T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLAR

Mehmet Şirin SEZGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Ocak-2019
BATMAN

TEZ KABUL VE ONAYI

Mehmet Şirin SEZGİN tarafından hazırlanan "Simetrik Sayısal Yarıgruplar" adlı tez çalışması 30/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Prof. Dr. Sedat İLHAN …………………..

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER …………………..

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT …………………..

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Doç. Dr. Bahattin İŞCAN
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Mehmet Şirin SEZGİN

30.01.2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLAR

Mehmet Şirin SEZGİN

Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER

2019, 51 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Sedat İLHAN
Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER
Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT

Bu tezde, özel bir simetrik sayısal yarıgrup olan teleskopik sayısal yarıgruplar tanıtılarak bazı teleskopik sayısal yarıgrupların değişmezlerini ve Betti sayılarını bu yarıgrupların üreteçleri cinsinden ifade edilmesi ve ayrıca elde edilen Betti sayılarına ait katener derecelerinin hesaplanması amaçlanmaktadır.

Bu çalışmada, ilk olarak sayısal yarıgruplar, simetrik sayısal yarıgruplar, teleskopik sayısal yarıgruplar, katener derecesi ve Betti sayıları ile ilgili bilgiler verilmiştir. Daha sonra gömme boyutu 3 olan bazı teleskopik sayısal yarıgrup aileleri verilmiş ve bu ailelerin Betti sayıları için bazı formüller elde edilmiştir. Elde edilen bu formüller yardımıyla da bu ailelerin cinsi ve Frobenius sayıları için bir takım bağıntılar elde edilmiştir. Ayrıca, bu ailelerin Betti sayılarının çarpanları incelenmiş ve bazı teoremler sunulmuştur. Sunulan bu teoremler yardımıyla da bu Betti sayılarının bir kısmının katener dereceleri için de bir takım ifadeler türetilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Apery kümesi, Betti sayısı, Frobenius sayısı, Cins, Katener derecesi, Sayısal yarıgrup, Simetrik sayısal yarıgrup, Teleskopik sayısal yarıgrup.

ABSTRACT

MS THESIS

SYMMETRIC NUMERICAL SEMIGROUPS

Mehmet Şirin SEZGİN

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF BATMAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN MATHEMATICS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Meral SÜER

2019, 51 Pages

Jury
Prof. Dr. Sedat İLHAN
Asst. Prof. Dr. Meral SÜER
Asst. Prof. Dr. Veyis TURUT

In this thesis, it was aimed to introduce the telescopic numerical semigroups, which are a special symmetric numerical semigroup, in order to express the invariants of some telescopic numerical semigroups and the Betti numbers in terms of the generators of these semigroups and also to determine the catenary degrees of the obtained Betti numbers.

In this study, firstly, the information about numerical semigroups, symmetric numerical semigroups, telescopic numerical semigroups, catenary degree and Betti numbers were given. Then some telescopic numerical semigroup families with embedding dimension three were given and some formulas were obtained for the Betti numbers of these families. By using these formulas, some results were found for the genus and Frobenius numbers of these families. Furthermore, some theorems were presented for the factorizations of the Betti numbers of these families. By using these theorems, some formulas were also derived for the catenary degrees of some of these Betti numbers.

Keywords: Apery set, Betti number, Catenary degree, Frobenius number, Genus, Numerical semigroup, Symmetric numerical semigroup, Telescopic numerical semigroup.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın gerçekleşme sürecinde bana gösterdiği sabır, anlayış ve hoşgörü için, değerli vaktinden zaman ayırarak bana kattığı değerli bilgiler için danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek Lisans Tez jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Sedat İLHAN ve Sayın Veyis TURUT'e destek ve teşviklerinden dolayı teşekkür ederim.

Her zaman manevi desteğini yanımda hissettiğim sevgili amcam Doç. Dr. Necmettin SEZGİN'e teşekkür ederim.

Bu çalışma sürecinde desteklerinden dolayı sevgili arkadaşlarım Hüseyin ERSAL'ı ve Serhat SUNA'ya teşekkür ederim.

Ayrıca manevi desteklerinden dolayı aileme ve özellikle bugünlere gelmemi sağlayan ANNEM'e teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet Şirin SEZGİN
BATMAN-2019

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$A \setminus B$	: A fark B kümesi
$A \times B$	: A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
A^n	: n tane A nın kartezyen çarpımı
$A \cap B$	: A ve B kümelerinin kesişimi
$A \cup B$	: A ve B kümelerinin birleşimi
$A \subseteq B$	: A, B nin alt kümesidir
$A \subsetneq B$	: A, B nin özalt kümesidir
$A = B$	: A ve B kümeleri eşittir
$a \mid b$	: a, b yi böler
$a \nmid b$	: a, b yi bölmez
$a * b$	: (a,b) ikilisinin $*$ işlemi altındaki görüntüsü
$a \rho b$	: a ve b (ρ bağıntısına göre) bağlıdır
$Ap(S,n)$	: S sayısal yarıgrubunun n pozitif tamsayısına göre Apery kümesi
$c(m)$	: m pozitif tamsayısının katener derecesi
$d(x,y)$	: x ile y arasındaki uzaklık
$e(S)$	: S sayısal yarıgrubunun gömme boyutu
$F(S)$	: S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı
$G(S)$	: S sayısal yarıgrubunun boşluklarının kümesi
$g(S)$	: S sayısal yarıgrubunun cinsi
$G = (V, E)$	: Köşe noktaları kümesi V ve kenarlar kümesi E olan G çizgesi
$m(S)$	: S sayısal yarıgrubunun katlılığı
$\max(x, y)$	: x ve y nin büyüğü (maksimumu)
$\max \leq_s (A)$	: $\leq_s$ sıralama bağıntısına göre A kümesinin maksimal (büyükçe) elemanları
$obeb(n_1,...,n_e)$	: $n_1,...,n_e$ nin en büyük ortak böleni
$PF(S)$	: S sayısal yarıgrubunun pseudo-Frobenius sayılarının kümesi
S^*	: S sayısal yarıgrubunun sıfır olmayan elemanlar kümesi
$t(S)$	: S sayısal yarıgrubunun tipi
$Z_S(m)$	: $m \in S$ nin çarpanlarına ayrılma kümesi
$\mathbb{N}$	: Negatif olmayan tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}_t$	: Pozitif tek tamsayılar kümesi
$Betti(S)$	: S sayısal yarıgrubunun Betti kümesi
$x \equiv y \bmod (n)$	: n modülüne göre x, y ye denktir
$\sum_{x \in A} x$	: $x \in A$ olmak üzere x lerin toplamı
$\langle n_1,...,n_e \rangle$	: $\{n_1,...,n_e\}$ ile üretilen sayısal yarıgrup

∇_m	: Sıfır olmayan $m \in S$ için köşe kümesi $Z_S(m)$ olan çizge
$\#(A)$	: A kümesinin eleman sayısı
$\vert x \vert$	: $x=(x_1,...,x_i) \in Z_S(m)$ olmak üzere x in uzunluğu

1. GİRİŞ

$\mathbb{N}$ negatif olmayan tamsayılar kümesi ve $S \subseteq \mathbb{N}$ verilsin. S kümesi $\mathbb{N}$ kümesindeki toplama işlemine göre kapalı, $0 \in S$ ve $\mathbb{N} \setminus S$ kümesi sonlu ise S ye bir sayısal yarıgrup denir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

$n_1,...,n_e,b \in \mathbb{N}$ ve $obeb(n_1,...,n_e)=1$ olmak üzere $n_1x_1+...+n_ex_e=b$ şeklindeki denklemlere Diophantine denklemleri denir. Sayısal yarıgruplar Diophantine denklemlerinin negatif olmayan tamsayı çözümlerinin araştırılmasında doğal bir şekilde ortaya çıkmıştır (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014). Şöyle ki (1849-1917) yılları arasında Ferdinand Georg Frobenius derslerinin birisinde $n_1,...,n_e$ nin kombinasyonu olarak yazılamayan en büyük negatif olmayan tamsayıyı bulun şeklinde bir problem ortaya atmış daha sonra bu probleme the diophantine Frobenius Problem denilmiş bu sayıya da Frobenius sayısı denilmiştir ve genellikle $F(S)$ sembolüyle gösterilmiştir. Frobenius sayısının ortaya çıkmasıyla birlikte Frobenius sayısını ve algoritmaları hesaplamak için bir formül bulma umuduyla, matematiğin çeşitli alanlarında bir takım yöntemler kullanılmıştır. Örneğin, $e=2$ olduğunda

$$F(\langle n_1,n_2 \rangle)=n_1n_2-n_1-n_2$$

şeklinde bir formül bulunmuştur (Ramirez Alfonsin, 2005). Bununla birlikte $e=3$ olduğunda $F(\langle n_1,n_2,n_3 \rangle)$ hesaplamak ve bununla ilgili bir formül bulmak kolay olmamıştır. Dolayısıyla bununla ilgili çok sayıda araştırma makale konusu olmuştur (Ramirez Alfonsin, 2005).

Sayısal yarıgruplar özellikle değişmeli cebir, cebirsel geometri, düzlem cebirsel eğrilerin teklilikleri ve monoidlerde çarpanların incelenmesi çalışmalarında bize oldukça fayda sağlarlar (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014).

Sayısal yarıgruplar ortaya çıktıktan sonra bu yarıgruplar ile ilgili bir takım tanımlar verilmiştir. Bunlardan bazıları; Apery kümesi, katlılık, gömme boyutu, simetrik sayısal yarıgruplar, pseudo-simetrik sayısal yarıgruplar ve teleskopik sayısal yarıgruplardır.

Sayısal yarıgrupların tarihsel gelişimi hakkında kısa bir bilgi verdikten sonra çalışmamızın özgün yönünü oluşturan Betti sayıları ve katener derecesi hakkında bazı bilgilere yer verelim.

Şimdi bir $\beta \in S$ alalım. Eğer ∇_{β} bağlantısız ise o zaman β sayısına S nin Betti sayısı denir (Conaway ve ark., 2015; Gotti, 2015; 0'Neil ve ark., 2016). Betti sayıları cebirde kullanım alanı oldukça geniş olan bir kavramdır. Örneğin, 2007 de Boij ve Söderberg yaptıkları çalışmada, Stanley-Reisner halkalarının dereceli Betti sayıları ve topolojik değişmezleri arasında bağlantılar olduğunu göstermişlerdir. Benzer şekilde 2015 te Conaway ve arkadaşlarının yaptıkları çalışmada, bir s elemanının, S gibi bir sayısal yarıgrubundaki katenerlik derecesi, s nin çarpanları arasındaki mesafeyi ölçen negatif olmayan bir tamsayı olduğunu, S sayısal yarıgrubunun katener derecesinin de, S sayısal yarıgrubunun elemanlarının her birinin katener derecesinin maksimumu (en büyüğü) olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca S sayısal yarıgrubunun elemanlarının en büyük katener derecesinin Betti elemanıyla elde edildiğini göstermişlerdir.

Bu tezin ikinci bölümünde ihtiyaç duyulan temel kavram ve tanımlardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümünde sayısal yarıgruplar, simetrik sayısal yarıgruplar ve teleskopik sayısal yarıgruplar ile ilgili bilgiler verilmiştir. Dördüncü bölümünde katener derecesi ve Betti sayıları ile ilgili bilgiler verilmiştir. Beşinci bölümde gömme boyutu 3 olan bazı teleskopik sayısal yarıgrup ailelerinin Betti sayıları, Frobenius sayıları, cinsi ve elde ettiğimiz Betti sayılarının bir kısmının katener dereceleri için elde edilen teorem ve sonuçlar verilmiştir. Tezin altıncı bölümü olan son bölümde ise sonuçlar ve önerilerden bahsedilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tezin yazım aşamasında kullanılan bazı ön bilgiler verilmektedir.

Tanım 2.1 X boştan farklı bir küme olsun. $X \times X$ ten X e tanımlı bir

$$*: X \times X \to X \text{ , } (a,b) \to a*b$$

fonksiyonuna X üzerinde bir ikili işlem denir. Buradan $a*b$ değeri (a,b) ikilisinin $*$ işlemi altındaki görüntüsü demektir. İkili işlemler genelde $*,+,\cdot,\bullet,\circ$ gibi sembollerle gösterilir. Ayrıca fonksiyon olma özellikleri dikkate alındığından her $a,b \in X$ için X kümesinde bir $a*b$ elemanı var ve bu eleman tek türlü belirlidir ve bu özelliğe kapalılık özelliği denir (Petrich, 1973; Karakaş, 2008; Çallıalp, 2010; Çevik, 2010).

Tanım 2.2 $*$, X üzerinde bir ikili işlem olsun. Eğer X kümesi $*$ işlemine göre birleşme özelliği var ise, yani

$$\text{her } a,b,c \in X \text{ için } (a*b)*c = a*(b*c)$$

oluyorsa bu durumda $(X,*)$ ikilisine bir yarıgrup denir (Petrich, 1973; Korkmaz, 2008; Toker, 2017).

Örnek 2.3 $\mathbb{N}$ kümesi "+" işlemine göre bir yarıgruptur.

Tanım 2.4 $(X,*)$ bir yarıgrup olsun. Her $a,b \in X$ için $a*b = b*a$ oluyorsa X yarıgrubuna değişmeli yarıgrup denir (Petrich, 1973; Altınel, 2014; Toker, 2017).

Tanım 2.5 $(X,*)$ bir yarıgrup ve $a \in X$ olsun. Bir $e \in X$ için $e*a = a$ oluyorsa e ye sol birim eleman ; $a*e = a$ oluyorsa e ye sağ birim eleman denir. Eğer e sayısı hem sol hem de sağ birim eleman oluyorsa bu durumda e sayısına X yarıgrubunun birim elemanı denir (Petrich, 1973; Altınel, 2014; Toker, 2017).

Önerme 2.6 Bir yarıgrubun en çok bir tane birim elemanı vardır (Petrich, 1973; Çevik, 2010).

İspat. $(X,*)$ yarıgrubunun e_1, e_2 şeklinde iki birim elemanı olsun. e_2 birim eleman olduğundan $e_1 = e_1 * e_2$ yazabiliriz. Böylece e_1 birim eleman olduğundan $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$ yazılır. Buradan $e_1 = e_2$ sonucu çıkar.

Tanım 2.7 $(X,*)$ bir yarıgrup olsun. Eğer, X yarıgrubunun birim elemanı varsa bu durumda X yarıgrubuna monoid denir (Korkmaz, 2008; Çevik, 2010; Altınel, 2014; Toker, 2017).

Tanım 2.8 $(X,*)$ ikilisi bir monoid olsun. X teki her elemanın tersi var ise, yani e, X in birim elemanı olmak üzere her $a \in X$ için $a*a^{-1}=a^{-1}*a=e$ olacak şekilde tek bir $a^{-1} \in X$ varsa bu durumda $(X,*)$ monoidine bir grup denir (Korkmaz, 2008; Toker, 2017).

Bir elemanın tersi genelikle çarpımsal işlemlerde a^{-1}, toplamsal işlemlerde $-a$ ile gösterilir.

Tanım 2.9 $(X,*)$ bir yarıgrup ve $a \in X$ alalım. Buradan a elemanının en çok bir tane ters elemanı vardır (Çevik, 2010).

İspat. $(X,*)$ yarıgrubunun birim elemanı e olsun ve a sayısının $a^{'}$ ve $a^{''}$ gibi iki ters elemanı olduğunu kabul edelim. Buradan e birim eleman olduğundan $a^{'}=a^{'}*e$ yazabiliriz. $a^{''}$ de a nın tersi olduğundan $a^{'}=a^{'}*a*a^{''}$ yazabiliriz. Benzer şekilde $a^{'}$ de a nın tersi olduğundan $a^{'}=e*a^{''}$ yazılır ve buradan e birim eleman olduğundan $a^{'}=a^{''}$ sonucu çıkar.

Tanım 2.10 $(X,*)$ bir yarıgrup ve H kümesi de X in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $a,b \in H$ için $a*b \in H$ oluyorsa yani kapalılık özelliği sağlanıyorsa bu durumda H kümesine $(X,*)$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubu denir (Petrich, 1973; Çevik, 2010).

Örnek 2.11 $(\mathbb{N},+)$ bir yarıgrup olduğunu biliyoruz. Şimdi bir $H=\{2,4,6,8,10,12,14,...\}$ kümesi verilsin. H kümesi boştan farklı ve $\mathbb{N}$ nin bir alt kümesidir. Şimdi H ın kapalı olduğunu gösterelim.

Her $a,b \in H$ için $a=2k_1$, $b=2k_2$ olacak şekilde en az bir $k_1,k_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

Buradan $a+b=2k_1+2k_2=2(k_1+k_2) \in H$ olur. Dolayısıyla H kümesi $(\mathbb{N},+)$ yarıgrubunun bir alt yarıgrubudur.

Tanım 2.12 $X \times Y$ nin boştan farklı her alt kümesine X ten Y ye bir bağıntı denir. Eğer $X=Y$ ise, bağıntıya X üzerinde bir bağıntı denir (Karakaş, 2008; Çallıalp, 2010).

Tanım 2.13 ρ, X ten Y ye bir bağıntı olsun. Eğer $(a,b) \in \rho$ ise o zaman a ve b elemanları ρ ile bağlıdır denir ve $a\rho b$ ile gösterilir (Karakaş, 2008; Çallıalp, 2010).

Tanım 2.14 X bir küme ve ρ, X üzerinde bir bağıntı olsun.

i) Her $a \in X$ için $a\rho a$ oluyorsa ρ bağıntısının yansıma özelliği vardır denir.

ii) $a,b \in X$ ve $a\rho b$ olduğunda, daima $b\rho a$ oluyorsa o zaman ρ bağıntısının simetri özelliği vardır denir.

iii) $a,b \in X$, $a\rho b$ ve $b\rho a$ olduğunda, daima $a = b$ oluyorsa o zaman ρ bağıntısının ters-simetri özelliği vardır denir.

iv) $a,b,c \in X$, $a\rho b$ ve $b\rho c$ olduğunda, daima $a\rho c$ oluyorsa o zaman ρ bağıntısının geçişme özelliği vardır denir (Karakaş, 2008).

Tanım 2.15 X bir küme ve ρ, X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer ρ bağıntısı yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa o zaman ρ bağıntısına denklik bağıntısı denir (Karakaş, 2008; Çallıalp, 2010).

Tanım 2.16 X bir küme ve ρ, X üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer ρ bağıntısı yansıma, ters-simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa o zaman ρ bağıntısına bir sıralama bağıntısı denir (Çallıalp, 2010).

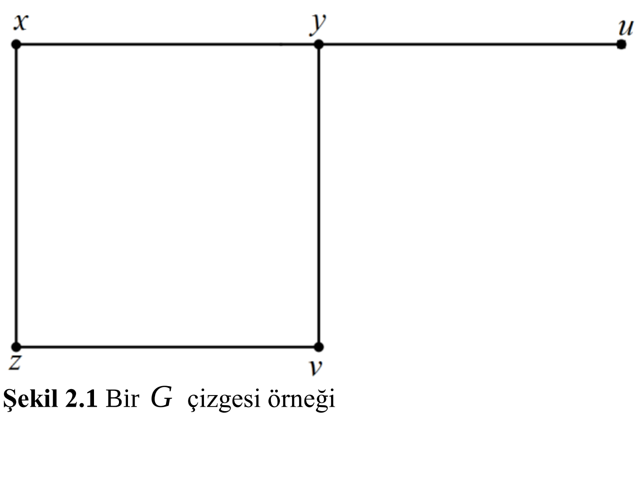
Örnek 2.17 $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve ρ de $\mathbb{Z}$ üzerinde bir bağıntı olmak üzere,

$$x, y \in \mathbb{Z} \text{ için } x\rho y \Leftrightarrow x \le y$$

şeklinde tanımlanan ρ bağıntısı bir sıralama bağıntısıdır.

Tanım 2.18 Sonlu ve boştan farklı köşeler kümesi V ve bu köşeleri birbirine bağlayan kenarlar kümesi de E ile gösterilsin. Buradan $E \subseteq V \times V$ olmak üzere $G = (V, E)$ ikilisine bir çizge denir (Deniz, 2012; Rosen, 2015; Torun, 2018).

Örnek 2.19 Aşağıda köşeler kümesi $V = \{x, y, z, v, u\}$ ve kenarlar kümesi $E = \{xy, xz, yv, zv, yu\}$ olan şekil 2.1 çizgesi verilmiştir.



Şekil 2.1 Bir G çizgesi örneği

Tanım 2.20 Bir çizgenin en az bir köşe ve kenarından geçen rotaya yol denir (Şeker, 2015).

Tanım 2.21 Bir $G=(V,E)$ çizgesinin farklı köşe çiftleri arasında bir yol varsa bu durumda $G=(V,E)$ çizgesine bağlantılıdır denir. Eğer $G=(V,E)$ çizgesi bağlantılı değil ise o zaman $G=(V,E)$ çizgesine bağlantısızdır denir (Deniz, 2012; Rosen, 2015).

3. SAYISAL YARIGRUPLAR

Bu bölümde sayısal yarıgruplar, simetrik sayısal yarıgruplar ve teleskopik sayısal yarıgruplar ile ilgili bazı bilgiler verilecektir.

3.1 Sayısal Yarıgruplar

Tanım 3.1.1 $\mathbb{N}$ negatif olmayan tamsayılar kümesi ve $S \subseteq \mathbb{N}$ verilsin. S kümesi $\mathbb{N}$ kümesindeki toplama işlemine göre kapalı, $0 \in S$ ve $\mathbb{N} \setminus S$ kümesi sonlu ise S ye bir sayısal yarıgrup denir. Eğer $n_1,...,n_e$ pozitif tamsayı ve $obeb(n_1,...,n_e)=1$ ise o zaman $\langle n_1,...,n_e \rangle = \{\lambda_1 n_1 + ... + \lambda_e n_e \mid \lambda_1,...,\lambda_e \in \mathbb{N}\}$ kümesi bir sayısal yarıgruptur ve her sayısal yarıgrup bu formda yazılabilir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 3.1.2 $S = \{0,5,7,9,10,12,14,\rightarrow\}$ kümesi bir sayısal yarıgruptur. Çünkü; S kümesi $\mathbb{N}$ kümesindeki toplama işlemine göre kapalı, $0 \in S$ ve $\mathbb{N} \setminus S = \{1,2,3,4,6,8,11,13\}$ kümesi sonludur. Burada "$\rightarrow$" işareti, 14 ten sonraki bütün tamsayıların S de olduğu anlamındadır.

Tanım 3.1.3 S bir sayısal yarıgrup ve $A \subseteq S$ olsun. Eğer $S = \langle A \rangle$ sayısal yarıgrubu, A kümesinin hiçbir özalt kümesi tarafından oluşturulamıyorsa A kümesine, S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç sistemi denir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 3.1.2 de $S = \{0,5,7,9,10,12,14,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümesi $A = \{5,7,9\}$ kümesidir. Gerçekten,

$S = \langle A \rangle = \{5\lambda_1 + 7\lambda_2 + 9\lambda_3 \mid \lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{N}\} = \{0,5,7,9,10,12,14,\rightarrow\}$ olduğundan S sayısal yarıgrubunun minimal üreteç kümesi $A = \{5,7,9\}$ olduğu kolayca gözlemlenebilir. Ayrıca S sayısal yarıgrubunun A kümesinin hiçbir özalt kümesi tarafından oluşturulamayacağı açıktır.

Yardımcı Teorem 3.1.4 $H \neq \varnothing$ ve $H \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Buradan,

$\langle H \rangle$ bir sayısal yarıgruptur $\Leftrightarrow$ $obeb(H)=1$ (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009; Kılıç, 2015).

İspat. (=>): $d = obeb(H)$ olsun. Eğer $y \in \langle H \rangle$ ise o zaman $d \mid y$ dir. $\langle H \rangle$ bir sayısal yarıgrup $\mathbb{N} \setminus \langle H \rangle$ sonlu olduğundan $d \mid k$ ve $d \mid k+1$ olacak şekilde $k \in \langle H \rangle$ vardır. Buradan $d = 1$ çıkar.

(<=): $obeb(H) = 1$ olsun. $\mathbb{N} \setminus \langle H \rangle$ kümesinin sonlu olduğunu gösterirsek istediğimiz sonuca ulaşırız. Şimdi buradan $x_1 u_1 + ... + x_e u_e = 1$ olacak şekilde $x_1, ..., x_e$ tamsayıları ve $u_1, ..., u_e \in H$ vardır. Buradan x_i negatif olan tamsayıları sağ tarafa kaydırmak koşuluyla $x_{i_1} u_{i_1} + ... + x_{i_k} u_{i_k} = 1 - x_{j_1} u_{j_1} - ... - x_{j_l} u_{j_l}$ olacak şekilde $i_1, ..., i_k, j_1, ..., j_l \in \{1, ..., e\}$ bulabiliriz. Buradan $y \in \langle H \rangle$ için, $y + 1 \in \langle H \rangle$ bulunabilir demektir. Eğer biz $e \geq (y-1)y + (y-1)$ olduğunu gösterirsek o zaman $e \in \langle H \rangle$ demektir. $e = my + n$, $(0 \leq n < y)$ olacak şekilde m ve n tamsayılar olsun. Buradan $e \geq (y-1)y + (y-1)$ den $m \geq y - 1 \geq n$ ifadesini çıkarabiliriz. Bu sonuçlardan $e = (ny + n) + (m - n)y = n(y+1) + (m-n)y \in \langle H \rangle$ olur. Buradan $\mathbb{N} \setminus \langle H \rangle$ sonludur.

Not 3.1.5 X ve Y kümeleri $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin alt kümeleri olmak üzere, $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ şeklindedir.

S bir sayısal yarıgrup olmak üzere $S^* = S \setminus \{0\}$ şeklinde ifade edersek, $S^* + S^* = \{s_1 + s_2 \mid s_1, s_2 \in S \setminus \{0\}\}$ ifadesi sıfır içermeyen iki sayısal yarıgrubun toplamı demektir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Yardımcı Teorem 3.1.6 S, $\mathbb{N}$ nin bir alt monoidi olsun. Buradan $S^* \setminus (S^* + S^*)$ ifadesi S nin bir üreteç sistemidir. Ayrıca S nin her üreteç sistemi $S^* \setminus (S^* + S^*)$ yi içerir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009; Kılıç, 2015; Şeran, 2016).

İspat. y, S^* ın bir elemanı olsun. Eğer $y \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$ ise biz $y = a + b$, $(a, b < y)$ koşulunu sağlayan $a, b \in S^*$ elemanlarını bulabiliriz. Bu işlemi sonlu sayıda tekrar edersek buradan $y = y_1 + ... + y_e$ şartını sağlayan $y_1, ..., y_e \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ bulabiliriz. Buradan $S^* \setminus (S^* + S^*)$ kümesi S nin üreteç sistemi olur.

Şimdi S nin her üreteç sisteminin $S^* \setminus (S^* + S^*)$ yi içerdiğini gösterelim. H kümesi, S nin bir üreteç kümesi olsun. O zaman $u \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ olmak üzere, $u = k_1 \alpha_1 + ... + k_e \alpha_e$

koşulunu sağlayan $e \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $k_1, ..., k_e \in \mathbb{N}$ ve $\alpha_1, ..., \alpha_e \in H$ elemanlarını bulabiliriz. $u \notin (S^* + S^*)$ olduğundan bazı $i \in \{1, ..., e\}$ için $u = \alpha_i$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu da demektir ki S nin her üreteç sistemi $S^* \setminus (S^* + S^*)$ yi içerir.

Tanım 3.1.7 $n \in S^*$ olsun. S nin n ye göre Apery kümesi;

$$Ap(S, n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}$$

şeklinde tanımlanır (Rosales, 2000).

Örnek 3.1.8 $S = \langle 7, 9, 10, 11 \rangle = \{0, 7, 9, 10, 11, 14, 16, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin.

$n = 7 \Rightarrow Ap(S, 7) = \{0, 9, 10, 11, 19, 20, 22\}$
$n = 9 \Rightarrow Ap(S, 9) = \{0, 7, 10, 11, 14, 17, 21, 22, 24\}$
$n = 10 \Rightarrow Ap(S, 10) = \{0, 7, 9, 11, 14, 16, 18, 22, 23, 25\}$
$n = 11 \Rightarrow Ap(S, 11) = \{0, 7, 9, 10, 14, 16, 17, 19, 23, 24, 26\}$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1.9 S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. Her $i \in \{1, ..., n\}$ için $w(i)$; $\mathrm{mod}(n)$ ye göre i ye denk olan S deki en küçük sayı olmak üzere,

$$Ap(S, n) = \{0, w(1), ..., \mathrm{w}(n-1)\}$$

şeklindedir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014; Şeran, 2016).

İspat. $0 \leq i \leq n-1$ olsun. Tanımdan $w(i) \in S$ ve $w(i) - n \equiv i \,\mathrm{mod}(n)$ olur. Buradan $w(i) - n \notin S$ elde edilir. Apery kümesinin tanımından $w(i) \in Ap(S, n)$ yazarız. Ayrıca $x, y \in Ap(S, n)$ için $x \equiv y \,\mathrm{mod}(n)$ olacak şekilde hiçbir $x, y \in Ap(S, n)$ elemanları yoktur.

Örnek 3.1.10 $S = \langle 9, 10, 13, 16, 17 \rangle = \{0, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 25, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. Yardımcı teorem 3.1.9 ü kullanarak $Ap(S, 9)$ kümesini bulmaya çalışalım,

$Ap(S,9)=\{0=w\{0\},w(1),w(2),w(3),w(4),w(5),w(6),w(7),w(8)\}$

$w(1)\equiv 1\bmod(9) => w(1)=10$

$w(2)\equiv 2\bmod(9) => w(2)=20$

$w(3)\equiv 3\bmod(9) => w(3)=30$

$w(4)\equiv 4\bmod(9) => w(4)=13$

$w(5)\equiv 5\bmod(9) \Rightarrow w(5)=23$

$w(6)\equiv 6\bmod(9) \Rightarrow w(6)=33$

$w(7)\equiv 7\bmod(9) \Rightarrow w(7)=16$

$w(8)\equiv 8\bmod(9) \Rightarrow w(8)=17$

elde edilir. Buradan, $Ap(S,9)=\{0,10,13,16,17,20,23,30,33\}$ şeklinde bulunmuş olur.

Önerme 3.1.11 S bir sayısal yarıgrup ve $n\in S^*$ olsun. Her $s\in S$ için $s=k\cdot n+w$ olacak şekilde tek bir $(k,w)\in\mathbb{N}\times Ap(S,n)$ vardır (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014; Şeran, 2016).

İspat. $s\in S$ olsun. Eğer $s\in Ap(S,n)$ ise buradan $k=0$, $w=s$ olur ve ispat biter. Eğer $s\notin Ap(S,n)$ ise buradan $s_1=s-n\in S$ dir. Biz s_1 ile başlatırsak $s_k=s-k\cdot n\in Ap(S,n)$ olacak şekilde bir k elemanı vardır. O zaman $k_1\in\mathbb{N}$, $w_1\in Ap(S,n)$ olmak üzere, $s=k_1n+w_1$ alalım. Farz edelim ki $k_1\neq k$ olsun. O zaman, $0\neq(k_1-k)\cdot n=w-w_1$ den $w\equiv w_1\bmod(n)$ elde edilir. Buradan $w,w_1\in Ap(S,n)$ sonucu çıkar ki bu da bir çelişki teşkil eder. Yani $s\notin Ap(S,n)$ olamaz.

Tanım 3.1.12 S sayısal yarıgrubun minimal üreteç kümesi $\{n_0<n_1<...<n_p\}$ olsun. Buradan n_0 sayısına S nin katlılığı; $p+1$ sayısına ise S nin gömme boyutu denir ve sırasıyla $m(S)$ ve $e(S)$ ile gösterilir (Rosales, 2000).

Örnek 3.1.13 $S=\langle 7,8,9,11\rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin. Buradan

$m(S)=7$ ve $e(S)=4$ olur.

Tanım 3.1.14 S bir sayısal yarıgrup olsun. S ye ait olmayan en büyük tamsayıya S nin Frobenius sayısı denir ve $F(S)$ ile gösterilir. x pozitif bir tamsayı olsun. Eğer $x\notin S$ ise x pozitif tamsayısına S nin boşluğu denir ve S nin tüm boşluklarının kümesi $G(S)$ ile gösterilir. Bununla birlikte, $G(S)$ kümesinin eleman sayısına da S nin cinsi denir ve $g(S)$ ile gösterilir (Blanco ve Rosales, 2010).

Örnek 3.1.15 $S=\langle 4,7,13\rangle=\{0,4,7,8,11,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. Buradan, $F(S)=10$, $G(S)=\{1,2,3,5,6,9,10\}$ ve $g(S)=7$ dir.

Önerme 3.1.16 (Selmer Formülleri) S bir sayısal yarıgrup ve $n\in S^{*}$ olsun. O zaman,

$i)$ $F(S)=\max(Ap(S,n))-n$,

$ii)$ $g(S)=\frac{1}{n}\left(\sum_{w\in Ap(S,n)} w\right)-\frac{n-1}{2}$

şeklindedir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014; Kılıç, 2015).

İspat.

$i)$ $\max(Ap(S,n))-n\notin S$ olduğu açıktır. Eğer $x>\max(Ap(S,n))-n$ ise o zaman $x+n>\max(Ap(S,n))$ yazabiliriz. Şimdi buradan mod(n) ye göre i ye denk olan S deki en küçük sayı $w(i)\in Ap(S,n)$ olsun. Bu durumda, $i\in\{0,...,n-1\}$, $q\in\mathbb{N}$ olmak üzere $x+n=qn+i$ alalım. Buradan $x+n>w(i)$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu verilerden $k>0$ olmak üzere, $x+n=kn+w(i)$ ve $x=(k-1)n+w(i)\in S$ sonucunu çıkarabiliriz. Sonuç olarak, S deki olmayan en büyük tamsayı $F(S)=\max(Ap(S,n))-n$ olur.

$ii)$ Her $w\in Ap(S,n)$ için $k_i\in\mathbb{N}$, $i\in\{0,...,n-1\}$ olmak üzere, $w=k_i n+i$ yazabiliriz. Buradan $Ap(S,n)=\{0,k_1n+1,...,k_{n-1}n+n-1\}$ elde ederiz. $x\in\mathbb{N}$ ve $x\equiv i\bmod(n)$ olsun. Buradan $x\in S\Leftrightarrow w(i)\le x$ olur. Gerçekten, eğer $x=q_i n+i$ ise o zaman $x-w(i)=(q_i-k_i)n$ yazılır. Buradan

$w(i)\le x\Leftrightarrow k_i\le q_i\Leftrightarrow x=(q_i-k_i)n+w(i)\in S$ olur ve $x\notin S\Leftrightarrow x=q_i n+i, q_i<k_i$ yazılır. Sonuç olarak,

$$g(S)=\sum_{i=1}^{n-1}k_i=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(k_i n+i)\right)-\frac{n-1}{2}=\frac{1}{n}\left(\sum_{w\in Ap(S,n)} w\right)-\frac{n-1}{2}$$ elde edilir.

Örnek 3.1.17

$S=\langle 8,13,17,19\rangle=\{0,8,13,16,17,19,21,24,25,26,27,29,30,32,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. $n=8$ için $Ap(S,8)=\{0=w(0),w(1),w(2),w(3),w(4),w(5),w(6),w(7)\}$ kümesini bulalım. Buradan,

$$w(1)\equiv 1\bmod(8) => w(1)=17$$
$$w(2)\equiv 2\bmod(8) => w(2)=26$$
$$w(3)\equiv 3\bmod(8) => w(3)=19$$
$$w(4)\equiv 4\bmod(8) => w(4)=36$$
$$w(5)\equiv 5\bmod(8) => w(5)=13$$
$$w(6)\equiv 6\bmod(8) => w(6)=30$$
$$w(7)\equiv 7\bmod(8) \Rightarrow w(7)=39$$

elde edilir. Dolayısıyla, $Ap(S,8)=\{0,13,17,19,26,30,36,39\}$ olur.

Önerme 3.1.16 dan $F(S)=39-8=31$ ve

$$g(S)=\frac{1}{8}(0+13+17+19+26+30+36+39)-\frac{8-1}{2}=19$$

bulunur.

Önerme 3.1.16 dan aşağıdaki sonuçlar çıkarılabilir.

Sonuç 3.1.18 a ve b minimal elemanlarıyla üretilen $S=\langle a,b\rangle$ sayısal yarıgrunun Apery kümesi, $Ap(S,a)=\{0,b,2b,...,(a-1)b\}$ şeklinde yazabilir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Sonuç 3.1.19 a ve b pozitif tamsayı ve $obeb(a,b)=1$ olsun. O zaman

$i)$ $F(\langle a,b\rangle)=ab-a-b$,

$ii)$ $g(\langle a,b\rangle)=\dfrac{ab-a-b+1}{2}$

şeklindedir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Önerme 3.1.20 $n_1,...,n_p$ minimal üreteçler tarafından üretilen sayısal yarıgrup S ve $d=obeb(n_1,...,n_{p-1})$ olsun. $T=\langle n_1/d,...,n_{p-1}/d,n_p\rangle$ kümesi verilsin. Buradan $Ap(S,n_p)=d\cdot Ap(T,n_p)$ olur (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014).

İspat. $w\in Ap(S,n_p)$ olsun. Bu durumda, $w-n_p\notin S$ olup $w\in\langle n_1,...,n_{p-1}\rangle$ çıkar. Dolayısıyla $\dfrac{w}{d}\in\left\langle\dfrac{n_1}{d},...,\dfrac{n_{p-1}}{d}\right\rangle$ olur. Eğer $\dfrac{w}{d}-n_p\in T$ ise o zaman $w-d\cdot n_p\in S$ olur.

Bu bir çelişki teşkil eder. Bundan dolayı $\frac{w}{d} \in Ap\left(T, n_p\right)$ ise $w \in d \cdot Ap\left(T, n_p\right)$ elde edilir.

Tersi için, eğer $w \in Ap\left(T, n_p\right)$ ise buradan $w \in \left\langle \frac{n_1}{d}, \ldots, \frac{n_{p-1}}{d} \right\rangle$ olur. Bundan dolayı $d \cdot w \in \left\langle n_1, \ldots, n_{p-1} \right\rangle \in S$ olur. Farz edelim ki $d \cdot w - n_p \subseteq S$ olsun. Buradan $d \cdot w - n_p = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i n_i$ olup $d \cdot w = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i n_i + \left(\lambda_p + 1\right) n_p$ elde edilir. Buradan d, $\lambda_p + 1$ sayısını böler. O zaman $w = \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i \frac{n_i}{d} + \left(\frac{\lambda_p + 1}{d}\right) n_p$ yazabiliriz. Bu da $w - n_p \in T$ demektir. Bu bir çelişki oluşturur. Sonuç olarak $d \cdot w \in Ap\left(S, n_p\right)$ olur.

Sonuç 3.1.21 S sayısal yarıgrubu $\left\{n_1, \ldots, n_p\right\}$ minimal üreteçler tarafından üretilsin. $d = obeb\left(n_1, \ldots, n_{p-1}\right)$ ve $T = \left\langle \frac{n_1}{d}, \ldots, \frac{n_{p-1}}{d}, n_p \right\rangle$ olsun. O zaman,

i) $F(S) = dF(T) + (d-1) n_p$,

ii) $g(S) = dg(T) + \frac{(d-1)\left(n_p - 1\right)}{2}$

şeklindedir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014).

İspat.

i) $F(S) = \max Ap\left(S, n_p\right) - n_p = d \max Ap\left(T, n_p\right) - n_p$

$= d\left(\max Ap\left(T, n_p\right) - n_p\right) + (d-1) n_p = dF(T) + (d-1) n_p$ olur.

ii) $g(S) = \frac{1}{n_p}\left(\sum_{w \in Ap\left(S, n_p\right)} w\right) - \frac{n_p - 1}{2} = \frac{d}{n_p}\left(\sum_{w \in Ap\left(T, n_p\right)} w\right) - \frac{n_p - 1}{2}$

$= d\left(\frac{1}{n_p} \sum_{w \in Ap\left(T, n_p\right)} w - \frac{n_p - 1}{2}\right) + \frac{(d-1)\left(n_p - 1\right)}{2}$ olur.

Örnek 3.1.22 $S = \langle 30, 40, 79 \rangle$ olsun. Buradan $obeb(30, 40) = 10$ ve $T = \langle 3, 4, 79 \rangle = \langle 3, 4 \rangle = \{0, 3, 4, 6, \rightarrow\}$ olur. Buradan $F(T) = 5$, $G(T) = \{1, 2, 5\}$ ve $g(T) = 3$ olur. Ayrıca, $F(S) = 10.5 + 9.79 = 761$ ve $g(S) = 10.3 + \frac{9.78}{2} = 381$ elde edilir.

Tanım 3.1.23 S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer $x \notin S$ ve her $s \in S^*$ için $x+s \in S$ oluyorsa x tamsayısına S nin pseudo-Frobenius sayısı denir ve S nin pseudo-Frobenius sayılarının kümesi $PF(S)$ ile gösterilir. $PF(S)$ nin eleman sayısına S nin tipi denir ve $t(S)$ ile gösterilir. Buradan $F(S) = \max(PF(S))$ olduğu kolayca gözlemlenebilir.

Tamsayılar kümesi üzerinde aşağıdaki gibi bir sıralama bağıntısı tanımlayabiliriz:

$$\text{“}\, y - x \in S \Rightarrow x \leq_s y \,\text{”}.$$

Buradan S bir sayısal yarıgrup olduğundan $\leq_s$ bağıntısının yansıma, geçişme ve ters simetrik özellikleri olduğu kolayca gösterilebilir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 3.1.24 $S = \langle 10, 11, 16, 18, 19 \rangle = \{0, 10, 11, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 26, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. Buradan $PF(S) = \{17, 23, 24, 25\}$ ve $t(S) = 4$ olarak bulunur.

Önerme 3.1.25 S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman,

$$PF(S) = \max \leq_s (\mathbb{N} \setminus S)$$

şeklindedir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014; Şeran, 2016).

İspat. $x \in PF(S)$ olsun. Pseudo- Frobenius tanımından $x \notin S$ ve $x + S^* \subseteq S$ olur. Farz edelim ki $y \in \mathbb{N} \setminus S$ ve $x \leq_s y$ olsun. Eğer $x \neq y$ ise $y - x = s \in S^*$ çıkar. Buradan $y = x + s \in x + S^* \subseteq S$ elde edilir. Bu da $y \in S$ demektir. Hâlbuki $y \in \mathbb{N} \setminus S$ olup bu bir çelişkidir.

Tersi için, $x \in \max \leq_s (\mathbb{N} \setminus S)$ olsun. Şimdi bazı $s \in S^*$ için $x + s \notin S$ alalım. Buradan $x \leq_s x + s$ bir sıralama bağıntısı olup $x + s \in \max \leq_s (\mathbb{N} \setminus S)$ sonucu çıkar ki bu da bir çelişki oluşturur. O zaman $x + s \in S$ demektir ve buradan $x \in PF(S)$ olur.

Örnek 3.1.26 $S = \langle 6, 7, 11, 15 \rangle = \{0, 6, 7, 11, 12, 13, 14, 15, 17, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin.

$\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 16\}$ elde edilir. Önerme 3.1.25 ten

$PF(S) = \max \leq_s (\mathbb{N} \setminus S) = \{8, 16\}$ bulunur.

Önerme 3.1.27 S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. O zaman,

$$PF(S) = \{ w - n \mid w \in \max \leq_s Ap(S, n) \}$$

şeklindedir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014; Şeran, 2016).

İspat. $x \in PF(S)$ olsun. O zaman $x \notin S$ ve $x+n \in S$ olur. Dolayısıyla $x+n \in Ap(S,n)$ çıkar. Şimdi $x+n$ nin $\leq_s$ sıralama bağıntısına göre maximal (büyükçe eleman) olduğunu ispat edelim. $x+n \leq_s w$ olacak şekilde $w \in Ap(S,n)$ alalım ve $w-x-n=s$ olacak şekilde $s \in S$ verilsin. Buradan $w-n=x+s$ olur. Eğer $s \in S^*$ ise o zaman $x+s \in S$ bulunur. Fakat $w-n \notin S$ olup bu da bir çelişki teşkil eder.

Tersi için, $w \in \max \leq_s Ap(S,\mathrm{n})$ ve $s \in S^*$ alalım. Eğer $w-n+s \notin S$ ise $w+s \in Ap(S,n)$ olur ki bu da w nin maksimumluğuyla (en büyük) çelişir.

Örnek 3.1.28 $S = \langle 7,10,13,15,19 \rangle = \{0,7,10,13,14,15,17,19,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. $n=7$ için,

$Ap(S,7) = \{0,10,13,15,19,23,25\}$ ve $\max \leq_s Ap(S,7) = \{19,23,25\}$ bulunur.

Önerme 3.1.27 den $PF(S) = \{12,16,18\}$ elde edilir. Böylece $t(S)=3$ olur.

Sonuç 3.1.29 S, $\mathbb{N}$ den farklı bir sayısal yarıgrup olsun. Buradan, $t(S) \leq m(S)-1$ yazılır (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014).

3.2 Simetrik Sayısal Yarıgruplar

Tanım 3.2.1 S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer S sayısal yarıgrubu S yi içeren iki sayısal yarıgrubun kesişimi olarak yazılamıyorsa S ye indirgenemez sayısal yarıgrup denir (Rosales ve Branco, 2003).

Yardımcı Teorem 3.2.2 S, $\mathbb{N}$ den farklı bir sayısal yarıgrup ve $F(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. O zaman $S \cup \{F(S)\}$ kümesi bir sayısal yarıgruptur (Rosales ve Garcia-Sanches, 2009).

İspat. $\mathbb{N} \setminus (S \cup \{F(S)\})$ kümesi sonludur. Çünkü $\mathbb{N} \setminus S$ sonludur. $a,b \in S \cup \{F(S)\}$ alalım. Eğer a,b elemanlarından herhangi biri $F(S)$ ise o zaman $a+b \geq F(S)$ ve buradan $a+b \in S \cup F(S)$ olur. Eğer a ve b nin her ikisi de S de ise o zaman $a+b \in S \subseteq S \cup \{F(S)\}$ olur. Ayrıca S bir sayısal yarıgrup olduğundan $0 \in S$ olup $S \subseteq S \cup \{F(S)\}$ den $0 \in S \cup \{F(S)\}$ çıkar. Böylece $S \cup \{F(S)\}$ bir sayısal yarıgrup olur.

Teorem 3.2.3 S bir sayısal yarıgrup olsun. Aşağıdakiler denktir.

$i)$ S indirgenemez,

$ii)$ S, Frobenius sayısı $F(S)$ olan tüm sayısal yarıgrupların kümesinde maksimaldir,

$iii)$ S, $F(S)$ içeremeyen tüm sayısal yarıgrupların kümesinde maksimaldir (Rosales ve Branco, 2003; Rosales ve Garcia-Sanches, 2009).

İspat. $i \Rightarrow ii)$ $F(T)=F(S)$ ve $S \subseteq T$ olacak şekilde bir T sayısal yarıgrubu verilsin. Bu durumda $S \subseteq S \cup \{F(S)\}$ ve $S \subseteq T$ den $S=(S \cup \{F(S)\}) \cap T$ olur. Çünkü S indirgenemezdir. Sonuç olarak $S=T$ elde edilir.

$ii \Rightarrow iii)$ $F(S) \notin T$ ve $S \subseteq T$ olacak şekilde bir T sayısal yarıgrubunu alalım. Buradan $T \cup \{F(S)+1, F(S)+2, \rightarrow\}$ kümesi S yi içeren ve Frobenius sayısı $F(S)$ olan bir sayısal yarıgrup olup, $S=T \cup \{F(S)+1, F(S)+2, \rightarrow\}$ yazılır. Bu sonuçlardan $S=T$ elde edilir.

$iii \Rightarrow i)$ S_1 ve S_2, S yi içeren iki sayısal yarıgrup olsun. Hipotezden $F(S) \in S_1$ ve $F(S) \in S_2$ olup $S \neq S_1 \cap S_2$ elde edilir. Buradan S indirgenemezdir.

Tanım 3.2.4 S bir sayısal yarıgrup olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda S ye simetrik sayısal yarıgrup denir:

$i)$ S indirgenemez ve

$ii)$ $F(S)$ tektir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014).

Örnek 3.2.5 $S=\langle 5,6,9\rangle=\{0,5,6,9,10,11,12,14,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu indirgenemez ve $F(S)=13$ tek olduğundan S simetriktir.

Tanım 3.2.6 S bir sayısal yarıgrup olsun. Aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda S ye pseudo-simetrik sayısal yarıgrup denir:

$i)$ S indirgenemez ve

$ii)$ $F(S)$ çifttir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014).

Örnek 3.2.7 $S=\langle 4,5,7\rangle=\{0,4,5,7,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. S sayısal yarıgrubu indirgenemez ve $F(S)=6$ çift olduğundan S pseudo-simetriktir.

Yardımcı Teorem 3.2.8 S bir sayısal yarıgrup ve $h=\max\{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid F(S)-x \notin S \text{ } ve \text{ } x \neq F(S)/2\}$ kümesi verilsin. Bu durumda,

$S \cup \{h\}$ kümesi Frobenius saysı $F(S)$ olan bir sayısal yarıgruptur (Rosales ve Garcia-Sanches, 2009).

İspat. $\mathbb{N} \setminus (S \cup \{h\})$ kümesi sonludur. Çünkü $\mathbb{N} \setminus \mathrm{S}$ sonludur. S sayısal yarıgrup olduğundan $0 \in S$ olur. $S \subseteq S \cup \{h\}$ olduğundan $0 \in S \cup \{h\}$ elde edilir. $H = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid F(S) - x \notin S \text{ } ve \text{ } x \neq F(S)/2\}$ kümesi verilsin. Eğer $x \in H$ ise o zaman $F(S) - x \in H$ olur. Buradan $h > \dfrac{F(S)}{2}$ sonucu çıkar. Şimdi $s \in S^*$ alalım. Eğer biz $h + s \in S$ olduğunu gösterirsek $h + s \in S \cup \{h\}$ olur. Farz edelim ki $h + s \notin S$ olsun. h ın maksimalliğinden ve $h > F(S)/2$, $h + s \neq F(S)/2$ den $F(S) - (h + s) = t \in S$ olur. Bu durumda, $F(S) - h = t + s \in S$ sonucu çıkar ki bu da h nin tanımıyla çelişir. O zaman $h + s \in S$ çıkar. Eğer $2h \notin S$ ise yine h nin maksimalliğinden $F(S) - 2h = t \in S$ elde ederiz. Yukarıdaki benzer işlemleri uygularsak $h + t \in S$ elde edilir. Fakat $h + t = F(S) - h \notin S$ olduğundan bu bir çelişki teşkil eder. Sonuç olarak $2h \in S$ olur.

Önerme 3.2.9 S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır:

$i)$ S simetriktir <=> $F(S)$ tek tamsayı ve her $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $F(S) - x \in S$ dir.

$ii)$ S pseudo-simetriktir <=> $F(S)$ çift tamsayı ve her $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $F(S) - x \in S$ veya $x = F(S)/2$ dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009; Assi ve Garcia-Sanchez, 2014; Kılıç, 2015).

İspat. $i)$ (=>): S simetrik olduğundan tanım gereği $F(S)$ tek tamsayı ve S indirgenemezdir. Aksine $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $F(S) - x \notin S$ alalım. Bu durumda, Yardımcı Teorem 3.2.8 gereği $h = \max\{x \in \mathbb{Z} \setminus S \mid F(S) - x \notin S \text{ } ve \text{ } x \neq F(S)/2\}$ verildiğinde h ın maksimalliğinden $S \cup \{h\}$ kümesi Frobenius sayısı $F(S)$ olan bir sayısal yarıgruptur. Fakat bu ifade Teorem 3.2.3 gereği S nin maksimumluğuyla bir çelişki teşkil eder. Dolayısıyla $F(S) - x \in S$ olmak zorundadır.

(<=): S nin simetrik olduğunu göstermek için Teorem 3.2.3 gereği S nin $F(S)$ içermeyen tüm sayısal yarıgrupların kümesinde maksimal olduğunu ispatlamak yeterlidir. $S \subsetneq T$ olacak şekilde bir T sayısal yarıgrup alalım. O zaman

$x \in T \setminus S \subset \mathbb{Z} \setminus S$ olmak üzere, hipotezden $F(S) - x \in S$ ve dolayısıyla $F(S) - x \in T$ elde ederiz. Fakat bu $F(S) = x + (F(S) - x) \in T$ anlamına gelir.

(ii) nin ispatı (i) in ispatıyla benzerdir.

Sonuç 3.2.10 S bir sayısal yarıgrup olsun.

$i)$ S simetriktir <=> $g(S) = \dfrac{F(S)+1}{2}$ dir.

$ii)$ S pseudo-simetriktir <=> $g(S) = \dfrac{F(S)+2}{2}$ dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 3.2.11 $S = \langle 5,12,13,14 \rangle = \{0,5,10,12,13,14,15,17,18,19,20,22,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. Buradan,

$\mathbb{Z} \setminus S = \{\ldots,-1,1,2,3,4,6,7,8,9,11,16,21\}$

$G(S) = \{1,2,3,4,6,7,8,9,11,16,21\}$

$F(S) = 21$

$g(S) = 11$ bulunur. Önerme 3.2.9 dan S sayısal yarıgrubu simetriktir. Çünkü her $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $F(S) = 21$ tek tamsayı ve $21 - x \in S$ dir. Ayrıca Sonuç 3.2.10 dan aynı sonuca ulaşabiliriz. Gerçekten, S simetriktir <=> $g(S) = \dfrac{21+1}{2} = 11$ dir.

Örnek 3.2.12 $S = \langle 5,6,13 \rangle = \{0,5,6,10,11,12,13,15,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. Buradan,

$\mathbb{Z} \setminus S = \{\ldots,-1,1,2,3,4,7,8,9,14\}$

$G(S) = \{1,2,3,4,7,8,9,14\}$

$F(S) = 14$

$g(S) = 8$ bulunur. Önerme 3.2.9 dan S sayısal yarıgrubu pseudo-simetriktir. Gerçekten, $F(S) = 14$ çift tamsayı ve her $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $14 - x \in S$ veya $x = F(S)/2 = 7$ dir. Ayrıca Sonuç 3.2.10 dan aynı sonuca ulaşabiliriz. Gerçekten, S pseudo-simetriktir <=> $g(S) = \dfrac{14+2}{2} = 8$ dir.

Sonuç 3.2.13 S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer $e(S)=2$ ise S simetriktir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014).

Yardımcı Teorem 3.2.14 S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. Eğer $x, y \in S$ ve $x+y \in Ap(S,n)$ ise o zaman $x, y \in Ap(S,n)$ dir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014; Şeran, 2016).

İspat. Farz edelim ki $x, y \notin Ap(S,n)$ olsun. O zaman $y-n \in S$ ve $x-n \in S$ olur. $x, y \in S$ ve S bir sayısal yarıgrup olduğundan $x+y-n \in S$ ve $y+x-n \in S$ yazılır. Böylece, Apery kümesinin tanımından $x+y \notin Ap(S,n)$ ve $y+x \notin Ap(S,n)$ elde edilir ki bu da hipoteze göre bir çelişki teşkil eder. Sonuç olarak $x, y \in Ap(S,n)$ çıkar.

Önerme 3.2.15 S bir sayısal yarıgrup, $n \in S^*$ ve $Ap(S,n)=\{a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}\}$ kümesi verilsin. O zaman, S simetriktir ancak ve ancak her $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ için $a_i + a_{n-1-i} = a_{n-1}$ dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009; Kılıç, 2015).

İspat. $(=>)$: Önerme 3.1.16 dan $F(S)=a_{n-1}-n$ şeklinde yazabiliriz. $a_i - n \notin S$ ve S simetrik olduğundan $F(S)-(a_i-n)=a_{n-1}-n-a_i+n=a_{n-1}-a_i \in S$ çıkar. Yardımcı Teorem 3.2.14 ten $a_{n-1}=a_i+a_j$ olacak şekilde $j \in \{0,\ldots,n-1\}$ bulabiliriz. Dolayısıyla $a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1}$ den $j=n-1-i$ olmalıdır.

$(<=)$: Her $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ için $a_i + a_{n-1-i} = a_{n-1}$ olsun. O zaman hipotezden $\{a_{n-1}\} = \max imals \leq_s Ap(S,n)$ yazılır. Öte yandan Önerme 3.1.27 den $PF(S)=\{F(S)\}$ olup buradan $F(S)=\max imals \leq_s (\mathbb{Z} \setminus S)$ elde edilir. Dolayısıyla $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ ise o zaman $F(S)-x \in S$ demektir. Şimdi $F(S)$ nin tek tamsayı olduğunu gösterelim. Eğer $\frac{F(S)}{2}$ bir tamsayı ise $\frac{F(S)}{2} \in \mathbb{Z} \setminus S$ olup $F(S)-\frac{F(S)}{2}=\frac{F(S)}{2} \in S$ çıkar. Bu da bir çelişki teşkil eder. Sonuç olarak $F(S)$ tek tamsayı ve Önerme 3.2.9 dan S simetriktir.

Sonuç 3.2.16 S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman aşağıdakiler denktirler:

$i)$ S simetriktir,

$ii)$ $PF(S)=\{F(S)\}$,

$iii)$ $t(S)=1$ (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

İspat. $F(S)$ nin her zaman $PF(S)$ ye ait olduğu bilinmektedir. Öte yandan Tanım 3.1.23 ten $PF(S)$ nin tipi $t(S)=1$ olup (ii) ve (iii) birbirine denk çıkar. Önerme 3.2.15 in ispatından da (i) ve (ii) birbirine denk olur.

Sonuç 3.2.17 S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. O zaman

S simetriktir <=> $Maximals \leq_s Ap(S,n) = \{F(S)+n\}$ dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 3.2.18 $S = \langle 6,8,13 \rangle = \{0,6,8,12,13,14,16,18,19,20,21,22,24,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. Eğer $n = 6 \in S^*$ alırsak $Ap(S,6) = \{0,8,13,16,21,29\}$ olup $Maximals \leq_s Ap(S,6) = \{29\} = \{23+6\}$ dan $PF(S) = \{23\}$ elde ederiz. Bu da S nin simetrik olduğunu gösterir.

Yardımcı Teorem 3.2.19 S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. Eğer S pseudo-simetrik ise o zaman $\dfrac{F(S)}{2} + n \in Ap(S,n)$ dir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014).

İspat. $\dfrac{F(S)}{2} \notin S$ olduğu açıktır. Eğer $\dfrac{F(S)}{2} + n \notin S$ ise o zaman $F(S) - \dfrac{F(S)}{2} - n \in S$ olur. Buradan $\dfrac{F(S)}{2} \in S$ sonucu çıkar ki bu da bir çelişki teşkil eder. Sonuç olarak $\dfrac{F(S)}{2} + n \in S$ dir.

Önerme 3.2.20 S Frobenius sayısı çift olan bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. Bu durumda,

S pseudo-simetriktir <=> $Ap(S,n) = \{a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-2} = F(S)+n\} \cup \left\{\dfrac{F(S)}{2} + n\right\}$ ve her $i \in \{0,\ldots,n-2\}$ için $a_i + a_{n-2-i} = a_{n-2}$ dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

İspat. (=>): Yardımcı teorem 3.2.19 dan $(F(S)/2)+n \in Ap(S,n)$ dir. Önerme 3.1.16 dan $(F(S)/2)+n < \max Ap(S,n) = F(S)+n$ dir. Eğer $w \in Ap(S,n) \setminus \{(F(S)/2)+n\}$ ise o zaman $w-n \notin S$ ve $w-n \neq F(S)/2$ olur. Önerme 3.2.9 dan $F(S)-(w-n) \in S$ ve dolayısıyla $\max Ap(S,n) - w = F(S)+n-w \in S$ demektir. Yardımcı Teorem 3.2.14 ten $\max Ap(S,n) - w \in Ap(S,n)$ sonucunu çıkarabiliriz.

Ayrıca $\max Ap(S,n)-w \neq (F(S)/2)+n$ dir. Aksi taktirde $w=F(S)/2$ demektir. Bu ispat Önerme 3.2.15 in ispatını izler.

(<=): x, $x \neq F(S)/2$ ve $x \notin S$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. Şimdi $F(S)-x \in S$ olduğunu gösterelim. $w \equiv x \bmod(n)$ olacak şekilde $w \in Ap(S,n)$ alalım. O zaman $x = w - kn$ olacak şekilde bazı $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ vardır. Buradan iki durum söz konusudur.

$i)$ Eğer $w=(F(S)/2)+n$ ise o zaman,

$F(S)-x = F(S)-((F(S)/2)+n-kn) = (F(S)/2)+(k-1)n$ dir.

Ayrıca $x \neq F(S)/2$ den $k \geq 2$ olur. Dolayısıyla, $F(S)-x \in S$ olduğunu söyleyebiliriz.

$ii)$ Eğer $w \neq (F(S)/2)+n$ ise hipotezden $a_{n-2}-w \in S$ olduğundan $F(S)-x = F(S)-(w-kn) = F(S)+n-w+(k-1)n = a_{n-2}-w+(k-1)n \in S$ olur.

Sonuç 3.2.21 S bir sayısal yarıgrup olsun. Aşağıdakiler denktirler:

$i)$ S pseudo-simetriktir.

$ii)$ $PF(S)=\{F(S), F(S)/2\}$ dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Not 3.2.22 $PF(S)=\{F(S), F(S)/2\}$ ise $t(S)=2$ dir. Fakat tersi her zaman doğru değildir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 3.2.23 $S=\langle 7,10,11\rangle = \{0,7,10,11,14,17,18,20,21,22,24,25,27,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. Buradan S nin pseudo-Frobenius kümesi $PF(S)=\{23,26\}$ dir. S nin tipi $t(S)=2$ dir. Fakat S sayısal yarıgrubu pseudo-simetrik değildir. Çünkü $x=\dfrac{F(S)}{2}=13 \in \mathbb{Z}\setminus S$ için $F(S)-x=13 \notin S$ çıkar.

Sonuç 3.2.24 S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^{*}$ olsun. Buradan,

S pseudo-simetriktir <=> $Maximals \leq_S (Ap(S,n)) = \left\{\dfrac{F(S)}{2}+n, F(S)+n\right\}$ dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

3.3 Teleskopik Sayısal Yarıgruplar

Tanım 3.3.1 $obeb(u_1,...,u_e)=1$ ve $u_1 < u_2 < ... < u_e$ olacak şekilde pozitif tamsayılar dizisi $(u_1,...,u_e)$ olsun. $i=1,...,e$ için $d_i = obeb(u_1,...,u_i)$ ve $A_i = \{u_1/d_i,...,u_i/d_i\}$ tanımlansın ve A_i tarafından üretilen sayısal yarıgrup S_i olsun. Eğer $i=2,...,e$ için $u_i/d_i \in S_{i-1}$ oluyorsa o zaman $(u_1,...,u_e)$ tamsayılar dizisine teleskopiktir denir. Ayrıca teleskopik dizilerle üretilen sayısal yarıgruplara teleskopik sayısal yarıgrup denir (Kirfel ve Pellikaan, 1995; Mıcale ve Olteanu, 2012).

Örnek 3.3.2 $S=\langle 8,12,14,15\rangle$ sayısal yarıgrubu teleskopiktir. Gerçekten,

$obeb(8,12,14,15)=1$
$i=1 \Rightarrow d_1 = obeb(8)=8, A_1=\{8/8\}=\{1\}$
$i=2 \Rightarrow d_2 = obeb(8,12)=4, A_2=\{8/4,12/4\}=\{2,3\}$
$i=3 \Rightarrow d_3 = obeb(8,12,14)=2, A_3=\{8/2,12/2,14/2\}=\{4,6,7\}$
$i=4 \Rightarrow d_4 = obeb(8,12,14,15)=1, A_4=\{8/1,12/1,14/1,15/1\}=\{8,12,14,15\}$

Buradan,

A_1 tarafından üretilen sayısal yarıgrup $S_1=\langle 1\rangle=\{0,\rightarrow\}=\mathbb{N}$

A_2 tarafından üretilen sayısal yarıgrup $S_2=\langle 2,3\rangle=\{0,2,\rightarrow\}$

A_3 tarafından üretilen sayısal yarıgrup $S_3=\langle 4,6,7\rangle=\{0,4,6,7,8,10,\rightarrow\}$

A_4 tarafından üretilen sayısal yarıgrup da

$S_4=\langle 8,12,14,15\rangle=\{0,8,12,14,15,16,20,22,23,24,26,27,28,29,30,31,32,34,\rightarrow\}$

şeklinde olur. Böylece,

$i=2 \Rightarrow 12/4=3\in S_1$
$i=3 \Rightarrow 14/2=7\in S_2$
$i=4 \Rightarrow 15/1=15\in S_3$

olduğundan $S=\langle 8,12,14,15\rangle$ sayısal yarıgrubu teleskopiktir.

Tanım 3.3.3 $S=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ bir sayısal yarıgrup olsun. $d=obeb(u_1,u_2)$ olmak üzere $u_3\in\langle u_1/d, u_2/d\rangle$ oluyorsa bu durumda S ye üç üreteçli teleskopik sayısal yarıgrup denir (Süer ve İlhan, 2019).

Sonuç 3.3.4 Teleskopik sayısal yarıgruplar simetriktir (Kirfel ve Pellikaan, 1995; Mıcale ve Olteanu, 2012).

4. BETTİ SAYILARI VE KATENER DERECESİ

Bu bölümde bir sayısal yarıgrubun Betti sayıları ve katener derecesi ile ilgili bazı bilgiler verilecektir.

Tanım 4.1 $\{m_1,...,m_i\}$ minimal üreteçler tarafından üretilen sayısal yarıgrup S olsun. Bu durumda, $m \in S$ için $Z_S(m) = \{(x_1,...,x_i) \in \mathbb{N}^i \mid m = x_1m_1 + ... + x_im_i\}$ kümesine m nin çarpanlarına ayrılışı denir. Ayrıca $x = (x_1,...,x_i) \in Z_S(m)$ için $|x| = x_1 + ... + x_i$ ifadesine x in uzunluğu denir (Conaway ve ark., 2015; Chapman ve ark., 2016; O'Neil ve ark., 2016).

Tanım 4.2 $x = (x_1,...x_i), y = (y_1,...,y_i) \in \mathbb{N}^i$ için x ve y nin en büyük ortak böleni $obeb(x,y) = (\min\{x_1,y_1\},...,\min\{x_i,y_i\}) \in \mathbb{N}^i$ dir (Conaway ve ark., 2015; Chapman ve ark., 2016; O'Neil ve ark., 2016).

Tanım 4.3 $x = (x_1,...x_i), y = (y_1,...,y_i) \in \mathbb{N}^i$ için x ve y arasındaki uzunluk $d(x,y) = \max\{|x - obeb(x,y)|, |y - obeb(x,y)|\}$ şeklindedir (Conaway ve ark., 2015; Chapman ve ark., 2016; O'Neil ve ark., 2016).

Örnek 4.4 $S = \langle 4,7,9 \rangle \subset \mathbb{N}$ sayısal yarıgrubu verilsin. $27 \in S$ için $x = (0,0,3), y = (1,2,1) \in Z_S(27)$ olup Tanım 4.2 den $obeb(x,y) = (0,0,1)$ ve Tanım 4.3 ten $d(x,y) = \max\{|(0,0,3) - (0,0,1)|, |(1,2,1) - (0,0,1)|\} = 3$ bulunur.

Tanım.4.5 S bir sayısal yarıgrup, $m \in S$, $x, y \in Z_S(m)$ ve $M \in \mathbb{N}$ verilsin. Bu durumda, x ten y ye kadar olan bir M -zinciri, her $j \in \{1,...,i-1\}$ için (1) $x_1 = x$, (2) $x_i = y$ ve (3) $d(x_j, x_{j+1}) \leq M$ olacak şekilde m nin çarpanları olan $x_1,...,x_i \in Z_S(m)$ dizisidir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014; Chapman ve ark., 2016; O'Neil ve ark., 2016).

Tanım.4.6 S bir sayısal yarıgrup, $m \in S$, $x, y \in Z_S(m)$ ve $M \in \mathbb{N}$ verilsin. Bu durumda, m nin katener derecesi x ten y ye var olan M zincirlerin en küçüğüdür. Ayrıca m nin katener derecesi $c(m)$ ve S sayısal yarıgrubunun katener derecesi kümesi de $C(S) = \{c(s) : s \in S\}$ ile gösterilir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014; Chapman ve ark., 2016; O'Neil ve ark., 2016).

Örnek.4.7 $S=\langle 4,6,11\rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin. $30\in S$ nin katener derecesini bulalım. Buradan, $30=4x_1+6x_2+11x_3$ $(x_1,x_2,x_3\in\mathbb{N})$ ten 30 un çarpanlarına ayrılma kümesi $Z_S(30)=\{(6,1,0),(3,3,0),(2,0,2),(0,5,0)\}$ ve bu çarpanlar arasındaki kenar uzunlukları,

$obeb((6,1,0),(2,0,2))=(\min\{6,2\},\min\{1,0\},\min\{0,2\})=(2,0,0)$,

$d((6,1,0),(2,0,2))=\max\{|(6,1,0)-(2,0,0)|,|(2,0,2)-(2,0,0)|\}=5$.

$obeb((2,0,2),(0,5,0))=(\min\{2,0\},\min\{0,5\},\min\{2,0\})=(0,0,0)$,

$d((2,0,2),(0,5,0))=\max\{|(2,0,2)-(0,0,0)|,|(0,5,0)-(0,0,0)|\}=5$.

$obeb((0,5,0),(3,3,0))=(\min\{0,3\},\min\{5,3\},\min\{0,0\})=(0,3,0)$,

$d((0,5,0),(3,3,0))=\max\{|(0,5,0)-(0,3,0)|,|(3,3,0)-(0,3,0)|\}=3$.

$obeb((3,3,0),(6,1,0))=(\min\{3,6\},\min\{3,1\},\min\{0,0\})=(3,1,0)$,

$d((3,3,0),(6,1,0))=\max\{|(3,3,0)-(3,1,0)|,|(6,1,0)-(3,1,0)|\}=3$.

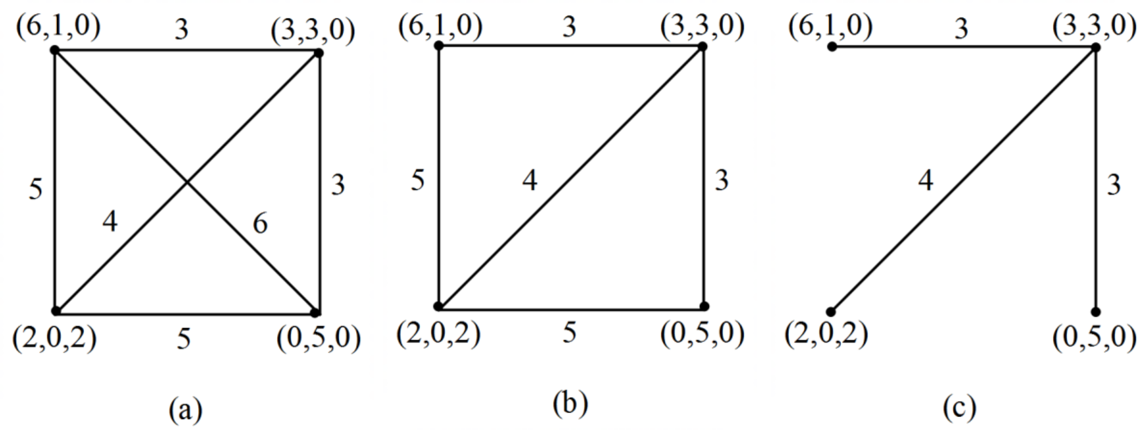
$obeb((6,1,0),(0,5,0))=(\min\{6,0\},\min\{1,5\},\min\{0,0\})=(0,1,0)$,

$d((6,1,0),(0,5,0))=\max\{|(6,1,0)-(0,1,0)|,|(0,5,0)-(0,1,0)|\}=6$.

$obeb((2,0,2),(3,3,0))=(\min\{2,3\},\min\{0,3\},\min\{2,0\})=(2,0,0)$,

$d((2,0,2),(3,3,0))=\max\{|(2,0,2)-(2,0,0)|,|(3,3,0)-(2,0,0)|\}=4$ olarak bulunur.

Buradan köşe noktaları bu çarpanlar olan ve bu köşe noktalarını birbirine bağlayan bu kenarlardan oluşan bir çizge çizelim. Daha sonra en büyük uzunluktaki kenarı kaldıralım ve bu işlemi tüm köşe noktaları arasında bağlantıyı sağlayan kenar kalıncaya kadar tekrar edelim. Böylece bu şekilde bulduğumuz kenarın uzunluğu katener derecesi olur. Dolaysıyla şekil 4.1 de görüldüğü üzere 30 un katener derecesi 4 çıkar.

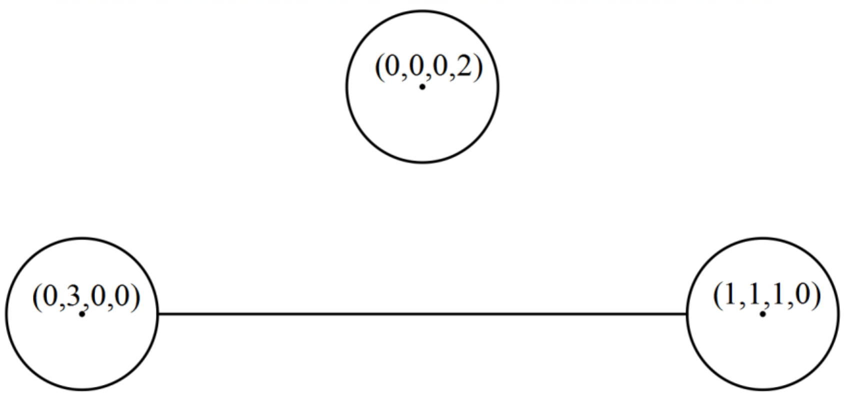


Şekil 4.1 $c(30)$ un katener çizgesi

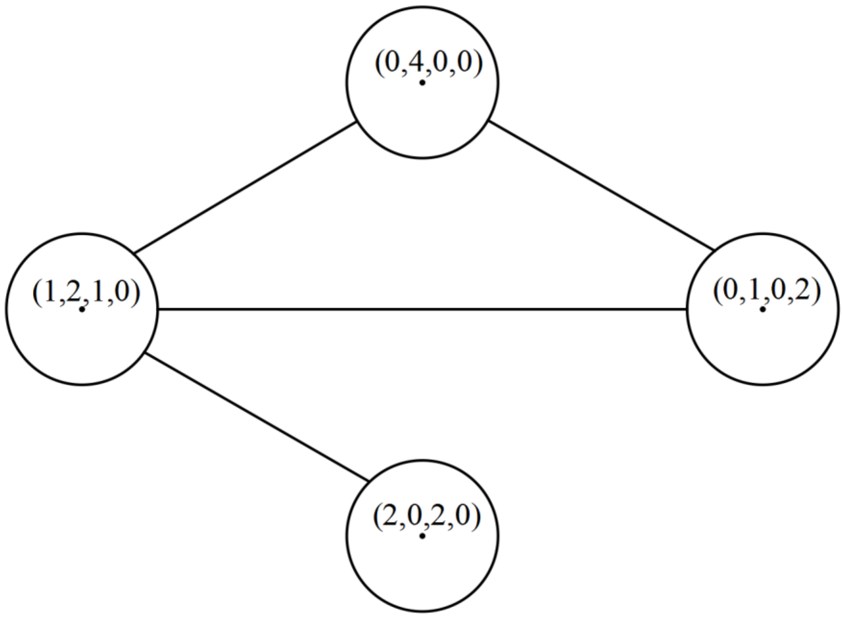
Tanım 4.8 S bir sayısal monoid olsun. Sıfır olmayan her bir $m \in S$ için köşe kümesi $Z_S(m)$ olan ∇_m çizgesini düşünelim. O zaman ∇_m çizgesi, $obeb(x,y) \neq 0$ olmak üzere iki köşesi $x, y \in Z_S(m)$ olan bir kenar paylaşır. Eğer ∇_m bağlantısız ise o zaman m sayısına S nin Betti sayısı denir. Ayrıca S nin Betti kümesini şu şekilde ifade ederiz:

$Betti(S) = \{\beta \in S \mid \nabla_\beta bağlantısızdır\}$ (Conaway ve ark., 2015; O'Neil ve ark., 2016).

Örnek 4.9 $S = \langle 7,10,13,15 \rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin. $\beta_1 = 30$ elemanı S nin Betti elemanıdır; fakat $\beta_2 = 40$ elemanı S nin Betti elemanı değildir. Gerçekten, şekil 4.2 deki ∇_{30} çizgesi bağlantısızdır; fakat şekil 4.3 teki ∇_{40} çizgesi bağlantılıdır.



Şekil 4.2 $\beta_1 = 30$ un Betti çizgesi



Şekil 4.3 $\beta_2 = 40$ ın Betti çizgesi

Önerme 4.10 $S = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ sayısal yarıgrubu u_1, u_2, u_3 minimal üreteçlerle üretilen bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman, bir $\beta \in S$ elemanı,
$x_i = \min\left\{x : xu_i \in \langle u_j, u_k \rangle \ ve \ \{j,k\} = \{1,2,3\} \setminus \{i\}\right\}$ olmak üzere, bazı $i \in \{1,2,3\}$ için $\beta = x_i u_i$ Betti elemanıdır (Conaway ve ark., 2015).

İspat. $(=>)$: Farz edelim ki β Betti elemanı olsun. O zaman ∇_β bağlantısızdır. Şimdi z ve z', ∇_β nin farklı bileşenleri içerisinde β nin iki çarpanı olsun. Buradan $obeb(z, z') = 0$ ve böylece ya z ya da z' bir bileşen üzerinde desteklenen bir çarpana sahiptir. Genelliği kaybetmeden z nin bir bileşenle desteklendiğini varsayalım. Öncelikle z nin birinci bileşende desteklendiğini düşünelim. Buradan $z_1 = (x_1, 0, 0)$ ve $z_2 = (0, x_2', x_3')$ olacak şekilde $x_1, x_2', x_3' \in \mathbb{N}$ vardır. Bu da demektir ki $\beta = x_1 u_1 = x'_2 u_2, x_3' u_3 \in \langle u_2, u_3 \rangle$ dir. Şimdi $y_1 \in \mathbb{N}$ ve $y_1 < x_1$ olmak üzere, $y_1 u_1 \in \langle u_2, u_3 \rangle$ olduğunu varsayalım. O zaman $y_1 u_1 = y_2 u_2 + y_3 u_3$ olacak şekilde $y_2, y_3 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda, $\beta = (x_1 - y_1)u_1 + y_1 u_1 = (x_1 - y_1)u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3$ şeklinde olup buradan elde edilen $z'' = (x_1 - y_1, y_2, y_3)$ çarpanı β nin bir çarpanıdır. Dolayısıyla $obeb(z, z'') \neq 0$ ve $obeb(z'', z') \neq 0$ olduğundan z ve z' nün ∇_β nin aynı bağlı bileşeninde olduğunu ve bununda bir çelişki oluşturduğunu görürüz. Sonuç olarak minimumluk x_1 i takip eder.

Benzer şekilde z nin ikinci veya üçüncü bileşen üzerinde desteklendiği durumlar paralel bir argümanla ispatlanabilir.

$(<=)$: Varsayalım minimumluk (en küçük) koşulları sağlayan doğal sayı x_1 olması durumunda $\beta = x_1u_1$ olsun. O zaman $\beta = x_1u_1 = x_2u_2 + x_3u_3$ olacak şekilde $x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $z = (x_1, 0, 0)$ ve $z' = (0, x_2, x_3)$ dışında β nin başka çarpanları olmadığını gösterirsek istediğimiz sonuca ulaşırız. Farz edelim ki $z'' = (y_1, y_2, y_3) \in \beta$ olsun. Bu verilerden $x_1u_1 = \beta = y_1u_1 + y_2u_2 + y_3u_3$ ü yazabilir ve buradan $x_1 \geq y_1$ sonucunu çıkarabiliriz. Eğer $x_1 > y_1$ ise o zaman $x_1 - y_1$, x_1 in minimalliğiyle çelişen, $(x_1 - y_1)u_1 \in \langle u_2, u_3 \rangle$ koşulunu sağlayan x_1 den kesinlikle daha küçük bir sayıdır ki bu da x_1 in minimalliğiyle çelişir. Bu nedenle $x_1 = y_1$ ve böylece $y_2 = y_3 = 0$ olur. O zaman $z'' = z$ sonucu çıkar ki bu da demektir ki β nin z ve z' dışında başka çarpanı yoktur. Buradan $Z(\beta) = \{z, z'\}$ ve $obeb(z, z') = 0$ sonuçlarından ∇_β bağlantısızdır. Bu durumda, β Betti elemanıdır.

Örnek 4.11 $S = \langle 11, 14, 19 \rangle$ sayısal yarıgrubunun Betti sayılarını bulmaya çalışalım.

$i = 1$ ve $u_1 = 11$ için $x_1 = \min\{x : 11x \in \langle 14, 19 \rangle\}$ den $x_1 = 3$ bulunur.

Buradan $\beta_1 = x_1u_1 = 3.11 = 33$ olur.

$i = 2$ ve $u_2 = 14$ için $x_2 = \min\{x : 14x \in \langle 11, 19 \rangle\}$ den $x_2 = 7$ bulunur.

Buradan $\beta_2 = x_2u_2 = 7.14 = 98$ olur.

$i = 3$ ve $u_3 = 19$ için $x_3 = \min\{x : 19x \in \langle 11, 14 \rangle\}$ den $x_3 = 5$ bulunur.

Buradan $\beta_3 = x_3u_3 = 5.19 = 95$ olur. Sonuç olarak S nin Betti sayıları $Betti(S) = \{33, 95, 98\}$ şeklindedir.

Teorem 4.12 S bir sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda, $c(S) = \max\{c(\beta) : \beta \in Betti(S)\}$ dir (Assi ve Garcia-Sanchez, 2014; Chapman ve ark., 2016; O'Neil ve ark., 2016).

Önerme 4.13 S gömme boyutu 3 olan bir sayısal yarıgrup olsun. Buradan $1 \leq \# Betti(S) \leq 3$ tür. Ayrıca, S simetrik değildir ancak ve ancak $\# Betti(S) = 3$ tür (Garcia-Sanchez ve ark., 2017).

5. BAZI TELESKOPİK SAYISAL YARIGRUPLARIN BETTİ SAYILARI VE KATENER DERECESİ

Bu bölümde gömme boyutu üç olan bazı teleskopik sayısal yarıgrup aileleri verilecektir. Daha sonra bu ailelerin Betti sayıları, Frobenius sayıları, cinsi ve elde ettiğimiz bu Betti sayılarının bir kısmının katener derecelerinin bulunmasıyla ilgili bazı önemli çalışmalar elde edeceğiz.

Teorem 5.1 S gömme boyutu 3 ve katlılığı 4 olan bir sayısal yarıgrup olsun. S sayısal yarıgrubu teleskopiktir ancak ve ancak S, $\Phi=\left\{\left\langle 4,4\alpha+2,m\right\rangle:\alpha\in\mathbb{Z}^{+},\ m\in\mathbb{Z}_{t} \text{ ve } m>4\alpha+2\right\}$ ailesinin bir üyesidir (Süer ve İlhan, 2019).

Teorem 5.2 S gömme boyutu 3 ve katlılığı 6 olan bir sayısal yarıgrup olsun. S sayısal yarıgrubu teleskopiktir ancak ve ancak S aşağıdaki ailelerinin bir üyesidir.

$i)$ $\Pi=\left\{\left\langle 6,6\alpha+2,m\right\rangle:\alpha\in\mathbb{Z}^{+}, m\in\mathbb{Z}_{t} \text{ ve } m>6\alpha+2\right\}$,

$ii)$ $\Omega=\left\{\left\langle 6,6\alpha+3,p\right\rangle: p\in\mathbb{Z}^{+}, p>6\alpha+3 \text{ ve } 3\nmid p\right\}$,

$iii)$ $\Psi=\left\{\left\langle 6,6\alpha+4,n\right\rangle:\alpha\in\mathbb{Z}^{+}, n\in\mathbb{Z}_{t} \text{ ve } n>6\alpha+4\right\}$

(Süer ve İlhan, 2019).

Teorem 5.3 Teorem 5.1 de verilen S sayısal yarıgrubu $\Phi=\left\{\left\langle 4,4\alpha+2,m\right\rangle:\alpha\in\mathbb{Z}^{+},\ m\in\mathbb{Z}_{t} \text{ ve } m>4\alpha+2\right\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi olsun. Bu durumda, $\beta_1=8\alpha+4$ ve $\beta_2=2m$ olmak üzere S nin Betti sayıları $Betti(S)=\{\beta_1,\beta_2\}$ şeklindedir.

İspat. Önerme 4.10 dan $x_1=\min\left\{x:4x\in\left\langle 4\alpha+2,m\right\rangle\right\}$ ve Tanım 3.1.1 den $4x=\lambda_1(4\alpha+2)+\lambda_2 m \quad (\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{N})$ yazılır. Verilen denklemde $\lambda_1=2$ ve $\lambda_2=0$ seçmemiz halinde en küçük x değerini elde ederiz. Buradan $4x=2(4\alpha+2)+0m$ ise $x=2\alpha+1$ olarak elde edilir. Buradan $\beta=4(2\alpha+1)=8\alpha+4$ olur. Yine Önerme 4.10 dan $x_2=\min\left\{x:x(4\alpha+2)\in\left\langle 4,m\right\rangle\right\}$ ve Tanım 3.1.1 den $x(4\alpha+2)=\lambda_1 4+\lambda_2 m \quad (\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{N})$ yazılır. Verilen denklemde $\lambda_1=2\alpha+1$ ve $\lambda_2=0$ seçmemiz halinde en küçük x değerini elde ederiz. Buradan $x(4\alpha+2)=4\left(2\alpha+1\right)+0m$ ve $x=2$ elde edilir. Böylece $\beta=(4\alpha+2)2=8\alpha+4$ olur.

Önerme 4.10 dan $x_3 = \min\{x : mx \in \langle 4, 4\alpha+2\rangle\}$ ve S teleskopik sayısal yarıgrup olduğundan $m \in \langle 2, 2\alpha+1\rangle$ yazabiliriz. Tanım 3.1.1 den $m = 2\lambda_1 + (2\alpha+1)\lambda_2$ olacak şekilde en az bir $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $2m = 4\lambda_1 + (4\alpha+2)\lambda_2$ elde edilir ki bu koşulu sağlayan en küçük x tamsayısı 2 olup $\beta = 2m$ çıkar.

Sonuç olarak Φ teleskopik sayısal yarıgrup ailesine ait S sayısal yarıgrubunun Betti sayılarının kümesi $Betti(S) = \{8\alpha+4, 2m\}$ formunda olur.

Örnek 5.4 $i = 1, 2, ...$ için S_i, $\Phi = \{\langle 4, 4\alpha+2, m\rangle : \alpha \in \mathbb{Z}^+,\ m \in \mathbb{Z}_t \text{ ve } m > 4\alpha+2\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi olsun. Aşağıda $\alpha = 1$ ve $\alpha = 2$ için Φ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin Betti sayıları hesaplanmıştır.

$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
$S_1 = \langle 4,6,7\rangle \Rightarrow \beta etti(S_1) = \{12,14\}$	$S_1 = \langle 4,10,11\rangle \Rightarrow \beta etti(S_1) = \{20,22\}$
$S_2 = \langle 4,6,9\rangle \Rightarrow \beta etti(S_2) = \{12,18\}$	$S_2 = \langle 4,10,13\rangle \Rightarrow \beta etti(S_2) = \{20,26\}$
$S_3 = \langle 4,6,11\rangle \Rightarrow \beta etti(S_3) = \{12,22\}$	$S_3 = \langle 4,10,15\rangle \Rightarrow \beta etti(S_3) = \{20,30\}$
$S_4 = \langle 4,6,13\rangle \Rightarrow \beta etti(S_4) = \{12,26\}$	$S_4 = \langle 4,10,17\rangle \Rightarrow \beta etti(S_4) = \{20,34\}$
$S_5 = \langle 4,6,15\rangle \Rightarrow \beta etti(S_5) = \{12,30\}$	$S_5 = \langle 4,10,19\rangle \Rightarrow \beta etti(S_5) = \{20,38\}$
$S_6 = \langle 4,6,17\rangle \Rightarrow \beta etti(S_6) = \{12,34\}$	$S_6 = \langle 4,10,21\rangle \Rightarrow \beta etti(S_6) = \{20,42\}$
$S_7 = \langle 4,6,19\rangle \Rightarrow \beta etti(S_7) = \{12,38\}$	$S_7 = \langle 4,10,23\rangle \Rightarrow \beta etti(S_7) = \{20,46\}$
$S_8 = \langle 4,6,21\rangle \Rightarrow \beta etti(S_8) = \{12,42\}$	$S_8 = \langle 4,10,25\rangle \Rightarrow \beta etti(S_8) = \{20,50\}$
...	...

Örnekte görüldüğü gibi $\Phi = \{\langle 4, 4\alpha+2, m\rangle : \alpha \in \mathbb{Z}^+,\ m \in \mathbb{Z}_t \text{ ve } m > 4\alpha+2\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin Betti sayıları kümesi $Betti(S) = \{8\alpha+4, 2m\}$ formundadır.

Sonuç 5.5 S sayısal yarıgrubu $\Phi = \{\langle 4, 4\alpha+2, m\rangle : \alpha \in \mathbb{Z}^+,\ m \in \mathbb{Z}_t \text{ ve } m > 4\alpha+2\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi olsun. O zaman S sayısal yarıgrubunun Betti sayıları $\beta_1 = 8\alpha+4$, $\beta_2 = 2m$ olmak üzere,

$$i)\ F(S) = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=2}\beta_i\right) - 4,$$

$$ii)\ g(S) = \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{i=2}\beta_i\right) - \frac{3}{2}$$

şeklindedir.

Teorem 5.6 Teorem 5.2 de verilen

$i)$ S sayısal yarıgrubu $\Pi=\{\langle 6,6\alpha+2,m\rangle : \alpha\in\mathbb{Z}^{+},\, m\in\mathbb{Z}_{t} \text{ ve } m>6\alpha+2\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi olsun. Bu durumda, S nin Betti sayıları, $\beta_1=18\alpha+6$ ve $\beta_2=2m$ olmak üzere, $Betti(S)=\{\beta_1,\beta_2\}$ formundadır.

$ii)$ S sayısal yarıgrubu $\Omega=\{\langle 6,6\alpha+3,p\rangle : p\in\mathbb{Z}^{+},\, p>6\alpha+3 \text{ ve } 3\nmid p\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi olsun. Bu durumda, S nin Betti sayıları, $\beta_1=12\alpha+6$ ve $\beta_2=3p$ olmak üzere, $Betti(S)=\{\beta_1,\beta_2\}$ formundadır.

$iii)$ S sayısal yarıgrubu $\Psi=\{\langle 6,6\alpha+4,n\rangle : \alpha\in\mathbb{Z}^{+},\, n\in\mathbb{Z}_{t} \text{ ve } n>6\alpha+4\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi olsun. O zaman S nin Betti sayıları, $\beta_1=18\alpha+12$ ve $\beta_2=2n$ olmak üzere, $Betti(S)=\{\beta_1,\beta_2\}$ formundadır.

İspat.

$i)$ Önerme 4.10 dan $x_1=\min\{x : 6x\in\langle 6\alpha+2,m\rangle\}$ ve Tanım 3.1.1 den $6x=\lambda_1(6\alpha+2)+\lambda_2 m$ $(\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{N})$ yazılır. Eğer $3\,|\,m$ ve $6\alpha+2<m<9\alpha+3$ ise verilen denklemde $\lambda_1=0$ ve $\lambda_2=2$ seçmemiz halinde en küçük x değerini elde ederiz. Buradan $6x=0(6\alpha+2)+2m$ ve $x=\dfrac{m}{3}$ elde edilir. Böylece $\beta=6\cdot\dfrac{m}{3}=2m$ olur. Eğer $m\geq 9\alpha+3$ ise verilen denklemde $\lambda_1=3$ ve $\lambda_2=0$ seçmemiz halinde en küçük x değerini elde ederiz. Buradan $6x=3(6\alpha+2)+0m$ ise $x=3\alpha+1$ olarak elde edilir. Bu durumda, $\beta=6(3\alpha+1)=18\alpha+6$ olur. Yine

Önerme 4.10 dan $x_2=\min\{x : x(6\alpha+2)\in\langle 6,m\rangle\}$ ve Tanım 3.1.1 den $x(6\alpha+2)=\lambda_1 6+\lambda_2 m$ $(\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{N})$ yazılır. Verilen denklemde $\lambda_1=3\alpha+1$ ve $\lambda_2=0$ seçmemiz halinde en küçük x değerini elde ederiz. Buradan $x(6\alpha+2)=6(3\alpha+1)+0m$ ve $x=3$ elde edilir. Böylece $\beta=3(6\alpha+2)=18\alpha+6$ olur. Yine

Önerme 4.10 dan $x_3=\min\{x : mx\in\langle 6,6\alpha+2\rangle\}$ yazılır ve S teleskopik sayısal yarıgrup olduğundan $m\in\langle 3,3\alpha+1\rangle$ dir. Tanım 3.1.1 den $m=3\lambda_1+(3\alpha+1)\lambda_2$ olacak şekilde en az bir $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{N}$ vardır. Buradan $2m=6\lambda_1+(6\alpha+2)\lambda_2$ elde edilir ki bu koşulu sağlayan en küçük x tamsayısı 2 olup $\beta=2m$ çıkar.

Sonuç olarak Π teleskopik sayısal yarıgrup ailesine ait S sayısal yarıgrubunun Betti sayılarının kümesi $Betti(S)=\{18\alpha+6,2m\}$ formundadır.

ii) Önerme 4.10 dan $x_1 = \min\{x : 6x \in \langle 6\alpha+3, p\rangle\}$ ve Tanım 3.1.1 den $6x = \lambda_1(6\alpha+3)+\lambda_2 p$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N})$ yazılır. Verilen denklemde $\lambda_1 = 2$ ve $\lambda_2 = 0$ seçmemiz halinde en küçük x değerini elde ederiz. Buradan $6x = 2(6\alpha+3)+0p$ ise $x = 2\alpha+1$ olarak elde edilir. Bu durumda, $\beta = 6(2\alpha+1) = 12\alpha+6$ olur. Yine

Önerme 4.10 dan $x_2 = \min\{x : x(6\alpha+3) \in \langle 6, p\rangle\}$ ve Tanım 3.1.1 den $x(6\alpha+3) = \lambda_1 6 + \lambda_2 p$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N})$ yazılır. Verilen denklemde $\lambda_1 = 2\alpha+1$ ve $\lambda_2 = 0$ seçmemiz halinde en küçük x değerini elde ederiz. Buradan $x(6\alpha+3) = 6(2\alpha+1)+0p$ ve $x = 2$ elde edilir. Buradan $\beta = 2(6\alpha+3) = 12\alpha+6$ olur.

Önerme 4.10 dan $x_3 = \min\{x : xp \in \langle 6, 6\alpha+3\rangle\}$ yazılır ve S teleskopik sayısal yarıgrup olduğundan $p \in \langle 2, 2\alpha+1\rangle$ dir. Tanım 3.1.1 den $p = 2\lambda_1 + (2\alpha+1)\lambda_2$ olacak şekilde en az bir $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $3p = 6\lambda_1 + (6\alpha+3)\lambda_2$ elde edilir ki bu koşulu sağlayan en küçük x tamsayısı 3 tür. Böylece, $\beta = 3p$ olur.

Sonuç olarak Ω teleskopik sayısal yarıgrup ailesine ait S sayısal yarıgrubunun Betti sayılarının kümesi $Betti(S) = \{12\alpha+6, 3p\}$ formundadır.

iii) Önerme 4.10 dan $x_1 = \min\{x : 6x \in \langle 6\alpha+4, n\rangle\}$ ve Tanım 3.1.1 den $6x = \lambda_1(6\alpha+4)+\lambda_2 n$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N})$ yazılır. Verilen denklemde $\lambda_1 = 3$ ve $\lambda_2 = 0$ seçmemiz halinde en küçük x değerini elde ederiz. Burada $6x = 3(6\alpha+4)+0n$ ve $x = 3\alpha+2$ elde edilir. Böylece, $\beta = 6(3\alpha+2) = 18\alpha+12$ olur. Yine

Önerme 4.10 dan $x_2 = \min\{x : x(6\alpha+4) \in \langle 6, n\rangle\}$ ve Tanım 3.1.1 den $x(6\alpha+4) = \lambda_1 6 + \lambda_2 n$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N})$ yazılır. Verilen denklemde $\lambda_1 = 3\alpha+2$ ve $\lambda_2 = 0$ seçmemiz halinde en küçük x değerini elde ederiz. Buradan $x(6\alpha+4) = 6(3\alpha+2)+0n$ ve $x = 3$ elde edilir. Bu durumda, $\beta = 3(6\alpha+4) = 18\alpha+12$ olur. Yine

Önerme 4.10 dan $x_3 = \min\{x : xn \in \langle 6, 6\alpha+4\rangle\}$ yazılır ve S teleskopik sayısal yarıgrup olduğundan $n \in \langle 3, 3\alpha+2\rangle$ dir. Tanım 3.1.1 den $n = 3\lambda_1 + (3\alpha+2)\lambda_2$ olacak şekilde en az bir $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $2n = 6\lambda_1 + (6\alpha+4)\lambda_2$ elde edilir ki bu koşulu sağlayan en küçük x tamsayısı 2 dir. Yani $\beta = 2n$ olur.

Sonuç olarak Ψ teleskopik sayısal yarıgrup ailesine ait S sayısal yarıgrubunun Betti sayılarının kümesi $Betti(S)=\{18\alpha+12,2n\}$ formundadır.

Örnekler 5.7

i) $\Pi=\{\langle 6,6\alpha+2,m\rangle : \alpha\in\mathbb{Z}^{+}, m\in\mathbb{Z}_{t} \text{ ve } m>6\alpha+2\}$ formundaki sayısal yarıgrup ailesini düşünelim. $\alpha=1$ ve $\alpha=2$ için bazı yarıgrupların Betti elemanlarının kümesini bulalım.

$\alpha=1$	$\alpha=2$
$S_1=\langle 6,8,9\rangle \Rightarrow \beta etti(S_1)=\{18,24\}$	$S_1=\langle 6,14,15\rangle \Rightarrow \beta etti(S_1)=\{30,42\}$
$S_2=\langle 6,8,11\rangle \Rightarrow \beta etti(S_2)=\{22,24\}$	$S_2=\langle 6,14,17\rangle \Rightarrow \beta etti(S_2)=\{34,42\}$
$S_3=\langle 6,8,13\rangle \Rightarrow \beta etti(S_3)=\{24,26\}$	$S_3=\langle 6,14,19\rangle \Rightarrow \beta etti(S_3)=\{38,42\}$
$S_4=\langle 6,8,15\rangle \Rightarrow \beta etti(S_4)=\{24,30\}$	$S_4=\langle 6,14,21\rangle \Rightarrow \beta etti(S_4)=\{42\}$
$S_5=\langle 6,8,17\rangle \Rightarrow \beta etti(S_5)=\{24,34\}$	$S_5=\langle 6,14,23\rangle \Rightarrow \beta etti(S_5)=\{42,46\}$
$S_6=\langle 6,8,19\rangle \Rightarrow \beta etti(S_6)=\{24,38\}$	$S_6=\langle 6,14,25\rangle \Rightarrow \beta etti(S_6)=\{42,50\}$
$S_7=\langle 6,8,21\rangle \Rightarrow \beta etti(S_7)=\{24,42\}$	$S_7=\langle 6,14,27\rangle \Rightarrow \beta etti(S_7)=\{42,54\}$
$S_8=\langle 6,8,23\rangle \Rightarrow \beta etti(S_8)=\{24,46\}$	$S_8=\langle 6,14,29\rangle \Rightarrow \beta etti(S_8)=\{42,58\}$
...	...

Örnekte görüldüğü gibi $\Pi=\{\langle 6,6\alpha+2,m\rangle : \alpha\in\mathbb{Z}^{+}, m\in\mathbb{Z}_{t} \text{ ve } m>6\alpha+2\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesine ait S sayısal yarıgruplarının Betti sayılarının kümesi $Betti(S)=\{18\alpha+6,2m\}$ olduğu görülmektedir.

ii) $\Omega=\{\langle 6,6\alpha+3,p\rangle : p\in\mathbb{Z}^{+}, p>6\alpha+3 \text{ ve } 3\nmid p\}$ formundaki sayısal yarıgrup ailesini düşünelim. $\alpha=1$ ve $\alpha=2$ için bazı yarıgrupların Betti elemanlarının kümesini bulalım.

$\alpha=1$	$\alpha=2$
$S_1=\langle 6,9,10\rangle \Rightarrow \beta etti(S_1)=\{18,30\}$	$S_1=\langle 6,15,16\rangle \Rightarrow \beta etti(S_1)=\{30,48\}$
$S_2=\langle 6,9,11\rangle \Rightarrow \beta etti(S_2)=\{18,33\}$	$S_2=\langle 6,15,17\rangle \Rightarrow \beta etti(S_2)=\{30,51\}$
$S_3=\langle 6,9,13\rangle \Rightarrow \beta etti(S_3)=\{18,39\}$	$S_3=\langle 6,15,19\rangle \Rightarrow \beta etti(S_3)=\{30,57\}$
$S_4=\langle 6,9,14\rangle \Rightarrow \beta etti(S_4)=\{18,42\}$	$S_4=\langle 6,15,20\rangle \Rightarrow \beta etti(S_4)=\{30,60\}$
$S_5=\langle 6,9,16\rangle \Rightarrow \beta etti(S_5)=\{18,48\}$	$S_5=\langle 6,15,22\rangle \Rightarrow \beta etti(S_5)=\{30,66\}$
$S_6=\langle 6,9,17\rangle \Rightarrow \beta etti(S_6)=\{18,51\}$	$S_6=\langle 6,15,23\rangle \Rightarrow \beta etti(S_6)=\{30,69\}$
$S_7=\langle 6,9,19\rangle \Rightarrow \beta etti(S_7)=\{18,57\}$	$S_7=\langle 6,15,25\rangle \Rightarrow \beta etti(S_7)=\{30,75\}$
$S_8=\langle 6,9,20\rangle \Rightarrow \beta etti(S_8)=\{18,60\}$	$S_8=\langle 6,15,26\rangle \Rightarrow \beta etti(S_8)=\{30,78\}$
...	...

Örnekte görüldüğü gibi $\Omega = \{\langle 6, 6\alpha+3, p\rangle : p \in \mathbb{Z}^+, p > 6\alpha+3 \text{ ve } 3 \nmid p\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesine ait S sayısal yarıgruplarının Betti sayılarının kümesi $Betti(S) = \{12\alpha+6, 3p\}$ olduğu görülmektedir.

iii) $\Psi = \{\langle 6, 6\alpha+4, n\rangle : \alpha \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{Z}_t \text{ ve } n > 6\alpha+4\}$ formundaki sayısal yarıgrup ailelerini düşünelim. $\alpha = 1$ ve $\alpha = 2$ için bazı yarıgrupların Betti elemanlarının kümesini bulalım.

$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
$S_1 = \langle 6,10,11\rangle \Rightarrow \beta etti(S_1) = \{22,30\}$	$S_1 = \langle 6,16,17\rangle \Rightarrow \beta etti(S_1) = \{34,48\}$
$S_2 = \langle 6,10,13\rangle \Rightarrow \beta etti(S_2) = \{26,30\}$	$S_2 = \langle 6,16,19\rangle \Rightarrow \beta etti(S_2) = \{38,48\}$
$S_3 = \langle 6,10,15\rangle \Rightarrow \beta etti(S_3) = \{30\}$	$S_3 = \langle 6,16,21\rangle \Rightarrow \beta etti(S_3) = \{42,48\}$
$S_4 = \langle 6,10,17\rangle \Rightarrow \beta etti(S_4) = \{30,34\}$	$S_4 = \langle 6,16,23\rangle \Rightarrow \beta etti(S_4) = \{46,48\}$
$S_5 = \langle 6,10,19\rangle \Rightarrow \beta etti(S_5) = \{30,38\}$	$S_5 = \langle 6,16,25\rangle \Rightarrow \beta etti(S_5) = \{48,50\}$
$S_6 = \langle 6,10,21\rangle \Rightarrow \beta etti(S_6) = \{30,42\}$	$S_6 = \langle 6,16,27\rangle \Rightarrow \beta etti(S_6) = \{48,54\}$
$S_7 = \langle 6,10,23\rangle \Rightarrow \beta etti(S_7) = \{30,46\}$	$S_7 = \langle 6,16,29\rangle \Rightarrow \beta etti(S_7) = \{48,58\}$
$S_8 = \langle 6,10,25\rangle \Rightarrow \beta etti(S_8) = \{30,50\}$	$S_8 = \langle 6,16,31\rangle \Rightarrow \beta etti(S_8) = \{48,62\}$
...	...

Örnekte görüldüğü gibi $\Psi = \{\langle 6, 6\alpha+4, n\rangle : \alpha \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{Z}_t \text{ ve } n > 6\alpha+4\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesine ait S sayısal yarıgruplarının Betti sayılarının kümesi $Betti(S) = \{18\alpha+12, 2n\}$ olduğu görülmektedir.

Sonuç 5.8 S sayısal yarıgrubu $\Pi = \{\langle 6, 6\alpha+2, m\rangle : \alpha \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{Z}_t \text{ ve } m > 6\alpha+2\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi olsun. O zaman S sayısal yarıgrubunun Betti sayıları $\beta_1 = 18\alpha+6$, $\beta_2 = 2m$ olmak üzere,

i) $F(S) = \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=2}\beta_i\right) - (5-3\alpha)$,

ii) $g(S) = \left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{i=2}\beta_i\right) + \left(\frac{3\alpha-4}{2}\right)$

şeklindedir.

Sonuç 5.9 S sayısal yarıgrubu $\Omega = \{\langle 6, 6\alpha+3, p\rangle : p \in \mathbb{Z}^+, p > 6\alpha+3 \text{ ve } 3 \nmid p\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi olsun. O zaman S sayısal yarıgrubunun Betti sayıları $\beta_1 = 12\alpha+6$, $\beta_2 = 3p$ olmak üzere,

$i)\ F(S)=\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=2}\beta_i\right)-\left(\frac{12-p}{2}\right),$

$ii)\ g(S)=\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{i=2}\beta_i\right)+\left(\frac{p-10}{4}\right)$

şeklindedir.

Sonuç 5.10 S sayısal yarıgrubu $\Psi=\left\{\langle 6,6\alpha+4,n\rangle : \alpha\in\mathbb{Z}^{+},\ n\in\mathbb{Z}_t \text{ ve } n>6\alpha+4\right\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi olsun. O zaman S sayısal yarıgrubunun Betti sayıları $\beta_1=18\alpha+12$, $\beta_2=2n$ olmak üzere,

$i)\ F(S)=\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=2}\beta_i\right)-(4-3\alpha),$

$ii)\ g(S)=\left(\sum_{i=1}^{i=2}\beta_i\right)-\left(\frac{24\alpha+3n+21}{2}\right)$

şeklindedir.

Teorem 5.11 S sayısal yarıgrubu $\Phi=\left\{\langle 4,4\alpha+2,m\rangle : \alpha\in\mathbb{Z}^{+},\ m\in\mathbb{Z}_t \text{ ve } m>4\alpha+2\right\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi ve β_1, β_2 S sayısal yarıgrubunun Betti sayıları olsunlar. Bu durumda, $k\in\mathbb{Z}_t$ için $k\leq\frac{m}{2\alpha+1}$ olmak üzere, β_1 in çarpanları $(2\alpha+1,0,0)$ ve $(0,2,0)$; β_2 nin çarpanları ise $\left(\frac{m-k\cdot(2\alpha+1)}{2},k,0\right)$ ve $(0,0,2)$ dir.

İspat. Teorem 5.3 gereği S sayısal yarıgrubunun Betti sayıları sırasıyla $\beta_1=8\alpha+4$ ve $\beta_2=2m$ dir. Öncelikle β_1 in çarpanlarını bulalım. $\beta_1=8\alpha+4=4x_1+(4\alpha+2)x_2+mx_3$ $(x_1,x_2,x_3\in\mathbb{N})$ olarak yazarız. Bu durumda, $\beta_1=8\alpha+4$ ifadesi çift tamsayı olduğundan $4x_1+(4\alpha+2)x_2+mx_3$ ifadesi de çift tamsayı olmak zorundadır. Dolayısıyla $4x_1+(4\alpha+2)x_2$ sayısı çift tamsayı ve m tek tamsayı olduğundan x_3 çift tamsayı olmak zorundadır. Ayrıca $m>4\alpha+2$ olduğundan $x_3=0$ olmalıdır. Böylece $x_3=0$ ise $8\alpha+4=4x_1+(4\alpha+2)x_2$ eşitliği elde edilir. Bu durumda, $x_2=2-\frac{2x_1}{2\alpha+1}$ ve $x_2\in\mathbb{N}$ olduğundan $x_1=0$ veya $x_1=2\alpha+1$ olmalıdır. Sonuç olarak, β_1 in çarpanları $(2\alpha+1,0,0)$ ve $(0,2,0)$ şeklindedir.

Şimdi $\beta_2 = 2m$ nin çarpanlarını bulalım. $\beta_2 = 2m = 4x_1 + (4\alpha+2)x_2 + mx_3$ olarak yazarız. Buradan $x_3 = 0$ veya $x_3 = 1$ veya $x_3 = 2$ olduğu açıktır. Eğer $x_3 = 0$ ise $2m = 4x_1 + (4\alpha+2)x_2$ eşitliği elde eder ve buradan $x_2 = \dfrac{m-2x_1}{2\alpha+1}$ olarak yazarız. Bu durumda, $x_2 \in \mathbb{N}$ olduğundan $2\alpha+1 \mid m-2x_1$ yazılır. Ayrıca $2\alpha+1$ ve $m-2x_1$ ifadeleri tek tamsayı olduğundan $x_2 = \dfrac{m-2x_1}{2\alpha+1}$ ifadesi de tek tamsayı olmak zorundadır. Şimdi $k \in \mathbb{Z}_t$ için $m-2x_1 = k(2\alpha+1)$ eşitliğini yazalım. Buradan $k \le \dfrac{m}{2\alpha+1}$ olmak üzere, $x_1 = \dfrac{m-k\cdot(2\alpha+1)}{2}$ ve $x_2 = k$ olur. Dolayısıyla $x_3 = 0$ olması durumunda β_2 nin bir çarpanı $\left(\dfrac{m-k\cdot(2\alpha+1)}{2}, k, 0\right)$ çıkar. Eğer $x_3 = 1$ ise $m = 4x_1 + (4\alpha+2)x_2$ eşitliği elde edilir. Fakat bu ifade bir çelişki teşkil eder, çünkü m tek tamsayı ve $4x_1 + (4\alpha+2)x_2$ çift tamsayıdır. Dolayısıyla $x_3 = 1$ olması durumunda β_2 nin bir çarpanı bulunamaz. Eğer $x_3 = 2$ ise $0 = 4x_1 + (4\alpha+2)x_2$ eşitliği elde edilir. Buradan $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ olduğundan $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $x_3 = 2$ olması durumunda β_2 nin bir çarpanı $(0,0,2)$ çıkar.

Teorem 5.12 S sayısal yarıgrubu $\Phi = \{\langle 4, 4\alpha+2, m\rangle : \alpha \in \mathbb{Z}^+,\ m \in \mathbb{Z}_t \text{ ve } m > 4\alpha+2\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi ve β_1 , S sayısal yarıgrubunun Betti sayısı olsun. O zaman β_1 in katener derecesi $c(\beta_1) = 2\alpha+1$ olur.

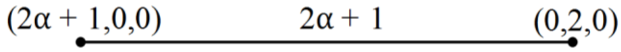
İspat. Teorem 5.11 gereği $\beta_1 = 8\alpha+4$ ün çarpanları $(2\alpha+1,0,0)$ ve $(0,2,0)$ dır.

Bu durumda, bu çarpanlar arasındaki kenar uzunluğu,

$$obeb\big((2\alpha+1,0,0),(0,2,0)\big) = \big(\min\{2\alpha+1,0\}, \min\{0,2\}, \min\{0,0\}\big) = (0,0,0),$$

$$d\big((2\alpha+1,0,0),(0,2,0)\big) = \max\{|(2\alpha+1,0,0)-(0,0,0)|, |(0,2,0)-(0,0,0)|\} = 2\alpha+1$$

olarak bulunur. Buradan köşe noktaları bu çarpanlar olan ve bu köşe noktalarını birbirine bağlayan bu kenarlardan oluşan şekil 5.1 çizgesini çizdiğimizde β_1 in katener derecesi $c(\beta_1) = 2\alpha+1$ olduğu görülür.



Şekil 5.1 Çarpanları $(2\alpha+1,0,0)$ ve $(0,2,0)$ olan $\beta_1 = 8\alpha+4$ ün katener çizgesi

Örnek 5.13 $\alpha = 100$ ve $m = 403$ için $S = \langle 4, 402, 403 \rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin.

Bu durumda, $\beta_1 = 8 \cdot 100 + 4 = 804$ ve $c(804) = 2 \cdot 100 + 1 = 201$ elde edilir.

Teorem 5.14 S sayısal yarıgrubu $\Pi = \left\{ \langle 6, 6\alpha+2, m \rangle : \alpha \in \mathbb{Z}^+,\ m \in \mathbb{Z}_t \text{ ve } m > 6\alpha+2 \right\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi ve β_1, β_2 S sayısal yarıgrubunun Betti sayıları olsunlar. Bu durumda,

i) $3 \nmid m$ ise β_1 in çarpanları $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$,

ii) $6\alpha+2 < m \le 9\alpha+3$ ve $3 \mid m$ ise β_1 in çarpanları $\left(\dfrac{(9\alpha+3)-m}{3}, 0, 2 \right)$, $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$,

iii) $k \in \mathbb{N}$ için $k \le \dfrac{m}{3\alpha+1}$ ve $3 \mid m - k \cdot (3\alpha+1)$ ise β_2 nin çarpanları $\left(\dfrac{m - k \cdot (3\alpha+1)}{3}, k, 0 \right)$ ve $(0,0,2)$ şeklindedir.

İspat. Teorem 5. 6 gereği S sayısal yarıgrubunun Betti sayıları sırasıyla $\beta_1 = 18\alpha+6$ ve $\beta_2 = 2m$ dir. Öncelikle β_1 in çarpanlarını bulalım. $\beta_1 = 18\alpha+6 = 6x_1 + (6\alpha+2)x_2 + mx_3$ $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N})$ olarak yazarız. Bu durumda, $\beta_1 = 18\alpha+6$ ifadesi çift tamsayı olduğundan $6x_1 + (6\alpha+2)x_2 + mx_3$ ifadesi de çift tamsayı olmak zorundadır. Dolayısıyla $6x_1 + (6\alpha+2)x_2$ sayısı çift tamsayı ve m tek tamsayı olduğundan x_3 çift tamsayı olmak zorundadır. Ayrıca $m > 6\alpha+2$ olduğundan $x_3 = 0$ veya $x_3 = 2$ olmalıdır. Eğer $x_3 = 0$ ise $18\alpha+6 = 6x_1 + (6\alpha+2)x_2$ eşitliği elde edilir. Buradan $x_2 = 3 - \dfrac{3x_1}{3\alpha+1}$ ve $x_2 \in \mathbb{N}$ olduğundan $x_1 = 0$ veya $x_1 = 3\alpha+1$ olmalıdır. Dolayısıyla $x_3 = 0$ olması durumunda β_1 in çarpanları $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$ çıkar. Eğer $x_3 = 2$ ise $18\alpha+6 = 6x_1 + (6\alpha+2)x_2 + 2m$ eşitliği elde edilir. Bu durumda, $x_2 = 3 - \dfrac{3x_1+m}{3\alpha+1}$ ve $x_2 \in \mathbb{N}$ olduğundan $\dfrac{3x_1+m}{3\alpha+1} = 0$, $\dfrac{3x_1+m}{3\alpha+1} = 1$, $\dfrac{3x_1+m}{3\alpha+1} = 2$ veya

$\dfrac{3x_1+m}{3\alpha+1}=3$ olmalıdır. Eğer $\dfrac{3x_1+m}{3\alpha+1}=0$ ise $m=-3x_1$ eşitliği elde edilir, fakat bu ifade m ve x_1 in kabulüyle çelişir. Eğer $\dfrac{3x_1+m}{3\alpha+1}=1$ ise o zaman $x_1=\dfrac{(3\alpha+1)-m}{3}$ eşitliği elde edilir. Buradan $m>6\alpha+2$ olduğundan $x_1\notin\mathbb{N}$ çelişkisi elde edilir. Eğer $\dfrac{3x_1+m}{3\alpha+1}=2$ ise $x_1=\dfrac{(6\alpha+2)-m}{3}$ eşitliği elde edilir. Böylece $m>6\alpha+2$ olduğundan $x_1\notin\mathbb{N}$ çelişkisi elde edilir. Eğer $\dfrac{3x_1+m}{3\alpha+1}=3$ ise o zaman $x_1=\dfrac{(9\alpha+3)-m}{3}$ eşitliği elde edilir. Bu durumda, $6\alpha+2<m\leq 9\alpha+3$ ve $3\,|\,m$ olmak üzere, β_1 in çarpanı $\left(\dfrac{(9\alpha+3)-m}{3},0,2\right)$ çıkar.

Sonuç olarak $18\alpha+6=6x_1+(6\alpha+2)x_2+mx_3$ eşitliğinde $6\,|\,18\alpha+6$ ve $6\alpha+2\,|\,18\alpha+6$ olduğundan $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$ çarpanları β_1 in tüm çarpanlarında vardır. Dolayısıyla β_1 in bulunduğu çarpan grupları aşağıdaki gibidir:

$i)$ $3\nmid m$ ise $(3\alpha+1,0,0)$, $(0,3,0)$,

$ii)$ $6\alpha+2<m\leq 9\alpha+3$ ve $3\,|\,m$ ise $\left(\dfrac{(9\alpha+3)-m}{3},0,2\right)$, $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$.

Şimdi $\beta_2=2m$ nin çarpanlarını bulalım. $\beta_2=2m=6x_1+(6\alpha+2)x_2+mx_3$ olarak yazarız. Bu durumda, $x_3=0$, $x_3=1$ veya $x_3=2$ olduğu açıktır. Eğer $x_3=0$ ise $2m=6x_1+(6\alpha+2)x_2$ olur. Buradan $x_2=\dfrac{m-3x_1}{3\alpha+1}$ çıkar. Şimdi $k\in\mathbb{N}$ için $m-3x_1=k\cdot(3\alpha+1)$ eşitliğini yazalım. Buradan $k\leq\dfrac{m}{3\alpha+1}$ ve $3\,|\,m-k\cdot(3\alpha+1)$ olmak üzere, $x_1=\dfrac{m-k\cdot(3\alpha+1)}{3}$ ve $x_2=k$ elde edilir. Dolayısıyla $x_3=0$ olması durumunda β_2 nin bir çarpanı $\left(\dfrac{m-k\cdot(3\alpha+1)}{3},k,0\right)$ dır. Eğer $x_3=1$ ise $m=6x_1+(6\alpha+2)x_2$ yazarız. Fakat bu ifade bir çelişki teşkil eder. Çünkü m tek tamsayı $6x_1+(6\alpha+2)x_2$ ise çift tamsayıdır. Dolayısıyla $x_3=1$ olması durumunda β_2 nin bir çarpanı bulunamaz. Eğer $x_3=2$ ise $0=6x_1+(6\alpha+2)x_2$ yazarız. Buradan $x_1,x_2\in\mathbb{N}$ olduğundan $x_1=0$ ve

$x_2 = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $x_3 = 2$ olması durumunda β_2 nin bir çarpanı $(0,0,2)$ olur.

Teorem 5.15 S sayısal yarıgrubu $\Pi = \{\langle 6, 6\alpha+2, m\rangle : \alpha \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{Z}_t \text{ ve } m > 6\alpha+2\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi ve β_1 , S sayısal yarıgrubunun Betti sayısı olsun. O zaman

$i)$ $3 \nmid m$ ise β_1 in çarpanları $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$ şeklinde olup bu durumda β_1 in katener derecesi $c(\beta_1) = 3\alpha+1$,

$ii)$ $m = 9\alpha+3$ ise β_1 in çarpanları $(0,0,2)$, $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$ şeklinde olup bu durumda β_1 in katener derecesi $c(\beta_1) = 3\alpha+1$,

$iii)$ $6\alpha+2 < m < 9\alpha+3$ ve $3 \mid m$ ise β_1 in çarpanları $\left(\dfrac{(9\alpha+3)-m}{3}, 0, 2\right)$, $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$ şeklinde olup bu durumda β_1 in katener derecesi $c(\beta_1) = \dfrac{m}{3}$ şeklindedir.

İspat.

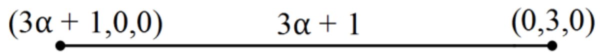
$i)$ $3 \nmid m$ ve $\beta_1 = 18\alpha+6$ nın çarpanları $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olsun.

Bu durumda, bu çarpanlar arasındaki kenar uzunluğu,

$$obeb((3\alpha+1,0,0),(0,3,0)) = (\min\{3\alpha+1,0\}, \min\{0,3\}, \min\{0,0\}) = (0,0,0),$$

$$d((3\alpha+1,0,0),(0,3,0)) = \max\{|(3\alpha+1,0,0)-(0,0,0)|, |(0,3,0)-(0,0,0)|\} = 3\alpha+1$$

olarak bulunur. Buradan köşe noktaları bu çarpanlar olan ve bu köşe noktalarını birbirine bağlayan bu kenarlardan oluşan şekil 5.2 çizgesini çizdiğimizde β_1 in katener derecesi $c(\beta_1) = 3\alpha+1$ olduğu görülür.



Şekil 5.2 Çarpanları $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olan $\beta_1 = 18\alpha+6$ nın katener çizgesi

$ii)$ $m = 9\alpha+3$ ve $\beta_1 = 18\alpha+6$ nın çarpanları $(0,0,2)$, $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olsun.

Bu durumda, bu çarpanlar arasındaki kenar uzunlukları,

$$obeb((0,0,2),(3\alpha+1,0,0)) = (\min\{0,3\alpha+1\}, \min\{0,0\}, \min\{2,0\}) = (0,0,0),$$

$$d((0,0,2),(3\alpha+1,0,0)) = \max\{|(0,0,2)-(0,0,0)|, |(3\alpha+1,0,0)-(0,0,0)|\} = 3\alpha+1.$$

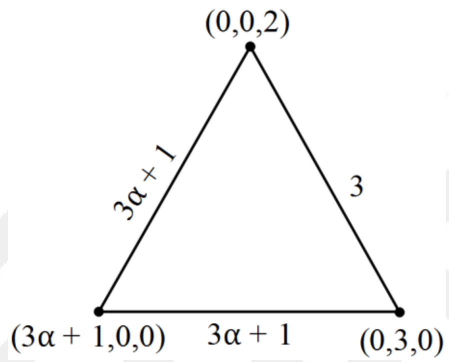
$$obeb((0,0,2),(0,3,0)) = (\min\{0,0\}, \min\{0,3\}, \min\{2,0\}) = (0,0,0),$$

$$d((0,0,2),(0,3,0)) = \max\{|(0,0,2)-(0,0,0)|,|(0,3,0)-(0,0,0)|\} = 3.$$

$$obeb((3\alpha+1,0,0),(0,3,0)) = (\min\{3\alpha+1,0\}, \min\{0,3\}, \min\{0,0\}) = (0,0,0),$$

$$d((3\alpha+1,0,0),(0,3,0)) = \max\{|(3\alpha+1,0,0)-(0,0,0)|,|(0,3,0)-(0,0,0)|\} = 3\alpha+1$$

olarak bulunur. Buradan köşe noktaları bu çarpanlar olan ve bu köşe noktalarını birbirine bağlayan bu kenarlardan oluşan şekil 5.3 çizgesini çizelim. Buradan her $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ için $3\alpha+1>3$ olduğundan β_1 in katener derecesi $c(\beta_1)=3\alpha+1$ çıkar.



Şekil 5.3 Çarpanları $(0,0,2)$, $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olan $\beta_1=18\alpha+6$ nın katener çizgesi

iii) $6\alpha+2<m<9\alpha+3$, $3\,|\,m$ ve $\beta_1=18\alpha+6$ nın çarpanları $\left(\frac{(9\alpha+3)-m}{3},0,2\right)$, $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olsun. Bu durumda, bu çarpanlar arasındaki kenar uzunlukları,

$$obeb\left(\left(\frac{9\alpha+3-m}{3},0,2\right),(3\alpha+1,0,0)\right)=$$

$$\left(\min\left\{\frac{9\alpha+3-m}{3},3\alpha+1\right\},\min\{0,0\},\min\{2,0\}\right)=\left(\frac{9\alpha+3-m}{3},0,0\right)$$

$$d\left(\left(\frac{9\alpha+3-m}{3},0,2\right),(3\alpha+1,0,0)\right)=$$

$$\max\left\{\left|\left(\frac{9\alpha+3-m}{3},0,2\right)-\left(\frac{9\alpha+3-m}{3},0,0\right)\right|,\left|(3\alpha+1,0,0)-\left(\frac{9\alpha+3-m}{3},0,0\right)\right|\right\}=\frac{m}{3}$$

$$obeb\left(\left(\frac{9\alpha+3-m}{3},0,2\right),(0,3,0)\right)=\left(\min\left\{\frac{9\alpha+3-m}{3},0\right\},\min\{0,3\},\min\{2,0\}\right)=(0,0,0)$$

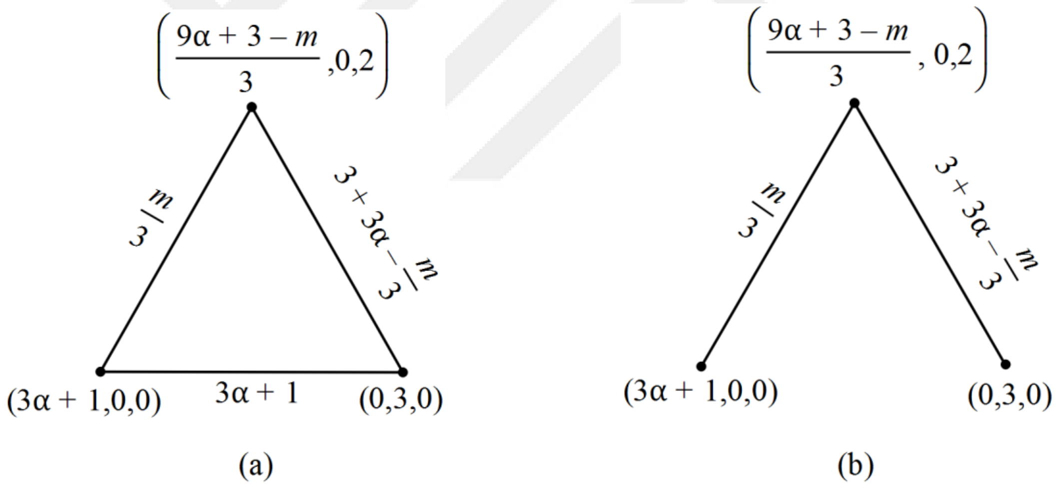
$$d\left(\left(\frac{9\alpha+3-m}{3},0,2\right),(0,3,0)\right)=$$

$$\max\left\{\left|\left(\frac{9\alpha+3-m}{3},0,2\right)-(0,0,0)\right|,\left|(0,3,0)-(0,0,0)\right|\right\}=3+3\alpha-\frac{m}{3}$$

$$obeb\left((3\alpha+1,0,0),(0,3,0)\right)=\left(\min\{3\alpha+1,0\},\min\{0,3\},\min\{0,0\}\right)=(0,0,0)$$

$$d\left((3\alpha+1,0,0),(0,3,0)\right)=\max\left\{\left|(3\alpha+1,0,0)-(0,0,0)\right|,\left|(0,3,0)-(0,0,0)\right|\right\}=3\alpha+1$$

olarak bulunur. Buradan köşe noktaları bu çarpanlar olan ve bu köşe noktalarını birbirine bağlayan bu kenarlardan oluşan şekil 5.4 çizgesini çizelim. Buradan her $\alpha\in\mathbb{Z}^+$ ve her $m\in\mathbb{Z}_t$ için $3\alpha+1>\frac{m}{3}>3+3\alpha-\frac{m}{3}$ olduğundan β_1 in katener derecesi $c(\beta_1)=\frac{m}{3}$ çıkar.



Şekil 5.4 Çarpanları $\left(\frac{(9\alpha+3)-m}{3},0,2\right)$, $(3\alpha+1,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olan $\beta_1=18\alpha+6$ nın katener çizgesi

Örnek 5.16 $\alpha=20$ ve $m=1001$ için $S=\langle 6,122,1001\rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin Buradan $\beta_1=18\cdot 20+6=366$ çıkar. Ayrıca $\beta_1=366$ nın çarpanları $(61,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olduğundan $\beta_1=366$ nın katener dereecesi $c(\beta_1)=3\cdot 20+1=61$ olur.

Teorem 5.17 S sayısal yarıgrubu $\Omega=\{\langle 6,6\alpha+3,p\rangle : p\in\mathbb{Z}^+, p>6\alpha+3 \text{ ve } 3\nmid p\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi ve β_1, β_2 S sayısal yarıgrubunun Betti sayıları olsunlar. Bu durumda, $k \in \mathbb{N}$ için $k \leq \frac{p}{2\alpha+1}$ ve $2 \mid p-k\cdot(2\alpha+1)$ olmak üzere, β_1 in çarpanları $(2\alpha+1,0,0)$ ve $(0,2,0)$; β_2 nin çarpanları $\left(\frac{p-k\cdot(2\alpha+1)}{2},k,0\right)$ ve $(0,0,3)$ olur.

İspat. Teorem 5.6 gereği S sayısal yarıgrubunun Betti sayıları sırasıyla $\beta_1 = 12\alpha+6$ ve $\beta_2 = 3p$ dir. Öncelikle β_1 in çarpanlarını bulalım. $\beta_1 = 12\alpha+6 = 6x_1+(6\alpha+3)x_2+px_3$ $(x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{N})$ olarak yazarız. $p > 6\alpha+3$ olduğundan $x_3 = 0$ veya $x_3 = 1$ olmalıdır. Eğer $x_3 = 0$ ise $12\alpha+6 = 6x_1+(6\alpha+3)x_2$ eşitliği elde edilir. O zaman $x_2 = 2-\frac{2x_1}{2\alpha+1}$ ve $x_2 \in \mathbb{N}$ olduğundan $x_1 = 0$ veya $x_1 = 2\alpha+1$ çıkar. Dolayısıyla β_1 in çarpanları $(2\alpha+1,0,0)$ ve $(0,2,0)$ dır. Eğer $x_3 = 1$ ise $12\alpha+6 = 6x_1+(6\alpha+3)x_2+p$ eşitliği elde edilir. Buradan $x_2 = 2-\frac{6x_1+p}{6\alpha+3}$ ve $x_2 \in \mathbb{N}$ olduğundan $6\alpha+3 \mid 6x_1+p$ olmalıdır. Fakat bu $3 \nmid p$ ile çelişki oluşturur. Dolayısıyla $x_3 = 1$ olması durumunda β_1 in bir çarpanı bulunamaz.

Şimdi $\beta_2 = 3p$ nin çarpanlarını bulalım. $\beta_2 = 3p = 6x_1+(6\alpha+3)x_2+px_3$ olarak yazarız. Buradan $x_3 = 0$, $x_3 = 1$, $x_3 = 2$ veya $x_3 = 3$ olduğu açıktır. Eğer $x_3 = 0$ ise $3p = 6x_1+(6\alpha+3)x_2$ olur. Buradan $x_2 = \frac{p-2x_1}{2\alpha+1}$ yazarız. Şimdi $k \in \mathbb{N}$ için $p-2x_1 = k(2\alpha+1)$ eşitliliğini yazalım. Bu durumda, $k \leq \frac{p}{2\alpha+1}$ ve $2 \mid p-k\cdot(2\alpha+1)$ olmak üzere $x_1 = \frac{p-k\cdot(2\alpha+1)}{2}$ ve $x_2 = k$ olur. Dolayısıyla $x_3 = 0$ olması durumunda β_2 nin bir çarpanı $\left(\frac{p-k\cdot(2\alpha+1)}{2},k,0\right)$ dır. Eğer $x_3 = 1$ ise $2p = 6x_1+(6\alpha+3)x_2$ olur. Buradan $p = 3\left(x_1+\alpha x_2+\frac{x_2}{2}\right)$ olarak yazarız. Fakat bu ifade $p \in \mathbb{Z}^+$ için $3 \nmid p$ ile bir çelişki oluşturur. Eğer $x_3 = 2$ ise $p = 6x_1+(6\alpha+3)x_2$ eşitliği elde edilir. Buradan $p = 3(2x_1+(2\alpha+1)x_2)$ dir. Fakat bu ifade $3 \nmid p$ ile bir çelişki teşkil eder. Eğer $x_3 = 3$ ise $0 = 6x_1+(6\alpha+3)x_2$ eşitliği elde edilir. Buradan $x_1,x_2 \in \mathbb{N}$ olduğundan $x_1 = 0$ ve

$x_2 = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $x_3 = 3$ olması durumunda β_2 nin bir çarpanı $(0,0,3)$ çıkar.

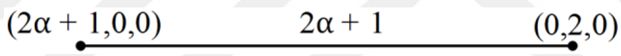
Teorem 5.18 S sayısal yarıgrubu $\Omega = \{\langle 6, 6\alpha+3, p\rangle : p \in \mathbb{Z}^+, p > 6\alpha+3 \text{ ve } 3 \nmid p\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi ve β_1 , S sayısal yarıgrubunun Betti sayısı olsun. O zaman β_1 in katener derecesi $c(\beta_1) = 2\alpha+1$ olur.

İspat. Teorem 5.17 gereği $\beta_1 = 12\alpha+6$ nın çarpanları $(2\alpha+1,0,0)$ ve $(0,2,0)$ dır. Bu durumda, bu çarpanlar arasındaki kenar uzunluğu,

$$obeb\big((2\alpha+1,0,0),(0,2,0)\big) = \big(\min\{2\alpha+1,0\}, \min\{0,2\}, \min\{0,0\}\big) = (0,0,0),$$

$$d\big((2\alpha+1,0,0),(0,2,0)\big) = \max\{|(2\alpha+1,0,0)-(0,0,0)|, |(0,2,0)-(0,0,0)|\} = 2\alpha+1$$

olarak bulunur. Buradan köşe noktaları bu çarpanlar olan ve bu köşe noktalarını birbirine bağlayan bu kenarlardan oluşan şekil 5.5 çizgesini çizdiğimizde β_1 in katener derecesi $c(\beta_1) = 2\alpha+1$ olduğu görülür.



Şekil 5.5 Çarpanları $(2\alpha+1,0,0)$ ve $(0,2,0)$ olan $\beta_1 = 12\alpha+6$ nın katener çizgesi

Örnek 5.19 $\alpha = 7$ ve $p = 100$ için $S = \langle 6, 45, 100\rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin. Buradan $\beta_1 = 12\cdot 7 + 6 = 90$ ve $c(90) = 2\cdot 7 + 1 = 15$ elde edilir.

Teorem 5.20 S sayısal yarıgrubu $\Psi = \{\langle 6, 6\alpha+4, n\rangle : \alpha \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{Z}_t \text{ ve } n > 6\alpha+4\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi ve β_1, β_2 S sayısal yarıgrubunun Betti sayıları olsun. Bu durumda,

i) $3 \nmid n$ ise β_1 in çarpanları $(3\alpha+2,0,0)$, $(0,3,0)$,

ii) $6\alpha+4 < n \le 9\alpha+6$ ve $3 \mid n$ ise β_1 in çarpanları $\left(\dfrac{(9\alpha+6)-n}{3}, 0, 2\right)$, $(3\alpha+2,0,0)$ ve $(0,3,0)$,

iii) $k \in \mathbb{N}$ için $k \le \dfrac{n}{3\alpha+2}$ ve $3 \mid n - k\cdot(3\alpha+2)$ ise β_2 nin çarpanları $\left(\dfrac{n-k\cdot(3\alpha+2)}{3}, k, 0\right)$ ve $(0,0,2)$ şeklindedir.

İspat. Teorem 5. 6 gereği S sayısal yarıgrubunun Betti sayıları sırasıyla $\beta_1 = 18\alpha + 12$ ve $\beta_2 = 2n$ dir. Öncelikle β_1 in çarpanlarını bulalım. $\beta_1 = 18\alpha + 12 = 6x_1 + (6\alpha + 4)x_2 + nx_3$ $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N})$ olarak yazarız. Bu durumda, $\beta_1 = 18\alpha + 12$ ifadesi çift tamsayı olduğundan $6x_1 + (6\alpha + 4)x_2 + nx_3$ ifadesi de çift tamsayı olmak zorundadır. Dolayısıyla $6x_1 + (6\alpha + 4)x_2$ sayısı çift tamsayı ve n tek tamsayı olduğundan x_3 çift tamsayı olmak zorundadır. Ayrıca $n > 6\alpha + 4$ olduğundan $x_3 = 0$ veya $x_3 = 2$ olmalıdır. Eğer $x_3 = 0$ ise $18\alpha + 12 = 6x_1 + (6\alpha + 4)x_2$ eşitliği elde edilir. Buradan $x_2 = 3 - \dfrac{3x_1}{3\alpha + 2}$ ve $x_2 \in \mathbb{N}$ olduğundan $x_1 = 0$ veya $x_1 = 3\alpha + 2$ olmalıdır. Böylece $x_3 = 0$ olması durumunda β_1 in çarpanları $(3\alpha + 2, 0, 0)$ ve $(0, 3, 0)$ çıkar. Eğer $x_3 = 2$ ise $18\alpha + 12 = 6x_1 + (6\alpha + 4)x_2 + 2n$ eşitliği elde edilir. Bu durumda, $x_2 = 3 - \dfrac{3x_1 + n}{3\alpha + 2}$ ve $x_2 \in \mathbb{N}$ olduğundan $\dfrac{3x_1 + n}{3\alpha + 2} = 0$, $\dfrac{3x_1 + n}{3\alpha + 2} = 1$, $\dfrac{3x_1 + n}{3\alpha + 2} = 2$ veya $\dfrac{3x_1 + n}{3\alpha + 2} = 3$ olmalıdır. Eğer $\dfrac{3x_1 + n}{3\alpha + 2} = 0$ ise $n = -3x_1$ eşitliği elde edilir fakat bu ifade n ve x_1 in kabulüyle çelişir. Eğer $\dfrac{3x_1 + n}{3\alpha + 2} = 1$ ise $x_1 = \dfrac{(3\alpha + 2) - n}{3}$ eşitliği elde edilir. Böylece, $n > 6\alpha + 4$ olduğundan $x_1 \notin \mathbb{N}$ çelişkisi elde edilir. Eğer $\dfrac{3x_1 + n}{3\alpha + 2} = 2$ ise $x_1 = \dfrac{(6\alpha + 4) - n}{3}$ eşitliği elde edilir. Buradan $n > 6\alpha + 4$ olduğundan $x_1 \notin \mathbb{N}$ çelişkisi elde edilir. Eğer $\dfrac{3x_1 + n}{3\alpha + 2} = 3$ ise $x_1 = \dfrac{(9\alpha + 6) - n}{3}$ eşitliği elde edilir. Bu durumda, $6\alpha + 4 < n \leq 9\alpha + 6$ ve $3 \mid n$ olmak üzere, β_1 in çarpanı $\left(\dfrac{(9\alpha + 6) - n}{3}, 0, 2\right)$ çıkar.

Sonuç olarak $18\alpha + 12 = 6x_1 + (6\alpha + 4)x_2 + nx_3$ eşitliğinde $6 \mid 18\alpha + 12$ ve $6\alpha + 4 \mid 18\alpha + 12$ olduğundan $(3\alpha + 2, 0, 0)$ ve $(0, 3, 0)$ çarpanları β_1 in tüm çarpanlarında vardır. Dolayısıyla β_1 in bulunduğu çarpan grupları aşağıdaki gibidir,

i) $3 \nmid n$ ise $(3\alpha + 2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$,

ii) $6\alpha + 4 < n \leq 9\alpha + 6$ ve $3 \mid n$ ise $\left(\dfrac{(9\alpha + 6) - n}{3}, 0, 2\right)$, $(3\alpha + 2, 0, 0)$ ve $(0, 3, 0)$.

Şimdi $\beta_2 = 2n$ nin çarpanlarını bulalım. $\beta_2 = 2n = 6x_1 + (6\alpha + 4)x_2 + nx_3$ olarak yazarız. Buradan $x_3 = 0$, $x_3 = 1$ veya $x_3 = 2$ olduğu açıktır. Eğer $x_3 = 0$ ise $2n = 6x_1 + (6\alpha + 4)x_2$ olur. Buradan $x_2 = \dfrac{n - 3x_1}{3\alpha + 2}$ yazarız. $k \in \mathbb{N}$ için $n - 3x_1 = k \cdot (3\alpha + 2)$ eşitliği yazalım. Buradan $k \leq \dfrac{n}{3\alpha + 2}$ ve $3 \mid n - k \cdot (3\alpha + 2)$ olmak üzere, $x_1 = \dfrac{n - k \cdot (3\alpha + 2)}{3}$ ve $x_2 = k$ elde edilir. Dolayısıyla $x_3 = 0$ olması durumunda β_2 nin bir çarpanı $\left(\dfrac{n - k \cdot (3\alpha + 2)}{3}, k, 0 \right)$ çıkar. Eğer $x_3 = 1$ ise $n = 6x_1 + (6\alpha + 4)x_2$ yazarız. Fakat bu ifade bir çelişki teşkil eder. Çünkü n tek tamsayı ve $6x_1 + (6\alpha + 4)x_2$ çift tamsayıdır. Dolayısıyla $x_3 = 1$ olması durumunda β_2 nin bir çarpanı bulunamaz. Eğer $x_3 = 2$ ise $0 = 6x_1 + (6\alpha + 4)x_2$ yazarız. Buradan $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ olduğundan $x_1 = 0$ ve $x_2 = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $x_3 = 2$ olması durumunda β_2 nin bir çarpanı $(0, 0, 2)$ çıkar.

Teorem 5.21 S sayısal yarıgrubu $\Psi = \left\{ \langle 6, 6\alpha + 4, n \rangle : \alpha \in \mathbb{Z}^+, n \in \mathbb{Z}_t \text{ ve } n > 6\alpha + 4 \right\}$ teleskopik sayısal yarıgrup ailesinin bir üyesi ve β_1 , S sayısal yarıgrubunun Betti sayısı olsun. Bu durumda,

i) $3 \nmid n$ ise β_1 in çarpanları $(3\alpha + 2, 0, 0)$ ve $(0, 3, 0)$ şeklinde olup bu durumda β_1 in katener derecesi $c(\beta_1) = 3\alpha + 2$,

ii) $n = 9\alpha + 6$ ise β_1 in çarpanları $(0, 0, 2)$, $(3\alpha + 2, 0, 0)$ ve $(0, 3, 0)$ şeklinde olup bu durumda β_1 in katener derecesi $c(\beta_1) = 3\alpha + 2$,

iii) $6\alpha + 4 < n < 9\alpha + 6$ ve $3 \mid n$ ise β_1 in çarpanları $\left(\dfrac{(9\alpha + 6) - n}{3}, 0, 2 \right)$, $(3\alpha + 2, 0, 0)$ ve $(0, 3, 0)$ şeklinde olup bu durumda β_1 in katener derecesi $c(\beta_1) = \dfrac{n}{3}$ şeklindedir.

İspat.

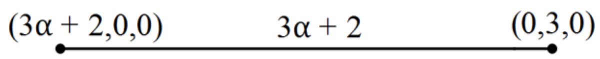
i) $3 \nmid n$ ve $\beta_1 = 18\alpha + 12$ nin çarpanları $(3\alpha + 2, 0, 0)$ ve $(0, 3, 0)$ olsun.

Bu durumda, bu çarpanlar arasındaki kenar uzunluğu,

$obeb\big((3\alpha + 2, 0, 0), (0, 3, 0)\big) = \big(\min\{3\alpha + 2, 0\}, \min\{0, 3\}, \min\{0, 0\}\big) = (0, 0, 0)$,

$$d\left(\left(3\alpha+2,0,0\right),\left(0,3,0\right)\right)=\max\left\{\left|\left(3\alpha+2,0,0\right)-\left(0,0,0\right)\right|,\left|\left(0,3,0\right)-\left(0,0,0\right)\right|\right\}=3\alpha+2$$

olarak bulunur. Buradan köşe noktaları bu çarpanlar olan ve bu köşe noktalarını birbirine bağlayan bu kenarlardan oluşan şekil 5.6 çizgesini çizdiğimizde β_1 in katener derecesi $c(\beta_1)=3\alpha+2$ olduğu görülür.



Şekil 5.6 Çarpanları $(3\alpha+2,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olan $\beta_1=18\alpha+12$ nin katener çizgesi

ii) $n=9\alpha+6$ ve $\beta_1=18\alpha+12$ nin çarpanları $(0,0,2)$, $(3\alpha+2,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olsun. Bu durumda, bu çarpanlar arasındaki kenar uzunlukları,

$$obeb\left(\left(0,0,2\right),\left(3\alpha+2,0,0\right)\right)=\left(\min\{0,3\alpha+2\},\min\{0,0\},\min\{2,0\}\right)=\left(0,0,0\right),$$

$$d\left(\left(0,0,2\right),\left(3\alpha+2,0,0\right)\right)=\max\left\{\left|\left(0,0,2\right)-\left(0,0,0\right)\right|,\left|\left(3\alpha+2,0,0\right)-\left(0,0,0\right)\right|\right\}=3\alpha+2.$$

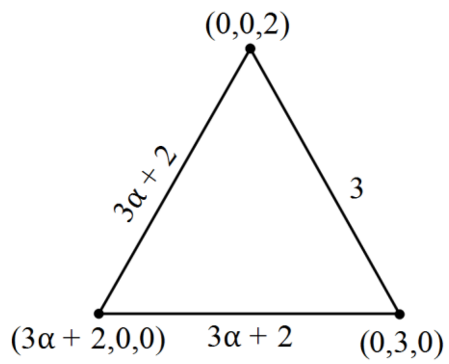
$$obeb\left(\left(0,0,2\right),\left(0,3,0\right)\right)=\left(\min\{0,0\},\min\{0,3\},\min\{2,0\}\right)=\left(0,0,0\right),$$

$$d\left(\left(0,0,2\right),\left(0,3,0\right)\right)=\max\left\{\left|\left(0,0,2\right)-\left(0,0,0\right)\right|,\left|\left(0,3,0\right)-\left(0,0,0\right)\right|\right\}=3.$$

$$obeb\left(\left(3\alpha+2,0,0\right),\left(0,3,0\right)\right)=\left(\min\{3\alpha+2,0\},\min\{0,3\},\min\{0,0\}\right)=\left(0,0,0\right),$$

$$d\left(\left(3\alpha+2,0,0\right),\left(0,3,0\right)\right)=\max\left\{\left|\left(3\alpha+2,0,0\right)-\left(0,0,0\right)\right|,\left|\left(0,3,0\right)-\left(0,0,0\right)\right|\right\}=3\alpha+2$$

olarak bulunur. Buradan köşe noktaları bu çarpanlar olan ve bu köşe noktalarını birbirine bağlayan bu kenarlardan oluşan şekil 5.7 çizgesini çizelim. Buradan her $\alpha\in\mathbb{Z}^+$ için $3\alpha+2>3$ olduğundan β_1 in katener derecesi $c(\beta_1)=3\alpha+2$ çıkar.



Şekil 5.7 Çarpanları $(0,0,2)$, $(3\alpha+2,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olan $\beta_1=18\alpha+12$ nin katener çizgesi

iii) $6\alpha+4<n<9\alpha+6$, $3\,|\,n$ ve $\beta_1=18\alpha+12$ nin çarpanları $\left(\frac{(9\alpha+6)-n}{3},0,2\right)$, $(3\alpha+2,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olsun. Bu durumda, bu çarpanlar arasındaki kenar uzunlukları,

$$obeb\left(\left(\frac{9\alpha+6-n}{3},0,2\right),(3\alpha+2,0,0)\right)=$$

$$\left(\min\left\{\frac{9\alpha+6-n}{3},3\alpha+2\right\},\min\{0,0\},\min\{2,0\}\right)=\left(\frac{9\alpha+6-n}{3},0,0\right)$$

$$d\left(\left(\frac{9\alpha+6-n}{3},0,2\right),(3\alpha+2,0,0)\right)=$$

$$\max\left\{\left|\left(\frac{9\alpha+6-n}{3},0,2\right)-\left(\frac{9\alpha+6-n}{3},0,0\right)\right|,\left|(3\alpha+2,0,0)-\left(\frac{9\alpha+6-n}{3},0,0\right)\right|\right\}=\frac{n}{3}$$

$$obeb\left(\left(\frac{9\alpha+6-n}{3},0,2\right),(0,3,0)\right)=\left(\min\left\{\frac{9\alpha+6-n}{3},0\right\},\min\{0,3\},\min\{2,0\}\right)=(0,0,0)$$

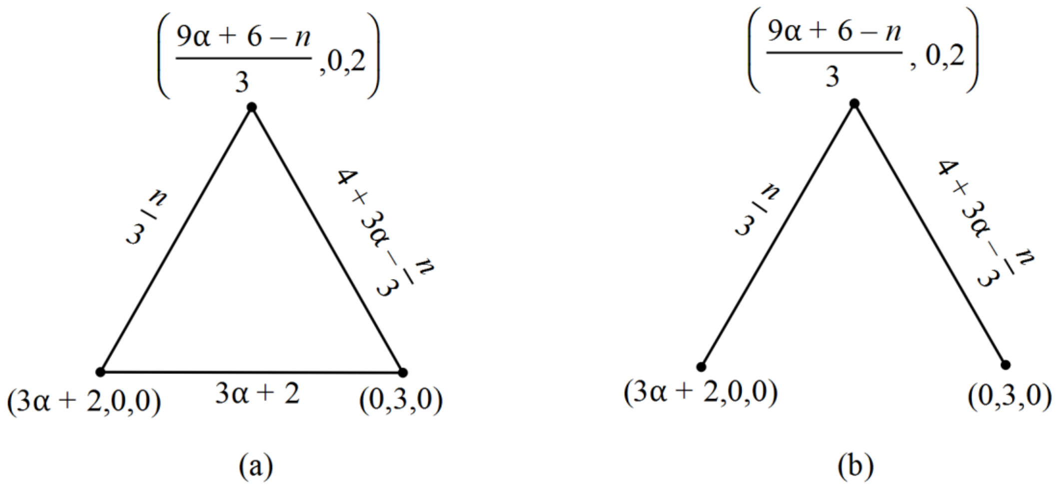
$$d\left(\left(\frac{9\alpha+6-n}{3},0,2\right),(0,3,0)\right)=$$

$$\max\left\{\left|\left(\frac{9\alpha+6-n}{3},0,2\right)-(0,0,0)\right|,\left|(0,3,0)-(0,0,0)\right|\right\}=4+3\alpha-\frac{n}{3}$$

$$obeb\left((3\alpha+2,0,0),(0,3,0)\right)=\left(\min\{3\alpha+2,0\},\min\{0,3\},\min\{0,0\}\right)=(0,0,0)$$

$$d\left((3\alpha+2,0,0),(0,3,0)\right)=\max\left\{\left|(3\alpha+2,0,0)-(0,0,0)\right|,\left|(0,3,0)-(0,0,0)\right|\right\}=3\alpha+2$$

olarak bulunur. Buradan köşe noktaları bu çarpanlar olan ve bu köşe noktalarını birbirine bağlayan bu kenarlardan oluşan şekil 5.8 çizgesini çizelim. Buradan her $\alpha\in\mathbb{Z}^+$ ve her $n\in\mathbb{Z}_t$ için $3\alpha+2>\frac{n}{3}>4+3\alpha-\frac{n}{3}$ olduğundan β_1 in katener derecesi $c(\beta_1)=\frac{n}{3}$ çıkar.



Şekil 5.8 Çarpanları $\left(\dfrac{(9\alpha+6)-n}{3},0,2\right)$, $(3\alpha+2,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olan $\beta_1=18\alpha+12$ nin katener çizgesi

Örnek 5.22 $\alpha=5$ ve $m=71$ için $S=\langle 6,34,71\rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin Bu durumda, $\beta_1=18\cdot 5+12=102$ dir. Ayrıca $\beta_1=102$ nin çarpanları $(17,0,0)$ ve $(0,3,0)$ olduğundan $\beta_1=102$ nin katener dereecesi $c(\beta_1)=3\cdot 5+2=17$ elde edilir.

6. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

6.1 Sonuçlar

Bu çalışmada gömme boyutu üç olan bazı teleskopik sayısal yarıgrup ailelerinin Betti sayıları, Frobenius sayıları, cinsi ve elde ettiğimiz bu Betti sayılarının bir kısmının katener derecelerinin bulunmasıyla ilgili bazı önemli teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.

6.2 Öneriler

Betti sayıları gizemli olmalarından ötürü sayısal yarıgruplarda birçok kavram Betti sayılarıyla ilişkilendirilip önemli sonuçlar elde edilebilir. Dolayısıyla bu yaklaşım belki de sayısal yarıgruplarda birçok kavramı daha rahat yorumlamamıza yardımcı olacaktır.

KAYNAKLAR

Altınel, A., 2014, S_n-Normal yarıgruplar, Yüksek Lisans Tezi, *Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Adana, 4-5.

Assi, A. and Garcia-Sanchez, P.A., 2014, Numerical semigroups and applications [online], Cornell University Library, https://arxiv.org/abs/1411.6093 [Ziyaret Tarihi: 23 Aralık 2017].

Blanco, V. and Rosales J.C., 2010, m-irreducible numerical semigroups [online], Cornell University Library, https://arxiv.org/abs/1006.3493 [Ziyaret Tarihi: 23 Aralık 2017].

Boij, M., and Söderberg, J., 2007, Graded Betti numbers of Cohen-Macaulay modules and the multiplicity conjecture [online], Cornell University Library, https://arxiv.org/abs/math/0611081 [Ziyaret Tarihi: 15 Mayıs 2018].

Chapman, S.T., Garcia-Sanchez, P.A., Tripp, Z., and Viola, C., 2016, Measuring primality in numerical semigroups with embedding dimension three, *Journal of Algebra and Its Applications*, 15(1), 16 pages.

Conaway, R., Williams, M., Horton, J. and Gotti, F., 2015, Shifting numerical semigroups [online], Allen Institute for Artifical Intelligence, https://www.semanticscholar.org [Ziyaret Tarihi: 5 Mart 2018].

Çallıalp, F., 2011, Örneklerle soyut cebir, *Birsen Yayınevi*, İstanbul, 8-28.

Çevik, A.S., 2010, Cebire giriş, 2, *Nobel Yayın Dağıtım*, Ankara, 19-53.

Deniz, Z., 2012, Çizgelerde yol-eşleme ve renklendirme, Yüksek Lisans Tezi, *Süleyman Demirel üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Isparta, 5-9.

Garcia-Sanchez, P.A., LIena, D., and Moscariello, A., 2017, Delta sets for symmetric numerical semigroups with embedding dimension three [online], Cornell University Library, https://arxiv.org/abs/1701.00988 [Ziyaret Tarihi: 16 Temmuz 2018].

Karakaş, H.İ., 2008, Cebir dersleri, 4, *Türkiye Bilimler Akademisi*, Ankara, 1-20.

Kılıç, M., 2015, h-katlı sayısal yarıgruplar, Yüksek Lisans Tezi, *Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* İstanbul, 5-16.

Kirfel, C., and Pellikaan, R., 1995, The minimum distance of codes in an array coming from telescopic semigroups, 41 (6), IEEE Transactions on information theory, 1720–1732.

Korkmaz, F., 2008, Yarıgruplar ve özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Balıkesir, 1-2.

Micale, V., and Olteanu, A., 2012, On the Betti numbers of some semigroup rings, *Le Matematiche*, LXVII, 145-159.

O'Neil, C., Ponomarenko, V., Tate, R., and Webb, G., 2016, On the set of catenary degrees of finitely generated cancellative commutative monoids [online], Cornell University Library, https://arxiv.org/abs/1506.07587 [Ziyaret Tarihi: 31 Aralık 2017].

Petrich, M., 1973, Introduction to semigroups, Erwin Kleinfeld, *Charles E. Merrill Publishing Co.*, Columbus, Ohio, 1-16.

Ramirez Alfonsin, J.L., 2005, The Diophantine Frobenius Problem, 30, John Ball, Dominic Welsh, Oxford University Press, Oxford New York, 1-20.

Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., 1999, Finitely generated commutative monoids, *Nova Science Puplishers,* New York, 25-33.

Rosales, J.C., 2000, Numerical semigroups with Apery sets of unique expression, *Journal of Algebra,* 226, 479-487.

Rosales, J.C. and Branco, M.B., 2003, Irreducible numerical semigroups, *Pacific Journal of Mathematics,* 209(1), 131-143.

Rosales, J.C. and Garcia-Sanchez, P.A., 2009, Numerical semigoups, 20, Krishnaswami Alladi, *Springer*, New York, 1-38.

Rosen, K.H., 2015, Ayrık matematik ve uygulamaları, 7. Baskı, Ömer Akın ve Murat Özbayoğlu, *Palme Yayıncılık*, Ankara, 641-681.

Süer, M. ve İlhan, S., 2019, On telescopic numerical semigroup families with embedding dimension 3, *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi,*(incelemede).

Şeker, Ş.E., 2015, Çizge teorisi (graph theory), *YBS Ansiklopedi,* 2(2), 17-29.

Şeran, B., 2016, Simetrik sayısal yarıgruplar, Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Balıkesir, 7-34.

Toker, K., 2017, Yarıgrupların sıfır bölen grafiği, Doktora Tezi, *Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Adana, 1-8.

Torun, N., 2018, Sierpinski çizgelerin özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, *Anadolu üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Eskişehir, 2-6.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Mehmet Şirin SEZGİN
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Baykan / 02.07.1984
Telefon	**:**	05534851978
Faks	**:**	---
e-mail	**:**	mehmetsezgin1984@gmail.com

EĞİTİM

Derece	**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise :	Batman Lisesi, Batman	2002
Üniversite :	Dicle Üniversitesi, Diyarbakır	2007
Yüksek Lisans:	Fırat Üniversitesi, Elazığ	2010

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2012	Şırnak Üniversitesi	Memur
2012-	Batman-İşkur	İş ve Meslek Danışmanı

UZMANLIK ALANI: Cebir ve Sayılar Teorisi

YABANCI DİLLER: İngilizce

FAALİYETLER

Sezgin, M.S. and Süer, M., 2018, Betti numbers of some telescopic numerical semigroups, *Ejons International Congress on Mathematic, Engineering and Natural Sciences-III*, Mardin, 5.