilmiş Fibonacci dizisi
$\lfloor\ \rfloor$	Alta yuvarlama(Taban) fonksiyonu
$\|x\|$	x sayısına en yakın tam sayı değeri
$[n]_q$	n doğal sayısının q-versiyonu
$(x;q)_n$	q-Pochhammer sembolü
$\binom{k}{r}$	Binom katsayıları
$\sum$	Toplam notasyonu
$\prod$	Çarpım notasyonu
$\mathbf{i}$	Kompleks birim
$\forall$	Her

1. GİRİŞ

Öncelikle ileride kullanacağımız bazı tanımları verelim.

1.1 Lineer Homojen İndirgeme Dizileri

Tanım kümesi doğal sayılar olan fonksiyonlara dizi adı verilir. Her terimi kendinden önceki bazı terimlerinin belli bir lineer kombinasyonu ile ifade edilen dizilere lineer homojen indirgeme dizileri denir. Bu kombinasyonda bulunan terim sayısına o dizinin basamağı denir. Eğer dizinin basamağı k ise k tane de başlangıç koşulu vardır.

Her $n \geq k$ doğal sayısı, c_i $(1 \leq i \leq k, c_k \neq 0)$ reel katsayıları ve reel başlangıç koşulları için $\{u_n\}$; k. basamaktan (ya da k-basamaktan) lineer homojen indirgeme dizisi

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \cdots + c_k u_{n-k}$$

kuralı ile tanımlanır.

Genel olarak bu tezde k'yı 2 alarak ikinci basamaktan lineer homojen indirgeme dizilerini çalışacağız. Aşağıdaki tabloda bazı özel ve sık kullanılan sayı dizilerini hatırlatalım:

Çizelge 1.1: Bazı Sayı Dizileri

Katsayılar	Başlangıç değerleri	Dizinin adı
$c_1 = 1,\ c_2 = 1$	$u_0 = 0,\ u_1 = 1$	Fibonacci $\{F_n\}$
$c_1 = 1,\ c_2 = 1$	$u_0 = 2,\ u_1 = 1$	Lucas $\{L_n\}$
$c_1 = 2,\ c_2 = 1$	$u_0 = 0,\ u_1 = 1$	Pell $\{P_n\}$
$c_1 = 2,\ c_2 = 1$	$u_0 = 2,\ u_1 = 2$	Pell-Lucas $\{Q_n\}$
$c_1 = 1,\ c_2 = 2$	$u_0 = 0,\ u_1 = 1$	Jakobsthal $\{J_n\}$
$c_1 = 1,\ c_2 = 2$	$u_0 = 2,\ u_1 = 1$	Jakobsthal-Lucas $\{j_n\}$
$c_1 = p,\ c_2 = r$	$u_0 = 0,\ u_1 = 1$	Genelleştirilmiş Fibonacci $\{U_n(p,r)\}$
$c_1 = p,\ c_2 = r$	$u_0 = 2,\ u_1 = p$	Genelleştirilmiş Lucas $\{V_n(p,r)\}$
$c_1 = p,\ c_2 = -r$	$u_0 = a,\ u_1 = b$	Horadam $\{W_n(p,-r)\}$
$c_1 = c_2 = c_3 = 1$	$u_0 = 0,\ u_1 = u_2 = 1$	Tribonacci $\{T_n\}$

Tribonacci dizisi dışında tabloda verilen diğer tüm diziler ikinci basamaktandır.

$\{u_n\}$ dizisi için

$$x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \cdots - c_{k-1}x - c_k = 0$$

denklemine $\{u_n\}$ dizisinin karakteristik denklemi denir. Örneğin $\{U_n(p,r)\}$ ve $\{V_n(p,r)\}$ dizilerinin karakteristik denklemi $x^2 - px - r = 0$'dır. Bu karakteristik denklemin köklerini α ve β ile gösterirsek

$$\alpha = \frac{p+\sqrt{p^2+4r}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{p-\sqrt{p^2+4r}}{2}.$$

Özel olarak Fibonacci ve Lucas sayıları için karakteristik denklemimiz $x^2 - x - 1 = 0$ ve kökleride $(1 \pm \sqrt{5})/2$ şeklinde olacaktır.

Herhangi bir lineer indirgeme dizisinin indisi oldukça büyük bir terimini hesaplamak dizinin indirgeme kuralı ile uzun zaman alabilir. Bu tür dizilerin n. terimini daha kolay hesaplamak için Fransız matematikçi Jacques Philippe Marie Binet tarafından sabitlere ve n'e bağlı bir formül verilmiştir. Örneğin $\{U_n(p,r)\}$ ve $\{V_n(p,r)\}$ dizileri için Binet formülleri

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

ve

$$V_n = \alpha^n + \beta^n$$

şeklindedir.

Not. Bu tez boyunca özel p ve r değerleri alındığında notasyon olarak sadelik anlamında $U_n(p,r)$ ve $V_n(p,r)$ gösterimleri kısaca U_n ve V_n olarak yazılacak ve ilgili yerlere bu durum not edilecektir.

Dizideki terimlerin indisleri pozitif tam sayılar olduğundan negatif indisli terimlerden oluşan bir dizi tanımlayamayız. Ancak indirgeme kuralını geriye doğru işlettiğimizde negatif indisli terimleri buluruz. Örneğin $\forall\, n \geq 2$ tam sayısı ve $F_0 = 0, F_1 = 1$ başlangıç koşulları için Fibonacci dizisinin indirgeme kuralından yararlanarak

$$
\begin{aligned}
F_1 &= F_0 + F_{-1} \\
F_0 &= F_{-1} + F_{-2} \\
F_{-1} &= F_{-2} + F_{-3}, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

olacaktır. Açıkça

n	0	1	2	3	4	5	6	$\ldots$	n
F_{-n}	0	1	-1	2	-3	5	-8	$\ldots$	$(-1)^{n+1}F_n$

değerlerini elde ederiz.

Ayrıca $\forall\, n \geq 0$ ve $\alpha\beta = -1$ olmak üzere Fibonacci dizisinin Binet formülünde n yerine $-n$ alırsak

$$F_{-n} = \frac{\alpha^{-n} - \beta^{-n}}{\alpha - \beta} = \frac{\frac{1}{\alpha^n} - \frac{1}{\beta^n}}{\alpha - \beta} = \frac{-(\alpha^n - \beta^n)}{(\alpha - \beta)(\alpha\beta)^n} = (-1)^{n+1}\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = (-1)^{n+1}F_n$$

sonucunu elde ederiz. Yani

$$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n.$$

Benzer şekilde Lucas, Pell ve Pell-Lucas dizileri için de aşağıdaki bağıntıları verebiliriz:

$$
\begin{aligned}
L_{-n} &= (-1)^n L_n \\
P_{-n} &= (-1)^{n+1} P_n \\
Q_{-n} &= (-1)^n Q_n.
\end{aligned}
$$

1.2 q-Versiyon

Herhangi bir n doğal sayısının q-versiyonu

$$[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$\lim_{q\to 1}[n]_q = n.$$

$(x;q)_0 = 1$ olmak üzere negatif olmayan n tam sayısı için q-Pochhammer sembolü aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(x;q)_n = (1-x)(1-xq)\cdots(1-xq^{n-1}).$$

Bu durumda $q = \beta/\alpha$ ya da $\alpha = \mathbf{i}\sqrt{r}q^{-\frac{1}{2}}$ olmak üzere $\{U_n\}$ ve $\{V_n\}$ dizileri için Binet formülleri

$$U_n = \frac{\alpha^{n-1}(1-q^n)}{1-q} \tag{1.1}$$

ve

$$V_n = \alpha^n(1+q^n) \tag{1.2}$$

şeklinde olacaktır.

1.3 Kullanılacak Yöntemler

Şimdi çalışmamızda vereceğimiz çeşitli sonuçları ispatlamak için bazı yöntemleri hatırlatalım:

İlk olarak basit kesirlere ayırma (heaviside) yöntemini verelim. Bu yöntem ile payının derecesi paydasının derecesinden daha küçük rasyonel bir fonksiyonu aşağıda verilen adımları takip ederek basit kesirlerine ayırabiliriz. Burada paydadaki fonksiyonun katlı kökünün olmadığını ve $\mathbb{R}$'de çarpanlarına ayrılabilir olduğunu kabul edelim.

i. adım : Öncelikle verilen rasyonel fonksiyonun paydasını çarpanlarına ayıralım:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)}.$$

ii. adım : $g(x)$'in $(x-r_i)$ çarpanını kapatıp x yerine r_i kökünü koyarak aşağıdaki gibi A_i katsayılarını elde ederiz:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)(r_1-r_3)\cdots(r_1-r_n)} \\ A_2 &= \frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\cdots(r_2-r_n)} \\ &\vdots \\ A_n &= \frac{f(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\cdots(r_n-r_{n-1})}. \end{aligned}$$

iii. adım : Son olarak bulduğumuz A_i sayılarını kullanarak $f(x)/g(x)$'in basit kesirlerine ayrılmış halini

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{(x-r_1)} + \frac{A_2}{(x-r_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x-r_n)}$$

şeklinde elde ederiz.

Örneğin $\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}$ rasyonel fonksiyonunu heaviside yöntemini kullanarak basit kesirlerine ayıralım. Burada $f(x) = x+4$ ve $g(x) = x^3+3x^2-10x$ olmak üzere $f(x)$ fonksiyonunun derecesi $g(x)$ fonksiyonunun derecesinden küçüktür ve $g(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi çarpanlarına ayrılabilir:

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}.$$

$g(x)$'in kökleri $r_1 = 0$, $r_2 = 2$ ve $r_3 = -5$'tir. Buradan;

$$A_1 = \frac{0+4}{(0-2)(0+5)} = \frac{-2}{5}, \quad A_2 = \frac{2+4}{2(2+5)} = \frac{3}{7} \quad \text{ve} \quad A_3 = \frac{-5+4}{(-5)(-5-2)} = \frac{-1}{35}.$$

O halde verilen rasyonel fonksiyonun basit kesirlerine ayrılmış hali

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = \frac{-2}{5x} + \frac{3}{7(x-2)} + \frac{-1}{35(x+5)}$$

şeklinde olacaktır.

Şimdi teleskop yaratma yönteminden bahsedeceğiz. Terimlerinin bir önceki veya sonraki terim ile sadeleşerek belli bir sayıda terimin kaldığı toplamlara teleskop toplamlar denir.

Genel olarak alışılagelen teleskop yaratma baştaki ve sondaki terimin kaldığı aşağıdaki durumdur:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1}) &= (a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{n-2}-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_n) \\ &= (a_1-a_n).\end{aligned}$$

Örneğin teleskop yaratma yöntemini kullanarak

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

elde ederiz.

Ayrıca Kılıç ve Prodinger [1], teleskop yaratma yöntemini kullanarak aşağıdaki eşitliği vermişlerdir:

$$\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{1}{1+azq^{b+c}}-\frac{1}{1+azq^{c}}\right) = \sum_{t=1}^{b}\left(\frac{1}{1+azq^{n+c}}-\frac{1}{1+azq^{c}}\right). \tag{1.3}$$

2. LİTERATÜR

Bu bölümde lineer homojen indirgeme dizilerinin ters toplamları ile ilgili yapılan çalışmaları inceleyeceğiz.

2.1 Ters Toplamlar

Fibonacci sayıları için Good [2] aşağıdaki ters toplamı hesaplamıştır:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_{2^n}} = \frac{7-\sqrt{5}}{2}. \tag{2.1}$$

Hoggatt ve Bicknell [3] ise bu toplamı 10 farklı yoldan ispatlamış ve daha genel olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{k2^n}} = \begin{cases} \dfrac{2L_k - F_{2k}\sqrt{5} + 5F_k^2}{2F_{2k}} & k \text{ tek ise,} \\[2ex] \dfrac{2 - F_k\sqrt{5} + L_k}{2F_k} & k \text{ çift ise} \end{cases} \tag{2.2}$$

sonucunu elde etmişlerdir [4].

Negatif olmayan bazı a, b ve c tam sayıları için Backstrom [5]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{an+b}+c} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{L_{an+b}+c} \tag{2.3}$$

ters toplamlarını incelemiştir. Örneğin bu ters toplamların ilkinde $a=2$, $b=1$ ve $c=F_k$ alırsak

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{F_{2n+1}+F_k} = \frac{k\sqrt{5}}{2L_k}.$$

Popov [6], Bacstorm'un (2.3)'te verdiği sonuçları genelleştirilmiş Fibonacci $\{U_n\}$ ve Lucas $\{V_n\}$ dizileri için vermiştir.

Birbirinden farklı negatif olmayan k_i tam sayıları için Brousseau [7]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n F_{n+k_1} F_{n+k_2} \cdots F_{n+k_r}} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{F_n F_{n+k_1} F_{n+k_2} \cdots F_{n+k_r}} \tag{2.4}$$

şeklindeki sonsuz ters toplamları incelemiştir. Rabinowitz [8] ise aynı tipteki ters toplamların hesaplanabilmesi için algoritmik bir yaklaşım vermiştir. Yine Rabinowitz [9], $\{F_n\}$ yerine keyfi katsayılara ve keyfi başlangıç değerlerine sahip ikinci basamaktan lineer homojen indirgeme dizilerini kullanarak (2.4)'te verilen sonuçların genel durumlarını elde etmiştir.

Melham ve Shannon [10], (2.1) ve (2.2)'de Fibonacci sayıları için elde edilen sonuçları $\{U_n(p,1)\}$ (kısaca $\{U_n\}$ ile gösterilecek) ve $\{V_n(p,1)\}$ (kısaca $\{V_n\}$ ile gösterilecek) için vermiştir. Ayrıca

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{U_{kn} U_{k(n+1)}} = \frac{1}{\alpha^k U_k^2} \tag{2.5}$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{V_{kn} V_{k(n+1)}} = \frac{1}{2(\alpha-\beta) U_k} \tag{2.6}$$

sonuçlarını elde etmişlerdir.

Andre-Jeannin [11], (2.5) ve (2.6)'da verilen sonuçları $W_0 = a$, $W_1 = b$ başlangıç koşullarıyla verilen ikinci basamaktan lineer homojen indirgeme dizisi $\{W_n\}$ için

$$S_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{W_n W_{n+k}} \quad \text{ve} \quad T_k = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{W_n W_{n+k}}$$

toplamlarını hesaplamıştır.

Xi [12] ise payında $\{W_n\}$ dizisinin terimlerinin dörtlü çarpımından oluşan sonlu ve sonsuz toplamlarla çalışmıştır.

2.2 Kısmi Ters Toplamlar

Othsuka ve Nakamura [13], Fibonacci sayılarının ve karelerinin kısmi ters toplamlarının çarpımsal terslerinin taban değerlerini

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{n-2} & n \geq 2 \text{ çift ise,} \\ \\ F_{n-2} - 1 & n \geq 1 \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.7}$$

ve

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{F_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_n F_{n-1} - 1 & n \geq 2 \text{ çift ise,} \\ \\ F_n F_{n-1} & n \geq 1 \text{ tek ise} \end{cases} \tag{2.8}$$

şeklinde hesaplamışlardır. Wenpeng ve Tingting [13-14], (2.7) ve (2.8)'de Fibonacci sayıları için verilen sonuçları $\{P_n\}$ Pell dizisi için vermişlerdir. Holliday ve Komatsu [16] ise $\{U_n\}$ dizisi için

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{U_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} U_n - U_{n-1} & n \geq 2 \text{ çift ise,} \\ \\ U_n - U_{n-1} - 1 & n \geq 1 \text{ tek ise,} \end{cases}$$

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{U_k^2} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} pU_n U_{n-1} - 1 & n \geq 2 \text{ çift ise,} \\ \\ pU_n U_{n-1} & n \geq 1 \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde genelleştirmişlerdir. Ayrıca $\{J_n\}$ Jakobsthal sayı dizisi için

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{J_k} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} J_{n-1} - 1 & n \geq 2 \text{ çift ise,} \\ \\ J_n & n \geq 1 \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklindeki sonsuz kısmi ters toplamını vermiştir.

Daha sonra Wang ve Zhang [17], çift ve tek indeksli Fibonacci sayıları için aşağıdaki toplamları vermişlerdir:

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{F_{2k}} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{2n-1} & m = 2 \text{ ve } n \geq 3 \text{ ise,} \\ \\ F_{2n-1} - 1 & m \geq 3 \text{ ve } n \geq 1 \text{ ise.} \end{cases}$$

$\forall\, n \geq 1$ ve $m \geq 2$ için

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{F_{2k-1}} \right)^{-1} \right\rfloor = F_{2n-2},$$

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{F_{2k}^2} \right)^{-1} \right\rfloor = F_{4n-2} - 1,$$

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{F_{2k-1}^2} \right)^{-1} \right\rfloor = F_{4n-4}.$$

Aynı yazarlar [18], $\forall\, n \geq 1$ ve $m \geq 2$ için

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{F_{3k}} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} 2F_{3n-2} & n \text{ çift ise,} \\ \\ 2F_{3n-2} - 1 & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

ve $\forall\, n \geq 2$, $m \geq 2$ için

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{F_{3k}^2} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_{3n}^2 - F_{3n-3}^2 & n \text{ çift ise,} \\ \\ F_{3n}^2 - F_{3n-3}^2 - 1 & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

sonuçlarını elde etmişlerdir.

Liu ve Wang [19], paydasında Fibonacci sayılarının çarpımlarını ihtiva eden aşağıdaki gibi sonlu toplamları incelemiştir:

$\forall\, n \geq 1$ ve $m \geq 2$ için

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{F_k F_{k+1}} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} F_n^2 & n \text{ çift ise}, \\ F_n^2 - 1 & n \text{ tek ise}. \end{cases}$$

$\forall\, n \geq 2$ ve $m \geq 2$ için

$$\begin{aligned} \left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{F_{2k-1} F_{2k}} \right)^{-1} \right\rfloor &= F_{4n-3}, \\ \left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{F_{2k} F_{2k+1}} \right)^{-1} \right\rfloor &= F_{4n-1} - 1. \end{aligned}$$

$\forall\, n \geq 1$ ve $m \geq 2$ için

$$\begin{aligned} \left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{F_{2k-1} F_{2k+1}} \right)^{-1} \right\rfloor &= F_{4n-2}, \\ \left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{1}{F_{2k} F_{2k+2}} \right)^{-1} \right\rfloor &= F_{4n} - 1, \\ \left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{(-1)^k}{F_k F_{k+1}} \right)^{-1} \right\rfloor &= \begin{cases} F_{2n} - 1 & n \text{ çift ise}, \\ -F_{2n} - 1 & n \text{ tek ise}. \end{cases} \end{aligned}$$

$\forall\, n \geq 3$ ve $m \geq 2$ için

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{(-1)^k}{F_{2k-1} F_{2k}} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} 3F_{2n-2}F_{2n-1} & n \text{ çift}, \\ -3F_{2n-2}F_{2n-1} - 1 & n \text{ tek}. \end{cases}$$

$\forall\, n \geq 2$ ve $m \geq 2$ için

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{(-1)^k}{F_{2k}F_{2k+1}} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} 3F_{2n-1}F_{2n} - 1 & n \text{ çift}, \\ \\ -3F_{2n-1}F_{2n} & n \text{ tek}, \end{cases}$$

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{(-1)^k}{F_{2k-1}F_{2k+1}} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} 3F_{2n-1}^2 - 1 & n \text{ çift}, \\ \\ -3F_{2n-1}^2 & n \text{ tek}, \end{cases}$$

$$\left\lfloor \left(\sum_{k=n}^{mn} \frac{(-1)^k}{F_{2k}F_{2k+2}} \right)^{-1} \right\rfloor = \begin{cases} 3F_{2n}^2 & n \text{ çift}, \\ \\ -3F_{2n}^2 - 1 & n \text{ tek}. \end{cases}$$

Komatsu [20], bunlardan farklı olarak "*alta yuvarlama fonksiyonu*" yerine "*en yakın tam sayı fonksiyonu*" $\|\circ\|$'ı ($\|x\| = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$) kullanarak çeşitli ters toplamlar elde etmiştir. $\forall\, p_1 \geq p_2 \geq 0$ ve $\forall\, n \geq n_0$ olmak üzere $\{U_n\}$ dizisi için

$$\left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{U_n} \right)^{-1} \right\| = U_n - U_{n-1}$$

eşitliğini elde etmiştir. Burada hatırlatalım ki n_0, p_1 ve p_2, $\{U_n\}$ dizisinin başlangıç koşullarına bağlıdır.

Komatsu [21], Tribonacci dizisi için

$$\left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{T_k} \right)^{-1} \right\| = T_n - T_{n-1}, \quad (n \geq 1)$$

$$\left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{T_{2k}} \right)^{-1} \right\| = T_{2n} - T_{2n-2}, \quad (n \geq 1)$$

kısmi ters toplamlarını ve bunların alterne versiyonlarını hesaplamıştır.

Komatsu ve Laohakosol [22], $n \geq k$ ve $p \geq 1$ olmak üzere keyfi başlangıç koşullarına sahip

$$u_n = pu_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} + \cdots + u_{n-k}$$

şeklinde tanımlanan k-basamaktan lineer indirgeme dizisi için

$$\begin{aligned} \left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_k} \right)^{-1} \right\| &= u_n - u_{n-1}, \ (n \geq n_0) \\ \left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_k} \right)^{-1} \right\| &= (-1)^n (u_n - u_{n-1}), \ (n \geq n_1) \\ \left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_{2k}} \right)^{-1} \right\| &= u_{2n} - u_{2n-2} \ (n \geq n_2) \end{aligned}$$

sonuçlarını vermişlerdir. Burada n_0, n_1, n_2 doğal sayıları p'ye ve $\{u_n\}$ dizisinin başlangıç koşullarına bağlıdır.

Kılıç ve Arıkan [23], $n \geq k$ olmak üzere p, q pozitif katsayıları ve keyfi başlangıç koşulları için

$$u_n = pu_{n-1} + qu_{n-2} + u_{n-3} + \cdots + u_{n-k}$$

olarak verilen yüksek basamaktan homojen indirgeme dizisini ele almışlardır. $p \geq q$ ve $0 \leq r < t$ sağlayan keyfi tam sayılar t ve r için

$$\left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{u_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| = u_{tn+r} - u_{tn-t+r} \ (n \geq n_0)$$

ve

$$\left\| \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{u_{tk+r}} \right)^{-1} \right\| = (-1)^{tn+r} (u_{tn+r} + u_{tn-t+r}) \ (n \geq n_1)$$

toplamlarını hesaplamışlardır. Burada n_0 ve n_1, t, r, p, q değerlerine ve $\{u_n\}$ dizisinin başlangıç koşullarına bağlı doğal sayılardır. Bu toplamlar, bugüne kadar çalışılmış tüm sonuçları içermektedir.

Wang ve Yuan [24], $a \in \{1,2,3\}$ ve $b < a$ olmak üzere

$$\sum_{k=n}^{mn} \frac{(-1)^k}{F_{ak+b}}$$

şeklindeki sonlu ve alterne kısmi ters toplamları incelemiştir.

Melham [25], genelleştirilmiş Fibonacci sayılarına ve değişik parametrelere bağlı çeşitli kısmi ters toplamları incelemiştir. Örneğin $\{W_n(p,1)\}$ ve $p=1$ iken $\{\overline{W}_n(1,1)\}$ şeklinde gösterdiğimiz dizi için

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{ki}\overline{W}_{k(2i+m_1+m_2)+2m}}{W_{ki+m}W_{k(i+m_1)+m}W_{k(i+m_2)+m}W_{k(i+m_3)+m}},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{ki}W^2_{k(i+m_2)+m}}{W_{ki+m}W_{k(i+m_1)+m}W_{k(i+2m_2-m_1)+m}W_{k(i+2m_2)+m}}$$

ve $0 < m_1 < m_2 < m_3 < m_4$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{ki}U_{k(3i+m_1+m_2+m_3)+3m}}{U_{ki+m}U_{k(i+m_1)+m}\dots U_{k(i+m_4)+m}},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{ki}V_{2k(i+m_2)+2m}V_{k(i+m_2)+m}}{U_{ki+m}U_{k(i+m_1)+m}\dots U_{k(i+m_4)+m}},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{ki}\overline{W}^3_{k(i+m_2)+m}}{W_{ki+m}W_{k(i+m_1)+m}\dots W_{k(i+m_4)+m}}$$

toplamlarını incelemiştir. Aynı makalede $0 < m_1 < m_2 < m_3$, $m_4 = m_2+m_3-m_1$ ve $m_5 = m_2+m_3$ koşulları altında

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{ki}U_{k(4i+2m_2+m_3)+4m}}{U_{ki+m}U_{k(i+m_1)+m}\dots U_{k(i+m_5)+m}},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{ki}U^2_{k(2i+m_2+m_3)+2m}}{U_{ki+m}U_{k(i+m_1)+m}\dots U_{k(i+m_5)+m}},$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-1)^{ki}W^4_{k(i+m_1+m_2)+m}}{W_{ki+m}W_{k(i+2m_1)+m}W_{k(i+m_2)+m}W_{k(i+m_3)+m}W_{k(i+m_4)+m}W_{k(i+m_5)+m}}$$

toplamlarını net olarak hesaplayamasa da başka toplamlarla ifade etmiştir. Ayrıca bu tür toplamlarda paydadaki terim sayısının artması ile benzer sonuçların elde edileceğini belirtmiştir.

Buraya kadar ters toplamlarla ilgili literatürdeki birçok çalışmaya değindik. Şimdi problememizi oluşturmada bize motivasyon sağlayan örnekleri inceleyelim.

Melham [26], $\{W_n(p,-1)\}$ ve $\{\overline{W}_n(1,-1)\}$ dizileri için

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{1}{W_{k(t+m_1)+m} W_{k(t+m_2)+m} \overline{W}_{k(t+m_3)+m} \overline{W}_{k(t+m_4)+m}},$$

$$\sum_{t=1}^{n} \frac{U_{2kt+2m}}{W_{kt+m} W_{k(t+m_1)+m} W_{k(t+m_2)+m} \overline{W}_{kt+m} \overline{W}_{k(t+m_1)+m} \overline{W}_{k(t+m_2)+m}}$$

gibi ters toplamları incelemiştir.

Kılıç ve Prodinger [1] ise Melham [26] tarafından verilen toplamlar için ilk kez basit kesirlerine ayırma ve teleskop yaratma yöntemini kullanarak net sonuçlar elde etmişlerdir.

Adegoke [27], çeşitli sonsuz alterne toplamları incelemiştir. Örneğin Fibonacci ve Lucas sayıları için

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{F_{nk+mnq}}{\prod_{j=0}^{2m} L_{nk+jnq}} = \frac{1}{5F_{mnq}} \sum_{k=1}^{q} (-1)^k \prod_{j=0}^{2m-1} \frac{1}{L_{nk+jnq}}$$

sonucunu vermiştir. Benzer toplamlar Melham [28] tarafından da incelenmiştir.

Frontczak [29], $m,n \geq 1$ için

$$\sum_{i=1}^{N}(-1)^{m(i+1)}\frac{F_{mi+n\mp1}}{F_{m(i-1)+n}F_{mi+n}F_{m(i+1)+n}} = \frac{F_{m\mp1}}{F_nF_mF_{2m}} \times\left(\frac{F_{m(N+1)}}{F_{m(N+1)+n}}+\frac{F_{mN}}{F_{mN+n}}-\frac{F_m}{F_{m+n}}\right)-(-1)^m\frac{F_{mN}}{F_m^2F_{m+n}F_{m(N+1)+n}}$$

sonucunu vermiştir.

Daha önceden Melham [30], Frontczak gibi net sonuçlar veremesede benzer toplamları incelemiş ve kapalı formlar vermeye çalışmıştır.

3. TEZ PROBLEMİ VE TEZİN AMACI

Bir önceki bölümde bahsettiğimiz üzere bir çok yazar lineer homojen indirgeme dizilerinin terimlerini ihtiva eden sonlu ve sonsuz, alterne ve alterne olmayan çeşitli ters toplamları hesaplamıştır. Bizim amacımız pay ve paydasında genel Fibonacci ve Lucas sayılarını ya da onların bazı sonlu çarpımlarını içeren ters toplamları hesaplamaktır. Burada bahsettiğimiz genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas dizileri $U_0 = 0, U_1 = 1$ ve $V_0 = 2, V_1 = p$ başlangıç koşulları olmak üzere

$$U_n = pU_{n-1} + rU_{n-2} \text{ ve } V_n = pV_{n-1} + rV_{n-2}$$

'dir. Açıkça (X_n, U_n ya da V_n olmak üzere)

$$\sum_{k=0}^{n} (-r)^k \frac{U_{k-d}}{U_{k+d}U_{k+d+1}U_{k+d+2}} \qquad , \qquad \sum_{k=0}^{n} (-r)^k \frac{V_{k+d+1}}{U_{k+d}U_{k+d+1}U_{k+d+2}}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{n} (-r)^k \frac{U_{k+c}U_{k+c+1}\ldots U_{k+c+m-1}}{X_{k+d}X_{k+d+1}\ldots X_{k+d+m+1}}$$

toplamlarını net olarak hesaplayacağız. Bu hesaplamaları yaparken ilk olarak bu üç toplamın q-versiyonları bulacağız. Daha sonra q-calculus, basit kesirlere ayırma ve teleskop yaratma yöntemlerini kullanacağız. Üstelik bu üç toplamın q-versiyonlarında q'yu özel seçerek bu toplamların daha genel versiyonlarını elde edeceğiz.

4. SONUÇLAR

Bu bölümde temel sonuçlarımızı ve onların ispatlarını sunacağız. Ardından bu sonuçların bazı genelleştirmelerini ispatsız olarak vereceğiz. Ayrıca elde ettiğimiz her sonucu örneklendireceğiz.

4.1 Temel Sonuçlar

Teorem 4.1. $\forall\, n,\ m \geq 0,\ d \geq 1,\ c \in \{-m+1, \ldots, -1, 0, 1\}$ *tam sayılar ve* X_n*,* U_n *ya da* V_n *olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{n} (-r)^k \frac{\prod_{t=0}^{m-1} U_{k+t+c}}{\prod_{t=0}^{m+1} X_{k+t+d}} = (-1)^{c+1} \frac{r^{1-c} \prod_{t=0}^{m} U_{n+t+c}}{U_{m+1} X_{d-c+1} \prod_{t=0}^{m} X_{n+t+d+1}} \tag{4.1}$$

eşitliği sağlanır.

Not. Yukarıdaki ifadenin sol tarafının payındaki çarpım ifade $m = 0$ durumunda boş çarpıma dönüşecektir. Bu tür çarpımsal ifadeler 1 olarak kabul edilir. Açıkça $m = 0$ için teoremin ifadesi

$$\sum_{k=0}^{n} (-r)^k \frac{\prod_{t=0}^{-1} U_{k+t+c}}{\prod_{t=0}^{1} X_{k+t+d}} = (-1)^{c+1} \frac{r^{1-c} U_{n+c}}{U_1 X_{d-c+1} X_{n+d+1}}$$

şeklinde olacaktır.

Ayrıca $V_0 = 2$ olduğundan $X_n = V_n$ durumunda yukarıdaki teoremimizin ifadesindeki $d \geq 1$ koşulunu kaldırabiliriz.

İspat. Kabul edelim ki $X_n = U_n$ olsun. İlk olarak (1.1)'de verilen Binet formüllerinin q-versiyonunu ve $\alpha = \mathbf{i}\sqrt{r}q^{-\frac{1}{2}}$ eşitliğini kullanarak (4.1) eşitliğinin sol tarafının

q-versiyonunu bulalım. O halde

$$\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{\prod\limits_{t=0}^{m-1}U_{k+t+c}}{\prod\limits_{t=0}^{m+1}U_{k+t+d}}=\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{\frac{\alpha^{k+c-1}(1-q^{k+c})}{(1-q)}\frac{\alpha^{k+c}(1-q^{k+c+1})}{(1-q)}\cdots\frac{\alpha^{k+c+m-2}(1-q^{k+c+m-1})}{(1-q)}}{\frac{\alpha^{k+d-1}(1-q^{k+d})}{(1-q)}\frac{\alpha^{k+d}(1-q^{k+d+1})}{(1-q)}\cdots\frac{\alpha^{k+d+m}(1-q^{k+d+m+1})}{(1-q)}}$$

$$=\alpha^{mc-(m+2)d-2m+1}(1-q)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{q^k\prod\limits_{t=0}^{m-1}\left(1-q^{k+c+t}\right)}{\prod\limits_{t=0}^{m+1}(1-q^{k+d+t})}$$

eşitliğini elde ederiz.

Benzer şekilde eşitliğin sağ tarafının q-versiyonu ise

$$(-1)^{c+1}\frac{r^{1-c}\prod\limits_{t=0}^{m}U_{n+t+c}}{U_{m+1}U_{d-c+1}\prod\limits_{t=1}^{m+1}U_{n+t+d}}$$

$$=(-1)^{c+1}\alpha^{(m+2)c-(m+2)d-2m-1}\frac{(1-q)^2\prod\limits_{t=0}^{m}(1-q^{n+c+t})}{(1-q^{m+1})(1-q^{d-c+1})\prod\limits_{t=1}^{m+1}(1-q^{n+d+t})}$$

şeklinde olacaktır.

Gerekli sadeleştirmelerin ardından iddianın q-versiyonu

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{q^k\prod\limits_{t=0}^{m-1}\left(1-q^{k+c+t}\right)}{\prod\limits_{t=0}^{m+1}(1-q^{k+d+t})}=\frac{q^{1-c}\prod\limits_{t=0}^{m}(1-q^{n+c+t})}{(1-q^{m+1})(1-q^{d-c+1})\prod\limits_{t=1}^{m+1}(1-q^{n+d+t})}$$

şeklinde ya da q-Pochhammer notasyonu ile

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{q^k\left(q^{k+c};q\right)_m}{\left(q^{k+d};q\right)_{m+2}}=\frac{q^{1-c}\left(q^{n+c};q\right)_{m+1}}{(1-q^{m+1})(1-q^{d-c+1})\left(q^{n+d+1};q\right)_{m+1}}$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{q^k \left(q^{k+c};q\right)_m}{\left(q^{k+d};q\right)_{m+2}}$$

toplamını S_n ve bu toplamın toplanan terimini T_k ile gösterelim. Yani

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{q^k \left(q^{k+c};q\right)_m}{\left(q^{k+d};q\right)_{m+2}}$$

ve

$$T_k = \frac{q^k \left(q^{k+c};q\right)_m}{\left(q^{k+d};q\right)_{m+2}}.$$

Basit kesirlere ayırma yöntemi kullanarak T_k için

$$\frac{q^k \left(q^{k+c};q\right)_m}{\left(q^{k+d};q\right)_{m+2}} = \sum_{t=1}^{m+2} \frac{q^{-d-t+1}(q^{c-d-t+1};q)_m}{(1-q^{k+d+t-1}) \times \prod\limits_{\substack{i=1 \\ i\neq t}}^{m+2} (1-q^{i-t})}$$

eşitliğini elde ederiz.

Burada (1.3) teleskop yaratma eşitliğini kullanarak

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{1-q^{k+d+m}} - \frac{1}{1-q^{k+d+t}} \right) = \sum_{k=0}^{m-t-1} \left(\frac{1}{1-q^{k+d+n+t+1}} - \frac{1}{1-q^{k+d+t}} \right) \quad (4.2)$$

elde ederiz.

T_k toplanan terimini $k=0$ dan n'ye kadar toplar ve (4.2) teleskop eşitliğini kullanırsak

S_n toplamını aşağıdaki gibi buluruz:

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{t=1}^{m+1} \left(\frac{1}{1-q^{d+t-1}} - \frac{1}{1-q^{d+n+t}} \right) \sum_{r=1}^{t} \frac{q^{-d-r+1}\left(q^{c-d-r+1};q\right)_m}{(q^{1-r};q)_{r-1}\,(q)_{m-r+2}} \\
&= (-1)^m \frac{1}{1-q^{m+1}} \sum_{t=1}^{m+1} \left(\frac{1}{1-q^{d+t-1}} - \frac{1}{1-q^{d+n+t}} \right) \\
&\times q^{(m-t+1)c-(m-t+2)d+t(t-1)+\frac{m(m-2t+1)}{2}} \frac{\left(q^{c-d-2};q\right)_{3-t}\left(q^{d-c};q\right)_{t-m+1}}{(q)_{t-1}\,(q)_{m-t+1}} \\
&= (-1)^m \frac{1-q^{n+1}}{1-q^{m+1}} \sum_{t=1}^{m+1} \frac{q^{t(-c+d-m+t)}}{(1-q^{d+t-1})(1-q^{d+n+t})} \\
&\times q^{c-1-d+\frac{1}{2}m(m+1+2c-2d)} \frac{\left(q^{c-d-2};q\right)_{3-t}\left(q^{d-c};q\right)_{t-m+1}}{(q)_{t-1}\,(q)_{m-t+1}} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{(1-q^{c-d-1})(1-q^{m+1})} \\
&\times \sum_{t=1}^{m+1} (-1)^{t+1} \frac{q^{\binom{t+1}{2}-1}\left(q^{c-d-1};q\right)_{2-t}\left(q^{c-d};q\right)_{m-t+1}}{(1-q^{d+t-1})(1-q^{d+n+t})\,(q)_{t-1}\,(q)_{m-t+1}} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{(1-q^{c-d-1})(1-q^{m+1})} \\
&\times \sum_{t=0}^{m} (-1)^{t} \frac{q^{\binom{t+2}{2}-1}\left(q^{c-d-1};q\right)_{1-t}\left(q^{c-d};q\right)_{m-t}}{(1-q^{d+t})(1-q^{d+n+t+1})\,(q)_{t}\,(q)_{m-t}} \\
&= \frac{1-q^{n+1}}{(1-q^{m+1})(1-q^{c-d-1})} \\
&\times \sum_{t=0}^{m} (-1)^{t} \frac{q^{\binom{t}{2}}(1-q^{c-d-t-1})(1-q^{c-d-t})\ldots(1-q^{c-d+m-t-1})}{(q^{-t}-q^{d})(q^{-t}-q^{d+n+1})(q)_t(q)_{m-t}}.
\end{aligned}$$

Şimdi son satırdaki toplamı hesaplayabilmek için $h(z)$ fonksiyonunu

$$h(z) := \frac{(1-zq^{c-d-1})\dots(1-zq^{c-d+m-1})}{(z-q^d)(z-q^{d+n+1})(1-z)(1-zq)\dots(1-zq^m)} \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlayalım.

$h(z)$ fonksiyonu için basit kesirlere ayırma yöntemi uygulayalım. O halde;

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{(1-q^{c-1})\dots(1-q^{c+m-1})}{(z-q^d)(q^d-q^{d+n+1})(1-q^d)(1-q^{d+1})\dots(1-q^{d+m})} \\ &+ \frac{(1-q^{c+n})\dots(1-q^{c+n+m})}{(q^{d+n+1}-q^d)(z-q^{d+n+1})(1-q^{d+n+1})(1-q^{d+n+2})\dots(1-q^{d+n+m+1})} \\ &+ \sum_{t=0}^{m}(-1)^t q^{\binom{t+1}{2}} \frac{(1-zq^{c-d-1})\dots(1-zq^{c-d+m-1})}{(z-q^d)(z-q^{d+n+1})\,(q)_t\,(q)_{m-t}\,(1-zq^t)} \end{aligned} \tag{4.4}$$

eşitliğini elde ederiz.

Burada (4.3)'te verdiğimiz $h(z)$ fonksiyonunu z ile çarpıp ardından $z\to\infty$ limit durumunu incelersek

$$\begin{aligned} &\lim_{z\to\infty} \frac{z(1-zq^{c-d-1})\dots(1-zq^{c-d+m-1})}{(z-q^d)(z-q^{d+n+1})(1-z)(1-zq)\dots(1-zq^m)} \\ &= \lim_{z\to\infty} \frac{zz^{m+1}(\frac{1}{z}-zq^{c-d-1})\dots(\frac{1}{z}-zq^{c-d+m-1})}{z^2z^{m+1}(1-\frac{q^d}{z})(1-\frac{q^{d+n+1}}{z})(\frac{1}{z}-1)(\frac{1}{z}-q)\dots(\frac{1}{z}-q^m)} = 0 \end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz.

Benzer şekilde (4.4) eşitliğini z ile çarpar ve $z \to \infty$ durumunda limitini hesaplarsak

$$\lim_{z\to\infty}\Bigg(\frac{z(1-q^{c-1})\dots(1-q^{c+m-1})}{z(1-\frac{q^d}{z})(q^d-q^{d+n+1})(1-q^d)(1-q^{d+1})\dots(1-q^{d+m})}$$
$$-\frac{z(1-q^{n+c})\dots(1-q^{c+n+m})}{zq^d(1-q^{n+1})(1-\frac{q^{d+n+1}}{z})(1-q^{d+n+1})(1-q^{d+n+2})\dots(1-q^{d+n+m+1})}$$
$$+\sum_{t=0}^{m}(-1)^t q^{\frac{t(t+1)}{2}}\frac{z(1-zq^{c-d-1})\dots(1-zq^{c-d+m-1})}{z(z-q^d)(z-q^{d+n+1})(q)_t(q)_{m-t}(\frac{1}{z}-q^t)}\Bigg)$$
$$=\frac{(1-q^{c-1})\dots(1-q^{c+m-1})}{q^d(1-q^{n+1})(1-q^d)(1-q^{d+1})\dots(1-q^{d+m})}$$
$$-\frac{(1-q^{n+c})\dots(1-q^{c+n+m})}{q^d(1-q^{n+1})(1-q^{d+n+1})(1-q^{d+n+2})\dots(1-q^{d+n+m+1})}$$
$$+\sum_{t=0}^{m}(-1)^t q^{\frac{t(t+1)}{2}}\frac{(1-zq^{c-d-1})\dots(1-zq^{c-d+m-1})}{(z-q^d)(z-q^{d+n+1})(q)_t(q)_{m-t}(-q^t)}$$
$$=\frac{q^{-d}(1-q^{c-1})\dots(1-q^{c+m-1})}{(1-q^{n+1})(1-q^d)(1-q^{d+1})\dots(1-q^{d+m})}$$
$$-\frac{q^{-d}(1-q^{n+c})\dots(1-q^{c+n+m})}{(1-q^{n+1})(1-q^{d+n+1})(1-q^{d+n+2})\dots(1-q^{d+n+m+1})}$$
$$+\sum_{t=0}^{m}(-1)^{t+1} q^{\frac{t(t-1)}{2}}\frac{(1-zq^{c-d-1})\dots(1-zq^{c-d+m-1})}{(z-q^d)(z-q^{d+n+1})(q)_t(q)_{m-t}}$$

elde ederiz. O halde bu ifadeleri eşitlersek

$$0=\frac{q^{-d}(1-q^{c-1})\dots(1-q^{c+m-1})}{(1-q^{n+1})(1-q^d)(1-q^{d+1})\dots(1-q^{d+m})}$$
$$-\frac{q^{-d}(1-q^{n+c})\dots(1-q^{c+n+m})}{(1-q^{n+1})(1-q^{d+n+1})(1-q^{d+n+2})\dots(1-q^{d+n+m+1})}$$
$$+\sum_{t=0}^{m}(-1)^{t+1} q^{\binom{t}{2}}\frac{(1-zq^{c-d-1})\dots(1-zq^{c-d+m-1})}{(z-q^d)(z-q^{d+n+1})\,(q)_t\,(q)_{m-t}}$$

ve bazı düzenlemlerden sonra

$$\sum_{t=0}^{m}(-1)^t q^{\binom{t}{2}}\frac{(1-zq^{c-d-1})\dots(1-zq^{c-d+m-1})}{(z-q^d)(z-q^{d+n+1})\,(q)_t\,(q)_{m-t}}$$
$$=-\frac{q^{-d}}{1-q^{n+1}}\Bigg(\frac{(1-q^{n+c})\dots(1-q^{c+m+n})}{(1-q^{d+n+1})(1-q^{d+n+2})\dots(1-q^{d+m+n+1})}$$
$$-\frac{(1-q^{c-1})\dots(1-q^{c+m-1})}{(1-q^d)(1-q^{d+1})\dots(1-q^{d+m})}\Bigg)$$

sonucunu elde ederiz.

Teoremimizin hipotezine göre $c \in \{-m+1, \ldots, -1, 0, 1\}$ olduğundan son eşitlik

$$\sum_{t=0}^{m} (-1)^t q^{\binom{t}{2}} \frac{(1-zq^{c-d-1})\ldots(1-zq^{c-d+m-1})}{(z-q^d)(z-q^{d+n+1})(q)_t(q)_{m-t}}$$
$$= -\frac{q^{-d}(1-q^{n+c})\ldots(1-q^{c+m+n})}{(1-q^{n+1})(1-q^{d+n+1})(1-q^{d+n+2})\ldots(1-q^{d+m+n+1})}$$

şeklini alacaktır.

Hesaplamak istediğimiz toplamı en başta ihmal ettiğimiz sabit çarpanla çarptığımızda

$$\frac{1-q^{n+1}}{(1-q^{m+1})(1-q^{c-d-1})} \sum_{t=0}^{m} (-1)^t q^{\binom{t}{2}+1} \frac{(1-zq^{c-d-1})\ldots(1-zq^{c-d+m-1})}{(z-q^d)(z-q^{d+n+1})(q)_t(q)_{m-t}}$$
$$= -\frac{q^{-d}(1-q^{n+c})\ldots(1-q^{c+m+n})}{(1-q^{m+1})(1-q^{c-d-1})(1-q^{d+n+1})\ldots(1-q^{d+m+n+1})}$$
$$= -\frac{q^{-d}\left(q^{n+c};q\right)_{m+1}}{(1-q^{m+1})(1-q^{c-d-1})\left(q^{n+d+1};q\right)_{m+1}}$$
$$= \frac{q^{1-c}\left(q^{n+c};q\right)_{m+1}}{(1-q^{m+1})(1-q^{d-c+1})\left(q^{n+d+1};q\right)_{m+1}}$$

eşitliğini elde ederiz ve bu da ispatımızı tamamlar. □

Ayrıca $X_n = V_n$ durumunda ispat benzer şekilde yapılır.

Şimdi Teorem 4.1'in ilginç bir kaç sonucunu vereceğiz.

Eğer (4.1)'de $m = 2$, $d = 3$ ve $c = 0$, $\{X_n\}$; Lucas dizisi (yani $(p,r) = (1,1)$), $\{U_n\}$; Fibonacci dizisi (yani $(p,r) = (1,1)$) olarak alırsak

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{F_k F_{k+1}}{L_{k+3} L_{k+4} L_{k+5} L_{k+6}} = -\frac{F_n F_{n+1} F_{n+2}}{F_3 L_4 L_{n+4} L_{n+5} L_{n+6}}$$

sonucunu elde ederiz.

Eğer (4.1)'de $m=3$, $d=5$ ve $c=1$, $\{X_n\}$ ve $\{U_n\}$; Pell dizisi (yani $(p,r)=(2,1)$) olarak alırsak

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{P_{k+1}P_{k+2}P_{k+3}}{P_{k+5}P_{k+6}P_{k+7}P_{k+8}P_{k+9}}=\frac{P_{n+1}P_{n+2}P_{n+3}P_{n+4}}{P_4P_5P_{n+6}P_{n+7}P_{n+8}P_{n+9}}$$

eşitliğine ulaşırız.

Eğer (4.1)'de $m=4$, $d=4$ ve $c=-2$, $X_n(p,r)=U_n(2,3)$ (kısaca U_n ile gösterilecek) olarak alırsak

$$\sum_{k=0}^{n}(-3)^k\frac{U_{k-2}U_{k-1}U_kU_{k+1}}{U_{k+4}U_{k+5}U_{k+6}U_{k+7}U_{k+8}U_{k+9}}=-\frac{3^3U_{n-2}U_{n-1}U_nU_{n+1}U_{n+2}}{U_5U_7U_{n+5}U_{n+6}U_{n+7}U_{n+8}U_{n+9}}$$

sonucunu elde ederiz.

Son olarak eğer (4.1)'de $m=10$, $d=7$ ve $c=-6$, $X_n(p,r)=V_n(15,-3)$ (kısaca V_n ile gösterilecek) olarak alırsak

$$\sum_{k=0}^{n}3^k\frac{\prod_{t=0}^{9}U_{k+t-6}}{\prod_{t=0}^{11}V_{k+t+7}}=-\frac{(-3)^7\prod_{t=0}^{10}U_{n+t-6}}{U_{11}V_{14}\prod_{t=0}^{10}V_{n+t+8}}$$

sonucunu elde ederiz.

Bu örneklerin ardından şimdi Teorem 4.1'de verdiğimiz temel sonuçtan farklı olan iki sonucu vereceğiz.

Teorem 4.2. $\forall\ d>0$ *tam sayısı için*

$$\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{U_{k-d}}{U_{k+d}U_{k+d+1}U_{k+d+2}}=(-1)^{d+1}\frac{r^dU_{2n+2}}{U_2U_{n+d+1}U_{n+d+2}} \tag{4.5}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Öncelikle (1.1)'de verilen Binet formüllerinin q-versiyonunu kullanarak (4.5) eşitliğinin sol tarafının q-versiyonunu

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{U_{k-d}}{U_{k+d}U_{k+d+1}U_{k+d+2}}\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{\frac{\alpha^{k-d-1}(1-q^{k-d})}{(1-q)}}{\frac{\alpha^{k+d-1}(1-q^{k+d})}{(1-q)}\frac{\alpha^{k+d}(1-q^{k+d+1})}{(1-q)}\frac{\alpha^{k+d+1}(1-q^{k+d+2})}{(1-q)}}\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{(1-q)^2\alpha^{k-d-1}(1-q^{k-d})}{\alpha^{3k+3d}(1-q^{k+d})(1-q^{k+d+1})(1-q^{k+d+2})}\\
&=\alpha^{-4d-1}(1-q)^2\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{\alpha^{-2k}(1-q^{k-d})}{(1-q^{k+d})(1-q^{k+d+1})(1-q^{k+d+2})}
\end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz.

Burada $\alpha=\mathbf{i}\sqrt{r}q^{-\frac{1}{2}}$ olduğundan

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{U_{k-d}}{U_{k+d}U_{k+d+1}U_{k+d+2}}\\
&\qquad=\alpha^{-4d-1}(1-q)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{q^k(1-q^{k-d})}{(1-q^{k+d})(1-q^{k+d+1})(1-q^{k+d+2})}
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Benzer şekilde (4.5)'in sağ tarafının q-versiyonu ise

$$(-1)^{d+1}\frac{r^dU_{2n+2}}{U_2U_{n+d+1}U_{n+d+2}}=\alpha^{-2d-1}(1-q)^2\frac{(-1)^{d+1}(1-q^{2n+2})}{(1-q^2)(1-q^{d+n+1})(1-q^{d+n+2})}$$

şeklinde olacakır.

Gerekli sadeleştirmelerin ardından iddiamızın q-versiyonu

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{q^k(1-q^{k-d})}{(1-q^{k+d})(1-q^{k+d+1})(1-q^{k+d+2})}=-\frac{q^{-d}(1-q^{2n+2})}{(1-q^2)(1-q^{d+n+1})(1-q^{d+n+2})}$$

şeklindedir.

Şimdi

$$S_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{z(1-zq^{-d})}{(1-zq^d)(1-zq^{d+1})(1-zq^{d+2})}$$

olarak tanımlayalım. Burada S_n toplamının toplanan terimini $T(z)$ ile gösterelim. Yani

$$T(z) = \frac{z(1-zq^{-d})}{(1-zq^d)(1-zq^{d+1})(1-zq^{d+2})}.$$

Basit kesirlere ayırma yöntemi kullanarak $T(z)$ için

$$\begin{aligned}
&\frac{z(1-zq^{-d})}{(1-zq^d)(1-zq^{d+1})(1-zq^{d+2})} \\
&= \frac{1}{q^{3d+1}(1-q)^2(1+q)}\left(-\frac{q(1-q^{2d})}{1-zq^d} + \frac{(1+q)(1-q^{2d+1})}{1-zq^{d+1}} - \frac{1-q^{2d+2}}{1-zq^{d+2}}\right) \\
&= \frac{1}{q^{3d+1}(1-q)^2(1+q)}\left[q(1-q^{2d})\left(\frac{1}{1-zq^{d+2}} - \frac{1}{1-zq^d}\right)\right. \\
&\left. -(1+q)(1-q^{2d+1})\left(\frac{1}{1-zq^{d+2}} - \frac{1}{1-zq^{d+1}}\right)\right]
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. $T(z)$ toplanan terimini $k=0$ dan n'ye kadar toplamakla

$$\begin{aligned}
S_n = &\frac{1}{q^{3d+1}(1-q)^2(1+q)}\left[q(1-q^{2d})\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1-zq^{d+2}} - \frac{1}{1-zq^d}\right)\right. \\
&\left. -(1+q)(1-q^{2d+1})\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1-zq^{d+2}} - \frac{1}{1-zq^{d+1}}\right)\right]
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde ederiz. (4.2) eşitliğinde sırasıyla $m=2$, $t=0$ ve $m=2$, $t=1$ alarak (4.6)'da verilen S_n'i aşağıdaki şekilde yeniden yazalım:

$$\begin{aligned}
S_n = &\frac{1}{q^{3d+1}(1-q)^2(1+q)}\left[q(1-q^{2d})\sum_{k=0}^{1}\left(\frac{1}{1-q^{k+d+1+n}} - \frac{1}{1-q^{k+d}}\right)\right. \\
&\left. -(1+q)(1-q^{2d+1})\left(\frac{1}{1-q^{d+n+2}} - \frac{1}{1-q^{d+1}}\right)\right] \\
&= -\frac{\left(1+q^{n+1}\right)\left(1-q^{d+1}\right)\left(1-q^{n+1}\right)}{q^d\left(1-q^{d+1}\right)\left(1-q^{d+n+1}\right)\left(1-q^{d+n+2}\right)(1-q)(1+q)} \\
&= -\frac{q^{-d}(1-q^{2n+2})}{(1-q^2)(1-q^{d+n+1})(1-q^{d+n+2})}.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanır. □

Örneğin (4.5)'te $\{U_n\}$; Fibonacci dizisi ve $d=3$ alırsak

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{F_{k-3}}{F_{k+3}F_{k+4}F_{k+5}}=\frac{F_{2n+2}}{F_{n+4}F_{n+5}}$$

olacaktır.

Eğer (4.5)'te $\{U_n(5,2)\}$ (kısaca $\{U_n\}$ ile gösterilecek) dizisi için $d=4$ alırsak

$$\sum_{k=0}^{n}(-2)^k\frac{U_{k-4}}{U_{k+4}U_{k+5}U_{k+6}}=-\frac{2^4U_{2n+2}}{U_2U_{n+5}U_{n+6}}$$

Şimdi son sonucumuzu verelim.

Teorem 4.3. $\forall\ d>0$ *tam sayısı için*

$$\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{V_{k+d+1}}{U_{k+d}U_{k+d+1}U_{k+d+2}}=\frac{U_{n+1}U_{n+2(d+1)}}{U_1U_dU_{d+1}U_{n+d+1}U_{n+d+2}} \tag{4.7}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Öncelikle (4.7)'nin sol tarafını (1.1) ve (1.2)'yi kullanarak q-versiyonuna çevirelim:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{V_{k+d+1}}{U_{k+d}U_{k+d+1}U_{k+d+2}}\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{\alpha^{k+d+1}(1+q^{k+d+1})}{\frac{\alpha^{k+d-1}(1-q^{k+d})}{(1-q)}\frac{\alpha^{k+d}(1-q^{k+d+1})}{(1-q)}\frac{\alpha^{k+d+1}(1-q^{k+d+2})}{(1-q)}}\\
&=\alpha^{-2d+1}(1-q)^3\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{\alpha^{-2k}(1+q^{k+d+1})}{(1-q^{k+d})(1-q^{k+d+1})(1-q^{k+d+2})}.
\end{aligned}$$

Burada $\alpha=\mathbf{i}\sqrt{r}q^{-\frac{1}{2}}$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{n}(-r)^k\frac{V_{k+d+1}}{U_{k+d}U_{k+d+1}U_{k+d+2}}=\alpha^{-2d+1}(1-q)^3\sum_{k=0}^{n}\frac{q^k(1+q^{k+d+1})}{(1-q^{k+d})(1-q^{k+d+1})(1-q^{k+d+2})}$$

eşitliği sağlanır.

Benzer şekilde (4.7)'nin sağ tarafını q-versiyonuna çevirelim:

$$\frac{U_{n+1}U_{n+2(d+1)}}{U_1U_dU_{d+1}U_{n+d+1}U_{n+d+2}} = \frac{\alpha^{-2d+1}(1-q)^2(1-q^{n+1})(1-q^{n+2(d+1)})}{(1-q^d)(1-q^{d+1})(1-q^{n+d+1})(1-q^{n+d+2})}.$$

Gerekli sadeleştirmelerden sonra iddiamızın q-versiyonu

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}\frac{q^k(1+q^{k+d+1})}{(1-q^{k+d})(1-q^{k+d+1})(1-q^{k+d+2})}\\ &= \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2(d+1)})}{(1-q)\left(1-q^d\right)\left(1-q^{d+1}\right)(1-q^{n+d+1})(1-q^{n+d+2})}\end{aligned}$$

şeklindedir.

Şimdi

$$S_n := \sum_{k=0}^{n}\frac{z(1+zq^{d+1})}{(1-zq^d)(1-zq^{d+1})(1-zq^{d+2})}$$

olarak tanımlayalım. S_n toplamının toplanan terimini $T(z)$ olarak gösterelim. Yani

$$T(z) = \frac{z(1+zq^{d+1})}{(1-zq^d)(1-zq^{d+1})(1-zq^{d+2})}.$$

Basit kesirlere ayırma yöntemi kullanarak $T(z)$ için

$$\begin{aligned}&\frac{z(1+zq^{d+1})}{(1-zq^d)(1-zq^{d+1})(1-zq^{d+2})}\\ &= \frac{1}{q^d(1+q)(1-q)^2}\left(\frac{1+q}{1-zq^d} - \frac{2(1+q)}{1-zq^{d+1}} + \frac{1+q}{1-zq^{d+2}}\right)\\ &= \frac{-1}{q^d(1+q)(1-q)^2}\left[(1+q)\left(\frac{1}{1-zq^{d+2}} - \frac{1}{1-zq^d}\right)\right.\\ &\left.-2(1+q)\left(\frac{1}{1-zq^{d+2}} - \frac{1}{1-zq^{d+1}}\right)\right]\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. $T(z)$ toplanan terimini $k=0$ dan n'ye kadar toplamakla

$$S_n = \frac{-1}{q^d(1+q)(1-q)^2}\left[(1+q)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1-zq^{d+2}}-\frac{1}{1-zq^d}\right)\right.$$
$$\left.-2(1+q)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{1-zq^{d+2}}-\frac{1}{1-zq^{d+1}}\right)\right]$$

elde ederiz. (4.2) eşitliğinde sırasıyla $m=2$, $t=0$ ve $m=2$, $t=1$ alarak son eşitlikte verilen S_n'yi aşağıdaki şekilde yeniden yazalım:

$$S_n = \frac{-1}{q^d(1+q)(1-q)^2}\left[(1+q)\sum_{k=0}^{1}\left(\frac{1}{1-q^{k+d+1+n}}-\frac{1}{1-q^{k+d}}\right)\right.$$
$$\left.-2(1+q)\left(\frac{1}{1-q^{d+n+2}}-\frac{1}{1-q^{d+1}}\right)\right]$$
$$= \frac{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2d+2})}{(1-q)(1-q^d)(1-q^{d+1})(1-q^{n+d+1})(1-q^{n+d+2})}.$$

Böylece ispatımızı tamamlamış oluruz. □

Örneğin (4.7)'de $\{U_n\}$; Fibonacci dizisi, $\{V_n\}$; Lucas dizisi ve $d=5$ olarak alırsak

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{L_{k+6}}{F_{k+5}F_{k+6}F_{k+7}} = \frac{F_{n+1}F_{n+12}}{F_5F_6F_{n+6}F_{n+7}}$$

olacaktır.

Eğer (4.7)'de $\{U_n(6,5)\}$ (kısaca $\{U_n\}$ ile gösterilecek) ve $\{V_n(6,5)\}$ (kısaca $\{V_n\}$ ile gösterilecek) dizileri için $d=12$ olarak alırsak

$$\sum_{k=0}^{n}(-5)^k\frac{V_{k+13}}{U_{k+12}U_{k+13}U_{k+14}} = \frac{U_{n+1}U_{n+26}}{U_1U_{12}U_{13}U_{n+13}U_{n+14}}$$

sonucunu elde ederiz.

4.2 İkinci Basamaktan Keyfi Katsayılı Diziler İçin Genel Sonuçlar

Önceki bölümde Teorem 4.1-4.3'ü ispatlarken iddia edilen sonuçların q-versiyonlarını bulmuştuk. Bu bölümde ise bulmuş olduğumuz sonuçların q-versiyonlarında her s tam sayısı için $q = \beta^s/\alpha^s$ alarak Teorem 4.1-4.3'de verilen sonuçların genel durumlarını vereceğiz. Bu genelleştirmelerin ispatları bir önceki bölümde kullanılan ispat teknikleri gözönüne alınarak elde edilir.

Şimdi ilk genel durumumuzu verelim.

Teorem 4.4. $\forall\, n,\ m \geq 0$, $d \geq 1$, $c \in \{-m+1,\ldots,-1,0,1\}$ *tam sayılar ve* X_n, U_n *ya da* V_n *olmak üzere*

$$\sum_{k=0}^{n}(-r)^{sk}\frac{\prod_{t=0}^{m-1}U_{s(k+c+t)}}{\prod_{t=0}^{m+1}X_{s(k+d+t)}} = (-1)^{s(c+1)}\frac{r^{s(1-c)}\prod_{t=0}^{m}U_{s(n+t+c)}}{U_{s(m+1)}X_{s(d-c+1)}\prod_{t=1}^{m+1}X_{s(n+t+d)}} \tag{4.8}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.4'ün ifadesinde geçen s parametresi işaret fonksiyonunun kuvvetinde bulunduğu için eğer s çift ise bu toplam ailesi alterne olmayan bir toplam ailesine; eğer s tek ise alterne bir toplam ailesine dönüşecektir.

Örneğin (4.8)'de $m = 3$, $s = 2$, $d = 4$, $c = 1$, $\{U_n\}$; Pell dizisi, $\{X_n\}$; Pell-Lucas dizisi alırsak

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{P_{2k+2}P_{2k+4}P_{2k+6}}{Q_{2k+8}Q_{2k+10}Q_{2k+12}Q_{2k+14}Q_{2k+16}} = \frac{P_{2n+2}P_{2n+4}P_{2n+6}P_{2n+8}}{P_8Q_8Q_{2n+10}Q_{2n+12}Q_{2n+14}Q_{2n+16}}$$

eşitliğini elde ederiz.

$F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$ olduğunu göz önüne alarak (4.8)'de $m = 4$, $s = -1$, $d = 6$, $c = 0$,

$\{X_n\}$ ve $\{U_n\}$ dizilerini Fibonacci dizisi alırsak

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{F_{-k}F_{-k-1}F_{-k-2}F_{-k-3}}{F_{-k-6}F_{-k-7}F_{-k-8}F_{-k-9}F_{-k-10}F_{-k-11}}\\
&=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{F_kF_{k+1}F_{k+2}F_{k+3}}{F_{k+6}F_{k+7}F_{k+8}F_{k+9}F_{k+10}F_{k+11}}\\
&=-\frac{F_nF_{n+1}F_{n+2}F_{n+3}F_{n+4}}{F_5F_7F_{n+7}F_{n+8}F_{n+9}F_{n+10}F_{n+11}}
\end{aligned}$$

sonucunu elde ederiz.

Eğer (4.8)'de $\{U_n(2,3)\}$ (kısaca $\{U_n\}$ ile gösterilecek) ve $\{V_n(2,3)\}$ (kısaca $\{V_n\}$ ile gösterilecek) dizileri için $X_n = V_n$, $m = 5$, $s = 3$, $d = 2$ ve $c = -3$ alırsak

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(-3)^k\frac{U_{3k-9}U_{3k-6}U_{3k-3}U_{3k}U_{3k+3}}{V_{3k+6}V_{3k+9}V_{3k+12}V_{3k+15}V_{3k+18}V_{3k+21}V_{3k+24}}\\
&=\frac{3^{12}U_{3n-9}U_{3n-6}U_{3n-3}U_{3n}U_{3n+3}U_{3n+6}}{U_{18}V_{18}V_{3n+9}V_{3n+12}V_{3n+15}V_{3n+18}V_{3n+21}V_{3n+24}}
\end{aligned}$$

sonucunu buluruz.

Teorem 4.5. $\forall\ d > 0$ *tam sayısı için*

$$\sum_{k=0}^{n}(-r)^{sk}\frac{U_{s(k-d)}}{U_{s(k+d)}U_{s(k+d+1)}U_{s(k+d+2)}} = (-1)^{sd+1}\frac{r^{sd}U_{s(2n+2)}}{U_{2s}U_{s(n+d+1)}U_{s(n+d+2)}} \tag{4.9}$$

eşitliği sağlanır.

$\{U_n(5,2)\}$ (kısaca $\{U_n\}$ ile gösterilecek) dizisini gözönüne alarak (4.9)'da $s = 2$ ve $d = 8$ alırsak

$$\sum_{k=0}^{n}(-2)^{2k}\frac{U_{2k-16}}{U_{2k+16}U_{2k+18}U_{2k+20}} = -\frac{2^{16}U_{4n+4}}{U_4U_{2n+18}U_{2n+20}}$$

elde ederiz.

Teorem 4.6. $\forall\, d > 0$ *tam sayısı için*

$$\sum_{k=0}^{n} (-r)^{sk} \frac{V_{s(k+d+1)}}{U_{s(k+d)}U_{s(k+d+1)}U_{s(k+d+2)}} = \frac{U_{s(n+1)}U_{s(n+2d+2)}}{U_sU_{sd}U_{s(d+1)}U_{s(n+d+1)}U_{s(n+d+2)}} \qquad (4.10)$$

eşitliğini elde ederiz.

$P_{-n} = (-1)^{n+1}P_n$ ve $Q_{-n} = (-1)^nQ_n$ olduğunu gözönüne alarak (4.10)'da $U_n = P_n$, $V_n = Q_n$, $s = -3$ ve $d = 4$ alırsak

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{Q_{-3k-15}}{P_{-3k-12}P_{-3k-15}P_{-3k-18}} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{Q_{3k+15}}{P_{3k+12}P_{3k+15}P_{3k+18}} \\ &= \frac{P_{3n+3}P_{3n+30}}{P_3P_{12}P_{15}P_{3n+15}P_{3n+18}}\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız.

Başka bir örnek olarak (4.10)'da $\{U_n(15,-16)\}$ (kısaca $\{U_n\}$ ile gösterilecek) ve $\{V_n(15,-16)\}$ (kısaca $\{V_n\}$ ile gösterilecek) dizileri için $s = 4$ ve $d = 7$ alırsak

$$\sum_{k=0}^{n} 16^{4k} \frac{V_{4k+32}}{U_{4k+28}U_{4k+32}U_{4k+36}} = \frac{U_{4n+4}U_{4n+48}}{U_4U_{28}U_{32}U_{4n+32}U_{4n+36}}$$

elde ederiz.

KAYNAKLAR

[1] **E. Kılıç and H. Prodinger**, Closed form evaluation of Melham's reciprocal sums, Miskolc Mathematical Notes 18 (2017), 251-264.

[2] **I. J. Good**, A reciprocal series of Fibonacci numbers, Fibonacci Quart. 12 (1974), 346.

[3] **V. E. Hoggatt, Jr. and M. Bicknell**, A primer for the Fibonacci numbers, Part XV: Variations on Summing a Series of Reciprocals of Fibonacci Numbers, Fibonacci Quart. 14 (1976), 272-276.

[4] **V. E. Hoggatt, Jr. and M. Bicknell**, A reciprocal series of Fibonacci numbers with subscript $2^n k$, Fibonacci Quart. 14 (1976), 453-455.

[5] **R. P. Backstrom**, On reciprocal series related to Fibonacci numbers with subscripts in arithmetic progression, Fibonacci Quart. 19 (1981), 14-21.

[6] **S. B. Popov**, Summation of reciprocal series of numerical functions of second order, Fibonacci Quart. 24 (1986), 17-21.

[7] **B. A. Brousseau**, Summation of infinite Fibonacci series, Fibonacci Quart. 7 (1969), 143-168.

[8] **S. Rabinowitz**, Algorithmic summation of reciprocals of products of Fibonacci numbers, Fibonacci Quart. 37 (1999), 122-127.

[9] **S. Rabinowitz**, Algorithmic simplification of reciprocal sums, Applications of Fibonacci Numbers (1999), 277-292.

[10] **R. S. Melham and A. G. Shannon**, On reciprocal sums of Chebyshev related sequences, Fibonacci Quart. 33 (1995), 194-202.

[11] **R. André-Jeannin**, Summation of reciprocals in certain second-order recurring sequences, Fibonacci Quart. 35 (1997), 68-74.

[12] **G. Xi**, Reciprocal sums of quadruple product of generalized binary sequences with indices, Utilitas Mathematica 97 (2015), 321-328.

[13] **H. Ohtsuka and S. Nakamura**, On the sum of reciprocal Fibonacci numbers, Fibonacci Quart. 46/47 (2008/2009), 153-159.

[14] **Z. Wenpeng and W. Tingting**, The infinite sum of reciprocal Pell numbers, Appl. Math. Comput. 218(10) (2012), 6164-6167.

[15] **Z. Wenpeng and W. Tingting**, The infinite sum of reciprocal of the square of the Pell numbers, Journal of Weinan Teacher's University 26 (2011), 39-42.

[16] **S. H. Holliday and T. Komatsu**, On the sum of reciprocal generalized Fibonacci numbers, Integers 11(4) (2011), 441-455.

[17] **A. Y. Z. Wang and F. Zhang**, The reciprocal sums of even and odd terms in the Fibonacci sequence, Journal of Inequalities and Applications 2015, Article ID 376 (2015).

[18] **A. Y. Z. Wang and F. Zhang**, The reciprocal sums of the Fibonacci 3-subsequences, Adv. Difference Equ. 2016, Article ID 27 (2016).

[19] **R. Liu and A. Y. Z. Wang**, Sums of products of two reciprocal Fibonacci numbers, Adv. Difference Equ. 2016:136.

[20] **T. Komatsu**, On the nearest integer of the sum of reciprocal Fibonacci numbers, Aportaciones Matematicas Investigacion 20 (2011) 171-184.

[21] **T. Komatsu**, On the sum of reciprocal Tribonacci numbers, Ars Combin. 98 (2011), 447-459.

[22] **T. Komatsu and V. Laohakosol**, On the sum of reciprocals of numbers satisfying a recurrence relation of order s, J. Integer Seq. 13(5) (2010), Article 10.5.8, 1-9.

[23] **E. Kılıç and T. Arıkan**, More on the infinite sum of reciprocal usual Fibonacci, Pell and higher order recurrences, Appl. Math. Comput. 219 (2013), 7783-7788.

[24] **A. Y. Z. Wang and T. Yuan**, Alternating sums of the reciprocal Fibonacci numbers, J. Integer Seq. 20 (2017), Article 17.1.4.

[25] **R. S. Melham**, On certain families of finite reciprocal sums that involve generalized Fibonacci numbers, Fibonacci Quart. 53 (2015), 323-334.

[26] **R. S. Melham**, Finite reciprocal sums involving summands that are balanced products of generalized Fibonacci numbers, J. Integer Seq. 17 (2014), Article 14.6.5.

[27] **K. Adegoke**, Generalizations of the reciprocal Fibonacci-Lucas sums of Brousseau, J. Integer Seq. 21(2) (2018), Article 18.1.6.

[28] **R. S. Melham**, Summation of reciprocal which involve products of terms from generalized Fibonacci sequences-Part II, Fibonacci Quart. 39 (2001), 264-267.

[29] **R. Frontczak**, Closed-form evaluations of Fibonacci–Lucas reciprocal sums with three factors, Notes on Number Theory and Disc. Math. 23(2) (2017), 104-116.

[30] **R. S. Melham**, More on finite sums that involve reciprocals of products of generalized Fibonacci numbers, Integers 14 (2014), A4.

EKLER

TÜRKÇE-İNGİLİZCE MATEMATİK TERİMLERİ SÖZLÜĞÜ

Türkçe terim	**İngilizce Terim**
Basamak	Order
Basit kesirlerine ayırma	Partial fraction decomposition or heaviside
Çarpım	Product
Dizi	Sequence
Formül	Formula
Homojen	Homogeneous
İndirgeme	Recurrence
Karakteristik	Characteristic
Kısmi	Partial
Lineer	Linear
Seri	Series
Sonlu	Finite
Sonsuz	Infinite
Taban değer fonksiyonu	Floor function
Teleskop yaratma	Creative Telescoping
Terim	Term
Ters toplam	Reciprocal sum
Toplam	Sum
Toplanan terim	Summand term

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad	: Didem ERSANLI
Uyruğu	: T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri	: 14.04.1994, Ankara
E-posta	: didemersanli@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2016, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2019, TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Cebir ve Sayılar Teorisi

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLER:

Yıl	**Yer**	**Görev**
2017-2019	TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi	Tam Burslu Yüksek Lisans Öğrencisi

YABANCI DİL: İngilizce

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- **Ersanlı, D.,** Kılıç, E., 2019. Calculation of linear recurrences series of some reciprocal sums, 8th International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2019), July 22-25, Brussels, Belgium.
- **Ersanlı, D.,** Kılıç, E., 2019. New reciprocal sums involving finite products of second order recursions, Miskolc Mathematical Notes'da yayına kabul edildi.