İSTATİSTİKSEL KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

SEVDA ORHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKSEL KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

SEVDA ORHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. KAMİL DEMİRCİ

SİNOP – 2011

T.C.

SİNOP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 29/12/2011 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Sevda AKDAĞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alper SİNAN

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

03/01/2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Doç. Dr. Hünkar Avni DUYAR

İSTATİSTİKSEL KOROVKİN TİPİ YAKLAŞIM TEOREMLERİ

ÖZET

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrıldı. İkinci bölümde istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtıldı. Buna ilişkin örnekler ve bazı sonuçlar verildi. Üçüncü bölümün birinci kısmında pozitif lineer operatörler ile ilgili genel bilgiler ve ikinci kısımda klasik Korovkin tipi yaklaşım teoremleri verildi. Üçüncü kısımda istatistiksel yakınsaklık kullanılarak Korovkin tipi teorem çalışıldı ve bu teoremin mertebesi verildi. Dördüncü ve beşinci kısımda sırasıyla periyodik fonksiyonlar için istatistiksel Korovkin tipi teorem ve $L_p\left[a,b\right]$ de istatistiksel Korovkin tipi teorem incelendi. Son kısımda ise pozitif lineer operatörlerin eş-istatistiksel yakınsaklığı ve eş-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak bir Korovkin tipi teorem çalışıldı. Daha sonra bu teoremi sağlayan fakat klasik ve istatistiksel durumu sağlamayan bir örnek verildi. Ayrıca eş-istatistiksel yakınsaklık oranı süreklilik modülü yardımıyla hesaplandı.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, pozitif lineer operatör, Korovkin tipi yaklaşım teoremi, istatistiksel düzgün yakınsaklık, süreklilik modülü, eş-istatistiksel yakınsaklık.

STATISTICAL KOROVKIN TYPE APPROXIMATION THEOREMS

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In the second chapter, statistical convergence has been recalled. Examples and some results concerning this concept has been given. In the first section of the third chapter some general information about positive linear operators and in the second section classical Korovkin type theorems have been given. In the third section using statistical convergence Korovkin type theorem has been studied and the order of this theorem has been given. In the fourth and fifth sections statistical Korovkin type theorem for periodic functions and statistical Korovkin type theorem in $L_p\left[a,b\right]$ have been considered, respectively. In the last section equi-statistical convergence of positive linear operators and using equi-statistical convergence Korovkin type theorem studied. Then, an example such that this theorem works but its classical and statistical cases do not work has been given. Also, the rates of equi-statistical convergence have been computed.

Key Words: Statistical convergence, positive linear operator, Korovkin type approximation theorem, statistical uniform convergence,modulus of continuity, equi-statistical convergence.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam, Sayın Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ(Sinop Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi)‘ e, çalışmalarımda yardımlarını ve desteğini esirgemeyen hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Fadime DİRİK’ e ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Sevda AKDAĞ’ a en içten saygılarımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca maddi ve manevi desteğini esirgemeyen ÖZCAN ailesine ve çalışmamın tamamlanması sırasında yardımlarıyla bana destek olan arkadaşlarım Araş. Gör. Ayşenur UÇAR’ a ve Biyolog Gökhan YILDIZ’ a, her zaman ve koşulda yanımda olan ve desteklerini bir an olsun esirgemeyen canım aileme sonsuz teşekkür ederim.

Sevda ORHAN
Aralık, 2011

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER LİSTESİ

$|A|$: A kümesinin eleman sayısı

δ : Yoğunluk fonksiyonu

c : Yakınsak diziler uzayı

st : İstatistiksel yakınsak diziler uzayı

$B[a,b]$: $[a,b]$ aralığı üzerindeki sınırlı fonksiyonların uzayı

$\|\cdot\|_B$: $B[a,b]$ uzayının alışılmış supremum normu

$C[a,b]$: $[a,b]$ aralığı üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı

$\|\cdot\|_{C[a,b]}$: $C[a,b]$ uzayının alışılmış supremum normu

$C_M[a,b]$: $[a,b]$ üzerinde sürekli ve reel eksen üzerinde sınırlı fonksiyonların uzayı

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi

$C_{2\pi}(\mathbb{R})$: 2π periyodik ve $\mathbb{R}$ de sürekli tüm fonksiyonların uzayı

$L_p[a,b]$: $[a,b]$ aralığı üzerinde reel değerli p-inci mertebeden integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonların uzayı

$\|\cdot\|_{L_p}$: $L_p[a,b]$ uzayı üzerindeki norm

$w(f;\delta)$: f fonksiyonunun süreklilik modülü

χ_A : A kümesinin karakteristik fonksiyonu

ŞEKİLLER LİSTESİ

1. GİRİŞ

Steinhaus ve Fast'in reel sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklığı tanımladığı 1951 yılından bu yana, bu tanımın birçok genellemesi ve uygulaması araştırılmaktadır. (L_n), $L_n : C_M[a,b] \to B[a,b]$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere Korovkin (1960) $e_i(x) = x^i$, $i = 0,1,2$ fonksiyonlarını kullanarak $L_n(f)$ in bir f fonksiyonuna yakınsaması problemini ele almış ve bu yakınsama için gerek ve yeter koşulları incelemiştir. İstatistiksel yakınsaklık tanımı kullanılarak Korovkin tipi yaklaşım teorisi için daha güçlü sonuçlar elde edilmiştir. Birçok araştırmada pozitif lineer operatörlerin dizileri yardımıyla, sürekli fonksiyonların yaklaşımı göz önüne alınmış ve Korovkin' in bu çalışması bir çok araştırmacı tarafından çeşitli operatörler için araştırılmıştır. Ayrıca, istatistiksel düzgün yakınsaklık Korovkin tipi yaklaşım teorisinde kullanılmıştır (Gadjiev ve Orhan, 2002; Erkuş ve Duman, 2006; Erkuş ve ark., 2006). Klasik Korovkin teoreminden daha güçlü sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra ise Balcerzak ve ark. (2007) alışılmış düzgün yakınsaklık ve istatistiksel düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olan eş-istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmışlardır. İstatistiksel noktasal ve istatistiksel düzgün yakınsaklık arasında bulunan bu yakınsama türü için Karakuş ve ark. (2008) tarafından Korovkin tipi teorem çalışılmıştır.

Bu yüksek lisans tezinde öncelikle yoğunluk kavramı verilerek bu kavram yardımıyla istatistiksel yakınsaklık tanımı verilecek ve klasik Korovkin teoremi tanıtılıp, bu teoremin Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından verilen istatistiksel benzeri verilecektir. Daha sonra Balcerzak ve ark. (2007) tarafından tanımlanan eş-istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak reel sayıların kompakt bir alt kümesi üzerinde, istatistiksel Korovkin tipi teoremin Karakuş ve ark. (2008) tarafından çalışılan eş-istatistiksel benzeri verilecektir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. İstatistiksel Yakınsaklık

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi A ve $A_n := \{k \le n : k \in A\}$ olsun. A_n kümesinin eleman sayısı $|A_n|$ ile gösterilsin.

2.1.1. Tanım: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{n}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine A kümesinin "yoğunluğu (veya doğal yoğunluğu) " denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir (Niven ve Zuckerman, 1980).

(a_n) pozitif tamsayıların artan bir dizisi ve $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere yoğunluk mevcut ise

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

dır (Niven ve Zuckerman, 1980).

Örneğin; $\delta(\mathbb{N})=1$, $\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$, $\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$ olduğu yoğunluk tanımından kolaylıkla görülebilir. Ayrıca bir A kümesi yoğunluğa sahip ise, bu durumda $\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 - \delta(A)$ ve doğal sayıların her bir sonlu alt kümesi de sıfır yoğunluklu olacaktır.

Şimdi bu tanımdan faydalanarak istatistiksel yakınsaklık tanımı verilsin:

2.1.2. Tanım: $x = (x_k)$ reel yada kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \ge \varepsilon\}) = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda x dizisi L sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir ve bu durum

$$st - \lim x = L$$

şeklinde gösterilir (Fast, 1951).

İstatistiksel yakınsaklık tanımından da anlaşılacağı gibi, eğer bir x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu durumda L sayısının herhangi bir ε komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşuluyla yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durum, istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla yakınsak diziler uzayını c ile ve istatistiksel yakınsak diziler uzayını st ile gösterecek olursak , $c \subset st$ dır. Yani; istatistiksel yakınsaklık bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha kuvvetlidir.

Şimdi istatistiksel yakınsaklık kavramı için Fridy tarafından yapılan karakterizasyon verilsin:

2.1.3. Teorem: $x = (x_k)$ dizisinin bir L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(\{n_k : k \in \mathbb{N}\}) = 1$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = L$ olacak şekilde en az bir (x_{n_k}) yakınsak alt dizisi vardır (Fridy, 1985).

O halde 1 yoğunluklu indis kümesi üzerinde (veya 0 yoğunluklu indis kümesi dışında) x dizisi L sayısına klasik (Cauchy) anlamda yakınsak ise, x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

Yani; bir x dizisinin L sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için $\delta(K) = 1$ olacak şekilde bir $K \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi ve $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in K$ için $|x_n - L| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

2.1.4. Örnek: $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} 1 \ , & k = m^2 \\ 0 \ , & k \neq m^2 \end{cases} , m = 1, 2, 3, ...$$

olsun. $K = \{k^2 : k \in \mathbb{N}\}$ denirse $\delta(K) = 0$, $\delta(\mathbb{N} \setminus K) = 1$ olup

$$(x_{n_k}) = (0, 0, ...) \to 0 \ , (n_k \in (\mathbb{N} \setminus K) \ , \ k \in \mathbb{N})$$

olduğundan $st - \lim x = 0$ bulunur.

2.1.5. Örnek: $x = (x_k)$

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} \ , & k = m^2 \\ 0 \ , & k \neq m^2 \end{cases} , m = 1, 2, 3, ...$$

dizisi için $st - \lim x = 0$ olduğu görülür.

Örneklerden de görülebileceği gibi bu diziler sınırlı ıraksak ve sınırsız ıraksak olmalarına rağmen istatistiksel yakınsaktırlar.

Klasik (Cauchy) yakınsaklığın lineer olduğu biliniyor. Aşağıdaki teorem istatistiksel yakınsaklığın da lineer olduğunu gösterir.

2.1.6. Teorem: $st-\lim x = L_1$, $st-\lim y = L_2$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda;

(i) $st-\lim(x+y) = L_1 + L_2$

(ii) $st-\lim \alpha x = \alpha L_1$,

sağlanır (Fast, 1951).

İspat : (i) $st-\lim x = L_1$ olsun. O halde $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(A) = 0$ olduğunda, $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_1$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ için $|x_k - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır.

$st-\lim y = L_2$ olsun. O halde $B \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(B) = 0$ olduğunda, $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_2$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus B)$ için $|y_k - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

Sıfır yoğunluklu iki kümenin arakesiti de sıfır yoğunluklu olacağından $\delta(A \cap B) = 0$.

$k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ olmak üzere her $k \in (\mathbb{N} \setminus (A \cap B))$ ve her $k > k_0$ için

$$|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \le |x_k - L_1| + |y_k - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \le n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olup

$$st-\lim(x+y) = L_1 + L_2$$

elde edilir.

(ii) Eğer $\alpha = 0$ ise $\alpha x = 0$ olup $st-\lim \alpha x = \alpha L_1$ dır. Şimdi $\alpha \ne 0$ olmak üzere $st-\lim x = L_1$ olsun. O halde, $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(A) = 0$ olduğunda, $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_1$ ve her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ için $|x_k - L_1| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ olacak şekilde $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece her $k \in (\mathbb{N} \setminus A)$ ve her $k > k_1$ için

$$\left|\alpha x_k - \alpha L_1\right| = \left|\alpha\right|\left|x_k - L_1\right| < \left|\alpha\right|\frac{\varepsilon}{\left|\alpha\right|} = \varepsilon$$

olup, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n}\left|\left\{k \leq n : \left|\alpha x_k - \alpha L_1\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

elde edilir, yani;

$$st - \lim \alpha x = \alpha L_1 .$$

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bulgular bölümünün ilk kısmında pozitif lineer operatörler ile ilgili genel bilgiler ve ikinci kısımda klasik Korovkin tipi yaklaşım teoremleri verildi. Üçüncü kısımda Korovkin tipi teoremin istatistiksel benzeri Gadjiev ve Orhan'ın çalışmasındaki yöntemler kullanılarak incelendi ve yine bu çalışmadaki yöntemler kullanılarak istatistiksel Korovkin tipi teoremin mertebesi bulundu. Dördüncü ve beşinci kısımda sırasıyla periyodik fonksiyonlar için İstatistiksel Korovkin tipi teorem ispatlandı ve $L_p[a,b]$ deki pozitif lineer operatörler için istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım incelendi.

Bulgular bölümünün son kısmında ise Balcerzak, Dems ve Komisarski tarafından tanımlanan alışılmış düzgün yakınsaklık ve istatistiksel düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olan eş-istatistiksel yakınsaklık verilerek Karakuş, Demirci ve Duman' ın çalışmasındaki yöntemler kullanılarak eş-istatistiksel Korovkin tipi teorem incelendi.

4. BULGULAR

4.1. Pozitif Lineer Operatörler

Öncelikle gerekli olan bazı fonksiyon uzayları tanıtılsın:

$C[a,b]$ **Uzayı :** $[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve aralığın tüm noktalarında sürekli fonksiyonların uzayıdır. a, b uç noktalarında bu uzayın elemanları sağdan ve soldan sürekli fonksiyonlardır. $f \in C[a,b]$ için

$$\|f\|_{C[a,b]} = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

alışılmış supremum normu ile birlikte $C[a,b]$ bir Banach uzayıdır.

$C_M[a,b]$ **Uzayı :** $[a,b]$ aralığının her noktasında sürekli ve reel eksen üzerinde sınırlı olan tüm fonksiyonların uzayıdır.

$B[a,b]$ **Uzayı :** $[a,b]$ aralığı üzerindeki tüm sınırlı fonksiyonların uzayıdır. Ayrıca,

$$\|f\|_B = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

normu ile $B[a,b]$ uzayı bir Banach uzayı olup bu norma göre yakınsaklık, düzgün yakınsaklıktır. Bir (f_n) fonksiyon dizisinin bir g fonksiyonuna düzgün yakınsaması $n \to \infty$ için $f_n \rightrightarrows g$ ile gösterilir.

$C_{2\pi}(\mathbb{R})$ **Uzayı :** 2π periyodik ve $\mathbb{R}$ de sürekli fonksiyonlar uzayıdır.

$$\|f\|_{2\pi} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

$L_p[a,b]$ **Uzayı :** $[a,b]$ aralığı üzerinde reel değerli p-inci mertebeden integrallenebilen ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır.

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty$$

normuna göre L_p uzayı normlu uzaydır.

Şimdi Luzin teoremi olarak da bilinen sonlu aralıkta tanımlanmış L_p uzayındaki f fonksiyonlarının C-özelliği hatırlatılsın:

“ $[a,b]$ aralığı üzerinde f fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul her $\varepsilon > 0$ için öyle bir sürekli g fonksiyonu bulunabilir ki $\text{mes}\{x : f(x) \neq g(x)\} < \varepsilon$ dır" .

4.1.1. Tanım: X ve Y iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer X den alınmış herhangi bir f fonksiyonuna Y de bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu takdirde " X uzayında bir operatör tanımlanmıştır" denir ve bu durum

$$g(x) = L(f(t);x)$$

şeklinde gösterilir. Burada $L(f(t);x)$ gösterimi yerine $L(f;x)$ yazılacaktır.

X uzayına L operatörünün "tanım kümesi" denir ve $X = D(L)$ ile gösterilir. Ayrıca $R(L) = \{g : L(f;x) = g(x), f \in D(L)\}$ kümesine de L operatörünün "değer kümesi" denir. $R(L) \subset Y$ dır.

Burada X uzayı lineer uzay olduğunda lineer operatörün tanımı verilebilir:

4.1.2. Tanım: f_1 ve f_2, X uzayında herhangi iki fonksiyon ve her $x \in X$, her $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ için L operatörü;

$$L(a_1 f_1 + a_2 f_2;\, x) = a_1 L(f_1;x) + a_2 L(f_2;x)$$

koşulunu sağlıyorsa bu takdirde L operatörüne "lineer operatör" denir.

Tanımdan da görülebileceği gibi L lineer operatörü için $L(0;x) = 0$ olur.

Şimdi de lineer operatörler kümesi içinde çok önemli bir sınıf olan pozitif lineer operatörler verilsin:

4.1.3. Tanım: $X^+ = \{f \in X : f(x) \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0\}$ olsun. X uzayında tanımlanmış bir L lineer operatörü X^+ kümesindeki herhangi bir f fonksiyonunu pozitif fonksiyona dönüştürüyor ise o takdirde L operatörüne "pozitif lineer operatör" denir.

L pozitif lineer operatörü için $LX^+ \subset Y^+$ sağlanır. Yani $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f;x) \geq 0$ olur. Ayrıca $f(x) \leq g(x)$ olduğunda $L(f;x) \leq L(g;x)$ dır. Yani pozitif lineer operatörler monotondur.

Örneğin; 1912 yılında S.Bernstein $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyona yakınsayan polinom tanımlanmıştır (Bernstein, 1912). Bernstein polinomu olarak bilinen bu polinom $0 \leq x \leq 1$ olmak üzere

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) c_n^k x^k (1-x)^{n-k} \qquad (4.1.1)$$

şeklindedir. Burada $x^k(1-x)^{n-k}\geq 0$ olduğundan $B_n(f;x)$ pozitif lineer operatördür.

4.2. Klasik Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremleri

4.2.1. Teorem: Eğer (L_n), $L_n: C_M[a,b]\to B[a,b]$ pozitif lineer operatörler dizisi $[a,b]$ aralığında $n\to\infty$ için

(i) $\|L_n(1;x)-1\|_B \to 0$

(ii) $\|L_n(t;x)-x\|_B \to 0$

(iii) $\|L_n(t^2;x)-x^2\|_B \to 0$

koşullarını gerçekliyorsa o takdirde herhangi bir $f\in C_M[a,b]$ fonksiyonu ve $n\to\infty$ için

$$\|L_n(f;x)-f(x)\|_{\mathrm{B}} \to 0 \quad , a\leq x\leq b$$

olur (Korovkin, 1960).

Şimdi Korovkin teoreminin koşullarını sağlayan bir örnek verilsin.

(4.1.1) ile tanımlanan Bernstein polinomları için Korovkin teoremi koşullarının sağlandığı gösterilsin:

(i) $B_n(1;x)=\sum_{k=0}^{n} c_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k} = (1-x+x)^n = 1$

(ii) $B_n(t;x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k}$

$$= x\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k}$$

$$= x\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} x^{k} (1-x)^{n-k-1}$$

$$= x\sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} = x(1-x+x)^{n-1} = x$$

$$(\text{iii})\ B_n\left(t^2;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{n!}{(n-k)!k!}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=x\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=x\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}x^{k-1}(1-x)^{n-k}$$

$$=x^2\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!}x^{k-2}(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}c_{n-1}^{k}x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$=x^2\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}c_{n-2}^{k}x^k(1-x)^{n-k-2}+\frac{x}{n}=x^2\frac{n-1}{n}+\frac{x}{n}=x^2+\frac{x-x^2}{n}$$

olur. Dolayısıyla $n\to\infty$ için

(i) $\left\|B_n(1;x)-1\right\|_{\mathrm{B}}\to 0$

(ii) $\left\|B_n(t;x)-x\right\|_{\mathrm{B}}\to 0$

(iii) $\left\|B_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_{\mathrm{B}}\to 0$

sağlanır. Korovkin teoremine göre $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı herhangi $f\in C[0,1]$ fonksiyonu ve $n\to\infty$ için

$$\left\|B_n(f;x)-f(x)\right\|_{\mathrm{B}}\to 0$$

gerçeklenir.

4.2.2. Teorem: Eğer (L_n), $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ den $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ e pozitif lineer operatörler dizisi tüm $t\in\mathbb{R}$ için $f_0(t)=1,\ f_1(t)=\cos t,\ f_2(t)=\sin t$ olmak üzere $n\to\infty$ için

$$\left\|L_n(f_i;x)-f_i\right\|_{2\pi}\to 0\quad i=0,1,2$$

ise, tüm $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ve $n\to\infty$ için

$$\left\|L_n(f;x)-f\right\|_{2\pi}\to 0$$

dır (Korovkin, 1960).

4.3. İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem

4.3.1. Teorem: Eğer $L_n : C_M[a,b] \to B[a,b]$ pozitif lineer operatörler dizisi

(i) $st-\lim\limits_{n\to\infty} \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B = 0$

(ii) $st-\lim\limits_{n\to\infty} \left\| L_n(t;x) - x \right\|_B = 0$

(iii) $st-\lim\limits_{n\to\infty} \left\| L_n(t^2;x) - x^2 \right\|_B = 0$

koşulları sağlanıyorsa herhangi bir $f \in C_M[a,b]$ için

$$st-\lim_{n\to\infty} \left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_B = 0$$

dır (Gadjiev ve Orhan, 2002).

İspat: f fonksiyonunun reel eksende sınırlılığından öyle bir M pozitif sayısı bulunabilir ki tüm x ve t ler için

$\left| f(t) - f(x) \right| \le 2M$

yazılabilir. Yine f , $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan;

her $\varepsilon > 0$ için, $\exists \delta > 0$ bulunabilir öyle ki $t \in (-\infty,\infty)$ ve $x \in [a,b]$ için $|t-x| < \delta$ olduğunda $\left| f(t) - f(x) \right| < \varepsilon$ sağlanır. $|t-x| \ge \delta$ olduğunda ise; $\dfrac{(t-x)^2}{\delta^2} \ge 1$ buradan

$\left| f(t) - f(x) \right| \le 2M \dfrac{(t-x)^2}{\delta^2}$ yazılabilir.

O halde tüm $t \in (-\infty,\infty)$ ve tüm $x \in [a,b]$ için

$$\left| f(t) - f(x) \right| \le \varepsilon + 2M \frac{(t-x)^2}{\delta^2} \tag{4.3.1}$$

elde edilir. Ayrıca L_n pozitif ve lineer olduğundan

$$\left| L_n(f;x) - f(x) \right| = \left| L_n(f(t);x) - L_n(f(x);x) + L_n(f(x);x) - f(x) \right|$$

$$\le L_n\left(\left| f(t) - f(x) \right|; x \right) + \left| f(x) \right| \left| L_n(1;x) - 1 \right|$$

yazılabilir ve böylece her $\varepsilon > 0$ için $A = \max\{|a|,|b|\}$ olmak üzere

$$\left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_B = \left\| L_n(f(t) - f(x);x) + f(x)\left(L_n(1;x) - 1 \right) \right\|_B$$

$$\le \left\| L_n\left(\left| f(t) - f(x) \right|; x \right) \right\|_B + \left| f(x) \right| \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B$$

$$\leq \left\| L_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 ; x \right) \right\|_B + M \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B$$

$$= \left\| L_n(\varepsilon;x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n\left((t-x)^2 ; x \right) \right\|_B + M \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B$$

$$\leq \varepsilon \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B + \frac{2M}{\delta^2} \left\| L_n\left(t^2;x\right) - x^2 \right\|_B + \frac{4M}{\delta^2} A \left\| L_n(t;x) - x \right\|_B$$

$$+ \frac{2M}{\delta^2} A^2 \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B + M \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B + \varepsilon$$

$$\leq \left(\varepsilon + \mathrm{M} + \frac{2M}{\delta^2} A^2 \right) \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B + \frac{4M}{\delta^2} A \left\| L_n(t;x) - x \right\|_B$$

$$+ \frac{2M}{\delta^2} \left\| L_n\left(t^2;x\right) - x^2 \right\|_B + \varepsilon$$

dır. $K = \max\left\{ \varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2} A^2, \frac{4M}{\delta^2} A, \frac{2M}{\delta^2} \right\}$ olacak şekilde seçilirse

$$\left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_B \leq K\left(\left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B + \left\| L_n(t;x) - x \right\|_B + \left\| L_n\left(t^2;x\right) - x^2 \right\|_B \right) + \varepsilon$$

bulunur. Bu son eşitsizlikten $\varepsilon' > \varepsilon$ için

$$\left\{ n \leq N : \left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_B \geq \varepsilon' \right\} \subseteq \left\{ n \leq N : \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B + \left\| L_n(t;x) - x \right\|_B + \left\| L_n\left(t^2;x\right) - x^2 \right\|_B \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{K} \right\}$$

olup

$$\left| \left\{ n \leq N : \left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_B \geq \varepsilon' \right\} \right| \leq \left| \left\{ n \leq N : \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B + \left\| L_n(t;x) - x \right\|_B + \left\| L_n\left(t^2;x\right) - x^2 \right\|_B \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{K} \right\} \right|$$

elde edilir. Şimdi

$$D := \left\{ n \leq N : \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B + \left\| L_n(t;x) - x \right\|_B + \left\| L_n\left(t^2;x\right) - x^2 \right\|_B \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{K} \right\}$$

$$D_1 := \left\{ n \leq N : \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\}$$

$$D_2 := \left\{ n \leq N : \left\| L_n(t;x) - x \right\|_B \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\}$$

$$D_3 := \left\{ n \le N : \left\| L_n\left(t^2; x\right) - x^2 \right\|_B \ge \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\}$$

denilsin. Buradan $D \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$ olduğu kolayca görülür. Böylece

$$\begin{aligned} \left| \left\{ n \le N : \left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_B \ge \varepsilon' \right\} \right| \le & \left| \left\{ n \le N : \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B \ge \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right| \\ & + \left| \left\{ n \le N : \left\| L_n(t;x) - x \right\|_B \ge \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right| \\ & + \left| \left\{ n \le N : \left\| L_n\left(t^2;x\right) - x^2 \right\|_B \ge \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\} \right| \qquad (4.3.2) \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{N}$ ile çarpılıp $N \to \infty$ için limit alınırsa (i), (ii), (iii) den

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \left| \left\{ n \le N : \left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_B \ge \varepsilon' \right\} \right| = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$st - \lim_{n\to\infty} \left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_B = 0$$

dır.

Bilindiği gibi $B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) c_n^k x^k (1-x)^{n-k}$, $0 \le x \le 1$ klasik Bernstein polinomlar dizisi Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlar. O halde istatistiksel Korovkin tipi teoremin koşullarını da sağlar.

Şimdi istatistiksel Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlayan fakat klasik Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlamayan pozitif lineer operatörler dizisine bir örnek verilsin.

4.3.2. Örnek: (B_n), Bernstein polinomları ve (α_n) dizisi de

$$\alpha_n := \begin{cases} \sqrt{n}\ , & n = k^2 \\ 0\ , & n \ne k^2 \end{cases} \quad , k = 1, 2, 3, ...$$

genel terimi ile verilsin. (α_n) dizisi sınırsız dizidir ve $st - \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ dır.

Şimdi $P_n : C[0,1] \to B[0,1]$ olmak üzere

$$P_n(f;x) = (1 + \alpha_n) B_n(f;x)$$

şeklinde tanımlı (P_n) dizisi göz önüne alınsın.

$$B_n(1;x)=1\,,\; B_n(t;x)=x\,,\; B_n(t^2;x)=x^2+\frac{x-x^2}{n}$$

olduğu biliniyor. (P_n) dizisi için (i), (ii) ve (iii) koşullarının gerçeklendiği gösterilsin:

(i) $\quad P_n(1;x)-1=(1+\alpha_n)B_n(1;x)-1=(1+\alpha_n)-1=\alpha_n$ olup

$$\left\|P_n(1;x)-1\right\|_B=\sup_{x\in[0,1]}\left|P_n(1;x)-1\right|=\sup_{x\in[0,1]}\alpha_n=\alpha_n$$

elde edilir. Buradan $st-\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ olduğundan

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|P_n(1;x)-1\right\|_B=0$$

sonucu elde edilir.

(ii) $\quad P_n(t;x)-x=(1+\alpha_n)B_n(t;x)-x=(1+\alpha_n)x-x=x\alpha_n$

$$\left\|P_n(t;x)-x\right\|_B=\sup_{x\in[0,1]}\left|P_n(t;x)-x\right|=\sup_{x\in[0,1]}x\alpha_n=\alpha_n$$

bulunur. $st-\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ olduğundan

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|P_n(t;x)-x\right\|_B=0$$

elde edilir.

(iii) $\quad P_n(t^2;x)-x^2=(1+\alpha_n)B_n(t^2;x)-x^2=\dfrac{x-x^2}{n}+\left(x^2+\dfrac{x-x^2}{n}\right)\alpha_n$ bulunur.

$$\left\|P_n(t^2;x)-x^2\right\|_B=\sup_{x\in[0,1]}\left|P_n(t^2;x)-x^2\right|=\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{x-x^2}{n}+\left(x^2+\frac{x-x^2}{n}\right)\alpha_n\right|$$

$$\leq\sup_{x\in[0,1]}\frac{x-x^2}{n}+\sup_{x\in[0,1]}x^2\alpha_n+\sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{x-x^2}{n}\right)\alpha_n=\frac{1}{4n}+\alpha_n+\frac{1}{4n}\alpha_n$$

olup $st-\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ ve $st-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n}=0$ olduğundan

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|P_n(t^2;x)-x^2\right\|_B=0$$

olur. İstatistiksel Korovkin tipi teoremden dolayı

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|P_n(f;x)-f\right\|_B=0$$

sonucu elde edilir.

Diğer taraftan $P_n(1;x)-1=\alpha_n$ ve (α_n) sınırsız olduğundan $n\to\infty$ için $\left\|P_n(1;x)-1\right\|_B\nrightarrow 0$ olup klasik Korovkin tipi teoremin şartı sağlanmaz ve $n\to\infty$ için

$\left\| P_n(f;x) - f(x) \right\|_B \not\to 0$ olur ki bu ise iddiayı ispatlar.

4.3.1. İstatistiksel Yakınsaklığın Mertebesi

4.3.1.1. Tanım: Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{ k \le n : \left|\alpha_k - L\right| \ge \varepsilon \right\}\right|}{n^{1-\beta}} = 0$$

ise $\alpha = (\alpha_k)$ sayı dizisi $0 < \beta < 1$ mertebesi ile L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$\alpha_k - L = st - o\left(k^{-\beta}\right) \ , \ \ k \to \infty$$

ile gösterilir (Gadjiev ve Orhan, 2002).

Aşağıdaki teoremde 4.3.1. Teorem' deki pozitif lineer operatörler dizisinin istatistiksel yakınsaklık mertebesi verilmiştir.

4.3.1.2. Teorem: Eğer $L_n : C_M[a,b] \to B[a,b]$ pozitif lineer operatörler dizisi için $n \to \infty$ iken

(i) $\left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B = st - o\left(n^{-\beta_0}\right)$

(ii) $\left\| L_n(t;x) - x \right\|_B = st - o\left(n^{-\beta_1}\right)$

(iii) $\left\| L_n\left(t^2;x\right) - x^2 \right\|_B = st - o\left(n^{-\beta_2}\right)$

koşulları sağlanıyorsa herhangi bir $f \in C_M[a,b]$ için $n \to \infty$ iken $\beta = \min\{\beta_0, \beta_1, \beta_2\}$ olmak üzere

$$\left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_B = st - o\left(n^{-\beta}\right)$$

dır (Gadjiev ve Orhan, 2002).

İspat: 4.3.1. Teorem ' in ispatındaki (4.3.2) eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\left|\left\{ n \le N : \left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_B \ge \varepsilon' \right\}\right|}{N^{1-\beta}} \le \frac{\left|\left\{ n \le N : \left\| L_n(1;x) - 1 \right\|_B \ge \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\}\right|}{N^{1-\beta_0}} \frac{N^{1-\beta_0}}{N^{1-\beta}}$$

$$+ \frac{\left|\left\{ n \le N : \left\| L_n(t;x) - x \right\|_B \ge \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K} \right\}\right|}{N^{1-\beta_1}} \frac{N^{1-\beta_1}}{N^{1-\beta}}$$

$$+\frac{\left|\left\{n\le N:\left\|L_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_B\ge\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{3K}\right\}\right|}{N^{1-\beta_2}}\frac{N^{1-\beta_2}}{N^{1-\beta}}.$$

$N\to\infty$ için limit alınırsa (i), (ii), (iii) den istenilen sonuç elde edilir.

$B_n\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)c_n^k x^k\left(1-x\right)^{n-k}$, $0\le x\le 1$ klasik Bernstein polinomlar dizisi tekrar göz önüne alınsın. Buradan

$$B_n\left(1;x\right)=1,\ B_n\left(t;x\right)=x,\ B_n\left(t^2;x\right)=x^2+\frac{x-x^2}{n}$$

olduğu hatırlanırsa ilk olarak (i) ve (ii) nin sağlandığı görülebilir. Ayrıca

$$\left\{n:\left\|B_n\left(t^2;x\right)-x^2\right\|_B\ge\varepsilon'\right\}=\left\{n:\ \frac{1}{4n}\ge\varepsilon'\right\}$$

kümesi doğal sayılar kümesinin sonlu bir alt kümesidir ve (iii) de sağlanır.

Sonuç olarak:

Eğer f, $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ise $\beta\in(0,1)$ için $n\to\infty$ iken

$$\left\|B_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right\|_B=st-o\left(n^{-\beta}\right)$$

sağlanır.

4.4. Periyodik Fonksiyonlar İçin İstatistiksel Korovkin Tipi Teorem

4.4.1. Teorem: (L_n), $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ den $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ e pozitif lineer operatörler dizisi olsun. Bu durumda her $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(f;x\right)-f\right\|_{2\pi}=0 \tag{4.4.1}$$

olması için gerek ve yeter koşul tüm $t\in\mathbb{R}$ için $f_0(t)=1,\ f_1(t)=\cos t,\ f_2(t)=\sin t$ olmak üzere

$$st-\lim_{n\to\infty}\left\|L_n\left(f_i;x\right)-f_i\right\|_{2\pi}=0\quad i=0,1,2 \tag{4.4.2}$$

olmasıdır (Duman, 2003).

İspat : f_i $(i=0,1,2)$ fonksiyonları $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ye ait olduğundan (4.4.1) ise (4.4.2) dır. Şimdi (4.4.2) sağlansın. $f\in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ ve I, $\mathbb{R}$ in 2π uzunluklu kapalı bir alt aralığı olsun. $x\in I$ denilsin.

f, x de sürekli olduğundan her $\varepsilon>0$ için $\exists\delta>0$ vardır öyle ki $|t-x|<\delta$

koşulunu sağlayan tüm t ler için $\left|f(t)-f(x)\right|<\varepsilon$ dur. (4.4.3)

f sınırlı olduğundan tüm $t\in\mathbb{R}$ için $\left|f(t)-f(x)\right|\leq 2\|f\|_{2\pi}$ dır. (4.4.4)

2π uzunluklu $(x-\delta, 2\pi+x-\delta]$ alt aralığı alınsın. $\psi(t):=\sin^2\left(\dfrac{t-x}{2}\right)$ olmak üzere her $t\in(x-\delta, 2\pi+x-\delta]$ için

$$\left|f(t)-f(x)\right|<\varepsilon+\frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(t) \tag{4.4.5}$$

olduğu gösterilebilir.

Burada iki durum söz konusudur:

Durum 1: $t\in(x-\delta, x+\delta)$ olsun. $|t-x|<\delta$ ve (4.4.3) dan (4.4.5) eşitsizliği elde edilir.

Durum 2: $t\in[x+\delta, 2\pi+x-\delta]$ olsun. Bu durumda $\delta\leq t-x\leq 2\pi-\delta$ ve $\delta\in(0,\pi]$ dır. Tüm $\delta\in(0,\pi]$ ve $t\in[x+\delta, 2\pi+x-\delta]$ için

$$\sin^2\frac{\delta}{2}\leq\sin^2\left(\frac{t-x}{2}\right)\leq\sin^2\left(\pi-\frac{\delta}{2}\right) \tag{4.4.6}$$

elde edilir.

O halde (4.4.4) ve (4.4.6) dan tüm $t\in[x+\delta, 2\pi+x-\delta]$ için

$$\left|f(t)-f(x)\right|<\varepsilon+\frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(t)$$

elde edilir. $\psi(t)=\sin^2\left(\dfrac{t-x}{2}\right)$ ve $f(t)$ 2π periyodik yani;

$\psi(t+2k\pi)=\psi(t)$, $f(t+2k\pi)=f(t)$, $k=0,\mp1,\mp2,...$ ve t, $(x-\delta, 2\pi+x-\delta]$ aralığında değiştiğinde $t+2k\pi, (2k\pi+x-\delta, 2k\pi+2\pi+x-\delta]$ $k=0,\mp1,\mp2,...$ aralığında değişir. Dolayısıyla her alt aralıkta eşitsizlik sağlanacağından tüm $\mathbb{R}$ de sağlanır.

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\leq L_n\left(\left|f(t)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|$$

$$<L_n\left(\varepsilon+\frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\psi(t)\right)+\|f\|_{2\pi}\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|$$

$$= \varepsilon L_n\left(f_0;x\right) + \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2\frac{\delta}{2}} L_n\left(\psi;x\right) + \|f\|_{2\pi}\left|L_n\left(f_0;x\right) - f_0\left(x\right)\right|$$

$$< \left(\varepsilon + \|f\|_{2\pi}\right)\left|L_n\left(f_0;x\right) - f_0\left(x\right)\right| + \varepsilon + \frac{\|f\|_{2\pi}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\left\{\left|L_n\left(f_0;x\right) - f_0\left(x\right)\right|\right.$$

$$\left. + \left|f_1\left(x\right)\right|\left|L_n\left(f_1;x\right) - f_1\left(x\right)\right| + \left|f_2\left(x\right)\right|\left|L_n\left(f_2;x\right) - f_2\left(x\right)\right|\right\}$$

$$< \varepsilon + \left(\varepsilon + \|f\|_{2\pi} + \frac{\|f\|_{2\pi}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\right)\left\{\left|L_n\left(f_0;x\right) - f_0\left(x\right)\right| + \left|L_n\left(f_1;x\right) - f_1\left(x\right)\right|\right.$$

$$\left. + \left|L_n\left(f_2;x\right) - f_2\left(x\right)\right|\right\}$$

$B := \varepsilon + \|f\|_{2\pi} + \dfrac{\|f\|_{2\pi}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$ denilirse

$$\left|L_n\left(f;x\right) - f\left(x\right)\right| < \varepsilon + B\left\{\left|L_n\left(f_0;x\right) - f_0\left(x\right)\right| + \left|L_n\left(f_1;x\right) - f_1\left(x\right)\right| + \left|L_n\left(f_2;x\right) - f_2\left(x\right)\right|\right\}$$

elde edilir. x üzerinden supremum alınırsa, tüm $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left\|L_n\left(f;x\right) - f\left(x\right)\right\|_{2\pi} < \varepsilon + B\left\{\left\|L_n\left(f_0;x\right) - f_0\left(x\right)\right\|_{2\pi} + \left\|L_n\left(f_1;x\right) - f_1\left(x\right)\right\|_{2\pi}\right.$$
$$\left. + \left\|L_n\left(f_2;x\right) - f_2\left(x\right)\right\|_{2\pi}\right\}.$$

Verilmiş $r > 0$ için $\varepsilon < r$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçilsin.

$$D := \left\{n \le N : \left\|L_n\left(f_0;x\right) - f_0\left(x\right)\right\|_{2\pi} + \left\|L_n\left(f_1;x\right) - f_1\left(x\right)\right\|_{2\pi} + \left\|L_n\left(f_2;x\right) - f_2\left(x\right)\right\|_{2\pi} \ge \frac{r-\varepsilon}{B}\right\}$$

$$D_1 := \left\{n \le N : \left\|L_n\left(f_0;x\right) - f_0\left(x\right)\right\|_{2\pi} \ge \frac{r-\varepsilon}{3B}\right\}$$

$$D_2 := \left\{n \le N : \left\|L_n\left(f_1;x\right) - f_1\left(x\right)\right\|_{2\pi} \ge \frac{r-\varepsilon}{3B}\right\}$$

$$D_3 := \left\{n \le N : \left\|L_n\left(f_2;x\right) - f_2\left(x\right)\right\|_{2\pi} \ge \frac{r-\varepsilon}{3B}\right\}$$

kümeleri belirlensin. $D \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Buradan

$$\left|\left\{n \le N : \left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_{2\pi} \ge r\right\}\right| \le |D| \le |D_1| + |D_2| + |D_3|$$

olup, $N \to \infty$ için limit alınırsa kabul den her $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ için

$$st - \lim_{n\to\infty} \left\| L_n(f;x) - f \right\|_{2\pi} = 0$$

elde edilir.

4.5. $L_p[a,b]$ de Pozitif Lineer Operatörler Yardımıyla İstatistiksel Yaklaşım

4.5.1. Teorem: (L_n), $L_n : L_p[a,b] \to L_p[a,b]$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi ve $(\|L_n\|)$ dizisi düzgün sınırlı olsun. Eğer

$$st - \lim_{n\to\infty} \left\| L_n(t^v;x) - x^v \right\|_{L_p} = 0 \quad , \quad v = 0,1,2 \tag{4.5.1}$$

ise herhangi $f \in L_p[a,b]$ fonksiyonu için

$$st - \lim_{n\to\infty} \left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_{L_p} = 0$$

dır (Gadjiev ve Orhan, 2002).

İspat: (4.5.1) den, her $\varepsilon > 0$ için $n_v(\varepsilon)$, $v = 0,1,2$ ve yoğunluğu 1 olan K_v, $v = 0,1,2$ alt kümeleri vardır öyle ki tüm $n \in K_v$ ve $n > n_v$, $v = 0,1,2$ için

$$\left\| L_n(t^v;x) - x^v \right\|_{L_p} < \varepsilon \tag{4.5.2}$$

sağlanır.

$\delta(K_0 \cap K_1 \cap K_2) = 1$ olduğundan, (4.5.2) eşitsizliği $n \in K := K_0 \cap K_1 \cap K_2$ ve $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$ içinde sağlanır.

Hipotezden dolayı, bir $M > 0$ sabiti vardır öyle ki $\|L_n\|_{L_p \to L_p} < M$, $n = 1,2,...$ dır. $C[a,b]$, $L_p[a,b]$ de yoğun olduğundan (Luzin Teoremi) , verilen $f \in L_p[a,b]$ fonksiyonu için $g \in C[a,b]$ vardır öyle ki $\|f - g\|_{L_p} < \varepsilon$ dır. Buradan

$$\begin{aligned}
\left\| L_n(f;x) - f(x) \right\|_{L_p} &= \left\| L_n(f;x) - L_n(g;x) + L_n(g;x) - g(x) + g(x) - f(x) \right\|_{L_p} \\
&= \left\| L_n(f-g;x) + L_n(g;x) - g(x) - \big(f(x) - g(x)\big) \right\|_{L_p} \\
&\le \left\| L_n(f-g;x) \right\|_{L_p} + \left\| L_n(g;x) - g(x) \right\|_{L_p} + \|f - g\|_{L_p}
\end{aligned}$$

$$\leq \|L_n\|_{L_p \to L_p} \|f-g\|_{L_p} + \|L_n(g;x) - g(x)\|_{L_p} + \|f-g\|_{L_p}$$

$$\leq \varepsilon(1+M) + \|L_n(g;x) - g(x)\|_{L_p} \qquad (4.5.3)$$

elde edilir.

$[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde g fonksiyonunun sürekliliğinden dolayı tüm $x \in [a,b]$ için $|g(x)| \leq C$ olacak şekilde $C > 0$ sabiti vardır. Böylece

$$\|L_n(g;x) - g(x)\|_{L_p} = \|L_n(g(t);x) - L_n(g(x);x) + L_n(g(x);x) - g(x)\|_{L_p}$$

$$= \|L_n(g(t) - g(x);x) + g(x)(L_n(1;x) - 1)\|_{L_p}$$

$$\leq \|L_n(g(t) - g(x);x)\|_{L_p} + |g(x)| \|(L_n(1;x) - 1)\|_{L_p}$$

$$\leq \|L_n(|g(t) - g(x)|;x)\|_{L_p} + C\|(L_n(1;x) - 1)\|_{L_p}$$

$g \in C[a,b]$ olduğundan 4.3.1. Teorem' deki (4.3.1) eşitsizliğine benzer şekilde tüm $x, t \in [a,b]$ için H ve δ pozitif sabitler olmak üzere

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon + \frac{2H}{\delta^2}(t-x)^2$$

yazılabilir. O halde $A = \max\{|a|,|b|\}$ olmak üzere

$$\|L_n(|g(t) - g(x)|;x)\|_{L_p} \leq \|L_n(\varepsilon + 2H\delta^{-2}(t-x)^2;x)\|_{L_p}$$

$$\leq \varepsilon\left(\|L_n(1;x) - 1\|_{L_p} + 1\right) + \|L_n((t-x)^2;x)\|_{L_p}$$

$$\leq \varepsilon\left(\|L_n(1;x) - 1\|_{L_p} + 1\right) + \|L_n(t^2;x) - x^2\|_{L_p} + 2A\|L_n(t;x) - x\|_{L_p}$$

$$+ A^2\|L_n(1;x) - 1\|_{L_p} \qquad (4.5.4)$$

(4.5.2) den, $n \in K$ ve $n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$ için (4.5.4) eşitsizliğinin son kısmı istenildiği kadar küçültülebilir, böylece (4.5.1) den

$$st - \lim_{n \to \infty} \|L_n(f;x) - f(x)\|_{L_p} = 0.$$

4.6. Pozitif Lineer Operatörlerin Eş-İstatistiksel Yakınsaklığı

X reel sayıların kompakt bir alt kümesini ve $C(X)$, X üzerindeki tüm reel değerli sürekli fonksiyonların uzayını göstermek üzere,

$f, f_n \in C(X)$; $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ve $C(X)$ üzerindeki supremum normu $\|f\|_{C(X)} = \sup_{x\in X}|f(x)|$ olduğunda,

$$\wp_n(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\right\}\right| \quad , \ x \in X \qquad \text{ve}$$

$$\varphi_n(\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : \|f_k - f\|_{C(X)} \ge \varepsilon\right\}\right|$$

olsun.

4.6.1. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\wp_n(x,\varepsilon)}{n} = 0$$

oluyorsa yani;

$$st - \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

ise her bir $x \in X$ için (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna istatistiksel noktasal yakınsaktır denir ve $f_n \to f\,(istatistiksel)$ ile gösterilir (Duman ve Orhan, 2004).

4.6.2. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için

$$st - \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C(X)} = 0 \text{ ya da } \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(\varepsilon)}{n} = 0$$

oluyorsa (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna istatistiksel düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \rightrightarrows f\,(istatistiksel)$ ile gösterilir (Duman ve Orhan, 2004).

4.6.3. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\wp_n(x,\varepsilon)}{n} = 0 \ , \ x \in X \text{ e göre düzgün ise yani;}$$

her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\wp_n(.,\varepsilon)\|_{C(X)}}{n} = 0$$

ise (f_n) , X üzerinde f fonksiyonuna eş-istatistiksel yakınsaktır denir ve $f_n \to f\,(eş - istatistiksel)$ ile gösterilir (Balcerzak ve ark. , 2007).

Bu tanımlar düşünülerek $C(X)$ uzayı üzerinde alışılmış düzgün yakınsaklık, istatistiksel düzgün yakınsaklık, istatistiksel noktasal yakınsaklık ve eş-istatistiksel yakınsaklık ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

4.6.4. Lemma: X üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ ise $f_n \rightrightarrows f\,(istatistiksel)$, X üzerinde $f_n \rightrightarrows f\,(istatistiksel)$ ise $f_n \to f\,(eş-istatistiksel)$. Ayrıca X üzerinde $f_n \to f\,(eş-istatistiksel)$ ise $f_n \to f\,(istatistiksel)$. Daha açık bir ifadeyle;

X üzerinde

$$f_n \rightrightarrows f \;\Rightarrow f_n \rightrightarrows f\,(istatistiksel) \;\Rightarrow f_n \to f\,(eş-istatistiksel) \;\Rightarrow f_n \to f\,(istatistiksel)$$

(Balcerzak ve ark. , 2007).

İspat: X üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ olsun. $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C(X)} = 0$ yani;

her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır $\ni$ $\forall n > n_0$ için $\|f_n - f\|_{C(X)} < \varepsilon$.

O halde buradan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(\varepsilon)}{n} = 0$$

olup bu ise X üzerinde $f_n \rightrightarrows f\,(istatistiksel)$ olduğunu gösterir.

X üzerinde $f_n \rightrightarrows f\,(istatistiksel)$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(\varepsilon)}{n} = 0.$$

Daha açık bir ifadeyle;

$$\forall \varepsilon, \varepsilon' > 0 \text{ için } \exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_0 \text{ için } \frac{\varphi_n(\varepsilon)}{n} < \varepsilon' . \qquad (4.6.1)$$

Her $x \in X$ için supremum özelliğinden

$$|f_k(x) - f(x)| \le \sup_{x\in X} |f_k(x) - f(x)|$$

yazılabilir.

Buradan her $x \in X$ için

$$\{k \le n : |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\} \subseteq \left\{k \le n : \sup_{x\in X} |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\right\}$$

$$\left|\{k \le n : |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\}\right| \le \left|\left\{k \le n : \sup_{x\in X} |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

olup (4.6.1) eşitsizliği de kullanılarak

$\forall \varepsilon, \varepsilon' > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_0$ ve $\forall x \in X$ için $\dfrac{\wp_n(x,\varepsilon)}{n} < \varepsilon'$

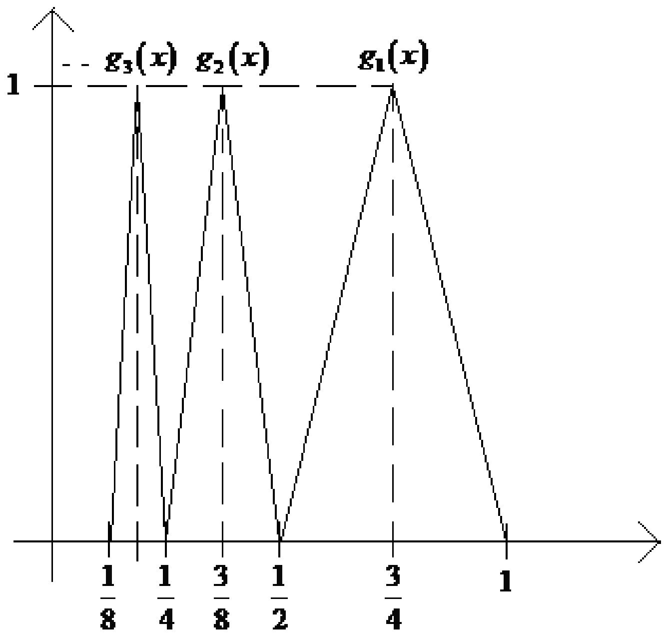
elde edilir. O halde X üzerinde $f_n \to f\,(eş - istatistiksel)$.

Bu lemma'nın karşıtının her zaman doğru olmadığı bir örnekle gösterilsin:

4.6.5. Örnek: Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x \in [0,1]$ ve $g(x) = 0$ olmak üzere $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları

$$g_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}\left(x - \dfrac{1}{2^n}\right) & , \quad x \in \left[\dfrac{1}{2^n}, \dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{1}{2^{n+1}}\right] \\ -2^{n+1}\left(x - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) & , \quad x \in \left[\dfrac{1}{2^{n-1}} - \dfrac{1}{2^{n+1}}, \dfrac{1}{2^{n-1}}\right] \\ 0 & , \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.



Şekil 4.6.1. g_n fonksiyonları

Bu durumda her $x \in [0,1]$ için

$$\frac{\left|\left\{k \le n : \left|g_k(x) - g(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right|}{n} \le \frac{1}{n}$$

olur. Buradan

$$g_n \to g = 0\left(eş - istatistiksel\right)$$

olduğu görülebilir.

Ancak her $n \in \mathbb{N}$ için $c_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|g_n(x) - g(x)\right|$ olmak üzere (c_n) dizisi istatistiksel ve alışılmış anlamda sıfıra yakınsak olmadığından $\left(c_n = \sup\limits_{x\in[0,1]} \left|g_n(x) - g(x)\right| = 1\right)$ (g_n) dizisi istatistiksel düzgün yakınsak ve alışılmış anlamda düzgün yakınsak değildir.

4.6.1. Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

4.6.1.1. Teorem: $L_n : C(X) \to C(X)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Her $f \in C(X)$ için, X üzerinde

$$L_n(f) \to f\left(eş - istatistiksel\right) \tag{4.6.1.1}$$

olması için gerek ve yeter şart, $e_i(x) = x^i$, $i = 0,1,2$ olmak üzere X üzerinde

$$L_n(e_i) \to e_i\left(eş - istatistiksel\right) \tag{4.6.1.2}$$

olmasıdır (Karakuş ve ark. , 2008) .

İspat : e_i $(i = 0,1,2)$ fonksiyonları $C(X)$ uzayına ait olduğundan (4.6.1.1) ise (4.6.1.2) dır.

O halde X üzerinde $L_n(e_i) \to e_i\left(eş - istatistiksel\right)$ ve $f \in C(X)$ ve $x \in X$ sabit olsun.

f , x noktasında sürekli olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|y - x| < \delta$ koşulunu sağlayan her $y \in X$ için $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Bu takdirde $X_\delta = [x - \delta, x + \delta] \cap X$ olduğunda

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f(x)|\chi_{X_\delta}(y) + |f(y) - f(x)|\chi_{X \setminus X_\delta}(y)$$

olur. Buradan $M := \|f\|_{C(X)}$ olmak üzere her $y \in X$ için

$$|f(y) - f(x)| < \varepsilon + 2M\frac{(y - x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir.

L_n operatörlerinin lineerliği ve pozitifliği de kullanılarak

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|=\left|L_n\left(f(y);x\right)-L_n\left(f(x);x\right)+L_n\left(f(x);x\right)-f(x)\right|$$

$$=\left|L_n\left(f(y)-f(x);x\right)-f(x)\left(L_n(e_0;x)-e_0(x)\right)\right|$$

$$\leq L_n\left(\left|f(y)-f(x)\right|;x\right)+\left|f(x)\right|\left|L_n(e_0;x)-e_0(x)\right|$$

$$\leq L_n\left(\varepsilon+2M\frac{(y-x)^2}{\delta^2};x\right)+\|f\|_{C(X)}\left|L_n(e_0;x)-e_0(x)\right|$$

$$\leq \varepsilon L_n(e_0;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left((y-x)^2;x\right)+M\left|L_n(e_0;x)-e_0(x)\right|$$

$$\leq \varepsilon+\varepsilon\left|L_n(e_0;x)-e_0(x)\right|+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left((y-x)^2;x\right)+M\left|L_n(e_0;x)-e_0(x)\right|$$

$$=\varepsilon+(\varepsilon+M)\left|L_n(e_0;x)-e_0(x)\right|+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left((y-x)^2;x\right)$$

yazılır. Burada $L_n\left((y-x)^2;x\right)$ ifadesi göz önüne alınırsa;

$$L_n\left((y-x)^2;x\right)=L_n\left(y^2-2yx+x^2;x\right)=L_n\left(y^2;x\right)-2xL_n(y;x)+x^2L_n(1;x).$$

Böylece

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\leq\varepsilon+\left(\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}x^2\right)\left|L_n(e_0;x)-e_0(x)\right|+\frac{4M}{\delta^2}x\left|L_n(e_1;x)-e_1(x)\right|$$
$$+\frac{2M}{\delta^2}\left|L_n(e_2;x)-e_2(x)\right|$$

olup

$T:=\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}\left(\|e_2\|_{C(X)}+2\|e_1\|_{C(X)}+1\right)$ denilirse

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\leq\varepsilon+T\sum_{i=0}^{2}\left|L_n(e_i;x)-e_i(x)\right| \tag{4.6.1.3}$$

elde edilir.

Verilmiş bir $r>0$ için $\varepsilon>0$ seçilsin öyle ki $\varepsilon<r$ olsun.

$$\wp_n(x,r):=\left|\left\{k\leq n:\left|L_k(f;x)-f(x)\right|\geq r\right\}\right|$$

$$\wp_{i,n}(x,r) := \left|\left\{k \le n : \left|L_k(e_i;x) - e_i(x)\right| \ge \frac{r-\varepsilon}{3T}\right\}\right| \qquad i = 0,1,2$$

kümeleri belirlensin. (4.6.1.3) den

$$\wp_n(x,r) \le \sum_{i=0}^{2} \wp_{i,n}(x,r)$$

olur. Buradan

$$\frac{\left\|\wp_n(.,r)\right\|_{C(X)}}{n} \le \sum_{i=0}^{2}\left(\frac{\left\|\wp_{i,n}(.,r)\right\|_{C(X)}}{n}\right)$$

elde edilir. (4.6.1.2) den

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{2}\left(\frac{\left\|\wp_{i,n}(.,r)\right\|_{C(X)}}{n}\right) = 0$$

olup her $r > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\wp_n(.,r)\right\|_{C(X)}}{n} = 0$$

olur ki bu ise X üzerinde

$$L_n(f) \to f\,(eş - istatistiksel)$$

demektir.

Bu teoremin klasik ve istatistiksel Korovkin tipi sonuçlardan daha kuvvetli olduğu bir örnekle gösterilsin:

$C[0,1]$ üzerinde $B_n(f;x)$ klasik Bernstein polinomları, $(g_n(x))$ 4.6.5. Örnek' de tanımlanan fonksiyon dizisi olmak üzere

$$D_n(f;x) = (1 + g_n(x))B_n(f;x) \quad , \quad x \in [0,1] \text{ ve } f \in C[0,1]$$

olsun. (D_n) pozitif lineer operatörlerin bir dizisidir ve

$$B_n(1;x) = 1\,,\, B_n(t;x) = x\,,\, B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x - x^2}{n}$$

olduğundan

$$D_n(e_0;x) = (1 + g_n(x))e_0(x)$$

$$D_n(e_1;x) = (1 + g_n(x))e_1(x)$$

$$D_n(e_2;x) = (1 + g_n(x))\left(e_2(x) + \frac{x(1-x)}{n}\right)$$

elde edilir. $[0,1]$ üzerinde $g_n \to g = 0(eş-istatistiksel)$ olduğundan $[0,1]$ üzerinde

$$D_n(e_i) \to e_i(eş-istatistiksel) \qquad i = 0,1,2$$

bulunur. Buradan 4.6.1.1 Teorem' den her $f \in C[0,1]$ için $[0,1]$ üzerinde

$$D_n(f) \to f(eş-istatistiksel)$$

olur.

(g_n) , $[0,1]$ üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna istatistiksel düzgün yakınsak olmadığından (D_n) lineer pozitif operatörler dizisi istatistiksel Korovkin tipi teoremi sağlamaz. Yine (g_n) , $[0,1]$ üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olmadığından (D_n) lineer pozitif operatörler dizisi klasik Korovkin tipi teoremi de sağlamaz.

4.6.2 Eş-İstatistiksel Yakınsaklığın Mertebesi

Bu kısımda $C(X)$ uzayı üzerinde tanımlı bir pozitif lineer operatörler dizisinin eş-istatistiksel yakınsaklık mertebesi süreklilik modülü yardımıyla incelenecektir.

4.6.2.1. Tanım: Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\wp_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} = 0 \quad , \quad x \text{ e göre düzgün ise yani:}$$

her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\wp_n(.,\varepsilon)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta}} = 0$$

ise (f_n) dizisi bir f fonksiyonuna $\beta \in (0,1)$ mertebesi ile eş-istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum X üzerinde

$$f_n - f = o\left(n^{-\beta}\right)(eş-istatistiksel)$$

ile gösterilir (Karakuş ve ark. , 2008).

Bu tanım kullanılarak eş-istatistiksel Korovkin tipi teoremin eş-istatistiksel yakınsaklık mertebesi bulunabilir. Şimdi mertebeyi bulmaya yardımcı olacak lemma verilsin:

4.6.2.2. Lemma: $C(X)$ uzayının iki fonksiyon dizisi (f_n) ve (g_n) olsun.

X üzerinde

$f_n - f = o\left(n^{-\beta_1}\right)\left(eş - istatistiksel\right)$ ve $g_n - g = o\left(n^{-\beta_2}\right)\left(eş - istatistiksel\right)$

olsun. $\beta := \min\{\beta_1, \beta_2\}$ denilsin.

(i) X üzerinde

$$(f_n + g_n) - (f + g) = o\left(n^{-\beta}\right)\left(eş - istatistiksel\right)$$

(ii) X üzerinde

$$(f_n - f)(g_n - g) = o\left(n^{-\beta}\right)\left(eş - istatistiksel\right)$$

(iii) Herhangi bir λ reel sayısı için X üzerinde

$$\lambda(f_n - f) = o\left(n^{-\beta_1}\right)\left(eş - istatistiksel\right)$$

(iv) X üzerinde

$$\sqrt{|f_n - f|} = o\left(n^{-\beta_1}\right)\left(eş - istatistiksel\right)$$

sağlanır (Karakuş ve ark. , 2008).

İspat : (i) X üzerinde

$f_n - f = o\left(n^{-\beta_1}\right)\left(eş - istatistiksel\right)$ ve $g_n - g = o\left(n^{-\beta_2}\right)\left(eş - istatistiksel\right)$ olsun.

$\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için

$$\wp_n(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : \left|(f_k + g_k)(x) - (f + g)(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

$$\wp_{1,n}(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : \left|f_k(x) - f(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

$$\wp_{2,n}(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : \left|g_k(x) - g(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

kümeleri belirlensin. Buradan

$$\left|(f_k + g_k)(x) - (f + g)(x)\right| \le \left|f_k(x) - f(x)\right| + \left|g_k(x) - g(x)\right|$$

olmasından;

$$\frac{\wp_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} \le \frac{\wp_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} + \frac{\wp_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}}$$

elde edilir. $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$ olduğundan

$$\frac{\wp_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} \le \frac{\wp_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta_1}} + \frac{\wp_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta_2}}$$

olur.

Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\wp_n(.,\varepsilon)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\wp_{1,n}(.,\varepsilon)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta_1}} + \lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\wp_{2,n}(.,\varepsilon)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta_2}}$$

bulunur ve hipotezden

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\wp_n(.,\varepsilon)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta}} = 0$$

yani; X üzerinde

$$(f_n+g_n)-(f+g)=o\left(n^{-\beta}\right)(eş-istatistiksel).$$

(ii) X üzerinde

$f_n-f=o\left(n^{-\beta_1}\right)(eş-istatistiksel)$ ve $g_n-g=o\left(n^{-\beta_2}\right)(eş-istatistiksel)$

olsun. $\varepsilon>0$ ve $x\in X$ için

$\wp_n(x,\varepsilon):=\left|\left\{k\le n:\left|f_k(x)-f(x)\right|\left|g_k(x)-g(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|$

$\wp_{1,n}(x,\varepsilon):=\left|\left\{k\le n:\left|f_k(x)-f(x)\right|\ge\sqrt{\varepsilon}\right\}\right|$

$\wp_{2,n}(x,\varepsilon):=\left|\left\{k\le n:\left|g_k(x)-g(x)\right|\ge\sqrt{\varepsilon}\right\}\right|$

kümeleri belirlensin. Yine $\forall\alpha,\beta\ge 0$ için $\alpha\beta\ge\varepsilon$ ise $\alpha\ge\sqrt{\varepsilon}$ veya $\beta\ge\sqrt{\varepsilon}$ olduğundan

$$\frac{\wp_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}}\le\frac{\wp_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}}+\frac{\wp_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}}$$

olup (i) şıkkına benzer şekilde $\beta=\min\{\beta_1,\beta_2\}$ ve hipotez kullanılarak X üzerinde

$$(f_n-f)(g_n-g)=o\left(n^{-\beta}\right)(eş-istatistiksel)$$

elde edilir.

(iii) X üzerinde

$f_n-f=o\left(n^{-\beta_1}\right)(eş-istatistiksel)$ ve λ herhangi bir reel sayı olsun.

$\lambda=0$ ise sonuç aşikardır.

$\lambda\ne 0$ olsun. Hipotezden

$\forall\varepsilon,\varepsilon'>0$ için $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ∍ $\forall n>n_0$ ve $\forall x\in X$ için

$$\frac{\left|\left\{k\le n:\left|f_k(x)-f(x)\right|\ge\frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}}<\varepsilon'.$$

Buradan $\left|\lambda\left(f_k(x)-f(x)\right)\right|=|\lambda|\left|f_k(x)-f(x)\right|$ olması kullanılarak

$\forall \varepsilon, \varepsilon' > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni \forall n > n_0$ ve $\forall x \in X$ için

$$\frac{\left|\left\{k \le n : \left|\lambda\left(f_k(x)-f(x)\right)\right| \ge \varepsilon\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}} < \varepsilon'$$

elde edilir. O halde

herhangi bir λ reel sayısı için X üzerinde

$$\lambda\left(f_n - f\right) = o\left(n^{-\beta_1}\right)\left(e\c{s} - istatistiksel\right).$$

(iv) X üzerinde

$f_n - f = o\left(n^{-\beta_1}\right)\left(e\c{s} - istatistiksel\right)$ olsun.

$\left|f_k(x)-f(x)\right| < \varepsilon$ ise $\sqrt{\left|f_k(x)-f(x)\right|} < \sqrt{\varepsilon}$

olup

$$\left\{k \le n : \sqrt{\left|f_k(x)-f(x)\right|} \ge \sqrt{\varepsilon}\right\} \subseteq \left\{k \le n : \left|f_k(x)-f(x)\right| \ge \varepsilon\right\}$$

buradan

$$\frac{\left|\left\{k \le n : \sqrt{\left|f_k(x)-f(x)\right|} \ge \sqrt{\varepsilon}\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}} \le \frac{\left|\left\{k \le n : \left|f_k(x)-f(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}}$$

olur hipotezden X üzerinde

$$\sqrt{\left|f_n - f\right|} = o\left(n^{-\beta_1}\right)\left(e\c{s} - istatistiksel\right)$$

sağlanır.

$f \in C(X)$ ve f fonksiyonunun süreklilik modülü;

$$w(f;\delta) = \sup_{\substack{x, y \in X \\ |x-y| \le \delta}} \left|f(x)-f(y)\right|$$

şeklinde olmak üzere $x, y \in X$, $\delta > 0$, $c > 0$ ve $[c]$, c in tam kısmını göstermek üzere

(a) $w(f;c\delta) \le \left(1+[c]\right) w(f;\delta)$

(b) $\left|f(y)-f(x)\right| \le w\left(f;|y-x|\right)$

eşitsizlikleri mevcuttur (Korovkin, 1960).

4.6.2.3. Teorem: $L_n : C(X) \to C(X)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. L_n

operatörleri

i) X üzerinde

$$L_n(e_0) - e_0 = o\left(n^{-\beta_0}\right)(eş - istatistiksel)$$

ii) $\varphi(y) = y - x$ ve $\delta_n(x) = \sqrt{L_n(\varphi^2; x)}$ olmak üzere

$$w(f; \delta_n) = o\left(n^{-\beta_1}\right)(eş - istatistiksel)$$

koşullarını sağlarsa her $f \in C(X)$ için $\beta = \min\{\beta_0, \beta_1\}$ olmak üzere X üzerinde

$$L_n(f) - f = o\left(n^{-\beta}\right)(eş - istatistiksel)$$

olur (Karakuş ve ark. , 2008).

İspat: $f \in C(X)$, $x \in X$ ve $M := \|f\|_{C(X)}$ olmak üzere

$$\left|L_n(f; x) - f(x)\right| = \left|L_n(f(y); x) - L_n(f(x); x) + L_n(f(x); x) - f(x)\right|$$

$$= \left|L_n(f(y) - f(x); x) - f(x)\left(L_n(e_0; x) - e_0(x)\right)\right|$$

$$\leq L_n\left(\left|f(y) - f(x)\right|; x\right) + \|f\|_{C(X)}\left|L_n(e_0; x) - e_0(x)\right|$$

$$\leq L_n\left(w\left(f; \delta\frac{|y - x|}{\delta}\right); x\right) + M\left|L_n(e_0; x) - e_0(x)\right|$$

$$\leq L_n\left(\left(1 + \frac{|y - x|}{\delta}\right)w(f; \delta); x\right) + M\left|L_n(e_0; x) - e_0(x)\right|$$

$$= w(f; \delta)L_n(e_0; x) + \frac{w(f; \delta)}{\delta}L_n\left(|y - x|; x\right) + M\left|L_n(e_0; x) - e_0(x)\right|$$

olup, pozitif fonksiyonlar için Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden;

$$L_n\left(|y - x|; x\right) \leq \left(L_n\left((y - x)^2; x\right)\right)^{1/2}\left(L_n(e_0; x)\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{L_n(\varphi^2; x)}\sqrt{L_n(e_0; x)}$$

olacağından

$$\left|L_n(f; x) - f(x)\right| \leq M\left|L_n(e_0; x) - e_0(x)\right| + w(f; \delta)\left(L_n(e_0; x) + \delta^{-1}\sqrt{L_n(\varphi^2; x)}\sqrt{L_n(e_0; x)}\right)$$

elde edilir.

$\delta=\delta_n=\sqrt{L_n\left(\varphi^2;x\right)}$ alınırsa

$$\left|L_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq M\left|L_n\left(e_0;x\right)-e_0\left(x\right)\right|+w\left(f;\delta_n\right)\left(L_n\left(e_0;x\right)+\sqrt{L_n\left(e_0;x\right)}\right)$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned}\left|L_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq M\left|L_n\left(e_0;x\right)-e_0\left(x\right)\right|+w\left(f;\delta_n\right)&\left(\left(L_n\left(e_0;x\right)-e_0\left(x\right)\right)+2\right.\\ &\left.+\sqrt{L_n\left(e_0;x\right)-e_0\left(x\right)}\right)\\ &\leq M\left|L_n\left(e_0;x\right)-e_0\left(x\right)\right|+2w\left(f;\delta_n\right)+w\left(f;\delta_n\right)\left|L_n\left(e_0;x\right)-e_0\left(x\right)\right|\\ &\quad+w\left(f;\delta_n\right)\sqrt{L_n\left(e_0;x\right)-e_0\left(x\right)}\,. \end{aligned} \tag{4.6.2.1}$$

$$\wp_n\left(x,\varepsilon\right):=\left|\left\{k\leq n:\left|L_k\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$\wp_{n,1}\left(x,\varepsilon\right):=\left|\left\{k\leq n:M\left|L_k\left(e_0;x\right)-e_0\left(x\right)\right|\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|$$

$$\wp_{n,2}\left(x,\varepsilon\right):=\left|\left\{k\leq n:2w\left(f;\delta_k\right)\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|$$

$$\wp_{n,3}\left(x,\varepsilon\right):=\left|\left\{k\leq n:w\left(f;\delta_k\right)\left|L_k\left(e_0;x\right)-e_0\left(x\right)\right|\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|$$

$$\wp_{n,4}\left(x,\varepsilon\right):=\left|\left\{k\leq n:w\left(f;\delta_k\right)\sqrt{\left|L_k\left(e_0;x\right)-e_0\left(x\right)\right|}\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|$$

kümeleri tanımlansın. (4.6.2.1) eşitsizliğinden

$$\frac{\wp_n\left(x,\varepsilon\right)}{n^{1-\beta}}\leq\frac{\wp_{n,1}\left(x,\varepsilon\right)}{n^{1-\beta}}+\frac{\wp_{n,2}\left(x,\varepsilon\right)}{n^{1-\beta}}+\frac{\wp_{n,3}\left(x,\varepsilon\right)}{n^{1-\beta}}+\frac{\wp_{n,4}\left(x,\varepsilon\right)}{n^{1-\beta}}$$

olduğu kolayca görülebilir. Buradan $\beta=\min\left\{\beta_0,\beta_1\right\}$ olduğundan

$$\frac{\wp_n\left(x,\varepsilon\right)}{n^{1-\beta}}\leq\frac{\wp_{n,1}\left(x,\varepsilon\right)}{n^{1-\beta_0}}+\frac{\wp_{n,2}\left(x,\varepsilon\right)}{n^{1-\beta_1}}+\frac{\wp_{n,3}\left(x,\varepsilon\right)}{n^{1-\beta}}+\frac{\wp_{n,4}\left(x,\varepsilon\right)}{n^{1-\beta}}$$

elde edilir ve böylece

$$\frac{\left\|\wp_n\left(.,\varepsilon\right)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta}}\leq\frac{\left\|\wp_{n,1}\left(.,\varepsilon\right)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta_0}}+\frac{\left\|\wp_{n,2}\left(.,\varepsilon\right)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta_1}}+\frac{\left\|\wp_{n,3}\left(.,\varepsilon\right)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta}}+\frac{\left\|\wp_{n,4}\left(.,\varepsilon\right)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta}}$$

olur. Buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\wp_n\left(.,\varepsilon\right)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta}}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\wp_{n,1}\left(.,\varepsilon\right)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta_0}}+\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\wp_{n,2}\left(.,\varepsilon\right)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta_1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\wp_{n,3}\left(.,\varepsilon\right)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta}}$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\wp_{n,4}\left(.,\varepsilon\right)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta}}$$

hipotezden

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\wp_{n}\left(.,\varepsilon\right)\right\|_{C(X)}}{n^{1-\beta}}=0$$

olup, X üzerinde

$$L_n\left(f\right)-f=o\left(n^{-\beta}\right)\left(eş-istatistiksel\right).$$

4.6.2.4. Sonuç: 4.6.2.3. Teorem' deki i) ve ii) koşulları X üzerinde

$$L_n\left(e_i\right)-e_i=o\left(n^{-\beta_i}\right)\left(eş-istatistiksel\right)\qquad\left(i=0,1,2\right)\tag{4.6.2.2}$$

koşulları ile değiştirilsin.

$$L_n\left(\varphi^2;x\right)=L_n\left(e_2;x\right)-2xL_n\left(e_1;x\right)+x^2L_n\left(e_0;x\right)$$

$$\leq\left|L_n\left(e_2;x\right)-e_2\left(x\right)\right|+2\left\|e_1\right\|_{C(X)}\left|L_n\left(e_1;x\right)-e_1\left(x\right)\right|+\left\|e_2\right\|_{C(X)}\left|L_n\left(e_0;x\right)-e_0\left(x\right)\right|$$

olup $N:=1+2\left\|e_1\right\|_{C(X)}+\left\|e_2\right\|_{C(X)}$ olmak üzere

$$L_n\left(\varphi^2;x\right)\leq N\sum_{i=0}^{2}\left|L_n\left(e_i;x\right)-e_i\left(x\right)\right|\tag{4.6.2.3}$$

elde edilir.

$\gamma=\min\left\{\beta_0,\beta_1,\beta_2\right\}$ denilirse (4.6.2.2), (4.6.2.3) ve 4.6.2.2. Lemma' dan X üzerinde

$$\delta_n=\sqrt{L_n\left(\varphi^2\right)}=o\left(n^{-\gamma}\right)\left(eş-istatistiksel\right)$$

olur. Buradan X üzerinde

$$w\left(f;\delta_n\right)=o\left(n^{-\gamma}\right)\left(eş-istatistiksel\right)\tag{4.6.2.4}$$

elde edilir. O halde 4.6.2.3. Teorem' de (4.6.2.4) kullanılarak her $f\in C\left(X\right)$ için X üzerinde

$$L_n\left(f\right)-f=o\left(n^{-\gamma}\right)\left(eş-istatistiksel\right)$$

olur. Böylece Teorem' de i) ve ii) koşulları yerine (4.6.2.2) kullanılırsa eş-istatistiksel Korovkin tipi teorem deki pozitif lineer operatörler dizisinin eş-istatistiksel yakınsaklık mertebesi elde edilir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Korovkin tipi teoremler yaklaşım teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Son yıllarda, alışılmış yakınsaklıktan daha kuvvetli olan istatistiksel yakınsaklığın yaklaşım teorisinde kullanılması özellikle Korovkin tipi teoremlerde kullanılması kuvvetli sonuçların elde edilmesini sağlamıştır. Bu nedenle bu yüksek lisans tezinde konuya ait makaleler incelenerek doktora çalışmasına hazırlık yapılmıştır. Daha kuvvetli sonuçlar elde edebilmek ve bunu daha az koşul altında gerçekleştirebilmek için Korovkin tipi teorem ve istatistiksel yakınsaklığın yaklaşım teorisinde incelenmesi faydalı olacaktır.

6. KAYNAKLAR

Balcerzak, M. , Dems, K. , Komisarski, A. , 2007. Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions. J. Math. Anal. Appl. , 328: 715-729.

Bernstein, S. , 1912. Démonstration du Théoréme de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilities, Comm. Soc. Math. Kharkov, 13: 1-2.

Duman, O. , 2003. Statistical Approximation For Periodic Functions, Demonstratio Mathematica, 36: 873-878.

Erkuş, E. , Duman, O. , 2006. A Korovkin type approximation theorem in statistical sence. Studia Sci. Math. Hungar. , 43: 285-294.

Erkuş, E. , Duman, O. , Srivastava, H. M. , 2006. Statistical approximation of certain positive linear operators constructed by means of the Chan-Chyan-Srivastava polynomials, Appl. Math. Comput. , 182: 213-222.

Fast, H. , 1951. Sur la Convergence Statistique, Colloq. Math. , 2: 241-244.

Fridy, J. A. , 1985. On statistical convergence, Analysis, 5: 301-313.

Gadjiev, A. D. , Orhan, C. 2002. Some Approximation Theorems Via Statistical Convergence , Rocky Mountain J. Math. , 32: 129-138.

Karakuş, S. , Demirci, K. , Duman, O. , 2008. Equi-statistical convergence of positive linear operators, J. Math. Anal. Appl. , 339: 1065-1072.

Korovkin, P. P. 1960. Linear Operators and Approximation Theory, India, Delhi.

Niven, I. and Zuckerman, H. S. 1980. An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Fourt Ed. , New York.

ÖZGEÇMİŞ

Sevda ORHAN 1987 yılında Ankara'da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2005 yılında girdiği Ondokuz Mayıs Üniversitesi Sinop Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2009 yılında fakülte birincisi olarak mezun oldu. 2009-2011 yılları arasında, Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve halen devam etmektedir.