T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYISAL MONOİDLERİN DELTA KÜMELERİ

Özkan ÇELİK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Haziran-2019
BATMAN

TEZ KABUL VE ONAYI

Özkan ÇELİK tarafından hazırlanan "Sayısal Monoidlerin Delta Kümeleri" adlı tez çalışması 21/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri **İmza**

Başkan
Prof. Dr. Sedat İLHAN ....

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER ....

Üye
Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT ....

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Şahnaz TIĞREK
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Özkan ÇELİK

21/06/2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SAYISAL MONOİDLERİN DELTA KÜMELERİ

Özkan ÇELİK

Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER

2019, 48 Sayfa

Jüri
Prof. Dr. Sedat İLHAN
Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER
Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT

Bu çalışmada ilk olarak sayısal yarıgruplarla ilgili temel kavramlar, indirgenemez sayısal yarıgruplar, simetrik ve pseudo-simetrik sayısal yarıgruplardan bahsedilmiştir. Daha sonra gömme boyutu ve katılılığı 3 olan $S=<3,3+s,3+2s>$ formundaki ve pseudo-simetrik sayısal yarıgrup ailesinin Delta Kümesi, Betti sayıları, katener derecesi, çizgeleri ve minimal sunumu ifade eden bağıntı ve formüller elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Betti sayısı, Çizgeler, Delta Kümesi, Katener derecesi, Pseudo-simetrik sayısal yarıgruplar, Simetrik sayısal yarıgrup.

ABSTRACT

MS THESIS

DELTA SETS OF NUMERICAL MONOIDS

Özkan ÇELİK

THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF BATMAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN MATHEMATİCS

Advisor: Asst. Prof. Dr. Meral SÜER

2019, 48 Pages

Jury
Prof. Dr. Sedat İLHAN
Asst. Prof. Dr. Meral SÜER
Asst. Prof. Dr. Veyis TURUT

In this study, first of all the main concepts related to numerical semigroups, the irreducible numerical semigroups, symmetric and pseudo-symmetric numerical semigroups are mentioned. After that, the formulas and the connections representing the Delta set, Betti numbers, catenary degree, graphs and minimal presentation of the private pseudo-symmetric numerical semigroup family in the form of $S = < 3, 3+s, 3+2s >$ with the embedding dimension and multiplicity three were obtained.

Keywords: Betti number, Catenary degree, Delta sets, Graph, Pseudo- Symmetric numerical semigroups, Symmetric numerical semigroups.

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında gerekli bütün imkanları sağlayarak, benden; desteğini, sabrını, zamanını ve bilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam; Dr. Öğr. Üyesi Meral SÜER’e, teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Yüksek Lisans Tez jüri üyeleri Sayın Prof. Dr. Sedat İLHAN ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT’e destek ve teşviklerinden dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca manevi desteklerinden dolayı aileme ve özellikle bugünlere gelmemi sağlayan ANNEM ve BABAM’a teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Hayatıma dahil olduğu andan itibaren sevgi ve desteğini her zaman hissettiğim sevgili eşim; Tuba ÇELİK’e ve hayatımın anlamı, sevgili kızlarım; Hira Nur, İklim ve Erva ÇELİK’e teşekkür ederim.

Ayrıca, kuzenim Ümit EKİNCİ’ye Yüksek Lisans öğrenimim boyunca gösterdiği özveri ve desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Özkan ÇELİK
BATMAN-2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

$< n_1,...,n_p >$	: $\{n_1,...,n_p\}$ ile üretilen bir sayısal yarıgrup
$\leq_s$	: S sayısal yarıgrubu üzerinde sıralama bağıntısı
$\Delta(S)$	: S sayısal yarıgrubun Delta Kümesi
$\Delta(s)$	: s elemanının Delta Kümesi
$Ap(S,m)$	: S nin m ye göre Apery kümesi
$Betti(S)$	: S nin Betti kümesi
$c(S)$	: S sayısal yarıgrubun katener derecesi
$d(a,b)$	: a ile b noktalarının arasındaki mesafe
$e(S)$	: S sayısal yarıgrubunun gömme boyutu
$ebob(a,b)$	: a ile b noktalarının en büyük ortak böleni
$F(S)$	: S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı
$g(S)$	: S sayısal yarıgrubunun cinsi
$G=(V,E)$	: Köşe noktaları kümesi V ve Kenarlar kümesi E olan G çizgesi (Grafı)
$G(S)$	: S sayısal yarıgrubunun boşluklarının kümesi
$L(s)$	: s nin çarpanlarının uzunluklarının oluşturduğu küme
$m(S)$	: S sayısal yarıgrubunun katılığı
$Maximals_{\leq_S}$	: $\leq_s$ bağıntısın maximal elmanları
$\mathbb{N}$	: Negatif olmayan Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}^p$	: $\underbrace{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times...\mathbb{N}}_{p \tan e}$
$PF(S)$	: S nin tüm pseudo-Frobenius sayılarının kümesi

$\lvert x \rvert$	: x noktasının uzunluğu
$t(S)$	: S sayısal yarıgrubunun tipi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar kümesi
$Z(s)$	: s nin çarpanlar kümesi

1. GİRİŞ

Sayısal yarıgruplar, 19. Yüzyılda karşımıza çıkmıştır ve bu konu ile ilgili olarak ilk defa Ferdinand Frobenius ve James Joseph Sylvester tarafından çalışmalar yapılmıştır. Sayısal yarıgruplar halen de matematikçilerin üzerinde çalıştığı bir alandır. Sayısal yarıgruplar tarihte ilk olarak "ortak bir bölene sahip olmayan bozuk paraları kullanarak elde edilemeyen en büyük para miktarı nedir?" sorusuyla dile getirilmiştir (Beck, M., 2008). Yani temel olarak, "a ve b pozitif tamsayılar, p ve q sayıları 1 den büyük, aralarında asal sayılar olmak üzere; $a \cdot p + b \cdot q$ lineer (doğrusal) kombinasyonu olarak ifade edilemeyen en büyük $F(S)$ sayısı nedir?" sorusu Frobenius problemi olarak biliniyor. p ve q iki tane sayı için bu problemin çözümü; $F(S) = p.q - p - q$ olarak bulunmuştur (Rosales ve ark., 2011).

Yukarıdaki denklemden genellemeye gidersek $a_1, a_2, ..., a_n$ aralarında asal pozitif tamsayılar, yani $ebob(a_1, a_2, ..., a_n) = 1$ olmak üzere, $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n = b$ denkleminin negatif olmayan çözümleri ile oluşturulan b doğal sayılarının kümesi, herhangi bir sayısal yarıgrubun elemanları ile ifade edilir.

Son zamanlarda, monoidlerde çarpanların çalışmaları odak noktası olmuştur. $a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + ... + a_n \cdot x_n = b$ denklemini düşünelim. b nin negatif olmayan tamsayı çözümleri bize b nin çarpanlarını verecektir.

Bir monoidde herhangi bir b elemanının tüm çarpanlarının uzunlukları aynıysa bu monoide yarı çarpan monoid denir. Delta kümesi bir monoidin, yarı çarpan monoid olmasından ne kadar uzaklaştığını ifade etmek için kullanılır (Geroldinger, 1991). Delta kümeleri üzerinde ilk çalışma 1991'de Geroldinger tarafından yapılmıştır. Delta kümeleri uzaklıklar kümesi olarak ta bilinir. Delta kümeleri, herhangi iki çarpan arasındaki ardışık uzunlukları (mesafeleri) farkı ile birlikte belirli minimum uzaklığı hesaplar. Chapman ve arkadaşları (2012) bir monoidin çarpanlarının kümesinin sınırlı olduğunu gösterdi ve bu uzunlukların maximumun elemanların özel bir kümesine ulaştı, bu elemanlar Betti elemanlarıdır. Betti elemanları minimal gösterimin hesabı için önemlidir (Chapman ve ark., 2012; Chapman ve ark., 2009; Chapman ve ark, 2010; Chapman ve ark., 2014; Garcia-Sanchez ve ark., 2015).

İntegral alanın ya da değişmeli monoidin içinde indirgenemez çarpanlarının davranımını ölçen pek çok aritmetik sabit vardır. Bunların arasında birçoğu öğenin indirgenemez çarpanlarının uzunluğu ile bağlantılıdır. Uzunluk kümesi, Delta kümesi (ardışık uzunluklar farkı) veya esneklik (kabaca maksimum uzunluk / minimum uzunluk), bir integral alanın ya da bir monoidin çarpan veya yarı çarpan olmasına ne kadar uzakta olduğunu ölçen birtakım değişmezlerdir. Son zamanlarda, indirgenemez çarpanları arasındaki mesafe ile yakından alakalı olan diğer değişmezler de literatürde geçmektedir (Geroldinger ve ark., 2006). Katener derecesi, bir öğenin ardışık bağlantıları d den daha yakın olan herhangi iki indirgenemez çarpanları yani noktaları bağlamak için gereken en az mesafeyi (d) göstermektedir.

Geroldinger ve Halter-Koch (2006) un yakın bir zamandaki monografisisni sadece katener derecesini içeren araştırmanın şu anki durumunu değil aynı zamanda bir değerli olmayan çarpanların genel problemi için de iyi bir referanstır.

Güncel ilgi alanımıza göre, sayısal yarıgruplar için Delta kümesi üzerinde de çalışıldı ve sırasıyla iki ardışık öğe arasındaki fark olan tek bir öğeye indirgenmiş delta kümesinin aritmetik sıralaması tarafından oluşturulmuş sayısal yarı gruplar olarak gösterildi (Bowles ve ark., 2006). Minimal üreteç tarafından maksimumu bölüme eşit olan sayısal yarı grubun esnekliğinin gösterildiği yerde sayısal yarıgrubun esnekliği belirlendi.

Herhangi bir monoidde ya da integral alanında elemanların çarpanları, bu çarpanlar içinde yer alan indirgenemezler arasındaki bağlantılar olarak görüntülenebilir. Rosales sayısal yarı grubun çokluğunun Apery kümesinden sayısal yarı grubun minimal gösteriminin elde edilebileceğini kanıtlamıştır (Rosales 1996). Chapman ve arkadaşları eğer katener derecesi bir monoidin belli bir görünümünden elde edilebiliyorsa, aynı bilgiyi Apery kümelerinde de elde edilebildiğini göstermiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Bu bölümde, tez boyunca gerekli olacak bazı tanımlar ve temel özellikler verilecektir.

Tanım 2.1: $S \neq \varnothing$ yani S boş kümeden farklı bir küme ve "$\bullet$", S üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer S , üzerinde "$\bullet$" işlemi ile birleşme özelliğine sahipse o zaman $(S,\bullet)$ ikilisine yarıgrup denir.

Tanım 2.2: $(S,\bullet)$ yarı grup ve $M \subseteq S$ olsun. Eğer $x, y \in M$ için $x \bullet y \in M$ ise M ye S nin bir alt yarıgrubu denir (Howie, 1976).

Tanım 2.3: Eğer $(S,\bullet)$ yarıgrubu sıralı ikilisi birleşme özelliği ve etkisiz (birim) eleman özelliğine sahipse bu cebirsel yapıya yani $(S,\bullet)$ ye monoid denir.

Tanım 2.4: $S \subset \mathbb{N}$ ve $0 \in S$ olmak üzere, eğer S , “ + ” işlemine göre kapalı ve $\mathbb{N} \setminus S$ sonlu oluyor ise S ye sayısal yarıgrup denir. Yani;

$$\mathbb{N} = \{1,2,3,...\} \cup \{0\} \text{ ve } S \subseteq \mathbb{N} \text{ olmak üzere;}$$

- $0 \in S$
- $\forall a,b \in S$ için $a+b \in S$,
- $\#(\mathbb{N} \setminus S) < \infty$

şartları sağlanıyorsa S kümesine sayısal yarıgrup denir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009; İlhan, 2010).

Örnek 2.5: $S = \{0,5,6,7,10,\rightarrow\}$ kümesi bir sayısal yarı gruptur. Çünkü Tanım 2.4’ ten $0 \in S$, S toplama işlemine göre kapalı ve $\mathbb{N} \setminus S$ kümesi, $\mathbb{N} \setminus S = \{1,2,3,4,8,9\}$ sonludur.

Tanım 2.6: S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, $\mathbb{N} \setminus S$ kümesinin elemanlarına S nin boşlukları kümesi denir ve $G(S)$ ile gösterilir. Yani,

$$G(S) = \{x \in \mathbb{N} : x \notin S\}$$

şeklinde ifade edilir.

Bu kümenin eleman sayısına da S nin cinsi (tekillik derecesi) denir ve $g(S)$ ile gösterilir yani $g(S) = \#(G(S))$ veya $g(S) = \#(\mathbb{N} \setminus S)$ olarak da tanımlanabilir.

Örnek 2.7: $S=\{0,7,8,10,11,14\rightarrow\}$ sayısal yarı grubu için,

$G(S)=\mathbb{N}\setminus S=\{1,2,3,4,5,6,9,12,13\}$ olup $g(S)=9$ dur.

Tanım 2.8: Bir S sayısal yarı grubunun tüm $s\in S$ elemanları, bir $M=\{m_1,m_2,...,m_p\}$ kümesinin elemanlarının;

$$s=k_1\cdot m_1+k_2\cdot m_2+...+k_p\cdot m_p=\sum_{i=1}^{p}k_i\cdot m_i\left(k_i\geq 0, i=1,2,...,p\right)$$

şeklinde doğrusal (lineer) toplamı olarak yazılabiliyorsa, M kümesine S sayısal yarı grubunun üreteç kümesi denir. Eğer $m_1<m_2<...<m_p$ olmak üzere, $M=\{m_1,m_2,...,m_p\}\ (m_i>0, i\in\{1,2,...,p\})$ kümesinde hiçbir eleman, diğer elemanların bir doğrusal (lineer) bileşeni şeklinde ifade edilemiyorsa, yani M kümesinin hiçbir özalt kümesi S sayısal yarıgrubunu üretmiyorsa, o zaman M kümesine, S nin minimal üreteç kümesi denir. Eğer $M=\{m_1,m_2,...,m_p\}$ bir S sayısal yarı grubunun minimal üreteç kümesi ise, o zaman

$$S=<m_1,m_2,...,m_p>=\left\{k_1\cdot m_1+k_2\cdot m_2+...+k_p\cdot m_p\,\middle|\,k_i\in\mathbb{N}, m_i\in M, 1\leq i\leq p\right\}$$

şeklinde ifade edilir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 1999).

Örnek 2.9: $S=\{0,4,8,9,12,13,14,16,17,18,20,\rightarrow\}$ olup

S nin minimal üreteç kümesi: $\{4,9,14\}$ tir. Yani $S=<4,9,14>$.

Not 2.10: "$\rightarrow$" : anlamı, 20 den sonraki tüm tamsayılar S ye ait demektir.

Tanım 2.11: S, $M=\{m_1,m_2,...,m_p\}$ ile üretilen bir sayısal yarı grup olsun. Buradaki m_1 sayısına S nin katılığı denir ve $m(S)$ ile gösterilir. Ayrıca, p sayısına da S nin gömme boyutu denir ve $e(S)$ ile gösterilir.

Örnek 2.12: $S=<5,7,11,19,23>=\{0,5,7,10,11,12,14,\rightarrow\}$ katılığı 5, gömme boyutu 5 olan sayısal yarıgruptur. Yani $m(S)=5$ ve $e(S)=7$ olur.

Tanım 2.13: S bir sayısal yarıgrup olsun. $\mathbb{Z}\setminus S$' deki en büyük tamsayıya S nin Frobenius sayısı denir ve $F(S)$ ile gösterilir. Yani $F(S)=\max\{x\in\mathbb{Z}: x\notin S\}$ olarak ifade edilir (Fröberg ve ark., 1987).

Örnek 2.14: $S=<3,13,23>=\{0,3,6,9,12,13,15,16,18,19,21,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunda

$F(S)=\max\{x\in\mathbb{Z}|\, x\notin S\}=20$ olur.

Not 2.15: Eğer $S=\mathbb{N}$ ise o zaman Frobenius sayısı $F(\mathbb{N})=-1$ olur.

Tanım 2.16: S bir sayısal yarıgrup ve $a,b\in\mathbb{Z}$ olsun. S üzerinde $\leq_s$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$a\leq_s b \Leftrightarrow b-a\in S$$

Bu bağıntı, S sayısal yarıgrubu üzerinde bir sıralama bağıntısıdır. Yani yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerine sahiptir.

Tanım 2.17: S bir sayısal yarıgrup ve $x\notin S$ olsun. Her $s\in S\setminus\{0\}$ için $x+s\in S$ oluyorsa x'e S nin pseudo-Frobenius sayısı denir ve S nin tüm pseudo-Frobenius sayılarının kümesi $PF(S)$ ile gösterilir. $PF(S)$ kümesinin eleman sayısına S nin tipi denir ve $t(S)$ ile gösterilir, yani $t(S)=\#(PF(S))$ yazılır.

Örnek 2.18: $S=<8,11,12,15>=\{0,8,11,12,15,16,19,20,22,23,24,26,27,28,30,\rightarrow\}$ olsun. O zaman

$$\mathbb{Z}\setminus S=\{\ldots,-2,-1,1,2,3,4,5,6,7,9,10,13,14,17,18,21,25,29\}$$

$$S\setminus\{0\}=\{8,11,12,15,16,19,20,22,23,24,26,27,28,30,\rightarrow\}$$

olup x negatif tamsayıları için $x+s\notin S$ çıkar. Dolayısıyla $x+s\in S$ koşulunu sağlayan x elemanları 4, 25 ve 29 olur. Böylece $PF(S)=\{4,25,29\}$ olup S sayısal yarıgrubunun tipi $t(S)=3$ çıkar.

Not 2.19: $\max(PF(S))=F(S)$ olduğu görülür.

Örnek 2.20: $S=<8,11,12,15>=\{0,8,11,12,15,16,19,20,22,23,24,26,27,28,30,\rightarrow\}$ olsun. Örnek 2.18 den pseudo-Frobenius sayılarının kümesi $PF(S)=\{4,25,29\}$ dir. Not 2.19 dan Frobenius sayısı, pseudo-Frobenius sayılar kümesinin en büyük elemanı olup $F(S)=29$ dur. Gerçekten Tanım 2.13 ten

$F(S)=\max\{x\in\mathbb{Z}|\, x\notin S\}=\{\ldots,-2,-1,0,1,2,4,5,6,7,9,10,13,14,17,18,21,25,29\}=29$ olduğu görülür.

Tanım 2.21: S bir sayısal yarıgrup ve $m \in S \setminus \{0\}$ olsun. O zaman

$$Ap(S,m) = \{s \in S : s - m \notin S\}$$

kümesine S nin m ye göre Apery kümesi denir (Rosales ve Branco, 2011).

Yardımcı Teorem 2.22: S bir sayısal yarıgrup ve $m \in S \setminus \{0\}$ olsun. S nin m ye göre Apery kümesi,

$$Ap(S,m) = \{\omega(0), \omega(1), \omega(2), ..., \omega(m-1)\}$$

şeklindedir. Burada $w(i)$, her $i \in \{0,1,2,...,m-1\}$ için $\bmod m$ ye göre kalan sınıfları içinde S sayısal yarıgrubuna ait en küçük tamsayıdır (Rosales ve Branco, 2011).

Örnek 2.23: $S = <6,13,14,15> = \{0,6,12,13,14,15,18,19,20,21,24,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım. O zaman

$$Ap(S,6) = \{\omega(0) = 0, \omega(1), \omega(2), \omega(3), \omega(4), \omega(5)\} = \{0,13,14,15,28,29\}$$

olarak bulunur. Gerçekten de,

$$\begin{array}{ll} 0 \equiv \omega(0) (\bmod 6) & 15 \equiv \omega(3) (\bmod 6) \\ 13 \equiv \omega(1) (\bmod 6) & 28 \equiv \omega(4) (\bmod 6) \\ 14 \equiv \omega(2) (\bmod 6) & 29 \equiv \omega(5) (\bmod 6) \end{array}$$

şeklindedir. Öte yandan $m = 13$ alırsak

$$Ap(S,13) = \{\omega(0) = 0, \omega(1), \omega(2), \omega(3), \omega(4), \omega(5), \omega(6), \omega(7), \omega(8), \omega(9),$$
$$\omega(10), \omega(11), \omega(12)\}$$

$Ap(S,13) = \{0,6,12,14,15,18,20,21,24,29,30,35,36\}$ çıkar ki burada

$$\begin{array}{lll} 0 \equiv \omega(0) (\bmod 13) & 18 \equiv \omega(5) (\bmod 13) & \\ 6 \equiv \omega(6) (\bmod 13) & 20 \equiv \omega(7) (\bmod 13) & 30 \equiv \omega(4) (\bmod 13) \\ 12 \equiv \omega(12) (\bmod 13) & 21 \equiv \omega(8) (\bmod 13) & 35 \equiv \omega(9) (\bmod 13) \\ 14 \equiv \omega(1) (\bmod 13) & 24 \equiv \omega(11) (\bmod 13) & 36 \equiv \omega(10) (\bmod 13) \\ 15 \equiv \omega(2) (\bmod 13) & 29 \equiv \omega(3) (\bmod 13) & \end{array}$$

biçimindedir. Benzer şekilde $m = 14$ ve $m = 15$ için sırayla aşağıdakilerini elde ederiz:

$$Ap(S,14) = \{\omega(0) = 0, \omega(1), \omega(2), \omega(3), \omega(4), \omega(5), \omega(6), \omega(7), \omega(8), \omega(9), \omega(10),$$
$$\omega(11), \omega(12), \omega(13)\}$$

$$Ap(S,14) = \{0,6,12,13,15,18,19,21,24,25,30,31,36,37\}$$

$0 \equiv \omega(0)(\text{mod}14)$	$18 \equiv \omega(4)(\text{mod}14)$	$30 \equiv \omega(2)(\text{mod}14)$
$6 \equiv \omega(6)(\text{mod}14)$	$19 \equiv \omega(5)(\text{mod}14)$	$31 \equiv \omega(3)(\text{mod}14)$
$12 \equiv \omega(12)(\text{mod}14)$	$21 \equiv \omega(7)(\text{mod}14)$	$36 \equiv \omega(8)(\text{mod}14)$
$13 \equiv \omega(1)(\text{mod}14)$	$24 \equiv \omega(10)(\text{mod}14)$	$37 \equiv \omega(9)(\text{mod}14)$
$15 \equiv \omega(1)(\text{mod}14)$	$25 \equiv \omega(9)(\text{mod}14)$	

$$Ap(S,15) = \{\omega(0)=0, \omega(1), \omega(2), \omega(3), \omega(4), \omega(5), \omega(6), \omega(7), \omega(8), \omega(9), \omega(10), \omega(11), \omega(12), \omega(13), \omega(14)\}$$

$$Ap(S,15) = \{0,6,12,13,14,18,19,20,24,25,26,31,32,37,38\}$$

$0 \equiv \omega(0)(\text{mod}15)$	$18 \equiv \omega(3)(\text{mod}15)$	$26 \equiv \omega(11)(\text{mod}15)$
$6 \equiv \omega(6)(\text{mod}15)$	$19 \equiv \omega(4)(\text{mod}15)$	$31 \equiv \omega(1)(\text{mod}15)$
$12 \equiv \omega(12)(\text{mod}15)$	$20 \equiv \omega(5)(\text{mod}15)$	$32 \equiv \omega(2)(\text{mod}15)$
$13 \equiv \omega(13)(\text{mod}15)$	$24 \equiv \omega(9)(\text{mod}15)$	$37 \equiv \omega(7)(\text{mod}15)$
$14 \equiv \omega(14)(\text{mod}15)$	$25 \equiv \omega(10)(\text{mod}15)$	$38 \equiv \omega(8)(\text{mod}15)$

Önerme 2.24: S bir sayısal yarıgrup ve m, S sayısal yarıgrubunun sıfırdan farklı bir elemanı olsun. O halde

$$F(S) = \max\left(Ap(S,m)\right) - m$$

biçimindedir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 2.25: $S =< 6,14,15 >$ bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman

$$S =< 6,14,15 >= \{0,6,12,14,15,18,20,21,24,27,28,29,30,32,33,34,35,36,38,\rightarrow\}$$

$F(S) = 37$ ve $m = 6 \in S$ için

$$Ap(S,6) = \{0,14,15,28,29,43\}$$

bulunur.

$$F(S) = \max\left(Ap(S,6)\right) - 6 = 43 - 6 = 37$$

$m = 14 \in S$ için

$$Ap(S,14) = \{0,6,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,45,51\}$$

$$F(S) = \max\left(Ap(S,14\right) - 14 = 51 - 14 = 37$$

$m = 15 \in S$ için

$$Ap(S,15) = \{0,6,12,14,18,20,24,26,28,32,34,38,40,46,52\}$$

$$F(S) = \max\left(Ap(S,15)\right) - 15 = 52 - 15 = 37$$

gibi her $s \in S$ için benzer durumlar görülebilir.

Tanım 2.26: $M=\{m_1,m_2,...,m_p\}$, S nin minimal üreteç kümesi olsun. O zaman $s\in S$ için

$$Z(s)=\left\{\left(x_1,x_2,...,x_p\right)\in\mathbb{N}^p \,\middle|\, x_1\cdot m_1+x_2\cdot m_2+...+x_p\cdot m_p=s\right\}$$

kümesine s nin çarpanları denir. Buradan $x=\{x_1,x_2,...,x_p\}\in Z(s)$ için $|x|=x_1+x_2+...+x_p$ ifadesine x in uzunluğu denir (Chapman ve ark., 2016; O'neil ve ark., 2016; Conaway ve ark., 2015).

Tanım 2.27: $a=\left(x_1,x_2,...,x_p\right)\in\mathbb{N}^p$ ve $b=\left(y_1,y_2,...,y_p\right)\in\mathbb{N}^p$ olsun. O zaman a ve b nin en büyük ortak böleni $ebob(a,b)=\left(\min\left(x_1,y_1\right),...,\min\left(x_p,y_p\right)\right)\in\mathbb{N}^p$ olur (Chapman ve ark., 2016; O'neil ve ark., 2016; Conaway ve ark., 2015).

Tanım 2.28: $a=\left(x_1,x_2,...,x_p\right)\in\mathbb{N}^p$ ve $b=\left(y_1,y_2,...,y_p\right)\in\mathbb{N}^p$ olsun. O zaman $d(a,b)=\max\{|a-ebob(a,b)|,|b-ebob(a,b)|\}$ sayısına a ve b arasındaki mesafe denir (Chapman ve ark., 2016; O'neil ve ark., 2016; Conaway ve ark., 2015).

Örnek 2.29 : $S=\langle 3,4,5\rangle=\{0,3,\rightarrow\}$ bir sayısal yarıgrup olsun.

O zaman $15\in S$ için Tanım 2.26 dan

$x_1\cdot 3+x_2\cdot 4+x_3\cdot 5=15$ lineer denklemini çözdüğümüzde $\left(x_1,x_2,x_3\right)$ değerleri aşağıdaki gibi olur:

$5\cdot 3+0\cdot 4+0\cdot 5=15$ ve $(5,0,0)$ 15 in bir çarpanıdır.

$0\cdot 3+0\cdot 4+3\cdot 5=15$ ve $(0,0,3)$ 15 in bir çarpanıdır.

$1\cdot 3+3\cdot 4+0\cdot 5=15$ ve $(1,3,0)$ 15 in bir çarpanıdır.

$2\cdot 3+1\cdot 4+1\cdot 5=15$ ve $(2,1,1)$ 15 in bir çarpanıdır.

Bu durumda 15 in çarpanlarının kümesi,

$$Z(15)=\{(5,0,0),(0,0,3),(1,3,0),(2,1,1)\}$$

şeklinde bulunur. Ayrıca $x=(5,0,0)$, $y=(1,3,0)$ noktaları için, Tanım 2.27 den

$$ebob\left((5,0,0),(1,3,0)\right)=\left(\min(5,1),\min(0,3),\min(0,0)\right)=(1,0,0)$$

bulunur. Bu iki nokta arasındaki uzaklığı da Tanım 2.28 den,

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \max\left\{\left|(5,0,0)-(1,0,0)\right|,\left|(1,3,0)-(1,0,0)\right|\right\} \\ &= \max\left\{\left|(4,0,0)\right|,\left|(0,3,0)\right|\right\} \\ &= \max\left\{4,3\right\} = 4 \end{aligned}$$

olarak bulabiliriz.

Tanım 2.30: S bir sayısal yarıgrup ve $s \in S$ olsun. O zaman $x, y \in Z(s)$ ve $M \in \mathbb{N}$ olmak üzere, x ten y ye olan bir M -zinciri her $j \in \{1, 2, ..., i-1\}$ için

1. $x = x_1$,
2. $y = x_i$,
3. $d\left(x_j, x_{j+1}\right) \leq M$

olacak şekilde s 'nin çarpanları olan $\left(x_1 = x, x_2, ..., x_p = y\right) \in Z(s)$ dizisidir (Chapman ve ark., 2016; O'neil ve ark., 2016; Assi ve Garcia-Sanchez, 2014).

Tanım 2.31: S bir sayısal yarıgrup ve s, S sayısal yarıgrubun bir elemanı olsun. O zaman $x, y \in Z(s)$ bir M -zincirinin çarpanları olmak üzere, $\left(x_1 = x, x_2, ..., x_p = y\right) \in Z(s)$ x ten y ye bir dizidir. Öyle ki bütün i değerleri için $a = x_1$, $b = x_p$ ve $d\left(x_i, x_{i+1}\right)$ olmak üzere s nin katener derecesi $c(s)$, $M \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de minimaldir. Öyle ki, herhangi iki çarpan yani $x, y \in Z(s)$ için x ten y ye bir M -zinciri vardır ve S sayısal yarıgrubunun katener derecesi $c(S)$, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$c(S) = \max\left\{c(s) \middle| s \in S\right\}$$

(Chapman ve ark., 2007).

Aşağıda bir X kümesi üzerinde tanımlı olan herhangi bir bağıntının sağlayabileceği özellikler ile ilgili bir tanım verilmektedir.

Tanım 2.32: X, boştan farklı bir küme olsun. X üzerinde bir σ bağıntısı, $X \times X$ kümesinin bir alt kümesidir, yani $\sigma \subset X \times X$ olur. Eğer $(a,b) \in \sigma$ ise $a\sigma b$ yazarız ve a ve b ile σ-bağıntılıdır denir. Eğer σ; yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağlıyorsa σ bir denklik bağıntısı denir.

Her bir $a \in X$ için σ modülüne göre sınıfı, yani

$$[a]_\sigma = \{b \in X \mid a\sigma b\}$$

kümesi, σ-sınıfı olarak adlandırılır. Ayrıca

$$\frac{X}{\sigma} = \{[a]_\sigma \mid a \in X\}$$

kümesine X kümesinin σ ile bölüm kümesi denir ve bu küme X kümesinin bir parçalanışıdır.

M bir monoid ve $a,b,c \in M$ olsun. O zaman $a\sigma b \Leftrightarrow (a+c)\sigma(b+c)$ şeklinde tanımlanan bağıntı M de bir denklik bağıntısıdır (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Tanım 2.33: X, boş olmayan bir küme olsun. O zaman X kümesinin Free monoid veya Serbest monoidi,

$$Serbest(X) = \{\lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_k \cdot x_k \mid k \in \mathbb{N}, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k \in \mathbb{N}, x_1, x_2, ..., x_k \in X\}.$$

biçiminde tanımlanır. $Serbest(X)$ üzerindeki toplama işlemi,

$$(\lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_k \cdot x_k) + (\mu_1 \cdot x_1 + ... + \mu_k \cdot x_k) = (\lambda_1 + \mu_1) \cdot x_1 + ... + (\lambda_k + \mu_k) \cdot x_k$$

olarak tanımlanır (burada λ_i veya μ_i den bir kısmı sıfır olabilir). Bu işlem ile bu küme bir monoiddir. $Serbest(\{x_1, x_2, ..., x_p\})$ genellikle $Serbest(x_1, x_2, ..., x_p)$ ile gösterilir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

$X = (x_1, x_2, ..., x_p)$ olsun. O zaman $Serbest(X) = Serbest(x_1, x_2, ..., x_p)$ monoidi olmak üzere, $a,b \in Serbest(X)$ için

$$a = a_1 \cdot x_1 + ... + a_p \cdot x_p$$
$$b = b_1 \cdot x_1 + ... + b_p \cdot x_p$$

ise o zaman a ile b arasındaki "$\cdot$" çarpım $a \cdot b = a_1 \cdot b_1 + ... + a_p \cdot b_p$ olarak tanımlanır.

Tanım 2.34: $a,b \in Serbest(x_1, x_2, ..., x_p)$ için, eğer ya $a = b = 0$ ya da bazı $n \in S$ için $k_1, k_2, ..., k_l \in Z(n)$ var öyle ki $k_1 = a$ ve $k_l = b$ her $i \in \{1, 2, ..., l-1\}$ için ve $k_i \cdot k_{i+1} \neq 0$ oluyor ise aRb şeklinde bağıntısı, $Serbest(X) = (x_1, x_2, ..., x_p)$ üzerinde tanımlanır. Bu bağıntı $Serbest(X)$ üzerinde bir denklik bağıntısıdır. $Serbest(X)/R$, R nin elemanlarının sınıfları olarak adlandırılır (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Sonuç 2.35: $\{n_1, n_2, ..., n_p\}$ kümesi ile minimal olarak üretilen bir yarıgrup ve $n \in S$ olsun. S, eğer $c(n) = c(S)$ koşulunu sağlayan S deki minimal eleman n ise o zaman $w \in Ap(S, n_1) \setminus \{0\}$ ve $n_j \in \{n_2, ..., n_p\}$ olmak üzere $n = w + n_j$ yazılır.

Örnek 2.36: $S =< 4,9,11 >= \{0,4,8,9,11,12,13,15,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrup olsun. O zaman $Ap(S,4) = \{\omega(0) = 0, \omega(1), \omega(2), \omega(3)\}$ olup $Ap(S,4) = \{0,9,18,11\}$ bulunur. Bu durumda,

$$\left(Ap(S,4) \setminus \{0\}\right) + \{9,11\} = \{9,11,18\} + \{9,11\} = \{18,20,22,27,29\}$$

olarak elde edilir. Şimdi bu elemanların Tanım 2.26 dan çarpanlarını tek tek bulalım.

$$Z(s) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{N}^3 \,|\, x_1 \cdot s_1 + x_2 \cdot s_2 + x_3 \cdot s_3 = s\right\}$$

için $n_1 = 4,\ n_2 = 9,\ n_3 = 11$ dir.

- $Z(18)$ için,

  $x_1 \cdot 4 + x_2 \cdot 9 + x_3 \cdot 11 = 18$ lineer denklemini çözdüğümüzde (x_1, x_2, x_3) değerleri aşağıdaki gibidir.

$0 \cdot 4 + 2 \cdot 9 + 0 \cdot 11 = 18$ ve $(0,2,0)$ 18 in bir çarpanıdır.

$$(x_1, x_2, x_3) = (0,2,0)$$

$Z(18) = \{(0,2,0)\}$ bulunur.

- $Z(20)$ için

$x_1 \cdot 4 + x_2 \cdot 9 + x_3 \cdot 11 = 20$ lineer denklemini çözdüğümüzde (x_1, x_2, x_3) değerleri aşağıdaki gibidir.

$0 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 11 = 20$ ve $(0,1,1)$ 20 in bir çarpanıdır.

$5 \cdot 4 + 0 \cdot 9 + 0 \cdot 11 = 20$ ve $(5,0,0)$ 20 in bir çarpanıdır. O zaman

$$Z(20) = \{(0,1,1),(5,0,0)\}$$

çıkar. Şimdi de bu iki noktanın ebobu ve arasındaki mesafeyi bulalım.

$$ebob((0,1,1),(5,0,0)) = (\min(0,5), \min(1,0), \min(1,0)) = (0,0,0)$$

$$d(x,y)=\max\left\{\left|(0,1,1)-(0,0,0)\right|,\left|(5,0,0)-(0,0,0)\right|\right\}=\max\left\{\left|(0,1,1)\right|,\left|(5,0,0)\right|\right\}$$
$$=\max\{2,5\}=5$$

$(0,1,1)\,\bullet\overset{5}{\text{———————}}\bullet\,(5,0,0)$

$c(20)=5$ olur.

- $Z(22)$ için,

$x_1\cdot 4+x_2\cdot 9+x_3\cdot 11=22$ lineer denklemini çözdüğümüzde (x_1,x_2,x_3) değerleri aşağıdaki gibidir.

$0\cdot 4+0\cdot 9+2\cdot 11=22$ ve $(0,0,2)$ 22 in bir çarpanıdır.

$1\cdot 4+2\cdot 9+0\cdot 11=22$ ve $(1,2,0)$ 22 in bir çarpanıdır.

$Z(22)=\{(0,0,2),(1,2,0)\}$ olup, buradan bu iki noktanın ebobu ve arasındaki mesafeyi bulalım.

$$ebob((0,0,2),(1,2,0))=(\min(0,1),\min(0,2),\min(2,0))=(0,0,0)$$

$$d(x,y)=\max\left\{\left|(0,0,2)-(0,0,0)\right|,\left|(1,2,0)-(0,0,0)\right|\right\}=\max\left\{\left|(0,0,2)\right|,\left|(1,2,0)\right|\right\}$$
$$=\max\{2,3\}=3$$

$(0,0,2)\,\bullet\overset{3}{\text{———————}}\bullet\,(1,2,0)$ $\quad c(22)=3$ olur.

- $Z(27)$ için,

$x_1\cdot 4+x_2\cdot 9+x_3\cdot 11=27$ lineer denklemini çözdüğümüzde (x_1,x_2,x_3) değerleri aşağıdaki gibidir.

$0\cdot 4+3\cdot 9+0\cdot 11=27$ ve $(0,3,0)$ 27 in bir çarpanıdır.

$4\cdot 4+0\cdot 9+1\cdot 11=27$ ve $(4,0,1)$ 27 in bir çarpanıdır.

$Z(27)=\{(0,3,0),(4,0,1)\}$ için,

$$ebob((0,3,0),(4,0,1))=(\min(0,4),\min(3,0),\min(0,1))=(0,0,0)$$

$$d(x,y)=\max\left\{\left|(0,3,0)-(0,0,0)\right|,\left|(4,0,1)-(0,0,0)\right|\right\}=\max\left\{\left|(0,3,0)\right|,\left|(4,0,1)\right|\right\}$$
$$=\max\{3,5\}=5$$

$(0,3,0) \overset{5}{\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} (4,0,1)$ $\quad c(27)=5$ olur, son olarak

- $Z(29)$ için

$x_1 \cdot 4 + x_2 \cdot 9 + x_3 \cdot 11 = 29$ lineer denklemini çözdüğümüzde (x_1, x_2, x_3) değerleri aşağıdaki gibidir.

$0 \cdot 4 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 11 = 29$ ve $(0,2,1)$ 29 un bir çarpanıdır.

$5 \cdot 4 + 1 \cdot 9 + 0 \cdot 11 = 29$ ve $(5,1,0)$ 29 un bir çarpanıdır.

O zaman $Z(29) = \{(0,2,1),(5,1,0)\}$ olur.

$$ebob((0,2,1),(5,1,0)) = (\min(0,5), \min(2,1), \min(1,0)) = (0,1,0)$$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \max\{|(0,2,1)-(0,1,0)|, |(5,1,0)-(0,1,0)|\} = \max\{|(0,1,1)|, |(5,0,0)|\} \\ &= \max\{2,5\} = 5 \end{aligned}$$

$(0,2,1) \overset{5}{\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet} (5,1,0)$ $\quad c(29)=5$ olur.

Birden fazla R sınıfı olan tek elemanlar 20, 22 ve 27 dir. 29 nun çarpanları olan $ebob((0,2,1),(5,1,0)) = (0,2,0) \neq (0,0,0)$ olduğundan R nin aynı denklik sınıfındadırlar. Dolayısıyla 20, 22 ve 27 elemanları düşündüğümüzde Tanım 2.31 den S nin katener derecesi,

$$c(S) = \max\{c(m) \mid m \in S\} = \max\{3,5\} = 5 \text{ dir.}$$

Tanım 2.37: $G=(V,E)$ çizgesi boş olmayan köşeler kümesi olan V ve kenarlar kümesi olan E kümelerinden oluşmuştur. Her kenarın bir veya 2 köşesi vardır, bu köşelere uç noktalar denir. Bir kenar uç noktaları birleştirmektir (Rosen, 2015).

Tanım 2.38: Bir G çizgesinin her bir köşeden diğer köşelere bir kenar varsa o çizgeye bağlantılı çizge veya birleştirilmiş çizge denir.

Bu bölümde sayısal yarıgrupların minimal gösterimini hesaplamak için çizgelerden yararlanacağız.

$S=<n_1,n_2,...,n_p>$ ve σ, $\left(x_1,x_2,...,x_p\right)$ in bir minimal gösterimi olsun. O zaman her $n\in S$, $G_n=(V_n,E_n)$ ile $V_n=\left\{n_i \middle| n-n_i\in S\right\}$ ve $E_n=\left\{\overline{n_i n_j} \middle| n-(n_i+n_j)\in S, i\neq j\right\}$ olur.

Bu çizgeyi $n\in S$ nin ilişkili çizgesi olarak adlandıracağız. G çizgesinin bağlı bir bileşeni G nin maksimal bağlı bir bileşenidir. Eğer G bağlanırsa daha sonra yalnız bir bağlayıcı elemanına sahip olur. Bir sayısal yarıgrubun içindeki bir elemanla ilişkilendirilen çizgenin bağlayıcı elemanları olarak tanımlıyoruz.

n, S'nin bir elemanı olsun. Eğer $X_1,...,X_r$ $Z(n)$ nin R-sınıflarıysa tüm $i\in\{1,2,...,r\}$ için,

$$A_i=\left\{n_j \middle| x_j\leq x \; bazı \; x\in X_i\right\}$$

tanımlanır.

Bu kümeler G_n nin farklı bağlayıcı parçalarının köşelerinin kümesini içerir.

Yardımcı Teorem 2.39: $\{A_1,...,A_r\}$ kümesi V_n'nin bir parçalanışıdır (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

İspat: Eğer $n_j\in V_n$ ise, $n-n_j\in S$ olur. Öte yandan $a\in Z(n-n_j)$ alalım. O zaman $a+x_j\in Z(n)$ ve böylelikle $a+x_j\in X_i$ olacak şekilde $i\in\{1,2,...,r\}$ için $n_j\in A_i$ olur. Bu da $V_n\subseteq A_1\cup...\cup A_r$ olduğunu ispatlıyor ve sonuç olarak $V_n=A_1\cup...\cup A_r$ çıkar.

$i\neq j$ iken $n_k\in A_i\cap A_j$ olduğunu kabul edelim. O zaman $x\in X_i$ ve $y\in X_j$ vardır öyle ki $x_k\leq x$ ve $x_k\leq y$ dir. Bu da $x\cdot y\neq 0$ olduğunu ve sonuç olarak xRy anlamına gelir. Fakat bu olması imkansızdır. Çünkü X_i ve X_j farklı R-sınıfındadır. Bu da V_n nin $\{A_1,...,A_r\}$ bir parçalanışı olduğunun ispatıdır.

■

Şimdi $i\neq j$ olduğundan A_j de bir köşeyle A_i de bir köşeyi bağlayan G_n de bir kenar olmadığını gösterelim.

Yardımcı Teorem 2.40: Eğer $i\neq j$ iken $n_k\in A_i$ ve $n_l\in A_j$ ise, o zaman $\overline{n_k n_l}\notin E_n$ olur (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Teorem 2.41: S bir sayısal yarıgrup ve n, S 'nin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. G_n nin bağlı bileşenlerinin sayısı $Z(n)$ çarpanlarının içindeki R-sınıfı sayısına eşittir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Önerme 2.42: Eğer G_n bağlantılı değilse ve $w \in Ap(S,n_1)\setminus\{0\}$ için $j \in \{2,...,e\}$ olmak üzere, $n = w + n_j$ dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

İspat: Eğer $n - n_1 \notin S$ ise o zaman $w \in Ap(S,n_1)\setminus\{0\}$. G_n bağlantılı olmadığı için $i \neq j \geq 2$ ile $\overline{n_i n_j} \notin E_n$ olacak şekilde $n_i, n_j \in V_n$ vardır. Bu da $n = (n - n_j) + n_j$ ve $n - n_j \in Ap(S,n_1)\setminus\{0\}$ ($n \neq n_j$ çünkü $n - n_1 \in S$ ve $\{n_1,...,n_e\}$ S nin minimal üreteç sistemidir).

Şimdi $n - n_1 \in S$ olarak kabul edelim. G_n bağlantılı olmadığından, $i > 1$ iken $n_i \in V_n$ olur. Öyle ki $n - (n_1 + n_i) \notin S \left(\overline{n_i n_j} \notin E_n\right)$ olur. $n - n_i \in S$ ve $n - n_i - n_1 \notin S$ olduğunda, $n - n_i \in Ap(S,n_1)\setminus\{0\}$ 'a sahip oluruz (Tekrar $n - n_i \neq 0$ çünkü $n - n_1 \in S$). $n = (n - n_i) + n_i$ olarak yazabiliriz.

■

Sonuç 2.43: Yukarıdaki önerme, G_n 'nin bağlantılı olmadığı ve $n \in S$ elemanlarının sonlu küme olduğunu ifade eder.

Örnek 2.44: $S = \langle 5,7,9,11 \rangle = \{0,5,7,9,10,11,12,14,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrup olsun. O zaman $Ap(S,5) = \{\omega(0) = 0, \omega(1), \omega(2), \omega(3), \omega(4)\}$ olup $Ap(S,5) = \{0,7,9,11,18\}$ biçiminde bulunur. Daha sonra,

$$\left(Ap(S,5)\setminus\{0\}\right) + \{7,9,11\} = \{14,16,18,20,22,25,27,29\}$$

olarak elde edilir. $\left(Ap(S,5)\setminus\{0\}\right) + \{7,9,11\}$ kümesindeki n lerin G_n çizgesini hesap edelim.

5 in yer aldığı 14 lük bir ifadeyi $14 = 1\cdot 5 + 1\cdot 9$; $14 = 2\cdot 7$ olarak bulabiliriz. Benzer şekilde 16,18,20 ve 22'yi de buluruz.

Çizge	Bağlı Bileşenler	Bağıntılar
G_{14}	$\{5,9\},\{7\}$	$(x_1+x_3,2x_2)$
G_{16}	$\{5,11\},\{7,9\}$	(x_1+x_4,x_2+x_3)
G_{18}	$\{7,11\},\{9\}$	$(x_2+x_4,2x_3)$
G_{20}	$\{5\},\{9,11\}$	$(4x_1,x_3+x_4)$
G_{22}	$\{5,7\},\{11\}$	$(3x_1+x_2,2x_4)$
G_{25}	$\{5,7,9,11\}$	
G_{27}	$\{5,7,9,11\}$	
G_{29}	$\{5,7,9,11\}$	

O zaman S 'nin minimal gösterimi
$\sigma=\{(x_1+x_3,2x_2),(x_1+x_4,x_2+x_3),(x_2+x_4,2x_3),(4x_1,x_3+x_4),(3x_1+x_2,2x_4)\}$ olur.

Tanım 2.45: S bir sayısal monoid ve $s\in S\setminus\{0\}$ için $V(s)$ köşe kümesi olsun. G_s çizgesi, $ebob(x,y)\neq 0$ olmak üzere iki tane köşesi $x,y\in V(s)$ olan bir kenar olsun. Bu durumda G_s bağlantısız ise s sayısına S nin Betti sayısı denir ve S nin bütün Betti sayılarının kümesi,

$$Betti(S)=\{\beta\in S \mid G_s \text{ bağlantısızdır}\}$$

şeklinde gösterilir (Conaway ve ark., 2015; O'neil ve ark., 2016).

Önerme 2.46: $S=<n_1,n_2,n_3>$ sayısal bir yarı grup ve $\beta\in S$ olup $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$ o zaman Betti elemanları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\beta_i=c_i\cdot n_i$$

ki burada

$$c_i=\min\{c \mid c\cdot n_i\in\langle n_j,n_k\rangle \text{ o zaman } \{j,k\}=\{1,2,3\}\setminus\{i\}\} \text{ ve } \{j,k\}=\{1,2,3\}\setminus\{i\}$$

şeklindedir (Conaway ve ark., 2015).

Örnek 2.47: $S = <4,9,14>$ sayısal yarı grubunun Betti elemanlarını bulalım. Önerme 2.46 dan,

$$c_1 = \min\left\{k \in Z^+ \left| 4 \cdot k \in <9,14> = \left\{9,14,18,23,27,\boxed{28},...,\right\}\right.\right\} = 7$$

$$c_2 = \min\left\{k \in Z^+ \left| 9 \cdot k \in <4,14> = \left\{4,8,12,14,16,\boxed{18},..,\right\}\right.\right\} = 2$$

$$c_3 = \min\left\{k \in Z^+ \left| 14 \cdot k \in <4,9> = \left\{4,8,9,12,13,16,17,18,20,21,22,24,25,26,27,\boxed{28},...\right\}\right.\right\} = 2$$

$n_1 = 4, n_2 = 9, n_3 = 14$ olup Betti elemanları bulalım.

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= c_1 \cdot n_1 = 7 \cdot 4 = 28 \\ \beta_2 &= c_2 \cdot n_2 = 2 \cdot 9 = 18 \\ \beta_3 &= c_3 \cdot n_3 = 2 \cdot 14 = 28 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Betti(S) = \{18,28\} \text{ dir.}$$

Teorem 2.48: S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman

$$c(S) = \max\left\{c(\beta) \middle| \beta \in Betti(S)\right\}$$

şeklindedir (Chapman ve ark., 2016; O'neil ve ark., 2016; Assi ve Garcia-Sanchez, 2014).

Tanım 2.49: $n_1, n_2, ..., n_p \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$S = <n_1, n_2, .., n_p> = \left\{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + ... + x_p \cdot n_p \left| \left(x_1, x_2, ..., x_p\right) \in \mathbb{N}^p \right.\right\},$$

sayısal yarı grubu verilsin. O zaman $s \in S$ ögesinin çarpanlarının kümesi $Z(s)$ ile ifade edilir. Bir çarpanın uzunluğunu $|x|$ olmak üzere $s \in S$ için, $L(s) = \left\{|x| \,\middle|\, x \in Z(s)\right\}$ olup $L(s) \subset [0,s]$ kümesini tanımlayalım. Burada $L(s)$ sınırlı olup $m_1 < m_2 < ... < m_k$ pozitif tamsayıları için $L(s) = \{m_1, m_2, ..., m_k\}$ biçimindedir.

$$\Delta(s) = \left\{m_i - m_{i-1} \middle| 1 \le i \le k\right\}$$

kümesi de $s \in S$ ögesinin delta kümesi olarak tanımlanır ve S nin delta kümesi

$$\Delta(S) = \bigcup_{s \in S} \Delta(s)$$

şeklinde ifade edilir (Chapman ve ark., 2009).

Örnek 2.50: $S=<4,6,15>$ sayısal yarıgrubun Delta Kümesini bulalım.

Çözüm: $S=<4,6,15>=\{0,4,6,8,10,12,14,15,16,18,\rightarrow\}$ şeklindedir. Şimdi S nin elemanlarının çarpanlarını tek tek bulalım. Tanım 2.26 dan

$$Z(s)=\left\{\left(x_1,x_2,x_3\right)\in\mathbb{N}^3\,\middle|\,x_1\cdot n_1+x_2\cdot n_2+x_3\cdot n_3=s\right\} \text{ olup}$$

$Z(0)=\{(0,0,0)\}$, $|x|=x_1+x_2+x_3=0+0+0=0$ olup Tanım 2.49 dan $L(s)=\{0\}$

$Z(4)=\{(1,0,0)\}$, $|x|=1+0+0=1$ olup Tanım 2.49 dan $L(s)=\{1\}$

$Z(6)=\{(0,1,0)\}$, $|x|=x_1+x_2+x_3=0+1+0=1$ olup $L(s)=\{1\}$

$Z(8)=\{(2,0,0)\}$,$|x|=x_1+x_2+x_3=2+0+0=2$ olup $L(s)=\{2\}$

$Z(10)=\{(1,1,0)\}$, $|x|=x_1+x_2+x_3=1+1+0=2$ olup $L(s)=\{2\}$

$$Z(12)=\{(3,0,0),(0,2,0)\},\left.\begin{array}{l}|x|=x_1+x_2+x_3=3+0+0=3\\|x|=x_1+x_2+x_3=0+2+0=2\end{array}\right\}$$

yazılır. Tanım 2.49 dan $L(s)=\{2,3\}$ ve

$\boxed{\Delta(12)=\{3-2\}=\{1\}}$ bulunur. Öte yandan,

$Z(14)=\{(2,1,0)\}$, $|x|=x_1+x_2+x_3=2+1+0=3$ olup $L(s)=\{3\}$

$Z(15)=\{(0,0,1)\}$,$|x|=x_1+x_2+x_3=0+0+1=1$ olup olup $L(s)=\{1\}$

$$Z(16)=\{(4,0,0),(1,2,0)\},\left.\begin{array}{l}|x|=x_1+x_2+x_3=4+0+0=4\\|x|=x_1+x_2+x_3=1+2+0=3\end{array}\right\} \text{ olup } L(s)=\{3,4\}$$

$\boxed{\Delta(16)=\{4-3\}=\{1\}}$ biçimindedir.

…

$$Z(30)=\{(0,5,0),(3,3,0),(0,0,2)\},\left.\begin{array}{l}|x|=x_1+x_2+x_3=0+5+0=5\\|x|=x_1+x_2+x_3=3+3+0=6\\|x|=x_1+x_2+x_3=0+0+2=2\end{array}\right\} \text{ olup } L(s)=\{2,5,6\}$$

$\boxed{\Delta(30)=\{6-5,5-2\}=\{1,3\}}$

$$Z(40)=\{(10,0,0),(1,6,0),(1,1,2),(7,2,0)\},\left.\begin{array}{l}|x|=x_1+x_2+x_3=10+0+0=10\\|x|=x_1+x_2+x_3=1+6+0=7\\|x|=x_1+x_2+x_3=1+1+2=4\\|x|=x_1+x_2+x_3=7+2+0=9\end{array}\right\}$$

olup $L(s)=\{4,7,9,10\}$,

$$\boxed{\Delta(40)=\{10-9,9-7,7-4\}=\{1,2,3\}}$$

biçimindedir.

Benzer şekilde diğerleri de bulunur. Böylece

$$\Delta(S)=\bigcup_{s\in S}\Delta(s)=\{1\}\cup\{1,3\}\cup.....\cup\{1,2,3\}\cup...=\{1,2,3\}$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.51: S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman $\min\left(\Delta(S)\right)=ebob\left(\Delta(S)\right)$ ve $d=ebob\Delta(S)$ olmak üzere,

Burada $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ vardır, öyle ki

$$\Delta(S)\subseteq\{d,2d,...,kd\}$$

şeklindedir ki burada $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$ biçimindedir (Chapman ve ark., 2012).

Bundan sonra S sayısal yarıgrubunu $S=<n_1,n_2,n_3>$ biçiminde alacağız.

Tanım 2.52: S, $\{n_1,n_2,n_3\}$ ile üretilen yarıgrup olsun. Her $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$ için

$$c_i=\min\left\{k\in\mathbb{Z}^+\,\middle|\,k\cdot n_i\in\left\langle n_j,n_k\right\rangle\right\}$$

olarak tanımlansın. O zaman $r_{ij},r_{ik}\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$c_i\cdot n_i=r_{ij}\cdot n_j+r_{ik}\cdot n_k$$

sayıları yazılır.

Tanım 2.53: S bir sayısal yarıgrup ve $F(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. $F(S)$ tek tamsayı ve $\forall x\in\mathbb{Z}\setminus S$ için $F(S)-x\in S$ oluyorsa S sayısal yarıgrubuna simetrik sayısal yarıgrup denir.

Önerme 2.54: Eğer S simetrik değilse, o zaman

$$c_i=r_{ji}+r_{ki}$$

biçimindedir ki burada $r_{ij},r_{ik}\in\mathbb{Z}^+$ tek sayılardır.

$n_1<n_2<n_3$ olduğundan aşağıdaki sonucu elde edebiliriz (Johnson 1960).

Yardımcı Teorem 2.55: Yukarıdaki varsayımlarla $c_1>r_{12}+r_{13}$ ve $c_3<r_{31}+r_{32}$ ve her biri için $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$ olmak üzere

$$\delta_i=\left|c_i-r_{ji}-r_{ik}\right|$$

yazarız.

Buradan $\delta_1 = c_1 - r_{12} - r_{13}$ ve $\delta_3 = r_{31} - r_{32} - c_3$ olur. Ayrıca

$$\delta_2 = |\delta_1 - \delta_3|$$

bulunur.

Yardımcı Teorem 2.56: Yukarıdaki varsayımlarla

$$\min \Delta(S) = obeb(\delta_1, \delta_3) \text{ ve } \max \Delta(S) = \max\{\delta_1, \delta_3\}$$

olur (Chapman ve ark., 2012).

Not 2.57: Son Yardımcı Teorem 2.56 nın ışığında, $\delta_1 \neq \delta_3$ diye düşünebiliriz. Çünkü diğer durumlarda

$$\min \Delta(S) = \max \Delta(S) = \delta_1 = \delta_3$$

eşitliğine sahip olup $\Delta(S) = \{\delta_1\}$ olarak bulacağız.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tez çalışması sayısal yarıgrupların önemli bir alanını oluşturan indirgenemez sayısal yarıgrupların simetrik ve pseudo-simetrik sayısal yarıgruplarından bahsedeceğiz. Daha sonra pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun özel bir ailesinden yani $S=<3,3+s,3+2s>$ (burada s, 3' e tam bölünemiyen pozitif bir tamsayı yani $3\nmid s$ dir) sayısal yarıgrubundan bahsedeceğiz. Bunun için çeşitli kaynaklardan ulaştığımız ve çalışmalarımıza destek olan, ilgili makaleler ve kitaplar materyal olarak kullanılmıştır.

3.1. İNDİRGENEMEZ SAYISAL YARIGRUPLAR

Tanım 3.1.1: S bir sayısal yarıgrup olmak üzere, eğer S onu kapsayan iki sayısal yarıgrubun kesişimi olarak ifade edilemezse S ye indirgenemez sayısal yarıgrup denir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009). İndirgenemez sayısal yarıgruplar maksimaldır (kapsama bağıntısına göre).

Örnek 3.1.2: $S=<4,6,7>=\{0,4,6,7,8,10\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubu, iki sayısal yarıgrubun kesişimi şeklinde yazılamadığı için S indirgenemez sayısal yarıgruptur. Gerçekten de S yi kapsayan $<4,6,7>\subset<4,6,7,9>$, $<4,6,7>\subset<4,5,6,7>$ yarıgruplarını düşünelim:

$<4,5,6,7>=\{0,4,\rightarrow\}$,

$<4,6,7,9>=\{0,4,6,\rightarrow\}$,

$$\begin{aligned}<4,5,6,7>\cap<4,6,7,9>&=\{0,4,\rightarrow\}\cap\{0,4,6,\rightarrow\}\\&=\{0,4,6,\rightarrow\}\neq<4,6,7>\end{aligned}$$

gibi $<4,6,7>$ yi kapsayan farklı iki sayısal yarıgrubun kesişimi şeklinde yazılamadığından S indirgenemez sayısal yarıgruptur.

Örnek 3.1.3: $S=<5,7,9>=\{0,5,7,9,10,12,14,\rightarrow\}$ olsun. S sayısal yarıgrubu indirgenemez değildir. Çünkü,

$<5,7,9>\subset<5,7,9,11>$ ve $<5,7,9>\subset<5,7,9,13>$ yarıgruplarını düşünelim:

$<5,7,9,11>=\{0,5,7,9,10,11,12,14,\rightarrow\}$

$<5,7,9,13>=\{0,5,7,9,10,12,\rightarrow\}$ den

$$< 5,7,9,11 > \cap < 5,7,9,13 > = \{0,5,7,9,10,11,12,14,\rightarrow\} \cap \{0,5,7,9,10,12,\rightarrow\}$$
$$= \{0,5,7,9,10,12,14,\rightarrow\} = < 5,7,9 >$$

olur.

Yardımcı Teorem 3.1.4: S, $\mathbb{N}$ den farklı bir sayısal yarıgrup olsun. O halde $S \cup \{F(S)\}$ kümesi de bir sayısal yarıgruptur (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

İspat: S, $\mathbb{N}$ den farklı bir sayısal yarıgrup ve sonlu olduğundan $S \cup \{F(S)\}$ kümesinin $\mathbb{N}$ 'deki tümleyeni de sonludur.

$x, y \in S \cup \{F(S)\}$ alalım. Aldığımız bu elemanlardan bir tanesi $F(S)$ ise, $x + y \geq F(S)$ yani $x + y \in S \cup \{F(S)\}$ olur. Eğer $x, y \in S$ ise $x + y \in S$ ve $S \cup \{F(S)\} \supseteq S$ olduğundan, $x + y \in S \cup \{F(S)\}$ olur. O zaman $0 \in S \subseteq S \cup \{F(S)\}$ olduğundan dolayı $S \cup \{F(S)\}$ kümesi de bir sayısal yarıgruptur.

■

Teorem 3.1.5: S bir sayısal yarıgrup olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktirler:

1. S indirgenemez bir sayısal yarıgruptur.
2. S, Frobenius sayısı $F(S)$ olan tüm sayısal yarıgruplar içinde maksimaldir.
3. S, Frobenius sayısı $F(S)$ nin olmadığı tüm sayısal yarıgruplar içinde maksimaldir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

İspat: $1) \Rightarrow 2)$: B bir sayısal yarıgrup, $S \subseteq B$ ve $F(B) = F(S)$ olsun.

O zaman $S = \left(S \cup \{F(S)\}\right) \cap B$ olur. S indirgenemez bir sayısal yarıgrup olduğundan $S = B$ eşitliği elde edilir.

$2) \Rightarrow 3)$: B bir sayısal yarıgrup, $S \subseteq B$ ve $F(S) \notin B$ olsun. O halde $B \cup \{F(S)+1, \{F(S)\}+2, \rightarrow\}$ kümesi S 'yi kapsayan ve Frobenius sayısı $F(S)$ olan bir sayısal yarıgruptur. Böylece $S = B \cup \{F(S)+1, \{F(S)\}+2, \rightarrow\}$ olduğundan dolayı $S = B$ eşitliği elde edilir.

$3) \Rightarrow 1)$: S_1 ve S_2, S sayısal yarıgrubu içine alan yani kapsayan iki sayısal yarıgrup olsun. Varsayımdan dolayı $F(S) \in S_1$ ve $F(S) \in S_2$ dir. Böylece $S \neq S_1 \cap S_2$ elde edilir. Dolayısıyla S sayısal yarıgrubu indirgenemez bir sayısal yarıgruptur.

■

Yardımcı Teorem 3.1.6: S sayısal yarıgrup ve

$$h = \max\left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus S : F(S) - x \notin S \text{ } ve \text{ } x \neq \frac{F(S)}{2} \right\}$$

olsun. O halde $S \cup \{h\}$ kümesi de Frobenius sayısı $F(S)$ olan bir sayısal yarıgruptur (Rosales, 1996).

İspat : $S \cup \{h\}$ kümesinin $\mathbb{N}$ içindeki tümleyeni sonlu ve $0 \in S$ dir.

$$H = \left\{ x \in \mathbb{Z} \setminus S : F(S) - x \notin S \text{ } ve \text{ } x \neq \frac{F(S)}{2} \right\}$$

olsun. Eğer $x \in H$ ise $F(S) - x \in H$ olur. Buradan $\frac{F(S)}{2} < h$ olur. $s \in S \setminus \{0\}$ olsun,

eğer $h + s \notin S$ ise h nin maksimalliğinden ve $\frac{F(S)}{2} < h$, $\frac{F(S)}{2} \neq h + s$ olduğundan dolayı $F(S) - (h + s) = a \in S$ elde edilir. O zaman $F(S) - h = a + s \in S$ olur. Bu da yukarıdaki h 'ın tanımıyla çelişir.

Eğer $2h \notin S$ olsa yine h nin maksimalliğinden $F(S) - 2h = a \in S$ olup yukarıda da olduğu gibi $h + a \in S$ olur. Ama, $h + a = F(S) - h \notin S$ olmadığından dolayı çelişkili olduğu görülür.

■

3.1.1. SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLAR

Tanım 3.1.1.1: S bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $F(S)$ olsun. $F(S)$ tek tamsayı ve $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $F(S) - x \in S$ oluyorsa S sayısal yarıgruplarına simetrik sayısal yarıgrup denir.

Örnek 3.1.1.2: $S = < 4, 9, 14 > = \{0, 4, 8, 9, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 20 \rightarrow\}$ olsun.

$F(S) = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \notin S\} = \max\{..., -2, -1, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 15, 19\} = 19$ olup

$\forall x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $F(S) - x \in S$ sağladığından dolayı S simetrik bir sayısal yarıgruptur.

Not 3.1.1.3: S iki üreteçle üretilen bir sayısal yarıgrubun yani $S = < n_1, n_2 >$ nin simetrik sayısal yarıgrup olduğu bilinmektedir (Rosales ve Branco, 2002).

Sonuç 3.1.1.4: S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman

$$S \text{ simetriktir} \Leftrightarrow g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$$

dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 3.1.1.5: $S = <5,7,9,11> = \{0,5,7,9,10,11,12,14,\rightarrow\}$

$G(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1,2,3,4,6,8,13\}$ olup $g(S) = 7$ dir.

$F(S) = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \notin S\} = \{\ldots,-2,-1,1,2,3,4,6,8,13\} = 13$ ve

$g(S) = \frac{F(S)+1}{2} = \frac{13+1}{2} = 7$ olduğundan dolayı S simetrik bir sayısal yarıgruptur.

Sonuç 3.1.1.6: S bir sayısal yarıgrup ve m, S sayısal yarıgrubun bir elemanı olsun. O zaman S simetriktir ancak ve ancak

$$Maximals_{\leq_S} Ap(S,m) = \{F(S)+m\}$$

dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 3.1.1.7: $S = <5,7,11,13> = \{0,5,7,10,\rightarrow\}$ bir sayısal yarıgrup olsun.

$G(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1,2,3,4,6,8,9\}$ olup,

$F(S) = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \notin S\} = \{\ldots,-2,-1,1,2,3,4,6,8,9\} = 9$ bulunur.

$m = 5$ için,

$Ap(S,5) = \{\omega(0) = 0, \omega(1), \omega(2), \omega(3), \omega(4)\}$ için $Ap(S,5) = \{0,7,11,13,14\}$ elde edilir.

O zaman $Maximals_{\leq_S} Ap(S,5) = \{F(S)+5\} = \{14\}$ dir. Benzer şekilde diğer elemanlar için aynen yapılır.

Sonuç 3.1.1.8: S bir sayısal yarıgrup olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktirler.

1. S simetriktir.
2. $PF(S) = \{F(S)\}$.
3. $t(S) = 1$ (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 3.1.1.9: $S = <5,7,9,11> = \{0,5,7,9,10,11,12,14,\rightarrow\}$ bir sayısal yarıgrup olsun.

O zaman $G(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1,2,3,4,6,8,13\}$ olup

$F(S) = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \notin S\} = \{\ldots,-2,-1,1,2,3,4,6,8,13\} = 13$

$PF(S) = \{F(S)\} = \{13\}$ ve tipi $t(S) = 1$ olduğundan dolayı S simetrik bir sayısal yarıgruptur.

3.1.2. PSEUDO-SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLAR

Tanım 3.1.2.1: S bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $F(S)$ olsun. Eğer $F(S)$ çift ve $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ ve $F(S) - x \notin S$ olacak şekilde bir tek $x = \frac{F(S)}{2}$ varsa S sayısal yarıgrubuna pseudo-simetrik sayısal yarıgrup denir.

Örnek 3.1.2.2: $S = <3,5,7> = \{0,3,5,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım.

$$F(S) = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \notin S\} = \{\dots,-2,-1,1,2,4\} = 4$$

$F(S) = 4$ çift olup $F(S) - x \notin S$ ve $x = \frac{F(S)}{2} = \frac{4}{2} = 2$ olduğundan dolayı S bir pseudo-simetrik sayısal yarıgruptur.

Önerme 3.1.2.3: S, pseudo-simetrik sayısal bir yarıgrup ise tipi daima 2 dir. Tersi her zaman doğru değildir.

$$S \ pseudo-simetriktir \Rightarrow t(S) = 2$$

(Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 3.1.2.4:

$$S = <5,13,21> = \{0,5,10,13,15,18,20,21,23,25,26,28,30,31,33,34,35,36,38,\rightarrow\}$$

olsun. S sayısal yarıgrubun pseudo-Frebenius sayısı $PF(S) = \{29,37\}$ dir. Pseudo-Frobenius sayılarının kümesinin eleman sayısı bize tipini veriyor ve dolayısıyla tipi 2 dir. Ancak Frobenius sayısı $F(S) = 37$ yani tek sayı olduğundan dolayı S sayısal yarıgrubu Pseudo-Simetrik bir sayısal yarıgrup değildir.

Sonuç 3.1.2.5: S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman

$$S \text{ pseudo-simetriktir ancak ve ancak } g(S) = \frac{F(S)+2}{2}$$

dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 3.1.2.6: $S = <3,5,7> = \{0,3,5,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım.
$G(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1,2,4\}$ olup $g(S) = 3$ dir.

$$F(S) = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \notin S\} = \{\dots,-2,-1,1,2,4\} = 4$$

$$g(S) = \frac{F(S)+2}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$$

olduğundan dolayı S pseudo-simetrik bir sayısal yarıgruptur.

Yardımcı Teorem 3.1.2.7: S bir pseudo-simetrik sayısal yarıgrup ve m, S sayısal yarıgrubunun pozitif bir elemanı olsun. O zaman

$$\frac{F(S)}{2}+m\in Ap(S,m)$$

dir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

İspat: $\frac{F(S)}{2}\notin S$ ise $\frac{F(S)}{2}+m\in S$ olduğunu göstermek gerekir. Bunun için tersini kabul edelim. Tanım 3.1.2.1 den,

$$F(S)-\left(\frac{F(S)}{2}+m\right)=\frac{F(S)}{2}-m\in S$$

bulunur. Bu da

$$\frac{F(S)}{2}=\frac{F(S)}{2}-m+m\in S$$

olması gerekir ki bu da imkansızdır.

■

Örnek 3.1.2.8: $S=<3,4,5>=\{0,3,\rightarrow\}$ bir sayısal yarıgrup olsun.

$G(S)=\mathbb{N}\setminus S=\{1,2\}$ olup Frobenius sayısını bulalım.

$$F(S)=\max\{x\in\mathbb{Z}:x\notin S\}=\{\ldots,-2,-1,1,2\}=2$$

bulunur. Şimdi S nin Apery kümelerini bulalım:

$m=3\in S$ için

$Ap(S,3)=\{\omega(0)=0,\omega(1),\omega(2)\}$ dan, $Ap(S,3)=\{0,4,5\}$ dir.

Yardımcı Teorem 3.1.2.7 dan $\frac{F(S)}{2}+m=\frac{4}{2}+3=5\in Ap(S,3)$ bulunur.

$m=4\in S$ için,

$Ap(S,4)=\{\omega(0)=0,\omega(1),\omega(2),\omega(3)\}$ dan, $Ap(S,4)=\{0,3,5,6\}$ dir.

Yardımcı Teorem 3.1.2.7 dan $\frac{F(S)}{2}+m=\frac{4}{2}+4=6\in Ap(S,4)$ bulunur.

$m=5\in S$ için,

$Ap(S,5)=\{\omega(0)=0,\omega(1),\omega(2),\omega(3),\omega(4)\}$ dan,

$$Ap(S,5)=\{0,3,4,6,7\}$$

dir.

Yardımcı Teorem 3.1.2.7 den $\dfrac{F(S)}{2}+m=\dfrac{4}{2}+5=7\in Ap(S,5)$ bulunur.

$m=7\in S$ için,

$Ap(S,7)=\{\omega(0)=0,\omega(1),\omega(2),\omega(3),\omega(4),\omega(5),\omega(6)\}$ dan, $Ap(S,7)=\{0,3,4,5,6,8,9\}$ dir.

Yardımcı Teorem 3.1.2.7 den $\dfrac{F(S)}{2}+m=\dfrac{4}{2}+7=9\in Ap(S,7)$ bulunur.

Benzer şekilde diğer elemanlar için aynı işlem yapılabilir.

Sonuç 3.1.2.9: S bir sayısal yarıgrup olsun. Aşağıdaki koşullar birbirine denktirler.

1. S pseudo-simetriktir.
2. $PF(S)=\left\{F(S),\dfrac{F(S)}{2}\right\}$ (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Örnek 3.1.2.10: $S=<5,6,7,9>=\{0,5,6,7,9,10,\rightarrow\}$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunu ele alalım. Bu sayısal yarıgrubunda

$G(S)=\mathbb{N}\setminus S=\{1,2,3,4,8\}$ ve

$F(S)=\max\{x\in\mathbb{Z}:x\notin S\}=\{\ldots,-2,-1,1,2,3,4,8\}=8$ olup

$PF(S)=\{4,8\}=\left\{\dfrac{F(S)}{2},F(S)\right\}$ şeklindedir.

3.2. ÖZEL PSEUDO SİMETRİK SAYISAL YARIGRUP AİLESİ

Bu bölümde tezimize konu olan pseudo-simetrik sayısal yarıgrupların özel bir ailesinden bahsedeceğiz ve bu sayısal yarıgrup ailesi hakkında bazı sonuçlar vereceğiz.

Yardımcı Teorem 3.2.1: Aşağıdaki koşullar birbirine denktirler.

1) S katılığı ve gömme boyutu 3 olan bir pseudo-simetrik sayısal yarıgruptur.
2) $S = < 3, 3+s, 3+2s >$ şeklindedir (Burada s, 3' e tam bölünemiyen pozitif bir tamsayı yani $3 \nmid s$ dir) (Rosales ve ark., 2003; Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009)

Not 3.2.2: $S = < 3, 3+s, 3+2s >$ sayısal yarıgrubun açılımını yaparsak,

$$S = < 3, 3+s, 3+2s > = \{0, 3, 6, ..., 3+s-1, 3+s, 3+s+2, 6+s, .., 3+2s, ...\}$$

olur.

Sonuç 3.2.3: $S = < 3, 3+s, 3+2s >$ ve $s \in \mathbb{Z}^+$, $3 \nmid s$ olmak üzere pseodu-simetrik sayısal yarıgrup ve Frebenius sayısı $F(S)$ olsun. O zaman $F(S) = 2s$ ve $Ap(S,3) = \{0, 3+s, 3+2s\}$ dir (İlhan ve Süer, 2011).

Örnek 3.2.4: $s = 4$ için $S = < 3, 7, 11 > = \{0, 3, 6, 7, 9, \rightarrow\}$ pseodu-simetrik sayısal yarıgrubunu ele alalım. Bu sayısal yarıgrup için $G(S) = \mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 4, 5, 8\}$ olup $F(S) = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \notin S\} = \{..., -2, -1, 1, 2, 4, 5, 8\} = 8$ dir. Dolayısıyla Sonuç 3.2.3 ten $F(S) = 2 \cdot s$ olup $s = 4$ yerine yazılırsa $F(S) = 2 \cdot s = 2 \cdot 4 = 8$ olur.

$$Ap(S,3) = \{\omega(0) = 0, \omega(1), \omega(2)\}$$

$$Ap(S,3) = \{0, 7, 11\}$$

$$0 \equiv \omega(0)(\mathrm{mod}\,3)$$
$$7 \equiv \omega(1)(\mathrm{mod}\,3)$$
$$11 \equiv \omega(2)(\mathrm{mod}\,3)$$

$Ap(S,3) = \{\omega(0) = 0, \omega(1), \omega(2)\} = \{0, 7, 11\}$ dir. Yani Sonuç 3.2.3 ten s yerine 4 yazarsak,

$Ap(S,3) = \{0, 3+s, 3+2s\}$ den

$Ap(S,3) = \{0, 3+4, 3+2.4\} = \{0, 7, 11\}$ dir.

Sonuç 3.2.5: $S=<3,3+s,3+2s>$ ve $s\in\mathbb{Z}^{+}$, $3\nmid s$ olmak üzere pseodu-simetrik sayısal yarıgrup olsun. O halde

$$F(S)=\max\left(Ap(S,3)\right)-3$$

dir (İlhan ve Süer, 2011).

Örnek 3.2.6: $s=8$ için $S=<3,11,19>=\{0,3,6,9,11,12,14,15,17,\rightarrow\}$ pseodu-simetrik sayısal yarıgrubunu ele alalım. Bu yarıgrubumuz için
$G(S)=\mathbb{N}\setminus S=\{1,2,4,5,7,8,10,13,16\}$ olup

$$F(S)=\max\{x\in\mathbb{Z}:x\notin S\}=\{\dots,-2,-1,1,2,4,5,7,8,10,13,16\}=16$$

dir. Daha sonra $Ap(S,3)$ kümesini bulalım:

$$Ap(S,3)=\{\omega(0)=0,\omega(1),\omega(2)\}$$

$$0\equiv\omega(0)(\bmod 3)$$
$$19\equiv\omega(1)(\bmod 3)$$
$$11\equiv\omega(2)(\bmod 3)$$

$$Ap(S,3)=\{0,11,19\}$$

bulunur veya Sonuç 3.2.3 ten s yerine 8 yazarsak

$$Ap(S,3)=\{0,3+s,3+2s\}$$

olup

$$Ap(S,3)=\{0,3+8,3+2\cdot 8\}=\{0,11,19\}$$

bulunur. Sonuç 3.2.5 ten

$$F(S)=\max\left(Ap(S,3)\right)-3=19-3=16$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.7: $s\in\mathbb{Z}^{+}$, $3\nmid s$ olmak üzere $S=<3,3+s,3+2s>$ pseodu-simetrik sayısal yarıgrup olsun. S nin tüm pseudo-Frobenius sayılarının kümesi $PF(S)=\{s,2s\}$ ve S nin tipi 2 dir.

Not 3.2.8: $\max\left(PF(S)\right)=F(S)=2s$ olduğu görülür.

Örnek 3.2.9: $s=5$ için $S=<3,8,13>=\{0,3,6,8,9,11,\rightarrow\}$ pseodu-simetrik sayısal yarıgrubunu ele alalım.

$$G(S)=\mathbb{N}\setminus S=\{1,2,4,5,7,10\}$$

$$S\setminus\{0\}=\{3,6,8,9,11,\rightarrow\}$$

dir. Burada $x=1\in G(S)$ ve $s=3$ için $x+s=1+3=4\notin S\setminus\{0\}$ olduğu için 1 elemanı pseudo-Frobenius sayısı olmaz. Benzer şekilde $x=5$ ve $s=3$ için $x+s=5+3=8\in S$ ve diğer elemanlar için yaparsak 4 elemanı pseudo-Frobenius sayısıdır. Bu şekilde devam edilirse $x=10$ elemanı pseudo-Frobenius sayısıdır. O halde pseudo-Frobenius sayılarının kümesi $PF(S)=\{5,10\}$ olur. Bu da Sonuç 3.2.7 den $s=5$ için $PF(S)=\{s,2s\}=\{5,10\}$ denktir.

4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz bulgulara yer verilecektir. Burada, Bölüm 3.2 de verilen özel pseudo-simetrik sayısal yarıgrup ailesi hakkında temel bilgileri ve bu sayısal yarıgrupta elde ettiğimiz sonuçları vereceğiz. Bu çalışmanın bir bölümü Mardin'de yapılan EJONS International Congress On Mathematic, Engineering and Natural Sciense-III Kongresinde bildiri olarak sunulmuştur.

Teorem 4.1: $s \in \mathbb{Z}^+$ ve $3 \nmid s$ olmak üzere $S = <3, 3+s, 3+2s>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun Betti sayılarının kümesi $Betti(S) = \{6+2s, 6+3s, 6+4s\}$ şeklindedir.

İspat: $s \in \mathbb{Z}^+, 3 \nmid s$ olmak üzere $S = <3, 3+s, 3+2s>$ şeklinde bir pseudo-simetrik sayısal yarıgrup olsun. Her $i \in \{1, 2, 3\}$ için Tanım 2.52 den tanımlanan c_i sayılarını bulalım:

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \min\{k \in Z^+ \,|\, k \cdot 3 \in <3+s, 3+2s>\} \\
&= \min\left\{k \in Z^+ \,\middle|\, k \cdot 3 \in \left\{0, 3+s, 6+2s, \boxed{3 \cdot (2+s)}, 6+4s, \ldots\right\}\right\} \\
&= 2+s
\end{aligned}
$$

olup $\boxed{c_1 = 2+s}$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
c_2 &= \min\{k \in Z^+ \,|\, k \cdot (3+s) \in <3, 3+2s>\} \\
&= \min\left\{k \in Z^+ \,\middle|\, k \cdot (3+s) \in \left\{0, 3, 6, \ldots, 3+2s, \boxed{2 \cdot (3+s)}, 9+2s, \ldots\right\}\right\} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

$\boxed{c_2 = 2}$ elde edilir.

$$
\begin{aligned}
c_3 &= \min\{k \in Z^+ \,|\, k \cdot (3+2s) \in <3, 3+s>\} \\
&= \min\left\{k \in Z^+ \,\middle|\, k \cdot (3+2s) \in \left\{0, 3, 3+s, 6, 6+s, 9, 6+2s, 9+s, \ldots, \boxed{2.(3+2s)}, \ldots\right\}\right\} = 2
\end{aligned}
$$

$\boxed{c_3 = 2}$ bulunur.

($A = <3, 3+s>$ Frobenius sayısı $F(A) = 3+2s$ olduğundan dolayı $k = 2$ dir.)

Bu sayısal yarıgrup pseudo-simetrik olduğundan Önerme 2.46 dan Betti elemanları aşağıdaki gibi bulunur:

Verilen $n_1 = 3,\ n_2 = 3+s,\ n_3 = 3+2s$ ve elde edilen $c_1 = s+2,\ c_2 = 2,\ c_3 = 2$ değerler yardımıyla S nin Betti elemanları aşağıdaki gibi bulunur:

$$\beta_1 = c_1 \cdot n_1 = (2+s)\cdot 3 = 6+3s$$
$$\beta_2 = c_2 \cdot n_2 = 2\cdot(3+s) = 6+2s$$
$$\beta_3 = c_3 \cdot n_3 = 2\cdot(3+2s) = 6+4s$$

Böylece S nin Betti kümesi,

$$Betti(S) = \{6+2s, 6+3s, 6+4s\}$$

şeklindedir.

■

Örnek 4.2: $s=5$ olmak üzere $S = <3,8,13>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun Betti elemanları bulalım.

Çözüm: Tanım 2.52 den Önerme 2.30 dan, c_i sayılarını bulalım:

$$c_1 = \min\left\{k \in Z^+ \,\middle|\, 3\cdot k \in <8,13> = \left\{8,13,16,\boxed{21},...,\right\}\right\} = 7$$

$$c_2 = \min\left\{k \in Z^+ \,|8\cdot k \in <3,13> = \left\{3,6,9,12,13,15,\boxed{16},..,\right\}\right\} = 2$$

$$c_3 = \min\left\{k \in Z^+ \,|13\cdot k \in <3,8> = \left\{3,6,8,9,11,12,14,15,16,17,18,20,21,22,24,25,\boxed{26},...\right\}\right\} = 2$$

$c_1 = s+2 = 5+2 = 7,\ c_2 = 2,\ c_3 = 2$ ve

$n_1 = 3,\ n_2 = 8,\ n_3 = 13$ olmak üzere Önerme 2.46 dan Betti elemanları bulalım.

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 = c_1.n_1 = 7.3 = 21 \\ \beta_2 = c_2.n_2 = 2.8 = 16 \\ \beta_3 = c_3.n_3 = 2.13 = 26 \end{array}\right\} \Rightarrow Betti(S) = \{16,21,26\} \text{ dir.}$$

S nin Betti kümesi $Betti(S) = \{16,21,26\}$. Aynı zamanda Teorem 4.1 yardımıyla $s=5$ alınırsa,

$$s=5 \Rightarrow \beta = \{6+2s, 6+3s, 6+4s\} = \{6+2\cdot 5, 6+3\cdot 5, 6+4\cdot 5\} = \{16,21,26\}$$

Betti kümesi kolay bir şekilde hesap edilebilir.

Teorem 4.3: $s \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $3 \nmid s$ olmak üzere $S = <3, 3+s, 3+2s>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun katener derecesi $c(S) = s+2$ olur.

İspat : $S = <3, 3+s, 3+2s>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun

$$Ap(S,3) = \{\omega(0) = 0, \omega(1), \omega(2)\} = \{0, 3+s, 3+2s\}$$

olup $n = w + n_j$ den $j \in \{2,3\}$

$$w \in \left(Ap(S,3) \setminus \{0\} \right) = \{3+s, 3+2s\}$$

olarak elde edilir. Burada

$n_j = \{3+s, 3+2s\}$ olup

$$n = w + n_j = \left(Ap(S,3) \setminus \{0\} \right) + \{3+s, 3+2s\} = \{3+s, 3+2s\} + \{3+s, 3+2s\}$$

$$n \in \{6+2s, 6+3s, 6+4s\} = Betti(S)$$

bulunur. $c(n) = c(S)$

- $Z(6+2s)$ için

$x_1 \cdot 3 + x_2 \cdot (3+s) + x_3 \cdot (3+2s) = 6+2s$ lineer denklemini çözdüğümüzde (x_1, x_2, x_3) değerleri aşağıdaki gibidir.

$0 \cdot 3 + 2 \cdot (3+s) + 0 \cdot (3+2s) = 6+2s$ olup $(0,2,0)$ $6+2s$ bir çarpanıdır.

$1 \cdot 3 + 0 \cdot (3+s) + 1 \cdot (3+2s) = 6+2s$ olup $(1,0,1)$ $6+2s$ bir çarpanıdır.

$$Z(6+2s) = \{(0,2,0), (1,0,1)\}$$

olarak bulunur.

- $Z(6+3s)$ için,

$x_1 \cdot 3 + x_2 \cdot (3+s) + x_3 \cdot (3+2s) = 6+3s$ lineer denklemini çözdüğümüzde (x_1, x_2, x_3) değerleri aşağıdaki gibidir.

$(s+2) \cdot 3 + 0 \cdot (3+s) + 0 \cdot (3+2s) = 6+3s$ olup $(s+2,0,0)$ $6+3s$ bir çarpanıdır.

$0 \cdot 3 + 1 \cdot (3+s) + 1 \cdot (3+2s) = 6+3s$ olup $(0,1,1)$ $6+3s$ bir çarpanıdır. Dolayısıyla

$$Z(6+3s) = \{(s+2,0,0), (0,1,1)\}$$

olarak elde edilir. Daha sonra

- $Z(6+4s)$ için,

$x_1 \cdot 3 + x_2 \cdot (3+s) + x_3 \cdot (3+2s) = 6+4s$ lineer denklemini çözdüğümüzde (x_1, x_2, x_3) değerleri aşağıdaki gibidir.

$(s+1) \cdot 3 + 1 \cdot (3+s) + 0 \cdot (3+2s) = 6+4s$ olup $(s+1,1,0)$ $6+4s$ bir çarpanıdır.

$0 \cdot 3 + 0 \cdot (3+s) + 2 \cdot (3+2s) = 6+4s$ olup $(0,0,2)$ $6+4s$ bir çarpanıdır.

$$Z(6+4s) = \{(s+1,1,0),(0,0,2)\}$$

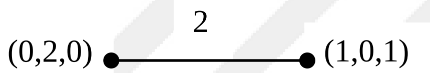
şeklindedir.

Daha sonra bu çarpanların noktalarının en büyük ortak böleni ve arasındaki mesafeyi bulup bunların katener derecelerini bulalım.

$Z(6+2s)$ için,

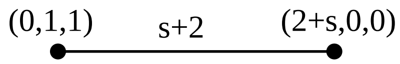
$ebob((0,2,0),(1,0,1)) = (\min(0,1), \min(2,0), \min(0,1)) = (0,0,0)$

$d(x,y) = \max\{|(0,2,0)-(0,0,0)|, |(1,0,1)-(0,0,0)|\} = \max\{|(0,2,0)|, |(1,0,1)|\} = \max\{2,2\} = 2$



$$\boxed{c(6+2s) = 2}$$

$Z(6+3s)$ için,

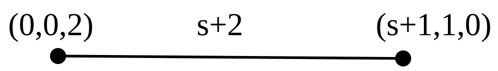


$ebob((0,1,1),(2+s,0,0)) = (\min(0,2+s), \min(1,0), \min(1,0)) = (0,0,0)$

$d(x,y) = \max\{|(0,1,1)-(0,0,0)|, |(2+s,0,0)-(0,0,0)|\} = \max\{|(0,1,1)|, |(2+s,0,0)|\}$
$= \max\{2, 2+s\} = 2+s$

$$\boxed{c(6+3s) = s+2}$$

$Z(6+4s)$ için,



$ebob((0,0,2),(s+1,1,0)) = (\min(0,s+1), \min(0,1), \min(2,0)) = (0,0,0)$

$$d(x,y)=\max\{|(0,0,2)-(0,0,0)|,|(s+1,1,0)-(0,0,0)|\}=\max\{|(0,0,2)|,|(s+1,1,0)|\}$$
$$=\max\{2,2+s\}=2+s$$

$$\boxed{c(6+4s)=s+2}$$

Teorem 2.48 den

$$c(S)=\max\{c(\beta)|\,\beta\in Betti(S)\}$$

olup,

$$c(S)=\max\{c(\beta)|\,\beta\in Betti(S)\}=\max\{2,s+2\}=s+2$$

bulunur. O zaman $c(S)=s+2$ olur.

■

Örnek 4.4: $s=4$ olmak üzere $S=<3,7,11>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun katener derecesini bulalım.

Çözüm: $S=<3,7,11>=\{0,3,6,7,9,\rightarrow\}$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun $n_1=3$ için $Ap(S,3)$ bulalım.

$$Ap(S,3)=\{\omega(0),\omega(1),\omega(2)\}=\{0,7,11\}$$

olup, $n=w+n_j$ den $(j\in\{2,3\})$

$$w\in(Ap(S,3)\setminus\{0\})=\{7,11\}$$

olarak elde edilir. Burada

$n_j=\{7,11\}$ 'nin

$$n=w+n_j=(Ap(S,3)\setminus\{0\})+\{7,11\}=\{7,11\}+\{7,11\}=\{14,18,22\}=Betti(S)$$

Şimdi Betti elemanlarının çarpanlarını bulalım.

$Z(14)$ için

$x_1\cdot 3+x_2\cdot 7+x_3\cdot 11=14$ lineer denklemini çözdüğümüzde (x_1,x_2,x_3) değerleri aşağıdaki gibidir.

$0\cdot 3+2\cdot 7+0\cdot 11=14$ olup $(0,2,0)$ noktası 14 ün bir çarpanıdır.

$1\cdot 3+0\cdot 7+1\cdot 11=14$ olup $(1,0,1)$ noktası 14 ün bir çarpanıdır.

$$(x_1,x_2,x_3)=(0,2,0),$$
$$(x_1,x_2,x_3)=(1,0,1)$$

bulunur. $Z(18)$ için,

$x_1 \cdot 3 + x_2 \cdot 7 + x_3 \cdot 11 = 18$ lineer denklemini çözdüğümüzde (x_1, x_2, x_3) değerleri aşağıdaki gibidir.

$6 \cdot 3 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 11 = 18$ olup $(6,0,0)$ noktası 18 in bir çarpanıdır.

$0 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 11 = 18$ olup $(0,1,1)$ noktası 18 in bir çarpanıdır.

$$(x_1, x_2, x_3) = (6,0,0),$$
$$(x_1, x_2, x_3) = (0,1,1)$$

bulunur. Daha sonra $Z(22)$ için,

$x_1 \cdot 3 + x_2 \cdot 7 + x_3 \cdot 11 = 22$ lineer denklemini çözdüğümüzde (x_1, x_2, x_3) değerleri aşağıdaki gibidir.

$5 \cdot 3 + 1 \cdot 7 + 0 \cdot 11 = 22$ olup $(5,1,0)$ noktası 22 in bir çarpanıdır.

$0 \cdot 3 + 0 \cdot 7 + 2 \cdot 11 = 22$ olup $(0,0,2)$ noktası 22 in bir çarpanıdır.

$$(x_1, x_2, x_3) = (5,1,0),$$
$$(x_1, x_2, x_3) = (0,0,2)$$

bulunur. Şimdi bulduğumuz çarpanları

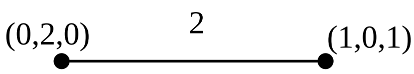
$$Z(14) = \{(0,2,0),(1,0,1)\},$$

$$Z(18) = \{(6,0,0),(0,1,1)\},$$

$$Z(22) = \{(5,1,0),(0,0,2)\}.$$

bulduk. Daha sonra bu çarpanların tek tek en büyük ortak bölenlerini ve aralarındaki mesafeyi bulalım.

$Z(14)$ ün çarpanları için,

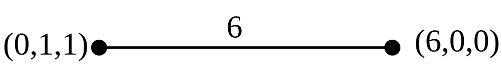


$$ebob((0,2,0),(1,0,1)) = (\min(0,1), \min(2,0), \min(0,1)) = (0,0,0)$$

$$d(x,y) = \max\{|(0,2,0)-(0,0,0)|, |(1,0,1)-(0,0,0)|\} = \max\{|(0,2,0)|, |(1,0,1)|\} = \max\{2,2\} = 2$$

$\boxed{c(14) = 2}$

$Z(18)$ çarpanları için,

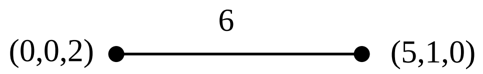


$ebob\left(\left(0,1,1\right),\left(6,0,0\right)\right)=\left(\min\left(0,6\right),\min\left(1,0\right),\min\left(1,0\right)\right)=\left(0,0,0\right)$

$$d(x,y)=\max\left\{\left|\left(0,1,1\right)-\left(0,0,0\right)\right|,\left|\left(6,0,0\right)-\left(0,0,0\right)\right|\right\}=\max\left\{\left|\left(0,1,1\right)\right|,\left|\left(6,0,0\right)\right|\right\}$$
$$=\max\left\{2,6\right\}=6$$

$\boxed{c(18)=6}$ dir.

$Z(22)$ için,



$ebob\left(\left(0,0,2\right),\left(5,1,0\right)\right)=\left(\min\left(0,5\right),\min\left(0,1\right),\min\left(2,0\right)\right)=\left(0,0,0\right)$

$$d(x,y)=\max\left\{\left|\left(0,0,2\right)-\left(0,0,0\right)\right|,\left|\left(5,1,0\right)-\left(0,0,0\right)\right|\right\}=\max\left\{\left|\left(0,0,2\right)\right|,\left|\left(5,1,0\right)\right|\right\}$$
$$=\max\left\{2,6\right\}=6$$

$\boxed{c(22)=6}$

Teorem 2.48 den $c(S)=\max\left\{c(\beta)\middle|\,\beta\in Betti(S)\right\}$

$c(S)=\max\left\{c(\beta)\middle|\,\beta\in Betti(S)\right\}=\max\left\{2,6\right\}=6$

Teorem 4.3 ten $s=4$ alındığında katener derecesi için $c(S)=s+2=4+2=6$ olduğu görülür.

Teorem 4.5: $s\in\mathbb{Z}^{+}$ ve $3\nmid s$ olmak üzere $S=<3,3+s,3+2s>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun çizgeleri aşağıdaki gibidir.

Çizge	Bağlı Bileşenler	Bağıntılar	Çarpanlar
G_{6+2s}	$\{3,3+2s\},\{3+s\}$	$\left(x_1+x_3,2x_2\right)$	$\left(1,0,1\right),\left(0,2,0\right)$
G_{6+3s}	$\{3\},\{3+s,3+2s\}$	$\left(\left(2+s\right)x_1\right),\left(x_2+x_3\right)$	$\left(s+2,0,0\right),\left(0,1,1\right)$
G_{6+4s}	$\{3,3+s\},\{3+2s\}$	$\left(\left(s+1\right)x_1+x_2\right),\left(2x_3\right)$	$\left(s+1,1,0\right),\left(0,0,2\right)$

İspat : $S=<3,3+s,3+2s>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun

$Ap(S,3)=\{\omega(0)=0,\omega(1),\omega(2)\}=\{0,3+s,3+2s\}$ olup $n=w+n_j$ den

$w\in\left(Ap(S,3)\setminus\{0\}\right)=\{3+s,3+2s\}$ olarak elde edilir. Burada $n_j=\{3+s,3+2s\}$ 'nin

$n=w+n_j=\left(Ap(S,3)\setminus\{0\}\right)+\{3+s,3+2s\}=\{3+s,3+2s\}+\{3+s,3+2s\}$

$n\in\{6+2s,6+3s,6+4s\}=Betti(S)$ dir.

Çizge	Bağlı Bileşenler	Bağıntılar	Çarpanlar
G_{6+2s}	$\{3,3+2s\},\{3+s\}$	$(x_1+x_3,2x_2)$	$(1,0,1),(0,2,0)$
G_{6+3s}	$\{3\},\{3+s,3+2s\}$	$((2+s)x_1),(x_2+x_3)$	$(s+2,0,0),(0,1,1)$
G_{6+4s}	$\{3,3+s\},\{3+2s\}$	$((s+1)x_1+x_2),(2x_3)$	$(s+1,1,0),(0,0,2)$

■

Örnek 4.6: $s=1$ olmak üzere, $S=<3,4,5>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun çizgelerini bulalım.

Çözüm : $S=<3,4,5>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun

$Ap(S,3)=\{\omega(0)=0,\omega(1),\omega(2)\}=\{0,4,5\}$ olup $n=w+n_j$ den

$w\in\left(Ap(S,3)\setminus\{0\}\right)=\{4,5\}$ olarak elde edilir. Burada $n_j=\{4,5\}$ 'nin

$n=w+n_j=\left(Ap(S,3)\setminus\{0\}\right)+\{4,5\}=\{4,5\}+\{4,5\}$

$n\in\{8,9,10\}=Betti(S)$ dir.

Graf	Bağlı Bileşenler	Bağıntılar	Çarpanlar
G_8	$\{3,5\},\{4\}$	$(x_1+x_3,2x_2)$	$(1,0,1),(0,2,0)$
G_9	$\{3\},\{4,5\}$	$(3x_1),(x_2+x_3)$	$(3,0,0),(0,1,1)$
G_{10}	$\{3,4\},\{5\}$	$(2x_1+x_2),(2x_3)$	$(2,1,0),(0,0,2)$

Not 4.7: S, $\{n_1,n_2,n_3\}$ ile üretilen sayısal yarıgrup olsun. Eğer $\{c_1\cdot n_1,c_2\cdot n_2,c_3\cdot n_3\}$ kümesinin kardinalitesi 3 ise, o zaman bazı negatif olmayan r_{ij} tamsayıları için aşağıdaki şartlar sağlanır:

$$c_1 \cdot n_1 = r_{12} \cdot n_2 + r_{13} \cdot n_3$$
$$c_2 \cdot n_2 = r_{21} \cdot n_1 + r_{23} \cdot n_3$$
$$c_3 \cdot n_3 = r_{31} \cdot n_1 + r_{32} \cdot n_2$$

Bu durumda, S nin minimal gösterimi,

$$\left\{ \left(c_1 \cdot x_1, r_{12} \cdot x_2 + r_{13} \cdot x_3 \right), \left(c_2 \cdot x_2, r_{21} \cdot x_1 + r_{23} \cdot x_3 \right), \left(c_3 \cdot x_3, r_{31} \cdot x_1 + r_{32} \cdot x_2 \right) \right\}$$

formundadır (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Teorem 4.8: $s \in \mathbb{Z}^+$ ve $3 \nmid s$ olmak üzere $S = < 3, 3+s, 3+2s >$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun minimal gösterimi

$$\left\{ \left((s+2) \cdot x_1, x_2 + x_3 \right), \left(2x_2, x_1 + x_3 \right), \left(2x_3, (s+1) \cdot x_1 + x_2 \right) \right\}$$

veya

$$\left\{ \left(((s+2), 0, 0), (0,1,1) \right), \left((0,2,0), (1,0,1) \right), \left((0,0,2), ((s+1),1,0) \right) \right\}$$

şeklindedir.

İspat: $S = < 3, 3+s, 3+2s >$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunda Teorem 4.1 den c_i leri daha önce bulmuştuk.

$$c_1 = s+2, \; c_2 = 2, \; c_3 = 2$$

dir. Teorem 4.9 dan,

$$r_{21} = r_{23} = r_{32} = r_{12} = r_{13} = 1 \text{ ve } r_{31} = s+1$$

bulduk. Şimdi bunları yerlerine yerleştirdiğimiz zaman S'nin minimal sunumu yukarıdaki nottan dolayı

$$\left\{ \left(c_1 \cdot x_1, r_{12} \cdot x_2 + r_{13} \cdot x_3 \right), \left(c_2 \cdot x_2, r_{21} \cdot x_1 + r_{23} \cdot x_3 \right), \left(c_3 \cdot x_3, r_{31} \cdot x_1 + r_{32} \cdot x_2 \right) \right\}$$

olur. Buradan değerleri yerine yazarsak,

$$\left\{ \left((s+2) \cdot x_1, x_2 + x_3 \right), \left(2x_2, x_1 + x_3 \right), \left(2x_3, (s+1) \cdot x_1 + x_2 \right) \right\}$$

veya

$$\left\{ \left(((s+2), 0, 0), (0,1,1) \right), \left((0,2,0), (1,0,1) \right), \left((0,0,2), ((s+1),1,0) \right) \right\}$$

dir.

■

Örnek 4.9: $s = 2$ olmak üzere $S = < 3, 5, 7 >$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun çizgelerini ve minimal sunumunu bulalım.

Çözüm: $s=2$ için

$$c_1\cdot n_1=r_{12}\cdot n_2+r_{13}\cdot n_3$$
$$c_2\cdot n_2=r_{21}\cdot n_1+r_{23}\cdot n_3$$
$$c_3\cdot n_3=r_{31}\cdot n_1+r_{32}\cdot n_2$$

dir.

$S=<3,3+s,3+2s>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunda Tereorem 4.1 den c_i leri daha önce bulmuştuk.

$$c_1=s+2,\ c_2=2,\ c_3=2$$

Burada $s=2$ yerine yazarsak

$$c_1=s+2=2+2=4,\ c_2=2,\ c_3=2$$

dir. Teorem 4.10 dan

$$r_{21}=r_{23}=r_{32}=r_{12}=r_{13}=1 \text{ ve } r_{31}=s+1$$

bulmuştuk. $s=2$ yerine yazarsak

$$r_{21}=r_{23}=r_{32}=r_{12}=r_{13}=1,\ r_{31}=s+1=2+1=3$$

bulunur. Teorem 4.7 den S 'nin minimal sunumu

$$\{(c_1\cdot x_1,r_{12}\cdot x_2+r_{13}\cdot x_3),(c_2\cdot x_2,r_{21}\cdot x_1+r_{23}\cdot x_3),(c_3\cdot x_3,r_{31}\cdot x_1+r_{32}\cdot x_2)\}$$

olur. Buradan değerleri yerine yazarsak

$$\{(4\cdot x_1,x_2+x_3),(2x_2,x_1+x_3),(2x_3,3\cdot x_1+x_2)\}$$

veya

$$\{((4,0,0),(0,1,1)),((0,2,0),(1,0,1)),((0,0,2),(1,1,0))\}$$

dir.

Teorem 4.10: $s\in\mathbb{Z}^+$ ve $3\nmid s$ olmak üzere $S=<3,3+s,3+2s>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun Delta kümesi $\Delta(S)=\{s\}$ dir.

İspat: $S=<3,3+s,3+2s>$ ve $s\in\mathbb{Z}^+$ ve $3\nmid s$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrup olmak üzere, Tanım 2.52 den c_i leri daha önce bulmuştuk.

$$c_1=\min\{k\in Z^+\mid k\cdot 3\in<3+s,3+2s>\}$$
$$=\min\left\{k\in Z^+\,\middle|\,k\cdot 3\in\{0,3+s,3+2s,6+2s,\boxed{3\cdot(2+s)},\ldots\}\right\}=2+s$$

$$c_2 = \min\{k \in Z^+ \,|\, k\cdot(3+s) \in <3,3+2s>\}$$

$$= \min\left\{k \in Z^+ \,\middle|\, k\cdot(3+s) \in \left\{0,3,6,3+2s,9,\boxed{(3+s)\cdot 2},...\right\}\right\} = 2$$

$$c_3 = \min\{k \in Z^+ \,|\, k\cdot(3+2s) \in <3,3+s>\}$$

$$= \min\left\{k \in Z^+ \,\middle|\, k\cdot(3+2s) \in \left\{0,3,3+s,6,6+s,9,6+2s,9+s,...,\boxed{2.(3+2s)},...\right\}\right\} = 2$$

$A = <3,3+s>$ Frobenius sayısı $F(A) = 3+2s$ olduğundan dolayı $k = 2$ dir.

Buradan $c_1 = 2+s$, $c_2 = 2$, $c_3 = 2$ olur. Tanım 2.53 ten

$$c_i \cdot n_i = r_{ij}\cdot n_j + r_{ik}\cdot n_k$$

den

$$\left.\begin{array}{l} c_1\cdot n_1 = r_{12}\cdot n_2 + r_{13}\cdot n_3 \\ (2+s)\cdot 3 = r_{12}\cdot(3+s) + r_{13}\cdot(3+2s) \\ 6+3s = r_{12}\cdot(3+s) + r_{13}\cdot(3+2s) \end{array}\right\} 6+3s = 3\cdot r_{12} + s\cdot r_{12} + 3\cdot r_{13} + 2s\cdot r_{13}$$

$$6+3s = 3\cdot(r_{12}+r_{13}) + s\cdot(r_{12}+2\cdot r_{13})$$

denkleminden

$$6 = 3\cdot(r_{12}+r_{13}) \Rightarrow r_{12}+r_{13} = 2$$
$$3s = s\cdot(r_{12}+2\cdot r_{13}) \Rightarrow r_{12}+2\cdot r_{13} = 3$$

Birinci dereceden iki bilinmeyenli denklem sisteminin çözümü yapıldığında $r_{12} = 1$ ve $r_{13} = 1$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} c_2\cdot n_2 = r_{21}\cdot n_1 + r_{23}\cdot n_3 \\ 2\cdot(3+s) = r_{21}\cdot 3 + r_{23}\cdot(3+2s) \\ 6+2s = r_{21}\cdot 3 + r_{23}\cdot(3+2s) \end{array}\right\} 6+2s = 3\cdot r_{21} + 3\cdot r_{23} + 2s\cdot r_{23}$$

$$6+2s = 3\cdot(r_{21}+r_{23}) + 2s\cdot r_{23}$$

denkleminden

$$2s = 2s\cdot r_{23} \Rightarrow r_{23} = 1$$
$$6 = 3\cdot(r_{21}+r_{23}) \Rightarrow r_{21}+r_{23} = 2 \Rightarrow r_{21} = 1$$

bulunur. Yani $r_{21} = 1$ ve $r_{23} = 1$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} c_3\cdot n_3 = r_{31}\cdot n_1 + r_{32}\cdot n_2 \\ 2\cdot(3+2s) = r_{31}\cdot 3 + r_{32}\cdot(3+s) \\ 6+4s = r_{31}\cdot 3 + r_{32}\cdot(3+s) \end{array}\right\} 6+4s = 3\cdot r_{31} + 3\cdot r_{32} + s\cdot r_{32}$$

$$6+4s=3\cdot r_{31}+\left(3+s\right)\cdot r_{32}$$

olup, burada $r_{31}=s+1$ ve $r_{32}=1$ yazarsak denklem sağlanmış olur.

Yardımcı Teorem 2.56'dan

$$\delta_i=\left|c_i-r_{ji}-r_{ik}\right|$$

$$\delta_1=\left|c_1-r_{21}-r_{13}\right|=\left|2+s-1-1\right|=\left|s\right|=s$$
$$\delta_2=\left|c_2-r_{12}-r_{23}\right|=\left|2-1-1\right|=\left|0\right|=0$$
$$\delta_3=\left|c_3-r_{31}-r_{32}\right|=\left|2-s-1-1\right|=\left|-s\right|=s$$

Not 2.51 yardımıyla yani $\delta_1=\delta_3$ eşitliğinden dolayı $\Delta(S)=\left\{\delta_1\right\}=\left\{s\right\}$ dir. Dolayısıyla S nin Delta Kümesi $\Delta(S)=\left\{s\right\}$ olur.

■

Örnek 4.11: $s=10$ olmak üzere $S=<3,13,23>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun $\Delta(S)=\left\{10\right\}$ dir. Gerçekten de; Tanım 2.52 den c_i leri bulursak,

$$c_1=\min\left\{k\in Z^+\left|k\cdot 3\in<13,23>\right.\right\}$$
$$=\min\left\{k\in Z^+\left|k\cdot 3\in<\left\{0,13,23,26,\boxed{3.12},...\right\}\right.\right\}=12$$

$$c_2=\min\left\{k\in Z^+\left|k\cdot 13\in<3,23>\right.\right\}$$
$$=\min\left\{k\in Z^+\left|k\cdot 13\in\left\{0,3,6,9,12,15,18,21,23,24,\boxed{2.13}\right\}\right.\right\}=2$$

$$c_3=\min\left\{k\in Z^+\left|k\cdot 23\in<3,13>\right.\right\}$$
$$=\min\left\{k\in Z^+\left|k\cdot 23\in\left\{0,3,6,9,12,13,15,16,18,19,21,22,24,..,\boxed{2.23},..\right\}\right.\right\}=2$$

Olduğundan dolayı

$$c_1=s+2=10+2=12\ ,\ c_2=2\ ,\ c_3=2$$

bulunur. Ayrıca $c_i\cdot n_i=r_{ij}\cdot n_j+r_{ik}\cdot n_k$ den

$$\left.\begin{array}{l} c_1\cdot n_1=r_{12}\cdot n_2+r_{13}\cdot n_3\\ 12.3=r_{12}.13+r_{13}.23\\ 36=r_{12}.13+r_{13}.23\end{array}\right\}$$ denklemin çözümü yapıldığında $r_{12}=1$ ve $r_{13}=1$ olur.

$$\left.\begin{array}{l} c_2\cdot n_2=r_{21}\cdot n_1+r_{23}\cdot n_3\\ 2.13=r_{21}.3+r_{23}.23\\ 26=r_{21}.3+r_{23}.23\end{array}\right\}$$ denklemin çözümü yapıldığında $r_{21}=1$ ve $r_{23}=1$ olur.

$$\left.\begin{aligned} c_3 \cdot n_3 &= r_{31} \cdot n_1 + r_{32} \cdot n_2 \\ 2.23 &= r_{31}.3 + r_{32}.13 \\ 46 &= r_{21}.3 + r_{23}.13 \end{aligned}\right\}$$ denklemin çözümü yapıldığında $r_{31} = 11$ ve $r_{32} = 1$ olur.

Yardımcı Teorem 2.56’dan

$$\delta_i = \left| c_i - r_{ji} - r_{ik} \right|$$

olup,

$$\delta_1 = \left| c_1 - r_{21} - r_{13} \right| = \left| 12 - 1 - 1 \right| = \left| 10 \right| = 10$$
$$\delta_2 = \left| c_2 - r_{12} - r_{23} \right| = \left| 2 - 1 - 1 \right| = \left| 0 \right| = 0$$
$$\delta_3 = \left| c_3 - r_{31} - r_{32} \right| = \left| 2 - 11 - 1 \right| = \left| -10 \right| = 10$$

Not 2.25 ten $\Delta(S) = \{s\} = \{10\}$ olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tezde elde edilen özgün sonuçlar tezin dördüncü bölümünde bulunmaktadır. Bu sonuçlar aşağıda paragraf halinde verilmiştir.

Bu çalışmada $s \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $3 \nmid s$ olmak üzere katılığı ve gömme boyutu 3 olan $S = <3, 3+s, 3+2s>$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubunun Betti sayılarının kümesinin $Betti(S) = \{6+2s, 6+3s, 6+4s\}$ olduğunu, katener derecesinin $c(S) = s+2$ olduğunu, Delta kümesinin $\Delta(S) = \{s\}$ olduğunu ve minimal gösterimi

$$\left\{ \left((s+2)\cdot x_1, x_2 + x_3 \right), \left(2x_2, x_1 + x_3 \right), \left(2x_3, (s+1)\cdot x_1 + x_2 \right) \right\}$$

veya

$$\left\{ \left(\left((s+2), 0, 0 \right), \left(0, 1, 1 \right) \right), \left(\left(0, 2, 0 \right), \left(1, 0, 1 \right) \right), \left(\left(0, 0, 2 \right), \left((s+1), 1, 0 \right) \right) \right\}$$

olduğunu gösterdik ve çizge tablosunu oluşturduk.

5.2 Öneriler

Bir sayısal yarıgrubun Delta kümesi ve katener derecesi son dönemlerde üzerinde çalışılan bir konu olmuş biz de bu çalışmada bir pseudo-simetrik sayısal yarıgrup ailesi üzerinde çalıştık ve bu çalışmada katener derecesi ve Betti sayılarını onun üreteçleri cinsinden ifade ettik ve yarıgrubumuzun çizge ve minimal gösterimi ile ilişkilendirdik. Daha sonraki çalışmalarda başka pseudo-simetrik yarıgrup aileleri için de benzer sonuçlar yapılabilir. Çalışanlar bu yarıgrup üzerinde farklı yorumlara varabilir.

KAYNAKLAR

Assi, A. and Garcia-Sanchez, P.A., 2014, Numerical semigroups and applications [online], Cornell University Library, https://arxiv.org/abs/1411.6093 [Ziyaret Tarihi: 23 Aralık 2017].

Beck, M., 2008, How to Change Coins, M&M's or Chicken nuggets: The Linear Diophantine Problem of Frobenius, Resources For Teaching Discrete Mathematics, Mathematical Association of America, USA, 65-74

Bowles, C., Chapman, S.T., Kaplan N. and Moore, T.A., 2006, Full Elasticity In Atomic Monoids And Integral Domains, Rocky Mountain J. Math. 36, 1437-1455.

Chapman, S.T., Garcia-Sanchez, P.A., Llena, D., 2007, The catenary and tame degree of numerical semigroups [online], https://www.semanticscholar.org [Ziyaret Tarihi: 5 Mart 2018].

Chapman, S.T., Hoyer R., and Kaplan, N., 2009, *Delta Sets of Numerical Monoids are Eventually Periodic, Aequationes Math.* 77, 273-279.

Chapman, S.T., Kaplan, N., Daigle, J., and Hoyer, R., 2010, *Delta Sets of Numerical Monoids Using Non-Minimal Sets of Generators, Comm. Algebra.* 38, 2622-2634.

Chapman, S.T., Garcia-Sanchez, P.A., Llena, D., Malyshev, A., Steinberg, D., 2012, On the Delta set and the Betti elements of a BF-monoid, Arab. J. Math. 1, 53-61.

Chapman, S.T., Kaplan, N., Lemburg, T., Niles, A. and Zlogar, C., 2014, *Shifts of Generators and Delta Sets of Numerical Monoids, Internat. J. Algebra Comp.* 24-5, 655-669.

Chapman, S.T., Garcia-Sanchez, P.A., Tripp, Z., and Viola, C., 2016, Measuring primality in numerical semigroups with embedding dimension three, *Journal of Algebra and Its Applications*, 15(1), 16 pages.

Conaway, R., Williams, M., Horton, J. And Gotti, F., 2015, Shifting Numerical Semigroups (online), Allen Institute for Artifical Intellligence, https://www.semanticscholar.org [Ziyaret Tarihi: 5 Mart 2018].

Fröberg, R., Gottlieb, C. and Haggkvist, R., 1987, On numerical semigroups, *Semigroup Forum*, 35, 63-83.

Garcia-Sanchez, P.A, Llena, D. and Moscariello, A. 2015, Delta sets for numerical semigroups with embedding dimension three, https://arxiv.org/abs/1504.02116v1

Geroldinger, A., 1991, On the arithmetic of certain not integrally closed noetherian integral domains, Comrn. Algebra 19, 685-698

Geroldinger, A. and E Halter-Koch, 2006, Non-unique Factorizations: Algebraic, Combinatorial and Analytic Theory, Pure and Applied Mathematics, vol. 278, Chapman&Hall/CRC.

Howie, J.M. 1976, An introduction to semigroup theory, Academic Press**,** New York.

İlhan, S., 2010, "An Approach to Numerical Semigroups", Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39(3): 411-415

İlhan, S., Süer M., 2011, "On a class of pseudo-symmetric numerical semigroups", *JP Journal of Algebra*, Number Theory and Applications, 20(2), 225-230.

Johnson, S.M., 1960, *A linear Diophantine problem*, Can. J. Math., 12, 390-398.

O'Neil, C., Ponomarenko, V., Tate, R., and Webb, G., 2016, On the set of catenary degrees of finitely generated cancellative commutative monoids [online], Cornell University Library, https://arxiv.org/abs/1506.07587 [Ziyaret Tarihi: 31 Aralık 2017].

Rosales J.C., 1996, An algorithmic method to compute a minimal relation for any numerical semigroup, *Internat. J.Algebra Comput*. 6, 441-455.

Rosales J.C., 1996, On symmetric numerical semigroups, *Journal of Algebra* 182, no. 2, 422-434.

Rosales J.C., M.B. Branco, 2003, Irreducible numerical semigroups, *Pacific Journal of Mathematics,* 209(1), 131-143.

Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., 2009, Numerical Semigroups, 20, *Springer* Developments in Mathematics, New York.

Rosales, J.C. ve Branco, M.B., 2011, "The Frobenius Problem for Numerical Semigroups with Multiplicity Four", Semigroup Forum, 83: 468-478

Rosales, J. C. and Branco, M. B. 2002, Numerical semigroups that can be expressed as an intersection of symmetric numerical semigroups, *Journal of Pure And Applied Algebra*, 171, 3003-314.

Rosales, J.C. and Garcia-Sanchez P.A. 1999, Finitelly generated commutative monoids, *Nova Science Publishers*, 185, New York.

Rosen Kenneth H. 2015, Discrete Mathematics and Applications 641-681.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Özkan ÇELİK
Uyruğu	**:**	T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	Gercüş – 15.04.1979
Telefon	**:**	0505-211 08 25
Faks	**:**	-----
e-mail	**:**	celik.ozkan72@gmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
Lise	:	Batman Endüstri Meslek Lisesi, Batman	1996
Üniversite	:	Dicle Üniversitesi, Diyarbakır	2001
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2001-	Milli Eğitim	Matematik Öğretmeni

UZMANLIK ALANI : Cebir ve Sayılar Teorisi

YABANCI DİLLER : İngilizce

BELİRTMEK İSTEĞİNİZ DİĞER ÖZELLİKLER

YAYINLAR

1. **Çelik, Ö.,** Süer M., 2018, Delta sets of some pseudo-symmetric numerical semigroups, EJONS International Congress On Mathematic, Engineering and Natural Sciences-III, Mardin- Türkiye, 4 (Yüksek lisans tezinde yapılmıştır).