DİFERANSİYEL VE FARK

MAKSİMUM PRENSİPLERİ

PINAR OKÇU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİFERANSİYEL VE FARK MAKSİMUM PRENSİPLERİ

PINAR OKÇU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Prof.Dr. Gabil AMİRALİ

SİNOP – 2011

T.C.

SİNOP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 30/12/2011 tarihinde yapılan sınav ile MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr. Gabil AMİRALİ

Üye : Yrd.Doç.Dr. Fadime DİRİK

Üye : Yrd.Doç.Dr. Alper SİNAN

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

12/01/2012

Doç.Dr. Hünkar Avni DUYAR

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DİFERANSİYEL VE FARK MAKSİMUM PRENSİPLERİ

ÖZET

Maksimum Prensibi çözümlerin açık ifadeleri bilinmeksizin diferansiyel denklemlerin bu çözümleri hakkında bilgi elde etme imkanı sağlar. Maksimum Prensibi özellikle çözümlerin yaklaşımında faydalı bir araçtır.

Bu çalışmada ikinci mertebe birinci tip self-adjoint sınır değer problemlerinde Maksimum Prensibi incelenerek konuya giriş sunuldu. Daha sonra prensip; self-adjoint olmayan denklemler için ele alındı. İkinci mertebe self-adjoint olmayan periyodik bir problem için de Maksimum Prensibi incelendikten sonra 3.tip sınır-değer problemlerinde prensip ve uygulamaları ifade ve ispat edildi. Son olarak da prensip ve uygulamaları fark sınır-değer problemlerinde incelendi.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Denklemler, Sınır-Değer Problemi, Maksimum Prensibi, Fark Denklemleri

DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE MAXIMUM PRINCIPLES

ABSTRACT

The maximum principle enables us to obtain information about solutions of differential equations without any explicit knowledge of the solutions themselves. In particular the maximum principle is a useful tool in the approximation of solutions.

In this study, the maximum principle for second order first type self-adjoint boundary value problems is investigated as an entrance. Then the principle is discussed for non self-adjoint problems. The maximum principle and its applications are expressed and proved for third type boundary value problems after it is discussed for a second order non self-adjoint periodical problem. Finally, the principle and its applications are studied for difference boundary value problems.

Key Words: Differential Equations, Boundary-Value Problem, The Maximum Principle, Difference Equations

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım esnasında bana yardımcı olan, desteğini esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye , tezimde emeği geçen bütün hocalarıma ve arkadaşlarıma ilgi ve yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca eğitim hayatım boyunca her türlü fedakarlığı gösteren, beni sabırla destekleyen aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

SEMBOLLER

L	Diferansiyel operatör
$u(x)$	Çözüm fonksiyonu
u'	u fonksiyonunun birinci türevi
u''	u fonksiyonunun ikinci türevi
$C^2[0,l]$	$[0,l]$ aralığında kendisi,birinci ve ikinci mertebeden türevleri sürekli fonksiyonlar sınıfı
$y(i) = y_i$	Şebeke fonksiyonu
Δy_i	Sağ (ileri) fark
∇y_i	Sol (geri) fark
α	Alfa
β	Beta
γ	Gamma
λ	Lamda
φ	Phi
ψ	Psi
ξ	Xi
η	Eta
μ	Mü
ε	Epsilon
$u_{\bar{x}x,i}$	u fonksiyonunun ikinci fark türevi
$u_{\overset{\circ}{x},i}$	u fonksiyonunun merkezi fark türevi

1. GİRİŞ

Doğada karşılaşılan her olgu genelde fizik kanunları yardımıyla ve matematik diliyle anlaşılmaya çalışılır. Newton ve 17. yüzyılın diğer bilim insanları fiziğin temel kanunlarını ifade etmek için diferansiyel denklemleri ortaya koymuşlardır. Diferansiyel denklemler fiziksel büyüklükler (kuvvet, kütle, yer değiştirme, v.b.) ve bu büyüklüklerin uzay ve zamana göre değişim oranları (türevleri) arasındaki ilişkilerini tanımlamaktadırlar. Fizik ve mühendislik alanlarındaki değişik süreçlerde karşılaşılan modeller diferansiyel ve integro-diferansiyel denklemlerle ifade edilmektedir. Bu sebeple bu tür denklemlerin çözümlerinin bulunması önem arz etmektedir.

Uygulamalı bilim dallarında karşımıza çıkan diferansiyel denklemlerin incelenmesinde en çok kullanılan araçlardan birisi Maksimum Prensibidir. Bu prensip diferansiyel denklemler için çeşitli sınır-değer problemlerinin varlığının ve tekliğinin ispatında ; ayrıca çözüm ve türevleri için çeşitli eşitsizliklerin elde edilmesinde sık sık kullanılan bir yöntem olarak karşımıza çıkar. Öte yandan fark denklemleri için de ayrık düzeyde Maksimum Prensipleri nümerik analizde sıkça kullanılmaktadır. Bu özelliği ile diferansiyel denklemler için sonlu farklar, sonlu elemanlar, sonlu hacim ve diğer diskritizasyon uygulamalarında oldukça kullanışlıdır (Doğan, 2007).

Matematiksel ve fiziksel araştırmalarda doğal olarak ortaya çıkan çoğu problem eliptik, parabolik ve hiperbolik tipli kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edildiğinden; maksimum prensiplerinin şekilleriyle ilgili yöntem ve tekniklerin incelenmesi kısmi diferansiyel denklemlerin incelenmesine de büyük bir katkı sağlamaktadır.

2. GENEL BİLGİLER

Özellikle diferansiyel denklemlerde sıkça kullanılan Maksimum Prensipleri , diferansiyel denklemlerin çözümlerinin ne olduğunu bilmeden, bu çözümler hakkında bir bilgi edinilmesine yardımcı olur.

Maksimum prensipleri üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bunlardan bazıları; Sperb (1981), diferansiyel denklemlerin fiziksel uygulamalarına eğilerek, kitabında bol miktarda konuyla ilgili örnekler vermiştir. Protter ve Weinberger (1984), diferansiyel denklemlerde maksimum prensiplerine bir boyutlu hal için bir giriş yaparak eliptik, parabolik ve hiperbolik denklemleri ayrıntılı olarak incelemiştir. Sewell (1987), adi ve kısmi diferansiyel denklemler için gerekli olan bazı maksimum prensiplerini ele almıştır. Farrell ve ark. (2000), diferansiyel denklemler için çözümleri sınır katına sahip sınır-değer problemlerine uygulanan nümerik yöntemleri inceledikleri kitabında maksimum prensibini bir boyutlu lineer taşınım difüzyon probleminde ifade etmiştir. Samarskii (2001), fark şemaları teorisini ele aldığı kitabında fark denklemlerini tanımlayarak bu denklemler için maksimum prensiplerini incelemiştir. Amirali ve Duru (2002a), nümerik analizin bazı temel konularını ele aldığı kitabında maksimum prensiplerine de yer vermiştir. Ayrıca periyodik sınır değer problemlerinde de prensibi incelemiştir. Larsson ve Thomée (2005), çeşitli nümerik yöntemlerle kısmi diferansiyel denklemleri inceleyerek, kitabında iki noktalı sınır değer problemi için prensibi uygulamıştır.

Maksimum prensiplerini incelemeden önce; bu bölümde diferansiyel ve fark denklemleri ile ilgili temel kavramlar özet olarak verilecektir.

2.1. Tanımlar

2.1.1. Diferansiyel Denklem

Bir veya daha çok bağımlı değişken, bir veya daha çok bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bağıntıya diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemde bağımsız değişken sayısı bir ise bu denkleme adi diferansiyel denklem denir. Yani adi diferansiyel denklemlerde bağımlı değişken örneğin $u = u(x)$; bir tek bağımsız değişkene sahip olmalıdır. Adi diferansiyel denklem içerisinde bulunan en yüksek mertebeli türevin mertebesine diferansiyel denklemin mertebesi denir. En yüksek mertebeden türevin kuvvetine de diferansiyel denklemin derecesi denir.

2.1.2. Başlangıç-Sınır Değer Problemi

Bir diferansiyel denklemin belli koşullara göre çözümleri arandığında eğer bağımlı değişken ve türevlerine göre koşullar tek bir noktada verilmiş ise probleme başlangıç değer problemi adı verilir. Eğer koşullar farklı noktalarda verilmiş ise probleme sınır değer problemi denir.

2.1.3. Sınır Koşulları

Sınırlı bir bölgede fiziksel olguların matematiksel davranışını kontrol eden bir diferansiyel denklem verildiğinde, u bağımlı değişkeni genellikle o bölgenin sınırında tanımlanır. Sınır verisi sınır koşulları olarak adlandırılır. Sınır koşulları 3 tipte verilir.

Örneğin;

$$Lu := -\left(p(x)u'(x)\right)' + q(x)u(x) = f(x)$$

$$\alpha_1 u(0) - \alpha_2 u'(0) = A^*$$

$$\beta_1 u(l) + \beta_2 u'(l) = B^*$$

ikinci mertebe lineer sınır değer problemi ele alınsın. Burada

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0,\ \ \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0 \ \ p(x), q(x) \in C[0,l],\ \ p(x) \neq 0$$

şeklindedir. Bazı fizik problemlerinde ise genelde

$$\alpha_1\alpha_2 \geq 0,\ \beta_1\beta_2 \geq 0,\ p(x) > 0,\ q(x) \geq 0$$

koşulları sağlanmaktadır.

Bu problem için, $A = \dfrac{A^*}{\alpha_1}; B = \dfrac{B^*}{\beta_1}; A_1 = -\dfrac{A^*}{\alpha_2}; B_1 = \dfrac{B^*}{\beta_2}$ olmak üzere;

$\alpha_2 = \beta_2 = 0$ olması durumunda 1.tip sınır koşulu olup $u(0) = A$, $u(l) = B$ şeklinde ifade edilmektedir.

$\alpha_1 = \beta_1 = 0$ olması durumunda 2.tip sınır koşulu olup $u'(0) = A_1, u'(l) = B_1$ biçiminde ifade edilir.

$\alpha_i \neq 0$, $\beta_i \neq 0$ $i = 0,1$ olması durumunda ise 3.tip sınır koşulu söz konusu olmaktadır.

2.1.4. Sonlu Farklar

$y(i)$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ tam değer argümanlı bir fonksiyon olsun. $y(i) = y_i$ olmak üzere

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$
$$\nabla y_i = y_i - y_{i-1}$$

değerlerine sırasıyla i noktasındaki sağ (ileri) fark ve sol (geri) fark denir.

$$\Delta^2 y_i = \Delta(\Delta y_i) = \Delta(y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - y_{i+1} - (y_{i+1} - y_i)$$
$$= y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

ifadesine ise ikinci fark denir. Benzer olarak m-inci fark aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Delta^m y_i = \Delta\left(\Delta^{m-1} y_i\right) = \Delta^{m-1} y_{i+1} - \Delta^{m-1} y_i$$

2.1.5. Fark Denklemi

Bir veya daha çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farklar ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bağıntıya fark denklemi denir. Yani i bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin Δy_i, $\Delta^2 y_i$, …, $\Delta^m y_i$,… gibi farklarını içine alan bağıntılara fark denklemi denir.

m. mertebeden lineer fark denklemi en genel biçimde şöyle yazılabilir:

$$\alpha_0 \Delta^m y_i + \alpha_1 \Delta^{m-1} y_i + ... + \alpha_{m-1} \Delta y_i + \alpha_m y_i = f_i$$

Burada $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1, ..., \alpha_m$ belirli katsayılardır ve genelde i'e bağımlıdır. $\Delta^k y_i$, $k = 1, 2, 3, ..., m$ farklarının ifadeleri yukarıda yerine konulursa,

$$a_0 y_{i+m} + a_1 y_{i+m-1} + ... + a_{m-1} y_{i+1} + a_m y_i = f_i$$

bağıntısını elde ederiz. Bu da $a_0 \neq 0$, $a_m \neq 0$ durumu için m-inci fark denkleminin tanımı gibi algılanabilir.

3. DİFERANSİYEL VE FARK MAKSİMUM PRENSİPLERİ

3.1. İkinci Mertebeden Birinci Tip Sınır-Değer Problemlerinde Maksimum Prensipleri ve Uygulamaları

Bu bölümde prensipler ikinci mertebeden birinci tip self-adjoint olan problemlerde incelenecektir.

3.1.1. İkinci Mertebeden Self-Adjoint Problemde Maksimum Prensibi

Aşağıdaki ikinci mertebeden birinci tip self-adjoint problem ele alınsın.

$$Lu := -u''(x) + a(x)u(x) = f(x)\,,\ 0 < x < l \tag{3.1}$$

$$u(0) = A\,,\ u(l) = B \tag{3.2}$$

Burada $a(x)$, $f(x) \in C^2[0,l]$ yani kendisi, birinci ve ikinci mertebeden türevleri sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca $a(x) \geq 0$ olup, A, B verilmiş sabitlerdir.

Bu tipteki bir problem için Maksimum Prensibi şu şekilde verilir:

Teorem 3.1: (Maksimum Prensibi)

Lu, (3.1)-(3.2) problemindeki diferansiyel operatör, $v(x) \in C^2[0,l]$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$v(0) \geq 0 \ \left(v(0) \leq 0\right)$$

$$v(l) \geq 0 \ \left(v(l) \leq 0\right)$$

$$Lv(x) \geq 0 \ \left(Lv(x) \leq 0\right),\ \ 0 < x < l$$

ise

$$v(x) \geq 0 \ \left(v(x) \leq 0\right),\ \ 0 \leq x \leq l$$

olur.

İspat: Prensibin ispatı için hipotezin tersi kabul edilsin. Bu durumda

$$v(x_0) < 0, \quad 0 < x_0 < l$$

olacak şekilde $x_0 \in (0,l)$ noktası bulunur. $v(x)$ fonksiyonunun sürekliliğinden ve verilen sınır şartlarından $x_0 \in (x_1, x_2)$ olmak üzere

$$v(x_1) = v(x_2) = 0 \text{ ve } v(x) < 0, \quad x \in (x_1, x_2)$$

olacak şekilde x_1, x_2 noktaları vardır.

$$x_* = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ve } x_* - x_1 = x_2 - x_* = h$$

alınırsa;

$$h = x_* - x_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} - x_1 = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

olur.

Öte yandan $x_0 + h, x_0, x_0 - h$ keyfi noktaları ve keyfi $u(x) \in C^2[0,l]$ fonksiyonu için; $\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{x-(x_0-h)}{h}, x_0 - h < x < x_0 \\ \dfrac{x_0 + h - x}{h}, x_0 < x < x_0 + h \end{cases}$ olmak üzere;

$$u(x_0 + h) = u(x_0) + hu'(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} (x_0 + h - t)u''(t)\,dt$$

$$u(x_0 - h) = u(x_0) - hu'(x_0) + \int_{x_0}^{x_0-h} (x_0 - h - t)u''(t)\,dt$$

Taylor Açılımlarını kullanarak şu bağıntıyı yazmak mümkündür:

$$\frac{u(x_0 + h) - 2u(x_0) + u(x_0 - h)}{h^2} = h^{-1}\int_{x_0-h}^{x_0+h} u''(t)\varphi(t)\,dt \,. \tag{3.3}$$

Ayrıca $\varphi(x)$ fonksiyonu için

$$h^{-1}\int_{x_0-h}^{x_0+h}\varphi(t)dt=1$$

olduğu kolaylıkla görülebilir.

(3.3) eşitliğinin sağ tarafındaki integrale Ortalama Değer Teoremi uygulandığında;

$$\frac{u(x_0+h)-2u(x_0)+u(x_0-h)}{h^2}=u''(\xi)\,,\ \xi\in\left(x_0-h,x_0+h\right)$$

yazılır. Bu eşitliği $v(x)$ fonksiyonu için düşünürsek; öyle bir $\xi\in\left(x_1,x_2\right)$ noktası için;

$$v''(\xi)=\frac{v(x_2)-2v(x_*)+v(x_1)}{h^2}$$

bağıntısı yazılabilir. $v(x_1)=v(x_2)=0$ olduğundan

$$v''(\xi)=\frac{-2v(x_*)}{h^2}>0$$

yazılır. L operatörüne geçildiğinde;

$$Lv(\xi)=-v''(\xi)+a(\xi)v(\xi)<0$$

çelişkisi elde edilir ki bu da teoremin ispatını tamamlar.

Not 3.1: (3.1)-(3.2) problemi için $a(x)\geq\alpha>0$ özel durumunda teoremin ispatı daha kısa bir biçimde verilebilir:

İspat için hipotezin tersi kabul edildiğinde; öyle bir $x_0\in\left(0,l\right)$ noktası için $v(x_0)<0$ olur. $v(x)$ fonksiyonunu bu aralıkta minimum yapan noktaya da x_1 denildiğinde;

$v(x_1) = \min v(x) < 0$, $v'(x_1) = 0$, $v''(x_1) \geq 0$

yazılır. Buradan L operatörüne geçildiğinde;

$$Lv(x_1) = -v''(x_1) + a(x_1)v(x_1) < 0$$

çelişkisine varılır ki teoremin ispatı tamamlanır.

3.1.1.1. Prensibin Uygulaması

Self-adjoint bir problem için Maksimum Prensibinin ifade ve ispatından sonra, bu prensipten yararlanarak problemin $u(x)$ çözümü için bir sınır elde edilebilir:

Lemma 3.1: (3.1)-(3.2) problemi için $a(x) \geq 0$ olduğunda

$$\|u\|_\infty \leq \max\{|A|,|B|\} + \frac{l^2}{8}\|f\|_\infty \tag{3.4}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada

$$\|u\|_\infty = \max_{0\leq x\leq l} |u(x)|$$

şeklindedir.

İspat: Maksimum Prensibi kullanılarak kolayca görülebilir ki;

$$|u(x)| \leq \varphi(x) \ .$$

Burada $\varphi(x)$ aşağıdaki daha basit sınır-değer probleminin çözümüdür:

$$-\varphi'' = \|f\|_\infty ,$$

$$\varphi(0) = |A| ,$$

$$\varphi(l) = |B| .$$

Bu problemden $\varphi(x)$ açıkça bulunursa;

$$-\varphi'' = \|f\|_\infty \Rightarrow \varphi(x) = \frac{-x^2}{2}\|f\|_\infty + C_1 x + C_2$$

$$\varphi(0) = |A| \Rightarrow C_2 = |A|$$

$$\varphi(l) = |B| \Rightarrow C_1 = \frac{|B| - |A| + \frac{l^2}{2}\|f\|_\infty}{l}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \frac{l-x}{l}|A| + \frac{x}{l}|B| + \frac{x(l-x)}{2}\|f\|_\infty$$

şeklindedir. O halde

$$|u(x)| \le \varphi(x) = \frac{l-x}{l}|A| + \frac{x}{l}|B| + \frac{x(l-x)}{2}\|f\|_\infty .$$

$[0,l]$ aralığındaki değerler için

$$\frac{l-x}{l} \le 1,\ \frac{x}{l} \le 1$$

ve $\frac{x(l-x)}{2}$ ifadesi de en büyük değerini orta noktada yani $x = \frac{l}{2}$ de alır.

$$\Rightarrow |u(x)| \le \max\{|A|,|B|\} + \frac{l^2}{8}\|f\|_\infty$$

Buradan da eşitsizliğin doğruluğu kolayca görülür.

Not 3.2: Öte yandan $a(x) \ge \alpha > 0$ özel durumunda (3.1)-(3.2) probleminin $u(x)$ çözümü için

$$\|u\|_\infty \le |A| + |B| + \alpha^{-1}\|f\|_\infty \tag{3.5}$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin gösterimi için

$\psi_{\pm}(x) = \pm u(x) + |A| + |B| + \alpha^{-1}\|f\|_{\infty}$

bariyer fonksiyonu denilen yardımcı fonksiyon ele alındığında kolaylıkla

$\psi_{\pm}(0) \geq 0$, $\psi_{\pm}(l) \geq 0$ ve $L\psi_{\pm}(x) \geq 0$

olduğu gösterilebilir. O halde Maksimum Prensibine göre

$\psi_{\pm}(x) \geq 0$

olur. Buradan da (3.5)'in doğruluğu açıktır.

Eşitsizliğin kullanımını gösterebilmek amacıyla basit bir örnek ele alınsın:

Örnek 3.1: $-u'' + (2 + x^2)u = 1 \qquad 0 < x < 1$

$$u(0) = 1, u(1) = 0$$

problemi ele alınsın. Bu problemde

$A = 1, B = 0$, $a(x) = 2 + x^2 \geq \alpha = 2 > 0$, $f(x) = 1$, $\|f\|_{\infty} = 1$

şeklindedir. O halde

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty} &\leq |A| + |B| + \alpha^{-1}\|f\|_{\infty} \\ &\leq 1 + 0 + (1/2).1 = 3/2 \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$u(0) \geq 0$, $u(1) \geq 0$, $Lu = 1 \geq 0$

olduğundan Maksimum Prensibinden

$u(x) \geq 0$

olur.Bu durumda $u(x)$ çözümü için

$$0 \leq u(x) \leq \frac{3}{2}$$

sınırlaması elde edilir.

3.1.2. İkinci Mertebeden Self-Adjoint Olmayan Problemde Maksimum Prensibi

Aşağıdaki ikinci mertebe birinci tip self-adjoint olmayan problem ele alınsın.

$$Lu := -u''(x) + a(x)u'(x) + b(x)u(x) = f(x),\ 0 < x < l \tag{3.6}$$

$$u(0) = A,\ \ u(l) = B \tag{3.7}$$

Burada $a(x), b(x), f(x) \in C^2[0,l]$ ve $b(x) \geq 0$ olup A, B verilmiş sabitlerdir. Bu tip problemler için de Maksimum Prensibi aynı şekilde ifade edilir:

Teorem 3.2: (Maksimum Prensibi)

Lu, (3.6)-(3.7) problemindeki diferansiyel operatör, $v(x) \in C^2\left[0,l\right]$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$v(0) \geq 0\ \ \left(v\left(0\right) \leq 0\right)$$

$$v(l) \geq 0\ \ \left(v\left(l\right) \leq 0\right)$$

$$Lv(x) \geq 0\ \left(Lv(x) \leq 0\right),\ 0 < x < l$$

ise

$$v(x) \geq 0\ \ \left(v(x) \leq 0\right),\quad 0 \leq x \leq l$$

olur.

Self-adjoint olmayan problemin en genel halinde Maksimum Prensibinin ispatı incelenmeden önce (3.5)-(3.6) probleminde öncelikle

$$b(x) = 0$$

olduğu kabul edilsin. Oluşan yeni problemde Maksimum Prensibi ele alınsın.

3.1.2.1. $b(x)=0$ Durumu

Bu durumu incelerken ilk önce $a(x)\geq \alpha>0$ olduğu kabul edilsin.

3.1.2.1.1. $a(x)\geq \alpha>0$ Durumu

İspat için hipotezin tersi kabul edilsin. Bu durumda

$$v(x_0)<0\,,\ 0<x_0<l$$

olacak şekilde $x_0\in(0,l)$ noktası bulunabilir.

$\omega(x_0)<0$ olacak şekilde

$$\omega(x)=v(x)e^{-\alpha x/2}$$

yardımcı fonksiyonu göz önüne alınsın. $\omega(x)$ fonksiyonunu bu aralıkta minimum yapan noktaya x_1 denildiğinde;

$$\omega(x_1)=\min\omega(x)_{0\leq x\leq l}<0,\ \ \omega'(x_1)=0,\ \ \omega''(x_1)\geq 0$$

yazılabilir.

$$\omega(x)=v(x)e^{-\alpha x/2}\Rightarrow v(x)=\omega(x)e^{\alpha x/2}$$

$$\Rightarrow v'(x)=\omega'(x)e^{\alpha x/2}+\frac{\alpha}{2}e^{\alpha x/2}\omega(x)$$

$$\Rightarrow v''(x)=\omega''(x)e^{\alpha x/2}+\alpha e^{\alpha x/2}\omega'(x)+\frac{\alpha^2}{4}e^{\alpha x/2}\omega(x)$$

Buradan L operatörüne geçildiğinde;

$$Lv(x)=e^{\alpha x/2}\left[-\omega''(x)-\alpha\omega'(x)-\frac{\alpha^2}{4}\omega(x)+a(x)\omega'(x)+a(x)\frac{\alpha}{2}\omega(x)\right].$$

x_1 noktası için;

$$Lv(x_1) = e^{\alpha x_1/2}\left[-\omega''(x_1) - \frac{\alpha^2}{4}\omega(x_1) + a(x_1)\frac{\alpha}{2}\omega(x_1)\right]$$

$$= e^{\alpha x_1/2}\left[-\omega''(x_1) + \frac{\alpha}{2}\left(a(x_1) - \frac{\alpha}{2}\right)\omega(x_1)\right] < 0$$

çelişkisi elde edilir.

3.1.2.1.2. $a(x) \le -\alpha < 0$ Durumu

Bu durumda ise $\omega(x)$ yardımcı fonksiyonu

$$\omega(x) = v(x)e^{\alpha x/2}$$

şeklinde alınarak benzer bir ispat yapılır.

Not 3.3: $a(x) \ge \alpha > 0$ ve $a(x) \le -\alpha < 0$ durumları için $b(x) > 0$ olması halinde de benzer bir ispat yapılır.

Şimdi de (3.6)-(3.7) probleminde $b(x) \ge \beta \ge 0$ olması durumunu ele alalım.

3.1.2.2. $b(x) \ge \beta > 0$ Durumu

İspat için hipotezin tersi kabul edildiğinde

$$v(x_0) < 0$$

olacak şekilde $x_0 \in (0,l)$ noktası vardır. $v(x)$ fonksiyonunu bu aralıkta minimum yapan nokta x_1 olarak kabul edilirse;

$$v(x_1) = \min_{0\le x\le l} v(x) < 0\,,\; v'(x_1) = 0\,,\; v''(x_1) \ge 0$$

yazılabilir. Buradan $Lv(x_1)$' e geçildiğinde;

$$Lv(x_1) = -v''(x_1) + a(x_1)v'(x_1) + b(x_1)v(x_1) < 0$$

çelişkisi elde edilir.

$b(x) \geq \beta > 0$ durumu ele alındıktan sonra (3.6)-(3.7) probleminin en genel hali; $b(x) \geq 0$ durumu incelensin.

3.1.2.3. $b(x) \geq 0$ Durumu

İspat için prensipte öncelikle ;

$v(0) > 0$

$v(l) > 0$

$Lv(x) > 0,\ 0 < x < l$

olduğunda

$v(x) > 0,\ 0 \leq x \leq l$

olması durumu ele alınsın. Bu durumun aksi kabul edildiğinde;

$v(x_0) \leq 0$

olacak şekilde öyle bir $x_0 \in (0,l)$ noktası bulunabilir. Öte yandan $v(x)$ fonksiyonun $0 \leq x \leq l$ aralığındaki minimumuna x_1 denildiğinde

$v(x_1) = \min_{0 \leq x \leq l} v(x) \leq 0,\ v'(x_1) = 0,\ v''(x_1) \geq 0$

yazılabilir. Buradan L operatörüne geçildiğinde

$Lv(x_1) = -v''(x_1) + a(x_1)v'(x_1) + b(x_1)v(x_1) \leq 0$

olur ki bu da $Lv(x) > 0$ olması ile çelişir. O halde $0 \leq x \leq l$ için $v(x) > 0$ olur.

$v(x) \geq 0$ olduğunu görebilmek için ; $\varepsilon > 0$ yeterince küçük bir sabit olmak üzere;

$\omega(x) = v(x) + \varepsilon\varphi(x)$

yardımcı fonksiyonu göz önünde bulundurulsun. Burada

$\varphi(x) = e^{\gamma\lambda} - e^{\lambda x}$, $\lambda > \max\{0, a^*\}$ ve $\gamma > l$ olup $a^* = \max_{0 \le x \le l} a(x)$

şeklindedir.

$$\omega(0) = v(0) + \varepsilon\varphi(0) = v(0) + \varepsilon\left(e^{\gamma\lambda} - 1\right) > 0$$

$$\omega(l) = v(l) + \varepsilon\varphi(l) = v(l) + \varepsilon\left(e^{\gamma\lambda} - e^{\lambda l}\right) > 0$$

$$L\omega(x) = Lv(x) + \varepsilon L\varphi(x) > \varepsilon L\varphi(x) = \varepsilon\left(\lambda^2 - a(x)\lambda\right)e^{\lambda x} + b(x)\varphi(x) > 0$$

bulunur. $\omega(0) > 0$, $\omega(l) > 0$ ve $L\omega(x) > 0$ olduğundan $\omega(x) > 0$ olur.

$\omega(x) = v(x) + \varepsilon\left(e^{\gamma\lambda} - e^{\lambda x}\right) > 0$ ifadesinden $v(x) \ge 0$ olduğu açıkça görülür.

3.1.2.4. Prensibin Uygulaması

Maksimum Prensibinden yararlanarak bu tip problemlerin de çözümü için değerlendirme yapılabilinir.

Lemma 3.2: (3.6)-(3.7) probleminin çözümü $u(x)$ fonksiyonu için

$$\|u\|_\infty \le |A| + |B| + c\|f\|_\infty \tag{3.8}$$

eşitsizliği elde edilebilinir. Burada

$$\varphi(x) = e^{\lambda} - e^{\lambda x/l}$$

fonksiyonu olmak üzere

$$c = \max \varphi(x) \quad \text{ve} \quad \lambda \ge \lambda_0 = \frac{\|a\|_\infty l + \sqrt{\|a\|_\infty^2 l^2 + 4l^2\left(\|b\|_\infty + 1\right)}}{2}$$

şeklindedir. (3.8) eşitsizliğini elde etmek için,

$\lambda \ge 0$, $\varphi(x) = e^{\lambda} - e^{\lambda x/l}$

olmak üzere

$$\psi_{\pm}(x) = \pm u(x) + |A| + |B| + \varphi(x)\|f\|_{\infty}$$

yardımcı fonksiyonuna Maksimum Prensibi şartları uygulanırsa;

$$\psi_{\pm}(0) = \pm u(0) + |A| + |B| + \varphi(0)\|f\|_{\infty} \geq 0$$
$$\psi_{\pm}(l) = \pm u(l) + |A| + |B| + \varphi(l)\|f\|_{\infty} \geq 0$$
$$L\psi_{\pm}(x) = \pm f(x) + b(x)(|A| + |B|) + \|f\|_{\infty} L\varphi(x)$$
$$\geq \pm f(x) + \|f\|_{\infty} \geq 0$$

olması için $L\varphi(x) \geq 1$ olmalıdır.

$$L\varphi(x) = \frac{\lambda^2}{l^2} e^{\lambda x/l} - a(x)\frac{\lambda}{l} e^{\lambda x/l} + b(x)\left(e^{\lambda} - e^{\lambda x/l}\right)$$

$$= \left(\frac{\lambda^2}{l^2} - a(x)\frac{\lambda}{l} - b(x)\right) e^{\lambda x/l} + e^{\lambda} b(x) \geq 1$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^2}{l^2} - \frac{\lambda}{l} a(x) - b(x) - 1 \geq 0$$
$$\Rightarrow \lambda^2 - a(x) l\lambda - (b(x) + 1) l^2 \geq 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a(x) l \pm \sqrt{a(x)^2 l^2 + 4l^2 (b(x) + 1)}}{2}$$

$$\Rightarrow \lambda \geq \lambda_0 = \frac{\|a\|_{\infty} l + \sqrt{\|a\|_{\infty}^2 l^2 + 4l^2 \left(\|b\|_{\infty} + 1\right)}}{2}$$

λ; λ_0 şeklinde seçildiğinde,

$L\varphi(x) \geq 1$,

dolayısıyla da

$$L\psi_{\pm}(x) \geq 0$$

ve Maksimum Prensibinden de

$$\psi_{\pm}(x) \geq 0$$

olur.

$$\psi_{\pm}(x) = \pm u(x) + |A| + |B| + \varphi(x)\|f\|_{\infty} \geq 0$$

$$\Rightarrow |u(x)| \leq |A| + |B| + \max|\varphi(x)|\|f\|_{\infty}$$

$$\Rightarrow |u(x)| \leq |A| + |B| + c\|f\|_{\infty}$$

Buradan da verilen eşitsizliğin doğruluğu kolaylıkla görülür.

Not 3.4: (3.6)-(3.7) probleminin çözümü için;

i) $b(x) \geq \beta > 0$ olması durumunda

$$\|u\|_{\infty} \leq |A| + |B| + \beta^{-1}\|f\|_{\infty};$$

ii) $a(x) \geq \alpha > 0$ ve $a(x) \leq -\alpha < 0$ olması durumunda da

$$\|u\|_{\infty} \leq |A| + |B| + \alpha^{-1}l\|f\|_{\infty}$$

eşitsizlikleri yazılır. İlk eşitsizlik

$$\psi_{\pm}(x) = \pm u(x) + |A| + |B| + \beta^{-1}\|f\|_{\infty}$$

yardımcı fonksiyonuna Maksimum Prensibi şartları uygulanarak bulunur. İkinci eşitsizlik için

$a(x) \geq \alpha > 0$ durumunda

$$\psi_{\pm}(x) = \pm u(x) + |A| + |B| + \alpha^{-1} x \|f\|_{\infty};$$

$a(x) \leq -\alpha < 0$ durumunda ise

$$\psi_{\pm}(x) = \pm u(x) + |A| + |B| + \alpha^{-1}(l - x)\|f\|_{\infty}$$

yardımcı fonksiyonları alınıp Maksimum Prensibi şartları uygulanır. Bu yardımcı fonksiyonlar için kolaylıkla $\psi_{\pm}(0) \geq 0$, $\psi_{\pm}(l) \geq 0$ ve $L\psi_{\pm}(x) \geq 0$ olduğu görülerek istenilen eşitsizlikler elde edilir.

(3.6)-(3.7) probleminin çözümü için sınırlar elde edildikten sonra bu eşitsizlikleri uygulama amaçlı birkaç örnek ele alınsın:

Örnek 3.2: $-u'' + xu' + \sin\frac{\pi x}{2} u = x^2$**,** $\quad 0 < x < 1$

$u(0) = 2$**,** $u(1) = 0$

problemi ele alındığında; bu problemde

$$a(x) = x,\ b(x) = \sin\frac{\pi x}{2} \geq 0$$

şeklindedir.

$$\lambda \geq \lambda_0 = \frac{\|a\|_{\infty} l + \sqrt{\|a\|_{\infty}^2 l^2 + 4l^2\left(\|b\|_{\infty} + 1\right)}}{2} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(1+1)}}{2} = 2$$

$\lambda = 2$ alınırsa; $\varphi(x) = e^2 - e^{2x}$ şeklinde olup; $[0,1]$ aralığında

$\max \varphi(x) = \max\left(e^2 - e^{2x}\right) = e^2 - 1 \leq 8$

bulunur.

$$\Rightarrow \|u\|_\infty \le |A| + |B| + c\|f\|_\infty$$

$$\le 2 + 0 + (8).1 \le 10$$

$$\Rightarrow |u(x)| \le 10 .$$

Ayrıca

$$u(0) \ge 0 ,\; u(1) \ge 0 ,\; Lu = x^2 \ge 0$$

olduğundan Maksimum Prensibinden

$$u(x) \ge 0$$

olur. Bu durumda verilen problemin çözümü için

$$0 \le u(x) \le 10$$

elde edilir.

Örnek 3.3: $-u'' + \left(x - \frac{1}{2}\right)u' + u = \sin \pi x , \quad 0 < x < 1$

$$u(0) = 0 ,\; u(1) = \frac{1}{2}$$

problemi verilsin. Bu problemde;

$$a(x) = x - \frac{1}{2} ,\; b(x) = 1 ,\; f(x) = \sin \pi x ,\; A = 0 , B = \frac{1}{2}$$

şeklindedir.

$b(x) = 1 \ge \beta = 1 > 0$ dersek;

$$\|u\|_\infty \le |A| + |B| + \beta^{-1}\|f\|_\infty \le \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow |u(x)| \le \frac{3}{2}.$$

Ayrıca $u(0) \ge 0$, $u(1) \ge 0$, $Lu = \sin \pi x \ge 0$ olduğundan Maksimum Prensibinden

$$u(x) \ge 0$$

olur. Bu durumda verilen sınır-değer probleminin çözümü için;

$$0 \le u(x) \le \frac{3}{2}$$

elde edilir.

2. mertebeden self-adjoint olmayan periyodik bir problemde de Maksimum Prensibi benzer şekilde incelenebilir.

$$Lu := u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x) = f(x), \quad 0 < x < l \tag{3.9}$$

$$u(0) = u(l) \tag{3.10}$$

$$L_0 u := u'(l) - u'(0) = A \tag{3.11}$$

periyodik problemini ele alındığında bu problem için

$$a(x) \ge \alpha > 0, \; b(x) \ge \beta > 0 \text{ ve } f(x)$$

yeteri kadar düzgün fonksiyonlar olup;

$$a(0) = a(l), \; b(0) = b(l), \; f(0) = f(l)$$

şeklindedir. Bu tip bir problem için Maksimum Prensibi aşağıdaki şekilde verilebilir:

Teorem 3.3: (Maksimum Prensibi)

L ve L_0, (3.9)-(3.11) problemindeki diferansiyel operatör, $v(x) \in C^2[0,l]$ olmak üzere

$$v(0) = v(l)$$

$L_0 v \geq 0$

$Lv(x) \leq 0$, $0 < x < l$

ise

$v(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq l$

olur (Amirali ve Duru, 2002b).

İspat: Prensibin ispatı için hipotezin tersi kabul edilsin. Bu durumda $v(p_0) < 0$ olacak şekilde $x = p_0 \in [0,l]$ noktasının var olduğu düşünülür. p_1 noktası da bu aralıkta $v(x)$ fonksiyonunun minimumu olsun.

$$v(p_1) = \min_{[0,l]} v(x) < 0$$

p_1 minimum olduğundan;

$$v'(p_1) = 0 \text{ ve } v''(p_1) \geq 0$$

olur. Buradan L operatörüne geçersek;

$$Lv(p_1) = v''(p_1) + a(p_1)v'(p_1) - b(p_1)v(p_1) > 0$$

$$\Rightarrow Lv(p_1) > 0$$

bulunur ki bu da hipotezle çelişir. Bu durumda da $v(x)$ fonksiyonunun minimumunu $x = 0$ uç noktasında incelemek gerekir.

$$v(0) = \min v(x) \quad (v(0) = v(l))$$

$x = 0$ noktası minimum olduğundan

$$v'(0) \geq 0$$

olur. Öte yandan

$$L_0 v \geq 0$$

şeklinde idi. O halde

$$L_0 v = v'(l) - v'(0) \geq A$$
$$\Rightarrow v'(l) = A + v'(0) \geq 0$$

bulunur. $v'(0) \geq 0$ ve $v'(l) \geq 0$ olduğundan bu aralıkta $v(x)$ fonksiyonu artan bir fonksiyondur. Bu sebeple negatif minimum noktasını $p_2 \in (0,l)$ gibi bir iç noktada alması gerekir ki bu da yukarıda gösterildiği gibi mümkün değildir.

Lemma 3.3: (3.9)-(3.11) problemi için;

$$\|u\|_\infty \leq \beta^{-1} \|f\|_\infty + \beta_1 |A|$$

yazılır. Burada

$\|u\|_\infty = \max_{[0,1]} |u(x)|$, $\beta_1 = \dfrac{1}{c_0} \coth(c_0 l/4)$, $c_0 = a^* + \sqrt{(a^*)^2 + 4\beta}$ ve $a^* = \max_{[0,1]} a(x)$

şeklindedir (Amirali ve Duru, 2002b).

İspat: Eşitsizliğin gösteriminde; $\omega(x) = \dfrac{e^{-c_0 x/2} + e^{-c_0(l-x)/2}}{c_0\left(1 - e^{(-c_0 l/2)}\right)}$ olmak üzere ;

$$\psi_\pm(x) = \frac{1}{\beta}|f| + |A| \frac{e^{-c_0 x/2} + e^{-c_0(l-x)/2}}{c_0\left(1 - e^{(-c_0 l/2)}\right)} \pm u(x)$$

yardımcı fonksiyonuna Maksimum Prensibi şartları uygulansın. $\psi_\pm(x)$ yukarıda verilen fonksiyon olmak üzere;

$$\psi'_{\pm}(x)=\frac{|A|}{c_0\left(1-e^{(-c_0 l/2)}\right)}\left(\left(-\frac{c_0}{2}\right)e^{-c_0 x/2}+\frac{c_0}{2}e^{-c_0(l-x)/2}\right)\pm u'(x)$$

$$=\frac{-|A|}{2\left(1-e^{(-c_0 l/2)}\right)}\left(e^{-c_0 x/2}-e^{-c_0(l-x)/2}\right)\pm u'(x)$$

$$\psi''_{\pm}(x)=\frac{-|A|}{2\left(1-e^{(-c_0 l/2)}\right)}\left(\left(-\frac{c_0}{2}\right)e^{-c_0 x/2}-\frac{c_0}{2}e^{-c_0(l-x)/2}\right)\pm u''(x)$$

$$=\frac{|A|c_0}{4\left(1-e^{(-c_0 l/2)}\right)}\left(e^{-c_0 x/2}+e^{-c_0(l-x)/2}\right)\pm u''(x)$$

şeklindedir.

$\psi_{\pm}(0)=\psi_{\pm}(l)$ olduğunu gösterelim.

$$\psi_{\pm}(0)=\frac{1}{\beta}|f|+|A|\frac{1+e^{-c_0 l/2}}{c_0\left(1-e^{(-c_0 l/2)}\right)}\pm u(0) \text{ ve } \psi_{\pm}(l)=\frac{1}{\beta}|f|+|A|\frac{e^{-c_0 l/2}+1}{c_0\left(1-e^{(-c_0 l/2)}\right)}\pm u(l)$$

olup $u(0)=u(l)$ olduğundan $\psi_{\pm}(0)=\psi_{\pm}(l)$ olduğu aşikardır.

Şimdi $L_0\psi_{\pm}=\psi'_{\pm}(l)-\psi'_{\pm}(0)\geq 0$ olduğunu gösterelim.

$$\psi'_{\pm}(l)=\frac{-|A|}{2\left(1-e^{(-c_0 l/2)}\right)}\left(e^{-c_0 l/2}-1\right)\pm u'(l)=\frac{|A|}{2}\pm u'(l) \text{ ve}$$

$$\psi'_{\pm}(0)=\frac{-|A|}{2\left(1-e^{(-c_0 l/2)}\right)}\left(1-e^{-c_0 l/2}\right)\pm u'(0)=\frac{-|A|}{2}\pm u'(0) \text{ olduğundan}$$

$$L_0\psi_{\pm}=\psi'_{\pm}(l)-\psi'_{\pm}(0)=\frac{|A|}{2}\pm u'(l)+\frac{|A|}{2}\pm u'(0)$$

$$=|A|\pm(u'(l)-u'(0))=|A|\pm A\geq 0$$

Şimdi $L\psi_{\pm} = \psi''_{\pm}(x) + a(x)\psi'_{\pm}(x) - b(x)\psi_{\pm}(x) \le 0$ olduğunu gösterelim.

$$L\psi_{\pm} = \frac{|A|c_0}{4(1-e^{(-c_0 l/2)})}\left(e^{-c_0 x/2} + e^{-c_0(l-x)/2}\right) \pm u''(x) - a(x)\frac{|A|}{2\left(1-e^{(-c_0 l/2)}\right)}\left(e^{-c_0 x/2} - e^{-c_0(l-x)/2}\right)$$

$$\pm a(x)u'(x) - \frac{b(x)}{\beta}|f| - b(x)|A|\frac{e^{-c_0 x/2} + e^{-c_0(l-x)/2}}{c_0\left(1-e^{(-c_0 l/2)}\right)} \mp b(x)u(x)$$

$$= \frac{e^{-c_0 x/2} + e^{-c_0(l-x)/2}}{1-e^{(-c_0 l/2)}}\left(\frac{|A|c_0}{4} - \frac{a(x)|A|}{2} - \frac{b(x)|A|}{c_0}\right) - \frac{b(x)}{\beta}|f| \pm (u''(x) + a(x)u'(x) - b(x)u(x))$$

$$= \frac{|A|\omega(x)}{4}\left(c_0^2 - 2a(x)c_0 - 4b(x)\right) - \frac{b(x)}{\beta}|f| \pm f(x)$$

$$\le \frac{|A|\omega(x)}{4}(c_0^2 - 2a^* c_0 - 4\beta) + |f|(1 - \frac{b(x)}{\beta})$$

$c_0 = a^* + \sqrt{(a^*)^2 + 4\beta}$ olduğundan $c_0^2 - 2a^* c_0 - 4\beta = 0$ olur.

$$L\psi_{\pm} \le |f|(1 - \frac{b(x)}{\beta}) \le 0 \quad \Rightarrow L\psi_{\pm} \le 0$$

bulunur. Maksimum Prensibi şartları sağlandığından $\psi_{\pm}(x) \ge 0$ olur.

$$\psi_{\pm}(x) = \frac{1}{\beta}|f| + |A|\frac{e^{-c_0 x/2} + e^{-c_0(l-x)/2}}{c_0\left(1-e^{(-c_0 l/2)}\right)} \pm u(x) \ge 0$$

$$\Rightarrow |u(x)| \le \beta^{-1}|f| + |A|\frac{e^{-c_0 x/2} + e^{-c_0(l-x)/2}}{c_0(1-e^{(-c_0 l/2)})}$$

$\omega(x)$ ifadesi maksimumunu $x = l$ noktasında alır.

$$\Rightarrow |u(x)| \le \beta^{-1}|f| + |A|\frac{e^{-c_0 l/2} + 1}{c_0\left(1-e^{(-c_0 l/2)}\right)}$$

$$\Rightarrow |u(x)| \le \beta^{-1}|f| + \frac{|A|}{c_0}\frac{1+e^{-c_0 l/2}}{1-e^{-c_0 l/2}}$$

$$\Rightarrow |u(x)| \leq \beta^{-1}|f| + \frac{|A|}{c_0}\coth(\frac{c_0 l}{4})$$

$$\Rightarrow |u(x)| \leq \beta^{-1}|f| + |A|\beta_1$$

bulunur. Buradan da verilen eşitsizliğin sağlandığı açıktır.

Örnek 3.4: $u'' + \sin x u' - 2u = 0$, $0 < x < \pi$

$$u(0) = u(\pi)$$

$$u'(\pi) - u'(0) = 1$$

problemi verilsin. Bu problemde;

$a(x) = \sin x$, $b(x) = 2 \geq \beta = 2 > 0$, $f(x) = 0$ ve $A = 1$

şeklindedir. $a(x) = \sin x$ olduğu için $[0,\pi]$ aralığında $a^* = \max a(x) = 1$ olur.

$$c_0 = a^* + \sqrt{(a^*)^2 + 4\beta} = 1 + \sqrt{1+8} = 4$$

$$\beta_1 = \frac{1}{c_0}\coth(c_0 l / 4) = \frac{1}{4}\coth(4\pi / 4) = \frac{\coth \pi}{4} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \beta_1 = \frac{1}{2}$$

O halde problemin çözümü için;

$$|u(x)| \leq \beta^{-1}|f| + |A|\beta_1 = 0 + 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow |u(x)| \leq \frac{1}{2}$$

yazılabilir. Ayrıca $u(0) = u(\pi)$, $L_0 u = 1 \geq 0$ ve $Lu = 0 \leq 0$ olduğundan Maksimum Prensibinden $u(x) \geq 0$ olur. Bu durumda $0 \leq u(x) \leq \frac{1}{2}$ şeklindedir.

3.2. İkinci Mertebeden Üçüncü Tip Sınır-Değer Problemlerinde Maksimum Prensibi ve Uygulamaları

İkinci mertebeden üçüncü tip aşağıdaki sınır-değer problemi göz önünde bulundurulsun.

$$Lu := u'' + a(x)u' = f(x), \quad 0 < x < 1 \tag{3.12}$$

$$L_0 u := \beta_1 u(0) - \beta_2 u'(0) = A$$

$$L_1 u := \gamma_1 u(1) + \gamma_2 u'(1) = B \tag{3.13}$$

Burada

$a(x), f(x) \in C^2[0,1]$

$a(x) \geq \alpha > 0; \; x \in [0,1]$

$\beta_1, \beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 + \beta_2 > 0, \quad \gamma_2 \geq 0, \quad \gamma_1 > 0$

şeklindedir. Bu tip bir problem için Maksimum Prensibi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Teorem 3.4: (Maksimum Prensibi)

L, (3.12) denkleminde tanımlanan diferansiyel operatör, $v(x) \in C^2[0,1]$ olsun. Eğer;

$$L_0 v := \beta_1 v(0) - \beta_2 v'(0) \geq 0$$

$$L_1 v := \gamma_1 v(1) + \gamma_2 v'(1) \geq 0$$

$$\forall x \in (0,1) \text{ için } Lv(x) \leq 0$$

ise bu durumda

$$\forall x \in [0,1] \text{ için } v(x) \geq 0$$

olur (Ansari ve Hegarty, 2002).

İspat: Hipotezin tersi kabul edilsin. Bu durumda öyle bir $p \in [0,1]$ noktası için

$v(p) = \min v(x) < 0$

yazılabilir.

$\gamma_1 v(1) + \gamma_2 v^{'}(1) \geq 0$

olduğundan $p \neq 1$ olduğu açıktır. Prensibin ispatı için;

$$\gamma_2 = 0\,,\ \ \frac{\gamma_1}{\gamma_2} > \frac{\alpha}{2}\,,\ \ \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \leq \frac{\alpha}{2}$$

durumları incelensin.

$\gamma_2 = 0$ olsun. $\gamma_2 = 0$ ise $x = 1$ noktasındaki koşul;

$\gamma_1 v(1) \geq 0$, yani $v(1) \geq 0$

şekline dönüşür.

$\omega(x) = v(x)e^{\alpha x/2}$

yardımcı fonksiyonu ele alınsın ve $q \in [0,1]$ noktası $\omega(x)$ fonksiyonunu bu aralıkta minimum yapan nokta olsun. $q \neq 1$ olduğu açıktır; çünkü $q = 1$ olsaydı $v(1) \geq 0$ olduğundan $\omega(1) \geq 0$ olurdu.

$q \in (0,1)$ olduğunda; q minimum olduğundan

$$\omega(q) = \min \omega(x) < 0\,,\ \omega'(q) = 0\,,\ \omega''(q) \geq 0$$

yazılır. $\omega(x) = v(x)e^{\alpha x/2}$ olduğundan

$$v(x) = \omega(x)e^{-\alpha x/2}$$

$$v'(x) = \omega'(x)e^{-\alpha x/2} - \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha x/2}\omega(x)$$

$$v''(x) = \omega''(x)e^{-\alpha x/2} - \alpha e^{-\alpha x/2}\omega'(x) + \frac{\alpha^2}{4}e^{-\alpha x/2}\omega(x)$$

olur. Buradan L operatörüne geçildiğinde;

$$Lv(x) = e^{-\alpha x/2}\left(\omega''(x) - \alpha\omega'(x) + \frac{\alpha^2}{4}\omega(x) + \omega'(x)a(x) - \frac{\alpha}{2}\omega(x)a(x)\right)$$

$$\Rightarrow Lv(q) = e^{-\alpha q/2}\left(\omega''(q) + \frac{\alpha^2}{4}\omega(q) - \frac{\alpha}{2}\omega(q)a(q)\right)$$

$$= e^{-\alpha q/2}\left(\omega''(q) - \frac{\alpha}{2}\left(a(q) - \frac{\alpha}{2}\right)\omega(q)\right) > 0$$

olur. Çünkü

$$e^{-\alpha q/2} > 0\,,\ \left(a(q) - \frac{\alpha}{2}\right) > 0\,,\ \omega''(q) \geq 0\,,\ \ \omega(q) < 0$$

idi. Bu durumda $Lv(q) > 0$ olması hipotezle çelişir. O halde $q \notin (0,1)$ olmalıdır. Şimdi de $q = 0$ olma durumu ele alınsın.

$q = 0$ ve q minimum olduğundan $\omega(0) < 0$ ve $\omega'(0) \geq 0$ olur.

$$v(0) = \omega(0) < 0 \text{ ve } v'(0) = \omega'(0) - \frac{\alpha}{2}\omega(0) > 0$$

olduğundan

$$\beta_1 v(0) - \beta_2 v'(0) < 0$$

olur. Fakat $\beta_1 v(0) - \beta_2 v'(0) \geq 0$ olduğundan çelişki elde edilir. O halde $q \neq 0$ dır.

$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} > \frac{\alpha}{2}$ olsun. Bu durumda da yine

$$\omega(x)=v(x)e^{\alpha x/2}$$

yardımcı fonksiyonu ele alınsın. q noktası ω yı minimum yapan nokta olsun. Öncelikle $q=0$ olma ihtimali ele alınsın.

$q=0$ minimum ve $v(0)=\omega(0)<0$; $v'(0)=\omega'(0)-\frac{\alpha}{2}\omega(0)>0$ olduğundan;

$$\beta_1 v(0)-\beta_2 v'(0)<0$$

olur. Bu da $\beta_1 v(0)-\beta_2 v'(0)\geq 0$ şartıyla çelişir.

$q\in(0,1)$ ise bu durumda q minimum olduğundan,

$$\omega(q)<0\ ,\ \omega'(q)=0 \text{ ve } \omega''(q)\geq 0$$

yazılır ki;

$$Lv(q)=e^{-\alpha q/2}\left(\omega''(q)-\frac{\alpha}{2}\left(a(q)-\frac{\alpha}{2}\right)\omega(q)\right)>0$$

elde edilir ve bu da $Lv(q)\leq 0$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $q\notin(0,1)$ elde edilir.

$q=1$ olabilme durumu incelenirse; q minimum ve $\omega(1)<0$, $\omega'(1)\leq 0$ olmasından

$$v(1)=\omega(1)e^{-\alpha/2}\ \Rightarrow v(1)<0$$

$$v'(1)=\omega'(1)e^{-\alpha/2}-\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha/2}\omega(1)$$

$$\Rightarrow v'(1)+\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha/2}\omega(1)=\omega'(1)e^{-\alpha/2}\leq 0$$

$$\Rightarrow v'(1)+\frac{\alpha}{2}v(1)\leq 0$$

$\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} > \dfrac{\alpha}{2}$ ve $v(1) < 0$ olduğundan $\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} v(1) < \dfrac{\alpha}{2} v(1)$

ise $v'(1) + \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} v(1) < v'(1) + \dfrac{\alpha}{2} v(1) \le 0$

$v'(1) + \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} v(1) < 0$ bulunur. Fakat

$$\gamma_1 v(1) + \gamma_2 v'(1) \ge 0 \;\Rightarrow v'(1) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2} v(1) \ge 0$$

şeklindedir. Yani;

$v'(1) + \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} v(1) < 0$ olması $\gamma_1 v(1) + \gamma_2 v'(1) \ge 0$

şartıyla çelişir. Dolayısıyla $q \ne 1$ dir.

Son olarak $\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} \le \dfrac{\alpha}{2}$ olsun. Bu durumda

$$\omega(x) = v(x) e^{\gamma_1 x/\gamma_2}$$

yardımcı fonksiyonu ele alındığında;

$$v(x) = \omega(x) e^{-\gamma_1 x/\gamma_2}$$

$$\Rightarrow v'(x) = \omega'(x) e^{-\gamma_1 x/\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} e^{-\gamma_1 x/\gamma_2} \omega(x)$$

$$\Rightarrow v''(x) = \omega''(x) e^{-\gamma_1 x/\gamma_2} - \frac{2\gamma_1}{\gamma_2} e^{-\gamma_1 x/\gamma_2} \omega'(x) + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2} e^{-\gamma_1 x/\gamma_2} \omega(x)$$

şeklinde yazılır.

$q = 0$ ise , q ω yı minimum yapan nokta olduğundan;

$\omega(0) < 0$, $\omega'(0) \geq 0$

ve dolayısıyla

$v(0) = \omega(0) < 0$ ve $v'(0) = \omega'(0) - \omega(0) > 0$

olduğundan

$\beta_1 v(0) - \beta_2 v'(0) < 0$

olur. Fakat

$\beta_1 v(0) - \beta_2 v'(0) \geq 0$

olduğundan çelişki elde edilir.
$q \in (0,1)$ ve q ω yı minimum yapan nokta olduğundan;

$\omega(q) < 0$, $\omega'(q) = 0$ ve $\omega''(q) \geq 0$

olur. Buradan L operatörüne geçildiğinde;

$$
\begin{aligned}
Lv(q) &= e^{-\gamma_1 q/\gamma_2}\left(\omega''(q) + \frac{\gamma_1^2}{\gamma_2^2}\omega(q) - a(q)\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\omega(q)\right) \\
&= e^{-\gamma_1 q/\gamma_2}\left(\omega''(q) - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\left(a(q) - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}\right)\omega(q)\right) > 0
\end{aligned}
$$

çelişkisi elde edilir. Çünkü,

$\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \leq \frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow -\frac{\gamma_1}{\gamma_2} \geq -\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow a(q) - \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \geq a(q) - \frac{\alpha}{2}$ olur.

$a(q) \geq \alpha$ olduğundan $a(q) - \dfrac{\alpha}{2} \geq \dfrac{\alpha}{2}$ olur ki $a(q) - \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2} > 0$.

$q = 1$ minimum ise $\omega(1) < 0$ ve $\omega'(1) \leq 0$ olduğundan;

$$v(1) = \omega(1)e^{-\gamma_1/\gamma_2} < 0$$

$$v'(1) = \omega'(1)e^{-\gamma_1/\gamma_2} - \frac{\gamma_1}{\gamma_2}e^{-\gamma_1/\gamma_2}\omega(1)$$

$$\Rightarrow v'(1) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}e^{-\gamma_1/\gamma_2}\omega(1) = \omega'(1)e^{-\gamma_1/\gamma_2} \leq 0$$

$$\Rightarrow v'(1) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}v(1) \leq 0$$

bulunur. Fakat hipotezden

$$\gamma_1 v(1) + \gamma_2 v'(1) \geq 0 \ \Rightarrow v'(1) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}v(1) \geq 0$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda

$$v'(1) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}v(1) = 0$$

olmalıdır. $\gamma_1 > 0$ ve $\omega(1) < 0$; dolayısıyla $v'(1) \neq 0$ olduğundan

$$v'(1) + \frac{\gamma_1}{\gamma_2}v(1) \neq 0$$

olur. O halde $q \neq 1$ elde edilir.

3.2.1. Prensibin Uygulaması

Lemma 3.4: (3.12)-(3.13) problemi için;

$$\|u\|_{\infty} \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_{\infty}\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)+\frac{|A|c}{(\beta_1+\beta_2\alpha)-\beta_1\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}}+\frac{1}{\gamma_1}|B|$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Bu eşitsizliğin gösterimi için

$$\psi_{\pm}(x)=\frac{|A|}{(\beta_1+\beta_2\alpha)-\beta_1\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}}\left(e^{-\alpha x}-\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}\right)+\frac{1}{\gamma_1}|B|$$

$$+\frac{1}{\alpha}\|f\|_{\infty}\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}-x\right)\pm u(x)$$

yardımcı fonksiyonunu ele alınsın. Bu fonksiyona Maksimum Prensibi şartları uygulansın. $\psi_{\pm}(x)$ bu şekilde tanımlandıysa;

$$\psi'_{\pm}(x)=\frac{(-\alpha)|A|e^{-\alpha x}}{(\beta_1+\beta_2\alpha)-\beta_1\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}\|f\|_{\infty}\pm u'(x)$$

şeklindedir.

$$\psi_{\pm}(0)=\frac{|A|}{(\beta_1+\beta_2\alpha)-\beta_1\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}}\left(1-e^{-\alpha}+\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}\right)+\frac{1}{\gamma_1}|B|+\frac{1}{\alpha}\|f\|_{\infty}\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)\pm u(0)$$

$$\psi'_{\pm}(0)=\frac{-\alpha|A|}{(\beta_1+\beta_2\alpha)-\beta_1\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}\|f\|_{\infty}\pm u'(0)$$

olduğundan;

$$\beta_1\psi_{\pm}(0)-\beta_2\psi'_{\pm}(0)$$

$$=\frac{|A|\beta_1\left(1-e^{-\alpha}+\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}\right)}{\beta_1+\beta_2\alpha-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}+\frac{\beta_1|B|}{\gamma_1}+\frac{\beta_1}{\alpha}\|f\|_\infty(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1})\pm\beta_1u(0)$$

$$+\frac{\beta_2\alpha|A|}{\beta_1+\beta_2\alpha-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}+\frac{\beta_2}{\alpha}\|f\|_\infty\mp\beta_2u'(0)$$

$$=\frac{|A|\beta_1\left(1-e^{-\alpha}+\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}\right)+\beta_2\alpha|A|}{\beta_1+\beta_2\alpha-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}+\frac{\beta_1|B|}{\gamma_1}+\frac{\beta_1}{\alpha}\|f\|_\infty\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)+\frac{\beta_2}{\alpha}\|f\|_\infty$$

$$\pm\left(\beta_1u(0)-\beta_2u'(0)\right)$$

$$=\frac{|A|\left(\beta_1+\beta_2\alpha-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}\right)}{\beta_1+\beta_2\alpha-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}+\frac{\beta_1|B|}{\gamma_1}+\|f\|_\infty\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha}+\frac{\beta_1\gamma_2}{\alpha\gamma_1}\right)\pm A$$

$$=|A|+\frac{\beta_1|B|}{\gamma_1}+\|f\|_\infty\left(\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha}+\frac{\beta_1\gamma_2}{\alpha\gamma_1}\right)\pm A$$

bulunur.

$$\frac{\beta_1|B|}{\gamma_1}\geq 0,\ \ \|f\|_\infty\geq 0 \text{ ve } \left(\frac{\beta_1+\beta_2}{\alpha}+\frac{\beta_1\gamma_2}{\alpha\gamma_1}\right)>0$$

olduğundan;

$$\beta_1\psi_\pm(0)-\beta_2\psi_\pm'(0)\geq|A|\pm A\geq 0\ \Rightarrow \beta_1\psi_\pm(0)-\beta_2\psi_\pm'(0)\geq 0$$

elde edilir.

$$\psi_{\pm}(1)=\frac{|A|e^{-\alpha}\dfrac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}}{\beta_1+\beta_2\alpha-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\dfrac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}+\frac{1}{\gamma_1}|B|+\frac{\gamma_2}{\alpha\gamma_1}\|f\|_{\infty}\pm u(1) \text{ ve}$$

$$\psi_{\pm}'(1)=\frac{|A|e^{-\alpha}(-\alpha)}{(\beta_1+\beta_2\alpha)-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\dfrac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}-\frac{1}{\alpha}\|f\|_{\infty}\pm u'(1)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
&\gamma_1\psi_{\pm}(1)+\gamma_2\psi_{\pm}'(1)\\
&=\frac{|A|e^{-\alpha}\gamma_2\alpha}{\beta_1+\beta_2\alpha-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\dfrac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}+|B|+\frac{\gamma_2}{\alpha}\|f\|_{\infty}\pm\gamma_1u(1)-\frac{\gamma_2\alpha|A|e^{-\alpha}}{\beta_1+\beta_2\alpha-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\dfrac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}\\
&-\frac{\gamma_2}{\alpha}\|f\|_{\infty}\pm\gamma_2u'(1)\\
&=|B|\pm(\gamma_1u(1)+\gamma_2u'(1))\\
&=|B|\pm B\geq 0
\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\gamma_1\psi_{\pm}(1)+\gamma_2\psi_{\pm}'(1)\geq 0$$

elde edilir. Öte yandan

$$\psi_{\pm}''(x)=\frac{\alpha^2|A|e^{-\alpha x}}{\beta_1+\beta_2\alpha-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\dfrac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}\pm u''(x)$$

olduğundan

$$L\psi_{\pm}(x)=\psi_{\pm}''(x)+a(x)\psi_{\pm}'(x)$$

$$=\frac{\alpha^2\left|A\right|e^{-\alpha x}}{\beta_1+\beta_2\alpha-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\dfrac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}\pm u''(x)-\frac{\alpha a(x)\left|A\right|e^{-\alpha x}}{\beta_1+\beta_2\alpha-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\dfrac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}$$

$$-\frac{a(x)}{\alpha}\left\|f\right\|_\infty\pm u'(x)a(x)$$

$$=\frac{(\alpha^2-\alpha a(x))\left|A\right|e^{-\alpha x}}{\beta_1+\beta_2\alpha-\beta_1e^{-\alpha}+\beta_1\dfrac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}-\frac{a(x)}{\alpha}\left\|f\right\|_\infty\pm(u''(x)+a(x)u'(x))$$

$$=\frac{\alpha(\alpha-a(x))\left|A\right|e^{-\alpha x}}{\beta_1\left(1-\dfrac{1}{e^{\alpha}}\right)+\beta_2\alpha+\beta_1\dfrac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}-\frac{a(x)}{\alpha}\left\|f\right\|_\infty\pm f(x)$$

$$\leq\frac{\alpha(\alpha-a(x))\left|A\right|e^{-\alpha x}}{\beta_1\left(1-\dfrac{1}{e^{\alpha}}\right)+\beta_2\alpha+\beta_1\dfrac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}}+\left\|f\right\|_\infty\left(1-\frac{a(x)}{\alpha}\right)$$

bulunur.

$$\beta_1\left(1-\frac{1}{e^{\alpha}}\right)+\beta_2\alpha+\beta_1\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}e^{-\alpha}\geq 0\,,\quad (\alpha-a(x))<0\text{ ve }\left(1-\frac{a(x)}{\alpha}\right)\leq 0$$

olduğundan $L\psi_\pm(x)\leq 0$ elde edilir.

Maksimum Prensibinin şartları sağlandığından dolayı $\forall x\in\left[0,1\right]$ için $\psi_\pm(x)\geq 0$ olur.

$$\psi_\pm(x)=\frac{\left|A\right|}{\left(\beta_1+\beta_2\alpha\right)-\beta_1\left(1-\dfrac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}}\left(e^{-\alpha x}-\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}\right)+\frac{1}{\gamma_1}\left|B\right|$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left\|f\right\|_\infty\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}-x\right)\pm u(x)\geq 0$$

$$\Rightarrow |u(x)| \le \frac{|A|}{(\beta_1+\beta_2\alpha)-\beta_1\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}}\left(e^{-\alpha x}-\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}\right)+\frac{1}{\gamma_1}|B|$$

$$+\frac{1}{\alpha}\|f\|_\infty\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}-x\right)$$

olur. $c=\max_{[0,1]}\left(e^{-\alpha x}-\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}\right)$ dersek

$$\Rightarrow |u(x)| \le \frac{|A|c}{(\beta_1+\beta_2\alpha)-\beta_1\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}}+\frac{1}{\gamma_1}|B|+\frac{1}{\alpha}\|f\|_\infty\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}-x\right)$$

yazılır. $1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}-x$ ifadesi de maksimum değerini $x=0$ noktasında alacağından;

$$\Rightarrow |u(x)| \le \frac{|A|c}{(\beta_1+\beta_2\alpha)-\beta_1\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}}+\frac{1}{\gamma_1}|B|+\frac{1}{\alpha}\|f\|_\infty\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)$$

olur ki istenilen eşitsizlik elde edilir.

Örnek 3.5: $u''+\left(3-x^2\right)u'=-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right),\ 0<x<1$

$$u(0)-u'(0)=0$$

$$u(1)+u'(1)=1$$

problemi verilsin. Bu problem için;

$a(x)=3-x^2\ge 3=\alpha>0$; $\beta_1=\beta_2=\gamma_1=\gamma_2=1$; $A=0$ ve $B=1$

şeklindedir. $f(x)=-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ olduğu için $0\le x\le 1$ aralığı için $\|f\|_\infty=1$ olur.

Bu durumda

$$\|u\|_\infty \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_\infty\left(1+\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)+\frac{|A|c}{(\beta_1+\beta_2\alpha)-\beta_1\left(1-\frac{\gamma_2\alpha}{\gamma_1}\right)e^{-\alpha}}+\frac{1}{\gamma_1}|B|$$

eşitsizliğinden

$$\|u\|_\infty \le \frac{1}{3}(1)\left(1+\frac{1}{1}\right)+0+\frac{1}{1}|1| \quad \Rightarrow |u(x)| \le \frac{5}{3}$$

elde edilir. Ayrıca

$L_0u=0\ge 0$; $L_1u=1\ge 0$ ve $\forall x\in(0,1)$ için $Lu=-\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\le 0$

olduğundan Maksimum Prensibinden $u(x)\ge 0$ dır. Bu durumda verilen problemin çözümü için $0\le u(x)\le \frac{5}{3}$ elde edilir.

3.3. İkinci Mertebe Fark Sınır-Değer Problemlerinde Maksimum Prensibi ve Uygulamaları

Diferansiyel problemlere benzer şekilde, diferansiyel denklemin içerdiği türevlerin fark türevleri ile değiştirilmesi sonucu fark problemleri elde edilir.

İkinci mertebeden bir fark denklemi en genel şekliyle;

$$L[y_i]:=-A_iy_{i-1}+C_iy_i-B_iy_{i+1}=F_i$$

şeklinde yazılabilir. Burada $i=1,2,...$ şeklinde olup, y_i şebeke fonksiyonunu ifade etmektedir. Ayrıca $A_i\ne 0$, $B_i\ne 0$ olup A_i, B_i, C_i ve F_i bilinen fonksiyonların i indisi değerleridir.

2.mertebe 1.tip bir fark sınır-değer problemi aşağıdaki gibidir:

$$L[y_i]:=-A_iy_{i-1}+C_iy_i-B_iy_{i+1}=F_i\ ,\quad i=1,2,...,N-1 \tag{3.14}$$

$$y_0=\mu_1,\ y_N=\mu_2 \tag{3.15}$$

Bu tip bir fark problemi için Maksimum Prensibi aşağıdaki şekildedir:

Teorem 3.5: (Maksimum Prensibi)

y_i herhangi bir şebeke fonksiyonu olmak üzere;

$$A_i > 0\,,\;\; B_i > 0\,,\;\; D_i = C_i - A_i - B_i \geq 0\,,\;\; i = 1,2,...,N-1 \qquad (3.16)$$

koşulları sağlansın. Bu durumda

$$L[y_i] \geq 0\,,\;\; i = 1,2,...,N-1$$
$$y_0 \geq 0$$
$$y_N \geq 0$$

ise

$$y_i \geq 0\,,\; i = 0,1,...,N$$

olur (Samarskii, 2001).

İspat: Hipotezin aksi yani $0 < i_* < N$ olmak üzere $i = i_*$ noktasında $y_{i_*} < 0$ olduğu kabul edilsin. Öte yandan $i = i_0$ noktası da bu aralıkta y_i fonksiyonunun negatif minimum değer aldığı nokta olsun.

$$i = i_0 \text{ için } y_{i_0} = \min_{0 \leq i \leq N} y_i < 0$$

i_0 noktası tek olmayabilir. i_{0+1} ve i_{0-1} noktalarında da y_i fonksiyonu minimum değerine ulaşabilir. Bu sebeple genelliği bozmadan bu noktalardaki değerlerden bir tanesinin i_0 noktasındaki değerden büyük olduğu kabul edilir. Bu durumda

$$y_{i_{0+1}} > y_{i_0}\,,\;\; y_{i_{0-1}} \geq y_{i_0}$$

yazılabilir. L operatörüne i_0 noktası uygulandığında

$$L[y_{i_0}] = -A_{i_0} y_{i_0-1} + C_{i_0} y_{i_0} - B_{i_0} y_{i_0+1}$$
$$= -B_{i_0}(y_{i_0+1} - y_{i_0}) + A_{i_0}(y_{i_0} - y_{i_0-1}) + (C_{i_0} - A_{i_0} - B_{i_0}) y_{i_0}$$

$$y_{i_{0+1}} - y_{i_0} > 0 \text{ ve } y_{i_0} - y_{i_{0-1}} \le 0$$

olduğundan

$$L[y_{i_0}] < y_{i_0}(C_{i_0} - A_{i_0} - B_{i_0}) \le 0 \quad \Rightarrow L[y_{i_0}] < 0$$

çelişkisi elde edilir.

Not 3.5: Eğer yukarıda verilen prensibin şartları

$$L[y_i] \le 0, \ \ i = 1, 2, ..., N-1; \ y_0 \le 0; \ y_N \le 0$$

şeklinde ise bu durumda

$$y_i \le 0, \ \ i = 0, 1, ..., N$$

olur.

2.mertebe 1.tip fark sınır-değer problemlerinde Maksimum Prensibinden faydalanarak aşağıdaki Karşılaştırma Prensibi de ele alınabilinir:

(3.16) koşulları altında; y_i**,** (3.14)-(3.15) probleminin çözümü;

y_i^* ise

$$L[y_i^*] = F_i^*, \ \ i = 1, 2, ..., N-1$$
$$y_0^* = \mu_1^*$$
$$y_N^* = \mu_2^*$$

probleminin çözümü olsun. Eğer

$$|F_i| \le F_i^*, \ \ |\mu_1| \le \mu_1^*, \ \ |\mu_2| \le \mu_2^*$$

ise bu durumda

$$|y_i| \le y_i^*$$

şeklindedir.

Bu prensip için $u_i = y_i^* - y_i$ ve $v_i = y_i^* + y_i$ fonksiyonları ele alındığında bu fonksiyonların, sırasıyla sağ taraf fonksiyonları $F_i^* - F_i \ge 0$ ve $F_i^* + F_i \ge 0$; sınır değerleri $u_0 = \mu_1^* - \mu_1 \ge 0$, $u_N = \mu_2^* - \mu_2 \ge 0$ ve $v_0 = \mu_1^* + \mu_1 \ge 0$, $v_N = \mu_2^* + \mu_2 \ge 0$ olan (3.14) denklemini sağladığı görülmektedir. Bu fonksiyonlara Maksimum Prensibi şartları uygulandığında $u_i \ge 0$, $v_i \ge 0$ bulunur ki; bu da $-y_i^* \le y_i \le y_i^*$ yani $|y_i| \le y_i^*$ olduğunu gösterir.

3.3.1. Prensibin Uygulaması

Maksimum ve Karşılaştırma Prensipleri kullanılarak bazı 2.mertebe 1.tip fark sınır-değer problemlerinin çözüm değerlendirmeleri yapılabilir:

Lemma 3.5: $L[y_i] = 0$, $0 < i < N$ (3.17)

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2 \tag{3.18}$$

probleminin çözümü için;

$$\|y\|_\infty = \max_{0 \le i \le N} |y_i| \le \max\left(|\mu_1|, |\mu_2|\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. (Samarskii, 2001)

İspat: Bu değerlendirme için;

$$L[y_i^*] = 0, \quad 0 < i^* < N$$

$$y_0^* = y_N^* = \mu = \max\left(|\mu_1|, |\mu_2|\right)$$

yardımcı problemi ele alınsın. (3.17)-(3.18) probleminin çözümü y_i fonksiyonu için Karşılaştırma Prensibinden;

$$|y_i| \le y_i^*$$

yazılabilir. Maksimum Prensibi yardımıyla da

$$\|y^*\|_\infty \le \mu$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. O halde

$$|y_i| \le y_i^* \le |y_i^*| \le \|y^*\|_\infty \le \mu \Rightarrow \|y\|_\infty \le \mu = \max\left(|\mu_1|, |\mu_2|\right)$$

olur.

Lemma 3.6: $i = 1, 2, ..., N-1$ için;
$|A_i| > 0$, $|B_i| > 0$, $D_i^* = |C_i| - |A_i| - |B_i| > 0$

olmak üzere;

$$L[y_i] = -A_i y_{i-1} + C_i y_i - B_i y_{i+1} = F_i, \; i = 1, 2, ..., N-1 \tag{3.19}$$
$$y_0 = 0, \; y_N = 0 \tag{3.20}$$

probleminin çözüm fonksiyonu için;

$$\|y\|_\infty \le \left\| \frac{F}{D^*} \right\|_\infty$$

yazılabilir. (Samarskii, 2001)
İspat: $L[y_i] = -A_i y_{i-1} + C_i y_i - B_i y_{i+1} = F_i$ şeklinde tanımlanan L operatöründen;

$$C_i y_i = A_i y_{i-1} + B_i y_{i+1} + F_i \qquad (3.21)$$

yazılabilir. Öte yandan $|y_i|$ fonksiyonunun $0 < i_0 < N$ olmak üzere $i = i_0$ noktasında maksimum değerini aldığı kabul edilsin. (3.21) eşitliğinde $i = i_0$ alınırsa;

$$\begin{aligned} \left|C_{i_0} y_{i_0}\right| = \left|C_{i_0}\right|\left|y_{i_0}\right| &= \left|A_{i_0} y_{i_0-1} + B_{i_0} y_{i_0+1} + F_{i_0}\right| \\ &\le \left|A_{i_0}\right|\left|y_{i_0-1}\right| + \left|B_{i_0}\right|\left|y_{i_0+1}\right| + \left|F_{i_0}\right| \\ &\le \left|A_{i_0}\right|\left|y_{i_0}\right| + \left|B_{i_0}\right|\left|y_{i_0}\right| + \left|F_{i_0}\right| \\ &= \left(\left|A_{i_0}\right| + \left|B_{i_0}\right|\right)\left|y_{i_0}\right| + \left|F_{i_0}\right| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\left|C_{i_0}\right| - \left|A_{i_0}\right| - \left|B_{i_0}\right|\right)\left|y_{i_0}\right| \le \left|F_{i_0}\right|$$

$$\Rightarrow D_{i_0}^* \left|y_{i_0}\right| \le \left|F_{i_0}\right| \;\; \Rightarrow \left|y_{i_0}\right| \le \frac{\left|F_{i_0}\right|}{D_{i_0}^*} \le \left|\frac{F_{i_0}}{D_{i_0}^*}\right|$$

$$\Rightarrow \left|y_{i_0}\right| = \max_{0\le i\le N} \left|y_i\right| \le \left|\frac{F_{i_0}}{D_{i_0}^*}\right| \le \max_{0\le i\le N}\left|\frac{F_{i_0}}{D_{i_0}^*}\right|$$

$$\Rightarrow \left\|y\right\|_\infty \le \left\|\frac{F}{D^*}\right\|_\infty$$

olduğu bulunur.

Öte yandan y_i şebeke fonksiyonu için;

φ_i fonksiyonu,

$$B_i(\varphi_i - \varphi_{i+1}) - A_i(\varphi_{i-1} - \varphi_i) = F_i, \;\; i = 1, 2, ..., N-1 \qquad (3.22)$$

$$\varphi_0 = \varphi_N = 0 \qquad (3.23)$$

probleminin çözümü; u_i fonksiyonu da,

$$L[u_i]=-A_iu_{i-1}+C_iu_i-B_iu_{i+1}=-D_i\varphi_i \tag{3.24}$$

$$u_0=u_N=0 \tag{3.25}$$

probleminin çözümü olmak üzere

$$y_i=u_i+\varphi_i$$

şeklinde yazılabilir. (3.24)- (3.25) fonksiyonunun çözümü için bir önceki ispattan;

$$\|u\|_\infty=\max_{0\le i\le N}|u_i|\le\left\|\frac{F}{D}\right\|_\infty=\left\|\frac{D\varphi}{D}\right\|_\infty=\|\varphi\|_\infty\,;$$

yani;

$$\|u\|_\infty\le\|\varphi\|_\infty$$

bulunur. Şimdi de (3.16) koşulları sağlanmak üzere; $F_i=-D_i\varphi_i$ eşitliği ile (3.19)-(3.20) probleminin çözümü için;

$$\|y\|_\infty\le\|\varphi\|_\infty \tag{3.26}$$

eşitsizliğinin yazılabileceği gösterilsin.

(3.19)-(3.20) problemi $F_i=-D_i\varphi_i$ eşitliği ile;

$$L[y_i]=-A_iy_{i-1}+C_iy_i-B_iy_{i+1}=-D_i\varphi_i\,,\ i=1,2,...,N-1 \tag{3.27}$$

$$y_0=0\,,\ y_N=0 \tag{3.28}$$

şeklinde yeniden yazılsın.

$D_i \equiv 0$ olması durumunda (3.27)-(3.28) probleminin çözümü $y_i \equiv 0$ olacağından (bu aşikar çözüm Maksimum Prensibinden kolaylıkla görülür) (3.26) eşitsizliğinin sağlandığı açıktır.

En azından bir noktada $D_i > 0$ olduğu kabul edilsin.

$Y_i \geq 0$ fonksiyonu da

$$L[Y_i] = D_i |\varphi_i|, \; i = 1, 2, ..., N-1 \tag{3.29}$$

$$Y_0 = Y_N = 0 \tag{3.30}$$

probleminin çözümü olacak şekilde belirlenirse Karşılaştırma Prensibi yardımıyla

$$\|y\|_\infty \leq \|Y\|_\infty$$

olduğu kolaylıkla görülür. Kabul edilsin ki $Y_i \geq 0$ fonksiyonu maksimum değerini $i = i_0$ noktasında alsın. Bu durumda Y_{i_0} maksimum değer olduğundan;

$$B_{i_0}(Y_{i_0+1} - Y_{i_0}) \leq 0, \;\; A_{i_0}(Y_{i_{0-1}} - Y_{i_0}) \leq 0$$

yazılır. (3.29) ve (3.30) dan

$$L[Y_i] = -A_i Y_{i-1} + C_i Y_i - B_i Y_{i+1} = D_i |\varphi_i|$$

olduğundan

$$\begin{aligned} L[Y_{i_0}] &= -A_{i_0} Y_{i_0-1} + C_{i_0} Y_{i_0} - B_{i_0} Y_{i_0+1} \\ &= -A_{i_0}(Y_{i_0-1} - Y_{i_0}) + (C_{i_0} - A_{i_0} - B_{i_0}) Y_{i_0} - B_{i_0}(Y_{i_{0+1}} - Y_{i_0}) \\ &= -A_{i_0}(Y_{i_0-1} - Y_{i_0}) + D_{i_0} Y_{i_0} - B_{i_0}(Y_{i_0} - Y_{i_0+1}) \\ &\geq D_{i_0} Y_{i_0} \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$L[Y_{i_0}] = D_{i_0}\left|\varphi_{i_0}\right|$$

olduğundan;

$$D_{i_0}Y_{i_0} \le D_{i_0}\left|\varphi_{i_0}\right| \le D_{i_0}\left\|\varphi\right\|_\infty$$

olur. $D_{i_0} > 0$ olması durumunda

$$D_{i_0}Y_{i_0} \le D_{i_0}\left\|\varphi\right\|_\infty$$

olduğundan;

$$Y_{i_0} = \max\left|Y_i\right| = \left\|Y\right\|_\infty \le \left\|\varphi\right\|_\infty \Rightarrow \left\|Y\right\|_\infty \le \left\|\varphi\right\|_\infty \tag{3.31}$$

yazılır. $i = i_1 = i_0 + 1$ (ya da $i_1 = i_0 - 1$) noktası için de benzer işlemler tekrar edildiğinde

$$D_{i_1}Y_{i_1} \le D_{i_1}\left\|\varphi\right\|_\infty$$

elde edilir ki buradan da (3.31) eşitsizliği yazılabilir. Bu şekilde devam edildiğinde; $D_i \neq 0$ olduğu için herhangi bir $i = i_\alpha$ için $D_{i_\alpha} > 0$ ve (3.31) eşitsizliği elde edilir.

$\left\|y\right\|_\infty \le \left\|Y\right\|_\infty$ ve (3.31) eşitsizliğinden

$$\left\|y\right\|_\infty \le \left\|\varphi\right\|_\infty$$

bulunur.

Öte yandan fark şemalarının kararlılığını incelemek için de Maksimum Prensibinden yararlanılır:

$$Lu := -u'' + a(x)u' + b(x)u = f(x), \quad 0 < x < l \tag{3.32}$$

$$u(0) = A, \quad u(l) = B \tag{3.33}$$

ikinci mertebeden self-adjoint olmayan sınır-değer problemi ele alınsın. Bu problemde $b(x)\geq 0$ ve $a(x)$ yeterince düzgün fonksiyonlardır. Böyle bir sınır-değer probleminin Maksimum Prensibini sağladığı bilinmektedir. Bu problem için şu şekilde bir fark şeması kurulabilir:

$$u''(x_i)=u_{\bar{x}x,i}-\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_i), \qquad \xi_i\in(x_i,x_{i+1})$$

$$u'(x_i)=u_{\overset{\circ}{x},i}-\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\eta_i), \qquad \eta_i\in(x_{i-1},x_{i+1})$$

fark türevleri denklemde yerine konulursa;

$$L[u_i]:=-u_{\bar{x}x,i}+a_iu_{\overset{\circ}{x},i}+b_iu_i+R_i=f_i, \quad 1\leq i\leq N-1$$

$$R_i=\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\xi_i)-a_i\frac{h^2}{6}u^{(3)}(\eta_i),\ u\in C^4[0,l]$$

elde edilir. Bu bilgiler doğrultusunda (3.32)-(3.33) problemine karşılık gelen fark şeması aşağıdaki gibidir:

$$L[y_i]:=-\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}+a_i\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}+b_iy_i=f_i$$

$$\Rightarrow-\left(\frac{1}{h^2}+\frac{a_i}{2h}\right)y_{i-1}+\left(b_i+\frac{2}{h^2}\right)y_i-\left(\frac{1}{h^2}-\frac{a_i}{2h}\right)y_{i+1}=f_i$$

$$A_i=\frac{1}{h^2}+\frac{a_i}{2h},\ C_i=b_i+\frac{2}{h^2},\ B_i=\frac{1}{h^2}-\frac{a_i}{2h}$$

olur.Bu fark denkleminin Maksimum Prensibini sağlaması için $A_i>0$, $B_i>0$, $C_i>0$ ve $C_i\geq A_i+B_i$ olmalıdır. $C_i=b_i+\frac{2}{h^2}$ ve $b(x)\geq 0$ olduğundan $C_i>0$ ve $C_i=b_i+\frac{2}{h^2}\geq\frac{2}{h^2}$ olduğundan $C_i\geq A_i+B_i$ olduğu açıktır. $A_i>0$ ve $B_i>0$ olabilmesi için

$$\frac{1}{h^2} \pm \frac{a_i}{2h} > 0 \;\Rightarrow \frac{1}{h^2} > \left|\frac{a_i}{2h}\right| \;\Rightarrow \frac{1}{h} > \frac{|a_i|}{2} \;\Rightarrow h|a_i| < 2 \Rightarrow \|a\|_\infty h < 2$$

elde edilir. Buradan da $a(x)$ fonksiyonunun çok büyük değerleri için bu şemanın kararlı olmadığı anlaşılmaktadır. Dolayısıyla Maksimum Prensibi yardımıyla bu tip bir fark şemasının kararlılığı incelenebilmektedir.

1.tip problemlere benzer şekilde 3.tip fark sınır-değer problemleri için de Maksimum Prensibi verilebilir.

Aşağıdaki 3.tip fark sınır-değer problemi ele alınsın.

$$L[y_i] = -A_i y_{i-1} + C_i y_i - B_i y_{i+1} = F_i\,,\;\; i = 1,2,...,N-1 \tag{3.34}$$

$$L[y_0] = y_0 - \chi_1 y_1 \tag{3.35}$$

$$L[y_N] = y_N - \chi_2 y_{N-1} \tag{3.36}$$

(3.34)-(3.36) problemi için Maksimum Prensibi şu şekildedir:

Teorem 3.6: (Maksimum Prensibi)

$A_i > 0\,,\;\; B_i > 0\,,\; C_i \geq A_i + B_i\,,\quad i = 1,2,...,N-1$

$0 \leq \chi_1 \leq 1\,,\; 0 \leq \chi_2 \leq 1\,,\; 0 < \chi_1 + \chi_2 < 2$

ve $y_i \neq sbt$ fonksiyonu için

$L[y_i] \geq 0 \;\; (i = 0,1,...,N)$

olsun.Bu durumda

$i = 0,1,...,N$ için $y_i \geq 0$

şeklindedir. (Samarskii, 2001)

İspat: $i=0,1,...,N$ için $L[y_i]\geq 0$ olsun. Hipotezin aksine $i=i_*$ noktasında $y_{i_*}<0$ olduğunu kabul edelim. y_i fonksiyonunu bu aralıkta minimum yapan noktaya da i_0 noktası dersek;

$y_{i_0}=\min_{0\leq i\leq N} yi=m_0<0$

yazılabilir.

$i_0=0$ noktası ise; yani $\min y_i=y_0=m_0<0$ olduğundan $y_1>m_0$ olur. Öte yandan

$$L[y_0]=y_0-\chi_1 y_1=(1-\chi_1)y_0+\chi_1(y_0-y_1)$$

yazılabilir. ($\chi_1>0$ ve $1-\chi_1\geq 0$) ya da ($\chi_1\geq 0$ ve $1-\chi_1>0$) ; ayrıca $y_0-y_1<0$ olduğundan

$L[y_0]<0$

çelişkisi elde edilir.

$i_0=N$ noktası ise; yani $\min y_i=y_N=m_0<0$ olacağından $y_{N-1}>m_0$ olur. Öte yandan

$$L[y_N]=y_N-\chi_2 y_{N-1}=(1-\chi_2)y_N+\chi_2(y_N-y_{N-1})$$

olur.

($\chi_2>0$ ve $1-\chi_2\geq 0$) ya da ($\chi_2\geq 0$ ve $1-\chi_2>0$) ; ayrıca $y_N-y_{N-1}<0$ olduğundan

$$L[y_N]<0$$

çelişkisi elde edilir.

Eğer i_0 noktası $0<i_0<N$ şeklinde bir iç nokta ise 1.tip fark sınır-değer problemindeki Maksimum Prensibinde yapılan ispata benzer olarak

$$\begin{aligned}L[y_{i_0}]&=-A_{i_0}y_{i_{0-1}}+C_{i_0}y_{i_0}-B_{i_0}y_{i_{0+1}}\\&<y_{i_0}(C_{i_0}-A_{i_0}-B_{i_0})\leq 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow L[y_{i_0}]<0$ çelişkisi elde edilir.

4. SONUÇ

Doğada karşılaşılan her olgu fizik kanunlarıyla anlaşılmaya çalışılmış, fizik kanunlarını ifade etmek için diferansiyel denklemler ortaya konulmuştur. Maksimum prensibi ise bu denklemlerin incelenmesinde, çözümler bilinmeden çözümlerin değerlendirilmesini yapabilmede önemli bir rol oynamaktadır.

Bu çalışmada diferansiyel denklemleri incelemede en faydalı ve bilinen araçlardan olan Maksimum Prensibi; ikinci mertebeden birinci tip sınır-değer problemlerinde incelenip, bu problemlerin çözüm değerlendirmeleri yapılarak konuya giriş sunuldu.

Daha sonra prensip, üçüncü tip sınır-değer problemleri için ele alındı. Ayrıca problemin çözümü Maksimum Prensibi yardımıyla değerlendirildi ve son olarak da fark denklemlerinde prensip ve uygulamaları incelendi.

5. KAYNAKLAR

Ansari,A.R., Hegarty, A.F. 2002. Numerical solution of a convection diffusion problem with Robin boundary conditions. Journal of Computational and Applied Mathematics, 156:221-238.

Amirali, G., Duru, H. 2002a. Nümerik Analiz. ISBN 975-6802-91-X. Pegema Yayıncılık, Ankara, 371 s.

Amirali, G.M., Duru, H. 2002b. A Uniformly Convergent Difference Method for the Periodical Boundary Value Problem. Computers and Mathematics with Applications, 46:695-703

Doğan, K. 2007. Parabolik Denklemlerde Maksimum Prensipleri. Yüksek Lisans Tezi, Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Van, 34 s.

Farrell, P.A., Hegarity, A.F., Miller, J.J.H., O'Riordan, E., Shiskin, G.I. 2000. Robust Computational Techniques for Boundary Layers. ISBN 1-58488-192-5. Chapman&Hall/Crc, Boca Raton, London,New York, Washington, D.C.,254 p.

Larsson S., Thomée, V., 2005. Partial Differential Equations with Numerical Methods. ISBN-10 3-540-01772-0. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 260 p.

Protter, M.H., Weinberger, H.F. 1984. Maximum Principles in Differential Equations. ISBN 0-387-96068-6. Springer, Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 261 p.

Samarskii, A.A. 2001.The Theory of Difference Schemes. ISBN 0-8247-0468-1. Marcel Dekker,Inc., New York, 761 p.

Sewell, M.J. 1987. Maximum and Minimum Principles. ISBN 978-0-521-33244-6. Cambridge University Press, New York, 468 p.

Sperb, R.P. 1981. Maximum Principles and Their Applications. ISBN 0-12-656880-4. Academic Press, New York, 221 p.

ÖZGEÇMİŞ

Pınar OKÇU 1986 yılında Denizli'de doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Denizli'de tamamladı. 2004 yılında girdiği Pamukkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2008 yılında mezun oldu. 2008 yılında Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2009 yılında Sinop Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. Aynı yıl Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'na yatay geçiş yaptı ve burada öğrenimine halen devam etmektedir.