II. MERTEBEDEN PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN SONLU FARK ŞEMALARI

AYŞENUR UÇAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

II. MERTEBEDEN PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN SONLU FARK ŞEMALARI

AYŞENUR UÇAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
PROF. DR. GABİL AMİRALİ

SİNOP- 2012

T.C.

SİNOP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 31/07/2012 tarihinde yapılan sınav ile MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr. Gabil AMİRALİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmail AYDIN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Olcay ALPAY

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

08/08/2012

Doç.Dr. Hünkar Avni DUYAR

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

II. MERTEBEDEN PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMLERİ İÇİN SONLU FARK ŞEMALARI

ÖZET

Bu çalışmada, II. mertebeden periyodik sınır değer problemlerinin nümerik çözümleri incelendi. Sonlu farklar metodu kullanılarak düzgün şebeke üzerinde fark şemaları kuruldu. Söz konusu algoritmalar klasik fark şemalarından, singüler perturbe olmuş problemde ise ağırlık fonksiyonu içeren ve kalan terimleri integral formda olan interpolasyon kuadratur formüllerinin ve üstel baz fonksiyonlarının kullanılmasıyla oluşan integral özdeşlikler yardımıyla uyarlanmış şemalardan oluşmaktadır. Daha sonra oluşturulan fark şemalarının diferansiyel denklemlerin çözümlerine düzgün yakınsak olduğu gösterildi. Singüler perturbe problem için sonuçları destekler nitelikte örnek çözüldü.

Anahtar Kelimeler: Fark şemaları, periyodik sınır değer problemi, düzgün şebeke, düzgün yakınsaklık, singüler perturbasyon, yaklaşık çözüm.

FINITE DIFFERENCE SCHEMES FOR SECOND ORDER PERIODICAL BOUNDARY VALUE PROBLEMS

ABSTRACT

In this study, second- order periodical boundary value problems are considered. Difference schemes are constructed by using finite difference methods in a uniform mesh. The algorithms are those consist of classical difference schemes and for singularly perturbed problem, the method of integral identities with the use of exponential basis functions and interpolating quadrature rules with weight and remainder term in integral form, an exponentially fitted difference scheme. It is proved that the schemes converge uniformly to the solition of differential equations. Numerical experiments support these teorical results.

Keywords: Difference schemes, periodical boundary value problem, uniform mesh, uniform convergence, singular perturbation, approximate solution.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında ve sonuçlandırılmasında büyük emeği geçen, çalışmalarımda bana yol gösteren danışman hocam Sinop Üniversitesi Öğretim Üyelerinden Sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALİ' ye ve bana yardımcı olan diğer hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, yanımdan hiçbir zaman ayrılmayan, desteğini her zaman hissettiğim sevgili arkadaşım Sevda ORHAN' a; beni her zaman seven ve merak eden, dinleyen ve uzakta olmalarına rağmen her daim korumaya çalışan anneme, babama ve kardeşlerime çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

SEMBOLLER

$h,\ \tau$	: Şebeke adımı
ω	: Düzgün olmayan şebeke
$\omega_h,\ \omega_\tau$	: h ve τ adımlı düzgün şebekeler
$u(x),\ u(t)$	: Problemin kesin çözümü
$u_i,\ u_j$	: Şebeke fonksiyonu
$u_{x,i},\ u_{t,j}$	: İleri fark türevi
$u_{\bar{x},i},\ u_{\bar{t},j}$	: Geri fark türevi
$u_{\overset{0}{x},i},\ u_{\overset{0}{t},j}$	: Merkezi fark türevi
$u_{\bar{x}x,i},\ u_{\bar{t}t,j}$	: İkinci fark türevi
L	: Diferansiyel operatör
ℓ	: Fark operatörü
$y(x),\ y(t)$	: Problemin yaklaşık çözümü
$z(x),\ z(t)$	: Yaklaşık çözümün hatası
$p(x)$	: Ağırlık fonksiyonu
$\Vert\ \Vert$	: Norm
$\Vert\ \Vert_\infty$	: Maksimum norm
$R_i,\ R_j,\ R_M,\ r$	: Kalan terim
$O(h^k),\ O(\tau^k)$	: Yakınsama hızı
C^k	: k. mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar kümesi

ŞEKİLLER ve ÇİZELGELER LİSTESİ

ÇİZELGELER **Sayfa No**

1. GİRİŞ

Periyodik sınır değer problemlerinin matematiksel fiziğin ve akışkanlar mekaniğinin birçok alanında ortaya çıktığı iyi bilinmektedir. Difüzyon denklemi, dalga denklemleri, iletişim hatları, akışkan dinamiği, plazma fiziği, quantum alan teorisi, iyon akustik dalgaları, non- lineer dalga yayınımı ve non- lineer fiber optik gibi fiziksel modellemelerde ve mühendisliğin farklı alanlarında kullanılırlar.

İncelenen bu tip problemlerin kesin çözümünün varlığı, tekliği ve düzgünlüğü birçok matematikçi tarafından incelenmiştir (Herrmann, 1985; Webb, 1980).

Probleme dair yaklaşık çözümlerin incelenmesinde ise Samarskii (2001), adi ve kısmi periyodik sınır değer problemini temel oluşturacak modeller üzerinde incelemiştir. Zamana bağlı problemlerin incelemesi ise Amiraliyev (1988) ve Gülle (1995) tarafından yapılmıştır.

Yirminci yüzyılın başlarından beri pek çok çalışmaya konu olmuş Singüler Pertürbe olmuş problemlerin incelemeleri arasına periyodik sınır- değer problemleri de girmiştir (Lin ve Jiang, 1987; Cai, 2010; Amiraliyev ve Duru, 2003; Cen, 2011).

Bu çalışma 7 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konuya giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde bu tez çalışmasında kullanılacak olan genel bilgilere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde self- adjoint olan

$$u''(x) - q_0 u = -f(x)\ , \quad q_0 = \text{sabit} > 0, \quad -\infty < x < \infty$$

$$u(x+1) = u(x)$$

periyodik sınır değer problemine yer verilmiştir. Burada $f(x)$, periyodu 1 olan yani $f(x+1) = f(x)$ şartını sağlayan periyodik bir fonksiyondur.

Bu problemin çözümünün varlık ve tekliği gösterilmiş, sonlu farklar ve Taylor açılımından faydalanılarak yaklaşık çözüme uygun fark şeması kurulmuş ve şemanın kararlılığı ve yakınsaklığı gösterilmiştir (Samarskii, 2001).

Çalışmanın dördüncü bölümünde zamana bağlı

$$Lu \equiv u'' + a(t)u' + b(t)u = f(t)\ , \ 0 < t < T,$$

$$u(0) = u(T),$$

$$u'(0) = u'(T)$$

periyodik sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problemde $a(t) \geq \alpha > 0$, $b(t) \geq \beta > 0$ ve $f(t)$ yeteri kadar düzgün T periyotlu fonksiyonlardır.

''Enerji Eşitsizlikleri'' yöntemi kullanılarak kesin çözüm ve bazı türevleri için verilere bağlı eşitsizlikler elde edilmiş, ayrıca düzgün şebeke üzerinde üçüncü bölümdekine benzer yöntemlerle fark şeması kurulmuş ve yaklaşık çözüm hatasının $O\left(\tau^2\right)$ olduğu gösterilmiştir (Gülle, 1995).

Beşinci bölümde ise singüler perturbe olmuş

$$Lu \equiv \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(x) u' - b(x) u = f(x), \quad 0 < x < l,$$

$$u(0) = u(l),$$

$$L_0 u \equiv u'(l) - u'(0) = \frac{A}{\varepsilon}$$

periyodik sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada $\varepsilon > 0$ küçük parametre, $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x) \geq \beta > 0$ ve $f(x)$ verilmiş fonksiyonlar ve A da belli bir sabittir. Ayrıca $a(x)$, $b(x)$ ve $f(x)$ yeterince düzgün ve $a(0) = a(l)$, $b(0) = b(l)$ ve $f(0) = f(l)$ şartlarını sağlayan periyodik fonksiyonlardır. Probleminin u çözümü genelde $x = 0$ ve $x = l$ civarında sınır katına sahiptir.

Bu problemin kesin çözümünün asimptotik değerlendirmesi yapılmış, düzgün şebeke üzerinde, üstel baz fonksiyonları ile kalan terimi integral formda olan ve ağırlık fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formülleri uygulanarak oluşturulan integral özdeşlikleri yardımıyla fark şeması oluşturulmuş ve yaklaşık çözümün $O(h)$ kesinliğine sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca problem için uygun algoritma kurulmuş ve bir örnekle teorik ifadelerin, sonuçları destekler nitelikte olduğu gösterilmiştir (Amiraliyev ve Duru, 2003).

Altıncı bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Yedinci bölümde ise kaynaklar bildirilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Adi ve kısmi diferansiyel problemlere çözümler üretmek başta matematik ve fizik olmak üzere birçok alanın araştırma konusunu teşkil etmiştir. Ancak çoğu zaman bu tip problemlerde kesin çözümlere ulaşmak zordur. İşte bu sebepten yaklaşık çözüm yöntemleri önem arz etmektedir.

Bu çalışmada, periyodik sınır değer problemlerinin nümerik çözümleri için sonlu farklar metodu kullanılmıştır. Ayrıca singüler perturbe olmuş problemde, ağırlık fonksiyonu içeren ve kalan terimi integral formda olan interpolasyon kuadratur formülleri ve üstel baz fonksiyonu içeren integral özdeşlikler metoduyla fark şeması oluşturulmuştur. Fark şemaları düzgün şebeke üzerinde kurulmuş, kararlılıkları ve yakınsaklıkları incelenmiş, yakınsama hızları değerlendirilmiştir.

Bu bölümde, periyodik problemin yaklaşık çözümünün incelenmesinde ihtiyaç duyulan bazı tanımlar ve özdeşlikler verilecektir.

2.1. Tanımlar

2.1.1. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

$[a,b]$ aralığında tanımlanan

$$\varpi = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_{N-1} < x_N = b\}$$

ayrık noktalar kümesine $[a,b]$ aralığında tanımlı düzgün olmayan şebeke, x_i noktalarına ise şebeke düğümleri veya düğüm noktaları adı verilir.

Eğer düğümler eşit aralıklı ise bu durumda söz konusu şebekeye düzgün şebeke denir ve gösterimi

$$\varpi_h = \{x_i = a + ih, \quad i = 0,1,...,N; \quad h = (b-a)/N\}$$

şeklindedir. Burada h sabitine şebeke adımı denir. Eğer düzgün olmayan şebeke söz konusuysa şebeke adımı $h_i = x_i - x_{i-1}$ ile ifade edilir. $x \in \omega$ olmak üzere ω şebekesi üzerinde tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonuna şebeke fonksiyonu denir ve çoğu zaman $f(x_i)$ değeri f_i şeklinde gösterilir (Amiraliyev ve Duru, 2002).

2.1.2. Fark Türevleri

Diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde fark metotları kullanılırken türevlerin yaklaşımı için fark türevleri adı verilen ifadeler kullanılır.

Herhangi $[a,b]$ aralığında tanımlı h adımlı düzgün şebekede birinci türev söz konusuysa

* $u_{x,i} = \dfrac{u_{i+1} - u_i}{h}$ ifadesine $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki ileri (sağ) fark türevi,

* $u_{\bar{x},i} = \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h}$ ifadesine $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki geri (sol) fark türevi,

* $u_{\overset{0}{x},i} = \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$ ifadesine de $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki merkezi fark türevi denir.

Ayrıca,

* $u_{\bar{x}x,i} = \dfrac{u_{x,i} - u_{\bar{x},i}}{h} = \dfrac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$ ifadesine ise $u(x)$ fonksiyonunun x_i noktasındaki ikinci fark türevi denir.

2.1.3. Maksimum Norm

$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli herhangi bir $u(x)$ fonksiyonu ele alınsın. $\|u\|_\infty = \max\limits_{[a,b]} |u(x)| = \max\limits_{a \le x \le b} |u(x)|$ normuna $u(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki sürekli maksimum normu denir.

Ayrıca $[a,b]$ aralığında $\omega_h = \{x_i = a + ih,\ i = 1,2,...,N-1;\ h = (b-a)/N\}$, $\varpi_h = \omega_h \cup \{x = a, b\}$ düzgün şebeke olmak üzere, $\|u\|_{\infty,d} \equiv \|u\|_\infty = \max\limits_{\varpi} |u(x)|$ normuna ise ϖ ' da ayrık maksimum norm denir.

2.1.4. Yaklaşım Hatası ve Yakınsama

Pratik anlamda ele alınan algoritmaların yakınsaklık özelliğini sağlaması kesin çözüme yakın değerlerin bulunması açısından gereklidir. Bunun ele alınması için lineer

$$Lu = f(x), \quad x \in G \tag{2.1}$$

denkleminin sınır ya da başlangıç şartı özelliği taşıyan

$$\ell u = \mu(x), \quad x \in \Gamma \tag{2.2}$$

şartını sağlayan çözümünün bulunması istensin. Burada $f(x)$ ve $\mu(x)$ belirli fonksiyonlar, ℓ - belirli bir diferansiyel operatördür.

$\overline{G} = G \cup \Gamma$ bölgesinde herhangi bir $\varpi_h = \omega_h \cup \gamma_h$ şebekesinin kurulduğu varsayılsın, burada ω_h- iç şebeke, γ_h- sınır şebeke (şebeke sınır noktaları kümesi), h ise şebeke adımıdır. Çok boyutlu hal için h, vektör olabilir. Varsayılsın ki, (2.1)- (2.2) problemine karşılık

$$L_h y = \varphi_h, \quad x \in \omega_h, \tag{2.3}$$

$$\ell_h y = \chi_h, \quad x \in \gamma_h \tag{2.4}$$

fark problemi söz konusu olsun. Burada L_h, ℓ_h ve ϖ_h' da tanımlı fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri, φ_h ve χ_h belli şebeke fonksiyonlarıdır. Bu tanımlardan yola çıkılarak (2.3)- (2.4) problemi h parametresine bağlı olan fark problemleri ailesi gibi düşünülebilir.

(2.3)- (2.4) probleminin yakınsak olabilmesi için fark probleminin hatası olan $z = y - u \ \left(x \in \omega_h\right)$ farkının belli bir normda sıfıra yakınsama özelliğine sahip olması gerekir. Başka bir deyişle $\| \ \|$, ϖ_h şebekesindeki herhangi norm olmak üzere, $h \to 0$ olduğunda $\|z\| = \|y - u\| \to 0$ ise, bu durumda (2.3)- (2.4) fark probleminin çözümü (2.1)- (2.2) probleminin çözümüne yakınsıyor denir. Ayrıca, yeteri kadar küçük $h \le h_0$ için

$$\|y - u\| \le Ch^k, \quad k > 0$$

ise bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme h' ın k' ıncı derecesiyle yakınsar veya $O\left(h^k\right)$ hızıyla yakınsar veya yaklaşık çözüm $O\left(h^k\right)$ kesinliğine sahiptir denir. Burada belirtilmelidir ki C, h' a bağlı olmayan bir sabittir.

2.1.5. Fark Şemasının Kararlılığı

Kararlılık, fark problemlerinin pratik uygulanabilmesi açısından önemli bir özelliktir.

(2.3)- (2.4) fark problemi, belli sınıflardan olan her bir φ_h ve χ_h başlangıç veri fonksiyonları ve yeteri kadar küçük $h \le h_0$ için tek çözüme sahip olsun. $\tilde{y}$ ise, (2.3)- (2.4) probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\tilde{\varphi}_h$ ve $\tilde{\chi}_h$ olan çözümünü ifade etsin.

Tanım : h' dan bağımsız öyle C_1 ve C_2 sabitleri olsun ki, yeteri kadar küçük $h \le h_0$ için

$$\|\tilde{y} - y\|_1 \le C_1 \|\tilde{\varphi}_h - \varphi_h\|_2 + C_2 \|\tilde{\chi}_h - \chi_h\|_3 \tag{2.5}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda (2.3)- (2.4) fark şeması sağ tarafa ve sınır (veya başlangıç) şartına göre kararlıdır denir ($\| \;\|_1$, $\| \;\|_2$ ve $\| \;\|_3$ şebeke normlarıdır.).

Not : (2.3)- (2.4) problemi lineer olduğundan (2.5) eşitsizliğinin

$$\|y\|_1 \le C_1 \|\varphi_h\|_2 + C_2 \|\chi_h\|_3 \tag{2.6}$$

eşitsizliğine denk olduğu açıktır.

Kararlılık ve yakınsama arasında aşağıdaki ilişki vardır:

Teorem : (2.1)- (2.2) diferansiyel probleminin bir tek çözümünün olduğu, (2.3)- (2.4) fark probleminin de bir tek çözüme sahip olduğu ve yaklaşım hatasının sıfıra yaklaştığı varsayılsın. Bu durumda (2.3)- (2.4) fark probleminin çözümü (2.1)- (2.2) probleminin çözümüne yakınsaktır ve yakınsamanın hızı, yaklaşım hatasının hızıyla belirlenir(Amiraliyev ve Duru, 2002).

2.2. Çalışmada Kullanılan Bazı Formüller

2.2.1. İnterpolasyon Kuadratur Formülleri

Fark şemalarının kurulmasında ve kararlılığının incelenmesinde ağırlık fonksiyonu içeren ve kalan terimi integral formda olan aşağıdaki interpolasyon kuadratur formüllerinden yararlanılacaktır (Amiraliyev ve Mamedov, 1995; Amiraliyev 1998; Amiraliyev ve Duru, 1999):

$$\int_a^b p(x) f(x)dx = \left[\int_a^b p(x)dx\right]\{\sigma f(x) + (1-\sigma) f(a)\} + f[\alpha_0, \alpha_1]\int_a^b \left(x - x^{(\sigma)}\right) p(x)dx + R(f). \tag{2.7}$$

Burada σ reel parametre, $p(x) \in C[a,b]$ ağırlık fonksiyonudur. $R(f)$ kalan terimi ise

$$R(f) = \int_a^b dx p(x)\int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x,\xi) d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1 \text{ veya } 2$$

biçimindedir. $K_{n-1}(x,\xi)$ fonksiyonu, $f[\alpha_0, \alpha_1]$ bölünmüş farkı ve $x^{(\sigma)}$ noktası ise

$$K_s(x,\xi) = T_s(x-\xi) - \frac{x-a}{b-a}(b-\xi)^s, \quad s = 0,1,$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1-\sigma)a, \quad f[\alpha_0, \alpha_1] = \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$

$$T_s(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^s}{s!}, & \lambda \ge 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca,

$$\int_a^b p(x) f'(x) dx = f[\alpha_0, \alpha_1] \int_a^b p(x) dx + \overline{R}(f), \tag{2.8}$$

$$\overline{R}(f) = -\int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x,\xi) d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1 \text{ veya } 2 .$$

2.2.2. Diferansiyelleme Formülü

Asimptotik değerlendirmelerde aşağıdaki diferansiyelleme formülünden yararlanılır.

$$g'(x) = g[\alpha_0, \alpha_1] - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} K_0(t,x) g''(t) dt, \qquad \alpha_0 \le x \le \alpha_1 . \tag{2.9}$$

Buradaki $K_0(t,x)$ fonksiyonu ve $g[\alpha_0, \alpha_1]$ ifadesi (2.7) formülünde belirtilmiş olan ifadelerdir.

2.2.3. μ - Eşitsizliği

$$|ab| \le \mu a^2 + \frac{1}{4\mu} b^2, \quad \mu > 0 .$$

2.2.4. Diferansiyel Eşitsizlikler

2.2.4.1. Lineer Olmayan Durum

$\varphi(t,u)$; $0 \le t \le T$, $|u| < \gamma$ için sürekli bir fonksiyonu olsun.(Burada ve ileride $\gamma < \infty$ için "<" işareti "≤" işaretine değiştirilebilir). Ayrıca $v(t)$ sürekli fonksiyonu

$$v'(t) \le \varphi(t,v), 0 < t \le T$$
$$v(0) \le u_0$$

eşitsizliklerini sağlamış olsun. Bu durumda $v(t) \le u(t)$, $0 < t \le T$ olur. Burada $u(t)$,

$$\begin{cases} u'(t) = \varphi(t,u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemin çözümüdür (Başlangıç değer probleminin bir tek çözüme sahip olduğu düşünülmektedir.) (Mamedov, 1980).

2.2.4.2. Lineer Durum

$p(t)$ ve $q(t)$, $0 \le t \le T$ aralığında sürekli iki fonksiyon olsun. Ayrıca $v(t)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} v'(t) \le p(t) v(t) + q(t) \\ v(0) \le u_0 \end{cases}$$

eşitsizliklerini sağlamış olsun. Bu durumda

$$v(t) \le u_0 e^{\int_0^t p(s)ds} + \int_0^t q(s) e^{\int_s^t p(\eta)d\eta} ds$$

olur (Mamedov, 1980).

2.3. Lemma (Amirali, G. M. , 1988)

$\delta(t) \ge 0$ olmak üzere,

$$\varpi_\tau = \left\{ t_j = j\tau, \quad j = \overline{0, M}, \quad \tau = T/M \right\}$$

şebekesi için

$\delta_{\bar{t}k} \le c_0 \delta_k + c_1 \delta_{k-1} + \rho_k, \quad k = 1, 2, ..., M,$

$\delta(0) \le \lambda \delta(T) + \vartheta$ ve $\lambda \ge 0, \quad \vartheta = \text{sabit},$

$1 - \tau c_0 > 0,$

$$\lambda < \exp\left[-\tau \sum_{i=1}^{M} \frac{c_0 + c_1}{1 - \tau c_0} \right]$$

ise o zaman, δ_k çözümü için

$$\delta_k \le \begin{cases} \left[1 - \lambda \exp\left(\dfrac{(c_0 + c_1)T}{1 - \tau c_0} \right) \right]^{-1} \left\{ \vartheta + \lambda \dfrac{\tau}{1 - \tau c_0} \sum_{i=1}^{M} |\rho_i| \exp\left(\dfrac{(c_0 + c_1) t_{M-i}}{1 - \tau c_0} \right) \right\} \exp\left(\dfrac{(c_0 + c_1) t_k}{1 - \tau c_0} \right) \\ + \dfrac{\tau}{1 - \tau c_0} \sum_{i=1}^{k} |\rho_i| \exp\left(\dfrac{(c_0 + c_1) t_{k-i}}{1 - \tau c_0} \right); \quad 1 - \tau c_1 > 0 \text{ ise}, \\ \dfrac{\tau}{1 - \tau c_0} |\rho_i|; \quad 1 - \tau c_1 \le 0 \text{ ise} \end{cases}$$

değerlendirmesi doğrudur.

3. SELF ADJOİNT PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN FARK ŞEMASI

Bu bölümde self adjoint periyodik sınır- değer problemi incelenecektir. Bunun için öncelikle diferansiyel problemin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilecek, fark şeması kurulacak ve şemanın kararlılığı Maksimum Prensibi yardımıyla incelenecektir (Samarskii, 2001).

$$u''(x) - q_0 u = -f(x) \ , \ -\infty < x < \infty \tag{3.1}$$

$$u(x+1) = u(x) \tag{3.2}$$

denklemi verilsin. Burada $q_0 > 0$ bir sabit ve $f(x)$ periyodu 1 olan yani $f(x+1) = f(x)$ şartını sağlayan periyodik bir fonksiyondur.

Herhangi $x \in (0,1)$ noktasında (3.2) koşulu periyot dahilinde aşağıdaki

$$u(0+0) = u(1-0), \ u'(0+0) = u'(1-0) \tag{3.3}$$

ifadelerine denktir.

3.1. Diferansiyel Problemin İncelenmesi

Lemma 3.1.2(Samarskii, 2001): (3.1)- (3.2) problemi tek çözüme sahiptir ve çözüm için

$$\|u\|_\infty \le \frac{\|f\|_\infty}{q_0}$$

eşitsizliği doğrudur.

Bu eşitsizliğin doğruluğu uygun maksimum prensibinden yararlanılarak kolayca gösterilebilir (Samarskii, 2001).

Şimdi de $q_0 = 0$ durumu için problemin çözümünün varlık ve teklik özelliği ele alınsın. Bu durumda problemin ifadesi

$$u'' = -f(x)$$

$$u(0+0) = u(1-0), \ u'(0+0) = u'(1-0)$$

şekline dönüşür. Bu problem

$$\int_0^1 u(x)\,dx = 0 \tag{3.4}$$

durumunda tek çözüme sahiptir.

Gerçekten de $u''=-f(x)$ denkleminin genel çözümünün C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere

$$u(x)=C_1x+C_2-\int_0^x\left(\int_0^t f(\alpha)d\alpha\right)dt=C_1x+C_2-\int_0^x(x-t)f(t)dt$$

formuna sahip olduğu görülür. Bu ifadeden (3.3) koşulu dikkate alındığında

$$\int_0^1 f(t)dt=0,\quad C_1=-\int_0^1 tf(t)dt$$

bağıntılarının sağlandığı görülür. Bu işlem sonucunda $u(x)$ fonksiyonu bir C_2 sabitine bağlı şekilde ifade edilebilir. (3.4) koşulu kullanılarak da $C_2=0$ bulunarak problemin tek çözümü elde edilmiş olur.

3.2. Fark Şemasının Oluşturulması ve Hata Değerlendirmesi

Problemin yaklaşık çözümünün elde edilmesinde öncelikle; $h=\dfrac{1}{N}$ adımıyla, $0\le x\le 1$ aralığında

$$\varpi_h=\{x_i=ih, i=0,1,...,N\}$$

düzgün şebekesi verilsin. (3.1) denklemi ve (3.3) süreklilik şartı ele alınırsa $u_0=u_N$ olduğu açıktır.

(3.1)- (3.3) denkleminde $x=x_i$ yazılarak, $x_i=ih,\ i=1,2,...,N-1$ düğümleri için türevlerin değerleri fark türevleri ile değiştirilirse aşağıdaki üç nokta denklemi yazılabilir:

$$u_{\bar{x}x,i}-q_0u_i+R_i=-f_i,\quad x_i=ih,\quad i=1,2,...,N-1 \tag{3.5}$$

$$R_i=-\frac{h^2}{12}u^{(4)}(\eta),\quad \eta\in(x_{i-1},x_{i+1}). \tag{3.6}$$

Sınır değerlerin yaklaşımına bakılırsa

$$u_{\bar{x},N}=u'(1-0)-\frac{1}{2}hu''(1-0)+\frac{h^2}{6}u'''(\eta_1)\ ,\quad x_{N-1}\le\eta_1\le x_N$$

$$u_{x,0}=u'(0+0)+\frac{1}{2}hu''(0+0)+\frac{h^2}{6}u'''(\eta_2)\ ,\quad x_0\le\eta_2\le x_1$$

fark türevleri özel araştırma olarak verilecektir. (3.1) denkleminden $u''=q_0u_0-f$ ifadesinden

$$u_{\bar{x},N}+\frac{1}{2}h\left(q_0u\left(1\right)-f\left(1-0\right)\right)=u'\left(1-0\right)+\frac{h^2}{6}u'''(\eta_1),$$

$$u_{x,0}-\frac{1}{2}h\left(q_0u\left(0\right)-f\left(0+0\right)\right)=u'\left(0+0\right)+\frac{h^2}{6}u'''(\eta_2)$$

sistemi elde edilir. Kurulan bu bağıntılar $u'\left(0+0\right)=u'\left(1-0\right)$ ikinci süreklilik şartıyla tekrar düzenlenirse

$$u_{x,0}-\frac{1}{2}hq_0u_0+\frac{1}{2}hf\left(0+0\right)-\frac{h^2}{6}u'''(\eta_1)=u_{\bar{x},N}+\frac{1}{2}hq_0u_N-\frac{1}{2}hf\left(1-0\right)-\frac{h^2}{6}u'''(\eta_2)$$

fark denklemi elde edilir. Buradaki yaklaşım hızı $O\left(h^2\right)$ biçimindedir. $u_{N+1}=u_1$ şartı göz önünde bulundurulursa yukarıdaki denklem

$$u_{\bar{x}x,N}-q_0u_N+R_N=-\varphi_N,\quad \varphi_N=\frac{1}{2}\left(f\left(1-0\right)+f\left(0+0\right)\right) \tag{3.7}$$

$$R_N=-\frac{h}{6}\left(u'''\left(\eta_2\right)-u'''\left(\eta_1\right)\right) \tag{3.8}$$

haline dönüşür. Sınır şartları yerine yazılıp (3.6) ve (3.8) kalan terimleri silinirse

$$y_{\bar{x}x,i}-q_0y_i=-\varphi_i,\quad x=ih,\quad i=1,2,...,N \tag{3.9}$$

$$y_0=y_N,\quad y_1=y_{N+1} \tag{3.10}$$

fark şeması elde edilir.

Elde edilen fark şemasının çözümü için maksimum prensibinden dolayı,

$$\left\|y_i\right\|_\infty\le q_0^{-1}\left\|\varphi_i\right\|_\infty$$

değerlendirmesi doğrudur. Bu durumda $z=y-u$ yaklaşık çözüm hatası için $R_i=-\varphi_i-u_{\bar{x}x,i}+q_0u_i$ olmak üzere

$$\left\|z_i\right\|_\infty\le q_0^{-1}\left\|R_i\right\|_\infty$$

değerlendirmesi yazılabilir ki bu da yaklaşım hızının $O\left(h^2\right)$ biçiminde olduğunu gösterir.

Şimdi de (3.1) denklemi değişken katsayılı

$$\left(ku'\right)'-qu=-f\left(x\right),\quad 0<x<1 \tag{3.11}$$

denklemine dönüştürülsün. (3.11) problemindeki fonksiyonlar $k\left(x+1\right)=k\left(x\right)$, $q\left(x+1\right)=q\left(x\right)$ ve $f\left(x+1\right)=f\left(x\right)$ şartlarını sağlayan periyodik fonksiyonlardır ve

$x=0$ noktasında sürekli olduklarından $k(1-0)=k(0+0)=k(0)$, $q(1-0)=q(0+0)=q(0)$ ve $f(1-0)=f(0+0)=f(0)$ şartlarını sağlarlar.

$$k(x)\geq c_1>0,\quad q(x)\geq c_1>0 \tag{3.12}$$

olsun. Bu kabul $u(x+1)=u(x)$ periyodik şartlı (3.11) problemine çözüm bulmak için gereklidir. Kabulden yola çıkılarak $u(0+0)=u(1-0)$ olacağı da göz önüne alınırsa

$$ku'|_{x=0+0}=ku'|_{x=1-0} \tag{3.13}$$

yazılabilir. Maksimum prensibinden dolayı (3.11)- (3.13) probleminin bir tek çözümünün olacağı açıktır. Bu düşünceden yola çıkılarak $0<x=ih<1$ aralığında

$$\left(a_i y_{\bar{x}}\right)_{x,i}-d_i y_i=-\varphi_i,\quad x_i=ih,\quad i=1,2,...,N-1 \tag{3.14}$$

(3.10) şartlı fark şeması yazılabilir. (3.14)' deki a_i, d_i ve φ_i katsayıları kuadratur formülleriyle belirtilecek olan katsayılardır ve

$$a_i=\left(\frac{1}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{dx}{k(x)}\right)^{-1},\ d_i=h^{-1}\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}}q(x)dx \text{ ve } \varphi_i=h^{-1}\int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}}f(x)dx$$

eşitlikleriyle ifade edilirler.

Şimdi de (3.13) koşulunun yaklaşımına bakılsın.

$$\left(ay_{\bar{x}}\right)_i=\left(ku'\right)_{i-0}+\frac{1}{2}h\left(f-qu\right)_{i-1}+\frac{h^2}{6}u'''(\xi_1)\ ,\quad x_{i-1}\leq\xi_1\leq x_i$$

$$a_{i+1}u_{x,i}=\left(ku'\right)_{i+0}-\frac{1}{2}h\left(f-qu\right)_{i+0}+\frac{h^2}{6}u'''(\xi_2)\ ,\quad x_i\leq\xi_2\leq x_{i+1}$$

eşitlikleri yardımıyla $ku'|_{x=0+0}=ku'|_{x=1-0}$ şartı

$$a_1y_{x,0}-\frac{1}{2}h\left(q(0)y_0-f(0+0)\right)-\frac{h^2}{6}u'''(\xi_1)=a_Ny_{\bar{x},N}-\frac{1}{2}h\left(q(1)y_N-f(1-0)\right)-\frac{h^2}{6}u'''(\xi_2)$$

ikinci mertebe fark bağıntısını sağlar. $y_1=y_{N+1}$ ve $a_1=a_{N+1}$ eşitliklerinden yola çıkılarak

$$\left(ay_{\bar{x}}\right)_{x,N}-dy_N=-\varphi,\quad x=x_N=1,$$

$$d=d_N=\frac{1}{2}\left(q(0+0)+q(1-0)\right),\quad \varphi=\varphi_N=\frac{1}{2}\left(f(0+0)+f(1-0)\right)$$

denklemine indirgenebilir. Böylece

$$\left(ay_{\bar{x}}\right)_{x,i}-d_iy_i=-\varphi_i,\quad x_i=ih,\quad i=1,2,...,N, \tag{3.15}$$

$$y_0=y_N,\quad y_1=y_{N+1},\quad a_1=a_{N+1} \tag{3.16}$$

fark şeması elde edilir. Burada $a_i \geq c_1 > 0$ ve $d_i \geq c_1 > 0$ ' dir.

Fark şemasının kararlılığı için $i = 1, 2, ..., N$ olmak üzere $y_0 = y_N$ ve $y_1 = y_{N+1}$ periyodiklik şartlarıyla karşılanan

$$a_i y_{i-1} - \left(a_i + a_{i+1} + d_i h^2\right) y_i + a_{i+1} y_{i+1} = -\varphi_i h^2, \quad i = 1, 2, ..., N$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistem eliminasyon metotlarıyla çözülebilir.

(3.15)- (3.16) fark şemasında $a_i \geq c_1 > 0$ ve $d_i \geq c_1 > 0$ olduğundan maksimum prensibinden

$$\|y\|_\infty \leq \frac{1}{c_1} \|\varphi\|_\infty$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu durumda yaklaşık çözümün $z = y - u$ hatasının

$$\|z\|_\infty = O\left(h^2\right)$$

olduğu açıktır.

4. ZAMANA BAĞLI PERİYODİK SINIR- DEĞER PROBLEMİ İÇİN FARK ŞEMASI

Zamana göre periyodik olan sınır- değer problemleri, dalga teorisinde (plazmalardaki elektron plazma dalgaları, iyon akustik dalgaları gibi fiziksel modellerde) oldukça sık kullanılırlar ve bu tip denklemler genellikle maksimum prensibine uymazlar. Bu sebeple çözümün varlığı, tekliği ve yaklaşık çözümün kararlılığını incelemek için farklı yöntemlere başvurulmuştur.

Bu bölümde, zamana bağlı periyodik problemin kesin çözümü ‘’ Enerji Eşitsizlikleri’’ yardımıyla değerlendirilmiş, fark şeması kurulmuş, yaklaşık çözümün hatası incelenip yakınsama hızı gösterilmiştir (Gülle 1995).

$$Lu \equiv u'' + a(t)u' + b(t)u = f(t)\ ,\ 0 < t < T, \tag{4.1}$$

$$u(0) = u(T), \tag{4.2}$$

$$u'(0) = u'(T) \tag{4.3}$$

problemi verilsin.

(4.1)- (4.3) probleminde $a(t) \geq \alpha > 0$, $b(t) \geq \beta > 0$ ve $f(t)$ yeteri kadar düzgün T periyotlu fonksiyonlardır.

4.1. Diferansiyel Problemin İncelenmesi

(4.1)- (4.3) probleminin kesin çözümünün incelemesi için aşağıdaki lemma verilsin:

Lemma 4.1.1: $0 < \alpha \leq a(t) \leq a^*$, $0 < \beta \leq b(t) \leq b^*$ ve $\overline{a}_* \leq a'(t) \leq \overline{a}^* \leq 0$, $\overline{b}_* \leq b'(t) \leq \overline{b}^* \leq 0$ ve C verilere bağlı bir sabit olmak üzere (4.1)- (4.3) probleminin kesin çözümü için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$|u'|^2 + |u|^2 \leq C\int_0^t f(\tau)\,d\tau \tag{4.4}$$

İspat: (3.1)- (3.3) problemi hiperbolik denklem tipine uygundur. Problem Maksimum prensibine uymadığından, diferansiyel problemin çözümünü incelemek için ‘’Enerji Eşitsizlikleri’’ yöntemi uygulanacaktır. Bunun için de

$$Lu(u' + \lambda u) = f(u' + \lambda u)$$

özdeşliğinden yararlanılacak ve $\lambda > 0$ parametresi daha sonra şartları sağlayacak şekilde seçilecektir. Özdeşlikten

$$u''u'+\lambda u''u+a(t)u'u'+\lambda a(t)u'u+b(t)u'u+\lambda b(t)u^2=f(t)u'+\lambda f(t)u \tag{4.5}$$

eşitliği elde edilir.

$$u''u'=\frac{1}{2}\left[(u')^2\right]'$$

$$\lambda u''u=\lambda(u'u)'-\lambda(u')^2$$

$$\lambda a(t)u'u=\frac{\lambda}{2}a(t)(u^2)'=\frac{\lambda}{2}\left[a(t)u^2\right]'-\frac{\lambda}{2}a'(t)u^2$$

$$b(t)u'u=\frac{1}{2}b(t)(u^2)'=\frac{1}{2}\left[b(t)u^2\right]'-\frac{1}{2}b'(t)u^2$$

$$f(t)u'\le\mu_1(u')^2+\frac{1}{4\mu_1}f^2(t)$$

$$\lambda\left[f(t)u\right]\le\lambda\mu_2u^2+\frac{\lambda}{4\mu_2}f^2(t)$$

bağıntıları (4.5) denkleminde dikkate alınırsa

$$\left\{\frac{1}{2}(u')^2+\frac{1}{2}b(t)u^2+\lambda u'u+\frac{\lambda}{2}a(t)u^2\right\}'+\left\{a(t)-\mu_1-\lambda\right\}(u')^2$$

$$+\left\{-\frac{1}{2}b'(t)-\frac{\lambda}{2}a'(t)+\lambda b(t)-\lambda\mu_2\right\}u^2\le\left\{\frac{1}{4\mu_1}+\frac{\lambda}{4\mu_2}\right\}f^2(t)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte sağ taraftaki ilk ifade yalnız bırakılıp denklem düzenlenirse

$$\left\{(u')^2+b(t)u^2+2\lambda u'u+\lambda a(t)u^2\right\}'\le2\left\{-a(t)+\mu_1+\lambda\right\}(u')^2$$

$$+\left\{b'(t)+\lambda a'(t)-2\lambda b(t)+2\lambda\mu_2\right\}u^2+\left\{\frac{1}{2\mu_1}+\frac{\lambda}{2\mu_2}\right\}f^2(t) \tag{4.6}$$

yazılabilir. (4.6) eşitsizliğinin solundaki türev ifadesi

$$\delta(t)=(u')^2+b(t)u^2+2\lambda u'u+\lambda a(t)u^2$$

fonksiyonuyla belirtilsin. Bu fonksiyonun $\lambda u'u$ terimi hariç diğer terimlerinin pozitif olduğu açıktır. O halde, λ öyle seçilsin ki fonksiyonun pozitifliği sağlansın. Bunun için de $\delta(t)$ μ - eşitsizliğine göre ($\mu=\frac{1}{2}$ alınarak) düzenlenirse

$$\delta(t)=(u')^2+b(t)u^2+2\lambda u'u+\lambda a(t)u^2$$

$$\geq \frac{1}{2}(u')^2 + \left(b(t) + \lambda a(t) - 2\lambda^2\right)u^2$$

$$\geq \frac{1}{2}(u')^2 + \left\{b(t) + \lambda(\alpha - 2\lambda)\right\}u^2$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu durumda $\lambda = \lambda_0 < \frac{\alpha}{2}$ alınabilir. Bu durumda $\delta(t)$ fonksiyonu için

$$\delta(t) \geq c_0\left((u')^2 + u^2\right)$$

elde edilir. Burada $c_0 > 0$ ve $c_0 = \min\left\{\frac{1}{2}, \min\left(b(t) + \lambda(\alpha - 2\lambda_0)\right)\right\}$' dir.

Şimdi de $\delta(t)$' nin üstten değerlendirmesi alınsın:

$$\delta(t) = (u')^2 + b(t)u^2 + 2\lambda u'u + \lambda a(t)u^2$$

$$\leq (1+\lambda)(u')^2 + (b^* + \lambda + \lambda a^*)u^2.$$

Burada $1+\lambda > 0$ ve $b^* + \lambda + \lambda a^* > 0$ olduğu açıktır.

Benzer olarak (4.6) eşitsizliğinin sağ tarafı da değerlendirmeye alınırsa

$$\geq 2(-a^* + \mu_1 + \lambda)(u')^2 + \left\{b'(t) + \lambda a'(t) - 2\lambda b^* + 2\lambda\mu_2\right\}u^2 + \left\{\frac{1}{2\mu_1} + \frac{\lambda}{2\mu_2}\right\}f^2(t)$$

'dir. Böylece

$$\delta'(t) \leq -C_1\delta(t) + \rho(t)$$

$$\delta(0) = \delta(T)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $0 < C_1 \leq \min\left\{\frac{2(\alpha - \mu_1 - \lambda)}{1+\lambda}, \frac{-\bar{b}^* - \lambda\bar{a}^* + 2\lambda\beta - 2\lambda\mu_2}{b^* + \lambda + \lambda a^*}\right\}$ ve

$\rho(t) = \left\{\frac{1}{2\mu_1} + \frac{\lambda}{2\mu_2}\right\}f^2(t)$' dir.

Bu eşitsizliği çözmek için diferansiyel eşitsizliklerden yararlanılırsa

$$\delta(t) \leq \delta(0)e^{-c_1 t} + \int_0^t \rho(\tau)e^{-c_1(t-\tau)}d\tau$$

eşitsizliği yazılabilir. $\delta(0) = \delta(T)$ şartı denklemde dikkate alınırsa

$$\delta(t) \leq \left[1 - e^{-c_1 T}\right]^{-1}\int_0^t \rho(\tau)e^{-c_1(T-\tau)}d\tau$$

olduğu görülür ki bu da ispatı tamamlar.

4.2. Fark Şemasının Kurulması

(4.1)-(4.3) problemine fark yönteminin uygulanması için

$$\omega_\tau = \left\{ t_j = j\tau, j = 1, 2, ..., M-1, \tau = \frac{T}{M} \right\}$$

şebekesi ele alınsın. Eğer (4.1) de $t = t_j$ alınıp bu noktadaki türevlerin değerleri sonlu farklarla değiştirilirse

$$u_{\bar{t}t,j} + a(t_j)u_{\overset{o}{t},j} + b(t_j)u_j + R_j = f_j \tag{4.7}$$

şeklinde klasik bir bağıntı alınır. Burada

$$R_j = -\left[a(t_j)\frac{\tau^2}{6}u'''(\theta_1) + \frac{\tau^2}{12}u^{(4)}(\theta_2) \right], \quad \theta_1 \in \left(t_{j-1}, t_{j+1}\right), \theta_2 \in \left(t_{j-1}, t_{j+1}\right) \tag{4.8}$$

dır. Şimdi de (4.3) şartının yaklaşımına bakılırsa

$$u(t_{M-1}) = u(t_M) - \tau u'(t_M) + \frac{\tau^2}{2}u''(t_M) - \frac{\tau^3}{6}u'''(\eta_1) \ , \ t_{M-1} \le \eta_1 \le t_M$$

$$u(t_{M+1}) = u(t_M) + \tau u'(t_M) + \frac{\tau^2}{2}u''(t_M) + \frac{\tau^3}{6}u'''(\eta_2) \ , \ t_M \le \eta_2 \le t_{M+1}$$

şeklindeki Taylor açılımından kolayca görülür ki,

$$u_{\bar{t},M} = u'(t_M) - \frac{\tau}{2}u''(t_M) + \frac{\tau^2}{6}u'''(\eta_1)$$

$$u_{t,0} = u'(t_0) + \frac{\tau}{2}u''(t_0) + \frac{\tau^2}{6}u'''(\eta_2)$$

dir. (4.1) denklemindeki $u'' = -a(t)u' - b(t)u + f$ eşitliğinden

$$u_{\bar{t},M} + \frac{\tau}{2}\left[-a(t_M)u'_M - b(t_M)u_M + f_M\right] = u'(t_M) + \frac{\tau^2}{6}u'''(\eta_1)$$

$$u_{t,0} - \frac{\tau}{2}\left[-a(t_0)u'_0 - b(t_0)u_0 + f_0\right] = u'(t_0) + \frac{\tau^2}{6}u'''(\eta_2)$$

bulunur. Fonksiyonların periyodiklik şartları göz önünde bulundurularak son iki bağıntı tek eşitlik altında yazılırsa

$$u_{t,0} - \frac{\tau}{2}\left[-a(t_0)u'_0 - b(t_0)u_0 + f_0\right] - \frac{\tau^2}{6}u'''(\eta_2) = u_{\bar{t},M}$$
$$+ \frac{\tau}{2}\left[-a(t_M)u'_M - b(t_M)u_M + f_M\right] - \frac{\tau^2}{6}u'''(\eta_1)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{u_{t,0} - u_{\bar{t},M}}{\tau} + a(t_M)u'_M + b(t_M)u_M - f_M - \frac{\tau}{6}\left[u'''(\eta_2) - u'''(\eta_1)\right] = 0 \tag{4.9}$$

ifadesi yazılabilir.

$$u'(t_M) = u_{\overset{o}{t},M} - \frac{\tau^2}{6} u'''(\theta), \quad t_{M-1} \le \theta \le t_{M+1}$$

olduğu biliniyor. Ayrıca $u_1 = u_{M+1}$ ifadesi ele alınır ve $\frac{u_{t,0} - u_{\bar{t},M}}{\tau} = u_{\bar{t}t,M}$ ikinci fark türevi (4.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$u_{\bar{t}t,M} + a(t_M) u_{\overset{o}{t},M} + b(t_M) u_M + R_M = f_M \tag{4.10}$$

denklemi elde edilir. Burada

$$R_M = -a(t_M) \frac{\tau^2}{6} u'''(\theta) - \frac{\tau}{6} \left[u'''(\eta_2) - u'''(\eta_1) \right] \tag{4.11}$$

dir. (4.7) ve (4.10) deki kalan terimler atılırsa (4.1)-(4.3) problemi için

$$\ell y \equiv y_{\bar{t}t,j} + a(t_j) y_{\overset{o}{t},j} + b(t_j) y_j = f_j \ , \quad t_j \in \omega_\tau^+, \tag{4.12}$$

$$y_0 = y_M, \tag{4.13}$$

$$y_1 = y_{M+1} \tag{4.14}$$

fark şeması elde edilir. $\left(\omega_\tau^+ = \omega_\tau \cup \{ t = T \} \right)$

4.3. Yaklaşık Çözümün Hatasının Değerlendirilmesi

Yaklaşık çözümün hatasının değerlendirmesi için aşağıdaki Lemma verilsin.

Lemma 4.3.1: $0 < \alpha \le a(t_j) \le a^*$, $0 < \beta \le b(t_j) \le b^*$ ve $\bar{a}_* \le a'(t_j) \le \bar{a}^* \le 0$, $\bar{b}_* \le b'(t_j) \le \bar{b}^* \le 0$ olmak üzere yaklaşık çözümün $z = y - u$ hatası için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\left| z_{t,j} \right|^2 + \left| z_{j+1} \right|^2 + \left| z_j \right|^2 \le C\tau \sum_{i=1}^{M} \left| R_i \right|^2 \ , \ t \in \omega_\tau \tag{4.15}$$

Burada ve sonraki kısımlarda C, C_i $\left(i = 1, 2, \ldots \right)$, τ' ya bağlı olmayan sabitlerdir.

İspat: $z = y - u$ yaklaşık çözümün hatası olsun. $y = z + u$ ifadesi (4.12)- (4.14) fark denkleminde yerine yazılırsa

$$\ell z \equiv z_{\bar{t}t,j} + a(t_j) z_{\overset{o}{t},j} + b(t_j) z_j = R_j \ , \ t_j \in \omega_\tau^+, \tag{4.16}$$

$$z_0 = z_M, \tag{4.17}$$

$$z_1 = z_{M+1} \tag{4.18}$$

elde edilir. Burada $R_j = f_j - \ell u_j$ yaklaşım hatası $j = 1, 2, ..., M-1$ değerlerinde (4.8) ve $j = 1, 2, ..., M$ değerlerinde ise (4.11) ile verilir.

Çözümün değerlendirilmesi için (4.16) eşitliğinin her iki tarafı $\lambda > 0$ reel parametre olmak üzere $z_{t,j} + \lambda z_j$ ifadesiyle çarpılırsa

$$\ell z_j \left(z_{t,j} + \lambda z_j \right) = R_j \left(z_{t,j} + \lambda z_j \right)$$

özdeşliğinden

$$z_{\bar{t}t,j} z_{t,j} + \lambda z_{\bar{t}t,j} z_j + a_j z_{\overset{o}{t},j} z_{t,j} + \lambda a_j z_{\overset{o}{t},j} z_j + b_j z_{t,j} z_j + \lambda b_j z_j^2 = z_{t,j} R_j + \lambda z_j R_j \tag{4.19}$$

denklemi elde edilir. Buradaki

$$z_{\bar{t}t,j} z_{t,j} = \frac{1}{2}\left(z_{t,j}^2 \right)_{\bar{t},j} + \frac{1}{2}\tau z_{\bar{t}t,j}^2 ,$$

$$\lambda z_{\bar{t}t,j} z_j = \lambda \left(z_{t,j} . z_j \right)_{\bar{t},j} - \lambda z_{\bar{t},j}^2 ,$$

$$a_j z_{\overset{o}{t},j} z_{t,j} = a_j z_{t,j}^2 - \frac{\tau}{4}\left(a_j z_{t,j}^2 \right)_{\bar{t},j} + \frac{\tau}{4} a_{\bar{t},j} z_{t,j}^2 - \frac{\tau^2}{4} a_j z_{\bar{t}t,j}^2 ,$$

$$\lambda a_j z_{\overset{o}{t},j} z_j = \frac{\lambda}{4}\left[a_j \left(z_{j+1}^2 + z_j^2 \right) \right]_{\bar{t},j} - \frac{\lambda}{4} a_{\bar{t},j} \left(z_j^2 + z_{j-1}^2 \right) - \frac{\lambda}{4}\tau^2 \left(a_j z_{t,j}^2 \right)_{\bar{t},j} + \frac{\lambda}{4}\tau^2 a_{\bar{t},j} z_{\bar{t},j} ,$$

$$b_j z_{t,j} z_j = \frac{1}{2}\left(b_j z_{j+1}^2 \right)_{\bar{t},j} - \frac{1}{2} b_{\bar{t},j} z_j^2 - \frac{\tau}{2} b_j z_{t,j}^2 ,$$

$$z_{t,j} R_j \le \mu_1 z_{t,j}^2 + \frac{1}{4\mu_1} R_j^2 ,$$

$$\lambda z_j R_j \le \lambda \mu_2 z_j^2 + \frac{\lambda}{4\mu_2} R_j^2$$

ifadeleri (4.19) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left\{ \frac{1}{2} z_{t,j}^2 + \lambda z_{t,j} z_j - \frac{\tau}{4} a_j z_{t,j}^2 + \frac{\lambda}{4} a_j \left(z_{j+1}^2 + z_j^2 \right) - \frac{\lambda}{4}\tau^2 a_j z_{t,j}^2 + \frac{1}{2} b_j z_{j+1}^2 \right\}_{\bar{t},j} \le \lambda z_{\bar{t},j}^2 - a_j z_{t,j}^2$$

$$- \frac{\tau}{4} a_{\bar{t},j} z_{\bar{t},j}^2 - \frac{\lambda}{4}\tau^2 a_{\bar{t},j} z_{\bar{t},j}^2 + \frac{\tau}{2} b_j z_{t,j}^2 + \mu_1 z_{t,j}^2 + \frac{\lambda}{4} a_{\bar{t},j} \left(z_j^2 + z_{j-1}^2 \right) + \frac{1}{2} b_{\bar{t},j} z_j^2 - \lambda b_j z_j^2 + \lambda \mu_2 z_j^2$$

$$+ \left(\frac{1}{4\mu_1} + \frac{\lambda}{4\mu_2} \right) R_j^2$$

elde edilir. Ayrıca denklemdeki

$$-a_j z_{t,j}^2 = -a_{j-1} z_{\bar{t},j}^2 - \tau \left(a_j z_{t,j}^2 \right)_{\bar{t},j} ,$$

$$\frac{\tau}{2} b_j z_{t,j}^2 = \frac{\tau}{2} b_{j-1} z_{\bar{t},j}^2 + \frac{\tau^2}{2} \left(b_j z_{t,j}^2 \right)_{\bar{t},j} ,$$

$$\mu_1 z_{t,j}^2 = \mu_1 z_{\bar{t},j}^2 + \mu_1 \tau \left(z_{t,j}^2 \right)_{\bar{t},j}$$

bağıntıları da denklemde değerlendirilirse

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{4} a_j - \frac{\lambda}{4} \tau^2 a_j + \tau a_j - \frac{\tau^2}{2} b_j - \mu_1 \tau \right) z_{t,j}^2 + \lambda z_{t,j} z_j + \left(\frac{\lambda a_j}{4} + \frac{b_j}{2} \right) z_{j+1}^2 + \frac{\lambda}{4} a_j z_j^2 \right\}_{\bar{t},j} \leq$$

$$\left(\lambda - a_{j-1} - \frac{\tau}{4} a_{\bar{t},j} - \frac{\lambda}{4} \tau^2 a_{\bar{t},j} + \frac{\tau}{2} b_{j-1} + \mu_1 \right) z_{\bar{t},j}^2 + \left(\frac{\lambda}{4} a_{\bar{t},j} + \frac{1}{2} b_{\bar{t},j} - \lambda b_j + \lambda \mu_2 \right) z_j^2 + \frac{\lambda}{4} a_{\bar{t},j} z_{j-1}^2$$

$$+ \left(\frac{1}{4\mu_1} + \frac{\lambda}{4\mu_2} \right) R_j^2$$

ifadesine ulaşılır. Sağdaki ikinci terimin yarısı üçüncü terime eklenirse;

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{4} a_j - \frac{\lambda}{4} \tau^2 a_j + \tau a_j - \frac{\tau^2}{2} b_j - \mu_1 \tau \right) z_{t,j}^2 + \lambda z_{t,j} z_j + \left(\frac{\lambda a_j}{4} + \frac{b_j}{2} \right) z_{j+1}^2 \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\lambda a_j}{4} - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\lambda}{4} a_{\bar{t},j} + \frac{1}{2} b_{\bar{t},j} - \lambda b_j + \lambda \mu_2 \right) \right] z_j^2 \right\}_{\bar{t},j}$$

$$\leq \left(\lambda - a_{j-1} - \frac{\tau}{4} a_{\bar{t},j} - \frac{\lambda}{4} \tau^2 a_{\bar{t},j} + \frac{\tau}{2} b_{j-1} + \mu_1 \right) z_{\bar{t},j}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{4} a_{\bar{t},j} + \frac{1}{2} b_{\bar{t},j} - \lambda b_j + \lambda \mu_2 \right) z_j^2$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2} a_{\bar{t},j} + \frac{\lambda}{4} a_{\bar{t},j-1} + \frac{1}{2} b_{\bar{t},j-1} - \lambda b_{j-1} + \lambda \mu_2 \right) z_{j-1}^2 + \left(\frac{1}{4\mu_1} + \frac{\lambda}{4\mu_2} \right) R_j^2 \tag{4.20}$$

şeklinde bir eşitsizlik elde edilir.

$$\delta(t_j) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{4} a_j - \frac{\lambda}{4} \tau^2 a_j + \tau a_j - \frac{\tau^2}{2} b_j - \mu_1 \tau \right) z_{t,j}^2 + \lambda z_{t,j} z_j + \left(\frac{\lambda a_j}{4} + \frac{b_j}{2} \right) z_{j+1}^2$$

$$+ \left[\frac{\lambda a_j}{4} - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\lambda}{4} a_{\bar{t},j} + \frac{1}{2} b_{\bar{t},j} - \lambda b_j + \lambda \mu_2 \right) \right] z_j^2 \tag{4.21}$$

olacak şekilde bir şebeke fonksiyonu tanımlansın. $\delta(t_j)$' nin alttan ve üstten değerlendirilmesi alınsın.

Öncelikle alttan değerlendirilirse

$$\delta(t_j) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{4} a^* - \frac{\lambda}{4} \tau^2 a^* + \tau \alpha - \frac{\tau^2}{2} b^* - \mu_1 \tau - \lambda \mu_3 \right) z_{t,j}^2 + \left(\frac{\lambda \alpha}{4} + \frac{\beta}{2} \right) z_{j+1}^2$$

$$+ \left[\frac{\lambda \alpha}{4} - \frac{\lambda}{4\mu_3} - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\lambda}{4} \bar{a}^* + \frac{1}{2} \bar{b}^* - \lambda \beta + \lambda \mu_2 \right) \right] z_j^2 \tag{4.22}$$

eşitsizliği bulunur. $z_{t,j}^2$, z_{j+1}^2, z_j^2 ifadelerinin katsayıları

$$A_1 = \frac{1}{2} - \lambda\mu_3 - \frac{\tau}{4}a* - \frac{\lambda}{4}\tau^2 a* + \tau\alpha - \frac{\tau^2}{2}b* - \mu_1\tau,$$

$$A_2 = \frac{\lambda\alpha}{4} + \frac{\beta}{2},$$

$$A_3 = \frac{\lambda\alpha}{4} - \frac{\lambda}{4\mu_3} - \frac{\tau}{2}\left(\frac{\lambda}{4}\bar{a}* + \frac{1}{2}\bar{b}* - \lambda\beta + \lambda\mu_2\right)$$

şeklinde isimlendirilirse

$$\delta(t_j) \geq A_1 z_{\bar{t},j}^2 + A_2 z_{j+1}^2 + A_3 z_j^2 \geq C_0\left(z_{\bar{t},j}^2 + z_{j+1}^2 + z_j^2\right)$$

denklemi yazılabilir. Burada $C_0 = \min\{A_1, A_2, A_3\} > 0$ olmak üzere τ dan bağımsız sabittir.

Benzer olarak $\delta(t_j)$' nin üstten değerlendirmesi yapılırsa

$$\delta(t_j) \leq \left(\frac{1}{2} - \frac{\tau}{4}\alpha - \frac{\lambda}{4}\tau^2\alpha + \tau a* - \frac{\tau^2}{2}\beta - \mu_1\tau + \lambda\mu_3\right) z_{\bar{t},j}^2 + \left(\frac{\lambda a*}{4} + \frac{b*}{2}\right) z_{j+1}^2$$

$$+\left[\frac{\lambda a*}{4} + \frac{\lambda}{4\mu_3} - \frac{\tau}{2}\left(\frac{\lambda}{4}\bar{a}_* + \frac{1}{2}\bar{b}_* - \lambda b* + \lambda\mu_2\right)\right] z_j^2 \tag{4.23}$$

ifadesi elde edilir. Buradaki $z_{\bar{t},j}^2$, z_{j+1}^2 ve z_j^2 ifadelerinin katsayıları da

$$B_1 = \frac{1}{2} + \lambda\mu_3 - \frac{\tau}{4}\alpha - \frac{\lambda}{4}\tau^2\alpha + \tau a* - \frac{\tau^2}{2}\beta - \mu_1\tau,$$

$$B_2 = \frac{\lambda a*}{4} + \frac{b*}{2},$$

$$B_3 = \frac{\lambda a*}{4} + \frac{\lambda}{4\mu_3} - \frac{\tau}{2}\left(\frac{\lambda}{4}\bar{a}_* + \frac{1}{2}\bar{b}_* - \lambda b* + \lambda\mu_2\right)$$

olsun.

Ayrıca (4.20)' nin sağ tarafı da üstten değerlendirilirse

$$\leq \left(\lambda - \alpha - \frac{\tau}{4}\bar{a}_* - \frac{\lambda}{4}\tau^2\bar{a}_* + \frac{\tau}{2}b* + \mu_1\right) z_{\bar{t},j}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{4}\bar{a}* + \frac{1}{2}\bar{b}* - \lambda\beta + \lambda\mu_2\right) z_j^2$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{2}\bar{a}* + \frac{\lambda}{4}\bar{a}* + \frac{1}{2}\bar{b}* - \lambda\beta + \lambda\mu_2\right) z_{j-1}^2 + \left(\frac{1}{4\mu_1} + \frac{\lambda}{4\mu_2}\right) R_j^2 \tag{4.24}$$

dir. Burada da $z_{\bar{t},j}^2$, z_j^2 ve z_{j-1}^2' nin katsayıları

$$D_1 = \alpha - \lambda - \mu_1 + \frac{\tau}{4}\bar{a}_* + \frac{\lambda}{4}\tau^2\bar{a}_* - \frac{\tau}{2}b*,$$

$$D_2 = \frac{1}{2}\left(\lambda\beta - \frac{\lambda}{4}\bar{a}* - \frac{1}{2}\bar{b}* - \lambda\mu_2\right),$$

$$D_3 = \frac{1}{2}\left(\lambda\beta - \frac{\lambda}{4}\bar{a}* - \frac{\lambda}{4}\bar{a}* - \frac{1}{2}\bar{b}* - \lambda\mu_2\right)$$

şeklinde adlandırılsın. Lemma 4.3.1' deki şartlar dahilinde yeteri kadar küçük τ için $A_i > 0,\ D_i > 0,\ i = 1,2,3$ seçilebilir. Bunun için kolayca görülebilir ki

$$\frac{1}{2} - \lambda\mu_3 > 0, \tag{4.25}$$

$$\frac{\lambda\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} > 0, \tag{4.26}$$

$$\alpha - \frac{1}{\mu_3} > 0, \tag{4.27}$$

$$\alpha - \lambda - \mu_1 > 0, \tag{4.28}$$

$$\lambda\beta - \frac{\lambda}{4}\bar{a}* - \frac{1}{2}\bar{b}* - \lambda\mu_2 > 0, \tag{4.29}$$

$$\lambda\beta - \frac{\lambda}{4}\bar{a}* - \frac{\lambda}{4}\bar{a}* - \frac{1}{2}\bar{b}* - \lambda\mu_2 > 0 \tag{4.30}$$

şartlarının sağlanması yeterlidir.

Bu eşitsizlikler göz önüne alındığında, $\lambda > 0$ olduğundan (4.26) her zaman sağlanır. μ_2' nin yeterince küçük seçilmesiyle $(\mu_2 < \beta)$, (4.29) ve (4.30) sağlanır. Ayrıca kolayca görülebilir ki, $\lambda < \frac{\alpha}{2}$, $\frac{1}{\alpha} < \mu_3 < \frac{1}{2\lambda}$ ve $\mu_1 < \alpha - \lambda$ seçimleriyle (4.25), (4.27) ve (4.28) şartları da sağlanacaktır.

Böylece (4.20)' den aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$\delta_{\bar{t},j} \le -D_1 z_{\bar{t},j}^2 - D_2 z_j^2 - D_3 z_{j-1}^2 + \rho_j = -\frac{D_1}{B_1} B_1 z_{\bar{t},j}^2 - \frac{D_2}{B_2} B_2 z_j^2 - \frac{D_3}{B_3} B_3 z_{j-1}^2 + \rho_j$$

Başka bir deyişle

$$\delta_{\bar{t},j} \le -C_1 \delta_{j-1} + \rho_j$$

$$\delta_0 = \delta_M$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $C_1 = \min\left\{\frac{D_1}{B_1}, \frac{D_2}{B_2}, \frac{D_3}{B_3}\right\} > 0$ ve $\rho_j = \left(\frac{1}{4\mu_1} + \frac{\lambda}{4\mu_2}\right) R_j^2$' dir.

Elde edilen eşitsizliğe 2.3. Lemma uygulanırsa,

$$\delta_K \le \left[1-\exp\left(-C_1 T\right)\right]^{-1}\left\{\tau\sum_{i=1}^{M}\left|\rho_i\right|\exp\left(-C_1.t_{M-i}\right)\right\}\exp\left(-C_1 t_K\right)$$

$$+\tau\sum_{i=1}^{K}\left|\rho_i\right|\exp\left(-C_1 t_{K-i}\right),\quad K=1,2,,...,M$$

eşitsizliği bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\left|z_{t,j}\right|^2+\left|z_{j+1}\right|^2+\left|z_j\right|^2 \le C\tau\sum_{i=1}^{M}\left|R_i\right|^2$$

değerlendirmesine ulaşılır ki bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4.3.1' deki ifade genelleştirilebilir. Bunun için $b(t)$, $a'(t)$ ve $b'(t)$ ' nin işaretlerine konmuş şartlar kaldırılsın. Yani

$$b_* \le b(t_j),\quad \bar{a}_* \le a'(t_j) \le \bar{a}^* \text{ ve } \bar{b}_* \le b'(t_j) \le \bar{b}^*$$

olsun. Bu şartlar dahilinde aşağıdaki uyarı verilebilir.

Uyarı 4.3.1: Aşağıdaki şartlar sağlansın.

$$\frac{\lambda_0\alpha}{2}+b_*>0,$$

$$\lambda_0 b_*-\frac{\lambda_0}{4}\chi-\frac{1}{2}\bar{b}^*>0.$$

Burada $\lambda_0<\dfrac{\alpha}{2}$ ve $\chi=\max\left(\bar{a}^*,3\bar{a}^*\right)$' dir. Bu şartlar dahilinde (4.15) değerlendirmesi doğru olacaktır. Bu ifadenin doğruluğu 4.3.1 Lemma ' daki ispata benzer şekilde gösterilebilir.

Böylece alınan sonuçlara bağlı olarak şöyle bir teorem verilebilir.

Teorem 4.3.1: $u\in C^4$ olmak üzere Lemma 4.3.1' deki veya Uyarı 4.3.1 ' deki şartlar sağlanırsa o zaman (4.12)- (4.14) fark probleminin ω_τ^+' da (4.3)' ün çözümüne yakınsar ve yakınsama hızı için aşağıdaki değerlendirme doğrudur.

$$\left|z_{t,j}\right|+\left|z_{j+1}\right|+\left|z_j\right| \le C\tau^2. \tag{4.31}$$

İspat: Bu değerlendirmenin ispatı direkt olarak (4.15)' den alınabilir. Bunun için (4.15)' in sağ tarafının $O(\tau^2)$ hızına sahip olduğunu göstermek yeterlidir. (4.8) ve (4.11) dikkate alınırsa,

$$C\tau\sum_{j=1}^{M}\left|R_j\right|\exp\left(-C_1.t_{M-i}\right) \le C\tau\sum_{j=1}^{M}\left|a(t_j).\frac{\tau^2}{6}u'''(\theta_1)+\frac{\tau^2}{12}u^{(4)}(\theta_2)\right|$$

$$+C\tau\left|a(t_M).\frac{\tau^2}{6}u'''(\theta)+\frac{\tau}{6}\left[u'''(\eta_2)-u'''(\eta_1)\right]\right| \tag{4.32}$$

yazılabilir.

$u \in C^4$ olduğundan (4.31)' in sağındaki her iki terimin de $O(\tau^2)$ hızına sahip olduğu açıktır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

5. SİNGÜLER PERTÜRBE OLMUŞ PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN FARK ŞEMASI

Singüler perturbe diferansiyel denklemler, mühendislik ve bilimsel uygulamaların ilgi alanında olmuştur. Bunların arasında akışkanlar mekaniğinin Navier-Stokes denklemleri, likit kristal materyalleri ve kimyasal reaksiyonların matematiksel modelleri, kontrol teorisi, elektrik ağları bulunmaktadır (O’ Malley, 1991; Nayfeh, 1993).

Matematiksel olarak bu tip problemler, en yüksek mertebeli türev içeren terimlerinin katsayılarının küçük bir ε parametresi olduğu problemlerdir. ε’ un küçük değerleri için çok iyi biliniyor ki, bu tip problemleri çözmek için kullanılan standart nümerik metotlar kararsızdır ve kesin çözümü verme konusunda yetersizdir. Bu nedenle, bu problemlere uygun nümerik metotları (doğruluğu ε parametresinin değerine bağlı olmayan) geliştirmek önemlidir.

Amiraliyev ve Duru (2003) periyodik sınır- değer probleminin nümerik çözümü için düzgün şebeke üzerinde, ağırlık fonksiyonu içeren ve kalan terimleri integral formda olan interpolasyon kuadratur formülleri ve üstel baz fonksiyonunun kullanılmasıyla oluşan integral özdeşlikleri metoduna dayanarak fark şeması oluşturmuşlar ve ε’ da düzgün, birinci mertebeden düzgün yakınsak olduğunu ispatlamışlardır. Daha sonra Cen (2010), benzer bir problem ele alarak yine düzgün şebeke üzerinde hibrid fark şeması kurarak şemanın kararlılığını ispat etmiştir.

Bu bölümde, singüler perturbe periyodik sınır- değer probleminin önce kesin çözümünün değerlendirmesi yapılmış, daha sonra üstel baz fonksiyonu ve integral özdeşlikler metodu yardımıyla fark şeması kurulmuş, fark şemasının kararlılığı incelenmiş ve teorik sonuçları destekler nitelikte bir örnek sunulmuştur.

$$Lu \equiv \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(x) u' - b(x) u = f(x), \quad 0 < x < l, \tag{5.1}$$

$$u(0) = u(l), \tag{5.2}$$

$$L_0 u \equiv u'(l) - u'(0) = \frac{A}{\varepsilon} \tag{5.3}$$

problemi ele alınsın. Burada $\varepsilon > 0$ küçük bir parametre, $a(x) \geq \alpha > 0$, $b(x) \geq \beta > 0$ ve $f(x)$ verilmiş fonksiyonlar ve A da belli bir sabittir. $a(x)$, $b(x)$ ve $f(x)$ yeterince düzgün ve $a(0) = a(l)$, $b(0) = b(l)$ ve $f(0) = f(l)$ şartlarını sağlayan periyodik fonksiyonlar olsun. (5.1)- (5.3) probleminin u çözümü genelde $x=0$ ve $x=l$ civarında sınır katına sahiptir.

5.1. Diferansiyel Problem

Lemma 5.1.1 (Maksimum Prensibi): L ve L_0, (5.1)- (5.3) probleminde tanımlı diferansiyel operatörler ve $\upsilon \in C^2[0,l]$ olsun. Eğer, $0<x<l$ için $\upsilon(0)=\upsilon(l)$, $L_0\upsilon \geq 0$ ve $L\upsilon \leq 0$ ise, bütün $0\leq x\leq l$ için $\upsilon(x)\geq 0$ olur.

İspat: Hipotezin tersi kabul edilsin. Yani $\upsilon(p_0)<0$ olacak şekilde $x=p_0\in[0,l]$ noktası var olsun. $p_1\in[0,l]$ noktası da $\upsilon(p_1)=\min\limits_{[0,l]}\upsilon(x)$ olacak şekilde seçilsin. p_1 minimum olduğundan $x=p_1$ noktasında , $\upsilon'(p_1)=0$ ve $\upsilon''(p_1)\geq 0$ olacaktır. Böylece,

$$L\upsilon(p_1)=\varepsilon^2\upsilon''(p_1)+\varepsilon a(p_1)\upsilon'(p_1)-b(p_1)\upsilon(p_1)>0$$

bulunur. Bu durum hipotezle çelişir. Bu durumda $\upsilon(x)$ minimum değerini $x=0$ noktasında alır. Yani,

$$\upsilon(0)=\min\upsilon(x),\ \left(\upsilon(0)=\upsilon(l)\right)$$

olur. Bu durumda $\upsilon'(0)\geq 0$ bulunur. Diğer yandan $L_0\upsilon\geq 0$ şartından

$$L_0\upsilon=\upsilon'(l)-\upsilon'(0)\geq\frac{A}{\varepsilon}\Rightarrow\upsilon'(l)\geq\upsilon'(0)+\frac{A}{\varepsilon}\geq 0\Rightarrow\upsilon'(l)\geq\upsilon'(0)\geq 0$$

yazılabilir. Bu durumda $\upsilon(x)$ fonksiyonu $[0,l]$ aralığında artan bir fonksiyondur. Dolayısıyla $\upsilon(x)$ fonksiyonu minimumunu $p_2\in(0,l)$ gibi bir noktada almalıdır ki yukarıda gösterildiği gibi bu mümkün değildir.

Lemma 5.1.2: Eğer $a,b,f\in C[0,l]$ ise, (5.1)- (5.3) probleminin $u(x)$ çözümü

$$\|u\|\leq\beta^{-1}\|f\|+\bar{\beta}|A| \tag{5.4}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada $\|u\|=\max\limits_{[0,l]}|u(x)|$, $\bar{\beta}=c_0^{-1}\coth\left(\frac{c_0 l}{4}\right)$, $c_0=a^*+\sqrt{\left(a^*\right)^2+4\beta}$, $a^*=\max\limits_{[0,l]}a(x)$' dir.

İspat: Lemmanın ispatı için öncelikle $\Psi_\pm(x)=\beta^{-1}|f|+|A|\omega(x)\pm u(x)$ yardımcı fonksiyonu ele alınsın. Burada,

$$\omega(x)=\frac{e^{-c_0x/2\varepsilon}-e^{-c_0(l-x)/2\varepsilon}}{c_0\left(1-e^{-c_0l/2\varepsilon}\right)}=\frac{\cosh\left(\frac{c_0(2x-l)}{4\varepsilon}\right)}{c_0\sinh\left(\frac{c_0l}{4\varepsilon}\right)}$$

fonksiyonudur. Kolayca gösterilebilir ki

$$\Psi_\pm(0)=\Psi_\pm(l)$$

$$\Psi'_\pm(l)-\Psi'_\pm(0)=\frac{|A|}{\varepsilon}\pm\frac{A}{\varepsilon}\geq 0$$

$$\begin{aligned}L\Psi_\pm(x)&=\frac{1}{4}\omega(x)\left[c_0^2-2a(x)c_0\tanh\left(\frac{c_0l}{4\varepsilon}\right)-4b(x)\right]\\&\leq\frac{1}{4}\omega(x)\left(c_0^2-2a^*c_0-4\beta\right)\\&=0\end{aligned}$$

ifadeleri doğrudur. Buradan $L\Psi_\pm(x)\leq 0$ elde edilir. Maksimum prensibinden dolayı $x\in[0,l]$ için $\Psi_\pm(x)\geq 0$ bulunmuş olur. O halde

$$\Psi_\pm(x)=\beta^{-1}|f|+|A|\omega(x)\pm u(x)\geq 0$$

$$|u(x)|\leq\beta^{-1}|f|+|A|\omega(x)$$

yazılabilir. Bu durumda $\varepsilon\leq 1$ için $\omega(x)\leq c_0^{-1}\coth\left(\frac{c_0l}{4}\right)$ olacağından (5.4) eşitsizliği elde edilmiş olur.

Lemma 5.1.3: (5.1)- (5.3) problemi için $a\in C^1[0,l]$ ve $b,f\in C[0,l]$ olsun. Bu durumda (5.1)- (5.3) probleminin çözümünün $u'(x)$ türevi için

$$\|u'(x)\|\leq\frac{C}{\varepsilon}\tag{5.5}$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat:

$$u(x)=e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}\upsilon(x)\tag{5.6}$$

dönüşümü verilsin. Bu dönüşüm altında (5.1) denklemi

$$\varepsilon^2\upsilon''-\left[\frac{a^2(x)}{4}-\frac{\varepsilon a'(x)}{2}+b(x)\right]\upsilon=f(x)e^{\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}\tag{5.7}$$

formuna dönüşür. (5.4) ve (5.6) denklemlerinden

$$\left|\upsilon(x)\right| \le Ce^{\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}, 0 \le x \le l \tag{5.8}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (5.7) denkleminden

$$\left|\upsilon''(x)\right| \le C\varepsilon^{-2} e^{\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}, 0 \le x \le l \tag{5.9}$$

sonucuna ulaşılır.

Şimdi de $\left|\upsilon'(0)\right|$ değerlendirmesi verilsin. Burada herhangi $g \in C^2[0,l]$ fonksiyonu için geçerli olan

$$g'(x) = g[\alpha_0, \alpha_1] - \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} K_0(t,x) g''(t)dt, \qquad \alpha_0 \le x \le \alpha_1 \tag{5.10}$$

eşitliği ele alınsın. Buradaki $g[\alpha_0, \alpha_1]$ bölünmüş farkı ile $K_0(t,x)$ fonksiyonu

$$g[\alpha_0, \alpha_1] = \frac{g(\alpha_1) - g(\alpha_0)}{\alpha_1 - \alpha_0},$$

$$K_0(t,x) = T_0(t-x) - (\alpha_1 - \alpha_0)^{-1}(t - \alpha_0),$$

ve

$$T_0 = \begin{cases} 1, & \lambda \ge 0 \\ 0, & \lambda < 0 \end{cases}$$

eşitlikleriyle ifade edilir. (5.10) eşitliğinde $g(x) = \upsilon(x)$, $x = 0$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = \varepsilon$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\left|\upsilon'(0)\right| &= \left|\varepsilon^{-1}\left[\upsilon(\varepsilon) - \upsilon(0)\right] - \int_0^\varepsilon \left(1 - \varepsilon^{-1}t\right)\upsilon''(t)dt\right| \\
&\le \varepsilon^{-1}\left(\left|\upsilon(\varepsilon)\right| - \left|\upsilon(0)\right|\right) + \int_0^\varepsilon \left(1 - \varepsilon^{-1}t\right)\left|\upsilon''(t)\right|dt \\
&\le \varepsilon^{-1}\left(\left|\upsilon(\varepsilon)\right| - \left|\upsilon(0)\right|\right) + C\varepsilon^{-2}\int_0^\varepsilon e^{\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi} dt \\
&\le C\varepsilon^{-1}
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (5.6) eşitliğinden türev alınırsa

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \left(e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi} \upsilon(x) \right)' \\
&= -\frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi} \upsilon(x) + e^{-\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi} \upsilon'(x)
\end{aligned}$$

olacağından $u'(0)=\upsilon'(0)-\frac{1}{2\varepsilon}a(0)\upsilon(0)$ yazılabilir. Buradan

$$|u'(0)|\le C\varepsilon^{-1} \tag{5.11}$$

elde edilir. Şimdi de (5.1) denklemi

$$u''+\varepsilon^{-1}a(x)u'=\varepsilon^{-2}\left[f(x)+b(x)u\right]$$

şeklinde düzenlenirse denklemin $u'(x)$ çözümü için

$$u'(x)=u'(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}+\varepsilon^{-2}\int_0^x\left[f(\tau)+b(\tau)u(\tau)\right]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}d\tau$$

eşitliği yazılabilir. O halde

$$|u'(x)|=\left|u'(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}+\varepsilon^{-2}\int_0^x\left[f(\tau)+b(\tau)u(\tau)\right]e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}d\tau\right|$$

$$\le|u'(0)|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}+\varepsilon^{-2}\int_0^x|f(\tau)|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}d\tau+\varepsilon^{-2}\int_0^x b(\tau)|u(\tau)|e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}d\tau$$

değerlendirmesi doğrudur. Böylece (5.4) ve (5.11) denklemlerinden

$$\|u'(x)\|\le\frac{C}{\varepsilon}$$

eşitsizliğine ulaşılır ki bu da ispatı tamamlar.

Lemma 5.1.4: Eğer $a,b,f\in C^1[0,l]$ ise eşitsizlik

$$|u'(x)|\le C\left\{1+\frac{1}{\varepsilon}\left(e^{-\frac{c_0x}{\varepsilon}}+e^{-\frac{c_1(l-x)}{\varepsilon}}\right)\right\},\quad 0\le x\le l$$

haline dönüşür. Bu eşitsizlikte

$$c_0=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2(0)+4b(0)}+a(0)\right),$$

$$c_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2(l)+4b(l)}-a(l)\right)$$

sabitleridir.

Şimdi de periyodik sınır değer probleminin kesin çözümünün incelenmesi üzerine bir örnek verilsin.

Örnek 5.1.1:

$$\varepsilon^2u''+\varepsilon u'-u=0,$$

$$u(0)=u(1),\quad u'(l)-u'(0)=\frac{1}{\varepsilon}$$

problemi ele alınsın. Bu problemin kesin çözümü

$$u_\varepsilon(x)=\frac{e^{\left(-1+\sqrt{5}\right)/2\varepsilon}}{\sqrt{5}\left(e^{\left(-1+\sqrt{5}\right)/2\varepsilon}-1\right)\left(e^{-\left(1+\sqrt{5}\right)/2\varepsilon}-1\right)}\left[\left(e^{-\sqrt{5}(1-x)/\varepsilon}-1\right)e^{-\left(1+\sqrt{5}\right)x/2\varepsilon}+\left(e^{-\sqrt{5}x/\varepsilon}-1\right)e^{\left(1-\sqrt{5}\right)(1-x)/2\varepsilon}\right]$$

şeklindedir. Problemin $x=0$ ve $x=1$ civarında iki sınır katı vardır. Bunun göstergelerinden biri de tekrarlı limitlerinin birbirine eşit olmamasıdır:

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{x\to0^+}u_\varepsilon(x)\neq\lim_{x\to0^+}\lim_{\varepsilon\to0^+}u_\varepsilon(x)=0\,,$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}=\lim_{\varepsilon\to0^+}\lim_{x\to1^-}u_\varepsilon(x)\neq\lim_{x\to1^-}\lim_{\varepsilon\to0^+}u_\varepsilon(x)=0\,.$$

Ayrıca fonksiyonun

$$u'_\varepsilon(x)=\frac{e^{\left(-1+\sqrt{5}\right)/2\varepsilon}}{\sqrt{5}\left(e^{\left(-1+\sqrt{5}\right)/2\varepsilon}-1\right)\left(e^{-\left(1+\sqrt{5}\right)/2\varepsilon}-1\right)}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2\varepsilon}+\frac{\sqrt{5}-1}{2\varepsilon}e^{-\sqrt{5}(1-x)/\varepsilon}\right)e^{-\left(1+\sqrt{5}\right)x/2\varepsilon}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2\varepsilon}-\frac{\sqrt{5}+1}{2\varepsilon}e^{-\sqrt{5}x/\varepsilon}\right)e^{\left(1-\sqrt{5}\right)(1-x)/2\varepsilon}\right]$$

türevinin ε ’ un küçük değerlerinde $x=0$ ve $x=1$ noktalarında sınırsız olduğu görülür:

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left|u'(0)\right|=\infty\,,$$

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\left|u'(1)\right|=\infty\,.$$

5.2. Fark Şemasının Kurulması

Fark şemasının kurulması için, $[0,l]$ aralığında tanımlı $\omega_h=\{x_i=ih,\ i=1,2,...,N-1;\ Nh=l\}$, $\varpi_h=\omega_h\cup\{x=0,l\}$ düzgün şebeke olsun. Öncelikle

$$\chi_i^{-1}h^{-1}\int_0^l Lu\varphi_i(x)\,dx=\chi_i^{-1}h^{-1}\int_0^l f(x)\varphi_i(x)\,dx,\ i=1,2,...,N-1 \tag{5.12}$$

integral özdeşliği ele alınsın. Buradaki

$$
\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\lambda_{1,i}(x-x_{i-1})} - e^{\lambda_{2,i}(x-x_{i-1})}}{e^{\lambda_{1,i}h} - e^{\lambda_{2,i}h}} \equiv \varphi_i^{(1)}(x), & x_{i-1} < x < x_i, \\ \dfrac{e^{-\lambda_{2,i}(x_{i+1}-x)} - e^{-\lambda_{1,i}(x_{i+1}-x)}}{e^{-\lambda_{2,i}h} - e^{-\lambda_{1,i}h}} \equiv \varphi_i^{(2)}(x), & x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}
$$

fonksiyonu bir üstel baz fonksiyonu ve

$$
\lambda_{1,i} = 0.5\varepsilon^{-1}\left(a_i + \sqrt{a_i^2 + 4b_i}\right), \quad \lambda_{2,i} = 0.5\varepsilon^{-1}\left(a_i - \sqrt{a_i^2 + 4b_i}\right),
$$

$$
\chi_i = h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)\,dx
$$

$$
= h^{-1}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)\,dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)\,dx\right)
$$

$$
= \frac{2h^{-1}\left(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}\right)}{\lambda_{1,i}\lambda_{2,i}\sinh\left(\dfrac{\left(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}\right)h}{2}\right)}\sinh\left(\frac{\lambda_{1,i}h}{2}\right)\sinh\left(\frac{\lambda_{2,i}h}{2}\right)
$$

olup, g herhangi bir fonksiyon olmak üzere $g_i = g(x_i)$' dir.

Burada belirtilmelidir ki, $\varphi_i^{(1)}(x)$ ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ fonksiyonları aşağıdaki sınır-değer problemlerinin çözümüdür.

$$
\varepsilon^2\varphi'' - \varepsilon a_i\varphi' - b_i\varphi = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i, \quad \varphi(x_{i-1}) = 0, \quad \varphi(x_i) = 1,
$$

$$
\varepsilon^2\varphi'' - \varepsilon a_i\varphi' - b_i\varphi = 0, \quad x_i < x < x_{i+1}, \quad \varphi(x_i) = 1, \quad \varphi(x_{i+1}) = 0.
$$

(5.12) bağıntısı yeniden düzenlenirse $i = 1, 2, ..., N-1$ için

$$
\chi_i^{-1}\left[-\varepsilon^2 h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i'(x)u'(x)\,dx + \varepsilon a_i h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)u'(x)\,dx \right.
$$

$$
\left. - b_i h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x)u(x)\,dx\right] = f_i - R_i \tag{5.13}
$$

elde edilir. Burada kalan terim

$$
R_i = \chi_i^{-1}\varepsilon h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[a(x) - a_i\right]\varphi_i(x)u'(x)\,dx + \chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[b_i - b(x)\right]\varphi_i(x)u(x)\,dx
$$

$$
+ \chi_i^{-1}h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[f_i - f(x)\right]\varphi_i(x)\,dx \tag{5.14}
$$

ifadesidir.

(5.13) bağıntısının sol tarafına kuadratur formülleri uygulanıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$-\varepsilon^2 h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i'(x)u'(x)dx+\varepsilon a_i h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)u'(x)dx-b_i h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}}\varphi_i(x)u(x)dx$$

$$=\varepsilon^2\left\{1+0.5h\varepsilon^{-1}a_i\left(\chi_{2,i}-\chi_{1,i}\right)-0.5h\varepsilon^{-2}b_i\left(\mu_{2,i}-\mu_{1,i}\right)\right\}u_{\bar{x}x,i}$$

$$+\varepsilon a_i\left(\chi_i-\varepsilon^{-1}a_i^{-1}b_i\mu_i\right)u_{\overset{0}{x},i}-b_i\chi_i u_i$$

eşitliği elde edilir. Eşitlikteki katsayılar ve fark türevleri

$$\chi_{1,i}=h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\varphi_i^{(1)}(x)dx,\quad \chi_{2,i}=h^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\varphi_i^{(2)}(x)dx,$$

$$\mu_{1,i}=h^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_i)\varphi_i^{(1)}(x)dx,\quad \mu_{2,i}=h^{-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(x-x_i)\varphi_i^{(2)}(x)dx,$$

$$\mu_i=\mu_{1,i}+\mu_{2,i},$$

$$u_{x,i}=\frac{u_{i+1}-u_i}{h},\quad u_{\bar{x},i}=\frac{u_i-u_{i-1}}{h},\quad u_{\overset{0}{x},i}=\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h},\quad u_{\bar{x}x,i}=\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{h^2}$$

eşitlikleriyle verilir. Basit işlemler sonucu

$$1+0.5h\varepsilon^{-1}a_i\left(\chi_{2,i}-\chi_{1,i}\right)-0.5h\varepsilon^{-2}b_i\left(\mu_{2,i}-\mu_{1,i}\right)=0.5h\left(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i}\right)\frac{\cosh\left(\dfrac{\left(\lambda_{1,i}+\lambda_{2,i}\right)h}{2}\right)}{\sinh\left(\dfrac{\left(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i}\right)h}{2}\right)},$$

$$\chi_i-\varepsilon^{-1}a_i^{-1}b_i\mu_i=\frac{\left(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i}\right)\sinh\left(\dfrac{\left(\lambda_{1,i}+\lambda_{2,i}\right)h}{2}\right)}{\left(\lambda_{1,i}+\lambda_{2,i}\right)\sinh\left(\dfrac{\left(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i}\right)h}{2}\right)}$$

sonuçları elde edilir.

(5.13) denkleminden

$$\ell u_i\equiv\varepsilon^2\theta_{1,i}u_{\bar{x}x,i}+\varepsilon a_i\theta_{2,i}u_{\overset{0}{x},i}-b_i u_i=f_i-R_i,\quad i=1,2,...,N-1 \tag{5.15}$$

elde edilir. Buradaki $\theta_{1,i}$ ve $\theta_{2,i}$ katsayıları

$$\theta_{1,i}=-\frac{b_i h^2}{4\varepsilon^2}\left(1+\coth\left(\frac{\lambda_{1,i}h}{2}\right)\coth\left(\frac{\lambda_{2,i}h}{2}\right)\right) \tag{5.16}$$

$$\theta_{2,i}=-\frac{b_i h}{2a_i\varepsilon}\left(\coth\left(\frac{\lambda_{1,i}h}{2}\right)+\coth\left(\frac{\lambda_{2,i}h}{2}\right)\right) \tag{5.17}$$

olarak bulunur.

(5.3) sınır- şartının yaklaşımına bakmak için

$$\int_0^l Lu\varphi_0(x)\,dx=\int_0^l f(x)\varphi_0(x)\,dx \tag{5.18}$$

özdeşliği göz önüne alınsın. Burada

$$\varphi_0(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\lambda_{2,0}(x_1-x)}-e^{-\lambda_{1,0}(x_1-x)}}{e^{-\lambda_{2,0}h}-e^{-\lambda_{1,0}h}}\equiv\varphi_0^{(2)}(x), & x\in(x_0,x_1),\\ \dfrac{e^{\lambda_{1,N}(x-x_{N-1})}-e^{\lambda_{2,N}(x-x_{N-1})}}{e^{\lambda_{1,N}h}-e^{\lambda_{2,N}h}}\equiv\varphi_N^{(1)}(x), & x\in(x_{N-1},x_N),\\ 0, & x\notin(x_0,x_1)\cup(x_{N-1},x_N)\end{cases}$$

üstel baz fonksiyonudur. Yukarıda yapılan işlemlere benzer şekilde

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\varepsilon^2u''+\varepsilon a_0u'-b_0u\right)\varphi_0^{(2)}(x)\,dx+\int_{x_{N-1}}^{x_N}\left(\varepsilon^2u''+\varepsilon a_Nu'-b_Nu\right)\varphi_N^{(1)}(x)\,dx$$

$$=A\varepsilon-\varepsilon^2\left\{1-a_N\varepsilon^{-1}\int_{x_{N-1}}^{x_N}\varphi_N^{(1)}(x)\,dx+b_N\varepsilon^{-2}\int_{x_{N-1}}^{x_N}(x-x_N)\varphi_N^{(1)}(x)\,dx\right\}u_{\bar{x},N}$$

$$+\varepsilon^2\left\{1+a_0\varepsilon^{-1}\int_{x_0}^{x_1}\varphi_0^{(2)}(x)\,dx-b_0\varepsilon^{-2}\int_{x_0}^{x_1}x\varphi_0^{(2)}(x)\,dx\right\}u_{x,0}$$

$$-b_0\left(\int_{x_0}^{x_1}\varphi_0^{(2)}(x)\,dx\right)u_0-b_N\left(\int_{x_{N-1}}^{x_N}\varphi_N^{(1)}(x)\,dx\right)$$

$$=A\varepsilon-\varepsilon^2\frac{(\lambda_{1,N}-\lambda_{2,N})h}{e^{\lambda_{1,N}h}-e^{\lambda_{2,N}h}}u_{\bar{x},N}+\varepsilon^2\frac{(\lambda_{1,0}-\lambda_{2,0})h}{e^{-\lambda_{2,0}h}-e^{-\lambda_{1,0}h}}u_{x,0}$$

$$-\frac{b_0\left[\lambda_{2,0}^{-1}\left(1-e^{-\lambda_{2,0}h}\right)-\lambda_{1,0}^{-1}\left(1-e^{-\lambda_{1,0}h}\right)\right]}{e^{-\lambda_{2,0}h}-e^{-\lambda_{1,0}h}}u_0$$

$$-\frac{b_N\left[\lambda_{1,N}^{-1}\left(e^{\lambda_{1,N}h}-1\right)-\lambda_{2,N}^{-1}\left(e^{\lambda_{2,N}h}-1\right)\right]}{e^{\lambda_{1,N}h}-e^{\lambda_{2,N}h}}$$

sonucuna ulaşılır. Periyodiklik şartı da dikkate alınırsa, (5.18) formundan

$$\varepsilon^2\left(\theta_0^{(N)}u_{\bar{x},N}-\theta_0^{(0)}u_{x,0}\right)+b_0\kappa_0u_0=-\kappa_0f_0+A\varepsilon-r \tag{5.19}$$

denklemine ulaşılır. Buradaki $\theta_0^{(0)}$, $\theta_0^{(N)}$ ve κ_0 katsayıları ile r kalan terimi

$$\theta_0^{(0)} = \frac{h(\lambda_1-\lambda_2)e^{\lambda_2 h}}{1-e^{-(\lambda_1-\lambda_2)h}}, \quad \theta_0^{(N)} = \theta_0^{(0)} e^{-(\lambda_1-\lambda_2)h}, \quad \lambda_1 \equiv \lambda_{1,0}, \quad \lambda_2 \equiv \lambda_{2,0}, \tag{5.20}$$

$$\kappa_0 = \left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_2}\right) \frac{\cosh\left(\frac{(\lambda_1-\lambda_2)h}{2}\right)-\cosh\left(\frac{(\lambda_1+\lambda_2)h}{2}\right)}{\sinh\left(\frac{(\lambda_1-\lambda_2)h}{2}\right)}, \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} r = &-\varepsilon\int_{x_0}^{x_1}\left[a(x)-a(0)\right]\varphi_0^{(2)}(x)u'(x)\,dx-\varepsilon\int_{x_{N-1}}^{x_N}\left[a(x)-a(l)\right]\varphi_N^{(1)}(x)u'(x)\,dx \\ &+\int_{x_0}^{x_1}\left[b(x)-b(0)\right]\varphi_0^{(2)}(x)u(x)\,dx+\int_{x_{N-1}}^{x_N}\left[b(x)-b(l)\right]\varphi_N^{(1)}(x)u(x)\,dx \\ &+\int_{x_0}^{x_1}\left[f(x)-f(0)\right]\varphi_0^{(2)}(x)\,dx+\int_{x_{N-1}}^{x_N}\left[f(x)-f(l)\right]\varphi_N^{(1)}(x)\,dx \end{aligned} \tag{5.22}$$

şeklinde bulunur. (5.15) ve (5.19) kullanılarak (5.1)- (5.3) problemi için aşağıdaki fark şeması yazılabilir:

$$\ell y \equiv \varepsilon^2\theta_1 y_{\bar{x}x} + \varepsilon a\theta_2 y_{\overset{0}{x}} - by = f, \quad x\in\omega_h, \tag{5.23}$$

$$y(0) = y(l), \tag{5.24}$$

$$\ell_0 y \equiv \varepsilon^2\left(\theta_0^{(N)}y_{\bar{x}} - \theta_0^{(0)}y_x\right) + b_0\kappa_0 u_0 = -\kappa_0 f_0 + A\varepsilon. \tag{5.25}$$

Buradaki θ_1, θ_2, $\theta_0^{(0)}$, $\theta_0^{(N)}$ ve κ_0 ifadeleri sırasıyla (5.16), (5.17), (5.20) ve (5.21) denklemleriyle verilmiştir.

5.3. Fark Şemasının Yakınsaklığı

Öncelikle (5.23)- (5.25) şeması için kurulan ayrık maksimum prensibi ile ilgili bir lemma verilsin.

Lemma 5.3.1: Eğer ω_h ' da $\ell\upsilon \le 0$ olacak şekilde ϖ_h üzerinde tanımlı herhangi bir şebeke fonksiyonu υ ve $\upsilon(0)=\upsilon(l)$, $\ell_0\upsilon \ge 0$ ise her $x\in\varpi_h$ için $\upsilon(x)\ge 0$ ' dır.

Hata fonksiyonu $z_i = y_i - u_i$ olarak tanımlansın. Burada y_i (5.23)- (5.25)' in, u_i de (5.1)- (5.3)' ün x_i şebeke noktasındaki çözümüdür. Bu durumda z_i hatası için

$$\ell z_i = R_i, \quad i = 1,2,...,N-1 \tag{5.26}$$

$$z_0 = z_N \tag{5.27}$$

$$\ell_0 z = r \tag{5.28}$$

şeklinde bir sistem yazılabilir. Buradaki R_i ve r ifadeleri, sırasıyla (5.14) ve (5.22) ile tanımlanan kesme hatalarıdır.

Lemma 5.3.2: (5.26) probleminin z_i çözümü için

$$\|z\|_{\varpi_h} \le \beta^{-1}\|R\|_{\omega_h} + \left(\beta\kappa_0\right)^{-1}|r| \tag{5.29}$$

eşitsizliği doğrudur. Burada, herhangi g şebeke fonksiyonu için $\|g\|_{\varpi_h} = \max\limits_{0\le i\le N}|g_i|$ ve $\|g\|_{\omega_h} = \max\limits_{1\le i\le N-1}|g_i|$' dir.

İspat: $\Psi_i^{\pm} = \pm z_i + \beta^{-1}\|R\|_{\omega_h} + \left(\beta\kappa_0\right)^{-1}|r|$ şeklinde bir fonksiyon alınsın. Bu durumda, $\Psi_0^{\pm} = \Psi_N^{\pm}$, $\ell_0\Psi_0^{\pm} \ge 0$ ve $\ell\Psi_i^{\pm} \le 0,\ i = 1,2,...,N-1$ elde edilir. Dolayısıyla 5.3.1. Lemma' dan $\Psi_i^{\pm} \ge 0,\ i = 0,1,...,N$ elde edilir ki bu da (5.29) eşitsizliğini gerçekler.

Şimdi de bu lemmalardan yola çıkılarak aşağıdaki teorem verilsin:

Teorem 5.3.3: $a,b,f \in C^1\left[0,l\right]$ olsun. Bu durumda, (5.23)- (5.25) fark şemasının hatası, $0 \le i \le N$ için

$$|y_i - u_i| \le Ch \tag{5.30}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: R ve r' nin açık ifadeleri ve (5.4), (5.5) değerlendirmeleri göz önünde bulundurularak

$$\|R\|_{\omega_h} \le Ch, \quad \kappa_0^{-1}|r| \le Ch$$

eşitsizliklerine ulaşılır. $z_i = y_i - u_i$ olduğu da göz önüne alınırsa (5.29)' dan ispat tamamlanmış olur.

5.4. Algoritma ve Nümerik Sonuçlar

(5.23)- (5.25) fark şeması aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$A_1 y_N - C_1 y_1 + B_1 y_2 = -F_1, \tag{5.31}$$

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 2,3,...,N-1, \tag{5.32}$$

$$A_N y_{N-1} - C_N y_N + B_N y_1 = -F_N. \tag{5.33}$$

Burada verilen katsayılar, $i = 1,2,...,N-1$ için

$$A_i = \frac{\varepsilon^2\theta_{1,i}}{h^2} - \frac{\varepsilon a_i\theta_{2,i}}{2h},$$

$$B_i = \frac{\varepsilon^2 \theta_{1,i}}{h^2} + \frac{\varepsilon a_i \theta_{2,i}}{2h},$$

$$C_i = \frac{2\varepsilon^2 \theta_{1,i}}{h^2} + b_i,$$

$$F_i = -f_i,$$

$$A_N = B_N = \frac{\varepsilon^2 \theta_0^{(N)}}{h},$$

$$C_N = \frac{\varepsilon^2 \theta_0^{(N)}}{h} + \frac{\varepsilon \theta_0^{(0)}}{h} + b_0 \kappa_0,$$

$$F_N = -\kappa_0 f_0 + \varepsilon A$$

ifadeleridir.

(5.31)- (5.33) sistemi son derece hızlı sonuç veren aşağıdaki faktorizasyon işlemleriyle çözülebilir:

$$p_i = \alpha_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad q_i = \alpha_{i+1} q_{i+1} + \gamma_{i+1}, \quad i = N-2,...,1;$$

$$\alpha_2 = \frac{B_1}{C_1}, \quad \beta_2 = \frac{F_1}{C_1}, \quad \gamma_2 = \frac{A_1}{C_1},$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{F_i + A_i \beta_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad \gamma_{i+1} = \frac{A_i \gamma_i}{C_i - A_i \alpha_i}, \quad i = 2,3,...,N;$$

$$p_{N-1} = \beta_N, \quad q_{N-1} = \alpha_N + \gamma_{N,}$$

$$p_i = \alpha_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad q_i = \alpha_{i+1} q_{i+1} + \gamma_{i+1}, \quad i = N-2,...,1;$$

$$y_N = \frac{\beta_{N+1} + \alpha_{N+1} p_1}{1 - \alpha_{N+1} q_1 + \gamma_{N+1}},$$

$$y_i = p_i + y_N q_i, \quad i = 1,2,...,N-1.$$

Verilenlerden yola çıkılarak $i = 1,2,...,N-1$ için $A_i > 0$, $B_i > 0$ ve $C_i > A_i + B_i$ olduğu açıktır. Sonuç olarak faktorizasyon algoritmasıyla tanımlı sistem kararlıdır.

Şimdi de, fark metodunun performansını test etmek için aşağıdaki örnek verilsin:

Örnek 5.4.1:

$$\varepsilon^2 u'' + 2\varepsilon\left(\sin(2\pi x) + 1.5\right)u' - \left(6.75 - \sin^2(2\pi x) - 2\pi\varepsilon\cos(2\pi x)\right)u = f(x), \quad 0 < x < 1$$

$$u(0) = u(1), \quad u'(1) - u'(0) = \frac{6}{\varepsilon}$$

problemi verilsin ve buradaki $f(x)$ fonksiyonu da

$$f(x) = -2(\varepsilon\pi)^2 \cos(2\pi x) - 2\pi\varepsilon(\sin(2\pi x) + 1.5)\sin(2\pi x)$$
$$+ (6.75 - \sin^2(2\pi x) - 2\pi\varepsilon\cos(2\pi x))\sin^2(2\pi x)$$

olarak verilsin.

Bu problemin kesin çözümü şu şekilde verilebilir:

$$u(x) = \frac{e^{\frac{\cos(2\pi x)-1}{2\pi\varepsilon}}}{\cosh\left(\frac{3}{\varepsilon}\right) - \cosh\left(\frac{3}{2\varepsilon}\right)} \left[e^{-\frac{3x}{2\varepsilon}} \sinh\left(\frac{3(1-x)}{\varepsilon}\right) + e^{\frac{3(1-x)}{2\varepsilon}} \sinh\left(\frac{3x}{\varepsilon}\right) \right] - \sin^2(\pi x).$$

Bu problemin çözümü olan $u(x)$ fonksiyonu $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında sınır katına sahiptir.

Ayrık maksimum normda şemanın hatası ölçülmüş ve yukarıda belirtilmiş olan teorik sonuçlara uyan, bilgisayar hesaplamalarıyla bulunmuş, ε ve h' a bağlı bazı hata değerleri aşağıdaki çizelgede verilmiştir(Amiraliyev ve Duru, 2003).

Çizelge 5.4.1. Örnek 5.4.1.' in ε ve h değerlerine göre hata değerlendirmesi

ε	h			
	0.2	0.1	0.05	0.025
10^{-2}	1.4233015E-1	3.3088368E-2	5.6477602E-3	1.4869754E-3
10^{-4}	1.4277605E-1	3.6161881E-2	9.6248801E-3	2.4341758E-3
10^{-6}	1.4277844E-1	3.6190730E-2	9.6629675E-3	2.4744089E-3
10^{-8}	1.4277850E-1	3.6191028E-2	9.6633251E-3	2.4748261E-3

Çizelgeden de anlaşılacağı gibi, ε parametresi küçüldükçe yaklaşık çözüm ile kesin çözüm arasındaki farkın arttığı görülmektedir. büyümektedir. h' ın küçük değerleri için de $|y - u|$ hatası azalmaktadır.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışma, fen ve mühendislik alanında sıklıkla karşılaşılan problem tiplerinden olan II. mertebe periyodik sınır- değer problemlerinin nümerik çözümü üzerinde durmuştur. Farklı modellerdeki denklem tipleri üzerinde çalışılmış ve bu modellere sonlu farklar metodu uygulanarak yakınsak fark şemaları kurulması ve bu sayede kesin çözüme oldukça yakın nümerik sonuçlar elde edilmesi hedeflenmiştir.

Gerek daha klasik olan sabit ve değişken katsayılı denklemlere, gerekse çözümün sınır katlarında hızlı, diğer yerlerde ise düzenli ve yavaş değiştiği singüler perturbe problemlere uygun nümerik sonuçlar verecek fark yöntemleri uygulamak düzgün sonuçlar elde edilmesi bakımından büyük önem arz etmektedir. Bu çalışmada da, bu durum sağlanmaya çalışılmış ve olumlu yönde teorik sonuçlar elde edilmiş ve singüler perturbe problem için bu sonuçları destekleyecek sayısal bir örnek verilmiştir.

II. mertebe periyodik sınır- değer problemin incelendiği bu çalışmanın, adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin farklı modelleri üzerinde çalışılarak genişletilebilir, benzer modellere farklı yöntemler uygulanılarak teorik ve pratik anlamda daha iyi sonuçlar alınabilecek yöntemler üzerinde araştırma yapılıp farklı alanlarda kullanılmak üzere faydalı veriler elde edilebilir. Bu tip yöntem araştırmaları, matematiğin bu alanıyla özellikle yakından alakalı olan fen, mühendislik ve tıp alanlarındaki birçok problemin çözümüne katkı sağlayacağından önemlidir.

7. KAYNAKLAR

Amiraliyev, G. 1988. Towards the numerical solition of the periodical on time problem for pseudo-parabolic equation. Numerical Methods of Analysis BAKU State University, 3-8.

Amiraliyev, G.M., Mamedov, Y.D. 1995. Difference schemes on the uniform mesh for singular perturbed pseudo- parabolic equations. Tr. J. of Mathematics, 19(3): 207-222.

Amiraliyev, G.M. 1998. Difference methods for a singularly perturbed initial value problem. Tr. J. of Mathematics, 22(3): 283- 294.

Amiraliyev, G.M., Duru, H. 1999. A uniformly convergent finite difference method for a singularly perturbed initial value problem. Appl. Math. and Mech., 20(4): 379-382.

Amiraliyev, G.M., Duru, H. 2002. Nümerik Analiz. ISBN 975-6802-91-X. Pegema Yayıncılık, Ankara, 371 s.

Amiraliyev, G.M., Duru, H. 2003. A uniformly convergent difference method fort he periodical boundary value problem. Comput. Math. Appl., 46: 695- 703.

Cai, X. 2010. An Effective computational method for periodical model with small parametre. 2nd IEEE International Conference on Advanced Computer Control Conference, 27- 29 March 2010, Shenyang- China, 2nd IEEE International Conference on Advanced Computer Control (ICACC 2010) (Editör: Xu,H.). Vol.3: 414-417pp.

Cen, Z. 2010. A second-order hybrid finite difference scheme for a system of singularly perturbed initial value problems. J. Computational Applied Mathematics, 234(12): 3445-3457.

Cen, Z. 2011. Uniformly convergent second- order difference scheme for a singularly periodical boundary value problem. Intenationla Journal of Computer Mathematics. 88(1):196- 206.

Gülle, A. 1995. Dalga teorisinin zamana göre periyodik problemleri için fark şemaları. Doktora Tezi, Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Van, 47.

Herrmann, L. 1985. Periodic solitions to a one-dimentional strongly nonelinear wave equation with strong dissipation. Czechosl. Math. J. V. 35, 110: 278-293.

Lin, P., Jiang, B. 1987. A singular perturbation problem for periodic boundary differential equations. Appl. Math. and Mech.,8(10): 929- 937.

Memmedov, Y.C. 1980. Eşitsizlikler hakkında teoremler. İlim, Aşmabad.

Nayfeh, A.H. 1993. Introduction to Perturbation Tecniques. John- Willey&Sons. Inc., New York, 519 p.

O' Malley, R.E.Jr. 1991 Singular Perturbations Methods for Ordinary Differential Equations. Sipringer- Verlag, New York, 225 p.

Samarskii, A.A. 2001. The Theory of Difference Schemes. ISBN 0-8247-0468-1. Marcel Dekker,Inc., New York, 761 p.

Webb, G.F. 1980. Existence and asimptotic behavior for a strongly damped nonlinear wave equation. Can. J. Math. V. 32(3): 631-643.

ÖZGEÇMİŞ

Ayşenur UÇAR, 1986 yılında Tekirdağ’ da doğdu. İlk öğrenimini Samsun’ da, orta ve lise öğrenimini İzmir’ de tamamladı. 2005 yılında girdiği Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ nü 2009 yılında bitirdi. Aynı yıl Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı’ nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2010 yılının Şubat ayında Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü bünyesinde, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’ nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başlamış ve aynı dönemde Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’ na yatay geçiş yapmıştır. Halen görevine ve yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.