T.C.

BATMAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN M-KATLI BİR ALT SINIFININ FABER POLİNOM KATSAYI TAHMİNLERİ

Adnan CANBULAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK Anabilim Dalı

Temmuz-2019

BATMAN

TEZ KABUL VE ONAYI

Adnan CANBULAT tarafından hazırlanan "Bi-ünivalent Fonksiyonların M-katlı Bir Alt Sınıfının Faber Polinom Katsayı Tahminleri" adlı tez çalışması 08/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ	
Danışman Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR	
Üye Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT	

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Şahnaz TIĞREK
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

Adnan CANBULAT
08 .07.2019

ÖZET

Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN M-KATLI BİR ALT SINIFININ FABER POLİNOM KATSAYI TAHMİNLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Adnan CANBULAT

BATMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2019

$U=\{z\in\mathbb{C}:\ |z|<1\}$ birim diskinde tanımlı bir f fonksiyonu aynı değeri iki defa almıyorsa yani $z_1 \neq z_2$ nokta çiftleri için $f(z_1)\neq f(z_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna **ünivalent (ya da schlict) fonksiyon** denir. Eğer U birim diskinde tanımlı, hem f hem de f^{-1} fonksiyonları ünivalent ise analitik olan bu f fonksiyonuna **bi-ünivalent fonksiyon** denir. Faber polinomları karmaşık düzlemdeki analitik fonksiyonlar için polinom yaklaşımlarının temel bir ilgi alanını oluşturmaktadır. Bu tezde öncelikli amaç olarak, birim diskte tanımlı ve analitik olan m-katlı simetrik, bi-ünivalent fonksiyonlar için yeni bir altsınıf tanımlanacaktır. Ayrıca, Faber polinomu açılımlarını kullanarak bu alt sınıfa ait analitik, m-katlı simetrik, bi-ünivalent fonksiyonların genel ve başlangıç katsayıları için üst sınırlar elde edilecektir.

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyonlar, Bi-Ünivalent Fonksiyonlar, M-Katlı Simetrik Bi-Ünivalent Fonksiyonlar, Faber Polinomları, Katsayı Tahminleri.

2019, 50 sayfa

ABSTRACT

INITIAL FABER POLYNOMIAL COEFFICIENT ESTIMATES
FOR A SUBCLASSES OF M-FOLD SYMMETRIC
AND BI-UNIVALENT FUNCTIONS.

MASTER THESIS

Adnan CANBULAT

UNIVERSTY OF BATMAN
INSTITUE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

A function is said to be univalent (or schlicht) if it never takes the same value twice: $f(z_1) \neq f(z_2)$ if $z_1 \neq z_2$. A function f in the class of analytic functions is said to be bi-univalent in the open unit disc $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ if both f and f^{-1} are univalent in U. The Faber polynomials for analytic functions of the complex plane are of a basic interest of polynomial approximations. The main purpose of this thesis is to introduce a new subclass of bi-univalent functions which are m-fold symmetric analytic functions in the open unit disc. Furthermore, using the Faber polynomial expansion, general and initial upper bounds of coefficients for analytic, m-fold symmetric, bi-univalent functions are obtained in this thesis.

Keywords: Analytic Functions, Bi-univalent functions, M-fold Symmetric Bi-univalent functions , Faber polynomials, Coefficient Estimates

2019, 50 page

ÖNSÖZ

Belli bir yaştan sonra bazı işleri başarmak,bu işlerin sonuna ulaşmak gerçekten zordur. Bu tezde tam anlamıyla bunu yaşadım. Lisans eğitimimin üzerinden 10 yıl geçtikten sonra yüksek lisans eğitimine başladım.

Bu zorlu sürecin her aşamasında bir an desteğini eksiltmeyen sevgili hocam Doç. Dr. F. Müge SAKAR'a sonsuz teşekkürler…

Doç. Dr Bilal ŞEKER ve diğer bölüm hocalarıma ve bu süreci beraber yürüttüğümüz değerli dostum Ertuğrul DOĞAN'a teşekkürlerimi sunuyorum.

Ve tabiki ailem... Her "tezimi bitirmem lazım" dediğimde beni hoş gördüler. "kızım benim de dersim var" dediğimde "tamam baba" dedi. Özellikle Eşim'e ve varlığına teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

KISALTMA VE S İ M G E L E R

$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar Kümesi

$\mathbb{N}_0$: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{R}$:Reel Sayılar Kümesi

$\mathbb{C}$: Karmaşık Sayılar Kümesi

U : $\{ z : |z| < 1 \}$, Birim disk

$k(z)$: $\dfrac{z}{(1-z)^2}$, Koebe Fonksiyonu

$f \prec g$: f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir

A : U birim diskinde tanımlanan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ analitik fonksiyonların sınıfı

S : Birim diskte analitik, ünivalent ve normalleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı

P :Pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı

K :Konveks fonksiyonlar sınıfı

S^* :Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$S^*(\alpha)$: $\alpha -$ mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı

$\mathrm{K}(\alpha)$: $\alpha -$ mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı

$\tilde{\mathrm{S}}(\alpha)$: α -mertebeli güçlü yıldızıl fonksiyonların sınıfını

$\tilde{\mathrm{K}}(\alpha)$: α -mertebeli güçlü konveks fonksiyonların sınıfı

Σ_m :Birim disk içinde tanımlı m-katlı bi-ünivalent fonksiyonların sını

GİRİŞ

Karmaşık analizde fonksiyonların analitiklik özellliklerini inceleyen en önemli dalllarından biri Geometrik fonksiyonlar teorisidir. Bu teorinin başlangıcı 1851 yılında G. Bernhard Riemann'ın kendi doktora tezinde hazırladığı "Riemann dönüşüm teoremidir". Bu tezde Riemann "Her basit bağlantılı D bölgesini $U=\{z:|z|<1\}$ birim diski üzerine birebir olarak resmeden bir tek f analitik fonksiyonunun var olduğunu" ortaya koymuştur. Bu teoremin ilk olarak tam ispatı 1912 yılında Constantin Caratheòdory tarafından yapılmıştır. Aynı yıl Paul Koebe bu teoremi daha da sadeleştirerek $D=D_1\neq\mathbf{C}$ ve $z_0\in D,$ $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ olmak üzere, D bölgesini $U=\{z:|z|<1\}$ birim diskine resmeden analitik ve ünivalent (yalınkat) bir tek f fonksiyonunu var olduğunu ifade etmiştir. Böylece herhangi basit bağlıntılı bir D bölgesi U birim diski ile yer değiştirebilir. Yani çok geniş ve karmaşık olan ünivalent fonksiyonlar teorisinde D bölgesi yerine U birim diskini alabiliriz. Bu birçok problemin çözümünü kolaylaştırmıştır. Daha sonra 1914 yılında Gronwall tarafından alan teoreminini ispatlaması ve 1916 yılında Bieberbach'ın normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar için verdiği katsayı tahmini ile geometrik fonksiyonlar teorisi matematiğin birçok dalında kendisine uygulama alanı bulmuştur. Böylece ünivalent fonksiyonlar teorisi ortaya çıkmıştır.

Genellikle, $\mathrm{U}=\{\, z:|\,z\,|<1\,\}$ birim diskinde ünivalent, analitik ve $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Her $f\in\mathrm{S}$ fonksiyonu

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\,z^n$$

biçiminde bir Taylor-Maclaurin serisi ile ifade edilebilir.

Bieberbach, 1916 yılında normalize şartlarını sağlayan ünivalent bir fonksiyonun katsayıları için $|a_n|\leq n$ tahminini yapmıştır. Daha sonra $n=2$ için bu tahmini kanıtlamıştır.

1923 yılında Löwner parametrik metod olarak adlandırdığı yöntem ile $n=3$ için $|a_3|\leq 3$ olduğunu kanıtlamıştır.

1955 yılında Garabedian ve Schiffer, Grunsky eşitsizliklerini kullanarak $|a_4|\leq 4$ olduğunu kanıtlamıştır.

1968 yılında Pederson $n=6$ ve 1972 yılında Pederson ve Schiffer $n=5$ için Bierbach kestirimini kanıtlamıştır.

1985 yılında Löewner teorisini kullanan L. De-Branges tüm $n=2,3,4...$ için $|a_n|\leq n$ eşitsizliğin doğru olduğunu göstermiştir.

Problemin çözülmesi bu alanda çalışılacak bir şeyin kalmadığı anlamına gelmeyerek aksine yeni çalışma alanları oluşturmuştur. S sınıfı ve alt sınıfları için katsayı tahminleri, büyüme genişleme teoremleri, integral ve diferansiyel operatörleri, subordinasyon, süperordinasyon gibi birçok alanda çalışmalar yapılmıştır. Ünivalent fonksiyonlar ile ilgili yazılmış pek çok kitap da vardır. Bunlardan bazılar; [Alfors, 1973], [Pommerenke,1975], [Conway,1978], [Goodman,1983], [Duren,1983], [Hallenbeck and MacGregor, 1984], [Miller and Mocanu, 2000] dir.

Koebe Dörtte Bir Teoremi'nin bir sonucu olarak her $f \in S$ fonksiyonun bir f^{-1} ters fonksiyona sahip olduğu söylenebilir. Ancak $f \in S$ olmasına rağmen, f^{-1} ters fonksiyonu U birim diskinde ünivalent olmayabilir. O halde, bir $f \in A$ fonksiyonu verildiğinde hem kendisi hem de tersi $U = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde ünivalent ise $f \in A$ fonksiyonuna bi-ünivalent fonksiyon denir. Genellikle bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfı Σ şeklinde gösterilir.

Bi-ünivalent fonksiyonlarda da ünivalent fonksiyonlarda olduğu gibi katsayı tahminleri için birçok araştırma yapılmıştır. Bu sınıfla ilgili ilk çalışma 1967 yılında Lewin tarafından yapılmıştır. Lewin, bu sınıfın a_2 katsayısı için $|a_2| < 1{,}51$ tahminini kanıtlamıştır. Daha sonra D.A. Brannan ve J.G. Clunie Σ sınıfındaki fonksiyonlar için; $|a_2| \leq \sqrt{2}$ olduğunu ispatlamışlardır. 1969 yılında E. Netenyahu $\max|a_2| = \frac{4}{3}$ ve $|a_2| > \frac{4}{3}$ eşitsizliklerini göstermiştir. Bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfındaki $|a_2|$ katsayısı için yapılmış en iyi tahmin 1985 yılında Taha'ya aittir. Bu tahmin $|a_2| \leq 1.485$ olduğudur.

Brannan ve Taha (1986) ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları gibi bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarını da tanımlamışlardır. Bu sınıflara ait fonksiyonların $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için kesin olmayan tahminlerde bulunmuşlardır.

Bununla beraber birçok matematikçi bi-ünivalent fonksiyonlarla ilgili çeşitli alt sınıflar tanımlayarak; Taylor ve Maclaurin açılımındaki $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları ile ilgili kesin olmayan sonuçlar elde etmişlerdir. Özellikle bu konu ile ilgili son dönemde yapılan çalışmlardan bazıları şunlardır; Srivastava et al. 2010, Frasin and Aouf 2011, Magesh and Yamini 2012, Srivastava et al. 2013, Çağlar et al. 2013, Altınkaya and Yalçın 2014, Orhan et al 2015, Srivastava and Bansal 2015, Srivastava et al. 2015, Deniz et al. 2015; Orhan et al. 2016, Bulut et al. 2017, Sakar 2017, Akgül 2017,

Öte taraftan bazı matematikçiler için Taylor açılımını keyfi basit bağlantılı bir bölgede analitik bir fonksiyon için genelleştirmek ilgi çekici bir problem olmuştur. Taylor açılımının birim disk dışında basit bağlantılı bir bölge için genelleştirilmesi üzerine ilk çalışma 1903 yılında Faber tarafından yapılmıştır. Bu çalışmada Faber $g(z)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde göstermiştir.

$$g(z) = cz + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}, \quad (c > 0,\ z \in \Delta) \qquad (1.1).$$

$g(z)$, $\square - \overline{\Omega}$ de tek değerli, birebir ve $\Delta = \{z : |z| > 1\}$ üzerine analitik resmedilebilen bir fonksiyon olsun. Burada g(z), Ω nin dış fonksiyonu olarak adlandırılır. Genellemeyi bozmadan Ω en çok 1 olabilir. Burada c=1 alabiliriz.

Ω veya g(z)'nin Faber polinomları Duren'in 1983 te oluşturduğu fonksiyon bağıntıları ile tanımlanmıştır.

$$\frac{\eta.g'(\eta)}{g(\eta)-z}=\sum_{k=1}^{\infty}\phi_n(w)z^{-n}, \qquad (\eta\in\Delta). \tag{1.2}$$

Eğer $\partial\Omega$ analitik ve $f(z)$ Ω de analitik ise f(z) aşağıdaki seri ile yazılabilir. (Scober 1975)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n.\Phi_n(z) \tag{1.3}$$

Bu seri Faber serisi olarak tanımlanır.

Aşağıdaki integral ile verilen $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ katsayıları F(z) fonksiyonun Faber katsayıları olarak tanımlanır;

$$A_n=\frac{1}{2\pi}\int_{|z|=\rho}F(g(z))z^{-n-1}dz, \qquad \rho<1 \text{ ve } 1\text{'e yakınsar}$$

Faber 1907 yılındaki çalışmasında $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(z)$ serisinin $f(z)$ fonksiyonun Ω kompakt alt kümelerine monoton yakınsadığını ispatlamıştır.

Faber 1920 yılındaki çalışmasında ise $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\Phi_n(z)$ serisinin Ω de analitik $f(z)$ fonksiyonunun en iyi monoton yakınsama olduğunu belirtmiştir. Bundan dolayı Faber açılımı yakınsaklık teorisinde önemlidir.

Ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarında Faber açılımının bu sonuçları kullanılmaktadır.

Biz de bu çalışmamızda daha önce P. Vyas and S. Kant tarafından bi-ünivalent fonksiyonlar için tanımlanan sınıfı, m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonların bir alt sınıfı için yeniden tanımlayarak bu alt sınıfa ait Faber polinomun katsayı tahminlerini araştıracağız.

Tezimizin birinci bölümünü oluşturan giriş bölümünde, tez konusu ile ilgili konular üzerine dünden bugüne yapılmış çalışmalar, tarihi bir seyir içerisinde verilmiştir.

Kuramsal temeller olarak adlandırılan ikinci bölümde, tezimizde kullandığımız bazı tanım,teorem ve örnekler verilmiştir.

Tezimizin üçüncü bölümünü oluşturan materyal ve yöntem bölümünde, bi-ünivalent fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar ile ilgili bazı önemli tanım, teorem ve örnekler sunulmuştur.

Araştırma bulguları olarak adlandırılan dördüncü bölümde ise bi-ünivalent fonksiyonların m-katlı bir alt sınıfını tanımladık ve bu sınıftaki fonksiyonların $|a_n|$ genel katsayıları için Faber polinomu katsayı teknikleri kullanarak bir üst sınır belirlemeye çalıştık. Ayrıca bu fonksiyonların kesin olmayan $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ başlangıç katsayı sınırları elde etmeye çalıştık.

Sonuç ve öneriler olarak adlandırılan beşinci bölümde ise, çalışmamızda elde ettiğimiz bazı önemli sonuçlara verilmiştir. Ayrıca, daha sonra bu konu ile ilgili çalışacak olan araştırmacılara yol gösterici olması açısından bazı önerilerde bulunulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 2.1 (Disk) $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi , $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere,
$D(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r \}$ kümesi merkezi z_0, yarıçapı r olan **açık diski,**
$\bar{D}(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r \}$ kümesi merkezi z_0, yarıçapı r olan **kapalı diski,**
$\partial D(z_0, r) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r \}$ kümesi ise merkezi z_0, yarıçapı r olan **çemberi** belirtir.

Tanım 2.2 (İç Nokta) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ için $D(z_0, r) \subset \mathrm{A}$ olacak biçimde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir **iç noktası** denir. A kümesinin tüm iç noktaların kümesine A kümesinin **içi** denir.

Tanım 2.3 (Açık Küme) Bütün noktaları iç nokta olan kümeye **açık küme**, tümleyeni açık olan kümeye ise **kapalı küme** denir.

Tanım 2.4 (Bağlantılı Küme) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olmak üzere $A_1 = A \cap A_1 \neq \emptyset,\ A_2 = A \cap A_2 \neq \emptyset,\ A = A_1 \cup A_2$ olacak biçimde $\mathbb{C}$ de açık ve ayrık A_1, A_2 kümeleri bulunamıyorsa A kümesine **bağlantılı kümedir** denir. Tersine böyle iki küme varsa A kümesine **bağlantısızdır** denir. Yani bağlantılı olmayan kümeye **bağlantısızdır** denir.

Tanım 2.5 (Eğri) $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir.
Eğer $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise bu eğriye kapalı eğri denir.
Eğer sadece $t_1 = t_2$ için $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa bu eğriye basit eğri ya da Jordan eğrisi denir.
Eğer γ basit eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise bu eğriye kapalı Jordan eğrisi denir

Tanım 2.6 (Bölge) Karmaşık düzlemde boştan farklı açık ve bağlantılı bir kümeye **bölge** adı verilir. Açık ve bağlantılı olduğu için $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi bir bölgedir.

Tanım 2.7 (Basit Bağlantılı Bölge) Karmaşık düzlemdeki bir D bölgesindeki tüm basit kapalı eğrilerin içi tamamen yine D bölgesinde kalıyorsa bu bölgeye **basit bağlantılı bölge** denir. Basit bağlantılı değil ise bu bölgeye **çok bağlantılı bölge** denir.

Tanım 2.8 (Karmaşık Fonksiyon) $A \subset \mathbb{C}$ boş kümeden farklı olmak üzere her bir $z \in \mathrm{A}$ elemanına w karmaşık sayısını karşılık getiren kurala karmaşık fonksiyon denir. $f : \mathrm{A} \to \mathbb{C}$ ile gösterilir ve $w = f(z)$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.9 (Fonksiyonun Limiti) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : \mathrm{A} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. $z_0 \in \mathbb{C}$,A kümesinin bir yığılma noktası ve w_0 karmaşık sayısı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve

$0<|z-z_0|<\delta$ koşulunu sağlayan her $z \in \mathrm{A}$ için $|f(z)-w_0|<\varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta=\delta(z_0,\varepsilon)>0$ sayısı varsa f nin z_0 daki limiti w_0 dır denir. Bu durum $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)=w_0$ ile ifade edilir.

Tanım 2.10 (Süreklilik) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ ve $f:\mathrm{A} \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $z_0 \in \mathrm{A}$ olmak üzere her $\varepsilon>0$ için $|z-z_0|<\delta$ iken $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta(\varepsilon,z_0)>0$ varsa $f(z)$ fonksiyonu bu noktada süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu her nokta için sürekli ise A kümesinde süreklidir denir.

Tanım 2.11 (Diferansiyellenebilirlik) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$, $f:\mathrm{A} \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

limiti varsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında **diferansiyellenebirdir** denir. Bu limit $f'(z_0)$ veya $\dfrac{df}{dz}(z_0)$ şeklinde gösterilir ve bu ifadeye f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi denir.

Tanım 2.12 (Analitik Fonksiyon) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ ve $f:\mathrm{A} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse f ye z_0 noktasında **analitiktir** denir.

Bir f fonksiyonu $\mathrm{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinin her noktasında analitik ise f fonksiyonuna D bölgesinde **analitik fonksiyon** denir.

Diğer bir ifadeyle z_0 noktasının uygun bir ε komşuluğunda f fonksiyonu;

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

oluyorsa, $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında **analitiktir** denir.

Tanımı dikkatlice incelediğimizde bir noktadaki analitiklik ile diferansiyellenebilirliğin aynı olmadığı görülür. Bir noktadaki analitiklik bir komşuluk ile açık bir küme üzerinde tanımlanmış bir özelliktir. Örneğin;

$f(z)=2xy+i(x^2+y^2)$ fonksiyonu $z=i$ noktasında diferansiyellenebildiği halde analitik değildir. Çünkü f fonksiyonunun $z=i$ noktasında bir komşuluğu yoktur. Buna karşılık $f(z)=z^2$ polinomu karmaşık düzlemin her noktasında diferansiyellenebilirdir ve analitiktir.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ fonksiyonu tam fonksiyon olarak adlandırılır. $e^z, \sin z, \cos z$ gibi fonksiyonlar tam fonksiyonlardır.

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ karmaşık fonksiyonu $z=x+iy$ noktasında analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ karmaşık fonksiyonu için f_z ve $f_{\bar{z}}$ kısmi türevleri

$$f_z=\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(f_x-if_y\right)=\frac{1}{2}\left(u_x+iv_x-iu_y+v_y\right)$$

$$f_{\bar{z}}=\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(f_x+if_y\right)=\frac{1}{2}\left(u_x+iv_x+iu_y-v_y\right)$$

şeklindedir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ise $f_{\bar{z}}=0$ ve $f_z=f'(z)$ olur. Tersine eğer bir D bölgesinde $f_{\bar{z}}=0$ veya $f_z=f'(z)$ ise $f(z)$ fonksiyonu bu D bölgesinde analitiktir. Ayrıca

$$|f_z|^2-|f_{\bar{z}}|^2=J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

eşitliği yazılabilir. Cauchy-Riemann denklemlerinin bir sonucu olarak,

$$J_f(z)=J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)=u_x^2+u_y^2=\left|u_x+iu_y\right|^2=\left|f'(z)\right|^2$$

olduğu açıktır.

Teorem 2.13 (Maksimum Modül Teoremi) f, D bölgesinde analitik, sınırında sürekli ve sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyon maksimum modülü değerini bu bölgenin sınırında alır (Duren, 1983). Bu teorem $\frac{1}{f}$ fonksiyonuna uygulanırsa minimum modül değeri elde edilir. Maksimum modül teoreminin önemli sonuçlarından biri bu teoremi $\frac{f(z)}{z}$ fonksiyonuna uyguladığımızda elde ettiğimiz Schwarz yardımcı önermesidir.

Teorem 2.14 (Schwarz Yardımcı Önermesi) f, U birim diskinde $f(0)=0$ ve $\left|f(z)\right|\le 1$ şartlarını sağlayan analitik bir fonksiyon ise $\left|f'(0)\right|\le 1$ ve sağlanır.

Burada, eşitlik hali yalnızca $f(z)=e^{i\theta}z$ $(\theta\in\mathbb{R})$ fonksiyonu için sağlanır.(Ponnusamy ve Silverman, 2006)

Tanım 2.15 (Argüman) Karmaşık düzlemde $z\in\mathbb{C}$ karmaşık sayısı verilsin. Bu sayının belirttiği vektörün pozitif reel eksen ile yaptığı θ açısına z nin **argümenti** denir ve ile gösterilir.

Tanım 2.16 (Konform Dönüşüm)

$D\subset\mathbb{C}$ bölgesinde $f:D\to\mathbb{C}$ sürekli bir dönüşümü olsun. Eğer aralarında α açısı olan ve $z_0\in D$ noktasından geçen düzgün γ_1,γ_2 eğrilerinin görüntü eğrileri $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ de $f(z_0)=w_0$ noktasında aynı büyüklük ve yönde α açısı yapıyorsa f fonksiyonuna

$z_0 \in \mathrm{D}$ noktasında **konform dönüşümdür** denir. Eğer f fonksiyonu bu bölgedeki her noktada konform ise f fonksiyonu D bölgesinde konformdur.
En önemli konform dönüşümlerden bir a, b, c, d karmaşık sabitler olmak üzere

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad ad - bc \neq 0$$

ile verilen Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm genişletilmiş karmaşık düzlemi $(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \infty)$ kendisi üzerine konform olarak resmeder.
Konform dönüşümler ile analitiklik arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teorem oldukça kullanışlıdır.

Teorem 2.17 $f : \mathrm{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu bir $z_0 \in \mathrm{D}$ noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonu, z_0 noktasında konformdur denir.(Duren, 1983)

Tanım 2.18 (Dizi) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $f(n) = z_n$ şeklinde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{C}$ de bir **karmaşık dizi** denir.

Tanım 2.19 (Yakınsaklık) (z_n) dizisi ve z_0 karmaşık sayısı verilsin. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ iken bütün n doğal sayıları için $|z_n - z_0| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa, (z_n) dizisinin limiti z_0 sayısıdır denir.

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$$

biçiminde gösterilir. Belli bir $z_0 \in \mathbb{C}$ limitine sahip olan (z_n) dizisine **yakınsak dizi** denir.

Tanım 2.20 (Seri) (z_n), bir karmaşık dizi olsun. $z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$ ifadesine **karmaşık seri** denir. Bu açılım kısaca $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ile gösterilir. Bu serinin $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ ile tanımlanan (s_n) dizisine karmaşık serinin **kısmi toplamlar dizisi** denir.

Tanım 2.21 (Yakınsak Seri) $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ bir karmaşık seri ve (s_n) de bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun. (s_n) dizisi bir s_0 değerine yakınsıyorsa $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ serisi s_0 sayısına yakınsıyor denir.

Tanım 2.22 (Kuvvet Serisi) z_0 karmaşık sayısı verilsin. $a_0, a_1, \ldots a_n \ldots$ karmaşık sayılar olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + a_n (z - z_0)^n + \ldots$$

ifadesine z_0 merkezli **kuvvet serisi** denir.

Teorem 2.23 (Taylor Teoremi)
eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 merkezli ve r yarıçaplı bir γ çemberinde analitik ise, γ eğrisinin içindeki her z noktasında analitik ise bu noktanın bir komşuluğunda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

şeklinde bir kuvvet serisi açılımı vardır. Bu açılıma $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki Taylor açılımı denir.
Taylor açılımında z_0 yerine 0 yazılırsa Taylor serisinin özel bir hali olan

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$$

Maclaurin serisi elde edilir.

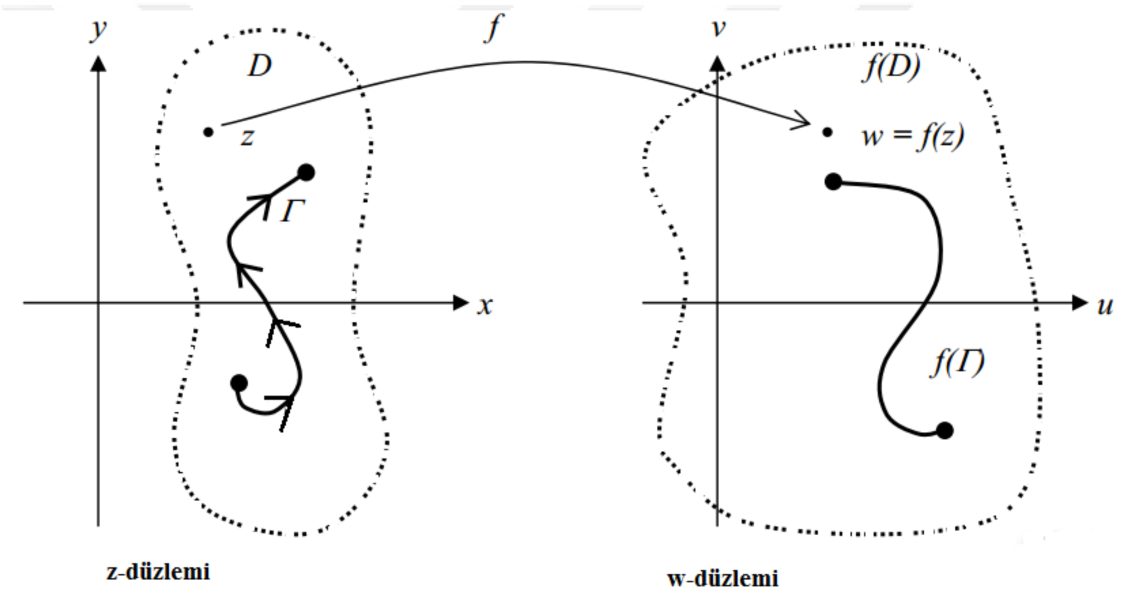
3. MATERYAL VE METOD

Bu bölümde tezin oluşturulmasında kullanılacak tanım ve teoremler verilecektir.

3.1. ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Tanım 3.1.1 (Ünivalent Fonksiyon)

$D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. $f : D \to \mathbb{C}$ fonksiyonunda $z_1, z_2 \in D$ noktaları için $f(z_1) = f(z_2)$ olduğunda $z_1 = z_2$ ise bu f fonksiyonuna D bölgesinde **ünivalent fonksiyon** denir. Bu, fonksiyonunun aynı değeri iki kez alamadığı anlamına gelir. Eğer $w = f(z)$ fonksiyonu D bölgesinde **ünivalent** ise D bölgesini birebir olarak başka bölgeye dönüştürür. Ünivalent bir fonksiyon geometrik olarak $f(D)$ görüntü bölgesinin katlı bir bölge olmaması anlamına gelir.



Şekil 3.1 Ünivalent Fonksiyonların Geometrik Gösterimi

.

Tanım 3.1.2 (Yerel Ünivalent Fonksiyon)

Eğer bir f fonksiyonu $z_0 \in D$ noktasının belli bir komşuluğunda ünivalent ise f ye **yerel ünivalent fonksiyon** adı verilir.

f fonksiyonun analitik olması durumunda yerel ünivalentlik $z \in D$ olmak üzere $f'(z) \neq 0$ koşulu ile aynıdır. (Duren, 1983)

Ancak bu fonksiyonun bu bölgenin tamamında ünivalent olduğu anlamına gelmez.. Örnek olarak $f(z) = z^2$ fonksiyonu $D = \left\{ z : 1 < |z| < 2,\ 0 < \arg z < \dfrac{3\pi}{2} \right\}$ de yerel ünivalenttir ama ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu D bölgesinde analitiktir ve her $z_0 \in D$ için $f'(z) \neq 0$ olduğundan yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{2}{5\sqrt{2}}+i\frac{2}{5\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{2}{5\sqrt{2}}-i\frac{2}{5\sqrt{2}}\right)=i\frac{4}{25}$$

olduğundan f fonksiyonu D bölgesinde ünivalent değildir.

Herhangi bir yerel ünivalent fonksiyonda açılar, ve dönme korunur. Bundan dolayı ünivalent bir fonksiyon ile konform dönüşüm birbirine denk sayılır.

Riemann dönüşüm teoremi ünivalent fonksiyonlar teorisinin en temel ve önemli sonuçlarından biridir.

Tanım 3.1.3 (Riemann Dönüşüm Teoremi)
D, $\mathbb{C}$ karmaşık düzleminde basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in \mathrm{D}$ olsun. Bu bölgeyi U birim diski üzerine birebir ve konform görüntüleyen $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$ şartlarını sağlayan tek bir f fonksiyonu vardır. (Duren, 1983)
Bu teorem, ünivalentlikle alakalı problemlerin büyük çoğunluğunda yerel basit bağlantılı bir bölge üzerinde çalışmak yerine U birim diskinde çalışmanın çok kolay olduğunu söyler.
f fonksiyonu $f(0)=f'(0)-1=0$ şartları ile normalize edildiğinde f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve ünivalent ise

$$g(z)=\frac{f(z)-f(z_0)}{f'(0)}$$

şeklinde oluşturulan $g(z)$ fonksiyonuda f ile aynı özelliklere sahiptir. Böylece yapılan bu normalizasyon sınıfın genelliğini sınırlamaz. (Duren, 1983).

Tanım 3.1.4 (S sınıfı)
U birim diskinde ünivalent ve $f(0)=f'(0)-1=0$ şeklinde normalizasyon koşullarını sağlayan fonksiyonların sınıfına **normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar sınıfı** adı verilir ve S ile gösterilir.

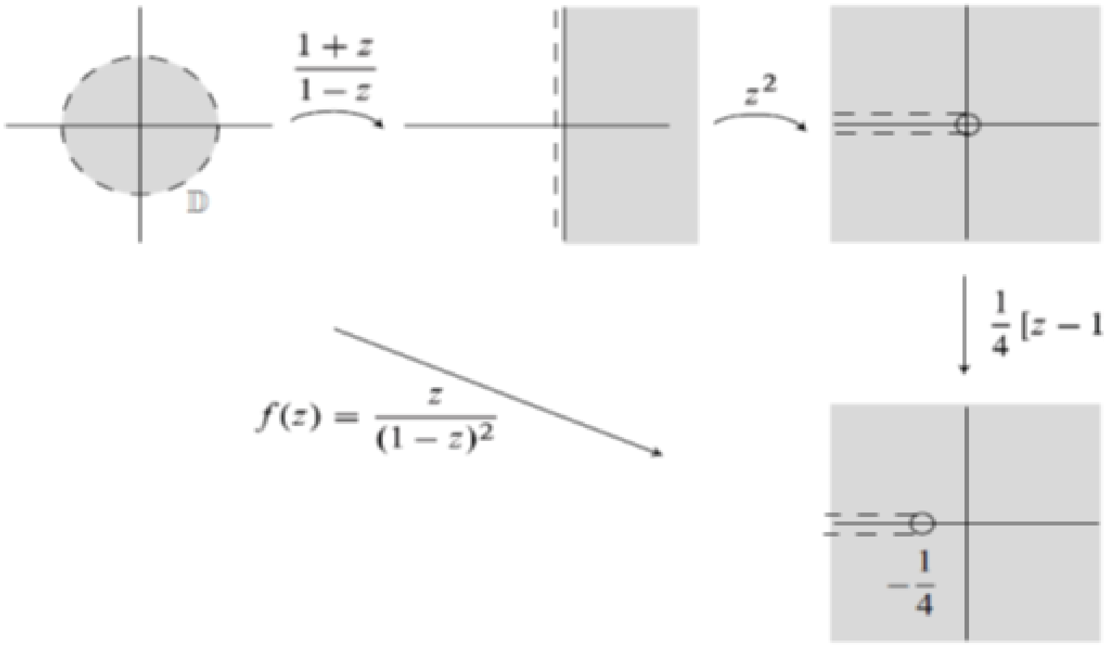
S sınıfının en dikkate değer fonksiyonu aşağıda verilen Koebe fonksiyonudur.

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=z+2z^2+3z^3+\ldots \ , \ (z\in\mathrm{U})$$

Bu fonksiyonu birim diski $-\frac{1}{4}$ ‘den ∞ ‘a kadar çıkarılmış negatif reel eksen hariç tüm karmaşık düzlem üzerine konform olarak görüntüler. (şekil 3.2) Koebe fonksiyonu S sınıfında U birim diskini en geniş bölge üzerine ünivalent görüntüleyen bir fonksiyondur.
Koebe fonksiyonu, ünivalent fonksiyonlar teorisinde birçok problem için ekstremal bir öneme sahiptir ve S sınıfındaki en geniş fonksiyondur.

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{1}{4}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-\frac{1}{4}$$

Şeklinde yazılabilen Koebe fonksiyonu altındaki U birim diskinin görüntüsünü aşağıdaki gibi resmedebiliriz.



Şekil 3.2 U birim diskininin Koebe fonksiyonu altındaki resmi

S sınıfındaki herhangi bir f fonksiyon için a_n katsayı sınırını bulmaya çalışan ilk kişi Bieberbach'dır. Bieberbach $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğini 1946 da kanıtlamıştır.

Teorem 3.1.5 (Bieberbach Teoremi)

$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... \in \mathrm{S}$ ise $|a_2| \leq 2$ dir.

$|a_2| = 2$ hali sadece, Koebe fonksiyonunun bir dönmesi biçiminde olan

$$f(z) = \frac{z}{\left(1+e^{i\beta} z\right)^2}$$

fonksiyonu için sağlanır. (Bieberbach 1916).

İspat

$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + ... \in \mathrm{S}$ iken bu fonksiyonun tersi

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z(1+z+a_2 z + a_3 z^2 + ...)} = \frac{1}{z}\left[1 - \left(a_2 z + a_3 z^2 + ...\right) + \left(a_2 z + a_3 z^2 + ...\right)^2 - ...\right]$$

$$= \frac{1}{z} - a_2 + \left(a_2 - a_3\right) z + ...$$

şeklinde olup ilave bir sabit hariç P sınıfındandır. 1914 de Gronwall ve 1916 da Bierbach tarafından ayrı ayrı ispatlanan "Eğer $f \in P$ ise, $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$ dir " eşitsizliğinden dolayı

$$\left|a_2^2 - a_3\right| \leq 1$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizlikten a_2 yi içeren bir başka eşitsizliği aşağıdaki şekilde çıkarabiliriz. Bunun için de D de ünivalent ve analitik olan

$$h(z) = \left[f(z^2) \right]^{\frac{1}{2}} = z\left(1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + ...\right)^{\frac{1}{2}} = z + \frac{1}{2} a_2 z^3 + ... \qquad (3.1.1)$$

fonksiyonunu gözönüne almak yeterlidir. Bu fonksiyon S sınıfındandır. D de $h(z)$ fonksiyonun ünivalent olduğunu görmek için $|z_1| < 1,\ |z_2| < 1$ olmak üzere $h(z_1) = h(z_2)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $f(z_1^2) = f(z_2^2)$ şeklinde olup f ünivalent olduğundan $z_1^2 = z_2^2$ yazılabilir. Bu halde $z_1 = z_2$ veya $z_1 = -z_2$ dir. Fakat $z_1 = -z_2$ olması $h(z_1) = h(-z_1)$ olmasını gerektirir ki bu da $z_1 \neq 0$ için h sıfırdan farklı ve tek fonksiyon olduğundan mümkün değildir.
(3.1.1) ifadesine göre h(z) nin açılımındaki ikinci ve üçüncü katsayılar

$$a_2^{'} = 0 \quad \text{ve} \quad a_3^{'} = \frac{1}{2} a_2$$

dir. Böylece bunu $\left|a_2^2 - a_3\right| \leq 1$ de kullanırsak

$$\left|0 - \frac{1}{2} a_2\right| \leq 1 \Rightarrow \left|-\frac{1}{2} a_2\right| \Rightarrow \frac{1}{2}|a_2| \leq 1 \Rightarrow |a_2| \leq 2$$

eşitsizliğini buluruz.
Alternatif olarak Σ sınıfına ait olan

$$F(z) = \left[h\left(\frac{1}{z}\right) \right]^{-1} = z - \frac{1}{2} a_2 \frac{1}{z} + ...$$

fonksiyonunu gözönüne alabiliriz. Buna göre Gronwall-Bierberbach eşitsizliğinden

$$\left|-\frac{1}{2} a_2\right| \leq 1 \quad \text{veya} \quad |a_2| \leq 2$$

yazılır. Eşitlik durumunun olması için gerek ve yeter şart $\beta = 2\alpha$ olmak üzere

$$F(z) = \left[h\left(\frac{1}{z}\right) \right]^{-1}$$

ifadesinden

$$h(z) = \frac{z}{\left(1 + e^{i\beta} z^2\right)}$$

fonksiyonu ve $h(z) = \sqrt{f(z^2)}$ eşitliğinden de

$$w = f(z) = \frac{z}{\left(1 + e^{i\beta} z\right)^2} = z - 2e^{i\beta} z^2 + 3e^{2i\beta} z^3 - ... + (-1)^{n-1}.n.e^{(n-1)i\beta} z^n + ...$$

bulunur. Bu fonksiyon Koebe fonksiyonu olarak adlandırılır ve bu Koebe fonksiyonu bütün n ler için $|a_n| = n$ özelliğine sahiptir.

$w = \dfrac{z}{\left(1+e^{i\beta}z\right)^2}$ eşitliğinin her iki yanını $e^{i\beta}$ ile çarpıp $\dfrac{1}{e^{i\beta}w}$ yı hesaplarsak

$$\frac{1}{e^{i\beta}w} = \frac{1}{\dfrac{e^{i\beta}z}{\left(1+e^{i\beta}z\right)^2}} = \frac{\left(1+e^{i\beta}z\right)^2}{e^{i\beta}z} = \frac{1}{e^{i\beta}z} + e^{i\beta}z + 2$$

buluruz. Bu denklemin sağ tarafı $|z| = r < 1$ için $[0,4]$ reel aralığındaki değerleri alır.

Böylece Koebe fonksiyon D birim diskini $t \geq \frac{1}{4}$ olmak üzere $w = te^{-i\beta}$ ışını ile delinmiş w-düzlemine dönüştürür.

Bierbach, S sınıfına ait bir fonksiyonunun a_n katsayılarının $|a_n| \leq n$ eşitsizliğini sağladığına dair bir kestirimde bulundu. Bierbach kestirimi olarak bilinen bu zor problem 1985 yılında L. De Branges tarafından ispatlandı.

Teorem 3.1.6 (Bieberbach Kestirimi)

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ S sınıfında ise her $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ olur (Bieberbach 1916)

Bieberbach'ın bu kestiriminin üzerinde birçok matematikçi araştırma yapmış ve bu kestirimi ispatlamaya çalışmışlardır. Bieberbach 1916 da a_2 katsayısı için $|a_2| \leq 2$ olduğunu kanıtlamıştır. 1923 de Löwner a_3 katsayısı için $|a_3| \leq 3$ olduğunu göstermiştir. Garabedian ve Schiffer 1955 de $|a_4| \leq 4$ eşitsizliğini kanıtlamışlardır. a_5 katsayısı için $|a_5| \leq 5$ olduğunu 1972 de Pederson ve Schiffer göstermiştir. $|a_6| \leq 6$ olduğunu Pederson (1968) ve Ozawa (1969) kanıtlamışlardır. Ve nihayetinde 1985 L. De Branges $|a_n| \leq n$ olduğunu göstererek Bieberbach kestirimini yaklaşık 70 yıl sonra kanıtlamıştır.

Koebe'nin 1907 de bulduğu ve Koebe dörtte bir teoremi diye bilinen ünlü teorem S sınıfındaki ünivalent fonksiyonlar için en önemli temel sonuçtur. Bu sınıftaki her $f \in S$ fonksiyonu $f(0) = 0$ şeklinde bir açık dönüşümdür. Bu dönüşümlerin görüntüsü merkezi orijinde olan bazı diskleri kapsar. Koebe, S sınıfındaki her fonksiyonunun görüntüsünün ρ mutlak sabit olmak üzere ortak bir $|w| < \rho$ diskini kapsadığını göstermiştir. Koebe fonksiyonu $|\rho| \leq \frac{1}{4}$ eşitsizliğini sağlar.

Bieberbach ρ mutlak sabitini $\frac{1}{4}$ alarak Koebe kestirimini oluşturdu.

Teorem 3.1.7 (Koebe Dörtte Bir Teoremi)
S sınıfındaki her fonksiyonun görüntüsü $\left\{ w : |w| < \frac{1}{4} \right\}$ diskini kapsar (Duren, 1983).

İspat
b, $f(D)$ nin bir sınır noktası olsun ve

$$\psi(z) = \frac{bf(z)}{b - f(z)} = z + (a_2 + b^{-1})z^2 + ...$$

fonksiyonunu gözönüne alalım. $\psi = Tof$ olduğundan ψ de S sınıfındadır. Burada T, $T(w) = \frac{bw}{(b-w)}$ şeklinde lineer olmayan bir dönüşümdür.
Bierberbach teoreminden

$$|a_2 + b^{-1}| \leq 2$$

olup,

$$|b^{-1}| \leq 2 + |a_2| \leq 4$$

yazılır. Bundan dolayı $|b| \geq \frac{1}{4}$ olur. Bir sınır noktasının tam olarak başlangıç noktasından $\frac{1}{4}$ birim uzaklığında olabilmesi, bu fonksiyonun Koebe fonksiyonu olması durumunda gösterildi. Böylece $\frac{1}{4}$, herhangi daha büyük bir sabit ile değiştirilmez.

Bieberbach'ın kanıtladığı $|a_2| \leq 2$ eşitsizliği, konform dönüşümlerin geometrisinde daha ileri uygulama alanlarına sahiptir. Bunlardan en önemlileri $f \in$ S üzerinde sırasıyla $|f(z)|$ ve $|f'(z)|$ için sınırları veren büyüme ve bükülme teoremleridir.

Teorem 3.1.8
Her bir $f \in$ S için

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2} \quad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman 1983).

Teorem 3.1.9 (Büyüme Teoremi)
Her bir $f \in$ S ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.1.10 (Bükülme Teoremi)
Her bir $f \in S$ ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği sağlanır. (Goodman 1983).

Bu iki teoremde de eşitlik hali Koebe fonksiyonu ve onun uygun bir rotasyonu için geçerlidir.

Aşağıdaki teoremde bu iki teorem (büyüme ve bükülme teoremi) bir araya getirilmiştir. Bazı işlemlerde bu teorem daha kullanışlıdır.

Teorem 3.1.11
S sınıfındaki her bir f fonksiyonu için

$$\frac{1-r}{(1+r)} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{(1-r)} \qquad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır.

3.2. SUBORDİNASYON İLKESİ

Subordinasyon ilkesi, karmaşık analizde önemli bir role sahiptir. Son yıllarda bu alanda çalışma yapan birçok araştırmacı subordinasyon kavramıyla da ilgilenmişlerdir. Subordinasyon kavramını ilk olarak Lindelöf (1909) kullanılmıştır. Ancak temel bağıntıları Littlewood (1925) ve Rogosinski (1943) bulmuştur.

Tanım 3.2.1 (Schwarz Fonksiyonu) U birim diski içinde analitik ve

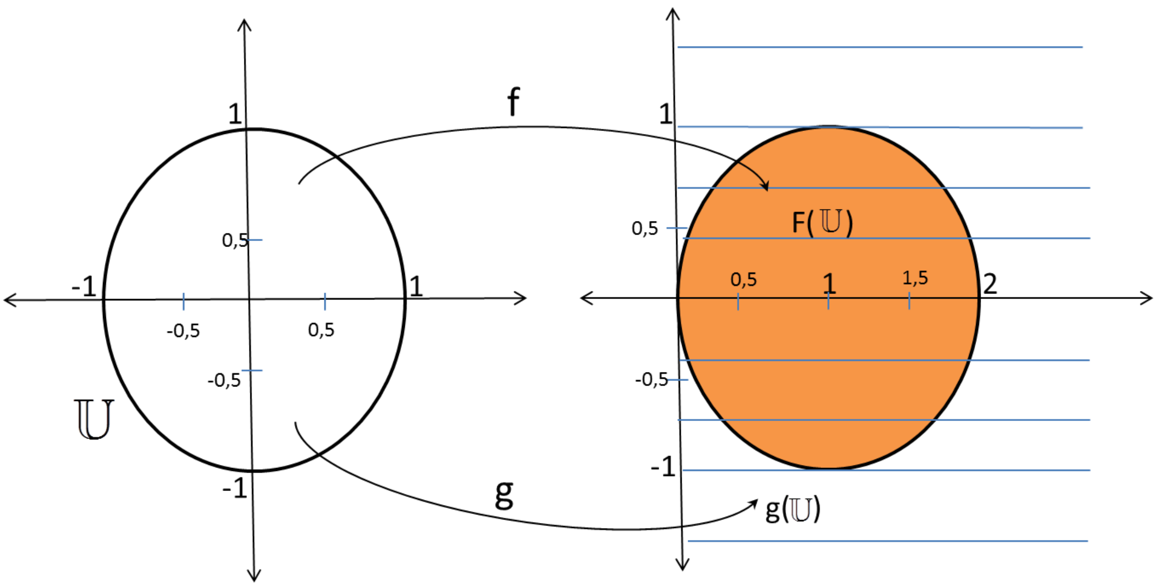
$$w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

biçiminde ifade edilen $w(z)$ fonksiyonu $w(0)=0$ ve $|w(z)|<1$ koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyon **schwarz fonksiyonu** olarak adlandırılır. Schwarz fonksiyonlarının sınıfı Ω ile gösterilir.

Tanım 3.2.2 (Subordinasyon Prensibi) f ve g U birim diskinde analitik fakat ünivalent olması gerekmeyen iki fonksiyon olsun. U birim diskinde

$$f(z) = g(w(z))$$

olacak biçimde $w \in \Omega$ fonksiyonu varsa f **fonksiyonu** g **fonksiyonuna subordinedir** denir ve $f \prec g$ biçiminde gösterilir.



Şekil 3.3 $1+z \prec \dfrac{1+z}{1-z}$

Subordine olunan fonksiyonun ünivalent olması en önemli durumdur. Yani g fonksiyonu U birim diskinde ünivalent ise

$$f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0) \text{ ve } f(\mathrm{U}) \subseteq g(\mathrm{U})$$

önermesi doğru olur. (Duren,1983).

Teorik olarak, subordinasyon kavramının kullanılmasındaki temel amaç özellikleri bilinmeyen bir fonksiyonu araştırabilmektir.

3.3. ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN BAZI ALT SINIFLARI

Tezimizin bu bölümünde ünivalent fonksiyonlara ait bazı önemli alt sınıflarla ilgili tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 3.3.1. (Pozitif Reel Kısımlı Fonksiyonlar Sınıfı)

$$P(z)=1+p_1z+p_2z^2+...+p_nz^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$$

fonksiyonlarının oluşturduğu , U birim diskinde analitik ve tüm z noktaları için $\mathrm{Re}\{p(z)\}>0$ koşulunu yerine getiren tüm fonksiyonların sınıfına **pozitif reel kısımlı fonksiyonlar sınıfı** denir. Bu sınıf P ile sembolize edilir. $P(z)$ fonksiyonunun ünivalent olması şart değildir.

$P(z)=1+z^n$ fonksiyonunu ele alırsak bu fonksiyon herhangi bir $n\geq 0$ tamsayısı için P sınıfındadır ama $n\geq 2$ alırsak bu fonksiyon ünivalent değildir.

$$L_0(z)=\frac{1+z}{1-z}=1+2z+2z^2+...=1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^n$$

biçimindeki Mobius fonksiyonu, P sınıfında, tıpkı S sınıfında Koebe fonksiyonunun sahip olduğu gibi, önemli bir role sahiptir. Mobius fonksiyonu, U birim diskinde hem analitik hem de ünivalenttir. Ayrıca U birim diskini, sağ yarı düzlem üzerine konform olarak dönüştürür. Eğer P sınıfındaki herhangi bir f fonksiyonu ile P fonksiyonu subordine edilirse

$$f\in P\Rightarrow f\prec P$$

sonucu ortaya çıkar.

Teorem 3.3. 2. (Carathedory Teoremi)

$f\in\mathrm{P}$ ve

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n \qquad (z\in\mathrm{U})$$

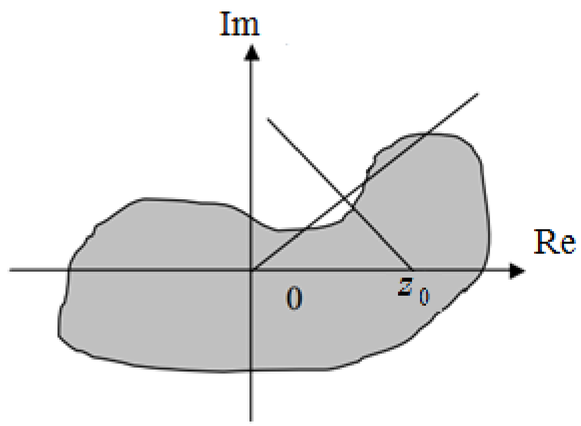
olsun. Bu durumda

$$|p_n|\leq 2 \qquad n=2,3,4...$$

dir (Goodman, 1983).

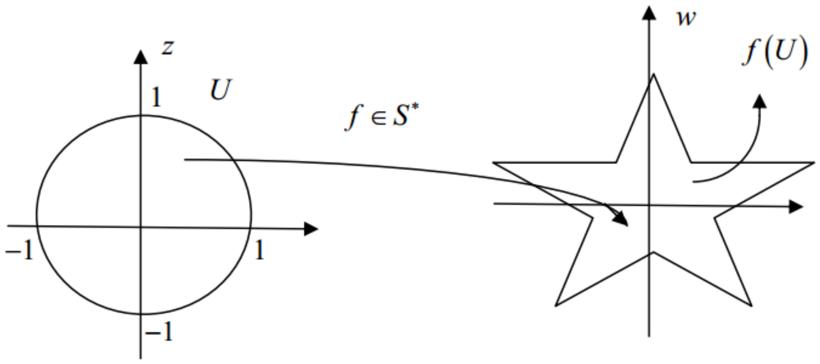
Tanım 3.3. 3. (Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı)

Bir $D\subset\mathbb{C}$ bölgesi ve $z_0\in\mathrm{D}$ noktasını alalım. Eğer z_0 noktasını her $z\in\mathrm{D}$ noktasına birleştiren doğru parçası bütünüyle D içinde kalıyorsa D bölgesine z_0 **noktasına göre yıldızıl bölge denir.** Eğer bu D bölgesindeki tüm noktalar için sağlanıyorsa D **ye yıldızıl bölge** adı verilir.



Şekil 3.4 z_0 Noktasına Göre Yıldızıl Bölge

Özel olarak z_0 noktası orijin seçildiğinde D birim diskini orijine göre yıldızıl bir bölgeye konform olarak dönüştüren fonksiyona **yıldızıl fonksiyon** denir. (Goodman 1983)



Şekil 3.5 Yıldızıl Fonksiyon

Yıldızıl fonksiyonların sınıfını ilk kez Alexander (1915) ve Nevanlinna (1921) tanımlamıştır. Bu sınıf S^* ile gösterilir.

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

biçiminde tanımlanan Koebe fonksiyonu yıldızıldır.

Yıldızıl fonksiyonların analitiklik bakımından tanımı aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 3. 3.4
$f \in A$ ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ olsun. $f(z) \in S^*$ olması için gerek ve yeter koşul $0 < |z| = r < 1$ olacak şekilde

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$$

şartının sağlanmasıdır.

Bu teorem $f(z)$ fonksiyonun yıldızıl bir dönüşüm olduğunu göstermektedir. Ancak bu şart $f(z)$nin ünivalent olduğu anlamına gelmez. Örnek olarak $f(z) = z^2$ fonksiyonu bütün noktaları birim diskten yine birim diske dönüştürdüğü ve teoremdeki eşitsizliği sağladığı halde fonksiyonun türevi $f'(z) = 2z$ fonksiyonu orijinde 0 olduğundan $z = 0$ komşuluğunda ünivalent değildir.

Teorem 3.3.5.
$a_1 \neq 0$ olmak üzere $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + ...$ fonksiyonu $|z| < 1$ de analitik olsun. Eğer D bölgesinde

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

şartı sağlanıyorsa f D bölgeside ünivalenttir. (Gonzales 1992)

Kısaca Yıldızıl fonksiyonların sınıfını

$$\mathrm{S}^* = \left\{ f \in \mathrm{A} : \quad \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0; \;\; z \in \mathrm{U} \right\}$$

biçiminde gösterebiliriz.

Yıldızıl fonksiyonların önemli bir alt sınıfı olan $\alpha-$mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfınını Robertson (1936)

$$\mathrm{S}^* = \left\{ f \in \mathrm{A} : \quad \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha; \;\; z \in \mathrm{U}, 0 \leq \alpha < 1 \right\}.$$

biçiminde tanımlamıştır.

Tanım3. 3.5. (Güçlü Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı)
$f \in \mathrm{A}$ olsun.

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \;\;, \left(z \in \mathrm{U}, 0 \leq \alpha < 1\right)$$

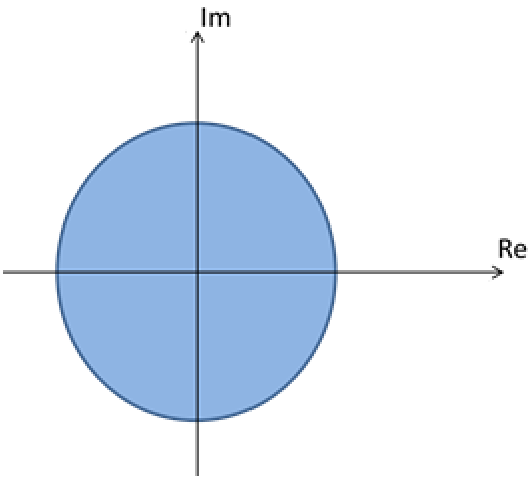
veya bu eşitsizliğe denk olarak

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \alpha\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha} \quad , \left(z \in \mathrm{U} \ ,0 \leq \alpha < 1\right)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna, $\alpha -$ **mertebeden güçlü yıldızıl** (**strongly starlike of order** α **) fonksiyon** denir. Bu fonksiyonların sınıfını $\tilde{\mathrm{S}}(\alpha)$ ile gösterilir. $\alpha = 1$ için $\tilde{\mathrm{S}}(1) = \mathrm{S}^*$ olur. $\tilde{\mathrm{S}}(\alpha)$ sınıfını, Brannan ve Kirwan (1969), ve Stankiewicz (1966) tanımlamış ve bu sınıf ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Tanım 3.3.6. (Konveks Fonksiyonlar Sınıfı)

$\mathbb{C}$ deki bir D bölgesindeki herhangi iki nokta çiftini birleştiren doğru parçası yine bu bölgenin içindeyse D bölgesine **konveks bölge** denir. Başka bir deyişle, $z_1, z_2 \in \mathrm{D}$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in \mathrm{D}$ şartı sağlanıyorsa bu bölge konvekstir denir.



Şekil 3.6 Konveks Bölge

Bir D bölgesinde ünivalent olan $f(z)$ fonksiyonu bu bölgeyi konveks bir bölgeye dönüştürüyorsa bu fonksiyona D de **konveks fonksiyon** denir. Bu sınıf K ile gösterilir.

Örneğin;

$f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ ve $f(z) = \log\left|\dfrac{1+z}{1-z}\right|$ fonksiyonları konvekstir.

Herhangi bir konveks bölge her noktasına göre yıldızıl olduğundan $\mathrm{K} \subset S^*$ yazılır

f, U birim diskinde ünivalent ve $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ normalize şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha \qquad \left(0 \leq \alpha \leq 1\right)$$

şartı sağlanıyorsa $f(z)$ fonksiyonuna $\alpha.$ mertebeden konveks fonksiyon denir. Bu sınıfı ise K_{α} ile gösterilir.

Lemma 3.3.8.
$f(z)$ fonksiyonunu U birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ ve $f'(0)=1$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere $f(z)$ fonksiyonunun K sınıfında olması için gerek ve yeter şart

$$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>0 \qquad z\in \mathrm{U}$$

olmasıdır. (Gonzales 1992)

İlk defa Alexander tarafından 1915 yılında verilen aşağıdaki teorem yıldızıl ve konveks fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir ilişkiyi ifade eder.

Teorem 3.3.9(Alexander Teoremi)
$f(z)\in \mathrm{A}$ ve $z\in \mathrm{U}$ olsun. $f(z)\in \mathrm{K}$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z)\in \mathrm{S}^{*}$ olmasıdır.

İspat

$$\frac{\partial\omega}{\partial\theta}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\theta+\frac{1}{2}\pi+\arg f'(\mathrm{z})\right)=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg zf'(\mathrm{z})\right)$$

yazılır. Sonuç olarak $\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg zf'(\mathrm{z})\right)>0,$ $zf'(z)$ nin yıldızıl olabilmesi için bir şart olduğundan sonuç buradan söylenir.

$$\mathrm{Re}\left\{z\frac{(zf')'}{zf'}\right\}=\mathrm{Re}\left\{z\frac{f'+zf''}{zf''}\right\}=\mathrm{Re}\left\{1+z\frac{f''}{f'}\right\}$$

$$=1+\mathrm{Re}\left\{\frac{zf''}{f'}\right\}>0$$

olduğundan Teorem 3.3.4 gereğince

$$zf'(z)=z+2a_1z^2+...$$

fonksiyonu D de univalenttir.

Ayrıca Strohhacker (1933) tarafından

$$f\in \mathrm{K} \text{ ise } f\in \mathrm{S}^{*}\left(\frac{1}{2}\right)$$

olduğu ispatlanmıştır.

Konveks ve yıldızıl fonksiyonlar ile ilgili örnekler ve bunlar arasındaki ilişki aşağıdaki şekilde verilebilir.

Örnek 3.3.10

$f(z)=\dfrac{z}{1-z}$ fonksiyonu U birim diskini $\operatorname{Re} w>-\dfrac{1}{2}$ konveks bölgesine dönüştürür. Dolayısıyla $f(z)$ de birim diskte konveks bir fonksiyondur.

$$zf'(z)=z\frac{(1-z)-z(-1)}{(1-z)^2}=\frac{z}{(1-z)^2}$$

fonksiyonu ise Koebe fonksiyonu olduğundan birim diskte yıldızıldır.

Her konveks fonksiyon aynı zamanda bir yıldızıl fonksiyondur. Ancak tersi her zaman doğru değildir. Örneğin koebe fonksiyonu, yıldızıl bir fonksiyon olduğu halde konveks değildir.

Konveks, yıldızıl, normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar ve analitik fonksiyonlar arasında

$$\mathrm{K}\subset \mathrm{S}^*\subset \mathrm{S}\subset \mathrm{A}$$

biçiminde bir ilişki vardır.

Tanım 3.3.11 Güçlü Konveks Fonksiyonlar Sınıfı)

$f\in \mathrm{A}$ olsun.

$$\left|\arg\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2}\quad \left(z\in \mathrm{U},\ 0\le\alpha<1\right)$$

ifadesini sağlayan f fonksiyonuna α**-mertebeden güçlü konveks fonksiyon (strongly convex of order** α **) fonksiyon** denir. Bu sınıf $\tilde{\mathrm{K}}(\alpha)$ ile gösterilir. $\alpha=1$ için $\tilde{\mathrm{K}}(1)=\mathrm{K}$ elde edilir.

3.4 Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Bu bölümde bi-ünivalent fonksiyonların tanımı ve bazı alt sınıfları verilmiştir.

Tanım 3.4.1. (Bi-ünivalent Fonksiyonların Sınıfı)

U birim diskinin her $f(z) \in S$ fonksiyonu altındaki görüntüsünün $\frac{1}{4}$ yarıçaplı diski içine aldığını biliyoruz. Bu sebepten dolayı

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

biçiminde yazılan S sınıfındaki her $f(z)$ fonksiyonunun

$$f\left(f^{-1}(z)\right) = z \qquad (z \in \mathrm{U})$$

$$f\left(f^{-1}(w)\right) = w \qquad \left(|w| < r_0(f); r_0(f) \geq \frac{1}{4}\right)$$

özellliklerini sağlayan bir f^{-1} ters fonksiyonu vardır. Buradaki f^{-1} ters fonksiyonu

$$f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + \left(2a_2^2 - a_3\right)w^3 - \left(5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4\right)w^4 + \ldots$$

şeklindedir.

$f \in \mathrm{A}$ için f fonksiyonu ve de ters fonksiyonu olan f^{-1}, U birim diskinde ünivalent ise $f(z)$ fonksiyonuna **bi-ünivalent fonksiyon** denir.

U birim diskinde bi-ünivalent olan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

biçimindeki Taylor-Maclaurin seri açılım ile verilen fonksiyonların sınıfı $\sum$ ile gösterilir. Bu sınıfı ilk kez 1967 de Lewin tanımlamıştır.

$\sum$ sınıfındaki fonksiyonlara

$$\frac{z}{1-z}, \quad -\log(1-z), \quad \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

fonksiyonları örnek olarak verilebilir.

$\sum$ sınıfına ait olmayan fonksiyonlara da

$$z - \frac{z^2}{2} \text{ ve } \frac{z}{1-z^2}$$

fonksiyonlarını örnek olarak verebiliriz. Koebe fonksiyonunun, görüntü bölgesi U birim diskini içermediğinden $\sum$ sınıfına ait değildir.

Bi-ünivalent fonksiyonlarda da ünivalent fonksiyonlarda olduğu gibi katsayılar ile ilgili özellikle de $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları ile ilgili katsayı tahminleri yapılmıştır.

Lewin, $\sum$ sınıfındaki fonksiyonların a_2 katsayısı için $|a_2|<1.51$ olduğunu kanıtlamıştır. Bu sınıfının tanımlandığı ilk zamanlarda katsayıları için $|a_n|\le 1$ $(n\in\mathbb{N}/\{1\})$ iddia ediliyordu. Ancak Brannan ve Clunie, 1979 da $|a_2|\le\sqrt{2}$ olduğunu göstermişlerdir. Netanyahu ise 1969 da $\max|a_2|=\frac{4}{3}$ olduğunu göstermiştir. 1981 yılında yaptıkları çalışmalarında Styer ve Wright $|a_2|>\frac{4}{3}$ eşitsizliğinin $\sum$ sınıfındaki bazı fonksiyonlar için sağlandığını göstermişlerdir. $\sum$ sınıfı için yapılan en iyi tahmin 1985 yılında Taha'nın ispatladığı $|a_2|\le 1.485$ tahminidir.

$\sum$ sınıfındaki fonksiyonların $|a_n|$ $(n\in\mathbb{N}/\{1,2\};\mathbb{N}=\{1,2,3...\})$ katsayıları için katsayı tahminleri ise matematikçiler için açık bir problem olarak hala durmaktadır.

3.4.2. Bi-ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Tezimizin bu kısmında ünivalent fonksiyonlardaki gibi bi-ünivalent fonksiyonlardaki önemli alt sınıflardan bazılarını ele alacağız.
Özellikle son dönemde bu altsınıflardan yola çıkılarak matematikçiler birçok araştırma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları şunlardır; Srivastava et al. 2010, Frasin and Aouf 2011, Magesh and Yamini 2012, Srivastava et al. 2013, Çağlar et al. 2013, Altınkaya and Yalçın 2014, Orhan et al 2015, Srivastava and Bansal 2015, Srivastava et al. 2015, Deniz et al. 2015; Orhan et al. 2016, Bulut et al. 2017., Sakar and Güney 2017, Sakar 2018, Şeker 2018.

Tanım 3.4.3. (α -Mertebeden Güçlü Bi-Yıldızıl Fonksiyonların Sınıfı)
Brannan ve Taha 1986 yılında S sınıfındaki α-mertebeden olan yıldızıl fonksiyonların $S^*(\alpha)$ sınıfı gibi bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfının bir altsınıfı olan α-**mertebeden güçlü bi-yıldızıl fonksiyonlar sınıfı** tanımlamışlardır. Bu sınıf $S^*_\Sigma[\alpha]$ ile gösterilir. Analitik olan Bir fonksiyon $S^*_\Sigma[\alpha]$ sınıfında ise aşağıdaki koşullar sağlanır.

$$f\in\Sigma \text{ ve} \left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \qquad (z\in U;0<\alpha\le 1)$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \qquad (w\in U;0<\alpha\le 1).$$

Burada g fonksiyonu, f^{-1} fonksiyonun U birim diskine genişlemesidir (Brannan and Taha, 1986).

Tanım 3.4.4. (α - Mertebeden Güçlü Bi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı)
$S^*_\Sigma[\alpha]$ sınıfına benzer olarak bi-ünivalent fonksiyonların bir altsınıfı olan α-**mertebeden güçlü bi-konveks fonksiyonların sınıfı** da tanımlanmıştır. Bu sınıf

$K_{\Sigma}[\alpha]$ ile gösterilir. Analitik olan bir fonksiyon $K_{\Sigma}[\alpha]$ sınıfında ise aşağıdaki koşullar sağlanır.

$$f \in \Sigma \text{ ve } \left|\arg\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (z \in \mathrm{U}; 0 < \alpha \leq 1)$$

ve

$$\left|\arg\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (w \in \mathrm{U}; 0 < \alpha \leq 1).$$

3.5. M-KATLI SİMETRİK ANALİTİK FONKSİYONLAR

S sınıfında herhangi f fonksiyonuna karekök dönüşümü uygulandığında ünivalentlik özelliği korunur. (Duren,1983). Başka bir ifadeyle $f \in S$ için $g = \sqrt{f(z^2)}$ alalım. Burada $g \in S$ olur. $f(z) = 0$ değerini yalnızca orijinde sağladığından karekök fonksiyonunun tek değerli olan bir dalını seçebiliriz. Böylece g fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$g = \sqrt{f(z^2)} = z\left\{1 + a_2 z^2 + a_3 z^4 + ...\right\}^{1/2}$$
$$= z + c_3 z^3 + c_5 z^5 + ..., \qquad |z| < 1.$$

g fonksiyonunda $g(-z) = -g(z)$ şartı sağlanır. Buradan g fonksiyonunun analitik, tek ve ünivalent bir fonksiyon oldğunu söyleyebiliriz. (Duren, 1983). Bu fonksiyonları genellersek

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1} z^{mk+1}, \qquad m = 2, 3, ... \tag{3.5.1}$$

şeklinde normalize edilmiş m-katlı simetrik fonksiyonlardan oluşan ve $S^{(m)}$ ile gösterilen sınıfı tanımlayabiliriz. $S^{(m)}$ sınıfı, S nin bir alt sınıfıdır. Buradan herbir $f \in S$ fonksiyonunun $g(z) = \left\{f(z^m)\right\}^{1/m}$ biçimindeki **m.dereceden kök dönüşümünün,** $S^{(m)}$ sınıfında olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Aksine, her $g \in S^{(m)}$ fonksiyonu, m.dereceden kök dönüşümü ile S sınıfındaki bir fonksiyondan oluşur. S sınıfındaki fonksiyonlar tek katlı simetrik fonksiyonlardır.

Srivastava ve ark. (2014) çalışmalarında m-katlı simetrik ünivalent fonksiyonlara paralel olarak m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonları araştırdılar. Bu araştırmalarında her bir $f \in \Sigma$ fonksiyonunun, $\forall\, m \in N$ için m-katlı simetrik bi-ünivalent bir fonksiyon ürettiği sonucuna ulaştılar. Bu önemli sonuçla birlikte çalışmalarında

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

biçiminde verilen normalize edilmiş ünivalent fonksiyonu için $g = f^{-1}$ seri açılımını aşağıdaki biçimde buldular.

$$g(w) = f^{-1}(w) = w - a_{m+1} w^{m+1} + [(m+1)a^2{}_{m+1} - a_{2m+1}]w^{2m+1}$$
$$-[\frac{1}{2}(m+1)(3m+2)a_{m+1}^3 - (3m+2)a_{m+1}a_{2m+1} + a_{3m+1}]w^{3m+1} + ... \tag{3.5.2}$$

$U=\{z:|z|<1\}$ birim diskinde m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonların sınıfını Σ_m ile sembolize edilir. $m=1$ değeri yerine yazıldığında bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı elde edilir. Σ_m sınıfı için aşağıdaki örnek verilebilir.

$$\left(\frac{z^m}{1-z^m}\right)^{\frac{1}{m}}, \quad \left[-\log\left(1-z^m\right)\right]^{\frac{1}{m}} \text{ ve } \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z^m}{1-z^m}\right)\right]^{\frac{1}{m}}.$$

Yukarıdaki fonksiyonların tersleri ise sırasıyla;

$$\left(\frac{w^m}{1+w^m}\right)^{\frac{1}{m}}, \left(\frac{e^{2w^m}-1}{e^{2w^m}+1}\right)^{\frac{1}{m}} \text{ ve } \left[\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+w^m}{1-w^m}\right)\right]^{\frac{1}{m}}$$

biçiminde bulunur. Son yıllarda Σ_m sınıfı ile ilgili yeni alt sınıflar tannımlanmış ve birçok araştırma yapılmıştır. Bunlardan bazıları Srivastava ve ark. 2014- 2016 , Eker 2016, A. Akgül 2017 , Sakar ve Aydoğan 2018,

3.6 FABER POLİNOMLARI

Faber 1903 te basit bağlantılı bir bölgede genelleştirilmiş bir Taylor seri açılımını formülize etmiştir. Basit bağlantılı bir D bölgesinde bir f fonksiyonunun

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z) \tag{3.6.1}$$

$\{a_n\}$ katsayıları Ω ve $f(z)$ tarafından belirlenir. Burada $\Phi_n(z)$ polinomları Ω bölgesinin (3.6.1) eşitliğinde incelenen **Faber Polinomları** olarak adlandırılır.

Faber'in yapmış olduğu bu çalışmadan sonra Faber polinomları matematiğin birçok alanında uygulanmıştır. Bu uygulamalar sayesinde Faber polinomları ile ilgili çok sayıda makale yayınlanmıştır. Bunlara Curtiss 1971, Smirnov and Lebedev 1968, Suetin 1998 in çalışmaları örnek verilebilir. Ayrıca, Süetin'in 1998 yılında yayınlanan kitabı Faber polinomlarının geniş bir bibliyografisini içerir.

Son zamanlarda karmaşık düzlemin bazı bölgeleri için Faber polinomları birçok araştırmanın önemli bir konusu haline gelmiştir. Bunlara örnek olarak, M. X. He ye ait 1994 ve 1995 yılllarındaki dairesel yay ve dairesel çizgilerin polinomları hakkındaki çalışmaları verilebilir. Diğer taraftan Coleman ve Smith in 1987 deki, Gaterman ve ark. 1992 deki dairesel dilimlerin Faber polinomları, Coleman ve Myers in 1995 deki Halka dilimlerinin Faber polinomları çalışmaları örnek olarak verilebilir.

Ayrıca, hypocyclodia bölgelerin Faber polinomları ile ilgili olan birçok çalışma da vardır. Eierman ve Varga nın 1993 teki ve M.X. He ve Saffı'nin 1994 deki çalışmaları buna örnek olarak verilebilir.

Faber polinomlarının tanımını vermeden önce aşağıdaki fonksiyon sınıflarını tanımlamamız gerekir.

Tanım 3.6.1

Bir f fonksiyonu $\Delta_r=\{z:|z|>r\}$ bölgesinde 1 rezüdülü sonsuzda basit bir kutup hariç her noktada analitik ve ünivalent ise $\sum_r$ sınıfındadır denir.

Her $g\in\sum_r$ fonksiyonun görüntüsü Δ_r kompakt bağlantılı bir Ω kümesi üzerine tam olarak resmeder. Burada her $g\in\sum_r$

$$g(z)=z+\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}, \qquad |z|>r. \tag{3.6.2}$$

açılımına sahiptir.

$g(z)=\dfrac{g(z)-w}{z}$, $w\in\mathbb{C}$ olduğunu göz önüne alalım. Bu fonksiyon sonsuz komşuluğunda ve sonsuzda 1'e eşit olan analitik bir fonksiyondur. Bundan dolayı sonsuzda yok sayılmaz. Sonuç olarak $z=1$ noktasında sıfıra eşit olan bir analitik logaritmaya sahiptir.

Buradan seçilen, uygun bir $\left(\frac{-1}{k}\right)$ değeri için aşağıdaki açılımı elde ederiz.

$$\log\left(\frac{g(z)-w}{z}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{k}\right)P_k(w)z^{-k} \qquad (3.6.3)$$

Eğer, (3.6.3) denkleminde her iki tarafın z 'ye göre türevini alırsak

$$\frac{-1}{z}+\frac{g'(z)}{g(z)-w}=\sum_{k=1}^{\infty}P_k(w)z^{-k-1} \qquad (3.6.4)$$

veya

$$\frac{zg'(z)}{g(z)-w}=\sum_{k=1}^{\infty}P_k(w)z^{-k}, \qquad \mathrm{P}_o(z)=1 \qquad (3.6.5)$$

eşitliklerini elde ederiz.

$P_k(w)$ polinomlarının formunu belirlemek için (3.6.2) deki eşitliği (3.6.5) de yerine yazarsak

$$z-\sum_{n=1}^{\infty}nb_z z^{-n}=\left[z+\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^{-n}-w\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty}P_n(w)z^{-n}\right]. \qquad (3.6.6)$$

elde ederiz.

Cauchy çarpımını gerçekleştirip katsayıları karşılaştırırsak

$$P_0(w)=1, \qquad (3.6.7)$$

$$P_1(w)=w-b_0, \qquad (3.6.8)$$

$$P_{n+1}(w)=(w-b_0)P_n(w)-\sum_{k=1}^{n-1}b_kP_{n-k}(w)-(n+1)b_n, \quad n=1,2,... \qquad (3.6.9)$$

eşitliklerini elde ederiz.

Tanım 3.6.2:

$\{P_n(w)\}_{n=0}^{\infty}$ şeklindeki polinomlara g(z) nin (veya Ω) Faber polinomları denir.

(3.6.9) eeşitliğinden $P_n(w)$ nın n. dereceden tekil bir polinom olduğu açıktır.

Aşağıdaki teorem Faber polinomlarının başka bir tanımı olarak düşünülebilir.

Teorem 3.6.3.

$\{P_n(w)\}$; $g(z)\in\sum_r$ nin Faber polinomu olsun. Böylece sonsuz komşuluğunda aşağıdaki eşitliği yazmak mümkündür.

$$\left(g^{-1}(w)\right)^n = P_n(w)+O\left(\frac{1}{w}\right). \qquad (3.6.10)$$

Yani, burada, $P_n(w)$ nın aslında n. dereceden tekil bir polinom olduğu ve $\left(g^{-1}(w)\right)^n$ açılımının da sonsuz yakınlığında temel bir parçası olduğu anlaşılmaktadır.

Örnek: 3.6.4

$g(z)=z+a$ fonksiyonu $|z|=r$ nin dışını merkezi a ve yarıçapı r birim olan dairenin dışına resmeder. Buradan $g(z)$ nin Faber polinomları;

$$P_n(z)=\left(z-a\right)^n, \quad n=0,1,2,\ldots \text{dir.}$$

Merkeze yerleştirilen bir dairenin hem içinin hem de dışının Faber polinomları z nin kuvvetleridir.

Örnek 3.6.5

$f(z)=\dfrac{z}{1-\dfrac{z}{2p}}$ fonksiyonu $|z|<2|p|$ yi orijini içeren en yakın sınırı noktası p olan bir yarı düzleme resmeder. Buradan $f(z)$ nin Faber polinomları

$$P_n(z)=\left[z-\frac{1}{2p}\right]^n, \quad n=0,1,2,\ldots \text{ dir.}$$

4.BÖLÜM

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz bulgulara yer verilecektir. Amacımız, Σ_m sınıfındaki fonksiyonların yeni bir alt sınıfını tanımlamak ve bu altsınıftaki fonksiyonların $|a_n|$ genel katsayısı için Faber polinomu katsayı tekniklerini kullanarak bir üst sınır belirlemektir. Ayrıca bu fonksiyonların kesin olmayan $|a_{m+1}|$ ve $|a_{2m+1}|$ başlangıç katsayı sınırlarını elde ettik. Bu bölümde yapılan çalışma ve elde edilen sonuçlar "Turkish Journal of Mathematics" adlı derginin 43 (2019) sayısında yayınlanmıştır.

4.1 $S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\beta,\zeta)$ SINIFI

Tanım 4.4.1 $n \geq 2$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere $p_n(\beta)$ ünivalent analitik fonksiyonların sınıfı olsun. $z = re^{i\theta}$ ve $p(0) = 1$ için,

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\operatorname{Re} p(z) - \beta}{1-\beta} \right| d\theta \leq k\pi$$

eşitsizliğini sağlayan p_n sınıfı $p(z)$ fonksiyonlarının sınıfını temsil eder.

$\beta = 0$ için $p_n = p_n(0)$ olduğu açıktır. U birim diski içinde, $p(0) = 1$ ve

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - ze^{it}}{1 + ze^{it}} du(t)$$

olur. u sınırlı varyansyonlu gerçel değerli fonksiyon iken aşağıdaki iafedeler sağlanır.

$$\int_0^{2\pi} du(t) = 2\pi \quad \text{ve} \quad \int_0^{2\pi} |du(t)| \leq n \quad , \quad n \geq 2 \quad .$$

$p = p_2$ fonksiyonu U birim diskinde pozitif gerçel kısım ile normalize edilmiş iyi bilinen bir Caratheodory fonksiyonudur. (K.Padmanabhan and R.Parvatham,1975).

Tanım 4.1.2

$0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$, $\zeta \geq 2$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere 3.5.1 formunda verilen bir $f \in \Sigma_m$ fonksiyonu; (3.5.2) formunda verilen $g = f^{-1}$, $\tau \in \mathbb{C} - \{0\}$, ve $z,\ w \in U$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlıyorsa $S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\beta,\zeta)$ sınıfındadır denir

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right]\in P_{\zeta}(\beta) \qquad \text{ve} \qquad (4.1.5)$$

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{wg'(w)+\lambda z^2 g''(w)}{\lambda wg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right]\in P_{\zeta}(\beta). \qquad (4.1.6)$$

Temel sonuçlarımızı elde etmek için aşağıdaki lemmayı kullanacağız.

Lemma 4.1.3

$\phi \in P_{\zeta}(\beta)$ ve $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere

$\phi(z)=1+h_1 z+h_2 z^2+\ldots$; fonksiyonu için

$|h_n| \le \zeta(1-\beta)$; $n \ge 1$ dir. (Goswami ve ark. 2015)

4.2 KATSAYI TAHMİNLERİ

Genel olarak herhangi bir $n \ge 2$ ve herhangi bir $p \in \mathbb{Z}$ için $D_n^l = D_n^l(a_2, a_3, \ldots a_n)$ olmak üzere , K_n^p açılımı aşağıdaki gibidir,(Airault ve Bouali 2006)

$$K_n^p = pa_n + \frac{p(p-1)}{2} + D_n^2 + \frac{p!}{(p-3)!3!}D_n^3 + \ldots + \frac{p!}{(p-n)n!}D_n^n \ .$$

Todorov (1991) , D_n^l ifadesini $D_n^l(a_2, a_3, \ldots a_n) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{l!}{i_1!\ldots i_{n-1}!}a_2^{i_1}\ldots a_n^{i_{n-1}}$

şeklinde tanımlamıştır. Burada $a_1 = 1$ olur ve toplam tüm negatif olmayan ve

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_{n-1} = l$$

$$i_1 + 2i_2 + \ldots + (n-1)i_{n-1} = n-1.$$

koşullarını sağlayan $i_1, \ldots, i_{n-1}$ tamsayı değerleri üzerinden alınmaktadır.

$D_n^n(a_2, a_3, \ldots a_n) = a_2^n$ olduğu açıktır.

Benzer şekilde form (3.5.1) deki bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu Faber polinom kullanılarak aşağıdaki şekilde yazılır;

$$f(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk+1} z^{mk+1} = z + \sum_{k=1}^{\infty} K_k^{\frac{1}{m}}(a_2, a_3, \ldots, a_{k+1}) z^{mk+1} \qquad (4.1.7).$$

$g = f^{-1}$ ters fonksiyonun katsayıları ise aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$g(w)=f^{-1}(w)=w+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{mk+1}K_k^{-(mk+1)}(a_{m+1},a_{2m+1},...,a_{mk+1})w^{mk+1} \quad . \tag{4.1.8}$$

Sonuç olarak (3.5.1) formundaki $f\in S_{\Sigma}\left(\lambda,\tau,\beta,\zeta\right)$ fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right]=1+\sum_{k=1}^{\infty}F_k(a_{m+1},a_{2m+1},...,a_{mk+1})z^{mk}, \tag{4.1.9}$$

Gerekli işlemler yapıldıktan sonra $F_k(a_{m+1},a_{2m+1},...,a_{mk+1})$ fonksiyonunun ilk üç terimi aşağıdaki şekilde bulunur.

$$F_1=\frac{m}{\tau}(\lambda m+1)a_{m+1}$$

$$F_2=\frac{m}{\tau}\left[2(2\lambda m+1)a_{2m+1}-\left(\lambda m+1\right)^2 a_{m+1}^2\right]$$

$$F_3=\frac{m}{\tau}\left[3(3\lambda m+1)a_{3m+1}-3\left(\lambda m+1\right)\left(2m\lambda+1\right)a_{m+1}a_{2m+1}+\left(\lambda m+1\right)^3 a_{m+1}^3\right].$$

İlk teoremimizde $S_{\Sigma_m}\left(\lambda,\tau,\beta,\zeta\right)$ sınıfına ait m-katlı simetrik analitik, bi-univalent fonksiyonların $\left|a_{mk+1}\right|$ katsayıları için bir üst sınır elde edeceğiz.

Teorem 4.2.1
$0\le\lambda\le 1$, $0\le\beta\le 1,$ $\zeta\ge 2,\tau\in\mathbb{C}-\{0\}$ ve $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere (3.5.1) formundaki $f\in S_{\Sigma_m}\left(\lambda,\tau,\beta,\zeta\right)$fonksiyonu verilsin. Eğer $a_{mj+1}=0$ $(1\le j\le k-1)$ ise

$$\left|a_{mk+1}\right|\le\frac{|\tau|\zeta(1-\beta)}{mk(mk\lambda+1)} \qquad (k\ge 2)$$ dir.

İspat :

(3.5.1) formundaki $f\in S_{\Sigma_m}\left(\lambda,\tau,\beta,\zeta\right)$için (4.1.9) daki açılımımız vardır. Ters görüntüsü $g=f^{-1}$ için (3.5.1) ve (4.1.8) denklemlerini dikkate alırsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{wg'(w)+\lambda w^2 g''(w)}{\lambda zg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right]=1+\sum_{k=1}^{\infty}F_k(A_{m+1},A_{2m+1},...,A_{mk+1})w^{mk} \tag{4.1.10}$$

Bununla birlikte

$$A_{mk+1}=\frac{1}{mk+1}K_k^{-(mk+1)}(a_{m+1},a_{2m+1},...,a_{mk+1}) \qquad k\ge 1 \tag{4.1.11}$$

dir.

Öte taraftan $f \in S_{\Sigma}(\lambda,\tau,\beta,\zeta)$ ve $g = f^{-1} \in S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\beta,\zeta)$ fonksiyonları için tanım gereği U da $\Re(p(z)) > 0$ ve $\Re(q(w)) > 0$ olmak üzere pozitif reel kısma sahip; aşağıdaki iki fonksiyon vardır.

$$p(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^{mk} \in A \qquad (4.1.12)$$

ve

$$q(w) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k w^{mk} \in A. \qquad (4.1.13)$$

Böylece sırasıyla

$$1 + \frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1-\lambda) f(z)} - 1\right] = p(z) \qquad (4.1.14)$$

$$\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1-\lambda) f(z)} - 1\right] = \sum_{k=1}^{\infty} K_k^1(p_1, p_2, ... p_k) z^{mk} \qquad (4.1.15)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\tau}\left[\frac{wg'(w) + \lambda w^2 g''(w)}{\lambda w g'(w) + (1-\lambda) g(w)} - 1\right] = q(w)$$

$$\frac{1}{\tau}\left[\frac{wg'(w) + \lambda w^2 g''(w)}{\lambda w g'(w) + (1-\lambda) g(w)} - 1\right] = \sum_{k=1}^{\infty} K_k^1(q_1, q_2, ..., q_k) w^{mk} \qquad (4.1.16)$$

yazılabilir.

Lemma 4.1.3 den $k \geq 1$ için $|p_k| \leq \zeta(1-\beta)$ ve $|q_k| \leq \zeta(1-\beta)$ yazılır.

Herhangi bir $k \geq 1$ için (4.1.10) ve (4.1.12) deki ilgili katsayıların eşitlenmesi ile

$F_k(a_{m+1}, a_{2m+1}, ..., a_{mk+1}) = K_k^1(p_1, p_2, ... p_k)$ elde edilir.

Benzer şekilde (4.1.11) ve (4.1.14) den

$$F_k(A_{m+1}, A_{2m+1}, ..., A_{mk+1}) = K_k^1(q_1, q_2, ... q_k)$$

olduğunu buluruz.

$1 \leq j \leq k-1$ için $a_{mj+1} = 0$ olduğunu unutmayalım.

$$A_{mk+1} = -a_{mk+1}$$

eşitliği vardır ve buradan

$$\frac{1}{\tau} mk(\lambda mk+1)a_{mk+1} = p_k$$

$$\frac{1}{\tau} mk(\lambda mk+1)A_{mk+1} = q_k$$

olur.

Buradan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz;

$$-\frac{1}{\tau} mk(\lambda mk+1)a_{mk+1} = q_k \, .$$

Yukarıdaki eşitliklerin her iki tarafının mutlak değerleri alınırsa;

$$|a_{mk+1}| = \frac{|p_k||\tau|}{|mk(mk\lambda+1)|} = \frac{|q_k||\tau|}{|-mk(mk\lambda+1)|}$$

ifadesi elde edilir.

Lemma 4.1.3 kullanılırsa

$$|a_{mk+1}| \le \frac{\zeta|\tau|(1-\beta)}{mk(mk\lambda+1)} \quad , \qquad k \ge 2$$

sonucunu elde ederiz. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.2

$0 \le \lambda \le 1$, $0 \le \beta \le 1$, $\zeta \ge 2, \tau \in \Box - \{0\}$ ve $m \in \Box$ için, (3.5.1) formundaki $f \in S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\beta,\zeta)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$|a_{m+1}| \le \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\zeta(1-\beta)|\tau|}{m\left[(1+m)(1+2m\lambda)-(1+\lambda m)^2\right]}}, & 0 \le \beta < \dfrac{\zeta\left[-(1+\lambda m)^2+(1+m)(1+2m\lambda)\right]|\tau|-m(1+m\lambda)^2}{\zeta\left[(1+m)(1+2m\lambda)-(1+\lambda m)^2\right]|\tau|} \\ \dfrac{\zeta(1-\beta)|\tau|}{m(1+m\lambda)}, & \dfrac{\zeta\left[-(1+\lambda m)^2+(1+m)(1+2m\lambda)\right]|\tau|-m(1+m\lambda)^2}{\zeta\left[(1+m)(1+2m\lambda)-(1+\lambda m)^2\right]|\tau|} < \beta < 1 \end{cases}$$

(4.1.17)

$$|a_{2m+1}| \le \min\left\{ \frac{\zeta(1-\beta)|\tau|}{2m(1+2m\lambda)} + \frac{\zeta^2(1-\beta)^2(m+1)|\tau|^2}{2m^2(1+m\lambda)^2}, \frac{\zeta(1-\beta)\left\{\left|2(m+1)(1+2m\lambda)-(1+m\lambda)^2\right|+(1+m\lambda)^2\right\}|\tau|}{4m(1+2m\lambda)\left|(m+1)(1+2m\lambda)-(1+m\lambda)^2\right|} \right\}$$

(4.1.18)

$$\left| \frac{\left[2(1+2m\lambda)(m+1)-(1+m\lambda)^2\right]}{2(1+2m\lambda)} a_{m+1}^2 - a_{2m+1} \right| \le \frac{\zeta(1-\beta)|\tau|}{2m(1+2m\lambda)} \; .$$

İspat :

(4.1.15) ve (4.1.16) eşitliklerinde sırasıyla $k=1$ ve $k=2$ yazılırsa aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz;

$$\frac{1}{\tau}m(m\lambda+1)a_{m+1}=p_1 \tag{4.1.19}$$

$$\frac{1}{\tau}m\left[2\left(2m\lambda+1\right)a_{2m+1}-\left(\lambda m+1\right)^2a_{m+1}^2\right]=p_2 \tag{4.1.20}$$

$$-\frac{1}{\tau}m(m\lambda+1)a_{m+1}=q_1 \tag{4.1.21}$$

$$\frac{1}{\tau}\left\{\left[2m\left(2m\lambda+1\right)(m+1)-m\left(\lambda m+1\right)^2\right]a_{m+1}^2-2m(2m\lambda+1)a_{2m+1}\right\}=q_2\ . \tag{4.1.22}$$

(4.1.19) ve (4.1.21) denklemlerinden

$$|a_{m+1}|=\frac{|p_1|\tau}{m(m\lambda+1)}=\frac{|q_1|\tau}{|-m(m\lambda+1)|}\text{ elde edilir.}$$

Lemma 4.1.3'ü uygulayarak

$$|a_{m+1}|\leq\frac{|\tau|(1-\beta)}{m(m\lambda+1)} \tag{4.1.23}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

(4.1.20) ve (4.1.22) eşitlikleri taraf tarafa toplanıp, ifade düzenlendikten sonra aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\frac{2m}{\tau}\left[-(1+m\lambda)^2+(m+1)(1+2m\lambda)\right]a_{m+1}^2=p_2+q_2\ . \tag{4.1.24}$$

Bu eşitlikte Lemma 4.1.3 kullanılarak;

$$|a_{m+1}|\leq\sqrt{\frac{\zeta|\tau|(1-\beta)}{m\left[-\left(1+\lambda m\right)^2+\left(1+m\right)\left(1+2m\lambda\right)\right]}}$$

sonucunu buluruz.

Bu ifadeyi (4.1.23) deki eşitsizlikle birleştirirsek; $|a_{m+1}|$ katsayıları ile ilgili (4.1.17) de iddia edilen tahminleri elde ederiz.

Şimdi de sırasıyla $|a_{m+1}|$ in katsayı sınırlarını bulalım; (4.1.20) deki eşitlikten (4.1.22) deki eşitliği çıkarırsak aşağıdaki iki eşitliği elde ederiz;

$$\frac{1}{\tau}\left\{4m(2m\lambda+1)a_{2m+1}-2m(1+2m\lambda)(m+1)a_{m+1}^2\right\}=p_2-q_2$$

veya

$$a_{2m+1}=\frac{\tau(p_2-q_2)+2m(1+2m\lambda)(m+1)}{4m(2m\lambda+1)}a_{m+1}^2\ . \tag{4.1.25}$$

(4.1.19) daki a_{m+1}^2 değerini (4.1.25) de yerine yazarsak

$$a_{2m+1}=\frac{(m+1)p_1^{\,2}\tau^2}{2m^2(1+m\lambda)^2}+\frac{\tau\left(p_2-q_2\right)}{4m\left(1+2m\lambda\right)}$$

sonucunu elde ederiz.

Lemma 4.1.3 ü kullanarak

$$\left|a_{2m+1}\right|\leq\frac{\zeta(1-\beta)\tau}{2m(1+2m\lambda)}+\frac{\zeta^2(1-\beta)^2(m+1)\left|\tau\right|^2}{2m^2(1+m\lambda)^2} \tag{4.1.26}$$

sonucunu buluruz.

Diğer taraftan a_{m+1}^2 in (4.1.24) eşitliğindeki değerini (4.1.25) deki eşitlikte yerine yazarsak;

$$a_{2m+1}=\frac{\left(m+1\right)\left(p_2+q_2\right)\tau}{4m\left[\left(m+1\right)\left(1+2m\lambda\right)-\left(1+m\lambda\right)^2\right]}+\frac{\left(p_2-q_2\right)\tau}{4m\left(1+2m\lambda\right)}$$

bulunur. Lemma 4.1.3 ü kullanıp bazı düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$\left|a_{2m+1}\right|\leq\frac{\zeta\left|\tau\right|(1-\beta)}{2m(2m\lambda+1)}+\frac{\left|\tau\right|\zeta(1-\beta)(1+m)}{2m\left|\left[-(1+2m\lambda)^2+(m+1)(1+2m\lambda)\right]\right|} \tag{4.1.27}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Buradan da 4.1.22 eşitliğinde Lemma 4.1.3 ü kullanırsak

$$\left|\frac{\left[2(1+2m\lambda)(m+1)-(1+m\lambda)^2\right]a_{m+1}^2}{2(1+2m\lambda)}-a_{2m+1}\right|\leq\frac{\zeta(1-\beta)\left|\tau\right|}{2m(1+2m\lambda)} \tag{4.1.28}$$

olduğunu buluruz. Böylece Teorem 4.2.3 kanıtlanmış olur.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmamızda, m-katlı simetrik bi-ünivalent fonksiyonların $S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\beta,\zeta)$ sınıfını tanımlayarak, bu fonksiyonlara ait Faber polinomların katsayıları için üst sınırlar elde ettik. Elde ettiğimiz sonuçları daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırdığımızda parametrelerin seçilen uygun değerleri için daha önce yapılan bazı çalışmanın genellemesini elde etmiş olduk. Bu bölümde daha önce çalışılmış olan bazı çalışmaların sonuçlarını vererek, bundan sonra bu alanda çalışacak olan araştırmacılara yol gösterici bazı öneriler sunmuş olacağız.

Bu çalışmamızda $0 \le \lambda \le 1$, $0 \le \beta \le 1,\ \zeta \ge 2$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere (3.5.1) formunda verilen bir $f \in \Sigma_m$ fonksiyonu, (3.5.2) formunda verilen $g = f^{-1}$ fonksiyonu ve $\tau \in \mathbb{C} - \{0\}$, $z,\ w \in U$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}-1\right] \in P_\zeta(\beta)$$
$$1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{wg'(w)+\lambda z^2 g''(w)}{\lambda wg'(w)+(1-\lambda)g(w)}-1\right] \in P_\zeta(\beta),$$

$S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\beta,\zeta)$ sınıfına ait elde ettiğimiz Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 deki sonuçlar birçok çalışmanın genellemesidir. Bu genellemelerden bazılarının sonuçları aşağıda verilmiştir.

Örneğin $\tau = 1,\ \zeta = 2,\ \lambda = 0$ değerleri Tanım 4.1.2 ve Teorem 4.2.2 de yerine yazılırsa $S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\beta,\zeta)$ sınıfı $S_{\Sigma_m}^{\beta}$ sınıfına indirgenir ve aşağıdaki tanım ve sonuçlara ulaşılır.

Tanım 5.1.1 $0 < \beta \le 1$ olmak üzere (3.5.1) şeklinde tanımlanan f fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \beta \quad , \qquad z \in U$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{wg'(w)}{g(w)}\right\} > \beta \quad , \qquad w \in U$$

eşitsizliklerini sağlanıyorsa $f \in S_{\Sigma_m}^{\beta}$ dır (S.G. Hamidi ve J.M Jahangiri, 2014).

Teorem 5.1.2

$0 \le \beta \le 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere, (3.5.1) formunda verilen $f \in S_{\Sigma_m}^{\beta}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $a_{mj+1} = 0 \quad (1 \le j \le k-1)$ ise;

$$|a_{mk+1}| \le \frac{2(1-\beta)}{mk} \qquad k \ge 2$$

dir (S.G. Hamidi ve J.M Jahangiri, 2014).

Teorem 5.1.3 $0 \le \beta \le 1$ ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. (3.5.1) ile verilen f fonksiyonu $S_{\Sigma_m}^{\beta}$ sınıfında ise,

$$|a_{m+1}| \le \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2(1-\beta)}{m^2}}, & 0 \le \beta < \frac{1}{2} \\ \dfrac{2(1-\beta)}{m}, & \frac{1}{2} \le \beta < 1 \end{cases} ,$$

$$|a_{2m+1}| \le \min\left\{ \frac{(m+1)(1-\beta)}{m^2}, \frac{2(m+1)(1-\beta)^2}{m^2} + \frac{1-\beta}{m} \right\}$$

ve

$$\left| a_{2m+1} - \frac{2m+1}{2} a_{m+1}^2 \right| \le \frac{1-\beta}{m} \quad .$$

eşitsizlikleri sağlanır (S.G. Hamidi ve J.M Jahangiri, 2014).

Sonuç 5.1.4 $S_{\Sigma_m}^{\beta}$ sınıfı Teorem 5.1.3 de $m = 1$ yazıldığında aşağıdaki katsayı eşitsizlikleri elde edilir.

$$|a_2| \le \begin{cases} \sqrt{2(1-\beta)}, & 0 \le \beta < \frac{1}{2} \\ 2(1-\beta), & \frac{1}{2} \le \beta < 1 \end{cases} ,$$

$$|a_3| \le \min\left\{ 2(1-\beta), \quad 4(1-\beta)^2 + 1 - \beta \right\} ,$$

ve

$$\left| a_3 - \frac{3}{2} a_2^2 \right| \le 1 - \beta \quad .$$

Bu sonuçlar daha önce yapılmış olan birçok çalışmanın bir genellemesi niteliğindedir.

$S_{\Sigma_m}(\lambda,\tau,\beta,\zeta)$ sınıfında $m=1$ durumu için sırasıyla $\lambda=0$ ve $\lambda=1$ yerine yazılırsa P.P. Vays ve S. Kant'ın 2017 yılındaki çalışmalarında elde ettiği aşağıdaki sonuçlara ulaşılır.

Sonuç 5.1.5 $f\in\Sigma$ ve $g=f^{-1}$ olsun. Eğer $f\in\Sigma$ fonksiyonu için $0<\beta\leq 1$ olmak üzere,

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right]\in p_{\varsigma}(\beta)$$

ve

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{wg'(w)}{g(w)}-1\right]\in p_{\varsigma}(\beta)$$

ise,

$$|a_2|\leq \min\left\{\sqrt{n|\tau|(1-\beta)},n|\tau|(1-\beta)\right\}$$

ve

$$|a_3|\leq n|\tau|(1-\beta)$$

dir (P.P. Vays and S. Kant, 2017).

Sonuç 5.1.6 $f\in\Sigma$ ve $g=f^{-1}$ olsun. Eğer $f\in\Sigma$ fonksiyonu için $0<\beta\leq 1$ olmak üzere,

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right]\in p_{n}(\beta)$$

ve

$$1+\frac{1}{\tau}\left[\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right]\in p_{n}(\beta)$$

ise,

$$|a_2|\leq \min\left\{\sqrt{\frac{n|\tau|(1-\beta)}{2}},\frac{n|\tau|(1-\beta)}{2}\right\}$$

ve

$$|a_3|\leq \frac{n|\tau|(1-\beta)}{2}$$

dir (P.P. Vays and S. Kant, 2017).

5.2. Öneriler

Bi-ünivalent fonksiyonların katsayı tahminleri ile ilgili son dönemde birçok araştırma yapılmıştır. Bununla beraber m-katlı bi-ünivalent fonksiyonların katsayı tahminlerini konu alan birçok çalışma da vardır. Biz bu çalışmamızda farklı olarak bi-ünivalent fonksiyonların m-katlı bir alt sınıfında Faber polinomu için katsayı sınırlarını araştırdık. Ayrıca yaptığımız çalışmayı daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırarak bulduğumuz sonuçları teyit ettik. Bundan sonra bu alanda çalışacak olan araştırmacılar, benzer şekilde daha önce tanımlanan birçok sınıf için veya yeni sınıflar tanımlayarak yaptığımız çalışmaya benzer araştırmalar yapabilirler.

KAYNAKLAR

Akgül, A. 2017. On the coefficient estimates of analytic and bi-univalent m-fold symmetric functions, Matematica Aeterna, Vol.7,no.3, 253-260.

Altınkaya, S. and Yalçın, S. (2015). Coefficient bounds for certain subclasses of m-fold symmetric bi-univalent functions. Journal of Mathematics, Article ID: 241683

Caratheodory, C., 1907. Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen Math.Ann., 64, 95-115.

D.A. Brannan, J.G. Clunie (Eds.), Aspects of Contemporary Complex Analysis (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1 20, 1979), Academic Press, New York and London, 1980.

Duren, P. L. (1983). Univalent Functions. New York: SpringerVerlag,Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band.

F.M. Sakar and H.O. Güney, Faber Polynomial Coefficient Estimates for Subclasses of m-Fold Symmetric Bi-univalent Functions Defined by Fractional Derivative, Malaysian Journal of Mathematical Sciences 11(2) (2017), 275–287.

F.M. Sakar and H.O. Güney Coefficient bounds for a new subclass of analytic bi-close-to-convex functions by making use of Faber polynomial expansion, Turkish Journal of Mathematics,41(4),888-895. http://dergipark.org.tr/tbtkmath/issue/35838/401699

G. Faber, Über polynomische Entwickelungen, Math. Ann. 57 (3) (1903), 389–408.

Goodman, A. W., 1983. Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey.

Gonzales M.O., 1992 Classiccal Complex Analysis, Marcel Deccer Inc., Madison Avenue, New York

J.M. Jahangiri and S.G. Hamidi, Coefficient estimates for certain classes of bi-univalent functions, Int. J. Math. Math. Sci. 2013, Art. ID 190560, 4 pp.

He M., (1995), "Faber polynomials for circular lunes", Computers and Mathematics with Applications, 30, 307-315.

H. Airault and A. Bouali, Differential calculus on the Faber polynomials, Bull. Sci. Math. 130 (3) (2006), 179–222.

H. Airault and J. Ren, An algebra of differential operators and generating functions on theset of univalent functions, Bull. Sci. Math. 126 (5) (2002), 343–367.

H.M. Srivastava, S. Bulut, M. Çaglar and N. Yagmur, Coeffcient estimates for a general

subclass of analytic and bi-univalent functions, Filomat 27 (5) (2013), 831–842.

H.M. Srivastava, A.K. Mishra and P. Gochhayat, Certain subclasses of analytic and biunivalent functions, Appl. Math. Lett. 23 (2010) 1188–1192.

Lewin, M. (1967). On a coefficient problem for bi-univalent functions. Proceedings of the American Mathematical Society, 18(1):63–68.

Netanyahu, M. E. (1969). The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z|<1$. Arch. Rational Mech. Anal., 32(Issue 2):100–112.

P. Goswami, B. S. Alkahtani and T. Bulboaca, Estimate for initial Maclaurin Coefficients of Certain Subclasses of Bi-univalent Functions, http://arxiv.org/abs/1503.04644v1, 2015

P. P. Vyas and S. Kant, Estimates on initial coefficient of certain subclass of bi-univalent functions associated with the class $P_m(\beta)$, International Journal of Mathematics and its Applications, Volume 5, Issue 1-B(2017), 165-169

Q.-H. Xu, Y.-C. Gui and H.M. Srivastava, Coefficient estimates for a certain subclass ofanalytic and bi-univalent functions, Appl. Math. Lett. 25 (2012) 990–994.

Sarıoğlu Ö. Ünivalent Fonksiyonlar, Atatürk Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi

S. Bulut, Faber polynomial coefficient estimates for a comprehensive subclass of analytic bi-univalent functions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (6) (2014), 479–484.

S. Bulut, Faber polynomial coefficient estimates for a comprehensive subclass of m-fold symmetric analytic bi-univalent functions, Journal of Fractional Calculus and Applications, Vol. 8(1) Jan. 2017, pp. 108-117.,

S.G. Hamidi and J.M. Jahangiri, Unpredictability of the coefficients of m-fold symmetric bi-starlike functions, Internat. J. Math. 25 (7) (2014), 1450064, 1–8.

S.G. Hamidi and J.M. Jahangiri, Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi-closeto-convex functions, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 352 (1) (2014), 17–20.

S. Bulut, Faber polynomial coefficient estimates for a subclass of analytic bi-univalent functions, Filomat 30 (6) (2016), 1567–1575.

Srivastava, H. M., Mishra, A. K., and Gochhayat, P. (2010). Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions. Applied Mathematics Letters, 23(10):1188–1192.

Srivastava, H. M., Sivasubramanian, S., and Sivakumar, R. (2014). Initial coefficient bounds for a subclass of m-fold symmetric bi-univalent functions. Tbilisi Mathematical Journal, 7(2):1–10.

Şeker B., On a new subclass of bi-univalent functions defined by using Salagean operatör, Turkish J Math, (2018) 42:2891-2896

Todorov, P.G., (1991), On the Faber polynomials of the univalent functions of class $\sum$, J. Math. Anal. Appl., 162(1), pp.268-276.

Yavuz T. Coeffıcıent Inequalities For Some Subclasses Of Functıons Univalent in an Ellıpse, Gebze Teknik Üniversitesi, Doktora Tezi

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Adnan CANBULAT
Uyruğu	**:**	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	BEŞİRİ 21.11.1980
Telefon	**:**	05306977197
E-mail	**:**	canbulatadnan@hotmail.com

EĞİTİM

Derece		**Adı, İlçe, İl**	**Bitirme Yılı**
İlkokul	**:**	Cengiz Topel İlkokul, Batman	1993
Ortaokul	**:**	Batman Anadolu Lisesi, Batman	1997
Lise	**:**	İvriz Anadolu Öğretmen Lisesi, Konya	2000
Üniversite	**:**	Hacettepe Üniversitesi Matematik Öğretmenliği	2006

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurum**	**Görevi**
2004-2012	Özel sektör	Öğretmen
2012-	Meb	Öğretmen

YABANCI DİLLER

İngilizce
Almanca

FAALİYETLER

1. Initial Faber Polynomial Coefficient Estimates for a Subclasses of M-Fold Symmetrıc and Bi-Univalent Functions. adlı çalışma 'Ejons Journal' Bilim Dergisinin düzenlemiş olduğu '' 3rd Internatıonal Congress on Mathematic, Engineering and Natural Sciences'' adlı kongrede sunulmuştur.

2. Inequalities on coefcients for certain classes of m-fold symmetric and bi-univalent functions equipped with Faber polynomial**,** F. Müge SAKAR, Adnan CANBULAT, Turk J Math (2019) 43: 293 – 300