

**SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ
BAŞLANGIÇ-DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN
DÜZGÜN YAKINSAK FARK ŞEMALARI**

**BURÇAK YILMAZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ
BAŞLANGIÇ-DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN
DÜZGÜN YAKINSAK FARK ŞEMALARI

BURÇAK YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

SİNOP – 2011

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 30/12/2011 tarihinde yapılan sınav ile MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

Üye : Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ

Üye : Yrd. Doç Dr. Alper SİNAN

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

12 / 01 / 2012

Doç Dr. Hünkar Avni DUYAR
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ BAŞLANGIÇ-DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN DÜZGÜN YAKINSAK FARK ŞEMALARI

ÖZET

Bu çalışmada singüler pertürbe özellikli birinci ve ikinci mertebeden lineer başlangıç-değer problemlerinin, sonlu farklar metodu ile nümerik çözümleri incelenmiştir. Bu problemler için öncelikle gerekli asimptotik değerlendirmeler yapıldı. Daha sonra düzgün şebeke üzerinde üstel baz fonksiyonları ile kalan terimleri integral biçiminde olan ve ağırlık fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formülleri kullanılarak uygulanan integral özdeşlikleri metodu ile pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsak üstel katsayılı fark şemaları kuruldu. Önerilen fark problemleri için yakınsama hızları incelendi ve somut örnekler üzerinde nümerik sonuçların teorik sonuçlarla uyumlu olduğu gösterildi.

Anahtar Kelimeler: Singüler Pertürbasyon , Fark Şemaları , Düzgün Yakınsaklık, Başlangıç-Değer Problemleri, Doğrusal Diferansiyel Denklemler

UNIFORMLY CONVERGENT DIFFERENCE SCHEMES FOR SINGULARLY PERTURBED INITIAL-VALUE PROBLEMS

ABSTRACT

In this study, we investigate the numerical solutions of the linear first- and second-order singularly perturbed initial-value problems. Firstly, asymptotic estimates for these problems are established. Next, by method of integral identities using appropriate interpolating quadrature rules with the weight and remainder terms in integral form, the numerical methods are constructed. The difference schemes are shown to converge to the continuous solutions uniformly with respect to the perturbation parameter. Also the problem is tested on concrete examples and it is shown that numerical results are essentially in agreement with the theoretical analysis.

Key Words : Singular Perturbation , Difference Schemes , Uniform Convergence, Initial-Value Problems , Linear Differential Equations

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım esnasında göstermiő olduğu yakın ilgi ve yardımlarından dolayı danışman hocam Sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALI' ye, bana uygun çalışma ortamı sağlayan aileme ve bu çalışmada emeiği geçen herkese teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ	v
ŞEKİLLER VE ÇİZELGELER LİSTESİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER VE LİTERATÜR ÖZETİ	3
2.1. Tanımlar	3
2.2. Bazı Formüller	10
2.2.1. Kuadratur Formülleri	10
2.2.2. Diferansiyelleme Formülü	11
2.3. Bazı Eşitsizlikler	11
2.3.1. μ -eşitsizliği	11
2.3.2. Gronwall İntegral Eşitsizlikleri	12
2.3.3. Gronwall Eşitsizliğinin Fark Benzeri	12
3. BİRİNCİ MERTEBEDEN DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ - DEĞER PROBLEMİ	14
3.1. Klasik Fark Şemaları Üzerine	14
3.2. Üstel Katsayılı Fark Şeması	18
3.2.1. Sürekli Problemin Çözümünün Değerlendirilmesi	18
3.2.2. Fark Şemasının Kurulması	22
3.2.3. Hata Değerlendirilmesi ve Yakınsaklık Analizi	24
3.2.4. Nümerik Sonuçlar	27
4. İKİNCİ MERTEBEDEN DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ - DEĞER PROBLEMİ	29
4.1. Diferansiyel Problem	29
4.2. Fark Şemasının Kurulması	36
4.3. Hata Değerlendirmesi ve Yakınsama	40
4.4. Nümerik Sonuçlar	43
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	45
6. KAYNAKLAR	46
ÖZGEÇMİŞ	48

SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

SEMBOLLER

ε	Singüler pertürbasyon parametresi
x, t	Bağımsız değişkenler
$u(x), u(t)$	Sürekli problemin çözümü (kesin çözüm)
$u_0(x)$	İndirgenmiş problemin çözümü
L	Diferansiyel operatör
ℓ	Fark operatörü
$y(x), y(t)$	Fark probleminin çözümü (yaklaşık çözüm)
h, τ	Şebeke adımları
i, j	Şebekedeki nokta indisleri
x_i, t_j	Düğüm noktaları
g_i	Herhangi $g(x)$ fonksiyonunun x_i düğümündeki değeri
$O(h^k)$	Yakınsama hızı
$\ f\ _{C[0,l]} = \max_{[0,l]} f(x) $	$[0, l]$ kümesindeki sürekli norm
$\ y\ _{C(\sigma_h)} = \max_{1 \leq i \leq N} y_i $	σ_h şebekesindeki ayırık norm

ŞEKİLLER VE ÇİZELGELER LİSTESİ

ŞEKİLLER

Sayfa No

Şekil 2.1. Örnek 2.2' nin çözümüne ait grafik eğrisi

6

ÇİZELGELER

Sayfa No

Çizelge 4.1. ε ve τ değerleri için hata değerlendirmesi

44

1. GİRİŞ

Singüler pertürbe özellikli problemler uygulamalı matematiğin ve matematiksel fiziğin pek çok değişik alanlarında kullanılmaktadır. Örneğin; akışkanlar mekaniği, akışkanlar dinamiği, plazma dinamik, aerodinamik, manyetik dinamik, arıtılmış gaz dinamik, kütle hareketi, plastik, kimyasal-reaktör teori, oşinografi, meteoroloji, yayma teori, reaksiyon- difüzyon süreçleri, ışık yayan dalgalar, plazmadaki elektron plazma dalgaları, iletişim hatları, elektrik akımı, iyon akustik dalgaları ve diğer fiziksel modellendirilmesinde karşılaşılmıştır (Kevorkian ve Cole, 1981; O' Malley, 1990; Nayfeh, 1993).

Matematiksel olarak, bu tip problemler, en yüksek mertebeden türev içeren terimlerinin katsayılarının pozitif küçük bir parametre olduğu problemlerdir. Böyle problemlerin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında çok hızlı değişime sahiptir. Yani çözüm problemin türüne göre başlangıç veya sınır katları olarak bilinen ince geçiş katlarında hızlı diğer yerlerde ise düzenli ve yavaş değişir. Bu hızlı değişim gösterdiği katlarda ise çözümün türevleri sınırsız olur. Klasik nümerik metotlarda, çözümün türevi sonsuz olabileceği için, klasik fark şemalarının düzgün şebekelerdeki nümerik çözümleri kesin çözüme genelde yakınsamaz. Dolayısıyla söz konusu metotların kararsız ya da ıraksak olmaları nedeniyle uygulanması mümkün değildir. Dolayısıyla kararlı ve küçük parametreye göre düzgün yakınsaklık özelliğini taşıyan nümerik metotların kurulması önem taşır (Farrell ve ark., 1996, 1998; Roos ve ark., 1996).

Bu tezde uygulamalı bilim dallarının birçok değişik alanında kullanılan singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemler için başlangıç-değer problemleri ele alınmış ve matematiksel özellikleri (kararlılık, yaklaşım hatası, yakınsama hızı ve çözüm algoritması) incelenmiştir.

Bu çalışma 6 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde giriş yer almaktadır.

İkinci bölümde tezde kullanılan genel bilgiler ve literatür özeti verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde aşağıdaki singüler pertürbe olmuş birinci mertebeden lineer başlangıç-değer problemi ele alınmıştır:

$$Lu := \varepsilon u' + a(x)u = f(x), \quad 0 < x \leq l, \quad (1.1)$$

$$u(0) = A. \quad (1.2)$$

Burada $0 < \varepsilon < 1$ küçük parametre, $a(x) \geq \alpha > 0, f(x)$ yeterince düzgün fonksiyonlar (düzgünlük derecesi yeri geldiğince somutlaşacaktır), A verilmiş sabittir. Her durumda (1.1)-(1.2) probleminin sürekli çözümünün varlığı ve tekliği kabul edilerek, bunun nümerik çözümü ile ilgilenilecektir.

Öncelikle (1.1)-(1.2) probleminin nümerik çözümü için, klasik fark şemalarının uygulanmasındaki sıkıntılara değinilmiştir. Daha sonra diferansiyel problemin özelliklerini daha iyi yansıtacak olan üstel katsayılı fark şeması kurularak, bunun şebeke adımının birinci derecesiyle düzgün yakınsak olduğu ispatlanmıştır.

Dördüncü bölümde ise aşağıda verilen singüler pertürbe olmuş ikinci mertebeden lineer başlangıç-değer problemi incelenmiştir:

$$Lu := \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(t)u' + b(t)u = f(t), \quad 0 < t \leq T, \quad (1.3)$$

$$u(0) = A, \quad (1.4)$$

$$u'(0) = \frac{B}{\varepsilon}. \quad (1.5)$$

Burada $\varepsilon > 0$ küçük parametre, A ve B verilmiş sabitlerdir. $a(t) \geq \alpha > 0, b(t) \geq \beta > 0$ ve $f(t)$ ise $[0, T]$ ' de tanımlı yeterince düzgün fonksiyonlardır. (1.3)-(1.5) problemi ileride ispatlanacağı gibi $t = 0$ noktasında bir tek sınır katına sahiptir. Söz konusu problem için $O(\tau)$ kesinliğe sahip fark şemasının kurulması ve yakınsaklığın incelenmesi bu kısmın esas araştırma amacıdır.

Beşinci bölümde incelenen problemler için sonuç değerlendirilmesi yapılmıştır.

Altıncı bölümde ise yararlanılan kaynaklar verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER VE LİTERATÜR ÖZETİ

Singüler pertürbe özellikli problemlere ilgi, yaklaşık olarak yirminci yüzyılın başlarında başlamıştır. Araştırmalar ilk aşamada asimptotik açılımlar üzerine yoğunlaşmıştır (Kevorkian ve Cole, 1981; O' Malley, 1990; Nayfeh, 1993). 1960' lı yıllardan sonraki dönemlerde ise nümerik yöntemler üzerine çalışılmıştır ve halen yoğun şekilde araştırmalar devam etmektedir (Farrell ve ark., 2000).

Başlangıç katı içeren başlangıç-değer problemi için nümerik analizleri pek çok yazar ele almıştır. Doolan ve ark. (1980), başlangıç ve sınır katı içeren problemler için düzgün şebekede pertürbasyon parametresine göre düzgün yakınsak üstel katsayılı fark şemalarını incelemiştir. Hasio ve ark. (1983), başlangıç katı içeren parabolik tip problem için Crank-Nicholson ve Galerkin metotlarını ele almıştır. Roos ve ark. (1996), başlangıç katı içeren singüler pertürbe olmuş adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin düzgün yakınsak nümerik çözümlerini değerlendirmiştir. Boglaev (2001), parabolic başlangıç-sınır değer problemi için bölge ayrıştırma metodunu kullanmıştır. Amiraliyev ve Duru (2002), başlangıç katı içeren birinci ve ikinci mertebeden başlangıç-değer problemleri için fark şemasının kurulması ve yakınsaklık özellikleri ile ilgilenmiştir. Amiraliyev ve Erdoğan (2009), birinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel fark başlangıç-değer problemi için uyarlanmış şebekede fark şemalarının yakınsaklığını araştırmışlardır.

Bu bölümde çalışma boyunca kullanılan bazı tanımlar ve formüller verilmiştir.

2.1. Tanımlar

Tanım 2.1.1. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

i) $[0, l]$ aralığında tanımlanan

$$\mathcal{D} = \{x_i \mid 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = l\}$$

ayrık noktalar kümesine $[0, l]$ aralığında tanımlanan düzgün olmayan şebeke denir. x_i noktalarına ise düğüm noktaları veya şebeke düğümleri denir. $h_i = x_i - x_{i-1}$ şebeke adımlarıdır. Düzgün veya düzgün olmayan şebekede tanımlanmış $g_i \equiv g(x_i)$ fonksiyonuna x_i düğüm noktalarındaki şebeke fonksiyonu denir (Samarskii, 2001).

ii) Eğer düğümler eşit aralıklı iseler bu durumda oluşan

$$\varpi_h = \{x_i | x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N; h = l / N\}$$

şebekesine $[0, l]$ aralığındaki düzgün şebeke, h sabitine ise şebeke adımı denir (Samarskii, 2001)

Tanım 2.1.2.

$\|g\|_{\infty, \bar{\Omega}} = \max_{0 \leq x \leq l} |g(x)|$ ifadesine $g(x)$ fonksiyonunun $[0, l]$ aralığındaki sürekli maksimum normu denir. ($\Omega = (0, l), \bar{\Omega} = [0, l]$)

Şebeke fonksiyonları için ise $\|g\|_{\infty, \varpi_h} = \max_{0 \leq i \leq N} |g_i|$ ifadesine düzgün şebekede maksimum norm denir.

Tanım 2.1.3. Regüler ve Singüler Pertürbe Olmuş Problem

P_ε , $\varepsilon > 0$ küçük parametresine bağlı herhangi bir problem olsun. $\varepsilon = 0$ durumunda P_0 problemine, P_ε problemine uygun indirgenmiş problem denir. Eğer P_0 indirgenmiş problemi ile P_ε problemi aynı tipten, aynı mertebeden ve her ikisi de bir tek çözüme sahip iseler, söz konusu P_ε problemine regüler pertürbe olmuş problem denir. Aksi takdirde buna singüler pertürbe olmuş problem denir (Constanta, 2002).

Örnek 2.1.

$$P_\varepsilon : \begin{cases} u'(x) + \varepsilon u(x) = 0, & 0 < x \leq 1, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

başlangıç-değer problemi için çözüm fonksiyonu

$$u_\varepsilon(x) = e^{-\varepsilon x}$$

şeklindedir.

Uygun indirgenmiş problem

$$P_0 : \begin{cases} u'(x) = 0, & 0 < x \leq 1, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

şeklinde olup,

$$u_0(x) = 1$$

tek çözümüne sahiptir. Görüldüğü üzere problemin tipi, mertebesi değişmemiş ve her iki problem de bir tek çözüme sahip olmuşlardır. Ayrıca $[0,1]$ aralığının her x_0 noktası için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x) = 1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow x_0} u_\varepsilon(x)$$

deşitliği söz konusudur. Dolayısıyla ele alınan problem regüler pertürbe olmuş bir problemdir.

Örnek 2.2.

$$P_\varepsilon : \begin{cases} \varepsilon u'(x) + u(x) = 0, & 0 < x \leq 1, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

problemi ele alınırsa, kesin çözüm

$$u_\varepsilon(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

şeklindedir.

$$P_0 : \begin{cases} u(x) = 0, & 0 < x \leq 1, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

indirgenmiş problemine bakıldığında mertebenin düştüğü ve başlangıç şartının gereksiz hal aldığı görülür. Dolayısıyla $x = 0$ civarında sınır katı denilen, çözümün hızlı değişim

gösterdiği dar alanın varlığı söylenebilir. Dolayısıyla indirgenmiş problem $u_0(x) = 0$ çözümüne sahiptir. Tekrarlı limitlere bakılırsa, $u_\varepsilon(x)$ fonksiyonun keyfi $x_0 \in (0,1]$ noktası için

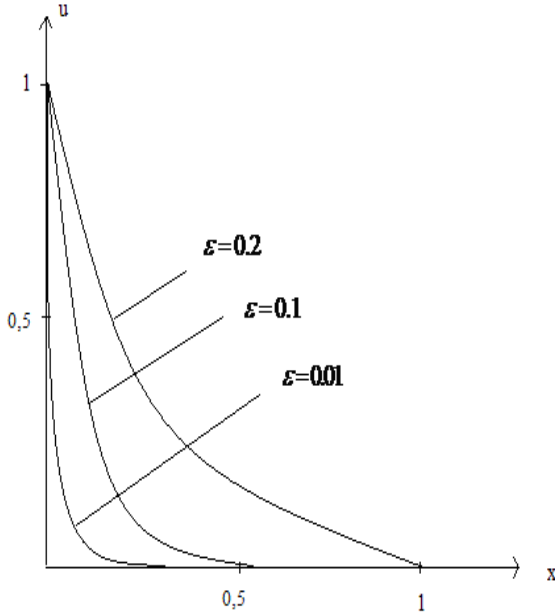
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(x) = 0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow x_0} u_\varepsilon(x)$$

olduğu görülür. Fakat $x = 0$ noktası için

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \neq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} = 1.$$

Bu tip eşitsizlikler diferansiyel denklemler için singüler pertürbe olmuş problemlere has bir özellik olup, başlangıç katının varlığının göstergesidir. Çok küçük ε değerleri için $x = 0$ civarında fonksiyonun hızlı bir şekilde değiştiği görülmektedir.

$u_\varepsilon(x)$ grafiği aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1. Örnek 2.2' nin çözümünün ε 'a göre değişimi

Grafikte ilk göze çarpan, ε küçüldükçe fonksiyon eğrisinin koordinat eksenlerine daha fazla yaslandığıdır.

Ayrıca çözümün kendisi

$$|u(x)| = \left| e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right| \leq 1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

olmasına rağmen bu fonksiyon $x=0$ civarında ani değişme gösterir ve sınır katı dahilinde $\varepsilon \rightarrow 0$ iken türevler sınırsız değerler alır.

$$|u^{(k)}(x)| = \frac{1}{\varepsilon^k} e^{-\frac{x}{\varepsilon}},$$

$$|u^{(k)}(0)| = \frac{1}{\varepsilon^k} \quad k \geq 0, \quad (\varepsilon \rightarrow 0 \text{ iken } \frac{1}{\varepsilon^k} \rightarrow \infty).$$

Örneğin birinci türevin sınırlı olması için

$$|u'(x)| = \left| -\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \right| \leq 1 \Rightarrow x \geq \varepsilon |\ln \varepsilon|$$

olması gerektiği görülmektedir.

Tanım 2.1.4

$[0, l]$ aralığındaki $g(x)$ fonksiyonunun düzgün şebeke için fark türevleri aşağıdaki gibidir (Samarskii, 2001).

$$\text{i) } g_{x,i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h}$$

ifadesine birinci mertebeden ileri fark türevi denir.

$$\text{ii) } g_{x,i}^- = \frac{g_i - g_{i-1}}{h}$$

ifadesine birinci mertebeden geri fark türevi denir.

$$\text{iii) } g_{x,i}^{\circ} = \frac{1}{2} (g_{x,i} + g_{\bar{x},i}^-) = \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h}$$

ifadesine birinci mertebeden merkezi fark türevi denir.

$$\text{iv) } g_{\bar{x},i}^{\circ} = \frac{g_{x,i} - g_{\bar{x},i}}{h} = \frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2}$$

ifadesine ikinci mertebeden fark türevi denir.

Tanım 2.1.5. Kararlılık

Lineer

$$Lu = f(x), \quad x \in G \tag{2.1}$$

denkleminin

$$\ell u = \mu(x) \quad x \in \Gamma \tag{2.2}$$

şartını (sınır şartı veya başlangıç şartı olabilir) sağlayan çözümünün bulunması istensin, burada $f(x), \mu(x)$ belirli fonksiyonlar (veri fonksiyonları), ℓ -belirli bir lineer diferansiyel operatördür. $\bar{G} = G \cup \Gamma$ bölgesinde herhangi bir $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$ şebekesinin kurulduğu varsayılınsın, burada ω_h -iç şebeke, γ_h -sınır şebeke (şebeke sınır noktaları kümesi), h ise şebeke düğümlerinin yoğunluğunu ifade eden parametredir.

(2.1)-(2.2) problemine karşılık gelen fark problemi

$$L_h y = \varphi_h, \quad x \in \omega_h, \tag{2.3}$$

$$\ell_h y = \chi_h, \quad x \in \gamma_h \tag{2.4}$$

olsun. Burada L_h, ℓ_h - $\bar{\omega}_h$ 'da tanımlanan fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri, φ_h, χ_h belli şebeke fonksiyonlarıdır.

Kararlılık, fark problemleri veya genellikle yaklaşık algoritmalar için, bunların pratik uygulanabilmesinin gerektirdiği önemli bir özelliktir.

(2.3)-(2.4) fark probleminin, belli sınıflardan olan her bir φ_h, χ_h başlangıç veri fonksiyonları ve yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için bir tek çözüme sahip olduğu varsayılın. (2.3)-(2.4) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\overline{\varphi}_h, \overline{\chi}_h$ olan çözümü \overline{y} ile belirlensin.

Yeteri kadar küçük h için,

$$\|\overline{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\overline{\varphi}_h - \varphi_h\|_2 + C_2 \|\overline{\chi}_h - \chi_h\|_3 \quad (2.5)$$

eşitsizliğini sağlayacak, h 'a bağlı olmayan C_1, C_2 sabitleri var olsun, bu durumda (2.3)-(2.4) fark şeması sağ tarafa ve sınır (veya başlangıç) şartına göre kararlıdır denir. Burada $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3$ herhangi şebeke normlarıdır.

(2.3)-(2.4) problemi lineer olduğundan, kararlılığı ifade eden (2.5) eşitsizliği

$$\|y\|_1 \leq C_1 \|\varphi_h\|_2 + C_2 \|\chi_h\|_3$$

eşitsizliğine denktir (Samarskii, 2001).

Böylece kararlılık, fark şemasının çözümünün başlangıç veri fonksiyonlarına sürekli bağlı olduğunu, hem de bu bağlılığın h ' a göre düzgün biçimli olduğunu ifade eder.

Tanım 2.1.6. Düzgün Yakınsaklık

u , (2.1)- (2.2) probleminin kesin çözümü ve y 'de herhangi bir şebekedeki bu probleme uygun fark probleminin çözümü olsun. $z = y - u$ ($x \in \mathcal{O}_h$) farkı, fark probleminin hatası (hata fonksiyonu) olarak tanımlanmaktadır.

Eğer $h \rightarrow 0$ olduğunda $\|z\|_1 = \|y - u\|_1 \rightarrow 0$ ise ($\|\cdot\|_1$ söz konusu şebekedeki herhangi bir norm), bu durumda uygun fark probleminin çözümü (2.1)-(2.2) probleminin çözümüne yakınsıyor denir. Ayrıca yeteri kadar küçük h için

$$\|y - u\|_1 \leq ch^k, k > 0 \quad (c, h' \text{ a bağılı olmayan bir sabittir})$$

ise bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme h 'ın k 'inci derecesiyle yakınsar ($O(h^k)$ hızıyla yakınsar) veya yaklaşık çözüm $O(h^k)$ kesinliğine sahiptir denir.

Bu tanıma ilave olarak eğer C ve h sabitleri, singüler pertürbe özellikli problemdeki pertürbasyon parametresi olan ε ' dan bağımsız iseler o zaman yaklaşık çözüm kesin çözüme ε ' na göre düzgün yakınsak olur (Samarskii, 2001).

2.2. Bazı Formüller

2.2.1. Kuadratur Formülleri

Fark şemalarının kurulmasında ve incelenmesinde aşağıdaki kalan terimleri integral biçiminde olan ağırlık fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formülleri kullanılacaktır (Amiraliyev ve Mamedov, 1995); Amiraliyev, 1998; Amiraliyev ve Duru, 1999).

$$\text{i) } \int_a^b p(x)f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx \right] \{ \sigma f(b) + (1-\sigma)f(a) \} + f(a;b) \int_a^b (x-x^{(\sigma)})p(x)dx + R(f), \quad (2.6)$$

burada σ -reel parametre, $p(x) \in C[a, b]$ ağırlık fonksiyonudur.

$$R(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) K_n(x, \xi) d\xi, \quad p \in C^1, f \in C^{n+1}, n=0 \text{ veya } 1$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1-\sigma)a, f(a;b) = (f(b) - f(a)) / (b-a),$$

$$K_n(x, \xi) = T_n(x-\xi) - (b-a)^{-1}(x-a)(b-\xi)^n, n=0,1$$

ve

$$T_n(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!} & , \lambda \geq 0 \\ 0 & , \lambda < 0. \end{cases}$$

$$\text{ii) } \int_a^b p(x) f'(x) dx = f(a; b) \int_a^b p(x) dx + \overline{R}(f), \quad (2.7)$$

$$\overline{R}(f) = - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n+1)}(\xi) K_n(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^{n+1}, n = 0 \text{ veya } 1$$

(2.6) ve (2.7) formüllerinde aynı $K_n(x, \xi)$ fonksiyonu kullanılmaktadır.

2.2.2. Diferansiyelleme Formülü

Kalan terimlerin değerlendirilmesinde çoğu zaman aşağıdaki diferansiyelleme formülü yararlı olabilir.

$$g'(x) = g(\alpha_0; \alpha_1) - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} K_0(\xi, x) g''(\xi) d\xi, \quad g \in C^2, \quad \alpha_0 \leq x \leq \alpha_1 \quad (2.8)$$

burada $K_0(\xi, x)$ fonksiyonu ve $g(\alpha_0; \alpha_1)$ ifadesi 2.2.1' in i şikkında tanımlanmıştır.

2.3. Bazı Eşitsizlikler

Bu kısımda ileride kullanılacak bazı eşitsizlikler verilmiştir.

2.3.1. μ -eşitsizliği

Keyfi a, b ve $\mu > 0$ için

$$|ab| \leq \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2$$

eşitsizliği vardır.

2.3.2. Gronwall İntegral Eşitsizlikleri

(Burada kullanılan fonksiyonların sürekli oldukları varsayılır.)

$$v(t) \leq u_0 + \int_0^t [p(s)v(s) + q(s)] ds, \quad p(t) \geq 0$$

ise bu durumda,

$$v(t) \leq u_0 e^{\int_0^t p(\xi) d\xi} + \int_0^t q(s) e^{\int_0^s p(\xi) d\xi} ds$$

olur.

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t h(s)v(s) ds, \quad h(t) \geq 0$$

durumunda ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$v(t) \leq g(t) + \int_0^t g(s) h(s) e^{\int_0^s h(\xi) d\xi} ds.$$

2.3.3. Gronwall Eşitsizliğinin Fark Benzeri

$y_j \geq 0$ fonksiyonu,

$$y_j \leq \alpha + \tau \sum_{k=1}^j \{a_k y_k + b_k y_{k-1} + f_k\},$$

$$y_0 \leq \alpha$$

($a_k, b_k, f_k \geq 0, 1 - \tau a_k > 0, k = 1, 2, \dots; \tau > 0$ – reel parametre) eşitsizliğini sağlasın.

Bu durumda,

$$y_j \leq \alpha \exp \left[\tau \sum_{k=1}^j \frac{a_k + b_k}{1 - \tau a_k} \right] + \tau \sum_{k=1}^j \frac{f_k}{1 - \tau a_k} \exp \left[\tau \sum_{\substack{\ell=k+1 \\ \ell \leq j}}^j \frac{a_\ell + b_\ell}{1 - \tau a_\ell} \right], \quad j = 1, 2, \dots$$

olur. Eğer, ayrıca $a_k = c_0 = \text{sbt}$, $b_k = c_1 = \text{sbt}$ ise, o zaman

$$y_j \leq \alpha \exp \left[\frac{(c_0 + c_1)t_j}{1 - \tau c_0} \right] + \frac{\tau}{1 - \tau c_0} \sum_{k=1}^j f_k \exp \left[\frac{(c_0 + c_1)t_{j-k}}{1 - \tau c_0} \right], \quad j = 1, 2, \dots$$

$$(t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots)$$

3. BİRİNCİ MERTEBEDEN DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ - DEĞER PROBLEMİ

3.1. Klasik Fark Şemaları Üzerine

Adi diferansiyel denklemlerin kesin çözümlerine ulaşmak çok az durumda mümkündür. Çözümün açık şekilde kuadraturlarla ifade edildiği formüller dahi problemi tamamen çözemez. Bu nedenle nümerik metotların uygulanması büyük önem taşır. Bu tip metotlarda çözüm ayrık değerler (tablo) biçiminde elde edilir.

Klasik fark şemaları denildiğinde, diferansiyel denklemdaki türevlerin şebekedeki değerlerinin uygun sonlu farklarla yer değiştirilmesi suretiyle elde edilen fark şeması anlaşılır.

$[0, l]$ aralığında,

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = \frac{l}{N} \right\} \text{ düzgün şebekesi üzerinde (1.1)-(1.2) problemi için}$$

sıkça kullanılan klasik fark şemaları aşağıdaki gibidir:

$$\text{Açık Euler} \quad \begin{cases} \ell_h y_i \equiv \varepsilon y_{x,i} + a_i y_i = f_i, \\ y_0 = A. \end{cases} \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\text{Kapalı Euler} \quad \begin{cases} \ell_h y_i \equiv \varepsilon y_{\bar{x},i} + a_i y_i = f_i, \\ y_0 = A. \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{Crank-Nicholson} \quad \begin{cases} \ell_h y_i \equiv \varepsilon y_{x,i} + a_{i-\frac{1}{2}} \frac{y_i + y_{i-1}}{2} = f_{i-\frac{1}{2}}, \\ y_0 = A. \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$f_{i-\frac{1}{2}} = f\left(x_i - \frac{h}{2}\right).$$

Girişte de bahsedildiđi gibi, genelde klasik fark Őemaları dűzgűn Őebekede, kararsızlıkları ve ε ' na gűre dűzgűn yakınsak olmamaları nedeniyle (1.1)-(1.2) probleminin cűzűműne uygulanamaz. Diđer yandan fark Őemalarının űnemli űzelliklerinden biri, diferansiyel denklemin sađladıđı űzelliklerin ayrıık benzerlerini (Maksimum Prensibi vs. gibi) sađlamasıdır. Klasik fark Őemalarının genelde belirlenen űzelliklere sahip olmadığını somut bir űrnek űzerinde netleŐtirmekte fayda vardır. Daha űnce űrnek (2.2) ile verilmiŐ

$$\begin{cases} \varepsilon u' + u = 0, & 0 < x \leq 1 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

problemi tekrar ele alınsın. Bu problem için sunulan fark Şemaları sırasıyla incelenir.

i) Açık Euler Şeması: Yukarıdaki diferansiyel problem için Açık Euler Şeması

$$\begin{cases} \ell_h y_i \equiv \varepsilon y_{x,i} + y_i = 0, & i = 0, 1, \dots, N-1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Őeklinde olup, $\rho = \frac{h}{\varepsilon}$ olmak űzere $y_i = (1 - \rho)^i$ yaklaŐık cűzűmű bulunur. Buradan yaklaŐık cűzűműn, $\rho > 1$ durumunda istenmeyen salınımlı űzellik taŐıdıđı gűrűlűr. y deđerleri sırasıyla pozitif ve negatif deđer almaktadır. Buna karŐın kesin cűzűműn $u(x_i) = e^{-i\rho}$ deđerleri azalan pozitif bir grafik cizmektedir.

Dűzgűn yakınsaklık tanımına gűre Őebekenin birinci adımında yakınsaklıđın sađlanmadıđı gűrűlebilir.

$$\begin{cases} u(x_1) = u(h) = e^{-\frac{h}{\varepsilon}} = e^{-\rho} & (\frac{h}{\varepsilon} = \rho) \\ y_1 = (1 - \rho) \end{cases}$$

$\varepsilon = h$ olarak seçilirse $\rho = 1$ için,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |y_1 - u(h)| = e^{-1}$$

sabit olur. Yani ε ' a göre düzgün yakınsama yoktur. h ne kadar küçülürse küçülsün hata sabittir, küçülmez.

Fark şemalarının, diferansiyel problemin sağladığı özelliklerin ayrık fark benzerlerini sağlaması gerektiğinden bahsedilmiştir. Maksimum Prensibini Fark düzeyinde

$$[v_i, \ell_h v_i \geq 0, i \geq 0, v_0 \geq 0 \Rightarrow v_i \geq 0 \quad (0 \leq i \leq N)]$$

şeklinde ifade edilir. $\ell_h y_i$ fark operatörü

$$\ell_h y_i = \frac{1}{\rho} y_{i+1} - \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) y_i, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

biçiminde yazılırsa,

$$y_{i+1} = \rho \ell_h y_i + (1 - \rho) y_i$$

ifadesinden görüldüğü üzere Açık Euler Şemasının Maksimum Prensibini sağlaması için

$\rho = \frac{h}{\varepsilon} < 1$ olması gerekmektedir. Fakat bu durum singüler pertürbe olmuş problemler

için rastlanan bir durum değildir. Genel olarak $h \gg \varepsilon$ dur.

ii) Kapalı Euler Şeması: Diferansiyel probleminin nümerik çözümü için,

$$\begin{cases} \varepsilon y_{x,i} + y_i = 0, & i = 1, 2, \dots, N \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

kapalı şeması alınır, ayrık maksimum prensibi koşulsuz sağlanacak, fakat ε ' na göre düzgün yakınsama olmayacaktır.

Genel hal için maksimum prensibinin sağlandığı gösterilsin.

$$\begin{cases} \ell_h y_i \equiv \varepsilon y_{x,i} + a_i y_i = f_i & i = 1, 2, \dots, N \\ y_0 = \mu \end{cases}$$

ve buradan $\ell_h y_i$ fark operatörü

$$\ell_h y_i \equiv \frac{\varepsilon}{h} (y_i - y_{i-1}) + a_i y_i$$

şeklinde yazılırsa;

$$y_i = \frac{\rho}{1 + a_i \rho} \ell_h y_i + \frac{1}{1 + a_i \rho} y_{i-1} \quad (a_i \geq \alpha > 0) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

elde edilir. Buradan prensibin sağlandığı görülür.

Maksimum Prensibi yardımıyla şemanın kararlılığına geçilebilir. Önce çözüm fonksiyonu için, kararlılığı ifade eden

$$\|y\|_\infty \leq |\mu| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty$$

eşitsizliğinin varlığı gösterilsin.

$$\Psi_i^\pm = \pm y_i + |\mu| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty$$

Barrier fonksiyonu alınır;

$$\Psi_0^\pm = \pm y_0 + |\mu| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty \geq 0$$

$$\ell_h \Psi_i^\pm = \pm f_i + a_i |\mu| + a_i \alpha^{-1} \|f\|_\infty \geq \pm f_i + \|f\|_\infty \geq 0$$

Maksimum Prensibinden;

$$\Psi_i^\pm \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, N$$

elde edilir. O halde şema kararlıdır.

Örnek için sunulan kapalı şemaya dönülürse, burada çözüm $y_i = \frac{1}{(1+\rho)^i}$

$\left(\rho = \frac{h}{\varepsilon}\right)$ şeklindedir. Şebekenin birinci adımında yakınsaklığın sağlanmadığı gösterilsin.

$i = 1$ için $u(x_1) = e^{-\rho}$ ve $y_1 = \frac{1}{1+\rho}$ olup, $h = \varepsilon$ alınırsa $\rho = 1$ için,

$$\lim_{h \rightarrow 0} |y_1 - u(x_1)| = \frac{1}{2} - e^{-1} = sbt .$$

Burada da açık şemada olduğu gibi hatanın sabit olduğu ve değişmeyeceği görülür. O halde kapalı şema için de düzgün yakınsaklık yoktur.

Benzer şekilde Crank-Nicholson Şemasının da gereken özellikleri taşımadığı kolaylıkla gösterilebilir. Böylelikle Klasik Fark Şemalarının kararlılık, ε 'a göre düzgün yakınsaklık özelliklerini sağlamadığı görülmüş olur.

3.2. Üstel Katsayılı Fark Şeması

3.2.1. Sürekli Problemin Çözümünün Değerlendirilmesi

Bu bölümde, (1.1)-(1.2) problemi için kurulan fark şemasının yakınsaklığının incelenmesinde ihtiyaç duyulan, sürekli problemin çözümünün bazı asimptotik değerlendirmeleri yapılmıştır.

Lemma 3.1. (Maksimum Prensibi):

$$v(x) \in C^1[0, l], \quad Lv(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq l), \quad v(0) \geq 0$$

şartlarını sağlayan fonksiyon ise bu durumda,

$$v(x) \geq 0, (0 \leq x \leq l)$$

olur.

İspat. Hipotezin aksi kabul edilsin. Öyle bir $x_1 \in [0, l]$ için $v(x_1) < 0$ olsun. x_0 ise $v(x_0) = 0$ ve $v(x) < 0$ ($x_0 < x < x_1$) şartlarını sağlayan bir nokta olsun. Bu takdirde Ortalama Değer Teoremi' ne göre, öyle $x_2 \in (x_0, x_1)$ bulunur ki,

$$v'(x_2) = \frac{v(x_1) - v(x_0)}{x_1 - x_0} < 0$$

olur. Son eşitsizlik ve $v(x_2) < 0$ olduğu dikkate alınırsa;

$$Lv(x_2) = \varepsilon v'(x_2) + a(x_2)v(x_2) < 0$$

elde edilir. Bu ise Lemma' nın hipotezi ile çelişir. O halde $\forall x_1 \in [0, l]$ için $v(x_1) > 0$ dır.

Lemma 3.2. Herhangi $v(x) \in C^1[0, l]$ fonksiyonu için,

$$|v(x)| \leq |v(0)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)| \quad 0 \leq x \leq l \quad (3.1)$$

eşitsizliği vardır.

İspat. Yardımcı fonksiyon olarak

$$\Psi(x) = \pm v(x) + |v(0)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \quad 0 \leq x \leq l$$

fonksiyonu alınsın.

$$\Psi(0) = \pm v(0) + |v(0)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)| \geq 0$$

ve

$$L\Psi(x) = \pm Lv(x) + a(x)|v(0)| + a(x)\alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)| \geq \pm f(x) + \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)| \geq 0$$

şartları sağlandığından, Lemma 3.1' e göre $\Psi(x) \geq 0$ ($0 \leq x \leq l$) olduğu görülür. Bu ise (3.1)' i verir.

Lemma 3.3. (1.1)-(1.2) probleminin çözümü için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$|u(x)| \leq C, \quad 0 \leq x \leq l; \quad a(x), f(x) \in C[0, l] \text{ ise,} \quad (3.2)$$

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right\}, \quad 0 \leq x \leq l; \quad a(x), f(x) \in C^1[0, l] \text{ ise,} \quad (3.3)$$

$$|u'(x)| \leq C, \quad 0 \leq x \leq l; \quad a(x), f(x) \in C^1[0, l] \text{ ve } a(0)A = f(0) \text{ ise.} \quad (3.4)$$

İspat. Önce (3.2)' nin doğruluğu gösterilsin. (1.1)-(1.2) problemine Lemma 3.2 uygulanırsa,

$$|u(x)| < |A| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |f(s)|$$

buradan da,

$$|u(x)| \leq C$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlik u ' nun düzgün sınırlı olduğunu ifade eder (c , ε ' dan bağımsızdır).

(1.1) denkleminde,

$$|u'(0)| \leq \frac{1}{\varepsilon} |f(0) - a(0)A| \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad (3.5)$$

yazılabilir. Ayrıca (1.1) denkleminin türevi alınır,

$$Lv(x) = \varphi(x) \quad (3.6)$$

bulunur. Burada $v(x) = u'(x)$, $\varphi(x) = f'(x) - a'(x)u(x)$ olur. (3.6)' dan $v(x)$ çekilirse,

$$v(x) = v(0) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(s) ds\right) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \varphi(\xi) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi}^x a(s) ds\right) d\xi. \quad (3.7)$$

(3.7)' nin sağ tarafındaki birinci terim (3.5)' e göre değerlendirilirse,

$$\left| v(0) \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(s) ds\right) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \quad (3.8)$$

olur. (3.7)' nin sağ tarafındaki ikinci terim (3.2)' ye göre değerlendirilirse,

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \varphi(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_{\xi}^x a(s) ds} d\xi \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \max_{[0,l]} |f'(x) - a'(x)u(x)| \int_0^x e^{-\frac{\alpha(x-\xi)}{\varepsilon}} d\xi$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} \max_{[0,l]} |f'(x) - a'(x)u(x)| \left\{ \alpha^{-1} \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right) \right\} \leq C \quad (3.9)$$

değerlendirmeleri bulunur. (3.7)' de (3.8) ve (3.9) eşitsizlikleri yerine yazılırsa, (3.3) eşitsizliğinin doğruluğu görülür.

(3.4)' e gelince;

$$u'(0) = \frac{f(0) - a(0)A}{\varepsilon} = 0$$

olduğundan, bu eşitsizliğin doğruluğu (3.7) ve (3.9)' dan çıkar.

3.2.2. Fark Şemasının Kurulması

(1.1)-(1.2) probleminin fark şemasının kurulması süreci için $[0, l]$ aralığında

$$\omega_h = \left\{ x_i = ih, i = 1, \dots, N-1, h = \frac{l}{N} \right\}, \quad \bar{\omega}_h = \omega_h \cup \{0, l\} \quad \text{düzgün şebekesi alınsın.}$$

Başlangıç olarak aşağıdaki özdeşlikten hareket edilecektir.

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} Lu(x) \varphi_i(x) dx = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) dx, \quad i = \overline{1, N}. \quad (3.10)$$

Burada,

$$\chi_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx = \frac{1 - e^{-a_i \rho}}{a_i \rho}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon},$$

$$\varphi_i(x) = e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(x_i - x)}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

olup, $\varphi_i(x)$ fonksiyonu

$$\begin{aligned} -\varepsilon \varphi'(x) + a_i \varphi(x) &= 0 & x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi(x_i) &= 1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

probleminin çözümü olarak belirlenmiş üstel baz fonksiyonudur.

(3.10) ifadesinin açık biçimde yazılırsa:

$$\varepsilon \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i(x) dx + a_i \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) \varphi_i(x) dx = \chi_i^{-1} h^{-1} f_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx + R_i.$$

Burada,

$$R_i = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x_i) - a(x)] u(x) \varphi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] \varphi_i(x) dx. \quad (3.12)$$

Gerekli düzenleme yapılırsa,

$$\varepsilon \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i(x) dx + a_i \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) \varphi_i(x) dx = f_i + R_i \quad (3.13)$$

(3.13) ifadesinin sol tarafına (x_{i-1}, x_i) aralığında (2.6) ve (2.7) kuadratur formülleri $p(x) = \varphi_i(x)$, $f(x) = u(x)$ ve $\sigma = 1$ alınarak uygulanır. $\varphi_i(x)$ için (3.11) bağıntısı göz önünde bulundurulur ise, formüldeki kalan terimlerin toplamı sıfır olacağından elde edilen şema kesin fark şeması olup,

$$\varepsilon \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i(x) dx + a_i \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) \varphi_i(x) dx = \varepsilon \left\{ 1 + \chi_i^{-1} h^{-1} a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i(x) dx \right\} u_{x,i}^- + a_i u_i \quad (3.14)$$

şeklinde dir. Basit işlemler sonucunda $u_{x,i}^-$ ifadesinin katsayısının,

$$\left\{ 1 + \chi_i^{-1} h^{-1} a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i(x) dx \right\} = \frac{a_i \rho}{1 - e^{-a_i \rho}} e^{-a_i \rho}$$

olduğu görülebilir. $\theta_i = \frac{a_i \rho}{1 - e^{-a_i \rho}} e^{-a_i \rho}$ diyerek, (3.13) ve (3.14) bağıntıları esas alınır;

$$\ell_h u_i := \varepsilon \theta_i u_{x_i} + a_i u_i = f_i + R_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

yazılır. Burada R_i kalan terimi göz ardı edilir ise, (1.1)-(1.2) problemi için

$$\ell_h y_i := \varepsilon \theta_i y_{x_i} + a_i y_i = f_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

$$y_0 = A \quad (3.16)$$

fark şeması sunulabilir.

3.2.3. Hata Değerlendirilmesi ve Yakınsaklık Analizi

Burada (3.15)-(3.16) fark şemasının kararlı ve ε 'a göre düzgün yakınsak olduğunu gösterilecektir. Bunun için öncelikle gerekli olan Lemma' lar verilecektir.

Lemma 3.4. (3.12) ile verilmiş R_i kalan terimi için ε ' a göre düzgün yakınsak

$$\|R\|_{\infty} \leq ch \quad (3.17)$$

eşitsizliği vardır ($c; h$ ve ε ' dan bağımsız sabittir).

İspat. $\|u\|_{\infty} \leq c$ eşitsizliği ve

$$R_i = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x_i) - a(x)] u(x) \varphi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] \varphi_i(x) dx$$

göz önüne alınsın.

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x_i) - a(x)] u(x) \varphi_i(x) dx$$

$$R_i^{(2)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] \varphi_i(x) dx$$

denirse;

$$|R_i| \leq |R_i^{(1)}| + |R_i^{(2)}|.$$

Ortalama Değer Teoremi' ne göre

$$|a(x_i) - a(x)| = |a'(\xi_i)| |x_i - x| \leq c_1 h \Rightarrow |R_i^{(1)}| \leq c_1 h, \quad a \in C^1[0, l], \quad \xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

$$|f(x) - f(x_i)| = |f'(\eta_i)| |x - x_i| \leq c_2 h \Rightarrow |R_i^{(2)}| \leq c_2 h, \quad f \in C^1[0, l], \quad \eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$$

yazılabilir. Buradan

$$\|R\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq N} |R_i| \leq ch$$

eşitsizliğinin doğruluğu görülür. c , ε ' dan bağımsız herhangi bir sabit olduğundan yakınsama ε ' a göre düzgündür.

Lemma 3.5. (3.15) – (3.16) fark şemasının çözümü için

$$\|y\|_{\infty} \leq |A| + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty} \tag{3.18}$$

eşitsizliği vardır.

İspat. (3.15) aşağıdaki formda yazılırsa

$$\ell_h y_i := \varepsilon \theta_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + a_i y_i = \left[\frac{\theta_i}{\rho} + a_i \right] y_i - \frac{\theta_i}{\rho} y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ve buradan y_i çözümü çekilirse,

$$y_i = \frac{\rho}{\theta_i + a_i \rho} \ell_h y_i + \frac{\theta_i}{\theta_i + a_i \rho} y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

elde edilir. Bu ifadeden $\ell_h y_i$ fark operatörünün Maksimum Prensibini sağladığı görülür. (3.18) eşitsizliğini göstermek için;

$$\psi_i^\pm = \pm y_i + |A| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty$$

yardımcı fonksiyonu alınsın. Bu fonksiyon için

$$\psi_0^\pm = \pm y_0 + |A| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty \geq 0,$$

$$\ell_h \psi_i^\pm = \pm f_i + \left(\frac{\theta_i}{\rho} + a_i - \frac{\theta_i}{\rho} \right) |A| + \left(\frac{\theta_i}{\rho} + a_i - \frac{\theta_i}{\rho} \right) \alpha^{-1} \|f\|_\infty \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

şartları sağlanır. O halde

$$\psi_i^\pm \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

olur. Buradan

$$0 \leq \pm y_i + |A| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty$$

$$\pm y_i \leq |A| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty$$

$$|y_i| \leq |A| + \alpha^{-1} \|f\|_\infty$$

Keyfi i ' ler için sağlandığından maksimum normuna geçilir ise (3.18) elde edilir. Lemma 3.4 ve Lemma 3.5' den çıkan esas sonuçlar şudur.

Teorem 3.1. $a(x), f(x) \in C^1[0, l]$ şartı altında (3.15)-(3.16) fark probleminin çözümü ϖ_h düzgün şebekesinde (1.1)-(1.2) probleminin çözümüne ε ' a göre düzgün yakınsaktır. Yakınsama hızı $O(h)$ biçimindedir. Hata için,

$$\|y - u\|_{\infty, \varpi_h} \leq ch \tag{3.19}$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. $z_i = y_i - u_i$ yaklaşık çözümün hatası

$$\begin{cases} \ell_h z_i = -R_i, & i = 1, 2, \dots, N \\ z_0 = 0 \end{cases}$$

fark problemini sağlar. Burada $R_i = \ell_h u_i - f_i$ biçiminde olup (3.12) ile verilmiştir. (3.18) eşitsizliği bu probleme uygulandığında,

$$\|z\|_\infty \leq \alpha^{-1} \|R\|_\infty$$

$$\Rightarrow \max_{1 \leq i \leq N} |z_i| \leq \alpha^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} |R_i|$$

ve $|R_i| = O(h)$ olduğundan,

$$\|y - u\|_\infty = \|z\|_\infty \leq ch$$

$$\Rightarrow \sup_{0 < \varepsilon < 1} \max_{x \in \mathcal{O}_h} |y(x) - u(x)| = \sup_{0 < \varepsilon < 1} \max_{0 \leq i \leq N} |y_i - u_i| \leq ch$$

Bu ise ε ' a göre düzgün yakınsaklığı ifade eder.

3.2.4 Nümerik Sonuçlar

Son olarak bir örnek üzerinde (3.19) değerlendirmesinin h ' ın derecesine göre iyileştirilemez olduğu verilecektir.

Örnek 3.1.

$$\begin{aligned} \varepsilon u' + u &= x, \quad x > 0, \\ u(0) &= 1 \end{aligned}$$

problemi ele alınsın.

Bu problemin çözümü,

$$u(x) = x - \varepsilon + (1 + \varepsilon)e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

fonksiyonudur. Uygun (3.15)-(3.16) fark problemi için, $\rho = \frac{h}{\varepsilon} = 1$ durumunda

$$y_1 = e^{-1} [1 + h(e-1)]$$

bulunur. Şebekenin birinci adımında kesin çözüm

$$u(x_1) = h - \varepsilon + (1 + \varepsilon)e^{-\frac{h}{\varepsilon}}$$

olup, $\rho = 1$ için

$$y_1 - u(x_1) = h(1 - 2e^{-1})$$

bulunur. Bu da (3.19)' un iyileştirilemez olduğunu gösterir.

4. İKİNCİ MERTEBEDEN DENKLEM İÇİN BAŞLANGIÇ - DEĞER PROBLEMİ

4.1. Diferansiyel Problem

Burada kesin çözüme ait daha sonra kullanılacak bazı asimptotik değerlendirmeler verilecektir.

Lemma 4.1. $a(t)$, $b(t)$ ve $f(t) \in C^1[0, T]$ şartları sağlansın. Bu durumda (1.3)-(1.5) probleminin çözümü için,

$$|u^{(k)}(t)| \leq C\epsilon^{-k} \left\{ \delta_* + \max_{0 \leq s \leq t} |f(s)| + \int_0^t |f'(s)| ds \right\}, 0 \leq t \leq T, \quad k = 0, 1, 2 \quad (4.1)$$

eşitsizliği vardır. Burada,

$$\delta_*^2 = |B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A|$$

olup; C , ϵ ' dan bağımsız sabittir.

İspat. (1.3) denklemini $2u'(t)$ ile çarpılırsa,

$$2\epsilon^2 u''(t)u'(t) + 2\epsilon a(t)u'^2(t) + 2b(t)u(t)u'(t) = 2f(t)u'(t)$$

ve

$$2\epsilon^2 u''(t)u'(t) = [\epsilon^2 u'^2(t)]',$$

$$2b(t)u(t)u'(t) = [b(t)u^2(t)]' - b'(t)u^2(t),$$

$$2f(t)u'(t) = [2f(t)u(t)]' - 2f'(t)u(t)$$

eşitlikleri göz önünde bulundurulursa;

$$\left[\varepsilon^2 u'^2(t) + b(t)u^2(t) - 2f(t)u(t) \right]' + 2\varepsilon a(t)u'^2(t) = b'(t)u^2(t) - 2f'(t)u(t)$$

bağıntısı elde edilir. Bu eşitlik $[0, t]$ aralığında integre edilirse,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u'^2(t) + b(t)u^2(t) - 2f(t)u(t) + 2\varepsilon \int_0^t a(\xi)u'^2(\xi)d\xi \\ \leq B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + \int_0^t |b'(\xi)||u(\xi)|^2 d\xi + 2 \int_0^t |f'(\xi)||u(\xi)|d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da μ -eşitsizliğinin uygulanması sonucu,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u'^2(t) + \beta u^2(t) - \mu u^2(t) - \frac{1}{\mu} f^2(t) + 2\varepsilon \alpha \int_0^t u'^2(\xi)d\xi \\ \leq B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + \int_0^t |b'(\xi)||u(\xi)|^2 d\xi + 2 \int_0^t |f'(\xi)||u(\xi)|d\xi \end{aligned}$$

($\mu > 0$) bulunur. μ parametresi $\mu < \beta$ olacak şekilde seçilirse, son bağıntıdan

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 u'^2(t) + (\beta - \mu)u^2(t) + 2\varepsilon \alpha \int_0^t u'^2(\xi) \leq B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + \frac{1}{\mu} f^2(t) \\ + \int_0^t |b'(\xi)||u(\xi)|^2 d\xi + 2 \int_0^t |f'(\xi)||u(\xi)|d\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bağıntı düzenlenirse,

$$\varepsilon^2 u'^2(t) + u^2(t) + \varepsilon \int_0^t u'^2(\xi)d\xi \leq C_0 \left\{ \varphi(t) + \int_0^t u^2(\xi)d\xi \right\} \quad (4.2)$$

diferansiyel eşitsizliği bulunur. Burada,

$$\varphi(t) = B^2 + b(0)A^2 - 2f(0)A + f^2(t) + \int_0^t |f'(\xi)||u(\xi)|d\xi.$$

$$\delta(t) = \varepsilon^2 u'^2(t) + u^2(t) + \varepsilon \int_0^t u'^2(\xi) d\xi$$

kabul edilirse, (4.2) 'den,

$$\delta(t) \leq C_0 \left\{ \varphi(t) + \int_0^t \delta(\xi) d\xi \right\}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da Gronwall eşitsizliğinin uygulanması sonucu

$$\begin{aligned} \delta(t) &\leq C_0 \varphi(t) + C_0^2 \int_0^t \varphi(\tau) e^{c_0(t-\tau)} d\tau \leq C_0 \max_{[0,t]} |\varphi(\tau)| e^{c_0 t} \\ &\leq C_1 \left\{ \delta_*^2 + \max_{[0,t]} \delta^{\frac{1}{2}}(\tau) \int_0^t |f'(\tau)| d\tau + \max_{[0,t]} f^2(\tau) \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

bulunur. (4.3) ' den, (4.1) eşitsizliğinin $k = 0,1$ için doğruluğu açıktır. Ayrıca (4.1) ' in $k = 2$ hali de (1.3) 'den

$$u''(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} \{ f(t) - \varepsilon a(t) u'(t) - b(t) u(t) \}$$

olmasından direkt olarak çıkar.

Not 4.1. Lemma 4.1' in şartları altında

$$\|u^k(t)\|_{C[0,T]} \leq C \varepsilon^{-k}, k = 0,1,2$$

eşitsizliği mevcuttur.

Lemma 4.2 Eğer $a(t) \in C^1[0, T]$ ve $b(t), f(t) \in C^3[0, T]$ ise, (1.3)-(1.5) probleminin çözümleri için aşağıdaki değerlendirme doğrudur:

$$\left| u^{(k)}(t) \right| \leq C(1 + \varepsilon^{1-k} + \varepsilon^{-k} e^{-\frac{c_0 t}{\varepsilon}}), \quad k = 0, 1, 2 \quad (4.4)$$

Burada, c_0, ε 'na bağlı olmayan bir sabittir.

İspat. (1.3)- (1.5) probleminin çözümleri,

$$u(t) = u_0(t) + v(t) + R_\varepsilon(t) \quad (4.5)$$

şeklinde aransın. Burada $u_0(t) = f(t)/b(t)$ indirgenmiş problemin çözümleri ve $v(t), R_\varepsilon(t)$ ise aşağıdaki problemlerin çözümleridir:

$$\begin{aligned} Lv &= 0 \\ v(0) &= A - u_0(0) \quad , \\ v'(0) &= B/\varepsilon - u_0'(0) \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} LR_\varepsilon &= \Psi_\varepsilon(t) \equiv -\varepsilon^2 u_0'' - \varepsilon a(t) u_0' \\ R_\varepsilon(0) &= 0 \\ R_\varepsilon'(0) &= 0. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Şimdi, (4.6) probleminin çözümleri,

$$\left| v^k(t) \right| \leq C \varepsilon^{-k} e^{-\frac{c_0 t}{\varepsilon}}, \quad k = 0, 1, 2 \quad (4.8)$$

eşitsizliğini sağladığı ispatlanacaktır. Bunun için,

$$Lv(v' + \lambda \varepsilon^{-1} v) = 0 \quad (4.9)$$

özdeşliğinden yararlanılabilir. Burada, λ pozitif ve şimdilik keyfi bir sabittir. (4.9) ifadesi açık biçimde yazılırsa,

$$\varepsilon^2 v'' v' + \varepsilon a v'^2 + b(t) v v' + \varepsilon \lambda v'' v + \lambda a(t) v' v + \lambda \varepsilon^{-1} b(t) v^2 = 0$$

ve

$$\varepsilon^2 v'' v' = \left[\frac{1}{2} \varepsilon^2 v'^2 \right]',$$

$$b(t) v v' = \left[\frac{1}{2} b(t) v^2 \right]' - \frac{1}{2} b'(t) v^2,$$

$$\varepsilon \lambda v'' v = [\varepsilon \lambda v' v]' - \varepsilon \lambda v'^2,$$

$$\lambda a(t) v' v = \left[\frac{1}{2} \lambda a(t) v^2 \right]' - \frac{1}{2} a'(t) \lambda v^2$$

eşitlikleri dikkate alınırrsa,

$$\left\{ \varepsilon^2 v'^2 + b v^2 + 2 \lambda \varepsilon v' v + \lambda a v^2 \right\}' = -(2 a \varepsilon - 2 \lambda \varepsilon) v'^2 - (2 \varepsilon^{-1} \lambda b - b' - \lambda a') v^2 \quad (4.10)$$

bağıntısı elde edilir. Ayrıca

$$\delta(t) = \varepsilon^2 v'^2 + b v^2 + 2 \lambda \varepsilon v' v + \lambda a v^2$$

fonksiyonu için,

$$\delta(t) \leq \varepsilon^2 v'^2 + b v^2 + \varepsilon^2 \lambda v'^2 + \lambda v^2 + \lambda a v^2 \leq \varepsilon^2 (1 + \lambda) v'^2 + (b^* + \lambda + \lambda a^*) v^2 \quad (4.11)$$

değerlendirmesi yazılabilir. Burada $a^* = \max_{[0,T]} |a(t)|$, $b^* = \max_{[0,T]} |b(t)|$. Eğer $\delta(t)$ alttan değerlendirilirse,

$$\delta(t) \geq \varepsilon^2 v'^2 + (b + \lambda a)v^2 - \varepsilon^2 \lambda a^{-1} v'^2 - \lambda a v^2 = \varepsilon^2 (1 - \lambda a^{-1}) v'^2 + b v^2$$

elde edilir. Buradan da $\lambda_0 = \lambda < \alpha$ seçilmesiyle,

$$\delta(t) \geq c_1 (\varepsilon^2 v'^2 + v^2), \quad c_1 > 0 \quad (4.12)$$

olduğu görülür. Burada

$$c_1 < \min \{b(t), 1 - \lambda_0 a^{-1}(t)\}.$$

(4.12), $\delta(t) > 0$ olduğunu gösterir.

Diğer yandan, (4.10)' un sağ tarafı şöyle değerlendirilebilir:

$$2\varepsilon(a - \lambda)v'^2 + \varepsilon^{-1}(2\lambda b - \varepsilon b' - \varepsilon \lambda a')v^2 \geq 2\varepsilon(\alpha - \lambda)v'^2 + \varepsilon^{-1}(2\lambda\beta - \varepsilon \bar{b}^* - \varepsilon \lambda \bar{a}^*)v^2$$

Burada, $\bar{a}^* = \max_{[0,T]} a'(t)$, $\bar{b}^* = \max_{[0,T]} b'(t)$. Buradan, $\lambda < \alpha$, $2\lambda\beta - \varepsilon \bar{b}^* - \varepsilon \lambda \bar{a}^* > 0$

seçimleri dahilinde ve (4.11)' in dikkate alınması sonucu,

$$2\varepsilon(a - \lambda)v'^2 + \varepsilon^{-1}(2\lambda b - \varepsilon \bar{b}^* - \varepsilon \lambda \bar{a}^*)v^2 \geq c_2 \varepsilon^{-1} \delta \quad (4.13)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada c_2 , ε ' a bağlı olmayan ve

$$0 < c_2 \leq \min \left\{ \frac{2(\alpha - \lambda)}{1 + \lambda}, \frac{2\lambda\beta - \varepsilon \bar{b}^* - \varepsilon \lambda \bar{a}^*}{b^* + \lambda + \lambda a^*} \right\}$$

eşitsizliğini sağlayan sabittir.

(4.10)' dan, (4.13)' ü dikkate almak suretiyle

$$\delta'(t) \leq -c_2 \varepsilon^{-1} \delta(t)$$

diferansiyel eşitsizliği elde edilir ki, buradan da

$$\delta(t) \leq \delta(0) \exp(-c_2 t / \varepsilon)$$

olduğu görülür. Bu eşitsizlikten ve (4.12)' den (4.8)' in $k=0,1$ için doğruluğu hemen çıkar ($c_0 = c_2 / 2$ olmasından). $k=2$ halinin doğruluğu direkt olarak (4.6)₁' den çıkar.

(4.7) problemi (1.3) tipinden bir problem olduğundan, probleme Lemma 4.1 uygulanırsa,

$$|\Psi_\varepsilon(t)| \leq C\varepsilon$$

olduğundan,

$$|R_\varepsilon^{(k)}(t)| \leq C\varepsilon^{1-k}, \quad k=0,1,2 \quad (4.14)$$

eşitsizliği hemen görülür. (4.4)' ün doğruluğu ise (4.5)' den ve (4.8) ve (4.14) eşitsizlikleri yardımıyla görülür.

Not 4.2. Lemma 4.2' nin sonucu olarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\|u^{(k)}(t)\|_{L_t[0,T]} \leq C(1 + \varepsilon^{1-k}), \quad k=0,1,2.$$

4.2. Fark Şemasının Kurulması

Bundan sonraki kısımlarda $a^2(t) - 4b(t) > 0$ ($0 \leq t \leq T$) olduğu kabul edilecektir. $[0, T]$ aralığında $\omega_\tau = \{t_j = j\tau, j = \overline{1, M-1}, M\tau = T\}$, $\varpi_\tau = \omega_\tau \cup \{0, T\}$ düzgün şebekesi oluşturulsun. Aşağıdaki özdeşlik ele alınsın.

$$\chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} Lu(t) \varphi_j(t) dt = \chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} f(t) \varphi_j(t) dt, \quad j = \overline{1, M-1}. \quad (4.15)$$

Buradaki $\{\varphi_j(t)\}_{j=1}^{M-1}$ aşağıdaki gibi belirlenmiş baz fonksiyonlarıdır:

$$\varphi_j(t) = \begin{cases} \varphi_j^{(1)}(t) \equiv \frac{e^{\lambda_{1,j}(t-t_{j-1})} - e^{\lambda_{2,j}(t-t_{j-1})}}{e^{\lambda_{1,j}\tau} - e^{\lambda_{2,j}\tau}} & , t_{j-1} < t < t_j \\ \varphi_j^{(2)}(t) \equiv \frac{e^{-\lambda_{2,j}(t_{j+1}-t)} - e^{-\lambda_{1,j}(t_{j+1}-t)}}{e^{-\lambda_{2,j}\tau} - e^{-\lambda_{1,j}\tau}} & , t_j < t < t_{j+1} \\ 0 & , t \notin (t_{j-1}, t_{j+1}). \end{cases}$$

Burada,

$$\lambda_{1,j} = 0.5\varepsilon^{-1} \left(a_j + \sqrt{a_j^2 - 4b_j} \right), \quad \lambda_{2,j} = 0.5\varepsilon^{-1} \left(a_j - \sqrt{a_j^2 - 4b_j} \right),$$

$$\chi_j = \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} \varphi_j(t) dt = \frac{2\tau^{-1} (\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j})}{\lambda_{1,j} \lambda_{2,j} \sinh((\lambda_{1,j} - \lambda_{2,j})\tau/2)} \sinh\left(\frac{\lambda_{1,j}\tau}{2}\right) \sinh\left(\frac{\lambda_{2,j}\tau}{2}\right)$$

şeklindedir. Ayrıca $\varphi_j^{(1)}(t)$ ve $\varphi_j^{(2)}(t)$ fonksiyonları sırasıyla,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \varphi''(t) - \varepsilon a_j \varphi'(t) + b_j \varphi(t) &= 0 & , t_{j-1} < t < t_j \\ \varphi(t_{j-1}) &= 0, \quad \varphi(t_j) = 1 \end{aligned} \quad (4.16)$$

ve

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \varphi''(t) - \varepsilon a_j \varphi'(t) + b_j \varphi(t) &= 0, \quad t_j < t < t_{j+1} \\ \varphi(t_j) &= 1, \quad \varphi(t_{j+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

problemlerinin çözümleridir.

(4.15) bağıntısı düzenlenirse elde edilecek bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$\chi_j^{-1} \left\{ -\varepsilon^2 \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} u'(t) \varphi_j'(t) dt + \varepsilon a_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} u'(t) \varphi_j(t) dt + b_j \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} u(t) \varphi_j(t) dt \right\} = f_j - R_j. \quad (4.18)$$

Burada R_j kalan terimi;

$$\begin{aligned} R_j &= \chi_j^{-1} \varepsilon \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [a(t) - a(t_j)] u'(t) \varphi_j(t) dt + \chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [b(t) - b(t_j)] u(t) \varphi_j(t) dt \\ &\quad + \chi_j^{-1} \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}} [f(t_j) - f(t)] \varphi_j(t) dt \end{aligned} \quad (4.19)$$

şeklindedir.

(4.18) bağıntısının sol tarafına her bir (t_{j-1}, t_j) ve (t_j, t_{j+1}) aralıkları üzerinde (2.6) ve (2.7) interpolasyon kuadratur formüllerinin uygulanması sonucunda,

$$\begin{aligned} &\chi_j^{-1} \left[\varepsilon^2 u_{\bar{t},j} + \varepsilon a_j (\chi_{1,j} u_{t,j} + \chi_{2,j} u_{t,j}) + b_j \chi_j u_j + b_j \mu_{1,j} u_{t,j} + b_j \mu_{2,j} u_{t,j} \right] \\ &= \varepsilon^2 \chi_j^{-1} \left[1 + \frac{\tau}{2} \varepsilon^{-1} a_j (\chi_{2,j} - \chi_{1,j}) + \frac{\tau}{2} \varepsilon^{-2} b_j (\mu_{2,j} - \mu_{1,j}) \right] u_{\bar{t},j} \\ &\quad + \varepsilon \chi_j^{-1} a_j (\chi_j + \varepsilon^{-1} a_j^{-1} b_j \mu_j) u_{t,j} + b_j u_j \end{aligned} \quad (4.20)$$

bulunur. Burada,

$$\chi_{1,j} = \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \varphi_j^{(1)}(t) dt \quad , \quad \chi_{2,j} = \tau^{-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi_j^{(2)}(t) dt \quad ,$$

$$\chi_{1,j} + \chi_{2,j} = \chi_j$$

$$\mu_{1,j} = \tau^{-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} (t-t_j) \varphi_j^{(1)}(t) dt \quad , \quad \mu_{2,j} = \tau^{-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t-t_j) \varphi_j^{(2)}(t) dt \quad ,$$

$$\mu_{1,j} + \mu_{2,j} = \mu_j$$

şeklindedir. (4.20) bağıntısında,

$$\begin{aligned} \theta_{1,j} &= \chi_j^{-1} \left\{ 1 + \frac{\tau}{2} \varepsilon^{-1} a_j (\chi_{2,j} - \chi_{1,j}) + \frac{\tau}{2} \varepsilon^{-2} b_j (\mu_{2,j} - \mu_{1,j}) \right\} \\ &= \frac{b_j \tau^2}{4 \varepsilon^2} \left[1 + \coth(\lambda_{1,j} \tau / 2) \coth(\lambda_{2,j} \tau / 2) \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\theta_{2,j} = \chi_j^{-1} \{ \chi_j + \varepsilon^{-1} a_j^{-1} b_j \mu_j \} = \frac{b_j \tau}{2 a_j \varepsilon} \left[\coth(\lambda_{1,j} \tau / 2) + \coth(\lambda_{2,j} \tau / 2) \right] \quad (4.22)$$

denirse, (1.3) denkleminin karşılık aşağıdaki fark bağıntısı alınabilir:

$$\ell u_j \equiv \varepsilon^2 \theta_{1,j} u_{t,j} + \varepsilon a_j \theta_{2,j} u_{t,j} + b_j u_j = f_j - R_j \quad , \quad j = \overline{1, M-1} \quad (4.23)$$

(R_j, θ_1, θ_2 sırasıyla (4.19), (4.21), (4.22) formülleriyle verilmiştir).

Şimdi ise (1.5) başlangıç şartı için fark yaklaşımı belirlenecektir. Aşağıdaki özdeşlik ele alınsın.

$$\int_{t_0}^{t_1} L u \varphi_0(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t) \varphi_0(t) dt.$$

Burada $\varphi_0(t)$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \varphi''(t) - \varepsilon a_0 \varphi'(t) + b_0 \varphi(t) &= 0, \quad t_0 < t < t_1 \\ \varphi(t_0) &= 1, \quad \varphi(t_1) = 0 \end{aligned}$$

probleminin çözümü olup,

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda_{2,0}(t_1-t)} - e^{-\lambda_{4,0}(t_1-t)}}{e^{-\lambda_{2,0}\tau} - e^{-\lambda_{4,0}\tau}}, & t \in (t_0, t_1) \\ 0 & t \notin (t_0, t_1) \end{cases}$$

şeklindedir.. (4.23)' ün ispatına benzer işlemler sonucu,

$$\varepsilon^2 \theta_0 u_{t,0} - \varepsilon B + I_0 (b_0 A - f_0) + r = 0 \quad (4.24)$$

özdeşliği bulunur. Burada,

$$I_0 = \int_0^{t_1} \varphi_0(t) dt = \varepsilon^2 b_0^{-1} \left[\lambda_{1,0} (1 - e^{-\lambda_{2,0}\tau}) - \lambda_{2,0} (1 - e^{-\lambda_{4,0}\tau}) \right] / (e^{-\lambda_{2,0}\tau} - e^{-\lambda_{4,0}\tau}),$$

$$\theta_0 = 1 + \varepsilon^{-1} a_0 \int_0^{t_1} \varphi_0(t) dt + \varepsilon^{-2} b_0 \int_0^{t_1} t \varphi_0(t) dt = \frac{\tau (\lambda_{1,0} - \lambda_{2,0})}{2 \sinh((\lambda_{1,0} - \lambda_{2,0})\tau / 2)} e^{(\lambda_{1,0} + \lambda_{2,0})\tau / 2} \quad (4.25)$$

$$r = \varepsilon \int_0^{t_1} [a(t) - a(0)] u'(t) \varphi_0(t) dt + \int_0^{t_1} [b(t) - b(0)] u(t) \varphi_0(t) dt + \int_0^{t_1} [f(0) - f(t)] \varphi_0(t) dt \quad (4.26)$$

olur. Böylece, (4.23) ve (4.24) bağıntılarını esas alarak, (1.3)-(1.5) probleminin nümerik çözümü için aşağıdaki fark problemi verilebilir.

$$\ell y \equiv \varepsilon^2 \theta_1 y_{tt} + \varepsilon a \theta_2 y_t + by = f, \quad t \in \omega_\tau \quad (4.27)$$

$$y(0) = A \quad (4.28)$$

$$\varepsilon^2 \theta_0 y_{t,0} - \varepsilon B + I_0 (b_0 A - f_0) = 0 \quad (4.29)$$

burada $\theta_1, \theta_2, \theta_0$ katsayıları sırasıyla (4.21), (4.22), (4.25) formülleriyle belirlenmiştir.

4.3. Hata Değerlendirmesi ve Yakınsama

$z = y - u$ olsun. Bu durumda (4.27)-(4.29) fark şemasının hatası aşağıdaki fark problemini sağlar.

$$\ell z = R, \quad t \in \omega_\tau, \quad (4.30)$$

$$z(0) = 0, \quad (4.31)$$

$$\varepsilon^2 \theta_0 z_{t,0} = r, \quad (4.32)$$

burada R ve r yaklaşım hataları, (4.19) ve (4.26) formülleriyle verilmiştir.

Lemma 4.3. (4.30)-(4.32) fark probleminin çözümü için aşağıdaki eşitsizlik vardır.

$$\Delta_0 |z_{t,j}| + |z_{j+1} + z_j| \leq C \left\{ \Delta_0 |z_{t,0}| + \max_{1 \leq i \leq M-1} |R_i| + \tau \sum_{i=1}^{M-2} |R_{t,j}| \right\}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1, \quad (4.33)$$

burada, $\Delta_0 = \max(\varepsilon, \tau)$ dır.

İspat. (4.30) denklemini $z_{\bar{z}}$ ile çarpıp, alınan eşitlikte

$$\theta_1 z_{\bar{z}} z_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \theta_1 (z_t^2)_i = \frac{1}{2} (\theta_1 z_t^2)_i - \frac{1}{2} \theta_{\bar{z}} z_{\bar{z}}^2,$$

$$b z z_{\bar{z}} = \frac{1}{8} b \left[(\bar{z} + z)^2 \right]_i - \frac{\tau^2}{8} b (z_t^2)_i$$

$$= \frac{1}{8} \left[b (\bar{z} + z)^2 \right]_i - \frac{\tau^2}{8} (b z_t^2)_i - \frac{1}{8} b_t (z + \bar{z})^2 + \frac{\tau^2}{8} b_t z_t^2$$

bağıntıları dikkate alınırsa aşağıdaki özdeşlik elde edilir:

$$\frac{1}{2} \varepsilon^2 (p z_t^2)_i + \varepsilon \theta_2 a z_{\bar{z}}^2 + \frac{1}{8} \left[b (\bar{z} + z)^2 \right]_i = \frac{1}{2} \varepsilon^2 q z_t^2 + \frac{1}{8} b_t (z + \bar{z})^2 + R z_{\bar{z}} \quad (4.34)$$

burada,

$$p = \theta_1 - \frac{\tau^2}{4\varepsilon^2} b, \quad q = \theta_{1t} - \frac{\tau^2}{4\varepsilon^2} b_t, \quad \hat{z} = z(t_{j+1}), \quad \check{z} = z(t_{j-1}).$$

(4.34) bağıntısı 2τ ile çarpılıp, $j=1$ 'den $j=s$ 'ye kadar toplam alınırsa ve

$$2\tau \sum_{j=1}^s R_j z_{t,j} = R_s (z_{s+1} + z_s) - R_1 (z_1 + z_0) - \tau \sum_{j=1}^{s-1} R_{t,j} (z_{j+1} + z_j)$$

formülü kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 p_s z_{t,s}^2 + 2\varepsilon\tau \sum_{j=1}^s \theta_{2j} a_j z_{t,j}^2 + \frac{1}{4} b_s (z_{s+1} + z_s)^2 &= \varepsilon^2 p_0 z_{t,0}^2 + \frac{1}{4} b_0 (z_1 + z_0)^2 \\ &+ \tau \sum_{j=1}^s \left\{ \varepsilon^2 q_j z_{t,j}^2 + \frac{1}{4} b_{t,j} (z_j + z_{j-1})^2 \right\} + R_s (z_{s+1} + z_s) - R_1 (z_1 + z_0) \\ &- \tau \sum_{j=1}^{s-1} R_{t,j} (z_{j+1} + z_j), \quad s \leq M-1 \end{aligned} \quad (4.35)$$

elde edilir. Böylece,

$$0 < c_0 \leq p \leq c_1, \quad |q| \leq C_0, \quad \tau \leq \varepsilon \text{ ise,} \quad (4.36)$$

$$c_0 \tau^2 \leq \varepsilon^2 p \leq c_1 \tau^2, \quad \varepsilon^2 |q| \leq C_0 \tau^2, \quad \tau > \varepsilon \text{ ise,} \quad (4.37)$$

eşitsizlikleri kolayca görülebilir. Şimdi, (4.35) eşitsizliğinden, (4.36) ve (4.37)' yi dikkate almak suretiyle aşağıdaki eşitsizliğe ulaşılabilir.

$$\delta_s \leq \delta_* + \tau \sum_{j=1}^s \{d_j \delta_{j-1} + \rho_j\}, \quad s \leq M-1. \quad (4.38)$$

Burada,

$$\delta_j = \varepsilon^2 p_j z_{t,j}^2 + \frac{1}{4} b_j (z_{j+1} + z_j)^2,$$

$$\delta_* = C_0 \delta_0 + C \max_{1 \leq j \leq M-1} |R_j|^2, \quad C_0 > 1$$

$$|\rho_j| \leq C |R_{t,j}| |z_{j+1} + z_j|, \quad j = 1, 2, \dots, s-1 \text{ için}$$

ve

$$\rho_s = 0, \quad 0 \leq d_j \leq c, \quad j = 1, 2, \dots, s \text{ için}$$

olur. (4.38)' den Gronwall eşitsizliğinin fark benzerinin uygulanması sonucu,

$$\delta_s \leq \delta_* \exp \left[\tau \sum_{i=1}^s d_i \right] + \tau \sum_{i=1}^s |\rho_i| \exp \left[\tau \sum_{j=i+1}^s d_j \right] \leq C \left(\Delta_0^2 z_{t,0}^2 + |z_1|^2 + \max_{1 \leq j \leq M-1} |R_j|^2 + \tau \sum_{i=1}^{s-1} |R_{t,i}| |z_{i+1} + z_i| \right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu da (4.33) sonucunu verir.

Lemma 4.4. R ve r yaklaşım hataları için,

$$\Delta_0 |z_{t,0}| \leq C\tau,$$

$$\|R\|_{C(\omega_t)} \leq C\tau,$$

$$\tau \sum_{i=1}^{M-2} |R_{t,i}| \leq C\tau$$

eşitsizlikleri mevcuttur.

Bu Lemma' nın ispatı R ve r' nin (4.19) ve (4.26) ifadelerinde (4.4)' ün kullanılmasıyla kolayca görülebilir.

Son olarak bu bölümün esas sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.1. Eğer u (1.3)-(1.5) probleminin, y ise (4.27)-(4.29) probleminin çözümü ise,

$$\max_{1 \leq j \leq M} |y_j - u_j| \leq C\tau \quad (4.39)$$

hata değerlendirme doğrudur.

İspat.

$$z_{j+1} = (z_{j+1} + z_j) / 2 + (\tau z_{t,j}) / 2$$

özdeşliğinden

$$|z_{j+1}| \leq |z_{j+1} + z_j| / 2 + \Delta_0 |z_{t,j}| / 2$$

eşitsizliği elde edilir. Burada Lemma 4.3 ve Lemma 4.4 sonuçları kullanılırsa (4.39)' un doğruluğu hemen çıkar.

4.4. Nümerik Sonuçlar

Önerilen fark şemasının iyi çalışır olduğunu aşağıdaki örnek üzerinde gösterilsin.

Örnek 4.1

$$\varepsilon^2 u'' + 2\varepsilon(t+2)u' + (t^2 + 4t + 3 + \varepsilon)u = (1-\varepsilon)(t^4 + 4t^3 + (3+5\varepsilon)t^2 + \varepsilon 8t + 2\varepsilon^2),$$

$$0 < t \leq 1$$

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 1/\varepsilon,$$

problemi verilsin. Problemin kesin çözümü

$$u(t) = e^{-t(t+2)/2\varepsilon} \{2 - e^{-2t/\varepsilon}\} + t^2(1-\varepsilon)$$

fonksiyonudur. Probleme (4.27) - (4.29) fark şeması uygulanması sonucu $\max_{\omega_\tau} |y - u|$

için elde edilen bazı sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Çizelge 4.1. Farklı ε ve τ değerleri için hata değerlendirmeleri (Amiraliyev ve Duru, 1999)

$\varepsilon \backslash \tau$	0.1	0.05	0.02
5×10^{-1}	$4.972300 E-3$	$9.050000 E-4$	$5.710000 E-5$
10^{-1}	$3.310000 E-2$	$5.451800 E-3$	$4.047000 E-4$
10^{-2}	$9.942600 E-2$	$2.622960 E-2$	$3.075400 E-3$
10^{-3}	$1.069579 E-1$	$1.313200 E-2$	$6.242800 E-3$
10^{-4}	$1.784120 E-1$	$1.478800 E-2$	$9.987700 E-4$

Çizelgede, τ ' nun küçük değerleri için kesin çözüm ile yaklaşık çözümün birbirine yaklaştığı, ε ' nun küçük değerleri için ise $|y-u|$ farkının büyüdüğü görülmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada fen bilimleri, mühendislik ve tıp bilimleri gibi çeşitli bilim dallarında geçen birinci ve ikinci mertebeden singüler pertürbe olmuş lineer başlangıç değer problemlerinin sonlu farklar metodu ile nümerik çözümleri incelenmiştir. Singüler pertürbeli diferansiyel denklemler, matematiksel olarak en yüksek mertebeli türevlerinin katsayılarının küçük pozitif bir parametre olduğu problemler olarak bilinir. Bu tip problemlerin özelliği, parametrenin küçük değerleri için tanım bölgesinin bazı yerlerinde çok hızlı, diğer kısımlarında ise düzenli ve yavaş değişime sahip olmasıdır. Bu nedenle bu problemlerin çözümü için, diferansiyel denklemin özelliklerini daha iyi biçimde aksettirebilecek nümerik metodun kurulması esas amaçtır.

Bu çalışmada öncelikle pozitif küçük bir parametreye bağlı singüler pertürbe özellikli birinci mertebeden lineer diferansiyel denklem ele alınarak, problemin çözümü için, sıkça kullanılan klasik fark şemalarının istenilen sonuçları vermediği somut örnek üzerinde gösterildi. Daha sonra diferansiyel problemin asimptotik ve yaklaşık çözümleri incelendi ve üstel katsayılı fark şeması kurularak, matematiksel özellikleri; problemin kararlılığı, yaklaşım hatası ve çözüm algoritması araştırıldı. Elde edilen, yaklaşık çözümün kesin çözüme yakınsama hızının iyileştirilemez olduğu bir örnek üzerinde gösterildi. Ele alınan ikinci mertebe denklem için ise önce asimptotik değerlendirmeler yapıldı. Benzer metotlarla üstel katsayılı fark şeması kuruldu. Kurulan şema için hata değerlendirilmesi ve yakınsama özellikleri ele alındı. Somut bir örnek üzerinde ε ve τ 'nin farklı değerleri için elde edilen sonuçlar tablo halinde verildi ve önerilen şemanın iyi çalışır olduğu gösterildi.

6. KAYNAKLAR

- Amiraliyev, G.M., Mamedov, Y.D. 1995. Difference schemes on the uniform mesh for singular perturbed pseudo-parabolic equations. *Tr. J. of Mathematics*, 19(3): 207-222.
- Amiraliyev, G.M. 1998. Difference methods for a singularly perturbed initial value problem. *Tr. J. of Mathematics*, 22(3): 283-294.
- Amiraliyev, G.M., Duru, H. 1999. A uniformly convergent finite difference method for a singularly perturbed initial value problem. *Appl. Math. and Mech.*, 20(4): 379-387.
- Amiraliyev, G.M., Duru, H. 2002. *Nümerik Analiz*. ISBN 975-6802-91-X. Pegema Yayıncılık, Ankara, 371 s.
- Amiraliyev, G.M., Erdoğan, F. 2009. Difference schemes for a class of singularly perturbed initial value problems for delay differential equations. *Numer. Algorithms*, 52(4): 663-675.
- Boglaev, I.P. 2001. Domain decomposition for a singularly perturbed parabolic with a convection-dominated term. *J. Comput. Appl. Math.*, 134: 283-299.
- Constanta, C. 2002. *Solution Techniques for Elementary Partial Differential Equations*, ISBN 1-58488-257-3, A CRC Press Company, Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. 251 p.
- Doolan, E.R., Miller, J.J.H., Schilders, W.H.A. 1980. *Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers*. Boole, Dublin, 198 pp.
- Farrell, P.A., Miller, J.J.H., O’Riordan, E., Shiskin, G.I., 1996. A uniformly convergent finite difference scheme for a singularly perturbed semilinear equation. *SIAM J. Num. Anal.* 33(3), 1135-1149.
- Farrell, P.A., Miller, J.J.H., O’Riordan, E., Shiskin, G.I., 1998. On the nonexistence of ε -uniform finite difference methods on uniform meshes for semilinear two-point boundary value problems. *Math Comp.* 67(222), 603-617.
- Farrell, P.A., Hegarty, A.F., Miller, J.J.H., O’Riordan, E., Shiskin, G.I., 2000. *Robust Computational Techniques for Boundary Layers*. Chapman- Hall/ CRC, New York, 254 pp.
- Hsiao, G.C., Jordan, K.E. 1983. A Numerical Treatment for Parabolic Equations with Small Parameter. *SIAM J. Math. Anal.*, 14(3), 507-521.

- Kevorkian, J., Cole, J.D. 1981. Perturbation Methods in Applied Mathematics. ISBN 0-3-540-90507-3, Springer-Verlag, Newyork, Berlin, Heidelberg, 558 p.
- Nayfeh, A.H. 1993. Introduction to Perturbation Techniques. John-Wiley&Sons.Inc., Newyork, 43, 519 pp.
- O' Malley, R.E.Jr. 1990. Singular Perturbation Methods for Ordinary Differential Equations. Springer - Verlag, New York, 225 p.
- Roos, H.G., Stynes, M., Tobiska, L. 1996. Numerical Methods for Singularly Perturbed Perturbed Differential Equations: Convection- Diffusion and Flow Problems. Springer, Berlin, 348 pp.
- Samarskii, A.A. 2001. The Theory of Difference Schemes. ISBN 0-8247-0468-1. Marcel Dekker. New York, 761 p.

ÖZGEÇMİŞ

Burçak YILMAZ 1983 yılında Samsun’ da doğdu. İlk öğrenimini Samsun’da, orta ve lise öğrenimini Almanya’nın Stuttgart şehrinde Ernst-Sigle Gymnasium’ da devam etti. Lise öğrenimini İstanbul Cağaloğlu Anadolu Lisesi’nde tamamladı. 2004 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2008 yılında mezun oldu. 2008 yılında Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Aynı yıl Sinop Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı ve halen görevine devam etmektedir.