

**PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN İKİ
KATLI FARK ŞEMALARI**

HATİCE ŞİNAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN İKİ KATLI FARK ŞEMALARI

HATİCE ŞİNAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI


DANIŞMAN
Prof.Dr. Gabil AMİRALİ

SİNOP-2011

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 28/07/2011 tarihinde yapılan sınav ile MATEMATİK
Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof.Dr. Gabil AMİRALİ

İmza: 

Üye : Doç.Dr. Kamil DEMİRCİ

İmza: 

Üye : Yrd.Doç.Dr. Alper SİNAN

İmza: 

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

02.../08/20.11


Doç. Dr. Isakhan KARAYÜCEL
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN İKİ KATLI FARK ŞEMALARI

ÖZET

Bu çalışma üç ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konu ile ilgili olarak tarihsel gelişim ve kaynak bildirisi verilmektedir.

İkinci bölümde ise daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmektedir.

Üçüncü bölümde, parabolik başlangıç sınır değer problemi için ağırlık parametresine bağlı fark şeması kurulmuştur. Kurulan şemanın kalan terimi ayrık maksimum normunda değerlendirilmiştir. Değişkenlere ayırma metodu, maksimum prensibi ve enerji eşitsizlikleri metodu kullanılarak bu fark şemasının kararlılığı incelenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Parabolik Denklem, Fark Şeması, Kararlılık, Değişkenlere Ayırma Metodu, Maksimum Prensibi, Enerji Eşitsizlikleri Metodu.

TWO-LAYER DIFFERENCE SCHEMES FOR PARABOLIC EQUATIONS

ABSTRACT

This work consists of three main chapters. In the first chapter, historical advances and literatures about the subject are given.

In the second chapter, some preliminaries and definitions that will be used later are given.

In the third chapter, the finite difference scheme with weights parameter for parabolic initial-boundry value problem are constructed. The remainder term of costructed scheme is proved in the sense of discrete maximum norm. The stability of this difference scheme is investigated by using the method of separation of variables, the maximum principle, the method of energy inequalities.

Key Words: Parabolic Equation, Difference Scheme, Stability, The Method Of Separation Of Variables, The Maximum Principle, The Method Of Energy Inequalities.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarımı yönlendiren, çalıőmalarımın her aőamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek yetiőme ve geliőmeme katkıda bulunan danışman hocam sayın Prof.Dr.Gabil AMİRALİ'ye, çalıőmalarım süresince maddi manevi desteklerini esirgemedi bir çok fedakarlıklar gösteren aileme, uygun çalışma ortamı sağlayan arkadaşlarıma ve çalıőmalarımı destekleyen ve emek veren herkese en derin duygularla teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ	v
1. GİRİŞ ve LİTERATÜR ÖZETİ	1
2. GENEL BİLGİLER	3
3. PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN İKİ KATLI FAK ŞEMALARI	6
3.1. Orijinal Problem	6
3.2. Altı Nokta Şemaları Ailesi	7
3.3. Yaklaşım Hatası	10
3.4. Kararlılık	13
3.4.1. Değişkenlere Ayırma Metodu	13
3.4.2. Maksimum Prensibi	22
3.4.3 Enerji Eşitsizlikleri Metodu	24
4.TARTIŞMA ve SONUÇ	29
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	31

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

u	Diferansiyel denklemin kesin çözümü
y	Diferansiyel denklemin nümerik çözümü
u'	u fonksiyonunun x 'e göre türevi
\dot{u}	u fonksiyonunun t 'ye göre türevi
ω_h	Düzdün şebeke
h, τ	Şebeke adımları
N	Şebeke elemanlarının sayısı
$\bar{\omega}_h$	$\omega_h \cup \{x = 0, x = 1\}$
$\omega_{h\tau}$	$\omega_h \times \omega_\tau$
y_i	y fonksiyonunun x_i şebeke noktasındaki değeri
y_i^j	y fonksiyonunun (x_i, t_j) şebeke noktasındaki değeri
ψ_i	Kesme hatası
L, \mathbf{A}	Diferansiyel operatör
$O(h^k)$	k . mertebeden yakınsama hızı
C_n^m	x 'e göre m . t 'ye göre n . mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi
$\ y\ _\infty$	$\max_{x \in \bar{\omega}_h} y(x) $
$\ y\ $	$(\sum_{i=0}^N h y_i^2)^{1/2}$

1. GİRİŞ ve LİTERATÜR ÖZETİ

Doğadaki olayların modellenmesi çoğunlukla diferansiyel denklemlerle yapılır. Ancak bu modellemelerde daha çok kısmi diferansiyel denklemler kullanılır. Bu açıdan bakıldığında özellikle kısmi diferansiyel denklemler birçok bilim dalında önemli uygulama alanlarına sahiptir.

Bir diferansiyel denklemde bağımsız değişken sayısının iki veya daha fazla olması ve bu durumda denklemin herhangi mertebeden en az bir kısmi türev içermesi durumunda bu denkleme Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem denir. Kısmi diferansiyel denklemlerin incelenmesi çoğunlukla denklemlerin çeşitli tiplere sınıflandırılmasıyla başlar. En fazla incelenen denklemler eliptik, parabolik ve hiperbolik tipli olanlardır. Parabolik denklemlerle ısı transferi, difüzyon olayları ve popülasyon dinamiği gibi problemler ifade edilmekte ve bu denklem fiziksel korunum kanunlarından (enerjinin korunumu kanunu, kütlelenin korunumu kanunu ve momentum korunum kanunu) elde edilmektedir.

Isı iletim denklemi matematik ve fizikte parabolik tipte kısmi diferansiyel denklem olarak önemli bir yere sahiptir. Isı iletim denklemi

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t)$$

şeklinde yazılır. Burada x uzay değişkeni, t zaman ve $u(x, t)$ t anında x noktasındaki ısıdır.

Ayrıca parabolik denklemler için başlangıç-sınır değer problemleri değişik dalga süreçlerinin modellenmesi süreçlerinde karsımıza çıkmaktadır. Bu tip problemlerin kesin çözümlerine çoğu zaman ulaşılamadığından dolayı nümerik yöntemler büyük önem arz etmektedir. Sıkça kullanılan yöntemler sonlu farklar, sonlu elemanlar, sonlu hacim yöntemleri gibi yöntemler bilinmektedir. Fark denklemleri ile ağırlıklı olarak adi ve kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç-değer ve sınır-değer problemlerinin nümerik çözüm süreçlerinde karşılaşılmaktadır. Bilindiği gibi fark semaları için yaklaşık metotlarda incelenmesi gereken aşağıdaki hususlar bulunmaktadır: Fark şemasının kurulması, yakınsama hızının tespiti, fark şemasının kararlılığı, yaklaşım hatası ve yakınsama için uygun algoritmanın kurulmasıdır, (Samarskii, 2001; Amiralı, 2002; Smith, 1965).

Bu konularla ilgili literatürde pek çok araştırma vardır.

Ames (1977), kısmi diferansiyel denklemler için başlangıç-değer ve sınır-değer problemlerinin çözüm süreçlerinde nümerik yöntemler kullanmıştır. Saka (1998), parabolik denklemlerden olan ısı denkleminin nümerik çözümlerini ele aldığı tezinde, ısı denklemlerini değişkenlere ayırma metodu ile çözümünü inceleyerek, kararlılığını ele almıştır. Evans ve ark. (2000), kısmi diferansiyel denklemler için nümerik yöntemleri ele aldığı kitabında Parabolik denklemler teorisini ele alarak, bu denklemler için geliştirilen yöntemlerin kararlılığını incelemiştir. Samarskii (2001), fark şemaları teorisini ele aldığı kitabında, parabolik denklemler için geliştirilen değişkenlere ayırma metodu, Maksimum prensibi ve enerji eşitsizlikleri metodlarının kararlılığını incelemiştir. Amiralı (2002), Nümerik analizin temel konularını ele aldığı kitabında, singüler pertürbasyon özellikli fark şemalarını inceleyerek bu denklemlerin kararlılığı üzerinde durmuştur. Koca (2003), kısmi türevler teorisini incelediği kitabında parabolik denklemleri ele alırken, bir boyutlu ısı denkleminin değişkenlere ayırma metoduyla çözümüne değinmiştir. Yıldız (2010), tek boyutlu parabolik denklemler için fark şemalarını incelediği tezinde fark şemaları için yöntemleri ve bu yöntemlerin kararlılığını ele almıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde konuyla ilgili daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Şebeke, Şebeke Fonksiyonu

(i) $[0,1]$ kapalı aralığının sonlu sayıda noktadan oluşan parçalanışına bir şebeke denir. Bu şebekede tanımlanmış fonksiyona ise şebeke fonksiyonu denir. Bu durumda;

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = 1$$

noktaları, $[0,1]$ kapalı aralığında bir şebeke oluşturur.

(ii) $\omega_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1; h = \frac{1}{N}\}$ ve $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{x = 0, 1\}$ şebekelerine ise sırasıyla $[0,1]$ aralığında açık ve kapalı düzgün şebekeler denir. ω_τ ise $[0, T]$ aralığındaki düzgün şebekeyi ifade etmektedir. $x_i \in \omega_h$ $t_j \in \omega_\tau$ noktaları şebekelerin düğüm noktalarını veya kısaca düğümlerini, h ve τ ise şebekelerin adımını gösterir. Ayrıca $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$ $\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ bölgesindeki iki boyutlu şemayı göstermektedir. $y_i = y(x_i)$ ω_h şebekesinde tanımlı tek boyutlu şebeke fonksiyonu, $y_i^j = y(x_i, t_j)$ ise $\omega_{h\tau}$ şebekesinde tanımlı iki boyutlu şebeke fonksiyonudur. $y_{\bar{x},i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$ ve $y_{\bar{x}x,i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$ ifadeleri ise sırasıyla birinci ve ikinci fark türevleridir.

Şebeke fonksiyonları uzaylarında değişik normlar söz konusudur:

$$\|y\|_\infty = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y(x)|$$

ω_h şebekesindeki ayrık maksimum normudur ve

$$\|y\| = (\sum_{i=0}^N h y_i^2)^{1/2}$$

L_2 uzayındaki şebeke normudur.

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{N-1} u_i v_i h, [u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i h \text{ şebekede tanımlı iç çarpımlardır.}$$

2.2. Parabolik Denklem

Klasik model olarak bilinen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

denklem bir parabolik denklemdir, burada $c = sbt > 0$, $f(x, t)$ ise belirli bir fonksiyondur. Ayrıca bu denkleme başlangıç ve sınır şartları eklenirse

$$\mathcal{L}u: = \frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq t_0,$$

$$u(x, 0) = \varphi(x),$$

$$\alpha_1 u(0, t) + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial t} = \mu_1, \quad \alpha_2 u(1, t) + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial t} = \mu_2$$

şeklinde bir problem ortaya çıkar. Burada c , α_1 , α_2 , β_1 , β_2 verilmiş sabitler, $f(x, t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$ verilmiş fonksiyonlardır.

2.5. Fark Sınır Değer Probleminin Çözüm Değerlendirmesi

$$\mathcal{L}[y_i] = A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i,$$

$$i = 1, \dots, N-1, \quad y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2$$

olmak üzere her $i = 1, \dots, N-1$ için $|A_i| > 0$, $|B_i| > 0$, $\bar{D}_i = |C_i| - |A_i| - |B_i| > 0$ ise

$$\mathcal{L}[y_i] = -F_i, \quad i = 1, \dots, N-1,$$

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0$$

probleminin bir çözümü

$$\|y\|_\infty \leq \left\| \frac{F}{\bar{D}} \right\|_\infty$$

değerlendirmesini sağlar. (Samarskii, 2001)

2.6. Lemma

$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, 0 \leq i \leq N, x_0 = 0, x_N = 0\}$ şebekesinde tanımlı $x = 0$ ve $x = 1$ 'de sıfır olan her $y(x)$ şebeke fonksiyonu için

$$\|y\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|y_{\bar{x}}\|$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\|y_{\bar{x}}\| = (y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}})^{1/2}$ şeklindedir.

2.7. Cauchy-Bunyakovskii Eşitsizliği ve μ -Eşitsizliği

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$$

burada $(,)$ bir vektör uzayında iç çarpım ve $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ birleşmiş normdur.

$$|ab| \leq \mu a^2 + \frac{b^2}{4\mu}$$

burada $\mu > 0$ keyfi sabittir. Bu iki eşitsizlikten aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\| \leq \mu \|u\|^2 + \frac{1}{4\mu} \|v\|^2 .$$

2.8. Green Fark Formülü

$$\int_0^1 u(kv')' dx = - \int_0^1 ku' dx + kuv'|_0^1$$

eşitliği birinci Green formülü olarak tanımlanır. $\bar{\omega}_h$ şebekesinde birinci Green formülünün fark benzeri

$$(z, (ay_{\bar{x}})_x) = -(ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] + azy_{\bar{x}}|_N - ay_{x,0}z_0$$

şeklinde yazılabilir. Burada $u = z$ ve $v = ay_{\bar{x}}$ olarak alınmıştır. Eğer $z_0 = z_N = 0$ ise

$$(z, \Lambda y) = -(ay_{\bar{x}}, z_{\bar{x}}] , \Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x$$

olur. Buna göre $z = y$ ve $a = 1$ alınır

$$(\Lambda y, y) = -(y_{\bar{x}}, y_{\bar{x}}] , \quad y_0 = y_N = 0$$

eşitliği elde edilir.

3.PARABOLİK DENKLEMLER İÇİN İKİ KATLI FARK ŞEMALARI

3.1. Orijinal Problem

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{f}, \quad (3.1)$$

ısı iletimi denklemdir. Burada $u = u(x, t)$ ısıyı, c belirli ısıyı, ρ yoğunluğu, k ısı iletkenliği ve \bar{f} ısı kaynağının yoğunluğunu yani birim uzunlukta birim zamanda geçen ısı miktarını belirtir. Belirli ısı sadece x ve t 'ye değil aynı zamanda u sıcaklığına da bağlı olabilir. Bu yüzden bu denkleme yarı lineer de denebilir. Eğer k ve $c\rho$ sabit ise (3.1) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \tilde{f}, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho} \text{ ve } \tilde{f} = \frac{\bar{f}}{c\rho} \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır.

Genelliği bozmadan $a = 1$ alınabilir ve böylece (3.2) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f \quad (3.3)$$

şeklinde yeniden yazılabilir. $x' = \frac{x}{l}$ alınır ve yine x' yerine x yazılırsa (3.3) denklemi elde edilir. (3.2) denklemi için $0 \leq x \leq l$ aralığında çözüm ararken

$$x' = \frac{x}{l}, \quad t' = \frac{a^2 t}{l^2}$$

boyutsuzlaştırma değişkenlerine geçilebilir. Böylece (3.2) denklemi $0 \leq x' \leq 1$ ve $f = \frac{l^2 \tilde{f}}{a^2}$ ile (3.3) formunda tekrar yazılır. Bundan sonraki bölümlerde birinci tip sınır şartları içeren

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < 1, & & 0 < t \leq T, \\
u(x, 0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq 1, & & \\
u(0, t) &= u_1(t), \quad u(1, t) = u_2(t), & & & 0 \leq t \leq T,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

başlangıç sınır değer probleminin $\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$ dikdörtgeninde sürekli bir $u = u(x, t)$ çözümünün bulunması konusu ele alınacaktır.

3.2. Altı Nokta Şemaları Ailesi

$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N\}$ ve $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, j_0\}$ şebekeleri ele alınsın.

$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau = \{(ih, j\tau), i = 0, 1, \dots, N, j = 0, 1, \dots, j_0\}$ şebekesinde işlem yaparken verilen $\bar{\omega}_{h\tau}$ şebekesinde y fonksiyonunun (x_i, t_j) düğümündeki değeri y_i^j ile gösterilir.

Burada yaklaşım, $\frac{\partial u}{\partial t}$ yerine birinci fark türevini, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ yerine ikinci fark türevini, $u_{\bar{x}\bar{x}} = \Lambda u$ olarak ve uygun bir σ reel parametresi atayarak meydana gelir. Sonuç olarak

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda(\sigma y_i^{j+1} + (1 - \sigma)y_i^j) + \varphi_i^j \quad 0 < i < N, 0 \leq j < j_0 \tag{3.5}$$

bir parametrelili fark şemaları ailesi elde edilir, bu şemaya ağırlıklı şema olarak bakılabilir. Sınır ve başlangıç şartları da tam yakınsama ile

$$y_0^j = u_1^j, y_N^j = u_2^j \tag{3.6}$$

$$y_i^0 = y(x_i, 0) = u_0(x_i) \tag{3.7}$$

belirtilecektir. Burada φ_i^j (3.3) denklemindeki f fonksiyonuna yakınsayan bir şebeke fonksiyonudur. Örneğin

$$\varphi_i^j = f(x_i, t_{j+1/2}), t_{j+1/2} = t_j + 0.5\tau$$

$$\Delta y = y_{\bar{x}x,i} = \frac{1}{h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1})$$

alınabilir. (3.5)-(3.7) şartları birlikte alınırsa (3.8) problemini oluştururlar.

(3.5) fark şeması (x_i, t_{j+1}) merkez olmak üzere

$$(x_{i\pm 1}, t_{j+1}), (x_i, t_{j+1}), (x_{i\pm 1}, t_j), (x_i, t_j)$$

altı nokta modeli üzerine kurulmuştur. (3.5) denkleminin doğruluğu iç düğümler olarak bilinen (x_i, t_{j+1}) , $i = 1, \dots, N - 1; j + 1 = 1, 2, \dots, j_0$, düğümünde kabul edilir. $\bar{\omega}_{h\tau}$ şebekesinin iç düğümlerinin kümesi

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_j), 1 \leq i \leq N - 1, 1 \leq j \leq j_0\}$$

tarafından belirlenir.

(3.6)-(3.7) sınır ve başlangıç şartları $\bar{\omega}_{h\tau}$ şebekesinin sınır düğümlerinde belirtilir. $t = t_j$ düz çizgisi üzerinde uzanan $\bar{\omega}_{h\tau}$ şebekesinin bütün düğümleri katı oluşturur. Çünkü (3.5) şemasında y çözüm fonksiyonunun değerlerinin iki kata ihtiyacı vardır, bu yüzden iki katlı şema olarak dikkate alınabilir. (3.5) şemasının doğruluk ve kararlılığının σ parametresinin seçimine bağlı olduğu gösterilsin. Şimdi σ nın özel değerleri için incelensin. $\sigma = 0$ için dört nokta şeması elde edilir:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Delta y_i^j + \varphi_i^j$$

ya da $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$ olmak üzere

$$y_i^{j+1} = (1 - 2\gamma)y_i^j + \gamma(y_{i-1}^j + y_{i+1}^j) + \tau\varphi_i^j \quad (3.9)$$

şeklinde olup (x_i, t_{j+1}) , (x_i, t_j) ve $(x_{i\pm 1}, t_j)$ düğümleri üzerindedir. $t = t_{j+1}$ yeni katının her noktasındaki y_i^{j+1} değeri, bir önceki $t = t_j$ katındaki y_i^j aracılığı ile (3.9)

açık formülü ile bulunur. Çünkü çözüm, $t = t_0$ anında $y_i^0 = u_0(x_i)$ başlangıç şartı ile verilir ve böylece her bitişik katta y nin bütün değerlerini (3.9) formülü ile belirlemek mümkündür.

$\sigma \neq 0$ için (3.5) şeması iki katlı kapalı şemadan bahseder. $\sigma \neq 0$ terimi altında yeni katta y_i^{j+1} değeri hesaplandığında $y_0^{j+1} = u_1^{j+1}$ ve $y_N^{j+1} = u_2^{j+1}$ sınır şartlarına bağlı

$$\sigma \Lambda y_i^{j+1} - \frac{1}{\tau} y_i^{j+1} = -F_i^j, \quad F_i^j = \frac{1}{\tau} y_i^j + (1 - \sigma) \Lambda y_i^j + \varphi_i^j, \quad (3.10)$$

$$i = 1, 2, \dots, N - 1$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem eliminasyon metoduyla çözülebilir. Sonuç olarak iki farklı şemadan bahsedilir. $\sigma = 1$ ile ileri fark şeması ya da kapalı şema olarak bilinen

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \Lambda y_i^{j+1} + \varphi_i^j \quad (3.11)$$

elde edilir. $\sigma = 0.5$ ile Crank Nicolson şeması

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{1}{2} \Lambda (y_i^{j+1} + y_i^j) + \varphi_i^j \quad (3.12)$$

elde edilir.

3.3. Yaklaşım Hatası

(3.5)-(3.7) şemasının kesinliğini değerlendirmek için (3.8) probleminin çözümü olan $y = y_i^j$ ile (3.4) probleminin çözümü $u = u(x, t)$ karşılaştırılmalıdır. $z_i^j = y_i^j - u_i^j$ farkına yaklaşık çözümün hatası denir. Bu hatayı değerlendirmeden önce

$$y_i^j = y, \quad y_i^{j+1} = \hat{y}, \quad y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}$$

İfadelerini kullanarak (3.5)-(3.7) fark problemi aşağıdaki gibi yeniden yazılır:

$$\begin{aligned} y_t &= \Lambda(\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y) + \varphi, & (x, t) &\in \omega_{h\tau}, \\ y(0, t) &= u_1(t), \quad y(1, t) = u_2(t) & t &\in \omega_\tau, \\ y(x, 0) &= u_0(x), & x &\in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \quad (3.8)$$

(3.8)'de $y = z + u$ alıp u fonksiyonu çözüm fonksiyonu olarak dikkate alınırsa z için aşağıdaki problem elde edilir:

$$\begin{aligned} z_t &= \Lambda(\sigma \hat{z} + (1 - \sigma)z) + \psi, & (x, t) &\in \omega_{h\tau}, \\ z(0, t) &= z(1, t) = 0, & t &\in \omega_\tau, \\ z(x, 0) &= 0, & x &\in \bar{\omega}_h. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Burada

$$\psi = \Lambda(\sigma \hat{u} + (1 - \sigma)u) - u_t + \varphi \quad (3.14)$$

şeklindedir. (3.4) denkleminin çözümü $u = u(x, t)$ (3.8) şeması için yaklaşım hatasıdır. Yani $\|\psi(x, t)\|_2 = O(h^m + \tau^n)$ veya $\forall t \in \omega_\tau$ için $\|\psi\|_2 \leq M(h^m + \tau^n)$ ise (3.8) şeması (3.4) denkleminin (m, n) mertebesi ile ya da (3.4) denkleminin $u = u(x, t)$ çözümüne $O(h^m + \tau^n)$ kesinliği ile yaklaşır. Burada M , h ve τ 'dan bağımsız pozitif bir sabit ve $\|\cdot\|_2$ ise ω_h şebekesi üzerinde uygun bir normdur.

$u = u(x, t)$ 'nin x ve t 'ye göre birinci mertebeden türevlere sahip olduğu kabul edilerek (3.8) şeması için yaklaşım kuralının değerlendirilmesine geçilsin.

$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\bar{u} = u(x_i, t_{j+1/2})$, $t_{j+1/2} = t_j + 0.5\tau$ ile gösterilsin. $u = u(x, t)$ fonksiyonunun $(x_i, t_{j+1/2})$ düğümü civarında gelişmiş Taylor serisi

$$\hat{u} = 0.5(\hat{u} + u) + 0.5(\hat{u} - u) = 0.5(\hat{u} + u) + 0.5\tau u_t,$$

$$u = 0.5(\hat{u} + u) - 0.5(\hat{u} - u) = 0.5(\hat{u} + u) - 0.5\tau u_t$$

$$\sigma \hat{u} + (1 - \sigma)u = 0.5(\hat{u} + u) + (\sigma - 0.5)\tau u_t$$

ifadelerine yol gösterir. Bütün bunlar ψ 'yi $\psi = 0.5\Lambda(\hat{u} + u) + (\sigma - 0.5)\tau\Lambda u_t - u_t + \varphi$ 'ye indirgeme olanağı verir.

$$\Lambda u = u'' + \frac{h^2}{12}u^{(4)} + O(h^4) = Lu + \frac{h^2}{12}L^2u + O(h^4),$$

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\hat{u} = \bar{u} + \frac{1}{2}\tau\bar{u}' + \frac{\tau^2}{8}\bar{u}'' + O(\tau^3)$$

$$u = \bar{u} - \frac{1}{2}\tau\bar{u}' + \frac{\tau^2}{8}\bar{u}'' + O(\tau^3),$$

$$\frac{1}{2}(\hat{u} + u) = \bar{u} + \frac{\tau^2}{8}\bar{u}'' + O(\tau^3), \quad u_t = \bar{u}' + O(\tau^2)$$

ifadelerinin yardımı ile

$$\psi = (L\bar{u} - \bar{u}' + \varphi) + (\sigma - 0.5)\tau L\bar{u} + \frac{h^2}{12}L^2\bar{u} + O(h^4 + \tau^2) \quad (3.15)$$

elde edilir. Böylece $\varphi = \bar{f} = f(x, t_{j+1/2})$ için $\psi = (\sigma - 0.5)\tau L\bar{u} + O(h^2 + \tau^2)$ 'dir. Çünkü $\dot{u} = Lu + f$ 'dir. $L\dot{u} = L^2u + Lf = u^{(4)} + f''$ ve $L^2u = L\dot{u} - Lf$ bağıntıları ve (3.15) ifadesinden

$$\psi = (\varphi - \bar{f}) + \left[(\sigma - 0.5)\tau + \frac{1}{12}h^2 \right] L\bar{u} - \frac{1}{12}h^2 L\bar{f} + O(h^4 + \tau^2) \quad (3.16)$$

elde edilir. Köşeli parantez içindeki ifade sıfıra eşitlenirse

$$\sigma = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau} = \sigma_* \quad (3.17)$$

eşitliği elde edilir. $\sigma = \sigma_*$ ve $\varphi = \bar{f} + \frac{1}{12}h^2 L\bar{f}$ için (3.8) şeması $O(h^4 + \tau^2)$ yakınsaması meydana getirir, yani $\psi = O(h^4 + \tau^2)$ 'dir. $\varphi = \bar{f} + \frac{1}{12}(h^2 L\bar{f})$ ya da

$$\varphi_i^j = \frac{5}{6}f_i^{j+1/2} + \frac{1}{12}(f_{i-1}^{j+1/2} + f_{i+1}^{j+1/2}) \quad (3.18)$$

ifadelerini veren f'' , $f_{\bar{x}x} = \Lambda f$ ile değiştirilse bile bu şemanın yaklaşım derecesi değişmez.

$C_n^m(\bar{D})$ x 'e göre m-inci, t 'ye göre n-inci türevleri olan fonksiyonlar sınıfı ve tüm türevler \bar{D} 'de sürekli olsun. (3.16)-(3.17) formülü (3.8) şemasının

- $u \in C_3^4$ ise $\sigma = 0.5$ ve $\varphi = \bar{f}$ ya da $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau^2)$ için $O(h^2 + \tau^2)$
- $u \in C_2^4$ ise $\forall \sigma \neq 0.5$ ve $\varphi = \bar{f} + O(h^2 + \tau)$, örneğin $\varphi = \hat{f}$ ya da $\varphi = f$ için $O(h^2 + \tau)$
- $u \in C_3^6$ ise $\sigma = \sigma_*$ ve (3.18) formülü ile belirtilmiş φ için $O(h^4 + \tau^2)$

yaklaşımlarını gerçekleştirdiğini doğrular.

3.4. Kararlılık

Nümerik yöntemlerde kararlılık sağlanması gereken en önemli özelliktir. Veriler yakın olduklarında uygun çözümler de yakınsa söz konusu yöntem kararlıdır denir. Bu bölümde (3.8) şemasının kararlılığını incelemek için üç yöntem ele alınacaktır:

- Değişkenlere ayırma metodu
- Maksimum prensibi
- Enerji eşitsizlikleri metodu

3.4.1. Değişkenlere Ayırma Metodu

Değişkenlere ayırma metoduyla, homojen sınır şartlarıyla (3.8) şemasının kararlılığı incelenecektir. Homojen sınır şartları ve

$$\hat{y} = y + \tau y_t, \quad \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y = y + \sigma \tau y_t$$

özdeşlikleri ile (3.8) şeması

$$\begin{aligned} y_t - \sigma \tau \Lambda y_t &= \Lambda y + \varphi, & (x, t) &\in \omega_{h\tau}, \\ y(0, t) = y(1, t) &= 0, & t &\in \omega_\tau, \\ y(x, 0) &= u_0(x), & x &\in \bar{\omega}_h \end{aligned} \quad (3.19)$$

şeklinde tekrar yazılır.

Eğer (3.19) probleminin çözümü için

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_1 \|u_0\|_{(1)} + M_2 \max_{0 \leq t' < t} \|\varphi(t')\|_{(2)}, \quad t \in \omega_\tau \quad (3.20)$$

eşitsizliği geçerli ise (3.19) şemasının kararlılığı söylenebilir. Burada M_1 ve M_2 , h ve τ 'dan bağımsız pozitif sabitler, $\|\cdot\|_{(1)}$ ve $\|\cdot\|_{(2)}$ ω_h şebekesinde uygun normlardır.

$\varphi = 0$ ile

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_1 \|u_0\|_{(1)} \quad t \in \omega_\tau \quad (3.21)$$

(3.19) şemasının başlangıç verisine göre kararlı olduğunu gösterir. $y(x, 0) = 0$ alındığında ise

$$\|y(t)\|_{(1)} \leq M_2 \max_{0 \leq t' < t} \|\varphi(t')\|_{(2)} \quad (3.22)$$

(3.19) şemasının sağ tarafa göre kararlı olduğunu gösterir.

(3.19) probleminin çözümü $y = \bar{y} + \tilde{y}$ olsun. Burada \bar{y}

$$\begin{aligned} y_t - \sigma\tau\Lambda y_t &= \Lambda y, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(0, t) = y(1, t) &= 0, & t \in \omega_\tau, \\ y(x, 0) &= u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h \end{aligned} \quad (3.23)$$

homojen denklemlili problemin ve \tilde{y} ise $\tilde{y}(x, 0) = 0$ başlangıç şartıyla

$$\begin{aligned} y_t - \sigma\tau\Lambda y_t &= \Lambda y + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ y(0, t) = y(1, t) &= 0, & t \in \omega_\tau, \\ y(x, 0) &= 0, & x \in \bar{\omega}_h \end{aligned} \quad (3.24)$$

homojen başlangıç şartına sahip problemin çözümleridir.

Başlangıç verisine göre (3.19) şemasının kararlı olduğunu göstermek için ilk adım (3.23) probleminin çözümünü değerlendirmektir. Bunun için değişkenlere ayırma metodu kullanılmalı ve (3.21) $L_2(\omega_h)$ normunda

$$\|y\|_{(1)} = \|y\|$$

şeklinde türetilmelidir. Burada $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$ ve $(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h$ 'dir. (3.23)'ün çözümü biri sadece $t = t_j$ 'ye diğeri sadece $x = x_i$ 'ye bağlı $T = T(t_j)$ ve $X = X(x_i)$ fonksiyonlarının çarpımı olarak aransın.

$$\Lambda y = T \Lambda X, \quad y_t = X T_t$$

ifadeleri (3.23)'da yerine yazılırsa

$$\frac{\hat{T}-T}{\tau(\sigma\hat{T}+(1-\sigma)T)} = \frac{\Lambda X}{X} = -\lambda, \quad \hat{T} = T(t_{j+1}), \quad T = T(t_j)$$

elde edilir. Burada λ ayırma sabitidir. Sonuç olarak

$$\hat{T} = qT, \quad q = \frac{1-(1-\sigma)\tau\lambda}{1+\sigma\tau\lambda}$$

elde edilir.

X için fark öz değer problemine Sturm-Liouville fark problemi olarak bakılabilir:

$$\begin{aligned} \Lambda X(x) + \lambda X(x) &= 0, & 0 < x = ih < 1, \\ X(0) = X(1) &= 0, & X(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Burada belli olduğu gibi problem

$$\begin{aligned} \lambda_k &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi kh}{2}, \quad k = 1, 2, \dots, N-1, & 0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{N-1}, \\ \lambda_1 &= \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\pi h}{2}, \quad \lambda_{N-1} = \frac{4}{h^2} \cos^2 \frac{\pi h}{2} \end{aligned}$$

öz değerlerine karşılık

$$X^{(k)} F(x) = \sqrt{2} \sin \pi k x, \quad k = 1, 2, \dots, N-1$$

öz fonksiyonlarına özdeş çözümlere sahiptir. $\{X^{(k)}\}$ öz fonksiyonları

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} f_k^2 \quad (3.25)$$

Parseval özdeşliğini meydana getirmek için bir $(X^{(k_1)}, X^{(k_2)}) = \delta_{k_1, k_2}$ ortonormal sistemi kurarlar. Burada f_k 'lar $\bar{\omega}_h$ şebekesinde tanımlı keyfi bir şebeke fonksiyonu için büyüme katsayılarıdır ve $x = 0$ ve $x = 1$ 'de sıfır olurlar:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N-1} f_k X^{(k)}(x), \quad f_k = (f, X^{(k)}).$$

Böylece (3.23) problemi $y_{(k)} = T_k X^{(k)} \neq 0$ çözümlerine sahiptir. Burada T_k 'lar

$$\hat{T}_k = q_k T_k \quad (3.26)$$

denkleminde ya da

$$T_k^{j+1} = q_k T_k^j = \dots = q_k^{j+1} T_k^0, \quad q_k = \frac{1-(1-\sigma)\tau \lambda_k}{1+\sigma\tau \lambda_k}$$

denkleminde elde edilir. T_k^0 sabiti uygun her yolla seçilebilir.

(3.23) denklemi için bir çözüm $y_{(k)} = T_k X^{(k)}$ formunda olup k sayısına bağlı harmonik olarak adlandırılır. Açıkça bu fonksiyon $u_0(x) = T_k^0 X^{(k)}(x)$ başlangıç verisiyle (3.23) denklemini sağlar. Şimdi hangi şartlar altında her $y_{(k)}$, $k = 1, 2, \dots, N - 1$ harmoniğinin kararlı olduğu gösterilsin.

$$y_{(k)}^{j+1} = X^{(k)} T_k^{j+1} = q_k X^{(k)} T_k^j, \quad y_{(k)}^{j+1} = q_k y_{(k)}^j \quad (3.27)$$

tekrarlama bağıntılarından sonuç elde edilebilir. ε , h ve τ 'dan bağımsız sıfırdan büyük sabit olmak üzere $|q_k| \geq 1 + \varepsilon$ için $\tau \rightarrow 0$ iken

$$\|y_{(k)}^{j+1}\| = |q_k| \|y_{(k)}^j\| \geq (1 + \varepsilon) \|y_{(k)}^j\| \geq (1 + \varepsilon)^{j+1} \|y_{(k)}^0\| \rightarrow \infty$$

olup problem kararsız olur. $|q_k| \leq 1$ ve $t = j\tau$ sabit tutulursa, artan j 'ler ($\tau \rightarrow 0$) ile $\|y_{(k)}\|$ artmaz:

$$\|y_{(k)}^{j+1}\| \leq \|y_{(k)}^j\| \leq \dots \leq \|y_{(k)}^0\|$$

ve problemdeki harmonik kararlıdır. $|q_k| \leq 1$ seçimi altında $\|y_{(k)}^j\| \leq \|y_{(k)}^0\|$ elde edilir. Bu durumda şema her harmonikte kararlıdır denir.

Şimdi her harmonikte kararlılığı garanti eden hem $|q_k| \leq 1$ hem de $-1 \leq q_k \leq 1$ için σ değerleri belirlensin. Eğer $1 + \sigma\tau\lambda_k > 0$ yani $\sigma > -\frac{1}{\tau\lambda_k}$ ise $q_k = 1 - \frac{\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k}$ formülünden $q_k < 1$ olduğu açıktır. $q_k \geq -1$ ya da

$$q_k + 1 = \frac{2 + (2\sigma - 1)\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} \geq 0$$

sınırı $2 + (2\sigma - 1)\tau\lambda_k \geq 0$ ya da $\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda_k}$ kısıtlamasından elde edilir. Bu durumda $1 + \sigma\tau\lambda_k > 0$ şartı otomatik olarak elde edilir. $\lambda_k \leq \lambda_{N-1} < \frac{4}{h^2}$ olduğundan

$$-\frac{1}{\tau\lambda_k} \leq -\frac{1}{\tau\lambda_{N-1}} < -\frac{h^2}{4\tau}$$

bağıntısı elde edilir. Bu nedenle bütün $k = 1, 2, \dots, N - 1$ için

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau} = \sigma_0 \tag{3.28}$$

şartı altında $|q_k| \leq 1$ şartı sağlanır. Böylece bütün $y_{(k)} = T_k X^{(k)}$ harmonikleri tek ve aynı $\sigma \geq \sigma_0$ şartı altında kararlıdır. (3.23) şemasının L_2 şebeke normunda $y(x, 0) = u_0(x)$ başlangıç verisine göre kararlılığı gösterilsin. Burada $u_0(x)$ $0 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı ve $x = 0$ ve $x = 1$ 'de sıfır olan bir şebeke fonksiyonudur. Bu amaçla (3.23) probleminin genel çözümü (3.27) formundan elde edilen özel çözümlerin toplamı olarak aransın:

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{y}_{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k X^{(k)}, \quad \|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k^2.$$

$\hat{T}_k = q_k T_k$ alınıp (3.25)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k X^{(k)}, \quad \|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} q_k^2 T_k^2 \\ &\leq \max_k q_k^2 \sum_{k=1}^{N-1} T_k^2 = \max_k q_k^2 \|y\|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\sigma \geq \sigma_0$ sınırlaması altında $\max_k q_k \leq 1$ ve $\|\hat{y}\| \leq \|y\|$ ya da

$$\|y^{j+1}\| \leq \|y^j\| \leq \dots \leq \|y^0\| = \|u_0\|$$

olduğu gösterilebilir. Öyleyse (3.23) probleminin çözümü $\sigma \geq \sigma_0$ için $L_2(\omega_h)$ norm şebekesinde (3.23) şemasının başlangıç verisine göre kararlılığı anlamına gelen

$$\|y^j\| \leq \|u_0\|, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.29)$$

eşitsizliğini sağlar.

Bir fark şeması bazı yollarla h ve τ 'ya bağlı olarak kararlıysa koşullu kararlı, aksi halde koşulsuz kararlı olarak adlandırılır. Bir şema keyfi h ve τ sabitleri için kararlıysa mutlak kararlıdır. $h \leq h_0$ ve $\tau \leq \tau_0$ gibi yeterince küçük h ve τ 'lar için kararlı şemalara rastlanabilir. Bu şemalar kesin kararlı değildir fakat koşulsuz kararlı olabilir.

1. $\sigma = 0$ için açık şema: (3.28) şartından $0 \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$ yani

$$\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.30)$$

şartı elde edilir. Açık şema (3.30) şartı altında şebeke adımı h ve τ 'ya bağlı kararlıdır, yani koşullu kararlıdır.

2. $\sigma \geq \frac{1}{2}$ için kapalı şema: her h ve τ için kapalı şema kararlıdır. Çünkü $\sigma \geq \frac{1}{2} > \sigma_0$ olur. Böylece $\sigma = 1$ ile ileri fark şeması ve $\sigma = \frac{1}{2}$ ile simetrik şema her h ve τ için kararlıdır.
3. $\sigma = \sigma_*$ ($\sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$) ile yüksek mertebeden yaklaşımın şeması mutlak kararlıdır. Gerçekten her h ve τ için $\sigma_* - \sigma_0 = -\frac{h^2}{12\tau} + \frac{h^2}{4\tau} = \frac{h^2}{6\tau} > 0$ olduğundan kesin kararlıdır.
4. $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$ 'den bağımsız σ için $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ ile kapalı şema $\gamma \leq \frac{1}{2-4\sigma}$ sınırlaması konursa koşullu kararlıdır.
5. $\sigma = \frac{1}{2} + \frac{h^2\alpha}{\tau}$ ile $O(h^2 + \tau^2)$ yaklaşımını sağlayan (3.19) şeması eğer $\alpha \geq -\frac{1}{4}$ ise her h ve τ için kararlıdır.

Böylece hem yaklaşımın mertebesi hem de (3.19) şemasının kararlılığı σ parametresine bağlıdır.

Kararlılık araştırılırken sadece t_j ve t_{j+1} iki zaman katı ve $\tau = t_{j+1} - t_j$ adımı ile ilgilenildi. Eğer ω_τ şebekesi düzgün olmazsa yani $\tau_{j+1} = t_{j+1} - t_j$ adımı kat adımına bağlıysa kalan değişmez. Bu durumda σ parametresi katın $j+1$ sayısına bağlıdır, $\sigma = \sigma_{j+1}$, $\sigma \geq \sigma_0^{j+1} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau_{j+1}}$ şeklindedir. Örneğin $O(h^4 + \tau_{j+1}^2)$ kesinlikli şema için $\sigma_*^{j+1} = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau_{j+1}}$ alınabilir.

Eğer $\sigma \geq 0$ ise $\sigma \geq \sigma_0$, $\sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$ tarafından elde edilen (3.28) şartı (3.19) şemasının sağ tarafa göre kararlılığı için yeterlidir. (3.24) probleminin çözümü, $\{X^{(k)}\}$ öz fonksiyonları yardımı ile φ 'yi

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k X^{(k)}, \quad \|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^2 \quad (3.31)$$

şeklinde alıp sağ tarafta yerine yazarak

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k X^{(k)}, \quad \|\hat{y}\|^2 = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k^2 \quad (3.32)$$

formunda aransın. (3.31) ve (3.32) ifadeleri (3.24)'da yerine yazılır ve $\Lambda X^{(k)} = -\lambda_k X^{(k)}$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{N-1} \{T_{kt}(1 + \sigma\tau\lambda_k) + \lambda_k T_k - \varphi_k\} X^{(k)} = 0$$

elde edilir. Öz fonksiyonlar ortogonal sistem oluşturdukları için parantez içi sıfırdır. O halde

$$\hat{T}_k = q_k T_k + \frac{\tau\varphi_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k}, \quad q_k = \frac{1 - (1 - \sigma)\tau\lambda_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} \quad (3.33)$$

ifadeleri elde edilir. Bu ifadeler (3.32)'te yerine yazılırsa

$$\hat{y} = \sum_{k=1}^{N-1} \hat{T}_k X^{(k)} = \sum_{k=1}^{N-1} q_k T_k X^{(k)} + \tau \sum_{k=1}^{N-1} \frac{\varphi_k}{1 + \sigma\tau\lambda_k} X^{(k)}$$

elde edilir. $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\|\hat{y}\| \leq \max_k |q_k| (\sum_{k=1}^{N-1} T_k^2)^{1/2} + \max_k \frac{\tau}{|1 + \sigma\tau\lambda_k|} (\sum_{k=1}^{N-1} \varphi_k^2)^{1/2}$$

ya da

$$\|\hat{y}\| \leq \max_k |q_k| \|y\| + \max_k \frac{\tau}{|1 + \sigma\tau\lambda_k|} \|\varphi\| \quad (3.34)$$

eşitsizliği elde edilir.

$$\sigma \geq \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}, \quad \sigma \geq 0 \quad (3.35)$$

olsun. Bu durumda $|q_k| \leq 1$, $1 + \sigma\tau\lambda_k \geq 1$ ve $\|\hat{y}\| \leq \|y\| + \tau\|\varphi\|$ ya da $\|y^{j'+1}\| \leq \|y^{j'}\| + \tau\|\varphi^{j'}\|$ elde edilir. Bütün $j' = 0, 1, \dots, j$ için ve $\|y^0\| = 0$ başlangıç şartı ile (3.24) probleminin çözümü için

$$\|y^{j+1}\| \leq \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\| \quad (3.36)$$

sonucu ortaya çıkar. Şimdi ise $\sigma \geq \sigma_0$ sınırından kurtulup

$$\sigma \geq \sigma_\varepsilon, \quad \sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1-\varepsilon}{4\tau} h^2, \quad 0 < \varepsilon < 1 \quad (3.37)$$

sınırlaması için durum incelenir. Burada ε h ve τ 'dan bağımsız pozitif sabittir. Gerçekten

$$\begin{aligned} |q_k| \leq 1, \quad 1 + \sigma\tau\lambda_k &= 1 + (\sigma - \sigma_\varepsilon)\tau\lambda_k + \sigma_\varepsilon\tau\lambda_k \\ &\geq 1 + \sigma_\varepsilon\tau\lambda_k \\ &= 1 + \frac{1}{2}\tau\lambda_k - \frac{(1-\varepsilon)h^2\lambda_k}{4} \\ &> 1 - \frac{(1-\varepsilon)h^2\lambda_{N-1}}{4} \\ &> 1 - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4} \frac{4}{h^2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece her $k = 1, 2, \dots, N-1$ için $1 + \sigma\tau\lambda_k > \varepsilon$ elde edilir ve (3.34) ile kombinasyonundan

$$\|\hat{y}\| \leq \|y\| + \tau\|\varphi\|\varepsilon^{-1}$$

ve

$$\|y^{j+1}\| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\| \quad (3.38)$$

eşitsizlikleri sağlar.

$\sigma = \sigma_*$ için $\sigma_* < 0$ şartı $\tau < \frac{1}{6}h^2$ ifadesini sağlar ve $\varepsilon = \frac{2}{3}$ değeri $\frac{1}{4}(1 - \varepsilon) = \frac{1}{12}$ denkleminde elde edilir. (3.29), (3.36) ve (3.38) ifadelerinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau} = \sigma_0$ ve aynı zamanda $\sigma \geq 0$ ise (3.19) şeması başlangıç verisi ve sağ tarafa göre kararludur. Böylece (3.19) probleminin çözümü

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u_0\| + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|$$

eşitsizliğini sağlar.

$\sigma < 0$ olduğunda (3.19) şemasının sağ tarafa göre kararlılığı için

$$\sigma \geq \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau} = \sigma_\varepsilon$$

şartı yeterli bir şarttır. Burada $\varepsilon \in (0,1)$ h ve τ 'dan bağımsız keyfi sabittir. Böyle bir seçim için (3.19) probleminin çözümü

$$\|y^{j+1}\| \leq \|u_0\| + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|$$

eşitsizliğini sağlar.

3.4.2. Maksimum Prensibi

(3.8) problemi aşağıdaki şekilde yeniden düzenlensin:

$$\sigma\tau\Lambda\hat{y} - \hat{y} = -y - (1 - \sigma)\tau\Lambda y - \tau\varphi = -F ,$$

$$\hat{y}_0 = 0, \quad \hat{y}_N = 0 , \quad (3.39)$$

$$y_i^0 = u_0(x_i)$$

Buradan da her kat için şu şekilde bağıntı elde edilir:

$$\sigma \frac{\tau}{h^2} \hat{y}_{i-1} - \left(2\sigma \frac{\tau}{h^2} + 1\right) \hat{y}_i + \sigma \frac{\tau}{h^2} \hat{y}_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$F_i = (1 - \sigma) \frac{\tau}{h^2} y_{i-1} + \left(1 - 2(1 - \sigma) \frac{\tau}{h^2}\right) y_i + \sigma \frac{\tau}{h^2} y_{i+1} + \tau \varphi_i \quad (3.40)$$

Burada (2.5)'teki eşitsizlik $A_i = \sigma$, $B_i = \sigma \frac{\tau}{h^2}$, $C_i = 2\sigma \frac{\tau}{h^2} + 1$ şekliyle kullanılırsa ayrıca $\sigma > 0$ dikkate alınır (3.40) denklemi için bir çözüm aşağıdaki gibi değerlendirilir:

$$\sigma > 0 \text{ için } \|\hat{y}\|_\infty \leq \|F\|_\infty .$$

Eğer $1 - 2(1 - \sigma) \frac{\tau}{h^2} \geq 0$, $1 - \sigma \geq 0$ olursa $\|F\|_\infty \leq \|y\|_\infty + \tau \|\varphi\|_\infty$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\tau \leq \frac{h^2}{2(1-\sigma)} \quad (3.41)$$

sınırlaması altında (3.39) şeması için geçerli olan

$$\|y^{j+1}\|_\infty \leq \|y^j\|_\infty + \tau \|\varphi^j\|_\infty \quad (3.42)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $j' = 0, 1, \dots, j$ boyunca toplam alındığında (3.19) probleminin çözümü için

$$\|y^{j+1}\|_\infty \leq \|y^0\|_\infty + \sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|_\infty \quad (3.43)$$

eşitsizliğine varılır. Sonuç olarak (3.41) şartı altında (3.19) şeması sağ tarafa ve başlangıç verisine göre karardır.

3.4.3. Enerji Eşitsizlikleri Metodu

Enerji eşitsizlikleri metodu (3.8) şemasının kararlılığını araştırmakta çok daha kullanışlıdır.

İlk olarak homojen sınır şartlarıyla (3.4) problemi ele alınsın:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq T \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x). \end{aligned} \tag{3.44}$$

İç çarpım ve norm

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $u(x)$ ve $v(x)$ $0 \leq x \leq 1$ aralığında tanımlı, $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sıfır olan fonksiyonlardır. Denklem $\frac{\partial u}{\partial t}$ ile çarpılıp 0'dan 1'e x 'e göre integral alınırsa

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \left(-\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \left(f, \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

elde edilir. İkinci terime kısmi integrasyon uygulanırsa $\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0}^{x=1} = 0$ olup

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) &= \int_0^1 -\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade eşitlikte yerine yazılırsa

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 = \left(f, \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

denklemini ortaya çıkar. Denklemin sağ tarafı için Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliği ve $\mu = 1$ için μ -eşitsizliği uygulanırsa

$$\left(f, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \leq \left| \left(f, \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\| \|f\| \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2 + \frac{1}{4} \|f\|^2$$

eşitsizliği meydana gelir. Böylece

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \leq \frac{1}{2} \|f\|^2$$

elde edilir. t 'ye göre integral alınır

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|^2 \leq \|u'_0\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|f(\tau)\|^2 d\tau$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\| \leq \|u'_0\| + \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int_0^t \|f(\tau)\|^2 d\tau \right]^{1/2}$$

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\| \leq \|u'_0\| + \sqrt{\frac{t}{2}} \max_{0 < \tau \leq t} \|f(\tau)\|$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|u\|_\infty = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| \leq \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}$$

bağıntısı mevcut olduğundan

$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|u'_0\| + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t}{2}} \max_{0 < \tau \leq t} \|f(\tau)\|$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.19) denklemini için de benzer bir bağıntı gereklidir. Bunun için iç çarpım ve normlar tanımlansın:

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)},$$

$$(y, v) = \sum_{i=1}^N y_i v_i h, \quad \|y\| = \sqrt{(y, y)}.$$

$$y = \frac{1}{2}(\hat{y} + y) - \frac{1}{2}\tau y_t, \quad \hat{y} = \frac{1}{2}(\hat{y} + y) + \frac{1}{2}\tau y_t,$$

$\sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y = \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau y_t + \frac{1}{2}(\hat{y} + y)$ özdeşlikleri (3.24) denkleminde yerine yazılırsa

$$y_t - \left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau \Lambda y_t - \frac{1}{2}\Lambda(\hat{y} + y) = \varphi,$$

$$y(0, t) = y(1, t) = 0, \quad (3.45)$$

$$y(x, 0) = 0$$

elde edilir. (3.45) denkleminde $2\tau y_t h = 2(\hat{y} - y)h$ ile iç çarpım uygulanır ve ω_h şebekesinin $x = ih$ iç düğümleri boyunca toplanırsa

$$2\tau \|y_t\|^2 - 2\left(\sigma - \frac{1}{2}\right)\tau^2 (\Lambda y_t, y_t) - (\Lambda(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = 2\tau(\varphi, y_t) \quad (3.46)$$

eşitliği elde edilir.

$$(\Lambda v, w) = (v_{\bar{x}x}, w) = -(v_{\bar{x}}, w_{\bar{x}}]$$

$$v_0 = w_0 = 0, \quad v_N = w_N = 0$$

Green fark formülü kullanılırsa, $y_0 = y_N = 0$, $v = y_t$, $w = y_t$ ve $v = \hat{y} + y$, $w = \hat{y} - y$ için

$$(\Lambda y_t, y_t) = -\|y_{t\bar{x}}\|^2$$

$$(\Lambda(\hat{y} + y), \hat{y} - y) = -(\|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 - \|y_{\bar{x}}\|^2)$$

elde edilir. Bu ifadeler (3.46)'te yerine yazılırsa her σ için geçerli olan

$$2\tau \left(\|y_t\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \tau \|y_{t\bar{x}}\|^2 \right) + \|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 = \|y_{\bar{x}}\|^2 + 2\tau(\varphi, y_t) \quad (3.47)$$

enerji özdeşliği elde edilir. $\sigma \geq \sigma_0$ olsun. $v = y_t$ ile (3.47) denkleminde parantez içindeki ifade

$$J = \|v\|^2 + \left(\sigma - \frac{1}{2}\right) \tau \|v_{\bar{x}}\|^2$$

biçiminde yazılabilir.

$$\|v_{\bar{x}}\|^2 \leq \frac{4}{h^2} \|v\|^2 \quad (3.48)$$

eşitsizliğinden dolayı $\sigma \geq \sigma_0$ için $J \geq 0$ olduğu gösterilebilir. $\sigma \geq \sigma_0 = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}$ için (3.48)'ten

$$\begin{aligned} J &= \|v\|^2 + (\sigma - \sigma_0)\tau \|v_{\bar{x}}\|^2 + \left(\sigma_0 - \frac{1}{2}\right) \tau \|v_{\bar{x}}\|^2 \\ &\geq \|v\|^2 - \frac{1}{4} h^2 \|v_{\bar{x}}\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Önceki bağıntıların kombinasyonundan enerji eşitsizliği olarak bilinen kuvvetli bir sonuç ortaya çıkar:

$$\|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}\|^2 + 2\tau(\varphi, y_t), \quad \sigma \geq \sigma_0.$$

Eğer $\varphi = 0$ ve y (3.23) probleminin bir çözümü ise $\left| |y_{\bar{x}}^{j+1}| \right| \leq \dots \leq \left| |y_{\bar{x}}^0| \right|$ yani $\sigma \geq \sigma_0$ için $\|y\|_{(1)} = \|y_{\bar{x}}\|$ normunda (3.19) şeması başlangıç verisine göre kararlıdır.

Sağ tarafa göre kararlılık daha özel bir durumdur. $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$, $\sigma_\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4\tau}$, $0 < \varepsilon \leq 1$ olsun. $\sigma \geq \sigma_\varepsilon$ için

$$J \geq \varepsilon \|v\|^2 \quad (3.49)$$

olduğu gösterilebilir. Gerçekten

$$\begin{aligned}
J &= \|v\|^2 + (\sigma - \sigma_\varepsilon)\tau \|v_{\bar{x}}\|^2 + \left(\sigma_\varepsilon - \frac{1}{2}\right)\tau \|v_{\bar{x}}\|^2 \\
&\geq \|v\|^2 - \frac{(1-\varepsilon)h^2}{4} \|v_{\bar{x}}\|^2 \\
&\geq \|v\|^2 - (1 - \varepsilon)\|v\|^2 = \varepsilon\|v\|^2 .
\end{aligned}$$

(3.49) ifadesi (3.47)'te yerine yazılırsa

$$2\tau\varepsilon\|y_t\|^2 + \|\hat{y}_{\bar{x}}\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}\|^2 + 2\tau(\varphi, y_t) , \quad \sigma \geq \sigma_\varepsilon \quad (3.50)$$

enerji eşitsizliği elde edilir. $2\tau(\varphi, y_t)$ ifadesi için Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliği ve μ -eşitsizliği uygulanırsa

$$2\tau(\varphi, y_t) \leq 2\tau\|\varphi\|\|y_t\| \leq 2\tau\mu\|y_t\|^2 + \frac{\tau}{2\mu}\|\varphi\|^2 \quad (3.51)$$

bağıntısı elde edilir. $\mu = \varepsilon$ alınır ve (3.51) ifadesi (3.50)'de yerine yazılırsa

$$\|y_{\bar{x}}^{j'+1}\|^2 \leq \|y_{\bar{x}}^{j'}\|^2 + \frac{\tau}{2\varepsilon}\|\varphi^{j'}\|^2$$

eşitsizliği meydana gelir. Bu ifade $j' = 0, 1, \dots, j$ boyunca toplanır ve $y^0 = 0$ alınır

$$\|y_{\bar{x}}^{j+1}\|^2 \leq \frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|^2$$

sonucu elde edilir. $\|y\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|y_{\bar{x}}\|$ ifadesinden

$$\|y^{j+1}\|_\infty \leq \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} \left[\sum_{j'=0}^j \tau \|\varphi^{j'}\|^2 \right]^{1/2} , \quad \sigma \geq \sigma_\varepsilon$$

ifadesi doğrulanır. Bu da (3.19) şemasının sağ tarafa göre kararlı olduğunu gösterir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada tek boyutlu parabolik başlangıç-sınır değer problemi ele aldı. Bu problem için düzgün şebekede ağırlık içeren fark şeması kuruldu. Daha sonra fark şemasının yaklaşım hatası ve kararlılığı incelendi. Kararlılık incelenirken değişkenlere ayırma metodu, maksimum prensibi ve enerji eşitsizlikleri metodu kullanıldı. İncelemeler sonunda bazı fark şemalarında mutlak kararlılık elde edilirken bazılarında ise koşullu kararlılık gözlemlendi. Maksimum prensibinde kararlılık için diğerlerine göre ağır koşullar ortaya çıktı. Bu yüzden maksimum prensibinin parabolik denklemler için pek kullanışlı olmadığı sonucuna varıldı. Değişkenlere ayırma metodu ve enerji eşitsizlikleri metodunun ise daha kullanışlı olduğu gözlemlendi. Ayrıca enerji eşitsizlikleri metodunun daha genel modellere uygulanma olasılığının olduğu görüldü.

KAYNAKLAR

- Ames, W. 1977. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Pres, New York-London.
- Amirali, G., Duru, H. 2002. Nümerik Analiz. ISBN 975-6802-91-X. Pegem A Yayınları, Ankara, 371 s.
- Evans, G., Blackledge, J., Yardley, P. 2000. Numerical Methods for Partial Differential Equations. Faculty of Computing Sciences & Engineering, De Montfort University, The Gateway, Leicester, 290 s.
- Koca, K. 2003. Kısmi Türevli Denklemler. Gündüz Eğitim ve Yayıncılık, Ankara, 231s.
- Saka, B. 1998. Parabolik denklemlerin nümerik çözümleri. Yüksek Lisans Tezi, Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, 111 s.
- Samarskii, A.A. .A. 2001. The Theory of Difference Schemes. ISBN 0-8247-0468-1. Marcel Dekker, Inc., New York, 761 s.
- Smith, G.D. 1965. Numerical Solution of Partial Differential Equation: Finite Difference. Oxford University Pres, New York.
- Straughan, B. 2004. The Energy Method, Stability and Nonlinear Convection. Springer, Berlin, Germany. 447 s.
- Yıldız, H. 2010. Tek boyutlu parabolik denklemler için fark şemaları. Yüksek Lisans Tezi, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van, 64 s.

ÖZGEÇMİŞ

Hatice ŞİNAR 1986 yılında Bilecik'te doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2004 yılında girdiği Ondokuz Mayıs Üniversitesi Sinop Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında mezun oldu. 2008-2011 yılları arasında Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve halen devam etmektedir.