T.C.

BATMAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

M-KATLI SİMETRİK Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI İÇİN BAŞLANGIÇ KATSAYI SINIRLARI

Naci TAŞAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2019

BATMAN

TEZ KABUL VE ONAYI

Naci TAŞAR tarafından hazırlanan "M-Katlı Simetrik Bi-Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları İçin Başlangıç Katsayı Sınırları" adlı tez çalışması 28/01/2019 tarihinde aşağıda adı geçen jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Dr. Öğr. Üyesi Arzu AKGÜL

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Fethiye Müge SAKAR

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Bahattin İŞÇAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Naci TAŞAR

28.01.2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

M-KATLI SİMETRİK Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI İÇİN BAŞLANGIÇ KATSAYI SINIRLARI

Naci TAŞAR

Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fethiye Müge SAKAR

2019 , 51 Sayfa

Jüri
Dr. Öğr. Üyesi Arzu AKGÜL
Dr. Öğr. Üyesi Fethiye Müge SAKAR
Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER

Bu çalışmada birim disk içinde tanımlı analitik ve m-katlı simetrik, bi-ünivalent fonksiyonlardan oluşan iki yeni alt sınıf ele alınmıştır. Ayrıca ele alınan bu sınıflar için kesin olmayan $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ başlangıç katsayı sınırları elde edilmiştir. En son kısmında ise bu sonuçlar ile yakından ilişkili ve daha önce çalışılmış olan bazı sonuçlara yer verilmiştir. Bu sonuçlardan da anlayabiliriz ki bulduğumuz tahminler daha önce var olan bazı katsayı tahminlerinin bir genellemesidir.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Ünivalent foksiyon, Bi-ünivalent fonksiyon, Katsayı Sınırları.

ABSTRACT

MS THESIS

INITIAL COEFFICIENT BOUNDS ON SOME SUBCLASSES OF M-FOLD SYMMETRIC BI-UNIVALENT FUNCTIONS

Naci TAŞAR

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF BATMAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Fethiye Müge SAKAR

2019, 51 Pages

Jury
Asst. Prof. Dr. Arzu AKGÜL
Asst. Prof. Dr. Fethiye Müge SAKAR
Asst. Prof. Dr. Meral SÜER

In this work, we consider two new subclasses of function class consisting of analytic and m-fold symmetric bi-univalent functions in the open unit disc U. Furthermore, for functions in each of the subclasses introduced in the present investigation, we obtain non-sharp bounds on the initial coefficients $|a_{m+1}|$ and $|a_{2m+1}|$. Lastly, several closely-related earlier known results are indicated in the form of corollaries. This shows that, in certain cases, our estimates improve some of those existing coefficient bounds.

Keywords: Analytic function, Univalent function, Bi-univalent function, Coefficient Bounds.

ÖNSÖZ

Batman Üniversitesinde yapmış olduğum Yüksek Lisans tez çalışmasında, bilgilerinden faydalandığım ve tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabrı benden esirgemeyen, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim ve yanında çalışmaktan onur duyduğum değerli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Fethiye Müge SAKAR'a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Tez dönemi boyunca çocuklarımızla ilgi ve uğraşları eksik etmeyerek bana çalışma fırsatı sağlayan eşime ve manevi desteğini eksik etmeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Naci TAŞAR
BATMAN-2019

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$: $\mathbb{N}=\{1,2,...\}$ Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{N}_0$: $\mathbb{N}\cup\{0\}$

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$\mathbb{C}$: Kompleks düzlem

U : $\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, açık birim disk

U_r : $\{z\in\mathbb{C}:|z|\leq r<1\}$, açık birim disk

$K(z)$: $\dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonksiyonu

$f\prec g$: f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordinasyonu

A : Normalize edilmiş analitik fonksiyonlar sınıfı

S : Ünivalent fonksiyonlar sınıfı

P : Caratheodory fonksiyonlarının sınıfı

S^* : Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

K : Konveks fonksiyonlar sınıfı

$S^*(\alpha)$: a mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$K(a)$: a mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı

Σ : Bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfı

$\operatorname{Re} f(z)$: $f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı

$\operatorname{Im} f(z)$: $f(z)$ fonksiyonunun imajiner kısmı

$\arg f(z)$: $f(z)$ fonksiyonunun argümanı

Σ_m : Birim disk içinde tanımlı m-katlı bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı

Ω : Schwarz fonksiyonlarının sınıfı

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisi analitik fonksiyonların geometrik özellikleri ile uğraşan kompleks analizin önemli bir dalıdır. Fonksiyonlar teorisinin başlangıcı 18. yüzyılda, L. Euler'e dayanmaktadır. Modern fonksiyonlar teorisi 19. yüzyılda gelişme göstermeye başlamıştır. B. Riemann, 1851 yılında $z-$ düzleminin basit bağlantılı bir $D_1 \subset \mathbb{C}\left(D_1 \neq \mathbb{C}\right)$ bölgesini, $w-$ düzleminin basit bağlantılı bir D_2 bölgesi üzerine resmeden analitik bir f fonksiyonunun var olduğunu göstererek geometrik fonksiyonlar teorisinin oluşmasına sebep olmuştur. Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından biri ünivalent fonksiyonlar teorisidir. Bununla ilgili ilk çalışma Koebe'nin 1907 yılında normalize edilmiş ünivalent bir fonksiyonun kendisinin ve birinci türevinin modülleri üzerindeki katsayı sınırlarını ispat çalışmasıdır. Daha sonra Bieberbach'ın bu fonksiyonların ikinci katsayıları için 1916 yılında elde ettiği katsayı kestirimi ve bu kestirimin sonuçları da ünivalent fonksiyonlar teorisinin önemini ortaya koymuştur. Böylece geometrik fonksiyonlar teorisi pek çok matematikçinin ilgisini çekmeye başlamıştır. Ayrıca ünivalent fonksiyonlar ve alt sınıfları üzerine birçok çalışma yapılmıştır.

Bieberbach tahmininin, Branges tarafından 1984 yılında ispatlanmasına kadar problemin çözümü ile ilgilenen matematikçiler normalize edilmiş analitik ve ünivalent fonksiyonlar sınıfının bazı alt sınıflarını tanımlayarak bu alt sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili değişik bağıntılar elde etmişlerdir. Branges tarafından yapılan çalışmada katsayı probleminin çözülmüş olması, bu konuda çalışılacak bir şey kalmadığı anlamına gelmemiş, aksine ünivalent fonksiyonlar teorisini daha da zenginleştirerek bu alanda çalışan matematikçilerin ünivalent fonksiyonların değişik alt sınıfları üzerindeki problemlere yoğunlaşmalarına neden olmuştur.

Hem kendi hem de tersi ünivalent olan fonksiyonlara bi-ünivalent foksiyonlar denir. Bi-ünivalent fonksiyonlarla ilgili yapılan ilk çalışma ise 1967 yılında Lewin tarafından yapılmıştır. Lewin, bi-ünivalent fonksiyonların sınıfını Σ ile göstererek bu sınıfa ait fonksiyonların ikinci katsayıları için $|a_2| < 1.51$ olduğunu göstermiştir. Brannan ve Clunie, 1967 yılında her $f \in \Sigma$ için $|a_2| \leq \sqrt{2}$ olduğunu açık bir problem olarak ortaya atmışlardır. Netanyahu, 1969 yılında her $f \in \Sigma$ için $\max|a_2| = \dfrac{4}{3}$ olduğunu göstermiştir. Daha sonra $|a_2| < 1.485$ olduğu 1985 yılında Tan tarafından gösterilmiştir. Kedzierawski ise, 1985 yılında Brannan ve Clunie tarafından elde edilmiş olan $|a_2| \leq \sqrt{2}$ tahmininin ispatını bi-yıldızıl fonksiyonlar için yapmıştır. Brannan ve Taha, 1985 ve 1986 yıllarında $a-$mertebeden bi-konveks ve bi-yıldızıl fonksiyonların a_2 ve a_3 katsayılarının modüllerinin sınırlarıyla ilgili tahminler elde etmişlerdir. Son yıllarda pek çok matematikçi, bi-ünivalent fonksiyonların çeşitli alt sınıfları için katsayı tahminlerinde bulunmuşlardır.

Çalışmamızda gerekli olacak bazı temel tanım ve teoremler tezin kuramsal temeller bölümünde açıklanmıştır. Materyal ve yöntem bölümünde ise ünivalent ve bi-ünivalent fonksiyonlar tanıtılarak normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar sınıfına ve bazı alt sınıflarına ait önemli özellikler verilmiştir. Son olarak m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfı ve bu sınıfa ait sonuçlar ile yakından ilişkili, daha önce çalışılmış bazı sonuçlara yer verilmiştir.

Araştırma sonuçları ve tartışma olarak verilen bölümde, birim disk içinde tanımlı analitik ve m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonlardan oluşan $S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\alpha)$ ve $S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\beta)$ olmak üzere iki yeni alt sınıf ele alınmıştır. Ayrıca ele alınan bu sınıflar için kesin olmayan $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ başlangıç katsayı sınırları elde edilmiştir.

Sonuçlar ve öneriler olarak verilen son bölümde ise, bir önceki bölümde elde ettiğimiz katsayı sınırlarının özel durumları olarak bazı sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlardan da anlaşılacağı gibi bulduğumuz tahminler daha önce var olan bazı katsayı tahminlerinin bir genellemesi niteliğindedir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, tezde kullanılan temel tanımlara yer verilecektir. Ayrıca tez boyunca ihtiyaç duyulan önemli teoremler ve bu teoremlerin sonuçları ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 2.1 (Komşuluk) $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. $D(z_0;\varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$,($\varepsilon > 0$) kümesine z_0 noktasının ε komşuluğu veya ε *yarıçaplı açık disk* denir.

Tanım 2.2 (Disk) $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$D(z_0;r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ kümesine r yarıçaplı z_0 merkezine sahip *açık disk,*

$\overline{D}(z_0;r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\}$ kümesine r yarıçaplı z_0 merkezine sahip *kapalı disk,*

$\partial D(z_0;r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ kümesine de r yarıçaplı z_0 merkezine sahip *çember* denir.

Tanım 2.3 (İç Nokta ve Kapanış Noktası) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme ve $z_0 \in \mathrm{A}$ olsun. z_0 noktasının bir r komşuluğu tamamen A kümesinde kalıyorsa, başka bir deyişle $D(z_0;r) \subset \mathrm{A}$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı var ise z_0 noktasına A kümesinin bir *iç noktası* denir. Eğer her $D(z_0;r) \subset \mathrm{A}$ diski, A kümesinin bir elamanını ihtiva ediyorsa z_0 noktasına A kümesinin bir *kapanış noktasıdır* denir.

Tanım 2.4 (Açık ve Kapalı Küme) Her noktası iç nokta olan kümeye *açık küme,* tümleyeni açık olan kümeye ise *kapalı küme* denir. $r > 0$ olmak üzere $D(z_0,r)$ diski bir açık küme ve $\overline{D(z_0,r)}$ kümesi de kapalı kümedir.

Tanım 2.5 (Yığılma Noktası) $M \subset \mathbb{C}$ ve $M \neq \varnothing$ olsun. M kümesinin z_0 noktasının her $D(z_0,\varepsilon)$ komşuluğunda, z_0 noktasından farklı bir z noktası varsa bu z_0 noktasına M kümesinin bir *yığılma noktası* denir.

Tanım 2.6 (Bağlantılı ve Bağlantısız küme) $M \subset \mathbb{C}$ alt kümesi verilsin. M kümesi boş kümeden farklı, ayrık iki açık kümenin birleşimi şeklinde yazılamıyorsa M kümesine *bağlantılıdır* denir. Bağlantılı kümenin diğer bir tanımı da aşağıdaki şekilde verilebilir.

$M \subseteq U \cup V$,$M \cap U \neq \varnothing$, $M \cap V \neq \varnothing$ ve $M \cap U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde boştan farklı U ve V açık kümeleri bulunamıyor ise, M kümesine *bağlantılı küme* denir. Örneğin $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ve $M = \{z : |z| < 1\}$ kümeleri birer bağlantılı kümedir.

Bağlantılı olmayan kümeye *bağlantısız küme* denir. B = $\{\, z : \operatorname{Im} z = 0$ ve $\operatorname{Re} z$ rasyonel sayı $\}$ kümesi bağlantısız kümeye örnek olarak verilebilir.

Tanım 2.7 (Bölge) Kompleks düzlemde boş kümeden farklı açık ve bağlantılı olan kümelere *bölge* denir. $\mathbb{C}$ hem açık hem de bağlantılı olduğu için bir bölgedir.

Tanım 2.8 (Eğri) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ de bir eğri denir. Burada $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitiş noktaları adı verilir. Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan eğriye *kapalı eğri* denir. Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere *basit eğri*, hem basit hem de kapalı eğrilere de *basit kapalı eğri* veya *Jordan eğrisi* denir. Örneğin $\alpha(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ ile verilen eğri Jordan eğrisidir.

Tanım 2.9 (Basit Bağlantılı Bölge) $\mathbb{C}$ de bir A bölgesini alalım. Eğer A bölgesindeki her basit kapalı eğrinin içi tamamen A da kalıyor ise A bölgesine *basit bağlantılı bölge* denir.

Tanım 2.10 (Kompleks Fonksiyon) $A \subset \mathbb{C}$ boştan farklı bir küme olmak üzere, A kümesindeki her bir z elemanına w kompleks sayısını karşılık getiren kurala A dan $\mathbb{C}$ ye bir *kompleks fonksiyon* denir ve $f : A \to \mathbb{C}$ ile gösterilir. Bir f kompleks fonksiyonu $w = f(z)$ ile ifade edilir.

Tanım 2.11 (Kompleks Fonksiyonun Limiti) A kümesi $\mathbb{C}$ kümesinin alt kümesi olmak üzere, $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu tanımlansın. Burada $z_0 \in \mathbb{C}$ A kümesinin bir yığılma noktası olsun ve bir w_0 kompleks sayısı verilsin. Bu durumda $0 < |z - z_0| < \delta$ ve $\varepsilon > 0$ koşullarını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı var ise f fonksiyonunun z_0 *noktasındaki limiti* w_0 olur ve $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.12 (Süreklilik) A kümesi $\mathbb{C}$ kümesinin alt kümesi olmak üzere, $z_0 \in A$ ve $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $|z - z_0| < \delta$ koşulunu sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ denklemini sağlayacak biçimde bir $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı var ise, f fonksiyonu z_0 *noktasında süreklidir* denir.

Tanım 2.13 (Diferensiyellenebilirlik) $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0 noktası A kümesinin bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti var ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *diferensiyellenebilirdir* (veya türevlenebilirdir) denir. $\frac{df}{dz}(z_0)$ veya $f'(z_0)$ ise limitin değerini gösterir ve bu ifadeye f fonksiyonunun z_0 *noktasındaki türevi* adı verilir. $f'(z_0)$ türevi de $\mathbb{C}$ kümesinin bir elemanıdır.

Tanım 2.14 (Analitiklik) $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferensiyellenebilir ise f fonksiyonuna z_0 *noktasında analitiktir* denir. f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse, bu noktaya fonksiyonun *singüler noktası* denir. Eğer her $z_0 \in A$ noktasında f fonksiyonu diferensiyellenebilir ise f fonksiyonuna A kümesi üzerinde *analitiktir* denir. $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesinde analitik olan fonksiyona ise *tam fonksiyon* denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

ile verilen *Cauchy-Riemann* denklemleri sağlanır.

Örneğin $f(z) = e^z$ fonksiyonu bir tam fonksiyondur. Fakat $f(z) = \log z$ bir tam fonksiyon değildir. Ayrıca $g(z) = \overline{z}$ fonksiyonu ise Cauchy-Riemann denklemlerini sağlamaz ve dolayısıyla hiçbir yerde analitiklik değildir.

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu için f_z ve $f_{\overline{z}}$ kısmi türevleri

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x - iu_y + v_y)$$

$$f_{\overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{1}{2}(u_x + iv_x + iu_y - v_y)$$

şeklindedir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ise $f_{\overline{z}} = 0$ ve $f_z = f'(z)$ olur. Aksine eğer bir D bölgesinde $f_{\overline{z}} = 0$ veya $f_z = f'(z)$ ise $f(z)$ fonksiyonu bu D bölgesinde analitiktir. Ayrıca Jakobian determinantı,

$$|f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 = J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

olarak yazılabilir. Cauchy-Riemann denklemlerinin bir sonucu olarak, Jakobian determinantı $J_f(z)$,

$$J_f(z) = J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = u_x^2 + u_y^2 = \left|u_x + iu_y\right|^2 = |f'(z)|^2$$

olarak yazılabilir.

Teorem 2.15 (Maksimum Modül Prensibi): $f(z)$, A bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. $|f(z)|$, A bölgesinde maksimum değer alamaz. (Ponnusamy, S. and Silverman, 2006)

Sonuç 2.16 A sınırlı bir bölge ve sabit olmayan $f(z)$ fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.
Maksimum Modül Prensibi'nin önemli bir sonucu olan Schwarz lemması aşağıdaki gibidir.

Lemma 2.17 (Schwarz lemması) $f(z)$ fonksiyonu $U=\{z:|z|<1\}$ birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)|\leq 1$ ise $|f'(0)|\leq 1$ ve $|f(z)|\leq|z|$ olur. Eşitlik durumu ise sadece $\theta\in\mathbb{R}$ için $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu ile sağlanır (Ponnusamy, S. and Silverman, 2006).

Teorem 2.18 (Minimum Prensibi) $f(z)$, A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z\in A$ için $f(z)\neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz (Ponnusamy, S. and Silverman, 2006).

Sonuç 2.19 A sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z\in A$ için $f(z)\neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik ve sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Tanım 2.20 (Argüman) Kompleks düzlemde $z\neq 0$ kompleks sayısı verilsin. Bu z kompleks sayısının belirttiği vektörün x ekseninin pozitif kısmı ile yaptığı açıya z kompleks sayısının argümanı denir. Vektörün pozitif reel eksen ile yaptığı θ açısına ise z nin *argümenti* denir ve $\theta=\arg(z)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.21 (Konform Dönüşüm) Kompleks düzlemin bir D bölgesinde bulunan $f:E\to\mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer aralarında β açısı bulunan ve $z_0\in D$ noktasından geçen herhangi iki λ_1, λ_2 eğrileri için $f(\lambda_1)$ ve $f(\lambda_2)$ fonksiyonlarının resmettiği bölgenin eğrileri de $w_0=f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük yönünden β açısı oluyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında bir *konform dönüşüm* denir. Şayet bir f fonksiyonu, bir $E \subset \mathbb{C}$ bölgesinin noktalarının tamamında konform ise, f fonksiyonu D bölgesinde *konformdur* denir.

Örneğin; $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur. Ayrıca en önemli konform dönüşümlerden biri a, b, c, d karmaşık sabitler olmak üzere

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad ad - bc \neq 0$$

ile verilen *Möbius dönüşümüdür.* Bu dönüşüm genişletilmiş kompleks düzlemi $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \infty)$ kendisi üzerine konform olarak resmeder.

Aşağıdaki teorem ile analitiklik ve konform dönüşümler arasındaki bağlantıyı verebiliriz.

Teorem 2.22 f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur (Duren 1983).

Tanım 2.23 (Dizi) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $f(n) = z_n$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ de bir *kompleks dizi* denir.

Tanım 2.24 (Seri) (z_n), kompleks bir dizi olmak üzere $z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ...$ ifadesine *kompleks seri* denir ve bu seri $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ biçiminde gösterilir. Bu serinin kısmi toplamlar dizisi ise $s_n = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$ şeklinde tanımlanan (s_n) dizisidir.

Tanım 2.25 (Kuvvet Serisi) a_n **,** $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ şeklindeki serilere *kuvvet serileri* adı verilir.

Teorem 2.26 (Taylor Teoremi) Eğer f fonksiyonu z_0 noktasında analitik ise f fonksiyonu bu noktanın bir komşuluğunda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

şeklindeki kuvvet serisi açılımına sahiptir. f fonksiyonunun tanımlanan bu kuvvet serisine z_0 noktası komşuluğundaki *Taylor serisi* adı verilir. Taylor serisinde $z_0 = 0$ özel durumu için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

bulunur ve elde edilen bu seriye *Maclaurin serisi* denir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tezin hazırlanmasında kullanılan önemli tanım ve teoremler verilecektir.

3.1 Ünivalent Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1 (Ünivalent Fonksiyon) $D \subset \mathbb{C}$ kompleks bölgesinde bir f fonksiyonu tanımlı olsun. Her $z_1, z_2 \in D$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (yada $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyor ise) $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde *ünivalent (schlicht yada yalınkat) fonksiyon* denir.

Örneğin; $f(z) = \overline{z}$ fonksiyonu ünivalent bir fonksiyondur.

Tanım 3.1.2 (Yerel Ünivalent Fonksiyon) f fonksiyonu bir D bölgesinde tanımlı olsun. Eğer f fonksiyonu $z \in D$ noktasının en az bir komşuluğunda ünivalent ise f fonksiyonuna z noktasında *yerel ünivalent fonksiyon* denir.

Teorem 3.1.3 D bölgesinde analitik olan f fonksiyonunu ele alalım. O zaman $z_0 \in D$ noktasında f fonksiyonunun yerel ünivalent olması için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır.

D bölgesinde tanımlanan f fonksiyonu $z_0 \in D$ noktası için yerel ünivalent oluyorsa $f'(z_0)$ türevi de f fonksiyonunun z_0 noktası etrafındaki yerel geometrik davranışını belirler.

Yerel ünivalent olan bir fonksiyon, dönmeyi ve açıları koruduğu için ünivalent bir fonksiyon konform bir dönüşüm ile eşdeğer kabul edilir. Diğer yandan, bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi için $f'(z_0) \neq 0$ koşulu f fonksiyonunun D bölgesinin tamamında ünivalent olması için gerek koşul iken yeterli olmamaktadır. İfade edilen durumu aşağıdaki örnekle açıklayabiliriz:

$f(z) = z^2$ fonksiyonu $D = \left\{ z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\}$ bölgesinde yerel ünivalent olduğu halde ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu, D bölgesinde analitik ve her $z_0 \in D$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir.

Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}} + i\frac{5}{3\sqrt{2}} \right) = f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}} - i\frac{5}{3\sqrt{2}} \right) = i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z)=z^2$ fonksiyonu D bölgesinde ünivalent değildir. Eğer $D\subset\mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z\in D$ noktasında $f'(z)$ türevi, f fonksiyonunun yerel geometrik davranışının belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme çarpanlarıdır.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin en önemli sonuçlarından biri olan Riemann Dönüşüm Teoremi aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 3.1.4 (Riemann Dönüşüm Teoremi) Kompleks düzlemin her $D\subset\mathbb{C}$ basit bağlantılı alt bölgesini U birim diski üzerine birebir ve konform olarak dönüştüren ve $z_0\in D$ olmak üzere $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ şartlarını sağlayan bir tek f fonksiyonu vardır (Duren, 1983).

Tanım 3.1.5 (Normalize Edilmiş Analitik Fonksiyonlar)

Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent olan bir fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri yine basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoremine göre, keyfi basit bağlantılı bir bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonunun yerine U açık birim diskinde tanımlı ünivalent bir f fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0)=0$, $f'(0)=1$ normalleştirme koşulları ele alınırsa,

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \quad ,\ (z\in U) \tag{3.1}$$

açılımı vardır. Burada (3.1) biçiminde tanımlanmış fonksiyona *normalize edilmiş analitik fonksiyon* denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfı A ile gösterilir ve

$$A=\left\{ f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n;\ f\ \ analitik,\ z\in U\right\}$$

olarak yazılır.

Tanım 3.1.6 (S sınıfı) U açık birim diskinde ünivalent olan $f\in A$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıfa S sınıfı denir ve

$$S=\left\{ f\in A:\forall z\in U \text{ için } f-ünivalent\right\}$$

olarak yazılır (Duren, P. L., 1983)

S sınıfına ait fonksiyonlar için bazı örnekler aşağıdaki gibidir.

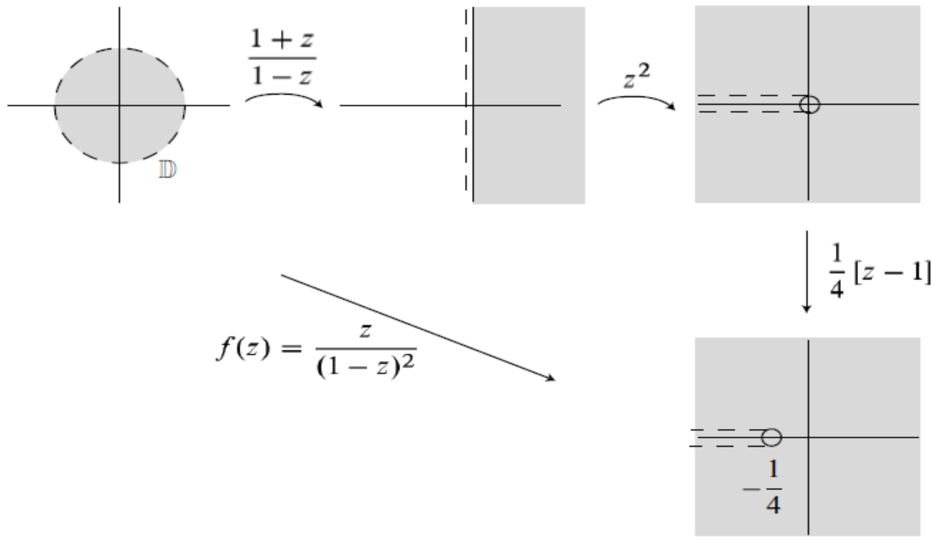
(i) $w = f(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\operatorname{Re}(w) > -1/2$ sağ yarı düzlemi üzerine resmeder.

(ii) $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1/2] \cup [1/2, \infty)\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca Koebe fonksiyonu, ünivalent fonksiyonlar teorisinde birçok problem için ekstremal bir role sahiptir.

$k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right) - \dfrac{1}{4}$ dönüşümü aşağıdaki şekilde resmedilebilir.



Şekil 3.1 Koebe fonksiyonu altındaki U birim diskinin resmi

Bununla beraber S sınıfı aşağıdaki teoeremde verilen bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 3.1.7 $f \in S$ olması durumunda aşağıdaki ifadeler doğrudur (Duren, P. L., 1983).

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \bar{a}_2 z^2 + \ldots$ ise $g \in S$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z)=e^{-i\theta}f(e^{-i\theta})=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n e^{i(n-1)\theta}z^n,\quad (z\in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatasyon): $f\in S$ ve $0<r<1$ olmak üzere

$$g(z)=r^{-1}f(rz)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n r^{n-1}z^n,\quad (z\in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $f\in S$ ve $\alpha\in U$ olmak üzere

$$g(z)=\frac{f\left(\dfrac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right)-f(\alpha)}{(1-|\alpha|^2)f'(\alpha)},\quad (z\in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: $f\in S$ olmak üzere w fonksiyonu $f(U)$ da ünivalent ve $w(0)=0$, $w'(0)=1$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon ise $w\circ f\in S$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $f\in S$ ve $w\notin f(U)$ olsun. Bu durumda

$$g(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)/w},\quad (z\in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

(vii) $n.$ kök dönüşümü: $f\in S$ olmak üzere $n=2,3,...$ için

$$g(z)=\sqrt[n]{f(z^n)}=z+\frac{a_2}{n}z^{n+1}+\frac{1}{2n^2}(2na_3-(n-1)a_2^2)z^{2n+1}+...,\quad (z\in U)$$

fonksiyonu S sınıfına aittir.

Teorem 3.1.8 $f\in S$ olsun. $f(U)\supseteq U_{1/4}$ dır. Bu sonuç Koebe fonksiyonunun dönmeleri için kesindir. Üstelik $\bigcap_{f\in S} f(U)=U_{1/4}$ dır (Duren, P. L., 1983).

Teorem 3.1.9 S sınıfı kompaktır (Duren, P. L., 1983).

S sınıfına ait olan bir f fonksiyonu için 1916'da Bieberbach, bir üst sınır bulma problemini ilk defa $|a_2|$ katsayısı için yapmıştır ve bunu aşağıdaki teorem ile kanıtlamıştır.

Teorem 3.1.10 (Bieberbach Teoremi) $f \in S$ fonksiyonu için $|a_2| \le 2$ eşitsizliği sağlanır. Eşitlik için, f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olması gerekli ve yeterlidir (Bieberbach, 1916).

Bieberbach, bu eşitsizliği genişleterek S sınıfına ait bir fonksiyon için 1916 yılında $|a_n| \le n$ durumunu gerçeklediği konusunda bir kestirimde bulunmuştur. Bieberbach tahmini olarak bilinen ve oldukça karmaşık olan bu problem L. De Branges tarafından 1985 yılında ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.11 (Bieberbach Tahmini) $f \in S$ fonksiyonu $n = 2,3,4,...$ için $|a_n| \le n$ eşitsizliği vardır. Eşitliğin olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun dönmeleri olmasıdır (Bieberbach, 1916).

Bu tahmin için bulunan sonuçlar tarihsel bir şekilde aşağıda verilmiştir.

$|a_2| \le 2$, Bieberbach (1916).

$|a_3| \le 3$, Löwner (1923) (Löwner diferensiyel Denklemi).

$|a_4| \le 4$, Garabedian, Schiffer (1955), (Grunsky eşitsizliği).

$|a_5| \le 5$, Pederson, Schiffer (1972).

$|a_6| \le 6$, Pederson (1968), Ozawa (1969).

$|a_n| \le e.n$, Littlewood (1925).

$|a_n| \le \sqrt{7/6n} < 1.081n$, FitsGerald (1972).

$|a_n| \le n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$ L. De Branges (1984).

$f \in S$ ünivalent fonksiyonları için en önemli ve en temel olan geometrik netice, 1907 yılında Koebe tarafından verilen ve Koebe dörtte bir teoremi olarak bilinen ünlü teoremdir. Her bir $f \in S$ fonksiyonu $f(0) = 0$ özelliğinde bir açık dönüşüm olduğundan ötürü bu dönüşümlerin resmi, orjin merkezli bazı diskleri kapsar. Koebe, S sınıfındaki bütün fonksiyonların resimlerinin ρ bir mutlak sabit olmak şartıyla ortak bir $|w| < \rho$ diskini kapsadığını bulmuştur. Koebe fonksiyonu, ρ mutlak sabiti için

$|\rho| < 1/4$ durumunu sağlar. Daha sonra Bieberbach ρ mutlak sabitinin $1/4$ şeklinde alınabileceğini belirten Koebe kestirimini oluşturmuştur.

Teorem 3.1.12 (Koebe Dörtte Bir Teoremi) S sınıfında bulunan fonksiyonların tümünün resmi $\left\{ w : |w| < \frac{1}{4} \right\}$ diskini kapsar (Duren, 1983). Bu sonuç Koebe fonksiyonun dönmeleri için kesindir.

Bibeberbach'ın ispatladığı $|a_2| \le 2$ ifadesindeki katsayı eşitsizliği, konform dönüşümlerin geometrisi içerisinde bulunan büyüme ve bükülme teoremleri gibi daha üst düzey uygulama alanlarına sahip teoremlerin elde edilmesine olanak sağlamıştır. Büyüme teoremi, tüm $f \in S$ ünivalent fonksiyonları üzerinde sırası ile $|f(z)|$ ve $|f'(z)|$ fonksiyonları için sınırlar oluşturur.

Bükülme teoreminin oluşumu, $f \in S$ ünivalent fonksiyon dönüşümü altında yay uzunluğunun sonsuz küçük büyüme çarpanı olarak $|f'(z)|$ nin geometrik açıklamasından veya sonsuz küçük büyüme çarpanı olarak $|f'(z)|^2$ jakobiyen işleminin sonucundan meydana gelmektedir.

Teorem 3.1.13 (Bükülme Teoremi) S sınıfındaki her f fonksiyonu için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+r}{(1-r)^3}, \qquad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman 1983).

Bükülme teoreminin sonuçlarına dair aşağıdaki teorem önemlidir.

Teorem 3.1.14 S sınıfındaki her f fonksiyonu için,

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \le \frac{4r}{1-r^2}, \qquad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman 1983).

Teorem 3.1.15 (Büyüme Teoremi) S sınıfındaki her f fonksiyonu için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f'(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}, \qquad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman 1983).

Bazı durumlarda daha kullanışlı olabilen, Büyüme ve Bükülme teoremlerinin birleştirildiği bir diğer eşitsizlik aşağıdaki teoremde verilmektedir.

Teorem 3.1.16 S sınıfındaki her bir f fonksiyonu için $|z| = r < 1$ olmak üzere,

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliği sağlanır (Duren 1983).

3.2. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kesimde S sınıfının alt sınıfları ve bu alt sınıfların bazı temel özellikleri verilecektir. Bu alt sınıflar arasında yıldızıl, konveks, α mertebeli yıldızıl, α mertebeli konveks fonksiyon sınıfları bulunmaktadır. Hem analitik hem de geometrik özelliklere sahip olan bu alt sınıflar pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı ve subordinasyon kavramı ile yakından ilişkilidir.

Tanım 3.2.1 (Caratheodory Sınıfı) P sınıfı,

$$f(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots + p_n z^n + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

şeklinde, U birim diskinde analitik olan ve birim diskteki z noktaları için $\text{Re}\{f(z)\} > 0$ olacak şekildeki tüm fonksiyonların sınıfıdır. Bu sınıf *pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı* veya genellikle *Caratheodory Sınıfı* olarak adlandırılır. Burada $f(z)$ fonksiyonu ünivalent olmak zorunda değildir. Örneğin, $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu bir $n \geq 0$ tamsayısı için P sınıfındadır ancak $n \geq 2$ için bu fonksiyon ünivalent değildir.

Koebe fonksiyonunun S sınıfı için oynadığı merkezi rol gibi,

$$L_0(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^3 + \ldots = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

Möbius fonksiyonu da P sınıfı için önemli bir rol oynar. Bu fonksiyon P sınıfındadır, birim diskte analitik ve ünivalenttir, üstelik birim diski $\text{Re}\, w > 0$ yarı düzlemi üzerine resmeder. Ancak $L_0(z)$ fonksiyonunu ile Koebe fonksiyonu arasında dikkate değer bir fark vardır. S sınıfı için pek çok ekstremal problemde Koebe fonksiyonu (veya bir dönmesi) tek çözümdür. Bu durumun aksine, $L_0(z)$ fonksiyonu P sınıfındaki $|p_n|$ değerini maksimize eder fakat $n \geq 2$ ise $p_n = 2$ olacak şekilde P sınıfının sonsuz çoklukta başka fonksiyonu vardır ve bunların hiçbiri, bir diğerinin dönmesiyle elde edilemez.

P sınıfı konvekstir. Yani, μ_1 ve μ_2 , $\mu_1+\mu_2=1$ koşulu ile negatif olmayan sayılar ve $f_1(z)$ ile $f_2(z)$, P sınıfına ait fonksiyonlar ise

$$f(z)=\mu_1 f_1(z)+\mu_2 f_2(z)$$

fonksiyonu da P sınıfındadır. Buradan, bir sonlu toplama ve her k için $\mu_k \geq 0$ ve $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k=1$ kabulü ile

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k f_k(z)$$

yazılabilir.

P sınıfına ait fonksiyonların katsayıları için oldukça kullanışlı olan bir teorem 1907 yılında Caratheodory tarafından verilmiştir.

Teorem 3.2.2 (Caratheodory Teoremi) $N \geq 1$ belirli bir tamsayı olsun. Eğer $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n$ fonksiyonu P sınıfında ise $|p_n| \leq 2$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir. $\eta=e^{2\pi i/N}$ ve $k=1,2,...,N$ için $\mu_k \geq 0$ olmak üzere,

$$F(z)=\sum_{k=1}^{N}\mu_k\frac{1+\eta^k z}{1-\eta^k z}=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_n z^n$$

ve $\sum_{k=1}^{N}\mu_k=1$ ise, $F(z)$ fonksiyonu P sınıfındadır denir ve $P_N=2$ olur (Caratheodory 1907).

Tanım 3.2.3 (Schwarz Fonksiyonu) U birim disk içinde analitik olan ve $w(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$ biçiminde gösterilen w fonksiyonu her $z \in U$ sayısı için $w(0)=0$ ve $|w(z)|<1$ şartlarını sağlıyor ise bu fonksiyona *Schwarz fonksiyonu* denir ve Ω simgesi ile gösterilir.

Aşağıdaki önerme ile pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı ile Schwarz fonksiyonları sınıfı arasındaki ilişki verilebilir.

$$p \in P \Leftrightarrow p=\frac{1+w}{1-w}\ , \quad w \in \Omega$$

Subordinasyon ilkesinin temel bileşenleri Schwarz fonksiyonlarıdır. Aşağıdaki biçimde subordinasyon prensibi izah edilebilir.

Tanım 3.2.4 (Subordinasyon)

f ve g fonksiyonları U birim diskinde analitik fonksiyonlar olsunlar. U birim diskinde,

$$f(z) = g\left(w(z)\right)$$

olacak şekilde bir w Schwarz fonksiyonu varsa, f fonksiyonu g fonksiyonuna *subordinedir* denir ve $f \prec g$ şeklinde gösterilir.

Eğer $f \prec g$ ise $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ olur. Schwarz Yardımcı Önermesinden tüm $r \in (0,1)$ değerleri için $\left|f'(0)\right| \leq \left|g'(0)\right|$ ve $f(U_r) \subset g(U_r)$ elde edilir. Ayrıca $f \prec g$ ise

$$\max_{|z|\leq r} |f(z)| \leq \max_{|z|\leq r} |g(z)| \, , r \in (0,1)$$

yazılabilir.

En önemli durum ise subordine olunan fonksiyonun ünivalent olması ile ilgili olan aşağıdaki önermedir.

Yardımcı Önerme 3.2.5 Eğer g fonksiyonu U birim diskinde ünivalent ise $f \prec g$ olması için gerekli ve yeterli koşul $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ koşullarının sağlanmasıdır (Pommerenke 1975).

Tüm $r \in (0,1)$ değerleri için $f(U_r) \subseteq g(U_r)$ olması durumu, yukarıdaki yardımcı önerme ile birlikte *subordinasyon prensibi* olarak bilinir.

Teorem 3.2.6 (Subordinasyon Prensibi) Eğer g fonksiyonu U birim diskinde ünivalent ise $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ olması durumunda $f(U_r) \subseteq g(U_r), \ r \in (0,1)$ kapsaması sağlanır (Pommerenke 1975).

Kompleks analizde önemli rol oynayan subordinasyon ilkesi, son yıllarda kompleks analiz ile ilgilenen bir çok matematikçinin ilgi odağı olmuştur. Subordinasyon kavramı, ilk olarak E. Lindelöf (1909) tarafından ortaya atılmış, fakat temel bağıntılar J. E. Littlewood (1925) ve W. W. Rogosinski (1943) tarafından elde edilmiştir.

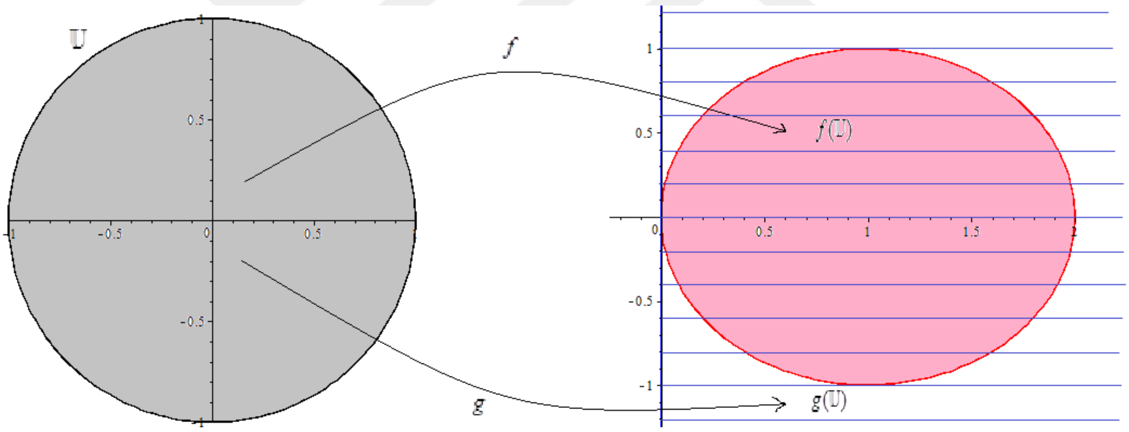
U birim disk içinde analitik olan $g(z)=\dfrac{1+z}{1-z}$ ve $f(z)=1+z$ fonksiyonlarının subordinasyon özellikleri incelendiğinde, f fonksiyonunun g fonksiyonuna subordine olduğu görülür. Bu subordineliği görmek için $\forall z\in U$ için $f(z)=g(w(z))$ olacak şekilde $w(0)=0$ ve $|w(z)|<1$ koşullarını sağlayan bir w fonksiyonunun varlığı gösterilmedir.

$$f(z)=g(w(z))\Rightarrow 1+z=\frac{1+w(z)}{1-w(z)}\Rightarrow w(z)=\frac{z}{z+2}$$

bulunur. Buradan,

$$w(0)=0 \text{ ve } |w(z)|=\left|\frac{z}{z+2}\right|\le\frac{1}{|z+2|}\le 1$$

şeklinde yazılır. Bu eşitsizlik ise $f\prec g$ demektir. Ayrıca g fonksiyonu ünivalent olduğu için $f(0)=g(0)$ ve $f(U)\subseteq g(U)$ olur. Bu durum aşağıdaki biçimde ayrıntılı olarak gösterilebilir.

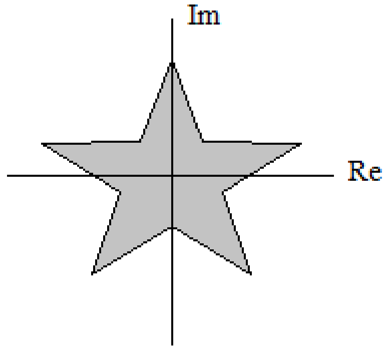


Şekil 3.2 $1+z\prec\dfrac{1+z}{1-z}$

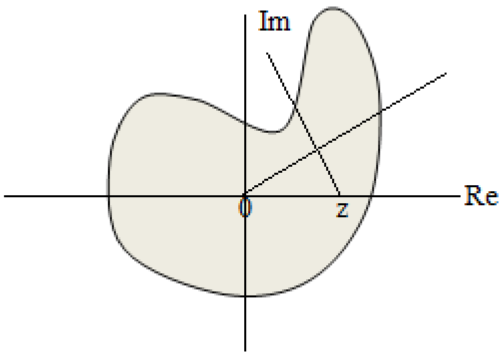
Teorik olarak subordinasyon kavramının kullanılmasındaki sebep, özellikleri bilinmeyen bir fonksiyonu özellikleri bilinen bir fonksiyon yardımıyla araştırabilmektir.

Yıldızıl fonksiyonlar sınıfının tanımı ilk önce Alexander (1915) ve sonrasında Nevanlinna (1921) tarafından açıklanmıştır.

Tanım 3.2.7 (Yıldızıl Fonksiyon) Bir $D\subset\mathbb{C}$ bölgesi ve onun bir $z_0\in D$ noktasını alalım. Eğer z_0 noktasını başka bir $z\in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D bölgesi içinde kalıyorsa, D bölgesine $z_0\in D$ *noktasına göre yıldızıl bölge* denir. z_0 noktası özel olarak orijin seçilirse bu bölgeye kısaca *yıldızıl bölge* adı verilir. Farklı bir ifadeyle, D bölgesinin her noktası z_0 noktasından "görünür" ise, D bölgesine z_0 noktasına göre yıldızıl bölge denir.



Şekil 3.3 Yıldızıl bölge



Şekil 3.4 z noktasına göre yıldızıl bölge

Eğer bir f fonksiyonu U birim diskini z_0 noktasına göre yıldızıl bir bölgeye resmediyorsa, f fonksiyonuna z_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon* denir. Özel olarak, f fonksiyonu U birim diskini yıldızıl bir bölgeye resmediyorsa, f fonksiyonuna *yıldızıl fonksiyon* denir. S^* ile yıldızıl fonksiyonların kümesi gösterilir.

Koebe fonksiyonu olan $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu yıldızıl bir fonksiyondur. Yıldızıl fonksiyonların analitiklik bakımından tanımını aşağıdaki teorem ile verebiliriz.

Teorem 3.2.8 $f \in A$ ve $f(0)=f'(0)-1=0$ (yani $f \in S$) şartları sağlansın. O halde $f \in S^*$ olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0\ ,\ \ z\in U$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Duren, 1983).

Yıldızıl fonksiyonların kümesi kısaca

$$S^{*}=\left\{f\in A:\operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)}>0;\ \ z\in U\right\}$$

biçiminde gösterilir.

Burada elde edeceğimiz net sonuç ise $S^{*}\subset S$ olduğudur. S^{*} sınıfının bir diğer alt sınıfı olan ve Robertson (1936) tarafından tanımlanan α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfının analitik tanımı aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$S^{*}=\left\{f\in A:\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha;\ z\in U,\ 0\le\alpha<1\right\}\ .$$

Kirwan ve Brannan (1969) ve Stankiewicz (1966) tarafından güçlü yıldızıl fonksiyonlar sınıfı ileri sürülmüş ve bu sınıf ile ilgili bazı çalışmalar yapılmıştır.

Tanım 3.2.9 (Güçlü Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı) $f\in A$ olsun.

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|<\frac{\alpha\pi}{2},\qquad \left(z\in U,\ \ 0\le\alpha<1\right)$$

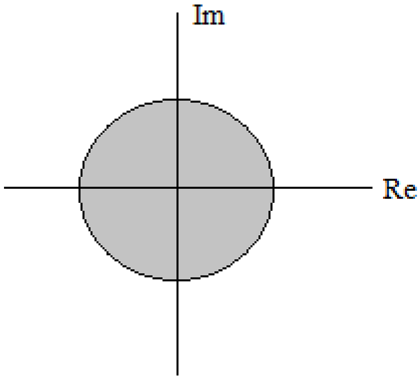
ya da bu eşitsizliğe denk olan

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\alpha\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha},\qquad \left(z\in U,\ \ 0\le\alpha<1\right)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna, α*-mertebeden güçlü yıldızıl fonksiyon* denir. $\tilde{S}(\alpha)$ ile güçlü yıldızıl fonksiyonların sınıfı gösterilmektedir. $\alpha=1$ için $\tilde{S}(1)=S^{*}$ elde edilir.

Tanım 3.2.10 (Konveks Fonksiyon) D kümesi $\mathbb{C}$ karmaşık düzlem üzerinde bir küme, z_1 ve z_2 de D kümesinde herhangi iki nokta olsun. Eğer z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren doğru parçası tamamen D bölgesi içinde yer alıyorsa D bölgesine *konveks bölge* ismi verilir. $f\in A$ fonksiyonu birim disk içinde ünivalent ve $f(D)$ görüntü bölgesi konveks bir bölge ise f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. Bir başka ifade ile, eğer bir f fonksiyonu konveks bir bölgeyi konveks bir bölge üzerine resmediyorsa

f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir.



Şekil 3.5 Konveks bölge

Konveks fonksiyonların analitiklik bakımından tanımını aşağıdaki şekilde verebiliriz. $|z|<1$ de analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ şartını sağlayan f fonksiyonunun K sınıfında olması için gerek ve yeter koşul $\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0$, $z\in U$ olmasıdır.

Konveks fonksiyonlara örnek olarak verebileceğimiz $f(z)=\frac{z}{1-z}$ fonksiyonu K sınıfı üzerinde önemli bir rol oynar ve U birim diskini yarı düzlem üzerine dönüştürür.

K sınıfının bir alt sınıfı olan α mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfının analitiklik bakımından tanımı ise aşağıdaki şekilde verilir.

$$K(\alpha)=\left\{ f\in A:\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha,\ \ z\in U,\ \ 0\le\alpha<1 \right\}.$$

Yıldızıl ve konveks fonksiyonların birbirleri ile olan bağlantıları oldukça kullanışlı olan aşağıdaki teoremle ortaya konmuştur.

Teorem 3.2.11 (Alexander Teoremi) $f\in A$ ve $z\in U$ olmak üzere $g(z)=zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f\in K$ olması için gerek ve yeter koşul $g\in S^*$ olmasıdır (Alexander 1915).

Bu teoreme ilave olarak, Storhhacker tarafından 1933 yılında “ $f \in K$ ise $f \in S^*\left(\frac{1}{2}\right)$” olduğu kanıtlanmıştır. Yıldızıl ve konveks fonksiyonları kapsayan S nin altsınıfları arasında $K \subset S^* \subset S \subset A$ şeklinde bir bağıntı vardır.

Tanım 3.2.12 (Güçlü Konveks Fonksiyonlar Sınıfı) $f \in A$ olsun.

$$\left|\arg\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right| > \alpha\frac{\pi}{2}, \qquad (z \in U,\ 0 \le \alpha < 1)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna α*-mertebeden güçlü konveks fonksiyon* denir. $\tilde{K}(\alpha)$ simgesi ile güçlü konveks fonksiyonların sınıfını ifade ederiz. $\alpha = 1$ için $\tilde{K}(\alpha) = K$ eşitliği sağlanır.

3.3 Bi-Ünivalent Fonksiyonlar

f fonksiyonu $\mathbb{C}$ karmaşık düzleminin açık ve bağlantılı bir D alt kümesinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer f ünivalent ise f fonksiyonunun tersi $f(D)$ görüntü bölgesinde $g(f(z)) = z$ kuralı ile verilen g fonksiyonudur. U birim diskinin her $f \in S$ fonksiyonu altındaki görüntüsünün $1/4$ yarıçaplı diski içine aldığını biliyoruz. Bu nedenle her $f \in S$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayan bir f^{-1} ters fonksiyona sahiptir:

$$f^{-1}(f(z)) = z, \quad (z \in U)$$

ve

$$f^{-1}(f(w)) = w, \quad \left(|w| < r_0(f), \quad r_0(f) \ge 1/4\right).$$

Buradaki f^{-1} ters fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$g(w) = f^{-1}(w) = w - a_2w^2 + \left(2a_2^2 - a_3\right)w^3 - \left(5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4\right)w^4 + ...$$

$$= w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n \quad .$$

Eğer f ve f^{-1} fonksiyonları U birim diskinde ünivalent ise f fonksiyonuna U da bi-ünivalent fonksiyon denir.

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklindeki Taylor- Maclaurin seri açılımı ile verilen U birim diskindeki tüm bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı $\sum$ ile gösterilir.

$\sum$ sınıfına ait olan ve olmayan fonksiyonların örneklerini aşağıdaki şekilde verebiliriz.

$$\imath(z)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\ ,\ k(z)=-\log(1-z)\ ,\ h(z)=\frac{z}{1-z}\ .$$

Fakat $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ ile tanımlanmış olan Koebe fonksiyonu $\sum$ sınıfına ait bir fonksiyon değildir. Çünkü Koebe fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C}/(-\infty,-1/4]$ bölgesi üzerine resmeder. Bu sebeple görüntü bölgesi U birim diskini kapsamaz.

Ek olarak $f(z)=z-\dfrac{z^2}{2}$ ve $s(z)=\dfrac{z^2}{1-z^2}$ fonksiyonlarını da $\sum$ sınıfına ait olmayan fonksiyonlara örnek olarak verebiliriz.

Bir fonksiyonun tersinin Maclaurin seri açılımındaki katsayıları için bir formül vermek mümkündür.

$$w=f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \tag{3.3.1}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu fonksiyonun $w=0$ merkezli en az bir küçük diskte daima var olan ters fonksiyonu da

$$z=g(w)=w+\sum_{n=2}^{\infty}b_n w^n \tag{3.3.2}$$

olsun. Buradaki asıl amaç, $a_2,a_3,...a_n$ katsayılarının bir fonksiyonu olarak b_n katsayılarını elde etmektir. Bu problem, keyfi F fonksiyonu w nın terimleri de bir kuvvet serisi olarak ifade edilerek, daha genel bir teoremin özel bir durumu olarak kısmen çözülmüştür.

Teorem 3.3.1 F fonksiyonu $z=0$ noktasını kapsayan bir disk üzerinde analitik (3.3.1) ve (3.3.2) denklemleri ile verilen f ve g fonksiyonları da aynı diskte ters fonksiyonlar olsun.

$$h(z)=\frac{f(z)}{z}=1+a_2z+a_3z^2+...$$

olarak alalım. $z=0$ noktasının en az bir komşuluğunda,

$$F(z)=F(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{w^n}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{F'(z)}{[h(z)]^n}\right)\right]\Bigg|_{z=0}$$

olur. Bu seri, Bürmann - Lagrange serisi olarak adlandırılır (Goodman 1983).

Bu teoremde eğer $F(z)=z$ olarak alınırsa, aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.3.2 Eğer f ve g fonksiyonları (3.3.1) ve (3.3.2) denklemleri ile verilen fonksiyonlar ise, $h(z)=1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^{n-1}$ olmak üzere b_n katsayıları

$$b_n=\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[h(z)^{-n}\right]\Bigg|_{z=0}$$

olarak yazılır (Goodman 1983).

3.4 M-Katlı Simetrik Bi-Ünivalent Fonksiyonlar Sınıfı

S sınıfına ait bir f fonksiyonu için karekök dönüşümü altında ünivalentlik koşulu korunur (Duren,1983). Diğer bir deyişle $f\in S$ ve $g=\sqrt{f(z^2)}$ olarak alınırsa bu durumda $g\in S$ olur. $f(z)=0$ değerini sadece orjinde aldığından dolayı, karekök fonksiyonunun tek değerli olan bir dalını seçebiliriz. Bu durumda g fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} g=\sqrt{f(z^2)}&=z\left\{1+a_2z^2+a_3z^4+\ldots\right\}^{1/2}\\ &=z+c_3z^3+c_5z^5+\ldots\ , \qquad |z|<1\ . \end{aligned}$$

g fonksiyonu $g(z)=-g(-z)$ özelliğini sağladığından dolayı analitik olan tek fonksiyondur. Ayrıca g fonksiyonu ünivalenttir (Duren,1983). Daha genel olarak,

$$f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}a_{mk+1}z^{mk+1}\quad ,\qquad \left(m\in\mathbb{N}=\{1,2,\ldots\}\right) \tag{3.4.1}$$

formunda normalize edilmiş m-katlı simetrik fonksiyonların oluşturduğu sınıfı S_m olarak tanımlayalım. Bu sınıf S sınıfının bir alt sınıfıdır. Bu durumda her bir $f\in S$ fonksiyonunun $g(z)=\left\{f(z^m)\right\}^{1/m}$ formundaki *m. dereceden kök dönüşümü*, S_m sınıfına aittir. Tersine her $g\in S_m$ fonksiyonu, m. dereceden kök dönüşümü ile S sınıfına ait bir fonksiyon olarak elde edilir. Gerçekte, S sınıfındaki fonksiyonlar tek katlı simetrik fonksiyonlardır.

Srivastava ve ark. (2014) m-katlı simetrik ünivalent fonksiyon kavramına benzer olarak m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonu tanımladılar. Bu çalışmalarında her $f \in \Sigma$ fonksiyonunun, her bir $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ tamsayısı için m-katlı simetrik bi-ünivalent bir fonksiyon oluşturduğuna dair önemli bazı sonuçlar elde ettiler. Aynı çalışmada

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \tag{3.4.2}$$

şeklinde verilen normalize edilmiş ünivalent bir fonksiyon için $f^{-1} = g$ seri açılımını aşağıdaki gibi elde ettiler:

$$g(w) = w - a_{m+1} w^{m+1} + \left[(m+1) a^2_{m+1} - a_{2m+1} \right] w^{2m+1} - \left[\frac{1}{2}(m+1)(3m+2) a^3_{m+1} - (3m+2) a_{m+1} a_{2m+1} + a_{3m+1} \right] w^{3m+1} + ... \tag{3.4.3}$$

U birim diskinde m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonların sınıfını Σ_m ile göstereceğiz. $m = 1$ değeri için bi-ünivalent fonksiyonların sınıfına ait $g = f^{-1}$ fonksiyonunun elde edileceği açıktır. Σ_m sınıfına ait bazı fonksiyonlar için aşağıdaki örnekler verilebilir.

$$\left(\frac{z^m}{1 - z^m} \right)^{1/m}, \quad \left[-\log\left(1 - z^m\right) \right]^{1/m}, \quad \left[\frac{1}{2} \log\left(\frac{1 + z^m}{1 - z^m} \right)^{1/m} \right].$$

3.5 Bi-Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları İçin Katsayı Tahminleri

Bu bölümde son yıllarda bi-ünivalent fonksiyonların alt sınıflarından yola çıkarak Srivastava ve ark. (2014), S. Altınkaya and S. Yalçın (2015), Sevtap Sümer Eker (2016) ve A. Akgül (2017)'ün m-katlı bi-ünivalent fonksiyonlar ile ilgili yapmış oldukları çalışmalardan bazı örnekler verilmiştir.

Tanım 3.5.1 $f \in \Sigma_m$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma_m$ fonksiyonu

$$\left| \arg\left(f'(z) \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad \left(z \in U,\ 0 < \alpha \le 1 \right)$$

ve

$$\left| \arg\left(g'(w) \right) \right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad \left(w \in U,\ 0 < \alpha \le 1 \right)$$

şartlarını sağlıyorsa (3.4.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $\mathrm{H}_{\Sigma,m}(\alpha)$ sınıfındadır denir. Burada $g(w)$, (3.4.3) de tanımlanan fonksiyondur (H.M. Srivastava, S. Sivasubramanian and R.Sivakumar, 2014).

Teorem 3.5.2 $f \in \mathrm{H}_{\Sigma,m}(\alpha)$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları

$$|a_{m+1}| \le \frac{2\alpha}{m\sqrt{(m+1)(\alpha m+m+1)}}, \qquad (0<\alpha\le 1,\ m\in\mathbb{N})$$

$$|a_{2m+1}| \le \frac{2\alpha\left[(2m+1)\alpha+m+1\right]}{(m+1)(2m+1)}, \qquad (0<\alpha\le 1,\ m\in\mathbb{N})$$

olur (H.M. Srivastava S. Sivasubramanian and R.Sivakumar, 2014).

Tanım 3.5.3 $f\in\sum_m$ ve $g=f^{-1}$ olsun. Eğer $f\in\sum_m$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\{f'(z)\}>\beta \qquad (z\in U, 0\le\beta<1)$$

ve

$$\operatorname{Re}\{g'(z)\}>\beta \qquad (w\in U, 0\le\beta<1)$$

şartlarını sağlıyorsa (3.4.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $\mathrm{H}_{\Sigma,m}(\beta)$ sınıfındadır denir (H.M. Srivastava, S. Sivasubramanian and R.Sivakumar, 2014).

Teorem 3.5.4 $f \in \mathrm{H}_{\Sigma,m}(\beta)$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları

$$|a_{m+1}| \le 2\sqrt{\frac{(1-\beta)}{(m+1)(2m+1)}}, \qquad (0<\beta\le 1,\ m\in\mathbb{N})$$

$$|a_{2m+1}| \le 2(1-\beta)\left(\frac{(1-\beta)(2m+1)+m+1}{(m+1)(2m+1)}\right), \quad (0<\beta\le 1,\ m\in\mathbb{N})$$

olur (H.M. Srivastava, S. Sivasubramanian and R.Sivakumar, 2014).

Tanım 3.5.5 $f\in\sum_m$ ve $g=f^{-1}$ olsun. Eğer $f\in\sum_m$ fonksiyonu

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \qquad (z\in U,\ 0\le\lambda<1,\ 0\le\alpha<1)$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{\lambda g'(w)}{(1-\lambda)g(w)+\lambda wg'(w)}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \qquad (w\in U,\ 0\le\lambda<1,\ 0\le\alpha<1)$$

şartlarını sağlıyorsa (3.4.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $S_{\Sigma_m}(\alpha,\lambda)$ sınıfındadır denir (Ş. Altınkaya and S. Yalçın, 2015).

Teorem 3.5.6 $f \in S_{\Sigma_m}(\alpha,\lambda)$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları,

$$|a_{m+1}| \le \frac{2\alpha}{m(1-\lambda)\sqrt{\alpha+1}} \ , \quad (0 \le \lambda < 1,\ 0 < \alpha \le 1,\ m \in \mathbb{N})$$

$$|a_{2m+1}| \le \frac{\alpha}{m(1-\lambda)} + \frac{2(m+1)\alpha^2}{m^2(1-\lambda)^2} \ , \ (0 \le \lambda < 1,\ 0 < \alpha \le 1,\ m \in \mathbb{N})$$

olur (Ş. Altınkaya and S. Yalçın, 2015).

Tanım 3.5.7 $f \in \sum_m$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \sum_m$ fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{(1-\lambda)f(z)+\lambda zf'(z)}\right\} > \beta \qquad (z \in U,\ 0 \le \lambda < 1,\ 0 \le \beta < 1)$$

ve

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\lambda g'(z)}{(1-\lambda)g(w)+\lambda wg'(w)}\right\} > \beta \qquad (w \in U,\ 0 \le \lambda < 1,\ 0 \le \beta < 1)$$

şartlarını sağlıyorsa (3.4.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $S_{\Sigma_m}(\beta,\lambda)$ sınıfındadır denir (Ş. Altınkaya and S. Yalçın, 2015).

Teorem 3.5.8 $f \in S_{\Sigma_m}(\beta,\lambda)$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları

$$|a_{m+1}| \le \frac{\sqrt{2(1-\beta)}}{m(1-\lambda)}, \qquad (0 \le \lambda < 1,\ 0 < \beta \le 1,\ m \in \mathbb{N})$$

$$|a_{2m+1}| \le \frac{2(m+1)(1-\beta)^2}{m^2(1-\lambda)^2} + \frac{1-\beta}{m(1-\lambda)} \ , \ (0 \le \lambda < 1,\ 0 < \beta \le 1,\ m \in \mathbb{N})$$

olur (Ş. Altınkaya and S. Yalçın, 2015).

Tanım 3.5.9 $f \in \sum_m$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \sum_m$ fonksiyonu

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (z \in U,\ \lambda \ge 0,\ 0 \le \alpha < 1,\ m \in \mathbb{N})$$

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (w \in U,\ \lambda \ge 0,\ 0 \le \alpha < 1,\ m \in \mathbb{N})$$

şartlarını sağlıyorsa (3.4.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $A_{\Sigma,m}^{\alpha,\lambda}$ sınıfındadır denir (S.Sümer Eker, 2016).

Teorem 3.5.10 $f \in A_{\Sigma,m}^{\alpha,\lambda}$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları

$$|a_{m+1}| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{(1+m\lambda)^2 + \alpha m\left(1+2m\lambda - m\lambda^2\right)}}, \quad \left(0 \le \lambda < 1,\ 0 < \alpha \le 1,\ m \in \mathbb{N}\right)$$

$$|a_{2m+1}| \le \frac{2\alpha^2(m+1)}{(1+m\lambda)^2} + \frac{2\alpha}{1+2m\lambda}, \quad \left(0 \le \lambda < 1,\ 0 < \alpha \le 1,\ m \in \mathbb{N}\right)$$

olur (S. Sümer Eker, 2016).

Tanım 3.5.11 $f \in \sum_m$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \sum_m$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z)\right\} > \beta, \quad \left(0 \le \lambda < 1,\ 0 < \beta \le 1,\ m \in \mathbb{N}\right)$$

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w)\right\} > \beta\ , \quad \left(0 \le \lambda < 1,\ 0 < \beta \le 1,\ m \in \mathbb{N}\right)$$

şartlarını sağlıyorsa (3.4.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $A_{\Sigma,m}^{\lambda}(\beta)$ sınıfındadır denir (S. Sümer Eker, 2016).

Teorem 3.5.12 $f \in A_{\Sigma,m}^{\lambda}(\beta)$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları

$$|a_{m+1}| \le 2\sqrt{\frac{1-\beta}{(1+2m\lambda)(m+1)}}, \quad \left(0 \le \lambda < 1, 0 < \beta \le 1,\ m \in \mathbb{N}\right)$$

$$|a_{2m+1}| \le \frac{2(1-\beta)^2(m+1)}{(1+m\lambda)^2} + \frac{2(1-\beta)}{1+2m\lambda}, \quad \left(0 \le \lambda < 1,\ 0 < \beta \le 1,\ m \in \mathbb{N}\right)$$

olur (S. Sümer Eker, 2016).

Tanım 3.5.13 $f \in \sum_m$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \sum_m$ fonksiyonu

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) + \delta z f''(z)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad \left(z \in U,\ 0 \le \lambda < 1,\ 0 \le \alpha < 1\right)$$

$$\left|\arg\left((1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) + \delta w g''(w)\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad \left(w \in U,\ 0 \le \lambda < 1,\ 0 \le \alpha < 1\right)$$

şartlarını sağlıyorsa (3.4.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $S_{\Sigma_m}(\alpha,\lambda,\delta)$ sınıfındadır denir (A. Akgül, 2017).

Teorem 3.5.14 $f \in S_{\Sigma_m}(\alpha,\lambda,\delta)$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları,

$$|a_{m+1}| \le \frac{2\alpha}{\sqrt{\left|\left(1+2\lambda m+2\delta m(m+1)\right)(m+1)\alpha+(1-\alpha)\left(1+m\lambda+\delta m(m+1)\right)^2\right|}}$$

$$|a_{2m+1}| \le \frac{4\alpha^2}{\left(1+m\lambda+m(m+1)\delta\right)^2}+\frac{2\alpha}{1+2m\lambda+2m(m+1)\delta}$$

olur (A. Akgül, 2017).

Tanım 3.5.15 $f \in \Sigma_m$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma_m$ fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\frac{f(z)}{z}+\lambda f'(z)+\delta z f''(z)\right\} > \beta \qquad \left(0 \le \lambda < 1,\ 0 \le \beta < 1,\ z \in U\right)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\frac{g(w)}{z}+\lambda g'(w)+\delta w g''(w)\right\} > \beta \qquad \left(0 \le \lambda < 1,\ 0 \le \beta < 1,\ w \in U\right)$$

şartlarını sağlıyorsa (3.4.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $S_{\Sigma_m}(\beta,\lambda,\delta)$ sınıfındadır denir (A. Akgül, 2017).

Teorem 3.5.16 $f \in S_{\Sigma_m}(\beta,\lambda,\delta)$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları,

$$|a_{m+1}| \le 2\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{1+2m\lambda+2m(2m+1)\delta}}\ , \qquad \left(0 \le \lambda < 1,\ 0 < \beta \le 1,\ m \in \mathbb{N}\right)$$

$$|a_{2m+1}| \le \frac{4(1-\beta)^2}{\left(1+m\lambda+m(m+1)\delta\right)^2}+\frac{2(1-\beta)}{\left(1+2m\lambda+2m(m+1)\delta\right)}, \qquad \left(0 \le \lambda < 1,\ 0 < \beta \le 1,\ m \in \mathbb{N}\right)$$

olur (A. Akgül, 2017).

4.ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlara değinilecektir. Amacımız, Σ_m sınıfındaki fonksiyonlardan oluşan iki yeni alt sınıfı tanımlamak ve tanımladığımız bu sınıflar için kesin olmayan $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ başlangıç katsayı sınırlarını elde etmektir. Bu bölümde yapılan çalışma ve elde edilen sonuçlar 'New Trends in Mathematical Sciences' adlı bilim dergisinde yayınlanmak üzere kabul edilmiştir.

4.1 $S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\alpha)$ Sınıfı

Bu kesimde, Σ_m sınıfının $S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\alpha)$ ile gösterilen yeni bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıf ile ilgili kesin olmayan $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ katsayı sınırlarını elde edeceğiz. Öncelikli olarak analitik ve m-katlı simetrik bi-ünivalent olan $f(z)$ ve $g(w)$ fonksiyonlarının seri açılımını ve ana teoremlerimizde kullanacağımız Lemma 4.1.2 vereceğiz.

Tanım 4.1.1 $f \in \Sigma_m$ ve $g = f^{-1}$, $m \in \mathbb{N} = \{1,2,...\}$ olmak üzere ;

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_{mk+1} z^{mk+1} = z + a_{2m+1} z^{2m+1} + a_{3m+1} z^{3m+1} + ... \tag{4.1.1}$$

ve

$$g(w) = w - a_{m+1} w^{m+1} + \left[(m+1)a^2_{m+1} - a_{2m+1}\right] w^{2m+1} - \left[\frac{1}{2}(m+1)(3m+2)a^3_{m+1} - (3m+2)a_{m+1}a_{2m+1} + a_{3m+1}\right] w^{3m+1} + ... \tag{4.1.2}$$

şeklindedir.

Lemma 4.1.2 $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + ...$ fonksiyonu U birim diskinde pozitif reel kısma sahip analitik bir fonksiyon ise

$$|p_n| \le 2 \quad , \quad \left| p_2 - \frac{p_1^2}{2} \right| \le 2 - \frac{|p_1|^2}{2} \quad , \quad \left(n \in \mathbb{N} = \{1,2,...\}\right)$$

şartları sağlanır (Duren, 1983).

Tanım 4.1.3 $f \in \Sigma_m$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma_m$ fonksiyonu, $\tau \in \mathbb{C} / \{0\}$, $0 < \alpha \le 1$, $0 \le \lambda < 1$ olmak üzere,

$$\left|\arg\left(1+\frac{1}{\tau}\left(\frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right)\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}, \qquad z\in U$$

ve

$$\left|\arg\left(1+\frac{1}{\tau}\left(\frac{wg'(w)+\lambda w^2 g''(w)}{\lambda wg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right)\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}, \qquad w\in U$$

şartlarını sağlıyorsa (4.1.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\alpha)$ sınıfındadır denir.

4.2 $S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\alpha)$ Sınıfının Başlangıç Katsayı Sınırları

Teorem 4.2.1 $f\in S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\alpha)$ olsun. Bu durumda başlangıç katsayı sınırları,

$$|a_{m+1}|\le\frac{2\alpha|\tau|}{\sqrt{2m\left(m+2m^2\lambda-m^2\lambda^2\right)\alpha|\tau|-(\alpha-1)m^2(1+m\lambda)^2}}, \quad \tau\in\mathbb{C}/\{0\},\ 0\le\lambda<1,\ 0<\alpha\le1,\ m\in\mathbb{N} \quad (4.1.3)$$

ve

$$|a_{2m+1}|\le\frac{2(m+1)\alpha^2|\tau|^2}{m^2(1+m\lambda)^2}+\frac{\alpha|\tau|}{m(1+2m\lambda)}, \quad \tau\in\mathbb{C},\ 0\le\lambda<1,\ 0<\alpha\le1,\ m\in\mathbb{N} \quad (4.1.4)$$

olur.

İspat: $f\in S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\alpha)$ ve $g=f^{-1}$ olsun. $\tau\in\mathbb{C}/\{0\},\ 0\le\lambda<1,\ 0<\alpha\le1,\ m\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$1+\frac{1}{\tau}\left(\frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right)=\left[p(z)\right]^\alpha \quad (4.1.5)$$

ve

$$1+\frac{1}{\tau}\left(\frac{wg'(w)+\lambda w^2 g''(w)}{\lambda wg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right)=\left[q(w)\right]^\alpha \text{ yazılır.} \quad (4.1.6)$$

Burada $p,q\in P$ olmak üzere $p(z)$ ve $q(z)$ fonksiyonları aşağıdaki formlara sahiptir.

$$p(z)=1+p_m z^m+p_{2m}z^{2m}+\ldots \quad \text{ve} \quad q(w)=1+q_m w^m+q_{2m}w^{2m}+\ldots \quad .$$

(4.1.5) ve (4.1.6) da verilen katsayıları eşitlediğimizde aşağıda verilen (4.1.7), (4.1.8), (4.1.9) ve (4.1.10) denklemlerini elde ederiz.

$$\frac{1}{\tau}m(1+m\lambda)a_{m+1}=\alpha p_m \ , \quad (4.1.7)$$

$$\frac{1}{\tau}\left[2m\left(1+2m\lambda\right)a_{2m+1}-m\left(1+m\lambda\right)^2 a_{m+1}^2\right]=ap_{2m}+\frac{a\left(a-1\right)}{2}p^2{}_m \ , \tag{4.1.8}$$

$$-\frac{1}{\tau}m\left(1+m\lambda\right)a_{m+1}=\alpha q_m \ , \tag{4.1.9}$$

$$\frac{1}{\tau}\left[2m\left(1+2m\lambda\right)\left[\left(m+1\right)a_{m+1}^2-a_{2m+1}\right]-m\left(1+m\lambda\right)^2 a_{m+1}^2\right]=aq_{2m}+\frac{a\left(a-1\right)}{2}q^2{}_m \ . \tag{4.1.10}$$

(4.1.7) ve (4.1.9) denklemlerini kullanarak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$p_m=-q_m \ , \tag{4.1.11}$$

$$\frac{2}{\tau^2}m^2\left(1+m\lambda\right)^2 a_{m+1}^2=\alpha^2\left(p_m{}^2+q_m{}^2\right) \ . \tag{4.1.12}$$

Ayrıca (4.1.8), (4.1.10) ve (4.1.12) denklemlerini kullanarak,

$$\frac{1}{\tau}\left[a_{m+1}^2 2m\left[\left(1+2m\lambda\right)\left(m+1\right)-\left(1+m\lambda\right)^2\right]\right]=\alpha\left(p_{2m}+q_{2m}\right)+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2}\left(p_m{}^2+q_m{}^2\right) \tag{4.1.13}$$

eşitliği elde edilir. Buradan a_{m+1}^2 değişkeni aşağıdaki şekilde bulunur.

$$a_{m+1}^2=\frac{\alpha^2\tau^2\left(p_{2m}+q_{2m}\right)}{2m\left(m+2m^2\lambda-m^2\lambda^2\right)\alpha\tau-\left(\alpha-1\right)m^2\left(1+m\lambda\right)^2} \ . \tag{4.1.14}$$

(4.1.14) ile verilen denklemde p_{2m} ve q_{2m} katsayıları için Lemma 4.1.2'yi uygulayarak modül alınırsa,

$$\left|a_{m+1}\right|\leq\frac{2\alpha\left|\tau\right|}{\sqrt{2m\left(m+2m^2\lambda-m^2\lambda^2\right)\alpha\left|\tau\right|-\left(\alpha-1\right)m^2\left(1+m\lambda\right)^2}}$$

elde edilir.

Şimdi $\left|a_{2m+1}\right|$ katsayısının sınırını bulmak için (4.1.8) denkleminden (4.1.10) denklemini çıkartırsak,

$$\frac{1}{\tau}\left[2m\left(1+2m\lambda\right)\left(2a_{2m+1}-\left(m+1\right)a_{m+1}^2\right)\right]=\alpha\left(p_{2m}-q_{2m}\right)+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)}{2}\left(p_m{}^2-q_m{}^2\right) \tag{4.1.15}$$

eşitliği elde edilir. (4.1.11) ve (4.1.12) denklemlerini bulduğumuz eşitlikte kullanarak ve p_m, p_{2m}, q_m ve q_{2m} katsayıları için Lemma 4.1.2'yi uygulayarak modül alınırsa,

$$\left|a_{2m+1}\right|\leq\frac{2\left(m+1\right)\alpha^2\left|\tau\right|^2}{m^2\left(1+m\lambda\right)^2}+\frac{\alpha\left|\tau\right|}{m\left(1+2m\lambda\right)}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

4.3 $S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\beta)$ Sınıfı

Bu kesimde, $\sum_m$ sınıfının $S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\beta)$ ile gösterilen yeni bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıf ile ilgili kesin olmayan $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ katsayı sınırlarını elde edeceğiz.

Tanım 4.3.1 $f\in\sum_m$ ve $g=f^{-1}$ olsun. Eğer $f\in\sum_m$ fonksiyonu için $\tau\in\mathbb{C}/\{0\}, 0<\beta\le 1, 0\le\lambda<1$ olmak üzere,

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left(\frac{zg'(z)+\lambda z^2g''(z)}{\lambda zg'(z)+(1-\lambda)g(z)}-1\right)\right\}>\beta, \qquad z\in U$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{1}{\tau}\left(\frac{wg'(w)+\lambda w^2g''(w)}{\lambda wg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right)\right\}>\beta, \qquad w\in U$$

şartları sağlanıyorsa (4.1.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\beta)$ sınıfındadır denir.

4.4 $S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\beta)$ Sınıfının Başlangıç Katsayı Sınırları

Teorem 4.4.1 $f\in S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\beta)$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları

$$|a_{m+1}|\le\sqrt{\frac{2|\tau|(1-\beta)}{m\left(m+2m^2\lambda-m^2\lambda^2\right)}}, \qquad \left(\tau\in\mathbb{C}/\{0\},\ 0\le\lambda<1,\ 0<\alpha\le 1,\ m\in\mathbb{N}\right)$$

ve

$$|a_{2m+1}|\le\frac{2(m+1)|\tau|^2(1-\beta)^2}{m^2(1+m\lambda)^2}+\frac{|\tau|(1-\beta)}{m(1+2m\lambda)}, \quad \left(\tau\in\mathbb{C}/\{0\},\ 0\le\lambda<1,\ 0<\alpha\le 1,\ m\in\mathbb{N}\right)$$

olur.

İspat: $f\in S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\beta)$ ve $g=f^{-1}$ olsun. $p,q\in P$ olmak üzere

$$1+\frac{1}{\tau}\left(\frac{zf'(z)+\lambda z^2f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right)=\beta+(1-\beta)p(z) \tag{4.1.16}$$

ve

$$1+\frac{1}{\tau}\left(\frac{wg'(w)+\lambda w^2g''(w)}{\lambda wg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right)=\beta+(1-\beta)q(w) \tag{4.1.17}$$

yazılır.

(4.16) ve (4.17) denklemlerinden,

$$\frac{1}{\tau}m(1+m\lambda)a_{m+1}=(1-\beta)\,p_m \quad , \tag{4.1.18}$$

$$\frac{1}{\tau}\left[2m(1+2m\lambda)a_{2m+1}-m(1+m\lambda)^2\,a_{m+1}^2\right]=(1-\beta)\,p_{2m} \;, \tag{4.1.19}$$

$$-\frac{1}{\tau}m(1+m\lambda)a_{m+1}=(1-\beta)q_m \;, \tag{4.1.20}$$

$$\frac{1}{\tau}\left[2m(1+2m\lambda)\left[(m+1)a_{m+1}^2-a_{2m+1}\right]-m(1+m\lambda)^2\,a_{m+1}^2\right]=(1-\beta)q_{2m} \tag{4.1.21}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.1.18) ve (4.1.20) denklemlerinden ise

$$p_m=-q_m \tag{4.1.22}$$

ve

$$\frac{2}{\tau^2}m^2(1+m\lambda)^2\,a_{m+1}^2=(1-\beta)^2\left(p_m{}^2+q_m{}^2\right) \tag{4.1.23}$$

elde edilir. (4.1.19) ve (4.1.21) denklemlerini taraf tarafa toplarsak;

$$\frac{1}{\tau}\left[2m(1+2m\lambda)(m+1)-2m(1+m\lambda)^2\right]a_{m+1}^2=(1-\beta)(p_{2m}+q_{2m}) \tag{4.1.24}$$

olur. Buradan a_{m+1}^2 ifadesini denklemden çekersek,

$$a_{m+1}^2=\frac{\tau(1-\beta)(p_{2m}+q_{2m})}{2m\left(m+2m^2\lambda-m^2\lambda^2\right)} \tag{4.1.25}$$

bulunur. (4.1.25) ile verilen denkleme p_{2m} ve q_{2m} katsayıları için Lemma 4.1.2'yi uygulayarak modül alınırsa,

$$|a_{m+1}|\le\sqrt{\frac{2|\tau|(1-\beta)}{m\left(m+2m^2\lambda-m^2\lambda^2\right)}}$$

elde edilir.

Şimdi de $|a_{2m+1}|$ katsayı sınırını bulmak için (4.1.19) denkleminden (4.1.21) denklemini çıkartırsak

$$\frac{1}{\tau}\left[4m(1+2m\lambda)a_{2m+1}-2m(1+2m\lambda)(m+1)a_{m+1}^2\right]=(1-\beta)(p_{2m}-q_{2m}) \tag{4.1.26}$$

eşitliği elde edilir. (4.1.22) ve (4.1.23) denklemlerini bulduğumuz eşitlikte kullanarak ve p_{2m}, q_{2m} katsayıları için Lemma 4.1.2'yi uygulayarak modül alınırsa,

$$|a_{2m+1}|\le\frac{2(m+1)|\tau|^2(1-\beta)^2}{m^2(1+m\lambda)^2}+\frac{|\tau|(1-\beta)}{m(1+2m\lambda)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece Teorem 4.4.1'in ispatı tamamlanır.

Tanım 4.4.2 $n \geq 2$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere $p_n(\beta)$ tek değerli analitik fonksiyonların sınıfı olsun. $z = re^{i\theta}$, $p(0) = 1$ için,

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\operatorname{Re} p(z) - \beta}{1-\beta} \right| d\theta \leq k\pi$$

eşitsizliği sağlanır ve $\beta = 0$ için $p_n = p_n(0)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla p_n sınıfı $p(z)$ fonksiyonlarının sınıfını temsil eder. U birim diski içinde, $p(0) = 1$ ve

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - ze^{it}}{1 + ze^{it}} du(t)$$

olur. u sınırlı varyansyonlu gerçel değerli fonksiyon iken aşağıdaki bağıntıları sağlanır.

$$\int_0^{2\pi} du(t) = 2\pi \quad \text{ve} \quad \int_0^{2\pi} |du(t)| \leq n \quad , \quad n \geq 2 \quad .$$

Unutmayalım ki $p = p_2$ Caratheodory fonksiyonunun iyi bilinen bir sınıfıdır. Yani açık birim disk U da pozitif gerçel kısım ile normalize edilmiş fonksiyondur (K.Padmanabhan and R.Parvatham,1975).

Teorem 4.4.5'i ispatlayabilmek için aşağıda verilen Lemma 4.4.3 ihtiyaç duyarız.

Lemma 4.4.3 $\phi(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + ...$ fonksiyonu U birim diskinde pozitif reel kısma sahip analitik bir fonksiyon ise $n \geq 2$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere,

$$\phi(z) \in p_n(\beta), \quad |h_k| \leq n(1-\beta); \quad k \geq 1 \quad , z \in U$$

şartları sağlanır (Prem Pratap Vays and Shashi Kant, 2017).

Tanım 4.4.4 $f \in \Sigma_m$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma_m$ fonksiyonu $\tau \in \mathbb{C} / \{0\}$, $0 \leq \beta \leq 1$, $0 \leq \lambda \leq 1$ ve $z, w \in U$ olmak üzere;

$$1 + \frac{1}{\tau}\left(\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1-\lambda) f(z)} - 1 \right) \in p_n(\beta) \tag{4.1.27}$$

ve

$$1+\frac{1}{\tau}\left(\frac{wg'(w)+\lambda w^2 g''(w)}{\lambda wg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right)\in p_n(\beta) \tag{4.1.28}$$

şartlarını sağlıyorsa (4.4.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\beta)$ sınıfındadır denir.

Teorem 4.4.5 $f\in S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\beta)$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları

$$|a_{m+1}|\le \min\left\{\sqrt{\frac{n|\tau|(1-\beta)}{m\left(m+2m^2\lambda-m^2\lambda^2\right)}},\frac{n|\tau|(1-\beta)}{m(1+m\lambda)}\right\}$$

ve

$$|a_{2m+1}|\le\frac{(m+1)n|\tau|(1-\beta)}{2m\left(m+2m^2\lambda-m^2\lambda^2\right)}$$

olur.

İspat: $f\in S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\beta)$ ve $g=f^{-1}$ olsun. $0\le\lambda\le1,\ 0\le\beta\le1,\ \tau\in\mathbb{C}/\{0\}$ ve $z,w\in U$ olmak üzere,

$$1+\frac{1}{\tau}\left(\frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right)\in p_n(\beta) \tag{4.1.29}$$

ve

$$1+\frac{1}{\tau}\left(\frac{wg'(w)+\lambda w^2 g''(w)}{\lambda wg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right)\in p_n(\beta) \tag{4.1.30}$$

dir.

(4.1.29) ve (4.1.30) denklemlerinden;

$$\frac{1}{\tau}m(1+m\lambda)a_{m+1}=p_m\ , \tag{4.1.31}$$

$$\frac{1}{\tau}\left[2m(1+2m\lambda)a_{2m+1}-m(1+m\lambda)^2a_{m+1}^2\right]=p_{2m}\ , \tag{4.1.32}$$

$$-\frac{1}{\tau}m(1+m\lambda)a_{m+1}=q_m\ , \tag{4.1.33}$$

$$\frac{1}{\tau}\left[2m(1+2m\lambda)\left[(m+1)a_{m+1}^2-a_{2m+1}\right]-m(1+m\lambda)^2a_{m+1}^2\right]=q_{2m} \tag{4.1.34}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.31) ve (4.33) denklemlerinden ise,

$$a_{m+1}=\frac{\tau p_m}{m(1+m\lambda)}=\frac{-\tau q_m}{m(1+m\lambda)} \tag{4.1.35}$$

elde edilir.

(4.1.32) ve (4.1.34) denklemlerini taraf tarafa topladığımızda,

$$a_{m+1}^2 = \frac{\tau\left(p_{2m}+q_{2m}\right)}{2m\left(m+2m^2\lambda-m^2\lambda^2\right)} \tag{4.1.36}$$

bulunur. (4.1.35) ve (4.1.36) ile verilen denklemlere p_m, p_{2m} ve q_m, q_{2m} katsayıları için Lemma 4.4.3'ü uygulayıp, modül alınırsa,

$$\left|a_{m+1}\right| \le \min\left\{\sqrt{\frac{n|\tau|(1-\beta)}{m\left(m+2m^2\lambda-m^2\lambda^2\right)}}, \frac{n|\tau|(1-\beta)}{m(1+m\lambda)}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi de $\left|a_{2m+1}\right|$ katsayı sınırını bulmak için (4.1.32) denkleminden (4.1.34) denklemini çıkararak

$$\frac{1}{\tau}\left[2m(1+2m\lambda)\left(2a_{2m+1}-(m+1)a_{m+1}^2\right)\right] = p_{2m}-q_{2m}$$

eşitliği elde edilir. (4.1.35) ve (4.1.36) denklemlerini bulduğumuz son eşitlikte kullanarak ve p_{2m}, q_{2m} katsayıları için Lemma 4.4.3'ü uygulayıp modül alınırsa,

$$\left|a_{2m+1}\right| \le \frac{(m+1)n|\tau|(1-\beta)}{2m\left(m+2m^2\lambda-m^2\lambda^2\right)}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Teorem 4.4.5'in ispatı tamamlanmış olur.

5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda $S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\alpha)$ ve $S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\beta)$ sınıflarını tanımlayarak, bu sınıflara ait fonksiyonların başlangıç katsayı sınırlarını inceledik. Elde etiğimiz tahminlerde parametreler için bazı özel seçimler yapılırsa, daha önce çalışılmış olan önemli sınıflar ve bu sınıflara ait bazı sonuçlar elde edilir.

Tanım 4.1.3 ve Tanım 4.3.1 ile verdiğimiz sınıflar ve bu sınıflara ait elde ettiğimiz Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.4.1 deki sonuçlar birçok çalışmanın genellemesi niteliğinde olup bu sonuçlardan bazıları aşağıda verilmiştir.

Eğer $\lambda=0$ ve $\tau=1$ alınırsa $S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\alpha)$ ve $S_{\Sigma_m}(\tau,\lambda,\beta)$ sınıfları sırasıyla $S_{\Sigma_m}^{\alpha}$ ve $S_{\Sigma_m}^{\beta}$ sınıflarına indirgenir ve aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Tanım 5.1 $f\in\Sigma_m$ ve $g=f^{-1}$ olsun. Eğer $f\in\Sigma_m$ fonksiyonu için $0<\alpha\le 1$ olmak üzere

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2},\qquad z\in U$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2},\qquad w\in U$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa (4.1.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $S_{\Sigma_m}^{\alpha}$ sınıfındadır denir (Ş. Altınkaya and S. Yalçın, 2015).

Teorem 5.2 $f\in S_{\Sigma_m}^{\alpha}$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları

$$|a_{m+1}|\le\frac{2\alpha}{m\sqrt{\alpha+1}}\qquad\text{ve}\qquad |a_{2m+1}|\le\frac{\alpha}{m}+\frac{2(m+1)a^2}{m^2},\qquad \left(0<\alpha\le 1,\ m\in\mathbb{N}\right)$$

olur (Ş. Altınkaya and S. Yalçın, 2015).

Tanım 5.3 $f\in\Sigma_m$ ve $g=f^{-1}$ olsun. Eğer $f\in\Sigma_m$ fonksiyonu için $0<\beta\le 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\beta\ ,\qquad z\in U$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{wg'(w)}{g(w)}\right\}>\beta\ ,\qquad w\in U$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa (4.1.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $S_{\Sigma_m}^{\beta}$ sınıfındadır denir (Ş. Altınkaya and S. Yalçın, 2015).

Teorem 5.4 $f \in S_{\Sigma_m}^{\beta}$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları $0<\beta \leq 1,\ m \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$|a_{m+1}| \leq \frac{\sqrt{2(1-\beta)}}{m} \quad \text{ve} \quad |a_{2m+1}| \leq \frac{2(m+1)(1-\beta)^2}{m^2}+\frac{1-\beta}{m}$$

olur (Ş. Altınkaya and S. Yalçın, 2015).

$m=1$ durumu için eğer , $\lambda=0$ ve $\tau=1$ alınırsa Tanım 4.1.3 ve Tanım 4.3.1 ile verdiğimiz sınıflar sırasıyla $S^*_{\Sigma}(\alpha)$ ve $S^*_{\Sigma}(\beta)$ sınıflarına indirgenir ve aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Tanım 5.5 $f \in \Sigma$ ve $g=f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu için $0<\alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad , \qquad z \in U$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \quad , \qquad w \in U$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa (4.1.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $S^*_{\Sigma}(\alpha)$ sınıfındadır denir (G.Murugusundaramoorty, N.Magesh, and V. Prameela,2013).

Teorem 5.6 $f \in S^*_{\Sigma}(\alpha)$ olsun. Bu durumda katsayı sınırları $0<\alpha \leq 1$ olmak üzere,

$$|a_2| \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{\alpha+1}} \quad \text{ve} \quad |a_3| \leq 4\alpha^2+\alpha\ ,$$

olur (G.Murugusundaramoorty, N.Magesh, and V. Prameela,2013).

Tanım 5.7 $f \in \Sigma$ ve $g=f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu için $0<\beta \leq 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \beta \quad , \qquad z \in U$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{wg'(w)}{g(w)}\right\} > \beta \quad , \qquad w \in U$$

eşitsizlikleri sağlanıyorsa (4.1.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $S^*_{\Sigma}(\beta)$ sınıfındadır denir (G.Murugusundaramoorty, N.Magesh, and V. Prameela,2013).

Teorem 5.8 $f \in S_{\Sigma}^{*}(\beta)$ olsun. Bu durumda $0 < \beta \le 1$ için katsayı sınırları

$$|a_2| \le \sqrt{2(1-\beta)} \quad , \quad |a_3| \le 4(1-\beta)^2 + (1-\beta)$$

olur (G.Murugusundaramoorty, N.Magesh, and V. Prameela,2013).

$m = 1$ durumu için eğer sırasıyla $\lambda = 0$ ve $\lambda = 1$ alınırsa Tanım 4.4.4 ile verdiğimiz sınıf ve Teorem 4.4.5 deki katsayı sınırlarının aşağıdaki sonuçlara indirgendiği görülür (P.P. Vays and S. Kant, 2017).

Sonuç 5.9 $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu için $0 < \beta \le 1$ olmak üzere,

$$1 + \frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right] \in p_n(\beta) \quad \text{ve} \quad 1 + \frac{1}{\tau}\left[\frac{wg'(w)}{g(w)} - 1\right] \in p_n(\beta)$$

ise,

$$|a_2| \le \min\left\{\sqrt{n|\tau|(1-\beta)}, n|\tau|(1-\beta)\right\} \quad \text{ve} \quad |a_3| \le n|\tau|(1-\beta)$$

olur (P.P. Vays and S. Kant, 2017).

Sonuç 5.10 $f \in \Sigma$ ve $g = f^{-1}$ olsun. Eğer $f \in \Sigma$ fonksiyonu için $0 < \beta \le 1$ olmak üzere,

$$1 + \frac{1}{\tau}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right] \in p_n(\beta) \quad \text{ve} \quad 1 + \frac{1}{\tau}\left[\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right] \in p_n(\beta)$$

ise,

$$|a_2| \le \min\left\{\sqrt{\frac{n|\tau|(1-\beta)}{2}}, \frac{n|\tau|(1-\beta)}{2}\right\} \quad \text{ve} \quad |a_3| \le \frac{n|\tau|(1-\beta)}{2}$$

olur (P.P. Vays and S. Kant, 2017).

KAYNAKLAR

Akgül, A. 2017. On the coefficient estimates of analytic and bi-univalent m-fold symmetric functions, Matematica Aeterna, Vol.7,no.3, 253-260.

Alexander, J.W., 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann. of Math.,(17): 12-22.

Altınkaya, S and Yalçın, S., 2015. Coefficient bounds for certain subclasses of m-fold symmetric biunivalent functions, Hindawi Publishing Corporation Journal Of Matematics, vol. 2015, Article ID 241683, 5 pages

Bieberbach, L., 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welcheeine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl. : 940-955

Brannan, D. A. ve Kirwan, W.E.,1969. On some classes of bounded univalent functions, J.London Math Soc. , Vol.1, No.2, pp431-443.

Caratheodory, C., 1907. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen Math.Ann., 64, 95-115.

Duren, P.L., 1983. Univalent Functions, Grundlehren der Math. Wissenschaften 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo

Eker, S.S., 2016. Coefficient bounds for subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions, Turkish Journal of Mathematics. No.641-646

Goodman, A. W., 1983. Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey.

Koebe, P., 1907. Über die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven, Nach. Ges. Wiss. Gottingen 191-210.

Lewin, M., 1967. On a coefficient problem for bi-univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc., (18): 63-68.

Lindelöf, E., 1909. Mémoire sur certaines inegualités dans la théorie des fonctions onogènes et sur quelques propriétes nouvelles de ces fonctions dans la voisinage d'un point singulier essentiel, Acta.Soc.Sci.Fenn., 35, 7 : 1–35

Murugusundaramoorty, G., Magesh, N. and Prameela, V., 2013. Coefficient bounds for certain subclasses of bi-univalent function, Abstract and Applied Analysis, , Article ID 573017, 3 pages

Padmanabhan, K. and Parvatham, R.,1975. Properties of aclass functions wit bounded boundary rotation , Ann. Polon. Math., 31, 311-323

Pommerenke Ch., 1975. Univalent Functions, Vandenhoech and Ruprecht, Göttingen.

Ponnusamy S. ve Silverman H., 2006. Complex Variables with Applications, Birkhauser, Boston.

Prem Pratap Vyas and Shashi Kant ,2017. Estimates on Initial Coeffici ents of Certain Subclasses of bi-univalent Functions Associated with the Class $p_m(\beta)$, International Journal of Mathematics and its Applications.vol.5 Issue 1-B, 165-169

Robertson, M.S., 1936. On the theory of univalent functions, Ann. of Math. (37): 374-408.

Rogosinski, W., 1943. On the coefficients of subordinate functions,Proc, London Math. Soc. 2, (48): 48-82.

Srivastava, H. M. et al, 2010. Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions, Appl. Math. Lett. 23, 1188-1192.

Srivastava, H.M., S. Sivasubramanian, and Sivakumar, R., 2014. Initial coefficient bounds for a subclass of *m*-fold symmetric biunivalent functions, *Tbilisi Mathematical Journal*, vol. 7, no. 2, pp. 1–10.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Naci TAŞAR
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Kozluk/ 1984
Telefon	**:**	0530 178 00 32
Faks	**:**	-----
e-mail	**:**	nacitasar_72@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı,İlçe,İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	**Batman Lisesi,Batman**	**2002**
Üniversite	:	**Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van**	**2007**

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2007-2008	**Van Uğur Eğitim Kurumları**	**Öğretmen**
2009-2011	**Mardin Uğur Eğitim Kurumları**	**Öğretmen**
2012-2018	**Batman İl Sağlık Müdürlüğü**	**Memur**
2018-	**Siirt İl Sağlık Müdürlüğü**	**Programcı**

UZMANLIK ALANI: Kompleks Analiz

FAALİYETLER

1.'INITIAL COEFFICIENT BOUNDS ON SOME SUBCLASSES OF M-FOLD SYMMETRIC BI-UNIVALENT FUNCTIONS' , 'EJONS JOURNAL' BİLİM DERGİSİNİN DÜZENLEMİŞ OLDUĞU '' 3RD INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATIC, ENGINEERING AND NATURAL SCIENCES'' ADLI KONGREDE SUNULMUŞTUR.

2. YAPILAN ÇALIŞMA VE ELDE EDİLEN SONUÇLAR 'NEW TRENDS İN MATHEMATİCAL SCİENCES' ADLI BİLİM DERGİSİNDE YAYINLANMAK ÜZERE KABUL EDİLMİŞTİR.