

**İSTATİSTİKSEL MODEL SEÇİMİNDE  
BAYESCİ YAKLAŞIMLAR  
VE BAYES FAKTÖRÜ**

**MUTLU ALTUNTAŞ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**T.C.  
SİNOP ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İSTATİSTİKSEL MODEL SEÇİMİNDE  
BAYESCİ YAKLAŞIMLAR VE BAYES FAKTÖRÜ**

**MUTLU ALTUNTAŞ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN  
Yrd. Doç. Dr. Emel ÇANKAYA**

**SİNOP – 2011**

T.C.  
SİNOP ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 19 / 08 /2011 tarihinde yapılan sınav ile İstatistik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Şennan YÜCEL

Üye : Yrd. Doç. Dr. Emel ÇANKAYA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nazan DANACIOĞLU

**ONAY :**

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

8 / 9 / 2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü  
Doç. Dr. Hünkar Avni DUYAR

# İSTATİSTİKSEL MODEL SEÇİMİNDE BAYESÇİ YAKLAŞIMLAR VE BAYES FAKTÖRÜ

## ÖZET

Gerçek hayatı betimlemek amacıyla yapılan istatistiksel modelleme çalışmalarında, artan ileri teknoloji ve metotlardaki gelişmeler sayesinde, verideki bilgiyi yeterli miktarda açıklayabilen alternatif modeller oluşturabilmek mümkün olmuştur. Dolayısıyla mevcut birbirine rakip modellerin karşılaştırılması, bir başka deyişle “en iyi” model seçimi için yeni metotlar geliştirmek, istatistiksel veri analizinde çok aktif bir konudur.

Model seçimi pek çok istatistiksel problemde karşımıza çıkmaktadır: iç içe geçmemiş regresyon modelleri kıyaslaması, parametrik aile seçimi, çoklu değişim noktası problemi, bilinmeyen sayıda bileşenli karma model bunlara örneklerdir. Bu problemleri çözmek için, Bayesci prensiplere dayalı önerilen yöntemler arasında sonsal model olasılığı ve bununla ilişkili Bayes faktörü en önemli araç olarak kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, istatistiksel model seçiminde Bayesci yaklaşımlardan Bayes faktörü tüm yönleriyle incelenmiş, hipotez testlerinde ve eşlenik önsel kullanımıyla model seçiminde uygulamaları gösterilmiştir. Bayes faktörünün analitik olarak hesaplanmasının mümkün olmadığı durumlarda ise bu hesabı yapabilmek için, MCMC (Markov Zinciri Monte Carlo) yöntemlerinin avantajlarını kullanan, uygulaması pratik olan Carlin ve Chib yöntemi tanıtılmıştır.

Bir başka Bayesci yaklaşım, BIC (Bayesci Bilgi Ölçütü), Bayes faktörünü yaklaşık olarak hesaplamaya olanak vermesi nedeniyle bu çalışmaya dahil edilmiştir. Ayrıca, Bayes faktöründen tamamen farklı prensipte çalışan ve son dönemlerde pek çok uygulamada sıkça kullanılan DIC (Sapma Bilgi Ölçütü) ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Bir yarı-parametrik modelleme olan kuantal modellemenin literatürdeki ünlü bir örneğinin ilk defa bu çalışmada ortaya çıkardığı iki model, Carlin ve Chib yaklaşımıyla hesaplanan Bayes faktörü ve bilgi ölçütlerinden BIC ve DIC kullanılarak karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler :** Bayesci Model Seçimi, Bayes Faktörü, BIC (Bayesci Bilgi Ölçütü), DIC (Sapma Bilgi Ölçütü), MCMC (Markov Zinciri Monte Carlo) Simülasyon Yöntemi, Carlin ve Chib Yöntemi, Pseudo Önseli, WinBUGS

# **BAYESIAN APPROACHES TO STATISTICAL MODEL SELECTION AND BAYES FACTOR**

## **ABSTRACT**

In Statistical modelling studies with the aim of describing real life, increasing developments of advanced technology and methods has made it possible to construct alternative models that can explain sufficiently the information from data. Therefore, developing new methods for the comparison of available competing models: in other words for choosing “the best” model, is a very active subject in statistical data analysis.

Model selection appears in many statistical problems: the comparison of non-nested regression models, the choice of parametric family, multiple change-point problem, mixture models with unknown number of components are examples. To solve these problems, the posterior probability of the model and the associated Bayes factor are used as the most important tool among the proposed methods based on Bayesian principles.

In this study, all aspects of Bayes factor, one of the approaches to statistical model selection are examined and also applications of this method in hypothesis testing and model selection with the use of conjugate prior are illustrated. When it is not possible analytically compute Bayes factor, Carlin and Chib method, taking advantage of MCMC (Markov Chain Monte Carlo) methods and application of which is practical, is introduced for this calculation.

Another Bayesian approach, BIC (Bayesian Information Criterion), is included in this study because of it being made it possible to calculate Bayes factor approximately. In addition, DIC (Deviance Information Criterion) which works completely in different principle than Bayes factor and is commonly used in many applications recently is described in detail. Two models that are created by the famous example of quantal modelling, a semi-parametric modelling, in the literature are for the first time in this study compared by means of Bayes factor calculated using Carlin and Chib approach and information criterions of BIC and DIC.

**Key Words** : Bayesian Model Selection, Bayes Factor, BIC (Bayesian Information Criterion), DIC (Deviance Information Criterion), MCMC (Markov Chain Monte Carlo) Simulation Method, Carlin and Chib Method, Pseudo Prior, WinBUGS

## TEŞEKKÜR

Çalıőmam boyunca yardımlarını esirgemeyen danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Emel ÇANKAYA'ya, destek ve sevgileriyle her zaman yanımda olan canım annem ve abime sonsuz teşekkür ve sevgilerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa no</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1. İstatistikte Bayesci Yaklaşım	5
2.2. Bayesci Analizin Temelleri	6
2.2.1. Bayes Teoremi	6
2.2.2. Bayesci İstatistikte Tahmin	7
2.3. MCMC Simülasyon Yöntemi	8
2.3.1. Gibbs Örneklemesi	9
2.3.2. Metropolis-Hasting Algoritması	10
2.3.3. WinBUGS Paket Programı	10
2.3.4. MCMC Yönteminde Yakınsamanın Belirlenmesi	12
3. MATERYAL VE YÖNTEM	13
3.1. Bayes Faktörü	14
3.1.1. Hipotez Testlerinde Bayes Faktörü	15
3.1.2. Bayes Faktörünün Yorumlanması	18
3.1.3. MCMC Yöntemi İle Bayes Faktörü Hesaplanması (Carlin ve Chib Yöntemi)	19
3.2. Belirli Modellerin Kıyaslanmasında BIC Yaklaşımı	21
3.3. DIC Yardımıyla Bayesci Model Seçimi	23

	<u>Sayfa no</u>
3.3.1. Model Seçiminde DIC Yorumlanması	25
4. BULGULAR	28
4.1. Uygulama 1 – Hipotez Testlerinde Bayes Faktörü	28
4.1.1. Tek Yanlı Hipotez Testi	28
4.1.2. Çift Yanlı Hipotez Testi	31
4.2. Uygulama 2 – Dağılım Ailesini Belirlemede Bayes Faktörü	33
4.3. Uygulama 3 – Model Seçiminde Bayes Faktörü, BIC ve DIC	37
4.3.1. Kuantum Modellerinin Carlin ve Chib Yöntemiyle Kıyaslanması	40
4.3.2. Kuantum Modellerinin BIC Kullanılarak Kıyaslanması	42
4.3.3. Kuantum Modellerinin DIC Kullanılarak Kıyaslanması	43
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	46
KAYNAKLAR	49
EKLER	55
ÖZGEÇMİŞ	60



## SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

### SEMBOLLER

$H_0$	Yokluk hipotezi
$H_1$	Alternatif hipotez
$I(\theta)$	Bilgi miktarı
$k$	Model sayısı
$L$	Olabilirlik fonksiyonu
$M$	Model
$m$	Önsel dağılım ortalaması
$n$	Örneklem genişliği
$P$	Olasılık
$y$	Örneklem verisi
$\Theta$	Parametre uzayı
$\theta$	Bilinmeyen kitle parametresi
$\theta_j$	Model $M_j$ 'deki parametre sayısı
$\mu$	Kitle ortalaması
$\sigma$	Kitle standart sapması
$\tau^2$	Önsel dağılım varyansı

### KISALTMALAR

AIC	Akaike Bilgi Ölçütü / Akaike Information Criterion
BIC	Bayesci Bilgi Ölçütü / Bayesian Information Criterion
BOA	Bayesian Output Analysis
CODA	Convergence Diagnostics and Output Analysis Software
DIC	Sapma Bilgi Ölçütü / Deviance Information Criterion
MCMC	Markov Zinciri Monte Carlo / Markov Chain Monte Carlo

## SEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa no</u>
<b>Şekil 2.1.</b> Bayes bilgi şeması	5
<b>Şekil 2.2.</b> Basit bir grafiksel model	11
<b>Şekil 4.1.</b> Carlin ve Chib yöntemi ile iki kuantum modelinin kıyaslanmasının grafiksel gösterimi	41

## ÇİZELGELER LİSTESİ

	<u>Sayfa no</u>
<b>Çizelge 3.1.</b> Bayes faktörü değerinin hipotez testlerinde ve model seçimindeki yorumu	18
<b>Çizelge 4.1.</b> Farklı örneklem genişlikleri, ortalama örneklem değerleri ve önsel dağılımlar kullanarak elde edilen $BF_{12}$ değerleri	36
<b>Çizelge 4.2.</b> Yakınsaklık testlerini geçen parametrelerin farklı başlangıç değerleri için sonsal tahminleri	39

## 1. GİRİŞ

İstatistik biliminde istatistiksel bir modelin oluşturulması, değişkenler arasındaki ilişkinin matematiksel eşitlikler şeklinde formülize edilmesi olarak tanımlanabilir. Gerçek hayatta gözlenen bir olayı betimlemek için oluşturulan bir model, verilerin analizinde, istatistiksel anlamlılıkta ve gelecekle ilgili tahmin yapmada önemli rol oynamaktadır. Bu yüzden, her istatistiksel veri analizi bir modelin yeterliliğinin, duyarlılığının ve alternatif modellerin varlığının test edilmesi işlemlerini içerir.

Günümüzde, artan teknolojik ve metodolojik gelişmeler sayesinde bir istatistiksel problemin çözümü için daha karmaşık modeller oluşturulabildiğinden, alternatif modeller sayısında büyük artış olmuştur. Birden fazla uygun model tanımlamasının bulunduğu bu tip durumlarda, bir istatistikçi mevcut olan veriyi kullanarak en uygun modeli seçmek ister. Model seçiminde amaç veriyi ürettiği varsayılan bir modelin belirlenmesi olmayıp, veriyle uyumlu birbirine rakip alternatif modeller arasından “en iyi” olanı seçme işlemidir. Bir başka deyişle bu çalışmada model seçimi denildiğinde, modellerin karşılaştırılması işlemi kastedilmektedir. Burada veride yansıyan sosyal olgunun temel özelliklerini hangi model daha iyi betimler sorusuna yanıt aranmaktadır.

İstatistiksel çıkarsamada model seçimi problemi, regresyon modellemesi (bağımlı veya bağımsız değişkenlere dönüşümün gerekli olup olmadığı iç içe geçmiş model karşılaştırması gibi), karma (mixture) modellemesi (bileşen sayısına karar vermede), çoklu değişim noktası (multiple change-points) problemi, değişkenlerin dağılımsal formunu belirlemek gibi alanlarda sıkça ortaya çıkmaktadır.

Model seçimine klasik yaklaşım, p-değerini kullanan olabilirlik oran testlerine dayandığından birtakım güçlüklerle sahiptir. Nicel tekniklerle çalışan araştırmacılar son 15 yıldır yorumlama zorluğu nedeniyle analizlerinde p-değerine daha az yer verir olmuşlardır. Bu güçlükler özellikle birden fazla model göz önüne alındığında meydana gelmektedir (Raftery, 1995).

Geleneksel hipotez testine bağılı yöntemlerden farklı olarak önerilen klasik model seçim ölçütleri ise en uygun model kararının verilmesi için ayrı bir yol olup bilgi teorisine dayanmaktadır. Kullback-Leibler uyumsuzluğuna dayanan AIC (Akaike Bilgi Ölçütü) ile bilgi teorisi yaklaşımı 1970'lerde popüler olup, daha sonraları bu yaklaşım Schwarz Ölçütü olarak da bilinen BIC (Schwarz, 1978) ve Mallow'un Cp Ölçütü (Mallows, 1973) gibi örneklerle çeşitlenerek gelişmiştir (Ucal, 2006).

Günümüzde her türlü istatistiksel tahmin probleminde klasik yaklaşıma alternatif olarak kullanılan Bayesci yaklaşım, istatistiksel model seçiminde ve hipotez testlerinde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bayesci model karşılaştırması, klasik yaklaşımda da olduğu gibi, hangi modelin doğru olduğu konusunda bilgi vermez. Aslında G.E.P. Box (1979)'ın da belirttiği gibi "Genellikle tüm modeller yanlıştır ancak bazıları kullanışlıdır". Dolayısıyla istatistiksel modelleme çalışmalarında, doğru modelin var olduğu varsayımı ile oluşturulan tüm olası modeller birer tahmindir.

Bayesci model karşılaştırması, elde edilen veri ve diğer bilgiler ışığında model için tercih yapılmasını sağlar. Bu tercihler en iyi modeli seçmekte ya da model ortalaması yoluyla geleceğe yönelik tahminleri geliştirmekte kullanılabilir. Bu amaçla uygulanan Bayesci yaklaşımlardan en temeli Bayes faktörü olup, model seçiminde ve hipotez testlerinde Bayesci prensiplerin uygulanması sonucu elde edilebilen sonsal model olasılıkları ve yokluk ya da alternatif hipotezlerin doğru olma olasılıklarının oranlanması yoluyla hesaplanır. Böylece bir hipotezin alternatifine kıyasla doğru olma olasılığını doğrudan belirlemeye olanak sağlayıp, model seçiminde ise kıyaslanan iki modelden hangisinin en uygun model olduğunu belirlemekte faydalıdır.

Aday modellerin tümünün içerisinde en iyisini seçme problemi istatistik literatüründe uzun bir tarihe sahiptir. Bayesci modelleme yapan araştırmacılar, yıllardır bu amaç için sadece Bayes faktörünü kullanmayı tavsiye etmişlerdir. Bayes faktörünün hipotez testlerindeki kullanımı Jeffreys (1961) tarafından, model seçimindeki kullanımı ise ilk olarak Schwarz (1978) ve Raftery (1986) tarafından ortaya konulmuştur. McCulloch ve Rossi (1992) ise eşlenik önsel kullanımıyla model karşılaştırmalarında Bayes faktörünü kullanmıştır.

Bayes faktörü hesabında gerekli marjinal olabirlikler kapalı formda değilse (integrallenemiyorsa), Laplace yaklaşım yöntemi, Importance örnekleme, Gaussian quadrature veya MCMC simülasyon yöntemi ile integral olarak Bayes faktörü hesaplanabilir (Rosenkranz ve Raftery, 1994). Carlin ve Chib (1995) ise model belirsizliğini bir model göstergesi yardımıyla belirleyip MCMC yöntemini kullanarak modellerin karşılaştırılmasında Bayes faktörünün elde edilmesini göstermiştir.

Kass ve Raftery (1995) Bayes faktörünün kullanımını örneklerle sunmuş olup Kass ve Wasserman (1995) ise iki iç içe modeli karşılaştırmada kullanılan Bayes faktörü için referans önsellerin seçimini incelemiştir. Ayrıca Lavine ve Schervish (1997) Bayes faktörü ile p değerini karşılaştırmıştır. Han ve Carlin (2001) Bayes faktörü hesabı için MCMC metodunu, Sınharay ve Stern (2002) ise Bayes faktörün modeldeki parametrelerin önsel dağılımlarına duyarlılığını incelemiş olup Bayes faktörü ve alternatif çeşitlerinin kullanımı Aravjo ve Pereira (2007) tarafından bazı simülasyon çalışmalarıyla gösterilmiştir.

Yüksek boyutlu karmaşık hiyerarşik modellerde Bayes faktörü açıkça doğrudan uygulanamaz (Gelfand ve Dey., 1994). Ne yazık ki, Bayes faktörünün Bayesci model karşılaştırmasında kullanılması her modeldeki parametre sayısını belirtmeyi gerektirir (Kass ve Raftery, 1995). Ortaya çıkan bu gibi zorluklardan kurtulmak amacıyla Spiegelhalter ve ark. (2002) tarafından model karmaşıklığı ve verinin modele uygunluğu arasındaki ölçüme dayanan DIC ölçütü elde edilmiştir. Son yıllarda kullanımı artan bu ölçüt, MCMC yöntemi ile elde edilmiş modellerin sonsal dağılımlarını kullanan Bayesci model seçim problemlerinde özel olarak kullanışlı olup, pek çok çalışmada kullanılır hale gelmiştir.

Da Silva ve ark. (2004) DIC ağırlıklarının hesaplanmasını örneklerle sunmuş olup, Mislevy (2006) DIC'nin kullanımını, Spiegelhalter (2006a) ise DIC'yi kullanarak Bayesci model karşılaştırmasını WinBUGS istatistiksel paket programı yardımıyla incelemiştir. Martino (2007) DIC'nin özelliklerini incelemiş Asseburg (2007) ise DIC'yi kullanarak model karşılaştırması üzerinde çalışmıştır. Bu gibi çalışmalara ek olarak Wilberg ve Bence (2008) model seçiminde DIC ölçütünün performansını incelemiştir.

Bu çalışmanın amacı, istatistiksel model karşılaştırmasında Bayesci yaklaşımlardan en çok kullanılan Bayes faktörünü tüm yönleriyle incelemek, avantaj ve dezavantajlarını vermektir. Karmaşık modellerde analitik hesaplama güçlüğü dezavantajı nedeniyle, MCMC yöntemlerini kullanan Carlin ve Chib yaklaşımı ile Bayes faktörü hesabı tez kapsamına alınmıştır. Bayes faktörünü yaklaşık olarak elde etmeye olanak sağlaması açısından BIC de bu çalışmada incelenmiştir. Bunlara ilave olarak, Bayes faktöründen tamamen farklı prensipte çalışan, son dönemlerin en sık kullanılan yaklaşımı DIC ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Bu yöntemlerin uygulamaları ise üç farklı alanda tanıtılmıştır.

Uygulama 1’de bir kişinin elde etmiş olduğu ağırlık ölçümleri kullanılarak kişinin doğru ağırlığını ve ağırlık değerlerinin geçen yılki ağırlığına göre değişip değişmediğini belirlemeye yönelik Bayes faktörü hesabıyla, tek yanlı ve çift yanlı hipotez testi uygulanmıştır. Uygulama 2’de herhangi bir veri setinin ait olduğu dağılımın Poisson ya da Geometrik dağılım olduğuna dair iddia ile oluşturulan modellerin karşılaştırılması yapılmıştır. Burada eşlenik önsel ve Jeffreys önsel kullanılarak Bayes faktörü hesabı gerçekleştirilmiş ve farklı önsel kullanımının model seçiminde bir farklılık yaratıp yaratmadığı incelenmiştir. Uygulama 3’te ise bir yarı parametrik modelleme örneği olan kuantal modellemenin literatürdeki bir örneğinin ortaya çıkardığı birbirine rakip iki kuantal modelin kıyaslanması; Bayes faktörü, BIC ve DIC ile ilk defa bu çalışmada yapılmıştır. Carlin ve Chib yöntemi kullanılarak Bayes faktörü hesaplanmış ek olarak bayes faktörünün yaklaşık olarak elde edilmesini sağlayan BIC değerleri kullanılmıştır. Ayrıca bu iki kuantal model için DIC değerleri elde edilmiş ve sonuç olarak veriye uyan en uygun kuantum modelinin, dolayısıyla en olası kuantum değerinin belirlenmesi sağlanmıştır.

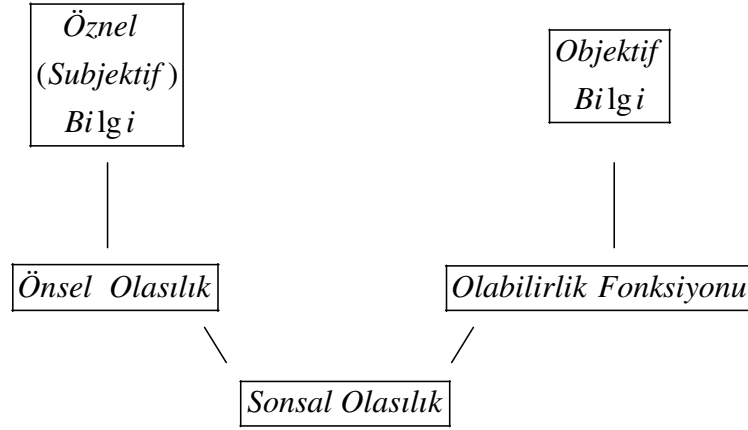
Tez çalışmasının sonunda, elde edilen sonuçlar ve öneriler verilmiştir. Ayrıca çalışmada, son yıllarda Bayesci model seçimi uygulamalarında kullanımı artmış olan WinBUGS Paket Programı (WinBUGS Version 1.4.3) kullanılmış olup, bu program kullanılarak yazılmış olan program kodları ve ispatlar tezin “Ekler” kısmında gösterilmiştir.

## 2. GENEL BİLGİLER

### 2.1. İstatistikte Bayesci Yaklaşım

İstatistiksel çıkarsama ve karar verme yöntemlerinden biri olan Bayesci yaklaşım, model parametreleri için verinin içermiş olduğu objektif bilgi ile kişisel, bilimsel ya da geçmişten gelen ön bilginin (önsel bilgi) birleştirilmesine ve parametrelere ilişkin çıkarsamaların yapılmasına olanak sağlayan doğal bir yoldur.

Parametrelere ilişkin önsel bilgiler özneliği temsil ederler ve uygun dağılımlarla modelleme sürecine dahil edilirler. Bu nedenle Bayesci yaklaşımda önsel bilgilerden önsel dağılımlara, sonsal dağılımlardan da sonsal bilgilere bir geçiş söz konusudur (O'Hagan, 1986).



**Şekil 2.1.** Bayes bilgi şeması

Şekil 2.1’de yer alan önsel (subjektif) bilgi, henüz veriyi gözlemlemeden parametre hakkında araştırmacının fikirlerini içeren veya önceki çalışmalardan, deneylerden, ilgili kişilerin görüşlerinden elde edilen önsel olarak adlandırılan bir bilgidir. Bu önsel bilgiye karşılık gelen önsel olasılık ile örneklemeden olabilirlik fonksiyonu kanalıyla gelen objektif bilginin birleştirilmesi sonucu sonsal olasılık ortaya çıkar. Sonsal bilgi ve ona karşılık gelen sonsal olasılık, veriyi gözlemledikten sonra tahmin edilmesi istenen parametre hakkındaki olasılık değeridir. Sonuç olarak elde edilen bilgi birleşimi parametre hakkında çıkarsama yapmak ve karar vermek amacıyla kullanılmaktadır.



## 2.2. Bayesci Analizin Temelleri

### 2.2.1. Bayes Teoremi

Bayesci yaklaşım, özü Bayes Teoremine dayandırılarak yapılandırılmış bir yaklaşım sistemidir. Thomas Bayes tarafından 1763'te bilgiyi birleştirme mekanizması olarak ortaya konulan bu teorem, bir raslantı değişkeni için olasılık dağılımı içinde koşullu olasılıklar ile marjinal olasılıklar arasındaki ilişkiyi gösterir. Bu kavram için **Bayes Kuralı** veya **Bayes Kanunu** adları da kullanılır.

Herhangi bir örneklem uzayında  $A$  ve  $B$  iki olay olmak üzere,  $B$  olayının bilinmesi durumunda (yani  $B$  olayı gerçekleştiğinde)  $A$  olayının gerçekleşme olasılığı,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

eşitliği ile ifade edilirken aynı şekilde  $A$  olayı biliniyorken  $B$  olayının gerçekleşme olasılığı ise,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

şeklinde gösterilir. Bu eşitlikler yeniden düzenlenip birbirine eşitlendiğinde,

$$P(A \cap B) = P(B) P(A/B) = P(A) P(B/A) \quad (2.1)$$

ifadesi elde edilir.

Genelleştirmek için, içerisinde  $B$  olayının da yer aldığı aynı anda gerçekleşmesi mümkün olmayan ayrık olaylardan  $(A_1, A_2, \dots, A_k)$  oluşan bir örneklem uzayı düşünölsün.  $B$  olayı biliniyorken, herhangi bir  $A_i$  olayının gerçekleşmesi olasılığı,

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) P(B/A_i)}{P(B)}, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

dır. Burada  $P(B)$  hesabı için toplam olasılık formölü uygulanırsa, bu eşitlik;

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i) P(B/A_i)}{\sum_{j=1}^k P(A_j) P(B/A_j)}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (2.2)$$

şeklinde de ifade edilebilir (İnal ve Günay, 2002). Bayes teoremi olarak bilinen bu ifadede  $P(A_i)$  değeri önsel olasılık değeri olup önceden bilinmesi gereklidir.

## 2.2.2. Bayesci İstatistikte Tahmin

Subjektivist olasılık düşünürlerine göre, Bayes teoremi, yeni kanıtlar ışığında olasılık değeri hakkındaki subjektif inanışların güncelleştirilip değiştirilmesini sağlayan temel bir gereçtir; yani sonsal bir yaklaşımın temelidir.

Bilinmeyen kitle parametrelerinin kümesini  $\theta$ , gözlenen veriyi ise  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  ile temsil edersek, sonsal dağılımın hesaplanmasında ilk adım gözlemlerin ve bilinmeyen parametrenin bileşik olasılık dağılımının Eş. 2.1. prensibiyle

$$P(\theta, y) = P(\theta) P(y/\theta)$$

şeklinde elde edilmesidir. Burada  $P(\theta)$ ,  $\theta$ 'nın önsel olasılık fonksiyonu olup  $P(y/\theta)$  ise olabilirlik fonksiyonudur.

Bayes teoremi (Eş. 2.2) uygulanarak, bu ifade

$$P(\theta/y) = \frac{P(\theta, y)}{P(y)} = \frac{P(\theta)P(y/\theta)}{P(y)}$$

eşitliğinde kullanılır. Burada  $P(y)$ , sabit bir değerdir (örneğin  $\theta$ 'nın olasılık uzayının sürekli olması durumunda  $P(y) = \int_{\theta} P(\theta)P(y/\theta)d\theta$  şeklinde hesaplanır). Analitik işlemleri kolaylaştırmak amacıyla genel prosedür, bu terimi ihmal etmek ve bilinmeyen parametrenin sonsal dağılımını bu sabite kadar orantısal olarak ifade etmektir. Bir başka deyişle;

$$P(\theta/y) \propto P(\theta) P(y/\theta)$$

Sonsal Dağılım  $\propto$  Önsel Dağılım x Olabilirlik

dır (Raftery, 1995).

Tahmin edilmek istenen parametre sayısının birden fazla olması durumunda ( $\theta = \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ ) ise bileşik sonsal olasılık fonksiyonu,

$$P(\theta/y) \propto P(\theta_1) P(\theta_2/\theta_1) P(\theta_3/\theta_1, \theta_2) \dots P(y/\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

olur. Burada, örneğin  $P(\theta_2/\theta_1)$ ,  $\theta_1$ 'in bilinmesi koşulunda  $\theta_2$ 'nin önsel dağılımı olup parametrelerin bağımsızlığı durumunda  $P(\theta_2/\theta_1) = P(\theta_2) P(\theta_1)$  olacaktır.

Buradan  $\theta$ 'nın herhangi bir  $\theta_i$  parametresinin marjinal olasılık dağılımını elde etmek için,

$$P(\theta_i / y, \theta_j, j=1, \dots, k) = \int \dots \int P(\theta / y) d\theta_j, \\ \theta_j, j \neq i$$

analitik işleminin yapılması gereklidir.

Bilinmeyen  $\theta_i$  parametrelerine ilişkin ön bilginin temsili, olabilirlik fonksiyonunun şekline bağlı kalarak belli olasılık dağılımı ailesiyle (eşlenik önsel) sınırlandırıldığında bile, bu analitik işlemleri tamamlamak, yüksek dereceden integraller almayı gerektirdiğinden oldukça güçtür. Hatta, önsel bilginin uygunsuz (improper) olması durumunda (örneğin bilgi içermeyen önseller; Normal dağılımın standart sapması için  $P(\sigma) = \frac{1}{\sigma}$  kullanımı) sonsal dağılımın formu da belirlenemeyeceğinden, bu analitik işlemleri yapmak hiç mümkün olmayacaktır.

Bu zorluğu aşmak için, karmaşık integrasyon teknikleri yerine koşullu dağılımlardan örneklem çekerek parametre tahminlerini elde etmemizi sağlayan simülasyon teknikleri geliştirilmiştir. Bu tekniklerin bütünü MCMC olarak bilinir (Gamerman, 1997).

### 2.3. MCMC Simülasyon Yöntemi

Pek çok uygulamalı çalışmalarda, son zamanlara kadar karmaşık problemlerin Bayes analizi oldukça güç ve probleme özel metot geliştirmeyi gerektiriyordu. Ancak şimdi, Markov zinciri kullanarak Monte Carlo simülasyon yöntemi sayesinde, gerekli nümerik integrallerin alınması sağlanabilmektedir. Bu yöntemle, sonlu sayıda gözlem değeri kullanarak, sonsuz sayıda veri elde etmek mümkündür. Böylece çözümü analitik olarak zor olan bazı problemlerin, benzetim teknikleri ve bilgisayar yazılımları sayesinde hızlı biçimde çözülmesi sağlanabilmektedir (Yardımcı ve Erar, 2005).

En çok kullanılan MCMC yöntemleri, Gibbs örnekleme algoritması ve Metropolis-Hasting algoritmasıdır. Bu yöntemler ile karmaşık sonsal dağılımlardan örneklem çekmek ve sonsal momentleri hesaplamak mümkün olmaktadır.

MCMC yöntemlerinin temelinde, Markov zincirlerini kullanarak Monte Carlo integrasyonu yapmak vardır. Monte Carlo yöntemi ile, istenilen bir olasılık dağılımından birbirinden bağımsız simülasyon değerleri takımı üretilir. Başka bir ifade ile sonsal dağılımdan raslantısal olarak çok sayıda değer, Markov zinciri sistematığıne uygun olarak çekilir.

MCMC simülasyon yönteminin amacı,  $\theta$  parametre uzayında rastgele yürüyüş oluşturup, hedeflenen sonsal dağılıma yakınsamaktır (Carlin ve Chib, 1995). Bu amaçla türetilen parametre değeri zincirin,  $\theta^t$ 'nin, sadece bir önceki değeri  $\theta^{t-1}$ 'e bağlı, diğerlerinden bağımsız olduğu bir stokastik süreç oluşturur ve üretilen bu zincir yeterince uzun çalışırsa, ilgilenilen sonsal dağılıma ulaşılacaktır.

### 2.3.1. Gibbs Örnekleme

Gibbs örnekleme algoritması, genellikle bileşik dağılımların doğrudan belirlenmesinin zor olduğu, çok sayıda değişken içeren karmaşık modellerde kullanılmaktadır (Gelfand ve Smith, 1990). Tam koşullu dağılımlardan, parçalama yoluyla örneklemeler çekilmesini sağlayan günümüzde kullanımı çok önem kazanmış bir metottur.

Tahmin edilmek istenen parametrelerin vektörünün  $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  olduğu varsayalım. Gibbs algoritmasının oluşturulması süreci, j iterasyon sayısı olmak üzere aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

**Adım 1 :** Birinci iterasyonda, (j=1) parametreler için makul olabilecek başlangıç değerleri;  $\underline{\theta}^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_k^{(0)})$  olarak belirlenir.

**Adım 2 :**  $\underline{\theta}^{(j-1)}$  kullanılarak parametre değerlerinin aşağıda belirtilen biçimde ardışık olarak üretilmesi sonucunda yeni  $\underline{\theta}^{(j)} = (\theta_1^{(j)}, \dots, \theta_k^{(j)})$  vektörü elde edilir.

$$\begin{aligned}\theta_1^{(j)} &\sim P(\theta_1 / \theta_2^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j-1)}) \\ \theta_2^{(j)} &\sim P(\theta_2 / \theta_1^{(j)}, \theta_3^{(j-1)}, \dots, \theta_k^{(j-1)}) \\ &\vdots \\ \theta_k^{(j)} &\sim P(\theta_k / \theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)}, \dots, \theta_{k-1}^{(j)})\end{aligned}$$

**Adım 3 :** İterasyon sayısı  $j$ 'nin değeri 1 artırılır ve yakınsama gerçekleşinceye kadar adım 2'ye dönülerek işlemlere devam edilir (Yardımcı ve Erar, 2005).

Gibbs örnekleme sürecinde birinci iterasyonda  $\underline{\theta}^{(0)}$  başlangıç değerleri kullanılırken, ikinci iterasyonda  $\underline{\theta}^{(0)}$ 'in yerine  $\underline{\theta}^{(1)}$  kullanılarak  $\underline{\theta}^{(2)}$  elde edilir.  $k$  iterasyon sonra Markov özelliğine sahip  $\underline{\theta}^{(0)}, \underline{\theta}^{(1)}, \dots, \underline{\theta}^{(k)}$  parametre vektörleri elde edilir ve bir Markov zinciri tamamlanmış olur.

İstenilen değere kaç iterasyon sonrasında yakınsanacağı, belirlenen başlangıç değerine ve zincir sayısına bağlıdır. İterasyon sayısı arttıkça, zincir denge koşuluna yaklaşmakta ve yakınsama yaklaşık olarak gerçekleşmektedir.

### **2.3.2. Metropolis-Hasting Algoritması**

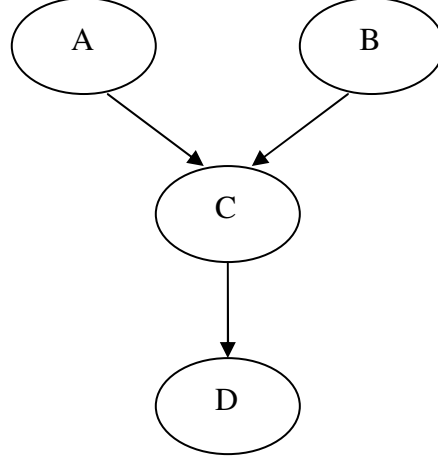
Metropolis ve ark. (1953) ve Hastings(1970) tarafından geliştirilen ve Metropolis-Hasting algoritması olarak adlandırılan bu yöntemde, parametre değerleri Gibbs örneklemesinde olduğu gibi tam koşullu dağılımlardan üretilmeyip bunun yerine belli bir olasılıkla bir öneri dağılımından üretilmektedir. Algoritmanın detaylarını incelemek amacıyla Spiegelhalter ve ark. (1995) kullanılabilir.

### **2.3.3. WinBUGS Paket Programı**

WinBUGS, MCMC simülasyon yöntemine dayalı karmaşık istatistiksel modellerin Bayesci analizlerinin yapılmasına olanak sağlayan esnek bir yazılım programıdır. Program, modelde yer alan bilinmeyen niceliklerin (parametreler ya da nodlar) sonsal dağılımından simüle gözlemleri üretmek amacıyla çeşitli MCMC algoritmalarını (Gibbs, Metropolis-Hasting vb.) uygulamaktadır.

İstatistiksel modellerin programda tanımlanması iki şekilde gerçekleştirilir. Birincisi modelin grafiksel gösterimi olup, ikincisi ise *model* ifadesi başlıklı metne dayalı tanımlamadır.

Her analizde ilk basamak grafiksel model yapısına yönelme olmalıdır. Özellikle bir grafikte bütün parametreler bir nod (düğüm) olarak ifade edilir ve her nod bağlı olduğu nodlar dışında diğer tüm nodlardan bağımsızdır. Örneğin, Şekil 2.2’deki grafik basit bir modelde yer alan A,B,C ve D parametreleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir.



**Şekil 2.2.** Basit bir grafiksel model

Grafikten görüldüğü gibi C parametresi sadece A ve B ‘nin değerlerine bağlıdır. Benzer şekilde D parametresi ise sadece C’nin değerine bağlı olup A ve B’nin değerlerinden koşullu bağımsızdır. WinBUGS programının herhangi bir grafiksel gösteriminde, noktalı çizgiler parametreler arasındaki deterministik ilişkiyi; düz çizgiler stokastik ilişkiyi ve kare kutular ise sabit değerleri göstermek amacıyla kullanılmaktadır.

Modellerin grafiksel gösteriminin yanı sıra metne dayalı olarak ifade edilebilmesi için, ilk önce veri elde edilmeli ve modelde yer alan parametreler (nodlar) için kullanıcı ya da WinBUGS tarafından başlangıç değerleri verilmelidir. Zinciri tanımlamak için kullanılan başlama değerleri, başlangıç değerleri olarak adlandırılır. Bu başlangıç değerleri en yüksek sonsal olasılık bölgesinden uzakta ise sonsal özetleri etkileyebilir.

Değerlerin verilmesi sonrasında, program her değişkenin koşullu dağılımından örnekler üretmeye başlar ve zincir yeterince uzun çalıştırıldığında, üretilen örneklerin dağılımı denge dağılımına yakınsar. Zincirin başlangıç değerlerinin etkisinden sakınmak için, ilk belli sayıdaki iterasyon (genellikle 500 ya da 1000) örnekten elenir. Bu elenen kısma burn-in periyodu denir. Bilinmeyen parametre tahminleri, geriye kalan değerlerin sonsal özetlerini hesaplamak yoluyla yapılır (Acar, 2000).

### 2.3.4. MCMC Yönteminde Yakınsamanın Belirlenmesi

MCMC yöntemlerinde zincirin yakınsaması algoritmanın hedef dağılıma ulaşmış olup olmadığını ilgililer. Eğer ulaşmışsa o zaman üretilen örnek doğru hedef dağılımdan gelir. Bu yüzden, algoritmanın yakınsamasını izlemek ilgilenilen sonsal dağılımdan sonuçları üretmek için gereklidir.

Yakınsamayı izlemek için pek çok yol vardır. Doğru sonsal ortalama ve örnek değerlerinin ortalaması arasındaki farkın tahmini olan MC (Monte Carlo) hatasının küçük değerleri ilgilenilen niceliği hesaplamakta olduğumuzu göstereceğinden, MC hatasını izlemek en basit yoldur. Otokorelasyonların izlenmesi ise düşük ya da yüksek değerlerin ayrı ayrı hızlı veya yavaş yakınsamayı göstermesi sebebiyle çok kullanışlıdır. Yakınsama problemi bulunmayan zincirler için otokorelasyon katsayılarının küçük olması beklenir.

İkinci bir yol iz (trace) grafiklerini izlemektir. Eğer tüm değerler yukarı ve aşağı periyotlar olmaksızın sifıra yakın değerler gösteriyorsa o zaman yakınsadığı varsayılabilir. Pratikte çok etkili olan diğer bir yol, farklı başlangıç noktalı çoklu zincirleri çalıştırmaktır.

Yakınsamayı test etmek için geliştirilen istatistiksel testler, WinBUGS yazılım çıktısını kullanabilen CODA (Best ve ark., 1996) ve BOA (Smith, 2005) gibi yazılım programları içinde bulunabilir.

Ancak deneyimli kullanıcılar otokorelasyon ve iz grafiği gibi grafikleri kullanarak yakınsamayı izleyen basit ve hızlı yöntemler kullanırlar. Çoklu zincir karşılaştırmaları ve yakınsama teşhisleri (multiple-chain comparisons and convergence diagnostics) gibi daha ileri testler, yüksek boyutlu karmaşık sonsal dağılımlar için kullanılmalıdır (Ntzoufras, 2009).

### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bayesci bakış açısından, gerçek hayatı keşfetmek için oluşturulan bir modelin ne kadar olası olduğu bilinmeyen bir niceliktir. Dolayısıyla, Bayes analizinde bu nicelik bir parametre olarak tanımlanabilir.

Elimizde k olası model olsun  $(M_1, M_2, \dots, M_k)$ . Model j için ön bilgi  $P(M_j)$ , model parametreleri  $\theta_j$  ve örneklem verisi y olmak üzere; veri, parametreler ve modellerin bileşik dağılımı  $P(y, \theta_j, M_j) = P(y/\theta_j, M_j) P(\theta_j/M_j) P(M_j)$ 'dir. Bu tam model altında, veri üç aşamada ortaya çıkar: Model  $M_j$ ,  $P(M_1), \dots, P(M_k)$ 'dan; parametre vektörü  $\theta_j$ ,  $P(\theta_j/M_j)$ 'den ve veri,  $P(y/\theta_j, M_j)$ 'den üretilir. Bileşik dağılımın  $\theta_j$  parametre vektörüne göre marjinalenmesi ve veri y üzerine koşullandırılması sonucu (Bkz. Bayes Teoremi, Eş. 2.2) sonsal model olasılıkları,

$$P(M_j/y) = \frac{P(M_j) P(y/M_j)}{\sum_{j=1}^k P(M_j) P(y/M_j)} \quad j=1,2,\dots,k$$

ile hesaplanabilir.

Burada  $P(y/M_j)$ , j. modelin marjinal olabilirliği olup

$$P(y/M_j) = \int_{\theta_j} P(\theta_j/M_j) P(y/\theta_j, M_j) d\theta_j$$

dır (Martino, 2007). ( Not: Eğer  $P(\theta_j/M_j)$  kesikli ise, integral yerine toplam sembolü kullanılır.)

Ayrıca bu eşitlikte,

$P(y/\theta_j, M_j)$  : j. modele uyan olabilirlik fonksiyonu

$P(\theta_j/M_j)$  :  $M_j$  modelinde yer alan parametreler için önsel olasılık



Aynı çalışma için birden fazla uygun model olması durumunda, modellerin kıyaslanması için bu sonsal model olasılıklarının oranlanması doğal bir yolu olan Bayes faktörü kullanılabilir. Alternatif olarak bu kıyaslama bir bilgi ölçütü yardımıyla da yapılabilir. Bayes faktörü ile ilişkilendirilebildiğinden bu çalışmada BIC ve son dönemlerde geliştirilen ve yaygın olarak kullanılan DIC, Bayes faktörüne ilave olarak aşağıdaki alt bölümde anlatılacaktır.

### 3.1. Bayes Faktörü

Birbirine rakip iki model  $M_1$  ve  $M_2$  olsun. Bu iki modelin sonsal model olasılıklarının oranı,

$$\frac{P(M_1 / y)}{P(M_2 / y)} = \frac{P(M_1)}{P(M_2)} \times \frac{P(y / M_1)}{P(y / M_2)} \quad (3.1)$$

şeklinde hesaplanabilir. Burada marjinal olabilirlikler oranı Bayes faktörü olarak tanımlanır. Bir başka deyişle  $M_2$  'ye karşı  $M_1$  lehine Bayes faktörü  $BF_{12}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} BF_{12} &= \frac{P(y / M_1)}{P(y / M_2)} \\ &= \frac{\int_{\theta_1} P(\theta_1 / M_1) P(y / \theta_1, M_1) d\theta_1}{\int_{\theta_2} P(\theta_2 / M_2) P(y / \theta_2, M_2) d\theta_2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

dır. Böylece Eş. 3.1 sözel olarak,

$$[Sonsal Odds] = [Önsel Odds] \times [Bayes Faktörü]$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buradan yola çıkarak Bayes Faktörü,

$$\begin{aligned} BF_{12} &= \frac{Sonsal odds}{Önsel odds} \\ &= \frac{P(M_1 / y) P(M_2)}{P(M_2 / y) P(M_1)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

şeklinde odds oranı olarak da gösterilebilir (Martino, 2007).

Eğer modellerden biri diğerine göre daha tercih edilebilir değilse önsel olasılıklar,  $P(M_1) = P(M_2) = 0.5$  olarak seçilir. Bu durum önsel odds'un 1'e eşit olması (bilgi içermeyen önsel) ve dolayısıyla Bayes faktörünün sonsal odds'a eşit olması anlamına gelir.

Birbirine rakip sadece iki model olduğu durumda, sonsal model olasılıklarının toplamı 1'e eşit olduğundan Bayes faktörü hesabı;

$$BF_{12} = \frac{P(M_1 / y)}{P(M_2 / y)} = \frac{P(M_1 / y)}{1 - P(M_1 / y)}$$

şeklinde de yapılabilmektedir.

### 3.1.1. Hipotez Testlerinde Bayes Faktörü

İstatistiksel bir hipotezi test etme problemi Bayesci çalışanlar ile klasik istatistik çalışanları arasında önemli bir tartışma noktası olmuştur. Klasik istatistik yaklaşımı bir red bölgesi oluşturup, ilişkili olasılıkları hesaplayarak bir test istatistiği yardımıyla hipotezi test ederken; Bayesci yaklaşım ise Bayes faktörü kullanarak  $H_0$  hipotezinin doğruluğuna dair kanıtın gücünü vermektedir.

Bayesci yaklaşımda hipotezlere olasılık tayin edilir. Bu durum, yaklaşımın olasılık teorisine daha geniş bir mantıksal açıdan bakması nedeniyledir. Klasik Aristo mantığına göre bu değer 0 veya 1 olması değil, 0-1 aralığında değerler alması söz konusudur (Ekici, 2009). Yani bir hipotez kabul ya da reddedilmez, onun doğruluğuna ilişkin kanıtı bir olasılık vererek belirler. Bir başka deyişle bayesci yaklaşımda bir hipotez hakkında karar  $P(\text{Hipotez}/\text{Veri})$  kullanılarak verilir. Klasik yaklaşımda ise  $H_0$  hipotezinin test olasılığı olan p-değeri, hipotezin doğruluğu varsayımıyla örneklem verisini gözleme ihtimalinin, bir başka deyişle  $P(\text{Veri}/\text{Hipotez})$  'nin karşılığıdır (Hoijtink ve ark., 2008).

Bayesci yaklaşımda bilinen süreç hipotez testinde de geçerlidir. Hipotezlerin bilinmeyen bir parametre olduğu varsayılır ve önsel olasılıkları belirlenir. Ardından sonsal olasılıklara ulaşılır. Burada karar verilirken sonsal olasılığı en yüksek olan hipotez, en iyi seçim olacaktır. Bayesci yaklaşımda hipotezlerin olasılıkları karşılaştırılarak karar verildiği için genellikle "hipotez testi" yerine "hipotezlerin karşılaştırılması" ifadesi benimsenmektedir (Zellner, 1971).

$H_0$  ve  $H_1$  olmak üzere iki hipotez;

$$H_0 : \theta \in \Theta_0$$

$$H_1 : \theta \in \Theta_1$$

şeklinde tanımlansın. Burada  $\Theta_0$  ve  $\Theta_1$ , parametre uzayının ( $\Theta$ ) bir bölümüdür ve  $\Theta_0 \cup \Theta_1 = \Theta$ 'dır. Eş. 2.2'de yer alan Bayes teoremine göre,  $y$  örneklem bilgisi verildiğinde  $H_0$  hipotezinin sonsal olasılığı;

$$P(H_0 / y) = \frac{P(H_0)P(y/H_0)}{P(H_0)P(y/H_0) + P(H_1)P(y/H_1)} \quad (3.4)$$

dir. Benzer biçimde,  $y$  bilindiğinde  $H_1$  hipotezinin sonsal olasılığı;

$$P(H_1 / y) = \frac{P(H_1)P(y/H_1)}{P(H_0)P(y/H_0) + P(H_1)P(y/H_1)} \quad (3.5)$$

eşitliği yardımıyla hesaplanacaktır.

Yukarıdaki eşitliklerde  $P(y/H_0)$  ve  $P(y/H_1)$  sırasıyla  $H_0$  ve  $H_1$ 'in doğruluğu varsayımıyla olabilirliklerdir.  $P(H_0)$  ve  $P(H_1)$  olasılıkları ise hipotezlerin gerçekleşeceklerine dair inanç olasılıkları olup

$$P(H_0) = P(\theta \in \Theta_0) = \int_{\Theta_0} P(\theta) d\theta$$

$$P(H_1) = P(\theta \in \Theta_1) = \int_{\Theta_1} P(\theta) d\theta$$

dır (Albert, 2009).

Elde edilen bu eşitliklerde paydadaki analitik işlemlerin yapılması oldukça karmaşık olduğundan  $H_0$  ve  $H_1$  hipotezlerinin sonsal olasılıklarının oranlanması yoluna gidilir. Bir başka deyişle  $H_0$  hipotezinin odds'u hesaplanır.

Model karşılaştırmasındaki Eş. 3.1 hipotezler için uygulanırsa;

$$\underbrace{\left[ \frac{P(H_0 / y)}{P(H_1 / y)} \right]}_{\text{SONSAL ODDS}} = \underbrace{\left[ \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \right]}_{\text{ÖNSEL ODDS}} \underbrace{\left[ \frac{P(y / H_0)}{P(y / H_1)} \right]}_{\text{BAYES FAKTÖRÜ}} \quad (3.6)$$

eşitliği elde edilir.

$H_1$ 'e karşı  $H_0$  lehine Bayes faktörü  $BF_{01}$  ile gösterilirse, Eş. 3.2'ye benzer şekilde

$$BF_{01} = \left[ \frac{P(y / H_0)}{P(y / H_1)} \right]$$

olabilirlik oranı olarak ya da Eş. 3.3'ten yola çıkarak

$$BF_{01} = \left[ \frac{P(H_0 / y) P(H_1)}{P(H_1 / y) P(H_0)} \right]$$

odds oranı olarak iki şekilde de ifade edilebilir. Burada

$$P(H_0 / y) = P(\theta \in \Theta_0 / y) = \int_{\Theta_0} P(\theta / y) d\theta$$

$$P(H_1 / y) = P(\theta \in \Theta_1 / y) = \int_{\Theta_1} P(\theta / y) d\theta$$

dır (Kass ve Raftery, 1995).

$H_0$  ve  $H_1$  hipotezlerinin eşit olasılıklarla gerçekleşeceği varsayıldığı durumlarda ( $P(H_0) = P(H_1) = 0.5$ ), Bayes faktörü sonsal odds'a eşit olacaktır. Ayrıca,  $P(H_0) = \pi_0$ ,  $P(H_1) = \pi_1$ ,  $P(H_0 / y) = p_0$  ve  $P(H_1 / y) = p_1$  olarak tanımlanırsa,  $H_0$  hipotezinin sonsal olasılığına, hipotezin önsel olasılıkları ve Bayes faktörünün bir fonksiyonu kullanılarak

$$p_0 = \frac{\pi_0 \cdot BF_{01}}{\pi_0 \cdot BF_{01} + 1 - \pi_0} \quad (3.7)$$

eşitliği yardımıyla da ulaşılabilir (Albert, 2009).

### 3.1.2. Bayes Faktörünün Yorumlanması

$M_1$  ve  $M_2$  modellerinin kıyaslanması amaçlı hesaplanan Bayes faktörü,  $BF_{12} > 1$  ise  $M_1$  modelinin  $M_2$  modeline tercihi,  $BF_{12} < 1$  durumunda ise  $M_2$  modelinin  $M_1$  modeline tercihi olarak yorumlanır (Raftery, 1995). Benzer yorum test edilecek hipotezler için de uygulanabilir. Bayes faktörünün her iki amaçlı ayrıntılı değerlendirme tablosu Çizelge 3.1’de verilmiştir.

**Çizelge 3.1.** Bayes faktörü değerinin hipotez testlerinde ve model seçimindeki yorumu (Jacobson, T. ve Karlsson, S., 2002)

<b>Bayes faktörü değeri</b>	<b>Yorum</b>
$BF_{01}$ : $H_0$ hipotezinin $H_1$ hipotezine karşı testinde $BF_{ij}$ : i. modelin j. modele karşı kıyaslanmasında kullanılan bayes faktörü değeridir.	
$1 \leq BF_{ij}$	$H_0$ ’ın doğruluğu kabul edilir $M_i$ için destek
$0.32 \leq BF_{ij} < 1$	$H_0$ ’a karşı az delil var $M_i$ ’ye karşı zayıf kanıt
$0.10 \leq BF_{ij} < 0.32$	$H_0$ ’a karşı sağlam delil var $M_i$ ’ye karşı önemli kanıt
$0.01 \leq BF_{ij} < 0.10$	$H_0$ ’a karşı güçlü delil var $M_i$ ’ye karşı güçlü kanıt
$BF_{ij} < 0.01$	$H_0$ ’a karşı kesin delil var $M_i$ ’ye karşı kesin kanıt

### 3.1.3. MCMC Yöntemi İle Bayes Faktörü Hesaplanması

#### (Carlin ve Chib Yöntemi)

Birbirine rakip modellerin sonsal olasılıklarının ve bunlarla ilişkili Bayes faktörlerin analitik olarak hesaplanması için kullanılan yaklaşımlar, modern MCMC yöntemlerinin (Gibbs örnekleme, Metropolis Hastings vb) avantajlarını kullanmaktadır. Bu yaklaşımlardan bazıları, model belirsizliğini bir parametre olarak tanımlar ve aldığı değerler bir gösterge değişkeni ile belirlenir. Ayrıca bu parametre ve her bir model parametresinin oluşturacağı bileşik olasılık uzayının bir formundan örneklemler almak yoluyla çalışır (Carlin ve Chib (1995); Green (1995); Dellaportas ve ark. (1998); Godsill (1997)). Bazıları ise her bir modelin model olasılıklarına eşit olan marjinal olabilirlikleri doğrudan tahmin etmeye çalışır (Chib (1995); Chib ve Jeliazkov (1999)). Bileşik model-parametre uzayı tarama metodlarından Carlin ve Chib (1995) yaklaşımı sonsal model olasılıklarını daha doğrudan ve kolayca hesaplattığından bu bölümde anlatılacaktır.

Model göstergesi  $M$ , birbirine rakip  $k$  sayıda modeller kümesi olmak üzere, gözlemlenen verinin ( $y$ ), model  $j$  ( $j \in M$ ) tarafından üretildiği varsayalım. Bu modele ait bilinmeyen parametre vektörü ise  $\theta_j$  olsun. Tüm modellerde yer alan belirli  $\theta_j$ 'lerin birleşimi ise  $\theta$  ile gösterilsin. Model parametresinin  $M = j$  olduğu  $M_j$  ile gösterilirse, bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$P(y, \theta, M_j) = P(y / \theta, M_j) P(\theta / M_j) P(M_j)$$

olup,  $k$  rakip model için ( $j=1,2,\dots,k$ ) bu eşitlik,

$$P(y, \theta, M_j) = P(y / \theta_j, M_j) \left\{ \prod_{j=1}^k P(\theta_j / M_j) \right\} P(M_j) \quad (3.8)$$

olarak ifade edilmektedir. Burada,

$$P(M_j) : j. modelin önsel olasılığı \left( \sum_{j=1}^k P(M_j) = 1 \right)$$

$$P(\theta_j / M_j) : j. modelde yer alan parametrelerin önsel olasılıkları$$

$$P(y / \theta_j, M_j) : j. modele uyan olabilirlik fonksiyonu$$

Carlin ve Chib yaklaşımının temel prensibi, model göstergesi  $M$  yardımıyla iki modelin örneklem uzayını birbirine bağlamak ve böylece MCMC örneklemesinin bu bileşik uzayda dolaşmasını sağlamaktır. Model göstergesi  $M$ , bir Gibbs serisinde örneklenebileceğinden,  $j$ . modele ilişkin sonsal model olasılığı olan  $P(M_j / y)$ , bir görelî sıklık olarak elde edilebilir. Bir başka deyişle, simülasyon örneklemesinin  $j$ 'yi ziyaret sayısı tüm örnekleme sayısına orantılanarak bu olasılık hesaplanabilir.

Carlin ve Chib'in yaklaşımını kullanabilmek için aşağıdaki varsayımlar sağlanmalıdır:

- $y, M_j$  ( $j=1,2,\dots,k$ ) modelinin doğruluğu varsayımıyla diğer modellerin parametreleri  $\theta_{k \neq j}$ 'den bağımsızdır.
- $k$  modelin parametreleri  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ , model göstergesi  $M$ 'den bağımsızdır.

Gibbs örneklemesinin uygulanabilmesi için her  $\theta_j$  ve  $M$ 'nin tüm koşullu sonsal dağılımlarına ihtiyaç duyulmaktadır.

$$P(\theta_j / \theta_{i \neq j}, M, y) \propto \begin{cases} P(y / \theta_j, M_j) P(\theta_j / M_j) & ; M = j \\ P(\theta_j / M \neq j) & ; M \neq j \end{cases}$$

Burada;

$M = j$  olduğunda tüm koşullu olasılıklar geçerli olan model  $j$ 'den üretilir.

$M \neq j$  olduğunda ise pseudo (sözde) önselinden ( $P(\theta_j / M \neq j)$ ) üretilir.

Pseudo önseli gerçekten bir önsel dağılım değildir. Sadece bileşik model uzayını tanımlamak için gereklidir. Genellikle modellerin ayrı ayrı analiz edilmeleri sonucu elde edilecek sonsal model parametre özetleri ya da klasik yaklaşımdaki en çok olabilirlik tahmin değerleri kullanılarak pseudo önsel dağılımları oluşturulur. Gibbs örneklemesi sonucunda modellere ilişkin sonsal model olasılıkları,

$$P(M_j / y) = \frac{M^{(g)} = j \text{ nin sayısı}}{M^{(g)} \text{ nin toplam sayısı}}, j = 1, 2, \dots, k$$

şeklinde hesaplanır. Burada  $M^{(g)}$ , Gibbs iterasyon sayısıdır.

Bu yaklaşımla hesaplanan sonsal model olasılıkları, modeller için tercih yapmakta kullanılır. Bu olasılıklar Eş. 3.3'te verildiği gibi oranlanır ve önsel olasılıklar oranı ile birleştirilirse, modellerin ikişerli kıyaslamaları Bayes faktörü yardımıyla yapılabilir.

### 3.2. Belirli Modellerin Kıyaslanmasında BIC Yaklaşımı

İç içe geçmiş (nested) modellerin yanı sıra iç içe geçmemiş (non-nested) modellerin karşılaştırılması için geliştirilen ölçütlerden biri BIC'dir. SBC ya da SBIC (Schwarz Ölçütü) olarak da bilinen bu ölçüt, 1978 yılında Gideon E. Schwarz tarafından geliştirilmiş olup farklı parametre sayılarına sahip parametrik modellerin kıyaslanmasında kullanılan bir ölçüttür ve

$$BIC = -2 \ln P(y/\hat{\theta}) + p \ln(n) \quad (3.9)$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitlikte;  $y$ = gözlenen veri,  $n$ = örnek genişliği,  $p$ = tahmin edilen parametre sayısı ve  $\hat{\theta}$ = parametre vektörünün en çok olabilirlik fonksiyonunun maksimum değerini ifade etmektedir. (Eğer tahmin edilen model bir doğrusal regresyon modeliye  $p$ , sabiti de içeren regresyon parametrelerinin sayısıdır.)

Ayrıca model hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı altında BIC değeri,

$$BIC = n \ln \left( \frac{RSS}{n} \right) + p \ln(n) \quad (3.10)$$

eşitliği yardımıyla da hesaplanabilmektedir (Liddle, 2007). Bu eşitlikte yer alan  $RSS$ , tahmin edilen modelin artık kareler toplamıdır.

Tahmin edilen herhangi iki model göz önüne alındığında, daha küçük BIC değerli model tercih edilmelidir. BIC, artık kareler toplamı ve tahmin edilen parametre sayısının artan bir fonksiyonudur. Artık kareler toplamının artmasını sağlayacak olan açıklanamayan değişiklikler BIC'nin değerini arttırır. Bu sebeple daha küçük BIC'li model veriye daha iyi uyum sağlayacaktır.



BIC'nin Bayes faktörü ile arasında teorik bir bağlantı vardır. Bu bağlantı,

$$BF_{ij} = \frac{e^{-\frac{1}{2}BIC_i}}{e^{-\frac{1}{2}BIC_j}} \quad (3.11)$$

olarak ya da

$$BF_{ji} = \frac{e^{\frac{1}{2}BIC_i}}{e^{\frac{1}{2}BIC_j}} \quad (3.12)$$

şeklinde ifade edilebilir (Burnham, 2004). Burada i ve j, model indisleri,  $BIC_i$  ve  $BIC_j$  sırasıyla model i ve model j'nin BIC değerleri olup;  $BF_{ij}$ , model j'ye karşı model i lehine hesaplanan Bayes faktörü değeri,  $BF_{ji}$  ise model i'ye karşı model j lehine hesaplanan Bayes faktörü değeridir. Bu eşitliklerden görüldüğü gibi modellere ilişkin hesaplanan BIC değerleri kullanılarak da Bayes faktörü değeri elde edilebilmektedir.

Eş. 3.11 ve 3.12 eşitliklerinin her iki tarafının ln'nin alınması sonucunda yaklaşık olarak,

$$-2 \ln BF_{ij} \cong BIC_i - BIC_j \quad (3.13)$$

ve

$$2 \ln BF_{ji} \cong BIC_i - BIC_j \quad (3.14)$$

eşitlikleri elde edilecektir.

### 3.3. DIC Yardımıyla Bayesci Model Seçimi

Klasik bir modelleme çalışmasında model karşılaştırması yapılmak istendiğinde, veri ile modelin uyumunun ölçüsü olabilecek bir sapma istatistiği ve modeldeki parametre sayısının belirlediği model karmaşıklığının belirlenmesi gerekir. Daha karmaşık modellerde, bir başka deyişle modeldeki parametre sayısı arttıkça daha iyi bir uyum elde edileceğinden, model karşılaştırması bu iki değer arasında denge kurularak yapılmalıdır. Akaike'nin çalışmasını (1973) takiben önerilen yollar, verinin bir gelecek tekrüründe beklenen kaybın bir ölçüsünün minimize edilmesine dayandırılır (Efron, 1986; Burnham ve Anderson, 1998). Ancak genellikle parametreleri gözlemlerden sayıca üstün olan karmaşık hiyerarşik modellerde bu yollar doğrudan uygulanamaz (Gelfand ve ark., 1992). Bu gibi zorluklar yeni geliştirilen alternatif bir Bayesci model seçim ölçütünün ortaya çıkmasına neden olmuştur. Bu ölçüt, Spiegelhalter ve ark. (2002) tarafından geliştirilen ve son zamanlarda kullanımı yaygın olan DIC'dir.

DIC, iki bileşenden oluşmaktadır.

$$\begin{array}{ccc} DIC & = & Uyum\ iyiliği & + & Karmaşıklık \\ & & \Downarrow & & \Downarrow \\ & & Kuramsal\ bir\ model\ ile & & Artan\ model\ parametre \\ & & örneklem\ verisi\ arasındaki & & sayısı\ için\ bir\ sınırlama\ terimi \\ & & uyumun\ bir\ ölçüsü & & \end{array}$$

Bu bileşenlerin hesabı Dempster (1974) tarafından tanımlanan klasik sapma ifadesine dayalıdır.  $y$  örneklem verisi,  $\theta$  ise veriyi ürettiği varsayılan modelin parametresi olmak üzere

$$Sapma = D(\theta) = -2 \log P(y/\theta) + 2 \log P(y) \quad (3.15)$$

dır. Burada  $P(y/\theta)$ ,  $\theta$  parametresine bağlı olabilirlik fonksiyonu olup  $P(y)$  ise verinin marjinal olasılığıdır. ( $P(y) = \int_{\theta} P(\theta)P(y/\theta)d\theta$ )

DIC'nin birinci bileşeni model yeterliliğinin bir tahmini olup, sapmanın ( $D(\theta)$ ) sonsal dağılımının ortalamasıdır. Bu ölçü Dbar şeklinde ifade edilir ve  $\overline{D(\theta)}$  ile gösterilir.

$$\begin{aligned} Dbar &= \overline{D(\theta)} = E_{\theta/y} [D(\theta)] \\ &= E_{\theta/y} [-2 \log P(y/\theta)] \\ &= \frac{1}{C} \sum_{c=1}^C -2 \log_e P(y/\theta_c) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Burada C, Burn-in periyodu çıkarılmış MCMC simülasyonlarının sayısı olup  $\log_e P(y/\theta_c)$  ise olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritmasıdır (Spiegelhalter ve ark., 2002). Bu eşitlikten görüldüğü gibi Dbar, Gibbs örneklemesinin bir iterasyonunun sonunda hesaplanmış log-olabilirliklerin ortalamasıdır.

DIC eşitliğinde yer alan ikinci bileşen ise,  $\theta$ 'nın sonsal ortalamasındaki ( $\bar{\theta}$ ) sapmaya dayalıdır. Dhat diye adlandırılan ve  $D(\bar{\theta})$  ile gösterilen bu ifade

$$Dhat = D(\bar{\theta}) = D(E_{\theta/y} [\theta]) \quad (3.17)$$

dir. Bir başka deyişle  $\theta$ 'nın sonsal ortalamasını kullanarak hesaplanmış log-olabilirliktir.

Veriyle en iyi uyumu sağlayan modelde yer alması gereken etkin parametre sayısı olarak ölçülen model karmaşıklığı pD ile gösterilir ve

$$pD = Dbar - Dhat = \overline{D(\theta)} - D(\bar{\theta}) \quad (3.18)$$

eşitliği ile elde edilir. Burada pD, modeldeki parametrelerin sayısı için bir sınırlama sağlar ve yaklaşık olarak modeldeki parametrelerin sayısı ile ilgilendir. Önsel bilgi ve veri arasında önemli bir fikir ayrılığı (çelişki) olduğu zaman ya da bir parametre için sonsal dağılımın çok zayıf özet istatistiği ve çok büyük sapma vermesi durumlarında pD'nin değeri negatif olacaktır.

Bu tanımları kullanarak DIC,

$$DIC = Dbar + pD = Dhat + 2pD$$

olarak ya da

$$DIC = \overline{D(\theta)} + pD = D(\bar{\theta}) + 2pD \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanabilir (Spiegelhalter ve ark., 2002).

Literatürde, modeldeki parametre sayısı aynı kalmak koşuluyla, model parametrelerinin yeniden ifadelendirilmesi sonucu pD'nin değerinde büyük değişiklikler olabileceği konusunda yapılan uyarılar nedeniyle; Spiegelhalter ve Bull (1997) ve Gelman ve ark. (2004) tarafından pD yerine sapmanın sonsal varyansının yarısının bir ölçümü olan pV'nin kullanımı önerilmiştir. Matematiksel olarak,

$$pV = 0,5 Var_{\theta|y}(D(\theta)) \quad (3.20)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Böylece DIC,

$$DIC = Dbar + pV$$

eşitliği şeklinde de kullanılabilir.

### 3.3.1. Model Seçiminde DIC Yorumlanması

Veriyle uyumlu en iyi modelin olabilirliğinin büyük değerli olması, -2log-olabilirlik şeklinde tanımlı  $\overline{D(\theta)}$ 'nin daha küçük değerlere ulaşmasını sağlayacaktır. Bu nedenle DIC değeri kullanılarak modellerin karşılaştırılmasında küçük DIC'li modellerin veri tarafından desteklenen rakip modeller olduğu sonucuna varılabilir.

Bunlardan en iyi modeli bulmak için küçük DIC'li modellerden en küçük değerli olan seçilmelidir. Küçük DIC'li modellerin birbirine yakın değerli olması durumunda bu seçimi yapmak oldukça zor olabilir. Böyle durumlarda DIC değerleri arasındaki farklar incelenmelidir.

Yaklaşık olarak 10'dan daha fazla farklar daha yüksek DIC'li modelin varlığını inkar edebilir. 5 ile 10 arasındaki farklılıklar önemlidir. Fakat DIC'ler arasındaki fark 5'ten daha az ise ve modeller çok farklı sonuçlar çıkarıyorsa o zaman en düşük DIC'li modeli bildirmek yanıltıcı olabilir.

DIC değeri daima pozitif değerli olmayıp negatif sonuçlarda verebilmektedir. Bu durumda DIC hesabında etkin olan sapmanın ( $D(\theta)$ ) değeri incelenerek karar verilebilir. Modelin veriye ne kadar uyumlu olduğunun bir ölçüsü olan sapma,  $P(y/\theta)$  olabirlik değerine bağlı olarak farklı değerler almaktadır.

Olabilirlik  $> 1 \rightarrow$  sapma negatif

Olabilirlik  $= 1 \rightarrow \log 1=0$  olur ve sapma, "0"

$0 < \text{Olabilirlik} < 1 \rightarrow$  sapma pozitif

$P(y/\theta)$  olabilirliği eğer küçük bir standart sapmaya sahipse 1'den büyük olabilir. Bu durumda sapma ( $D(\theta)$ ) negatif çıkacak ve DIC de negatif sonuç verecektir (Spiegelhalter, 2006b).

Birbirine rakip modeller her bir modele ait DIC model ağırlıkları kullanılarak da karşılaştırılabilmektedir. Model ağırlıkları, rakip modellerin kıyaslanmasında kullanılacak model olasılıkları olarak düşünülebilir. DIC farklarından türetilmiş ağırlıklar kullanılarak her bir modelin ağırlığı tahmin edilebilir. DIC farkları ( $D_a$ ),

$$D_a = DIC_a - DIC_{\min}$$

şeklinde ifade edilir. Burada  $DIC_{\min}$ , model setindeki en küçük değerli DIC değeri olup "a" ise model indisidir. ( $a=1,2,\dots, M$  ve  $M =$  rakip model sayısı)

Bu farklar kullanılarak  $a$  modelinin olasılığı bir başka deyişle DIC ağırlığı,

$$P(M_a) = \frac{e^{-(D_a/2)}}{\sum_{b=1}^M e^{-(D_b/2)}} \quad (3.21)$$

eşitliği yardımıyla hesaplanır (Wilberg ve Bence, 2008).

$P(M_a)$  model olasılıklarının görelî değerleri tamamen DIC değerleri arasındaki farklarla ilişkilidir. Spiegelhalter ve ark. (2002), minimum değerli DIC değeri ile arasında 2'den daha az fark olan modellerin eşit derecede iyi model olarak dikkate alınması gerektiğini, 2-7 değerleri arasında değişen modellerin ise daha az desteğe sahip modeller olduğunu önermiştir. Bu nedenle, modellerin sayısına bağlı olan bir eşik (threshold) değerinden (2, 5 ya da 7) daha düşük DIC'li tüm modeller dikkate alınmalıdır.

## 4.BULGULAR

Bu bölümde Bayes faktörünün hipotez testlerinde ve model seçimindeki kullanımı üç uygulama ile sunulmuştur. Uygulama 1’de Bayes faktörünün tek yanlı ve çift yanlı hipotez testindeki kullanımı, uygulama 2’de ise herhangi bir veri setinin ait olduğu dağılım ailesini belirlemede bayes faktörü kullanımı gösterilmiştir. Bu uygulamalara ek olarak uygulama 3’te birbirine rakip iki kuantal modelin kıyaslanması bayes faktörü değeri ve BIC, DIC ölçütleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

### 4.1. Uygulama 1 – Hipotez Testlerinde Bayes Faktörü

#### 4.1.1. Tek Yanlı Hipotez Testi

Bir kişi doğru ağırlığını belirlemek amacıyla her seferinde değişik sonuç veren bir tartı yardımıyla ölçümler yapmıştır. Bu ölçümlerin  $\mu$  ortalamalı ve  $\sigma^2=(1.35)^2$  varyanslı normal dağılıma sahip olduğu varsayılmaktadır. Bu kişi doğru ağırlığının 78.75 kg’dan fazla olup olmadığını test etmek amacıyla kendini 10 kez tartarak kg cinsinden ağırlık sonuçlarını aşağıdaki gibi elde etmiştir (Albert, 2009).

Ağırlık Sonuçları ( $y_i$ ): 81.9 77.4 77.85 79.2 79.2 81 77.85 78.3 80.55 78.75

Test edilmek istenen hipotezler

$$H_0: \mu \leq 78.75 \quad , \quad H_1: \mu > 78.75$$

şeklindedir.

Kişi doğru ağırlığının ortalamasının ( $\mu$ ) geçen yılki ağırlığı olan 76.5 değeri  $\pm$  2.25 standart sapmaya sahip olduğuna inanmaktadır. Normal dağılımlı bir kitlenin  $\mu$  parametresi için eşlenik önsel dağılımı Normal dağılım olup kişinin inancı:

$$\begin{aligned} P(\mu) &\sim N(m, \tau^2) \\ &\sim N(76.5, (2.25)^2) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Hangi hipotezin gerçekleşmesinin daha olası olduğuna, elde edilen veriler ve ön bilgi yardımıyla, hipotezlerin sonsal olasılıkları hesaplanarak karar verilebilir. Bu amaçla ilk önce önsel olasılıklar ve Bayes faktörü elde edilmelidir.

$H_0$  hipotezinin önsel olasılığı :

$$\pi_0 = P(H_0) = P(\mu \leq 78.75) = P\left(\frac{\mu - 76.5}{\sqrt{5.0625}} \leq \frac{78.75 - 76.5}{\sqrt{5.0625}}\right) = P(Z \leq 1) = 0.8413$$

$H_1$  hipotezinin önsel olasılığı :

$$\pi_1 = P(H_1) = 1 - P(H_0) = 1 - 0.8413 = 0.1587$$

$$H_0 \text{ hipotezinin önsel odds'u} = \frac{\pi_0}{\pi_1} = \frac{0.8413}{0.1587} = 5.30$$

Elde edilen bu değerlere bakarak ağırlık ölçümleri gözlemlenmeden önce  $H_0$  hipotezinin doğruluğunun  $H_1$  alternatif hipotezinden 5 kat daha muhtemel olduğu söylenebilir.

$H_0$  hipotezinin sonsal olasılığının hesaplanabilmesi için kişinin doğru ağırlığı olan  $\mu$ 'nün sonsal dağılımının elde edilmesi gerekmektedir. Eşlenik önsel dağılımın kullanımı ile bilinmeyen  $\mu$  parametresinin sonsal dağılımının aşağıdaki ifadesinde

$$P(\mu | y) \sim N\left(\frac{\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 m}{\tau^2 n + \sigma^2}, \frac{\sigma^2 \tau^2}{\sigma^2 + n \tau^2}\right)$$

örneklem ortalaması  $\bar{y} = 79.2$ ,  $\sigma = 1.35$ ,  $m = 76.5$  ve  $\tau = 2.25$  değerleri yerine konularak, sonsal dağılım parametreleri

$$P(\mu | y) \sim N(79.106, 0.1759)$$

şeklinde belirlenir.



Hipotezlerin sonsal odds'u Eş. 3.6'yı kullanarak

$$\begin{aligned}\frac{p_0}{p_1} &= \frac{P(H_0 / y)}{P(H_1 / y)} = \frac{P(\mu \leq 78.75 / y)}{P(\mu > 78.75 / y)} \\ &= \frac{P(Z \leq \frac{78.75 - 79.106}{\sqrt{0.1759}})}{P(Z > \frac{78.75 - 79.106}{\sqrt{0.1759}})} \\ &= \frac{P(Z \leq -0.85)}{P(Z > -0.85)} = \frac{0.1977}{1 - 0.1977} = 0.2467\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.  $H_1$  hipotezine karşı  $H_0$  hipotezi lehine Bayes faktörü Eş.3.3 yardımıyla;

$$BF_{01} = \frac{\text{Sonsal Odds}}{\text{Önsel Odds}} = \frac{p_0 / p_1}{\pi_0 / \pi_1} = \frac{0.2467}{5.30} = 0.0465$$

olarak elde edilir. Bu değer Çizelge 3.1'den görüldüğü gibi  $0.01 \leq BF_{01} < 0.10$  aralığında yer alması sebebiyle  $H_0$  hipotezinin doğru olmadığına dair güçlü bir delil olduğu söylenebilir. Bir başka deyişle  $H_0$ 'ın doğru olma ihtimali düşüktür.

Bu ihtimal, Eş. 3.7 yardımıyla,

$$p_0 = \frac{(0.8413)(0.0465)}{(0.8413)(0.0465) + 1 - (0.8413)} = 0.1979$$

olarak hesaplanabilir.

Bu değere bakarak kişi, ağırlığının en çok 78.75 kg olmasının muhtemel olmadığı sonucuna varabilir. Bu sonuç kişinin gerçek ağırlığının 78.75 kg'dan fazla olduğunu göstermektedir.

#### 4.1.2. Çift Yanlı Hipotez Testi

Bölüm 4.1.1’de yer alan hipotez testi çalışmasındaki hipotezler,

$$H_0 : \mu = 76.5$$

$$H_1 : \mu \neq 76.5$$

şeklinde değiştirilsin.

Bu çift yanlı hipotez testinde, kişinin gerçek ağırlık değerinin 76.5 olduğuna olan inancının ne kadar olası olduğunu hesaplayabilmek amacıyla  $H_0$  ve  $H_1$  hipotezlerinin gerçekleşeceklerine dair inanç olasılıkları  $P(H_0) = P(H_1) = 0.5$  şeklinde eşit varsayılın.

Bu durumda Bayes faktörü, sonsal odds’a eşit olacaktır:

$$BF_{01} = \left( \frac{P(y/H_0)}{P(y/H_1)} \right) = \frac{P(H_0/y)}{P(H_1/y)}$$
$$BF_{01} = \frac{P(y/\mu = \mu_0)}{P(y/\mu \neq \mu_0)} = \frac{P(y/\mu_0)}{\int_{\mu \neq \mu_0} P(\mu)P(y/\mu)d\mu}$$

Olabilirlik fonksiyonu ve  $\mu$  parametresinin eşlenik önsel dağılımı sırasıyla,  $P(y/\mu) \sim N(\mu, \sigma^2)$  ve  $P(\mu) \sim N(\mu_0, \tau^2)$  şeklinde seçilirse,  $\mu_0$  ve  $\tau^2$  hiperparametreleri cinsinden Bayes faktörü hesabı için gerekli analitik işlemlerin (Ek-1) yapılması sonucunda,  $H_0$  hipotezi lehine Bayes faktörü,

$$BF_{01} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \exp\left\{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{y} - \mu_0)^2\right\}}{(\sigma^2/n + \tau^2)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2(\sigma^2/n + \tau^2)}(\bar{y} - \mu_0)^2\right\}}$$

eşitliği şeklinde elde edilir.

Eğer kişinin geçen yıla göre ağırlığı değiştiyse,  $H_1$  alternatif hipotezi altındaki bilginin önsel dağılımının  $\mu_0 = 76.5$  ortalamalı ve  $\tau$  standart sapmalı bir normal dağılım olduğu varsayılabilir.  $\tau$  değerini elde etmek için  $\mu$ 'nün alternatif değerlerinin % 95'inin  $\mu_0 \pm 2\tau$  sınırları içerisinde yer alacağı söylenebilir. Kişi doğru ağırlığının geçen yılki ağırlığı 76.5'den 2.25 kg daha az ya da daha fazla olan (74.25 - 78.75) aralığında yer alabileceğine inanmaktadır. Bu durumda  $\mu$ 'nün alternatif değerlerinin genişliği  $78.75 - 74.25 = 4.5$  olup  $4\tau = 4.5$ 'den  $\tau = 1.125$  olarak elde edilir.

$H_0$  hipotezi lehine Bayes faktörü ;

$$BF_{01} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{1.35} \exp \left\{ -\frac{10}{2 \cdot (1.35)^2} (79.2 - 76.5)^2 \right\}}{\left( \frac{(1.35)^2}{10} + (1.125)^2 \right)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2 \left( \frac{(1.35)^2}{10} + (1.125)^2 \right)} (79.2 - 76.5)^2 \right\}} = 0.000000072$$

olarak hesaplanır . Bu değer, Çizelge 3.1'e göre  $BF_{01} = 0.000000072 < 0.01$  olduğundan  $H_0$  hipotezinin doğru olmadığına dair kesin delil olduğu söylenebilir.

Ayrıca  $H_0$  hipotezinin sonsal olasılığı ( $p_0$ ), önsel olasılık ve elde edilen Bayes faktörü değeri kullanılarak Eş. 3.7 yardımıyla,

$$p_0 = \frac{0.5 (0.000000072)}{0.5 (0.000000072) + 1 - 0.5} = 0.0000000719$$

şeklinde hesaplanabilir.

Bu değer, kişinin doğru ağırlığının 76.5 kg'a eşit olması ihtimalinin olabildiğince zayıf olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, kişinin bu yılki doğru ağırlığının 76.5 kg olmadığı yönünde bir sonuca varılmalıdır.

## 4.2. Uygulama 2 – Dağılım Ailesini Belirlemede Bayes Faktörü

Geleneksel model karşılaştırma yaklaşımlarının aksine, Bayes faktörü kullanarak ortak parametresi olmayan iki model kıyaslaması kolayca yapılabilmektedir. Bunu örneklendirmek amacıyla, dağılımı bilinmeyen bir kitleden  $n$  genişliğinde bağımsız bir örneklem çekildiği varsayalım. Örneklem değerleri  $X_1, X_2, \dots, X_n$ 'nin bilinmeyen ' $\mu$ ' ortalamalı Poisson dağılımlı bir kitleden geldiği iddiasına karşılık dağılımın başarı olasılığı ' $p$ ' olan bir Geometrik dağılımı olduğuna dair bir iddia vardır.  $Y_i = X_i + 1$  olmak üzere karşılaştırılacak modeller,

$$\text{Model 1 : } X_i \sim \text{Poi}(\mu)$$

$$\text{Model 2 : } Y_i \sim \text{Geo}(p)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada hangi modelin veri setinde yer alan değişkenlere ait en uygun model olduğuna karar vermek için Bayes faktörü kullanılarak kıyaslama yapılabilir.

Modeller içerisinde bilinmeyen parametreler ( $\theta_1 = \mu, \theta_2 = p$ ) olması ve her bir modele eşit seçilme şansı verilmesi ( $P(M_1) = P(M_2) = 0.5$ ) sebebiyle model 2'ye karşı model 1 lehine Bayes faktörü :

$$BF_{12} = \frac{P(x/M_1)}{P(y/M_2)} = \frac{P(M_1/x)}{P(M_2/y)} = \frac{\int_{\theta_1} P(x/\theta_1, M_1)P(\theta_1/M_1)d\theta_1}{\int_{\theta_2} P(y/\theta_2, M_2)P(\theta_2/M_2)d\theta_2}$$

ile hesaplanır.

Değişkenler hakkında geçmişten ya da öznel bir bilgiye sahip olunmadığı için modellerdeki bilinmeyen parametrelerin önseli olarak eşlenik önsel yerine Jeffreys'in önseli kullanılacaktır. Olabilirlik fonksiyonu  $L = \prod_{i=1}^n P(x_i/\theta)$  olmak üzere, bilgi miktarı

$$I(\theta) = \left[ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right) \right] \text{ şeklinde gösterilirse, bilinmeyen } \theta \text{ parametresi için Jeffreys'in}$$

önsel dağılımı  $P(\theta) \propto \sqrt{I(\theta)}$  olarak seçilir (Lee, 1997).

Bu bilgi kullanılarak,

$$\theta_1 = \mu \text{ parametresi için Jeffreys önseli } (P(\theta_1 / M_1)) \propto \mu^{-1/2}$$

$$\theta_2 = p \text{ parametresi için Jeffreys önseli } (P(\theta_2 / M_2)) \propto p^{-1}(1-p)^{-1/2}$$

olarak elde edilir.

Bilinmeyen parametrelere ilişkin elde edilen Jeffreys önsellerini;  $\mu$  parametrelili Poisson ve  $p$  parametrelili Geometrik dağılımının olabilirlik fonksiyonlarını kullanarak model 2'ye karşı model 1 lehine Bayes faktörü,

$$BF_{12} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{\mu^{\sum_{i=1}^n X_i}}{\prod_{i=1}^n X_i!} \exp(-n, \mu) \mu^{-1/2} d\mu}{\int_0^1 p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^n X_i} p^{-1} (1-p)^{-1/2} dp} = \frac{1}{\prod_{i=1}^n X_i!} \left[ \int_0^{\infty} \mu^{\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{2}} \cdot \exp(-n, \mu) d\mu \right]$$

$$= \frac{1}{\prod_{i=1}^n X_i!} \frac{\Gamma(\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2}, n)}{B(n, \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(n + \sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2})}{\prod_{i=1}^n X_i! n^{\sum_{i=1}^n X_i + \frac{1}{2}} (n-1)!}$$

şeklinde elde edilir.

Ayrıca farklı önsellerin Bayes faktörü hesap değerine etkisini incelemek amacıyla, Jeffreys önseline ilaveten, Geometrik dağılımın  $p$  parametresi için eşlenik önsel olan Beta( $\alpha_1, \beta_1$ ) ve Poisson dağılımının  $\mu$  parametresi için eşlenik önsel olan Gamma( $\alpha_2, \beta_2$ ) seçenekleri de incelenmiştir. Çalışmada, bu dağılımların parametreleri (hiperparametreler) olan  $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2$  ve  $\beta_2$ 'ye aşağıdaki gibi farklı değerler verilerek elde edilen farklı önseller ile analizler tekrarlanmıştır.

Eşlenik Önsel-1 : Beta(3,6) , Gamma(6,3)  $\begin{cases} \rightarrow E(p) = 0.33 , V(p) = 0.028 \\ \rightarrow E(\mu) = 2 , V(\mu) = 0.67 \end{cases}$

Eşlenik Önsel-2 : Beta(30,60) , Gamma(60,30)  $\begin{cases} \rightarrow E(p) = 0.33 , V(p) = 0.0025 \\ \rightarrow E(\mu) = 2 , V(\mu) = 0.067 \end{cases}$

Eşlenik önseller kullanılarak marjinal olasılıklar,

$$P(x/M_1) = \frac{\Gamma(n\bar{x} + \alpha_2) \beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2) (n + \beta_2)^{n\bar{x} + \alpha_2}} \frac{1}{\prod_{i=1}^n x_i!}$$

$$P(y/M_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\beta_1)} \frac{\Gamma(n + \alpha_1) \Gamma(n\bar{x} + \beta_1)}{\Gamma(n + n\bar{x} + \alpha_1 + \beta_1)}$$

şeklinde bulunur.

Model 2'ye karşı model 1 lehine Bayes faktörü,

$$\begin{aligned} BF_{12} &= \frac{P(x/M_1)}{P(y/M_2)} = \frac{\frac{\Gamma(n\bar{x} + \alpha_2) \beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2) (n + \beta_2)^{n\bar{x} + \alpha_2}} \prod_{i=1}^n x_i!}{\frac{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1)}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\beta_1)} \frac{\Gamma(n + \alpha_1) \Gamma(n\bar{x} + \beta_1)}{\Gamma(n + n\bar{x} + \alpha_1 + \beta_1)}} \\ &= \frac{\Gamma(n\bar{x} + \alpha_2) \beta_2^{\alpha_2} \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\beta_1) \Gamma(n + n\bar{x} + \alpha_1 + \beta_1)}{\Gamma(\alpha_2) (n + \beta_2)^{n\bar{x} + \alpha_2} \prod_{i=1}^n x_i! \Gamma(\alpha_1 + \beta_1) \Gamma(n + \alpha_1) \Gamma(n\bar{x} + \beta_1)} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Model 2'ye karşı model 1 lehine elde edilen Bayes faktörü hesap formüllerinden farklı örneklem genişlikleri (n), ortalama değerleri ( $\bar{X}$ ) ve önsel dağılımlar kullanılarak elde edilen değerler Çizelge 4.1'de sunulmuştur.

**Çizelge 4.1.** Farklı örneklem genişlikleri, ortalama örneklem değerleri ve önsel dağılımlar kullanarak elde edilen  $BF_{12}$  değerleri

			Jeffreys Önsel	Eşlenik Önsel1 $\alpha_1 = 3, \beta_1 = 6$ $\alpha_2 = 6, \beta_2 = 3$	Eşlenik Önsel2 $\alpha_1 = 30, \beta_1 = 60$ $\alpha_2 = 60, \beta_2 = 30$
	n=2	$(X_1 = X_2 = 0)$	$\bar{X} = 0$	0.940	0.350
	$(X_1 = X_2 = 2)$	$\bar{X} = 2$	3.181	3.362	3.338
	$(X_1 = X_2 = 4)$	$\bar{X} = 4$	5.435	2.744	1.998
n=4	$(X_1 = .. = X_4 = 0)$	$\bar{X} = 0$	0.969	0.204	0.039
	$(X_1 = .. = X_4 = 2)$	$\bar{X} = 2$	10.875	11.260	11.145
	$(X_1 = .. = X_4 = 4)$	$\bar{X} = 4$	31.616	11.800	4.610
n=10	$(X_1 = .. = X_{10} = 0)$	$\bar{X} = 0$	0.988	0.100	0.00078
	$(X_1 = .. = X_{10} = 2)$	$\bar{X} = 2$	410.419	420.33	414.626
	$(X_1 = .. = X_{10} = 4)$	$\bar{X} = 4$	5897.018	1605.33	105.054

Çizelge 4.1’de model 2’ye karşı model 1 lehine hesaplanan bayes faktörü değerleri ( $BF_{12}$ ) 1’den büyükse model 1’e (Poisson dağılımı), küçükse model 2’ye (Geometrik dağılım) destek verildiğini göstermektedir.

Verinin niteliğine (yapısına) göre yapılan incelemeler sonucunda;  $\bar{X} = 0$  olduğunda, örneklem genişliği arttıkça her üç önsel de Geometrik dağılıma destek vermekte olup önseller arası tek fark, dağılıma olan desteğin gücünde meydana gelen değişimdir.  $\bar{X} = 2$  ve  $\bar{X} = 4$  durumlarında ise gittikçe 1’den uzaklaşan değerler elde edilmesi sebebiyle Poisson dağılımına desteğin gücünde artış yaşanmıştır.

Örneklem genişliği büyüdükçe, seçilen model değişmemiş ancak modelin doğruluğuna dair inancın gücü büyük miktarda artmıştır. Farklı önsellerin seçimi ise model seçiminde bir farklılık yaratmıştır. Verinin niteliğinin değişmesi ve örneklem genişliğinin artması durumunda Jeffreys önsel kullanımı doğru modeli seçme yönünde tutarlı sonuçlar vermiş olup eşlenik önsel kullanımı ise yanlış modeli seçmeye yönelik sonuçlar elde edilmesini sağlamıştır.

### 4.3. Uygulama 3 – Model Seçiminde Bayes Faktörü, BIC ve DIC

İstatistiksel modellemenin özel bir formu, kuantal modelleme adı altında, pek çok farklı bilimsel disiplinlerde karşımıza çıkmaktadır. Bir yarı-parametrik modelleme örneği olan kuantal modellemede; verilen herhangi bir örneklem verisinin, rastgele hataya maruz kalmış bir *temel birimin* ya da *kuantumun* tamsayı katları olarak ifade edilip edilemeyeceği sorusuna cevap aranmaktadır. Bu sorgudaki en önemli nokta böyle bir kuantum değerinin var olup olmadığının önceden bilinmemesidir. Ancak böyle bir değer varsa veriden tahmin edilmek yoluyla hesaplanmalıdır (Acar, 2000).

$\{Y_i\}_{i=1}^n$  örneklem verisi olmak üzere matematiksel olarak basit kuantum modeli

$$Y_i = m_i q + \varepsilon_i \quad ; \quad i=1,2,\dots,n \quad ; \quad m_i \in N \quad \text{ve} \quad 0 \leq \varepsilon_i < q$$

olarak ifade edilir. Burada  $q$  = kuantum,  $m_i = \frac{Y_i}{q}$ , 'nun tam kısımları olan tamsayı

çarpanları,  $\varepsilon_i$  ise hata terimidir. Dikkat edilecek olunursa,  $m_i$  katsayıları  $\frac{Y_i}{q}$  bölümünün

en yakın tamsayıya yuvarlanması yoluyla bulunduğu,  $-\frac{q}{2} \leq \varepsilon_i < \frac{q}{2}$  olacaktır. Eğer

veri için kuantal model uygunsa  $\varepsilon_i$  hata değerleri sıfır civarında ve  $\frac{q}{2}$ 'ye kıyasla küçük değerler olacaktır.

Kuantum modelleme ilk olarak, İngiltere, İskoçya ve Wales'de pek çok sayıda bulunan Stonehenge isimli, dairesel formdaki tarihi taş dikitlerin yarıçap ölçülerinin Thom (1955) tarafından ölçülmesi sonucunda ortaya çıkmıştır. Megalitik dönemi insanların bu yapıtları oluştururken temel bir ölçü birimi (kuantum) kullanmış olabilecekleri iddiasını test etmek amacıyla, yarıçap ölçümleri klasik istatistiksel yöntemlerle analiz edilmiş ve  $q = 5.44$  inç değerinin kuantum ya da literatürdeki ünlü adıyla "Megalitik Yard" olduğu savı ortaya atılmıştır.

Bu problemin Bayesci yaklaşımla ilk analizi ise Freeman (1976) tarafından yapılmış ve kuantum için 5.44 yanı sıra 4 ve 7.5 değerlerinin de alternatif olabileceği çıkarsamasında bulunulmuştur.



Modern Bayesci yöntemlerle MCMC kullanarak, problemin yeniden analizi sonucunda ise sonsal dağılımın çok tepeli olması nedeniyle, kuantum parametresi tahmininde yakınsaklık problemi ile karşılaşmıştır (Acar, 2000). Farklı başlangıç değerleri ile oluşturulan Gibbs örnekleme zincirleri, kuantum için farklı tahmin değerlerinin elde edilmesine neden olmuştur. Problemin Bayes analizi için kuantumun varolduğunu varsayarak, basit kuantum modeli ile ifade edilecek  $\{Y_i\}_{i=1}^n$  verisi,

$$y_i / q, m_i, \sigma \sim N(m_i, q, \sigma^2 I_n)$$

dağılır ve olabilirlik fonksiyonu,

$$f(y_1, \dots, y_n / m_1, \dots, m_n, q, \sigma) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^n \exp \left\{ - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - m_i, q)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

dir.  $\underline{m}$ ,  $q$  ve  $\sigma$  parametreleri için önsel bilgi

$$\pi(q, \underline{m}, \sigma) = \pi(q) \pi(\underline{m} / q) \pi(\sigma)$$

yazılabilir (Acar, 2000).

Acar (2000) çalışmasında  $t = \frac{1}{q}$ , 'nun Uniform dağıldığını göstermiş ve Bayes

analizinde t'yi parametre olarak kullanmıştır. Tamsayı  $\underline{m}$  parametreleri için önsel bilgi, kesikli (discrete) Uniform, Poisson veya Binom dağılımı ile ifade edilebilmesine rağmen, Binom dağılımı kullanımı sonucu tahminlerin daha tutarlı olduğu gözlenmiştir. Dolayısıyla

$$\pi(\underline{m} / q, p) \sim Bin(p, n)$$

burada  $n = \lceil y_{\max} / q \rceil$  ve hiperparametre p için önsel  $\pi(p) \sim Be(1, 1)$  ( $p \sim U(0, 1)$ )

WinBUGS paket programı kullanılarak, İskoçya good rings verisinin Bayes analizi sonucu, Acar (2000)'ın farklı başlangıç değerleri kullanarak elde ettiği parametrelerin sonsal tahminlerinden yakınsaklık koşullarını sağlayanlar Çizelge 4.2'de sunulduğu gibidir. Burada kuantum için iki alternatif değer olan  $q = 5.439$  ve  $q = 7.48$  Freeman (1976)'ın sonuçları ile tutarlıdır.

**Çizelge 4.2.** Yakınsaklık testlerini geçen parametrelerin farklı başlangıç değerleri için sonsal tahminleri

Run	Burn-in	Par.	Initial	pos.Mean	95% Prob.Int.
1	500	t	0.13414	0.134	[0.1323, 0.1352]
		q	---	<b>7.480</b>	[7.395, 7.559]
		$\tau$	0.33128	1.371	[1.034, 1.707]
		$\sigma$	---	0.586	[0.3437, 0.9346]
2	500	t	0.16003	0.184	[0.183, 0.185]
		q	---	<b>5.439</b>	[5.410, 5.470]
		$\tau$	0.67310	2.190	[0.949, 3.870]
		$\sigma$	---	0.709	[0.509, 1.030]

Bu uygulamada, yukarıda özetlediğimiz çalışmalar sonucu elde edilen farklı kuantum tahmin değerlerinin oluşturduğu iki basit kuantum modelinin kıyaslanması Bayes faktörü, BIC ve DIC kullanılarak yapılacaktır.

İskoçya good rings (n=16) verisinin kullanılması durumunda, modeller matematiksel olarak,

$$\text{Model 1 : } y_i = m_{1i} q_1 + \varepsilon_i \quad , \quad \varepsilon_i \sim N(0, \tau_1) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 16$$

$$\text{Model 2 : } y_i = m_{2i} q_2 + \eta_i \quad , \quad \eta_i \sim N(0, \tau_2) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, 16$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $q_1 = 7.48$  ve  $q_2 = 5.439$ 'dur.

Model 1'in uygun olduğu varsayımı altında

$$P(y / \theta_1, M_1) \sim \text{Normal} (m_{1i} q_1, \tau_1)$$

Model 2'nin uygun olduğu varsayımı altında

$$P(y / \theta_2, M_2) \sim \text{Normal} (m_{2i} q_2, \tau_2)$$

dır.

#### 4.3.1. Kuantum Modellerinin Carlin ve Chib Yöntemiyle Kıyaslanması

Bu bölümde, yukarıda tanımlanan iki kuantum modelinin kıyaslanması için gerekli sonsal model olasılıkları ve Bayes faktörü hesabı, Bölüm 3.1.3'te anlatılan Carlin ve Chib yöntemiyle yapılacaktır.

Model göstergesi  $M$ , Gibbs örnekleme boyunca zincirin ürettiği  $j$  değerlerini ( $j=1,2$ ) kullanarak bileşik modellemeyi gerçekleştiren bir parametre olsun. Model 1 ve model 2'ye ilişkin bilinmeyen parametreler sırasıyla  $\theta_1 = (q_1, \tau_1)$  ve  $\theta_2 = (q_2, \tau_2)$ 'dir.  $\theta_1$  ve  $\theta_2$ 'lerin birleşimi  $\theta$  olmak üzere modellerin bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu Eş. 3.8'deki gibi tanımlanır.

Modellerin önsel olasılıkları, zincirin  $j$  değerini ( $j=1,2$ ) eşit sayıda üretmesini sağlamak amacıyla  $P(M_1) = 0.999995$  ve  $P(M_2) = 0.000005$  olarak seçilmiştir. Her iki model altında model parametrelerinin önsel olasılıklarının,  $P(\theta_j / M_j)$ , Acar (2000) ve Freeman (1976) tarafından kullanılması sebebiyle

$$P(t_1 / M_1) = P(t_2 / M_2) \sim U(0.1, 0.5)$$

$$P(\tau_1 / M_1) = P(\tau_2 / M_2) \sim Gam(0.1, 0.5)$$

şeklinde alınmıştır. Burada  $t_1 = 1/q_1$  ve  $t_2 = 1/q_2$  'dir.

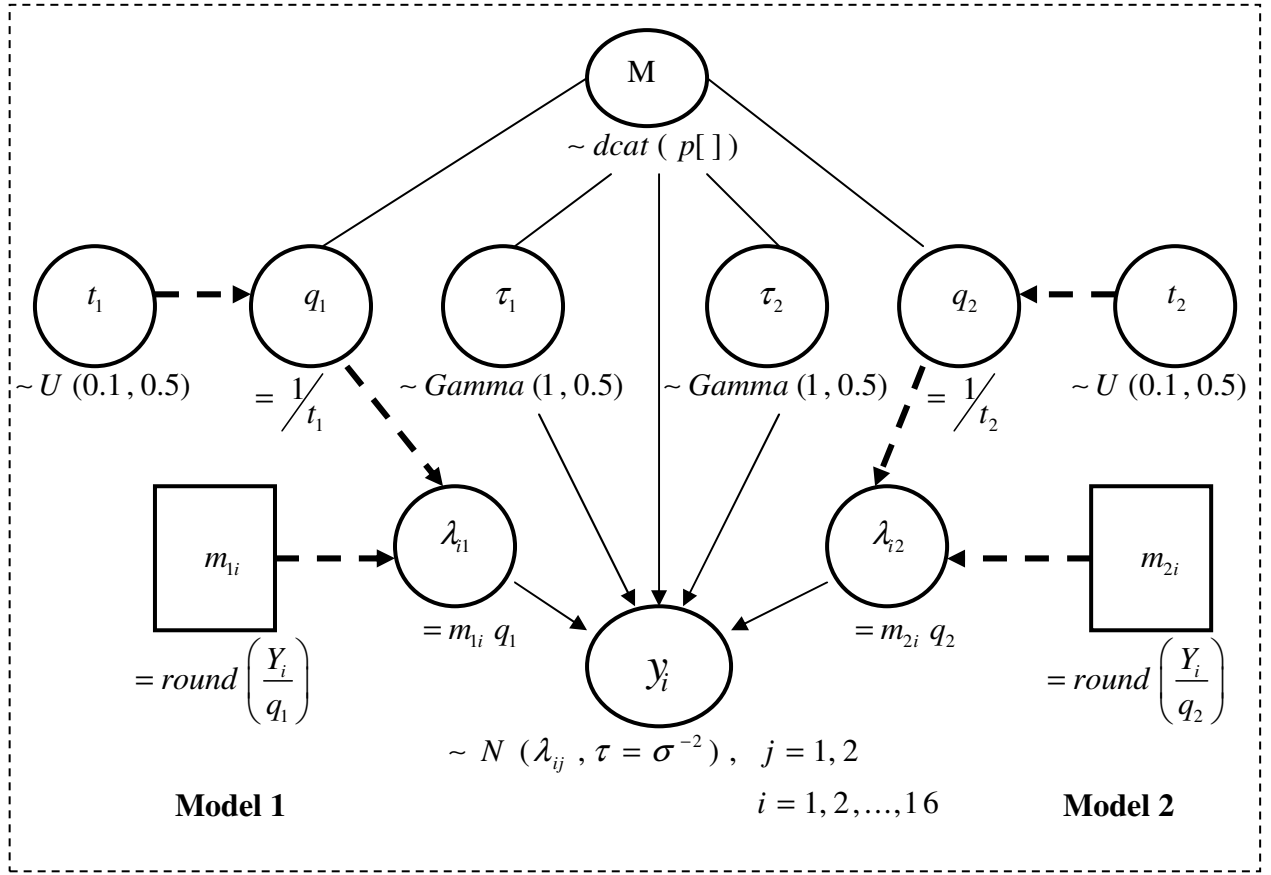
Bileşik model tanımlamasını sağlamak amacıyla bilinmeyen parametrelerin pseudo (sözde) önselinin belirlenmesinde Çizelge 4.2'de yer alan % 95 güven aralıklarından yararlanılmıştır. Bu durumda pseudo önselleri :

$$\text{Model 1 için, } t_1 \sim U(0.1323, 0.1352) , \tau_1 \sim Ga(1, 0.5)$$

$$\text{Model 2 için, } t_2 \sim U(0.1829, 0.1849) , \tau_2 \sim Ga(1, 0.5)$$

dir.

Model göstergesi ( $M$ ) yardımıyla iki modeli kıyaslamak ve bileşik modellemeyi belirlemek amacıyla, modellerin WinBUGS programı içindeki grafiksel gösterimi Şekil 4.1'deki gibidir.



**Şekil 4.1.** Carlin ve Chib yöntemi ile iki kuantum modelinin kıyaslanmasının grafiksel gösterimi

Şeklin sol tarafında model 1'in uygunluğu varsayımı altında modelde yer alan parametreler, sağ tarafında ise model 2'nin uygunluğu varsayımı altında modelde yer alan parametreler yer almaktadır. Ayrıca model 1'in uygunluğu durumunda model 2'nin parametreleri, model 2'nin uygunluğu durumunda ise model 1'in parametreleri pseudo (sözde) önseli olarak kullanılmaktadır.

Elde edilen bu bilgiler kullanılarak SPLUS makro komutları yardımıyla yazılan program Ek-2'de verilmiştir. Programın WinBUGS Paket Programı'nda 11000 iterasyon için (ilk 1000 iterasyon burn-in periyodu olması sebebiyle atılır) çalıştırılması sonucu 2. kuantum modelinin sonsal model olasılığı  $pM2 = P(M_2 / y)$ ,

node	mean	sd	MC error	2.5%	median	97.5%	start	sample
pM2	0.5005	0.5	0.01259	0.0	1.0	1.0	1001	10000

olarak elde edilmiştir.

Bu durumda model 1'e karşı model 2 lehine Bayes faktörü Eş. 3.3'ten,

$$BF_{21} = \frac{0.5005 \cdot 0.999995}{(1-0.5005) \cdot 0.00005} = 200399$$

olarak hesaplanmıştır.

Elde edilen  $BF_{21}$  değerinin, Çizelge 3.1'e göre 1'den oldukça büyük bir değer olması sebebiyle, veriyle en uyumlu kuantum modelinin  $M_2$  modeli; dolayısıyla en olası kuantum değerinin 5.439 olması yönünde güçlü bir kanıtın bulunduğu söylenebilir.

#### 4.3.2. Kuantum Modellerinin BIC Kullanılarak Kıyaslanması

Modellere ilişkin BIC değerleri kullanılarak da her iki kuantum modeli kıyaslanabilir. Bu amaçla Eş. 3.10 kullanılarak,

$$\text{Model 1 için BIC değeri hesabı} \rightarrow BIC_1 = 16 \ln\left(\frac{30.4452}{16}\right) + 2 \ln(16) = 15.838$$

$$\text{Model 2 için BIC değeri hesabı} \rightarrow BIC_2 = 16 \ln\left(\frac{6.7515}{16}\right) + 2 \ln(16) = -8.26$$

olarak elde edilir. Bölüm 3.2'de anlatıldığı gibi BIC değerleri kullanılarak, yaklaşık olarak Bayes faktörü değerine ulaşılabilir ve kuantum modelleri birbiriyle kıyaslanabilir.

Model 2'ye karşı model 1 lehine Bayes faktörü değeri, Eş. 3.13 yardımıyla,

$$-2 \ln BF_{12} \cong BIC_1 - BIC_2$$

$$-2 \ln BF_{12} \cong 15.838 - (-8.26)$$

$$BF_{12} \cong e^{-12.049}$$

$$BF_{12} \cong 0.00000585$$

olarak bulunur.

Model 1'e karşı model 2 lehine Bayes faktörü değeri ise Eş. 3.14 kullanılarak,

$$2 \ln BF_{21} \cong BIC_1 - BIC_2$$

$$2 \ln BF_{21} \cong 15.838 - (-8.26)$$

$$BF_{21} \cong e^{12.049}$$

$$BF_{21} \cong 170928$$

şeklinde bulunur.

Elde edilen Bayes faktörü değerleri Çizelge 3.1'e göre yorumlandığında,

$BF_{12} = 0.00000585 < 0.01$	Model 1'e karşı kesin kanıt vardır.
$BF_{21} = 170928 \geq 1$	Model 2 için destek

sonuçları elde edilir.

BIC ile Bayes faktörü arasındaki teorik bağlantının kullanılması durumunda  $M_1$  modeline karşı  $M_2$  modelinin kesin kanıt olduğu söylenebilir. Buradan Carlin ve Chib yöntemiyle elde edilen sonuçla BIC kullanılarak bulunan sonucun birbirine paralel olduğu görülmektedir.

#### 4.3.3. Kuantum Modellerinin DIC Kullanılarak Kıyaslanması

Bölüm 3.3'te Eş. 3.19 ile verilen DIC hesap formülü için gerekli olan sapma;  $D(\theta)$  (Eş. 3.15),  $Dbar$  (Eş. 3.16),  $Dhat$  (Eş. 3.17) ve  $pD$  (Eş. 3.18) kullanılarak, WinBUGS paket programında yazılan programların komutları Ek-3'te verilmiştir. Çalıştırılan bu programlardan her iki kuantum modeli için ayrı ayrı hesaplanan DIC değerleri,

<b>Model</b>	<b>Dbar</b>	<b>Dhat</b>	<b>pD</b>	<b>DIC</b>
$M_1$	57.662	55.706	1.957	59.619
$M_2$	33.613	31.648	1.965	35.578

şeklinde elde edilmiştir. Buradan veri setini en iyi temsil eden modelin, en küçük DIC değerli model olan  $M_2$  modeli olduğu görülmektedir.

Ayrıca modellerin DIC değerleri arasındaki farkın ( $DIC_1 - DIC_2 = 24.041$ ) 10'dan oldukça büyük olması sebebiyle yüksek DIC'li modelin ( $M_1$ ) varlığının inkar edilebileceği söylenebilir. (Bkz. Bölüm 3.3.1)

Modelde yer alması gereken etkin parametre sayısı pD yerine, alternatifi olan pV'nin kullanımının gerekmesi durumunda aşağıdaki sonuçlar elde edilecektir.

Model 1 için sapma hesabı,

<u>node</u>	<u>mean</u>	<u>sd</u>	<u>MCerror</u>	<u>2.5%</u>	<u>median</u>	<u>97.5%</u>
sapma	57.65	1.965	0.02387	55.74	57.04	63.01

Model 2 için sapma hesabı,

<u>node</u>	<u>mean</u>	<u>sd</u>	<u>MCerror</u>	<u>2.5%</u>	<u>median</u>	<u>97.5%</u>
sapma	33.61	1.959	0.02527	31.64	32.99	38.79

Model 1 ve model 2 için elde edilen sapma değerleri Eş. 3.20'de yerine konulursa, sonuçlar;

<u>Model</u>	<u>pD</u>	<u><math>Var_{\theta y}(D(\theta))</math></u>	<u>pV</u>	<u>DIC</u>
$M_1$	1.957	3.8612	1.930	59.619
$M_2$	1.965	3.8377	1.919	35.578

şeklinde bulunur. Buradan her iki kuantum modelinde yer alması gereken etkin parametre sayısının yaklaşık olarak 2 olduğu sonucuna ulaşıldığı görülmektedir.

Her iki kuantum modeli DIC model ağırlıkları kullanılarak da kıyaslanabilmektedir. Eş. 3.21 kullanılarak hesaplanan model ağırlıkları aşağıdaki gibidir.

<b>Model</b>	<b>Modelde yer alan değişkenler</b>			<b>DIC Model Ağırlıkları</b>		
	<b>p</b>	<b>pD</b>	<b>pV</b>	<b>DIC</b>	<b>Ağırlıkları</b>	
$M_1$	$m_{1i}$	2	1.957	1.930	59.619	% 0.0006
$M_2$	$m_{2i}$	2	1.965	1.919	35.578	% 99.9994

Elde edilen DIC model ağırlıklarından veriye uyan en uygun kuantum modelinin % 99.9994 olasılıkla  $M_2$  modeli olduğu sonucuna varılabilir.



## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

İstatistiksel çıkarsamada model seçimi ortak bir problemdir. Klasik istatistikçiler bu problemi çözmek için hipotez testlerini kullanırken, bayesci istatistikçiler bazı bayesci yaklaşımları kullanmaktadırlar. Bu yaklaşımlardan en sık kullanılanı Bayes faktörü olup, bir hipotezin diğer hipoteze karşı veya bir modelin diğer modele karşı rekabetinde, veriden elde edilen delilin gücünü sonsal olasılıkların oranı olarak ifade eden Bayesci bir çözüm sağlamaktadır.

Bayes faktörünün hipotez testlerinde kullanımını örneklediğimiz Uygulama 1, Bayesci çıkarsamada klasik hipotez testlerinde olduğu gibi normallik, doğrusallık ve varyans eşitliği gibi varsayımların sağlanmasının gerekli olmadığını göstermiştir. Ayrıca bu yaklaşımla  $P(\text{hipotez/veri})$  doğrudan hesaplanabiliyor olup, yokluk ve alternatif hipotezleri eşit ağırlıklandırılarak kıyaslanabilir. Klasik yaklaşımda ise kabul/red edilen sadece yokluk hipotezidir ve  $H_0$  reddedilmedikçe  $H_1$ 'e bakılmaz. Bu karar alınırken kullanılan p-değeri ise hipotezin doğruluğu varsayımıyla eldeki verinin gözlenme olasılığı ( $p\text{-değeri}=P(\text{veri/hipotez})$ ) olup  $P(\text{veri/hipotez}) \neq P(\text{hipotez/veri})$ 'dir.

Örneklem verisinin dağılımsal formunu belirleme çalışmasının örneklenildiği Uygulama 2 sonucunda ise modellenen veri aynı kalmak koşuluyla, farklı parametrelili dağılımların oluşturduğu modeller kıyaslamasının Bayes faktörü ile kolayca yapılabildiği gösterilmiştir. Farklı önsellerin Bayes faktörü değerine etkili olduğu ancak bu çalışma için farklı sonuçlara yönlendirmediği görülmüştür. Ancak veri yapısının tercih yapabilecek kadar bilgi içermediği durumda, eşlenik önsellere kıyasla Jeffreys önselinin daha tutarlı sonuç verdiği bulunmuştur. Bilgi içermeyen önsel (Eşlenik önsel 2) kullanımı sonucu elde edilen Bayes faktörü değerlerinde, hem örneklem genişliği hem de veri yapısına bağlı olarak büyük değişkenlik gözlenmiştir.

Modellenmek ya da test edilmek istenen süreç hakkında var olan önsel bilginin modele ya da test sürecine dahil edilmesine olanak sağlayan Bayes faktörün, bu önsel bilginin belirsizliği (uygunsuz/improper) önsel kullanımı) durumunda sonsal dağılımın belirlenemeyeceği, dolayısıyla kullanılmaması gerektiği literatürde sıkça vurgulanmıştır (Berger ve Pericchi (1994); Kass ve Raftery (1995); Aravjo ve Pereira (2007) vb).

Böyle durumlarla karşılaşıldığında önsel dağılımın varyansı olabildiğince küçük tutulmaya çalışılmalıdır. Ayrıca önsel dağılıma karar verebilmek için farklı yaklaşımların ortaya çıkardığı Bayes faktörü versiyonları da (sonsal (posterior) bayes faktörü, kısmi (partial) bayes faktörü, gerçek (intrinsic) bayes faktörü, kesirli (fractional) bayes faktörü) kullanılabilir (Aravjo ve Pereira, 2007).

Geleneksel model karşılaştırma yaklaşımları üzerine Bayes faktörünün bir avantajı, modellerin iç içe geçmiş (nested) modeller olmak zorunda olmayışıdır. Ancak karmaşık modellerde Bayes faktörünün hesabında gerekli olan  $P(y/M_j)$  olasılığının hesaplanması, çok katlı integraller almayı gerektirmektedir. Böyle durumlarda Bayes faktörün hesabı güç olduğundan; Laplace yaklaşım yöntemi, Importance örnekleme, Gaussian quadrature veya MCMC gibi yöntemlerin kullanılması önerilmiştir (Rosenkranz ve Raftery, 1994). Bunlar arasından MCMC simülasyonu, bir istatistiksel paket programı (WinBUGS) içerisinde, model belirsizliğini bir model göstergesi yardımıyla formüle eden Carlin ve Chib yaklaşımıyla Bayes faktörü hesabını mümkün kılması nedeniyle bu çalışmada kullanılmıştır. Bu yöntemle k sayıda model için sonsal model olasılıkları hesaplanabilir. Ayrıca Bayes faktörü, çoklu model karşılaştırmasına  $BF_{ij} = BF_{ik} BF_{kj}$  eşitliği ile olanak sağlamaktadır (Martino, 2007).

Bayes faktörünün analitik hesaplama güçlüğüne aşmanın bir diğer yolu; asimptotik yaklaşımlardan biri olan BIC ölçütünü kullanarak hesaplamayı yaklaşık olarak gerçekleştirmektir. Bu ölçüt, iç içe geçmiş (nested) modellerin yanı sıra iç içe geçmemiş (non-nested) modellerin karşılaştırılması amacıyla geliştirilmiştir. BIC'nin pratikliği, standart istatistiksel yazılım programlarından da hesaplanabiliyor olmasından kaynaklanır.

Schwarz (1978), büyük örneklemlerde doğru modeli yüksek olasılıkla seçme prosedürü sağlayan BIC'nin Bayesci yaklaşımın ötesinde bir geçerliliğe sahip olduğunu savunmuştur. Literatür içindeki çalışmalara bakacak olursak; önselden bağımsız olduğu için önsel bilginin belirsizliğinden etkilenmeyen ve Bayes faktörün hesabında olduğu gibi çok katlı integral almayı gerektirmeyen BIC, Bayes faktöründen daha fazla kullanılmaktadır.

Bayesci model karşılaştırmasında kullanılan Bayes faktörü ve BIC gibi ölçütleri kullanmak, her model için parametre sayısını belirtmeyi gerektirir (Kass ve Raftery, 1995). Ancak bu yöntemler, parametreleri sayıca gözlemlerden fazla olan hiyerarşik modellerde doğrudan uygulanamaz (Gelfand ve Dey., 1994). Bu gibi zorluklardan ve Bayes faktörün hesaplama güçlüğünden kurtulmak amacıyla, son yıllarda, Gibbs örneklemesine dayalı MCMC simülasyon yöntemi ile model karmaşıklığı ve verinin modele uygunluğu arasındaki ölçüme dayanan DIC geliştirilmiş olup, WinBUGS istatistiksel paket programında hesaplanabilir hale getirilmiştir.

DIC, Bayes faktörün hesabında etkin olan sonsal model olasılıklarının hesaplanmasını gerektirmeyen ve her modelin veriye uygunluğunu test eden bir ölçüttür. Verinin marjinal olabilirliğinin bir fonksiyonu olmaması sebebiyle Bayes faktörün davranışını hedeflemez. Ayrıca Bayes faktörü ve BIC’de olduğu gibi parametrelerin sayısını belirtmeyi gerektirmeyip, veriye uyan en iyi modelde yer alması gereken etkin parametre sayısını tahmin etmektedir. Son yıllarda kullanımı oldukça artan DIC, MCMC simülasyon yöntemi ile elde edilmiş modellerin sonsal dağılımlarını kullanması sebebiyle, Bayesci model seçim problemlerinde özel olarak kullanışlı hale gelmiştir.

Kuantal modelleme kullanılarak  $q_1 = 7.480$  ve  $q_2 = 5.439$  kuantum değerleriyle oluşturulan birbirine rakip iki kuantal modelin kıyaslanması; Bayes faktörü ve BIC, DIC ölçütleri kullanılarak Uygulama 3’te gösterilmiştir. Bayes faktörü değeri, Carlin ve Chib yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Ayrıca bu yöntemin yanı sıra BIC ölçütü kullanılarak Bayes faktörü değeri yaklaşık olarak elde edilmiştir. Bu hesaplamalara ek olarak DIC değerleri iki kuantal model için elde edilmiş ve bu değerler kullanılarak veriye en uygun kuantum modelinin; dolayısıyla en olası kuantum değerinin bulunması sağlanmıştır.

Gelecek çalışmalarda, bu çalışmaya dahil edilen Bayesci model seçim yaklaşımları Bayes faktörü, BIC ve DIC performanslarının, farklı modelleme alanlarında (lojistik regresyon, kategorik modelleme, hiyerarşik modelleme gibi) değerlendirilmesi kıyaslamalı olarak yapılabilir. Ayrıca farklı önsel seçimi veya model karmaşıklığının artması ya da azalmasının bu yaklaşımlar üzerindeki etkileri incelenebilir.

## KAYNAKLAR

- Acar, E. 2000. Extensions of quantal problems. Doktora tezi, University of Sheffield Department of Probability and Statistics, England, 282s.
- Akaike, H. 1973. Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In Proc. 2 nd Int. Symp. Information Theory (eds B.N. Petrov and F.Csaki), pp. 267-281. Budapest: Akademiai Kiado.
- Albert, J. 2009. Bayesian Computation with R. Springer Dordrecht Heidelberg, London New York, 298s.
- Aravjo, M.I., Pereira, B.B. 2007. A Comparison of Bayes factors for Separated Models: Some Simulation Results. Communications in Statistics, Simulation and Computation, 36: 297-309.
- Asseburg, C. 2007. An Introduction to Using WinBUGS for Cost-Effectiveness Analyses in Health Economics. Centre for Health Economics, University of York, UK.
- Bayes, T. 1763. An essay towards solving a problem in the doctrine of Chances. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 53: 370-418.
- Berger, J.O., Pericchi, L.R. 1994. The Intrinsic Bayes Factor for model selection and prediction. Department of Statistics, Purdue University.
- Best,N., Cowles, M., Vines, K. 1996. CODA: Convergence Diagnostics and Output Analysis Software for Gibbs Sampling Output, Version 0.30. MRC Biostatistics Unit, Institute of Public Health, Cambridge, UK.
- Box, G.E.P. 1979. Robustness in the strategy of scientific model building. In R.L. Launer & G.N. Wilkinson, (Eds.) Robustness in Statistics New York: Academic Pres, pp. 201-236.
- Burnham, K. P., Anderson, D. R. 1998. Model selection and Inference: a Practical Information-theoretic Approach. New York: Springer.

- Burnham, K.P. 2004. Multimodel inference: Understanding AIC and BIC in model selection. Colorado Cooperative F&W Research Unit, Colorado State University, Amsterdam Workshop on model selection, USA.
- Carlin, B., Chib, S. 1995. Bayesian model choice via Markov Chain Monte Carlo Methods. *J.Royal Statist. Society Series B*, 57(3): 473-484.
- Chib, S. 1995. Marginal likelihood from the Gibbs output. *J.Amer.Statist. Assoc.*, 90, 1313-1321.
- Chib, S., Jeliazkov, I. 1999. Marginal likelihood from the Metropolis-Hastings Output. Technical report, Washington University.
- Da Silva, S.A., Melo, L.L.M., Ehlers, R. 2004. Spatial Analysis of Incidence Rates: A Bayesian Approach. *Biostatistics*, 1-17.
- Dellaportas, P., Forster, J.J., Ntzoufras, I. 1998. On Bayesian model and variable selection using MCMC. Technical Report, Department of Statistics, Athens University of Economics and Business. Submitted to *Statistics and Computing*.
- Dempster, A.P. 1974. The Direct Use of Likelihood for Significance Testing in *Proceedings of Conference on Foundational Questions in Statistical Inference*. University of Aarhus, 335-352.
- Efron, B. 1986. How biased is the apparent error rate of a prediction rule? *J. Am. Statist. Ass.*, 81, 461-470.
- Ekici, O. 2009. İstatistikte Bayesyen ve Klasik Yaklaşımın Kavramsal Farklılıkları. *Balıkesir Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 12(21): 89-101.
- Freeman, P.R. 1976. A Bayesian Analysis of the Megalithic Yard. *J.R. Statist. Soc. A*, 139, pp. 20-55.
- Gamerman, D. 1997. *Markov Chain Monte Carlo, Stochastic Simulation for Bayesian Inference*. London: Chapman & Hall.

- Gelfand, A.E., Smith, A.F.M. 1990. Sampling-Based Approaches to calculating marginal densities. *J. Am. Stat. Asso.* 85: 398-409.
- Gelfand, A.E., Dey, D.K., Chang, H. 1992. Model determination using predictive distributions with implementation via sampling-based methods (with discussion). In *Bayesian Statistics 4* (eds J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid and A.F.M. Smith), Oxford University Press; 147-167.
- Gelfand, A.E., Dey, D.K. 1994. Bayesian model choice: asymptotics and exact calculations. *Journal Royal Statistics Soc. B.*, 56.
- Gelman, A., Carlin, J.B., Stern, H.S., Rubin, D.B. 2004. *Bayesian Data Analysis. Second Edition*, Chapman and Hall / CRC, Boca Raton, FL.
- Godsill, S.J. 1997. On the relationship between MCMC model uncertainty methods. Technical Report CUED/F\_INFENG/TR.305, Engineering Department, Cambridge University. Submitted to *J. Comput. Graph. Statist.*
- Green, P.J. 1995. Reversible Jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination. *Biometrika*, 82, 711-732.
- Han, C., Carlin, B.P. 2001. MCMC Methods for Computing Bayes Factors: A Comparative Review. *Journal of the American Statistical Association*. Vol.96, 455: 1122-1132.
- Hastings, W.K. 1970. Monte Carlo sampling methods using Markov Chains and their applications. *Biometrika* 57: 97-109.
- Hoijtink, H., Klugkist, I., Boelen, P.A. (Eds) 2008. *Bayesian evaluation of informative hypotheses*. New –York: Springer.
- İnal, H.C., Günay, S. 2002. *Olasılık ve Matematiksel İstatistik*. Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları: 16, Ders Kitabı, Ankara, 519s.

- Jacobson, T., Karlsson, S. 2002. Finding Good Predictors for Inflation: A Bayesian Model Averaging Approach. Sveriges Riksbank Working Paper Series, 138.
- Jeffreys, H. 1961. Theory of Probability.(3 rd ed) Oxford, U.K. : Oxford University Pres.
- Kass, R.E., Raftery, A.E. 1995. Bayes factors. Journal of the American Statistical Association, 90: 773-795.
- Kass, R.E., Wasserman, L. 1995. A reference Bayesian test for nested hypotheses and its relationship to the Schwarz criterion. Journal of the American Statistical Association, 90(431): 928-934.
- Lavine, M., Schervish, M.J. 1997. Bayes factors: What they are and what they are not. The American Statistician, 50: 203-206.
- Lee, P.M., 1997. Bayesian Statistics An Introduction. Oxford University Pres. (3 rd ed.), New York, 350s.
- Liddle, A.R. 2007. Information criteria for astrophysical model selection. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters, 377: L74-L78.
- Mallows, C.L. 1973. Some comments on Cp. Technometrics, 15: 661-675.
- Martino, S. 2007. Recent methods for Bayesian Model Comparison. Department of Mathematical Science.
- Mcculloch, R., Rossi, P.E. 1992. A Bayesian Approach To Testing The Arbitrage Pricing Theory. Journal of Econometrics, 49: 141-168.
- Metropolis, N., Rosenbluth, A.W., Rosenbluth, M.N., Teller, A., Teller, H. 1953. Equations of state calculations by fast computing machines. Journal of Chemical Physics 21: 1087-1091.
- Mislavy, R.J. 2006. An Introduction to the DIC Index. University of Maryland.

- Ntzoufras, I. 2009. Bayesian Modeling Using WinBUGS. Wiley Series in Computational Statistics, Hoboken, USA, 492s.
- O'Hagan, A. 1986. Probability methods and measurement. Chapman and Hall, London.
- Raftery, A.E. 1986. Choosing Models for Cross-Classifications. American Sociological Review, 51: 145-146.
- Raftery, A.E. 1995. Bayesian model selection in Social Research. Sociological methodology, Marsden, P.V. Cambridge, Mass., Blackwells: 111-196.
- Rosenkranz, S.L., Raftery, A.E. 1994. Covariate Selection in Hierarchical Models of Hospital Admission Counts: A Bayes Factor Approach.
- Schwarz, G. 1978. Estimating the dimension of a model. Annals of Statistics, 6(2): 461-464.
- Sinharay, S., Stern, H.S. 2002. On the sensitivity of Bayes Factors to the Prior Distributions. The American Statistician, 56(3): 196-201.
- Smith, B. 2005. (B)ayesian (O)utput (A)nalysis Program (BOA) Version 1.1.5 User's Manual. Technical Report, Department of Public Health, The University of Iowa, available at <http://www.public-health.uniowa.edu/boa>. Erişim tarihi: Mayıs 2011
- Spiegelhalter, D.J., Thomas, A., Best, N. G., Gilks, W. R. 1995. BUGS Manual and Examples: Version 0.6. Cambridge: Medical Research Council Biostatistics Unit.
- Spiegelhalter, D.J., Bull, K. 1997. Tutorial in Biostatistics Survival analysis in observational studies. Statistics in Medicine, 16(9): 1041-1074.
- Spiegelhalter, D.J., Best, N.G., Carlin, B.P., Van der Linde, A. 2002. Bayesian measures of model complexity and fit (Pkg:p 583-639). Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Methodological, 64(4): 583-616.



- Spiegelhalter, D.J. 2006a. Two brief topicson modelling with WinBUGS. MRC Biostatistics Unit.
- Spiegelhalter, D.J. 2006b. Some DIC Slides. MRC Bostatistics Unit, Cambridge.
- Thom, A. 1955. A Statistical Examination of the Megalithic Sites in Britain. J.R. Statist. Soc. A., 118, pp. 275-295.
- Ucal, M.Ş. 2006. Ekonometrik Model Seçim Kriterleri Üzerine Kısa Bir İnceleme. C.Ü. İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi, 7(2).
- Yardımcı, A., Erar, A. 2005. Aykırı Değer Varlığında Doğrusal Regresyonda Değişken Seçimine Gibbs Örneklemesi Yaklaşımı. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 18(4): 603-611.
- Wilberg, M.J., Bence, J.R. 2008. Performance of deviance information criterion model selection in statistical catch-at-age analysis. Fisheries Research, 93: 212-221.
- Zellner, A. 1971. An Introduction to bayesian inference in econometrics. John Wiley & Sons, New York.

## EKLER :

### EK-1 : Çift yanlı hipotez testinde bayes faktörünün elde edilmesi

$y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma^2 = 9$  biliniyor fakat  $\mu$  bilinmiyor) ve  $\mu \sim N(\mu_0, \tau^2)$  olmak üzere,

$y$  ve  $\mu$ 'nün bileşik olasılık fonksiyonu :  $P(y, \mu) = P(\mu) P(y / \mu)$  olup

$$P(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} e^{-\frac{1}{2\tau^2}(\mu-\mu_0)^2} \quad \text{ve} \quad P(y/\mu) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{y}-\mu)^2} \quad \text{kullanılarak,}$$

$$\begin{aligned} P(y, \mu) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau^2}} e^{-\frac{1}{2\tau^2}(\mu-\mu_0)^2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{y}-\mu)^2} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{2\pi\tau\sigma} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(\mu-\mu_0)^2}{\tau^2} + \frac{n(\bar{y}-\mu)^2}{\sigma^2} \right)} \quad \text{şeklinde elde edilir.} \end{aligned}$$

$$P(y) = \int_{\mu \neq \mu_0} P(y, \mu) d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{2\pi\tau\sigma}}_A \text{ diye lim} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{(\mu-\mu_0)^2}{\tau^2} + \frac{n(\bar{y}-\mu)^2}{\sigma^2} \right)} d\mu$$

$$\Rightarrow A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\tau^2\sigma^2} (\tau^2 n (\bar{y}-\mu)^2 + \sigma^2 (\mu-\mu_0)^2)} d\mu$$

$$\Rightarrow A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\tau^2\sigma^2} (\tau^2 n \bar{y}^2 - \tau^2 n 2\bar{y}\mu + \tau^2 n \mu^2 + \sigma^2 \mu^2 - \sigma^2 2\mu\mu_0 + \sigma^2 \mu_0^2)} d\mu$$

$$\Rightarrow A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2\tau^2\sigma^2} (\mu^2 (\tau^2 n + \sigma^2) - 2\mu (\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 \mu_0) + \tau^2 n \bar{y}^2 + \sigma^2 \mu_0^2)} d\mu \quad (\text{üstel kısım } \sigma^2 + \tau^2 n$$

ile çarpılır)

$$\Rightarrow A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 + \tau^2 n}{2\tau^2\sigma^2} \left[ \mu^2 - 2\mu \left( \frac{\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 \mu_0}{\tau^2 n + \sigma^2} \right) + \frac{\tau^2 n \bar{y}^2 + \sigma^2 \mu_0^2}{\tau^2 n + \sigma^2} \right]} d\mu \quad (\text{Parantezin içine } \frac{\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 \mu_0}{\tau^2 n + \sigma^2} \text{ terimi bir eklenip bir çıkarılır.})$$

$$\Rightarrow A. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\sigma^2 + \tau^2 n}{2\tau^2\sigma^2} \left[ \left( \mu - \frac{\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 \mu_0}{\tau^2 n + \sigma^2} \right)^2 + \frac{\tau^2 n \bar{y}^2 + \sigma^2 \mu_0^2}{\tau^2 n + \sigma^2} - \left( \frac{\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 \mu_0}{\tau^2 n + \sigma^2} \right)^2 \right]} d\mu$$

$$\Rightarrow A. \underbrace{e^{-\frac{(\sigma^2 + \tau^2 n)}{2\tau^2\sigma^2} \left( \frac{\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 \mu_0}{\tau^2 n + \sigma^2} - \left( \frac{\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 \mu_0}{\tau^2 n + \sigma^2} \right)^2 \right)}}_{B \text{ diyelim}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\sigma^2 + \tau^2 n)}{2\tau^2\sigma^2} \left( \mu - \frac{\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 \mu_0}{\tau^2 n + \sigma^2} \right)^2} d\mu$$

$$\Rightarrow A. B. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2 \left( \frac{\tau^2 \sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2 n} \right)} \left( \mu - \frac{\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 \mu_0}{\tau^2 n + \sigma^2} \right)^2} d\mu \quad (\text{İfadenin tamamı } \sqrt{2\pi \frac{\tau^2 \sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}} \text{ ile bir çarpılır bir bölünür.})$$

$$\Rightarrow A. B. \sqrt{2\pi \frac{\tau^2 \sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2 \left( \frac{\tau^2 \sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2 n} \right)} \left( \mu - \frac{\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 \mu_0}{\tau^2 n + \sigma^2} \right)^2} d\mu}_{\sqrt{2\pi \frac{\tau^2 \sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}}}$$

*Olasılık kuralları gereği bu kısım 1'e eşittir.*

Bu eşitlikte yer alan A ve B yerine konulduğunda,

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{2\pi\tau\sigma} e^{-\frac{(\tau^2 n + \sigma^2)}{2\sigma^2\tau^2} \left( \frac{\tau^2 n \bar{y}^2 + \sigma^2 \mu_0^2}{\tau^2 n + \sigma^2} - \left( \frac{\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 \mu_0}{\tau^2 n + \sigma^2} \right)^2 \right)} \sqrt{2\pi \frac{\tau^2 \sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi (\tau^2 n + \sigma^2)}} e^{-\frac{(\tau^2 n + \sigma^2)}{2\sigma^2\tau^2} \left( \frac{\tau^2 n \bar{y}^2 + \sigma^2 \mu_0^2}{\tau^2 n + \sigma^2} - \frac{(\tau^2 n \bar{y} + \sigma^2 \mu_0)^2}{(\tau^2 n + \sigma^2)^2} \right)}$$

(Burada parantez içindeki ifadelerde payda eşitlemesi yapılarak devam edilir.)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi (\tau^2 n + \sigma^2)}} e^{-\frac{(\tau^2 n + \sigma^2)}{2\sigma^2\tau^2} \left( \frac{\tau^2 \sigma^2 n (\bar{y}^2 - 2\bar{y}\mu_0 + \mu_0^2)}{(\tau^2 n + \sigma^2)^2} \right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi(\tau^2 n + \sigma^2)}} e^{-\frac{n}{2(\tau^2 n + \sigma^2)}(\bar{y} - \mu_0)^2}$$

$$\text{Sonuç olarak } P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sigma^2}{n} + \tau^2 \right)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{\sigma^2}{n} + \tau^2\right)}(\bar{y} - \mu_0)^2}$$

$$H_0 \text{ hipotezi lehine bayes faktörü : } BF_{01} = \frac{P(y | \mu = \mu_0)}{P(y | \mu \neq \mu_0)} = \frac{P(y | \mu_0)}{\int_{\mu \neq \mu_0} P(\mu) P(y | \mu) d\mu}$$

$$BF_{01} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{y} - \mu_0)^2}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{\sigma^2}{n} + \tau^2 \right)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{\sigma^2}{n} + \tau^2\right)}(\bar{y} - \mu_0)^2}}$$

$$BF_{01} = \frac{\frac{\sqrt{n}}{\sigma} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}(\bar{y} - \mu_0)^2}}{\left( \frac{\sigma^2}{n} + \tau^2 \right)^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\left(\frac{\sigma^2}{n} + \tau^2\right)}(\bar{y} - \mu_0)^2}}$$

**EK-2 : Kuantum modelleri için Carlin ve Chib Yöntemiyle Bayes faktörü hesabına yönelik yazılan programın WinBUGS model kodu**

```
model
{
# model node
j ~ dcat(p[ ])
p[1] <- 0.999995 p[2] <- 1 - p[1] # use for joint modelling
# p[1] <- 1 p[2] <- 0 # include for estimating Model 1
# p[1] <- 0 p[2] <-1 # include for estimating Model 2
pM2 <- step(j - 1.5)

q[1]<-1/t[1]
q[2]<-1/t[2]

# model structure
for(i in 1 : N){
mu[1, i] <- q[1] * m1[i]
mu[2, i] <- q[2] * m2[i]
Y[i] ~ dnorm(mu[j, i], tau[j])
}

# Model 1
t[1]~ dunif(t1min[j], t1max[j])
tau[1] ~ dgamma(r1[j], l1[j])

# estimation priors
t1min[1]<- 0.1 t1max[1] <- 0.5
r1[1] <- 1 l1[1] <- 0.5

# pseudo-priors
t1min[2]<- 0.1323 t1max[2] <- 0.1352
r1[2] <- 1 l1[2] <- 0.5

# Model 2
t[2]~ dunif(t2min[j], t2max[j])
tau[2] ~ dgamma(r2[j], l2[j])

# estimation priors
t2min[2]<- 0.1 t2max[2] <- 0.5
r2[2] <- 1 l2[2] <- 0.5

# pseudo-priors
t2min[1]<- 0.1829 t2max[1] <- 0.1849
r2[1] <- 1 l2[1] <- 0.5

}

list(N=16,
Y =
c(37.7,43.0,43.3,54.5,65.5,66.8,69.3,16.0,28.0,58.9,38.3,43.9,76.1,103.6,136.0,60.0),
m1 = c(5,6,6,7,9,9,9,2,4,8,5,6,10,14,18,8),
m2 = c(7,8,8,10,12,12,13,3,5,11,7,8,14,19,25,11))
list(j =2 , tau = c(1,1) )
```

**EK-3 : Kuantum modellerine ait DIC değerlerini hesaplatıran WinBUGS model kodu**

**$M_1$  modelinin DIC hesabı için WinBUGS kodu**

```
model {  
q1 <- 1/ t[1]  
for(i in 1:N) {  
M1[i] ~ dnorm (mu[i], tau1)  
mu[i] <- m1[i] * q1  
}  
t[1] ~ dunif (0.1, 0.5)  
tau1 ~ dgamma (1, 0.5)  
}  
list(N=16,  
M1 =  
c(37.7,43.0,43.3,54.5,65.5,66.8,69.3,16.0,28.0,58.9,38.3,43.9,76.1,103.6,136.0,60.0),  
m1 = c(5,6,6,7,9,9,9,2,4,8,5,6,10,14,18,8))
```

**$M_2$  modelinin DIC hesabı için WinBUGS kodu**

```
model {  
q2 <- 1/ t[2]  
for(i in 1:N) {  
M2[i] ~ dnorm (mu[i], tau2)  
mu[i] <- m2[i] * q2  
}  
t[2] ~ dunif (0.1, 0.5)  
tau2 ~ dgamma (1, 0.5)  
}  
list(N=16,  
M2 =  
c(37.7,43.0,43.3,54.5,65.5,66.8,69.3,16.0,28.0,58.9,38.3,43.9,76.1,103.6,136.0,60.0),  
m2 = c(7,8,8,10,12,12,13,3,5,11,7,8,14,19,25,11))
```

## ÖZGEÇMİŞ

Mutlu Altuntaş 1984 yılında Konya’da doğdu. İlk öğrenimini Kocaeli, orta ve lise öğrenimini İstanbul’da tamamladı. 2003 yılında girdiği Ondokuz Mayıs Üniversitesi İstatistik Bölümü’nden 2007 yılında mezun oldu. 2008-2011 yılları arasında, Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı’nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve halen devam etmektedir.