BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

ELİF ÇELİKER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

ELİF ÇELİKER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
YRD. DOÇ. DR. İLHAME AMİRALİ

SİNOP-2013

T.C.

SİNOP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 20/09/2013 tarihinde yapılan sınav ile MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. İlhame AMİRALİ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Alper SİNAN

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

25/09/2013

Doç. Dr. Hünkar Avni DUYAR

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BİRİNCİ MERTEBEDEN GECİKMELİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

ÖZET

Bu çalışmanın amacı birinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerini incelemektir. Çalışmada sapmalı diferansiyel denklemin özel bir hali olan, lineer ve sabit katsayılı birinci mertebe gecikmeli diferansiyel denklemlerden bahsedilip, bu başlangıç-değer problemine uygun çözümün nasıl elde edilebileceği anlatıldı. Daha sonra Laplace dönüşümünden faydalanılarak bulunan bu çözümlerin büyüme mertebeleri tespit edildi. Son olarak da birinci mertebeden gecikmeli diferansiyel bir problem ele alınıp çözüldü.

Anahtar Kelimeler: Gecikmeli diferansiyel denklem, Lineerlik, Laplace dönüşümü, Problemin kesin çözümü, Büyüme mertebesi.

FIRST ORDER DELAY DIFFERENTIAL EQUATIONS AND NUMERICAL SOLUTIONS

ABSTRACT

The aim of the study is to investigate the solution for the first-order delay differential equations. In this study the expedient solution of the initial-value problem for linear first order delay differential equation is investigated and considered methods for its finding. Further the order of growth of Laplace transformation solution determined. Finally, one particular problem has been solved and analyzed.

Keywords: Delay differential equation, Laplace transformation, Linearity, The exact solution of the problem, Order of growth.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında ve sonuçlandırılmasında her zaman bana destek olan çalışmalarımda bana yol gösteren danışman hocam Sinop Üniversitesi Öğretim Üyelerinden Sayın Yrd. Doç. Dr. İlhame AMİRALİ ve Sayın Prof. Dr. Gabil AMİRALİ' ye emeklerinden dolayı çok teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca, her daim yanımda olan yüksek lisans yapmam konusunda benle birlikte aynı azim kararlılığı göstererek beni motive eden anneme ve hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen babama çok teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

SEMBOLLER

C^k	: $k.$ mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların kümesi
$f^{(k)}$	: f fonksiyonun $k.$ mertebeden türevi
$L(u)$	: Lineer operatör
$\mathrm{Re}(s)$	: s kompleks sayısının reel kısmı
t	: Dereceli zaman
$u(t)$	: Problemin kesin çözümü
$w_1,\ldots,w_m$	: Gecikme sabitleri
ε	: Parametre

1. GİRİŞ

Birinci mertebeden lineer gecikmeli diferansiyel denklemler birçok alanda kullanılmaktadır. Optik iki durumlu aygıt çalışmasında Dertsine ve ark. (1982) ile fizyolojik prosesler veya rahatsızlıklar için modellerin bir türünde Mackey ve Glass (1977) insan gözbebeğinin ışığa refleksini isimlendirmede ve belirlemede böyle bir problemle uğraştılar. Amiraliyev ve Erdoğan (2007) , gecikmeli diferansiyel denklemler için düzgün nümerik metodu ele almışlardır. Tian (2002; 2003; 2004) çalışmasında sınırlı gecikmeli diferansiyel denklemleri incelemiştir. Bellman ve Cooke (1963) , diferansiyel fark denklemlerini ortaya koymuşlardır. Driver (1977) , adi ve gecikmeli diferansiyel denklemleri genişletmiştir. Doolan ve ark. (1980) , başlangıç ve sınır katlarındaki problemler için düzgün nümerik metotları ele almışlardır. Hale ve Sternberg (1988) , gecikmeli denklemlerde kaosu incelemişlerdir. Chow ve ark. (1992) , gecikmeli denklemlerde dalga boylarıyla ilgilenmişlerdir. In't Hout (1992;1997) , gecikmeli diferansiyel denklemler için bazı metotları ele almışlardır. Bellen ve Maset (2000) , Cauchy problemleri için gecikmeli diferansiyel denklemleri incelemişlerdir. Maset (2003) , bu konuda özel nümerik bazı çözümleri ele almıştır.

Bu çalışmada sabit katsayılı lineer gecikmeli diferansiyel denklemin çözümü ile ilgili temel bilgiler verilip, bazı varlık ve teklik teoremleri ifade edilerek bu tip denklemlerin Laplace dönüşümü ile çözümü ele alınacaktır.

Çalışmamız sekiz bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde konuya giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde tezde kullanılacak olan genel bilgilerden bahsedilmiş ve örnekle pekiştirilmiştir.

Üçüncü bölümde gecikmeli, nötr tip, advaced (ileri) tip denklemler anlatılıp, bununla ilgili varlık-teklik teoremine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde birinci mertebeden lineer sabit katsayılı gecikmeli diferansiyel denklemler için üstel çözümler anlatılıp, teorem ve tanımlarla desteklenmiştir.

Beşinci bölümde bulunan bu çözümlerin büyüme mertebeleri anlatılmıştır.

Altıncı bölümde Laplace dönüşümü çözümünden bahsedilmiştir.

Yedinci bölümde elde edilen sonuçlar değerlendirilmiştir.

Sekizinci bölümde ise kaynaklar bildirilmiştir.

Bu çalışmamızda sapmalı diferansiyel denklemin özel bir hali olan sabit katsayılı lineer gecikmeli diferansiyel denklemin çözümü ile ilgili temel bilgiler verilip, bazı varlık ve teklik teoremleri ifade edilerek bu tip denklemlerin Laplace dönüşümü ile çözümü ele alınacaktır.

Burada bahsedilen gecikmeli diferansiyel denklem bir bilinmeyenli fonksiyon ve onun türevlerinin (farklı sabitlerdeki değerlerini içeren) olduğu denklemdir.

Örneğin;

$$u''(t)-u'(t-1)+u(t)=0 \tag{1.1}$$

$$u'(t)-u(t-1)-u(t-\sqrt{2})=0 \tag{1.2}$$

$$u'(t)-2u(t)+u'(t-1)-2u(t-1)=e^{2t}. \tag{1.3}$$

Tezde u tek değişkenli bir fonksiyon olarak ele alınacaktır. Dolayısıyla ortaya çıkan türevler kısmi türev değil, adi türev olacaktır. (1.1) denklemi türev anlamında 2. mertebeden, fark anlamında 1. mertebeden bir denklemdir fakat (1.2) denklemi türev anlamında 1. mertebeden, fark anlamında 2. mertebeden bir denklemdir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak konuyla ilgili bazı tanımlara yer verilecektir.

Tanım 2.1: Bazı fiziksel sistemlerde sürecin değişim hızı sistemin o andaki durumuna değil, geçmişteki ve gelecekteki durumuna da bağlı olabiliyor. Bu tip süreçleri ifade eden diferansiyel denklemlerde aranan fonksiyon ve onun türevleri argümanın değişik değerleri şeklinde veriliyor. Bu tip denklemlere sapmalı diferansiyel denklemler denir.

Tanım 2.2: $t_1 < t < t_2$ açık aralığında k. mertebeden sürekli türevlere sahip tüm reel değerli fonksiyonların kümesi $C^k(t_1,t_2)$ ile gösterilir. Eğer f, bu kümenin elemanı ise $f \in C^k(t_1,t_2)$ ya da (t_1,t_2) üzerinde $f \in C^k$ yazılabilir. $f \in C^k(t_1,t_2)$ ise $f \in C^k(t_1,\infty)$ yazılabilir.

Örneğin; $C^0(0,w)$, $0 < t < w$ aralığındaki sürekli reel fonksiyonlar için $[t_1,t_2]$, $[t_1,t_2)$, $(t_1,t_2]$ gibi açık olmayan aralıklarda da verilebilir.

Tanım 2.3: $f \in C^k(t_1,t_2)$; f, t_1'de sağdan k. mertebeden türeve sahip, $f^{(k)}(t)$, $t_1 \le t < t_2$ aralığında tanımlı ve bu değerler t_1'de sürekli ise, $f \in C^k[t_1,t_2)$ olur. $f \in C^k(t_1,t_2)$; f, t_2' de soldan k. mertebeden türeve sahip, $f^{(k)}(t)$, $t_1 < t \le t_2$ aralığında tanımlı ve bu değerler t_2 noktasında sürekli ise, $f \in C^k(t_1,t_2]$ olur.

Türev mertebesi n, fark mertebesi m olan bir denklemin genel formu

$$\begin{aligned} F(t,u(t),u(t-w_1),\dots,u(t-w_m),u'(t),u'(t-w_1),\dots,u'(t-w_1),\dots,u^{(n)}(t),\\ u^{(n)}(t-w_1),\dots,u^{(n)}(t-w_m)) = 0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklindedir. Burada F, $1+(m+1)(n+1)$ değişkenli bir fonksiyon, $w_1,\dots,w_m$ gecikme sabitidir. Ayrıca, F ve u reel değişkenli reel fonksiyonlar, $w_1,\dots,w_m$ ise reel sayılardır. Tezde bu denklemin reel çözümleri ile ilgilenilecektir.

(2.1) formundaki lineer denklem ele alınsın:

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}(t)u^{(j)}(t-w_i) = f(t) . \tag{2.2}$$

Burada m, n pozitif tam sayılar, $0 = w_0 < w_1 < \dots < w_m$. $f(t)$ ve $(m+1)(n+1)$ tane

$a_{ij}(t)$ fonksiyonları t' nin reel bir aralığında tanımlıdır. Fakat tezimizde sabit katsayılı lineer denklem ile çalışılacak.

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_{ij}u^{(j)}(t-w_i)=f(t) \tag{2.3}$$

tipindeki denklemlerin genel formu

$$a_o u'(t)+a_1 u'(t-w)+b_0 u(t)+b_1 u(t-w)=f(t) \tag{2.4}$$

şeklindedir.

Bu tip denklemler genel formun tüm özelliklerini sergiler fakat daha sonraki denklemlerin bazı detaylarını içermez. Yukarıdaki gecikmeli diferansiyel denklemlerden herhangi biri ile $u(t)$ bulunabilir.

Örneğin;

$$u(t)=\frac{(t-1)e^{2(t+1)}}{1+e^2} \tag{2.5}$$

fonksiyonu (1.3) denkleminin bir çözümüdür.

Her zaman (2.5) denklemi şeklinde bir çözüm elde etmek uygun olmaz. Uygun olsa bile, bu tip açık çözüm ifadeleri çözüm hakkındaki belirli soruları cevaplamada yetersiz kalabilir. Böyle durumlarda bazı analitik yöntemlerle özel soruları çözmek mümkündür. Bu, gecikmeli denklemlerde de aynıdır. Aslında diferansiyel denklemlerle gecikmeli diferansiyel denklemler arasında yakın bir benzerlik vardır. Çalışmamızda diferansiyel denklemlerde kullanılan yöntemlerin gecikmeli diferansiyel denklemlere uygulanabileceği gösterilecek.

Sabit katsayılı lineer homojen diferansiyel denklemin her çözümü, sonlu sayıdaki özel çözümün bir lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilmektedir. Buradan yola çıkarak, çözümün herhangi bir noktadaki değeri, çözümün kararlılığı ve asimptotik özellikleri yardımıyla tahmin edilebilir. Sabit katsayılı lineer homojen gecikmeli diferansiyel denklemin çözümleri de benzer şekilde özel çözümlerin toplamı şeklinde yazılabilir. Fakat transandantal yöntemlerle bulunması gereken özel durumlar da vardır.

Pratikte çoğu problem aşağıdaki teknikler kullanılarak çözülebilir:

a) Başlangıç değer probleminin doğru (tam) formülasyonu

b) Belirli noktalarda çözümün hesaplanması

c) Bir çözümün özel çözümlerin toplamı olarak yazılabilmesi

d) Bir çözümün belirli integraller ile ifade edebilmesi

e) Çözümlerin asimptotik davranışları

f) Çözümlerin kararlılığı.

Örnekler:

(2.4) basit denkleminin teorisine giriş yapmadan önce özel formdaki gecikmeli diferansiyel denklem çözülsün ve temel özellikleri ortaya koyulsun.

$$u'(t) = u(t-1) \tag{2.6}$$

denklemi ele alınsın.

$t > 0$ için sürekli ve $t > 1$ için bu denklemin çözümü olan bir $u(t)$ fonksiyonu araştırılsın.

$u(t)$ fonksiyonunun, boyu 1 olan aralıktaki keyfi, sürekli bir fonksiyona eşit olabileceğini görmek kolaydır. Bu yapıldıktan sonra, (2.6) denkleminin çözümü t' nin daha geniş değerleri için bulunur.

Örneğin; $0 < t \le 1$ için $u(t) = 1$ olsun. Bu durumda eğer (2.6) denklemi $t > 1$ için sağlanıyorsa, $1 < t < 2$ için $u'(t)$ değerleri bulunur. $u(t)$, $t = 1$' de sürekli olduğundan $1 < t < 2$ için bu değerler $u(t)$' yi belirler. Aslında

$$u(t) = t = 1 + (t-1), \qquad 1 \le t \le 2$$

olduğu görülebilir.

$u(t)$ fonksiyonu $1 < t \le 2$ için bilindikten sonra, şimdi (2.6) denkleminden $2 \le t \le 3$ için $u(t)$ bulunur. Yani

$$u(t) = 1 + (t-1) + \frac{(t-2)^2}{2}, \qquad 2 \le t \le 3.$$

$u(t)$ fonksiyonunu bir aralıktan diğerine genişleterek istenilen yere kadar ilerlenebilir. Bu şekilde devam edilirse

$$u(t) = \sum_{j=0}^{N} \frac{(t-j)^j}{j!}, \quad N \le t \le N+1, N = 0,1,2,... \tag{2.7}$$

elde edilir.

(2.6) denklemi, $u'(t)$' nin $t > 1$ için sürekli olduğunu gösterir. $u'(t)$' nin $t = 1$' deki başlangıç süreksizliği (2.6) denklemi ile düzeltilir.

Yukarıdaki örnek, gecikmeli fark denklemlerini incelemek için mevcut olan temel yöntemlerden birini ifade eder. Bu yöntem, denklemin herhangi bir çözümünün olduğunu ve bu çözümün asıl çözümlerini hesaplaması sürecini ortaya koyar. Benzer yöntem geri yönde genişleyen aralıklardaki çözümler için de kullanılabilir. Verilen örnek aynı zamanda gecikmeli diferansiyel denklemin çözümlerinin geniş bir aralığa sahip olduğunu gösterir. Belli bir t aralığındaki değerleri bilinen gecikmeli diferansiyel denklemin çözümü üzerindeki bu koşullara sınır koşulları denir. (2.6) denklemi için sınır koşulu

$$u(t)=g(t),\quad 0<t\leq 1 \tag{2.8}$$

şeklindedir. $g(t)$ önceden belirlenmiş, reel değerli, sürekli fonksiyondur. t' nin başlangıç aralığındaki $u(t)$ değeri, yani (2.8) tipindeki sınır koşulu aynı zamanda başlangıç koşulu olarak adlandırılır. Elbette ki (2.6) denkleminin çözümleri üzerine diğer sınır koşulları da konulabilir.

Şimdi (2.8) koşuluna benzer başlangıç koşulları yazılsın:

$$u'(t)=u(t-1)+2u'(t-1). \tag{2.9}$$

(2.9) denklemi ile oldukça farklı bir durum ortaya çıkmaktadır. $0<t<1$ için $u(t)=1$ ve $t>0$ için de $u(t)$' nin sürekli olduğu kabul edilsin. $t>1$ için (2.9) denklemi sağlanıyorsa $1<t<2$ için $u'(t)=1$ olmak zorundadır. Böylelikle

$$u(t)=t,\quad 1\leq t\leq 2$$

olur.

Eğer (2.9) denklemi $2<t<3$ için sağlanırsa $u'(t)=t+1$ olmak zorundadır ve

$$u(t)=\frac{1}{2}t^2+t-2,\quad 2\leq t\leq 3$$

olur.

Bu şekilde devam edilirse, (2.7) denklemindeki gibi bir genel form bulmak kolay değildir. Üstelik elde edilen $u(t)$ çözümünün, t' nin her pozitif tamsayı değerinde süreksiz bir türevi vardır. (2.9) denklemi için sadece sol limit ve sağ limit değerlerinde sağlanmasına rağmen, $t>1$ için hem çözümünün hem de türevinin sürekli olacağını söylemek doğru değildir. (2.9) denklemi, $t=1$' de $u'(t)$ fonksiyonunun süreksizliğini düzeltmede başarısızdır denilebilir.

Son örnek olarak,

$$u'(t-1)=u(t) \tag{2.10}$$

denklemi verilsin.

Bu örneğin başlangıç koşulu (2.8) ifadesindeki gibidir. Çözümü ise (2.6) denkleminde yapılan işlem geriye doğru uygulanarak bulunur.

$u(t) = g^{'}(t-1), \quad 1 < t < 2$

dersek (g' nin türevlenebilir olması şartıyla), $1 < t < 2$ için $u(t)$ bulunur. $0 < t < 1$ için $g(t)$ iki defa türevlenebilir ise, $u(t)$ $1 < t < 2$ için türevlenebilirdir ve (2.10) denklemi $2 < t < 3$ için $u(t)$ fonksiyonunu bulmak için kullanılabilir. Bu prosedür ancak ve ancak $g(t)$' nin $0 < t < 1$ aralığında tüm mertebeden türevlere sahip olması durumunda $t > 0$ için bir çözüme karşılık gelir.

3. GECİKMELİ, NÖTR TİP, ADVANCED (İLERİ) TİP DENKLEMLER

Türevi ve farkı 1. mertebe olan lineer sabit katsayılı gecikmeli diferansiyel denklemin genel formu olan

$$a_0u'(t)+a_1u'(t-w)+b_0u(t)+b_1u(t-w)=f(t) \tag{3.1}$$

denklemi ele alınsın.

Tanım: (3.1) denkleminde $a_0 \neq 0$ ve $a_1 = 0$ ise denkleme gecikmeli tip, $a_0 \neq 0$ ve $a_1 \neq 0$ ise nötr tip, $a_0 = 0$ ve $a_1 \neq 0$ ise advanced tip denklem denir. Eğer $a_0 = a_1 = 0$ ise denklem fark denklemi olur. $b_0 = b_1 = 0$ ise fark denklemine indirgenir. $a_0 = b_0 = 0$ ya da $a_1 = b_1 = 0$ ise, (3.1) denklemine adi diferansiyel denklem denir (Driver, 1977).

Uygulamalarda t genellikle zamanı simgeler. Gecikmeli tip denklem, geçmiş ve şimdiki nicelik değerlerine bağlı olan sistemin değişim oranının davranışını simgeler. Nötr tip denklem, sistemin geçmiş değerlerine bağlı olan niceliğin şimdiki değerlere bağlı değişimini simgeler. Advanced tip denklem, sistemin niceliğinin şimdiki ve gelecek değerlerine bağlı olan değişim oranını simgeler. t genellikle zamanı simgelediğinden t yönünde artan bir çözümün sürekliliği ile ilgilenilebilir. Genelliğe bakmazsızın konu t' nin artan değerleri ile kısıtlanabilir.

Gecikmeli tip denklemler ele alınsın.

Varlık-Teklik Teoremi (Bellman ve Cooke, 1963)

Aşağıdaki gecikmeli tip denklem için çözümün varlığına ve tekliğine karşılık gelen genel bir teorem verilebilir:

$$\begin{aligned} &a_0u'(t)+b_0u(t)+b_1u(t-w)=f(t) \\ &u(t)=g(t), \quad t_0 \le t \le t_0+w. \end{aligned} \tag{3.2}$$

$t-t_0=t'$ dönüşümü bu denklemi, başlangıç şartı $0 \le t' \le w$ olan aynı formda bir denkleme dönüştürür. Sonuç olarak, genelliği bozmadan $t_0 = 0$ olduğunu varsayılırsa

$$u(t)=g(t), \quad o \le t \le w \tag{3.3}$$

başlangıç koşulu olarak alınabilir.

Teorem 3.1: $f \in C^1[0,\infty), g \in C^0[0,w]$ olsun. Bu durumda $t \ge 0$ için sürekli, (3.3) koşulunu sağlayan ve $t > w$ için (3.2) denklemini sağlayan yalnız bir tane fonksiyon vardır. Üstelik bu u fonksiyonu için $u \in C^1(w,\infty)$ ve $u \in C^2(2w,\infty)$ denilebilir.

$$a_0 g'(w-0)+b_0 g(w)+b_1 g(0)=f(w) \tag{3.4}$$

olduğu durumlarda u' ancak ve ancak $g \in C^1[0,w]$ ve w noktasında süreklidir.

Eğer $g \in C^2[0,w]$ ve $2w$ noktasında u'' sürekli ise (3.4) denklemi sağlanır ya da $b_1 = 0$ olur.

Yukarıdaki teoremde u fonksiyonu (3.2) ve (3.3) denklemlerinin sürekli çözümü olarak adlandırılır. Bu teoremi ispatlamak için geçici olarak

$$v(t)=f(t)-b_1 u(t-w)$$

yazılsın. Bu durumda (3.2) denklemi

$$a_0 u'(t)+b_0 u(t)=v(t)$$

ya da

$$\frac{d}{dt}\left[a_0 u(t) e^{\frac{b_0 t}{a_0}}\right]=v(t)e^{\frac{b_0 t}{a_0}} \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir. Hipotezden $v(t) \in C^0[w,2w]$ için (3.5) denkleminin integrali alınırsa, $w<t<2w$ için (3.2) denklemini sağlayan ve $u(w)=g(w)$ olan bir tek $u(t)$ fonksiyonu olduğu görülür. Bu fonksiyon sürekli olduğundan $v(t) \in C^0[w,3w]$ olur. (3.5) denkleminden (3.2) denklemini $w<t<3w$ için sağlayan bir tek sürekli $u(t)$ fonksiyonunun olduğu görülür. Bu şekilde devam edilirse $t \geq w$ için $u(t)$ fonksiyonun varlığı ve tekliği ifade edilmiş olur.

(3.2) denkleminden

$$a_0 u'(t)=f(t)-b_0 u(t)-b_1 u(t-w), \quad t>w \tag{3.6}$$

$u(t) \in C^0[0,w)$ olduğunda $u'(t) \in C^0(w,\infty)$ olur. Üstelik (3.6) denkleminin sağ tarafı türevlenebilirdir. Yani

$$a_0 u''(t)=f'(t)-b_0 u'(t)-b_1 u'(t-w), \; t>2w \tag{3.7}$$

şeklindedir.

(3.7) denkleminin sağ tarafı $C^0(2w,\infty)$ sınıfındadır ve böylelikle $u(t) \in C^2(2w,\infty)$ olur. Eğer $g \in C^1[0,w]$ ise

$$a_0 u'(w-0)=a_0 g'(w-0)$$

eşitliğinden dolayı

$$a_0u'(w+0)=f(w)-b_0g(w)-b_1g(0)$$

olur.

Böylelikle $u'(t)$ fonksiyonu w noktasında ancak ve ancak

$$a_0g'(w-0)+b_0g(w)+b_1g(0)=f(w)$$

durumunda süreklidir.

Eğer g, $C^2[0,w]$ sınıfından ise (3.7) ifadesinden dolayı $w<t<2w$ aralığında ancak ve ancak

$$b_1[u'(w+0)-u'(w-0)]=0$$

olduğunda süreklidir.

Bu durum ya u'' nün w' da sürekli olması ile ya da $b_1=0$ olması ile sağlanır. Sonraki durumda, (3.2) denklemi diferansiyel denklemdir.

Şimdi ise genelliği bozmaksızın $g\in C^2[0,w]$ alınabileceği ispatlansın. $t_1>2w$ olmak üzere

$$a_0w'(t)+b_0w(t)+b_1w(t-w)=f(t+t_1),\ t>0 \qquad (3.8)$$

$$w(t)=u(t+t_1),\ 0\le t\le w \qquad (3.9)$$

denklemleri ele alınsın. Bu denklemler (3.2) ve (3.3) denklemleri ile aynı formdadır ve $t\ge 0$ için $w(t)=u(t+t_1)$ bir tek sürekli çözüme sahiptir. $u(t)\in C^2(2w,\infty)$ olduğundan $w(t)\in C^2[0,\infty)$' dur. Açıktır ki eğer sadece $u(t)$ nin $t\ge t_1$ değerleri inceleniyorsa (3.2) ve (3.3) orijinal problemleri (3.8) ve (3.9) problemleri ile değiştirilebilir. Böylelikle, Teorem 3.1' in hipotezinden $g\in C^2[0,w]$ olmalı ve (3.4) denklemi sağlanmalıdır. Bu durumda $u\in C^2[0,w)$ olur.

4. ÜSTEL ÇÖZÜMLER

Şu ana kadar gecikmeli diferansiyel denklemin çözümü aralıktan aralığa genişletildi, bazı durumlarda herhangi bir $kw < t < (k+1)w$, $k = 0,1,2,...$ aralığında çözüm değerlerini veren bir formül geliştirildi. Fakat bulunan bu yöntem istenilen sonlu aralıkta nümerik yöntemlerle çözüm hesaplanması için kullanılabilmektedir. Bazen böyle bir formül, çözümün bazı özelliklerini incelemede yardımcı olmayabilir. Mesela t sonsuza giderken çözümün davranışı hakkında bilgi alınmasında bu yöntem yeterli değildir. Bu sebeple çözümü üstel çözümlerin toplamı şeklinde oluşturulan ikinci bir temel yöntem verilecek. Bu yöntem diferansiyel denklemler teorisinde iyi bilinmektedir. Notasyonun uygunluğu için aşağıdaki $L(u)$ lineer operatörü tanımlansın:

$$L(u) = a_0 u'(t) + b_0 u(t) + b_1 u(t-w). \qquad (4.1)$$

Aşağıdaki teorem $L(u)$ operatörünün lineerliğinin bir sonucudur.

Teorem 4.1: $u_1(t)$ ve $u_2(t)$, $L(u)=0$ denkleminin çözümü, c_1 ve c_2 de iki keyfi sabit olmak üzere $c_1u_1(t)+c_2u_2(t)$, $L(u)=0$ denkleminin çözümüdür.

Bu teoremin ispatı,

$$L(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1L(u_1) + c_2L(u_2) = 0$$

özelliğine dayanmaktadır.

Teorem 4.2: $v(t); L(u) = f$ denkleminin bir çözümü, $w(t); L(u)=0$ denkleminin bir çözümü ise bu durumda $v+w$ da $L(u)=f$ denkleminin çözümü olur. $L(v+w) = L(v) + L(w) = f$ olduğundan bu açıktır.

Tanım: $L(u)=0$ tipindeki denkleme homojen denklem, $L(u)=f$ tipindeki denkleme ise non-homojen denklem denir. Teorem 4.2,

$$\begin{cases} L(u) = f \\ u = g, \ \ t_0 \le t \le t_0 + w \end{cases}$$

probleminin çözümünün

$$\begin{cases} L(v) = 0 \\ v = g, \ t_o \le t \le t_0 + w \end{cases} \qquad (*)$$

$$\begin{cases} L(w) = f \\ w = 0, \ t_0 \le t \le t_0 + w \end{cases} \qquad (**)$$

problemlerinin çözümünün toplamı ile elde edilebileceğini gösterir. (*) probleminin çözümü bulunsun.

Teorem 4.1' in sonucu homojen denklemin her çözümünü basit çözümlerin lineer kombinasyonu olarak elde edilebileceğini gösterir. Bu basit çözümler üstel olduğundan gecikmeli diferansiyel denklemler için üstel çözümler bulunabilir.

$$L(e^{st})=(a_0 s+b_0+b_1 e^{-ws})e^{st} \tag{4.2}$$

denkleminde $u=e^{st}, L(u)=0$ denkleminin çözümü ve s ise

$$h(s)=a_0 s+b_0+b_1 e^{-ws} \tag{4.3}$$

ifadesi transandantal fonksiyonun bir köküdür.

Tanım: $L(u)=0$ denklemi ile ilgili olan $h(s)$ fonksiyonu, L' nin karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır. $h(s)=0$ denklemi L' nin karakteristik denklemi, $h(s)=0$ denkleminin kökleri ise L' nin karakteristik kökleridir.

Her karakteristik köke karşılık gelen $L(u)=0$ denkleminin bir çözümü vardır. Genelde birçok sonsuz kök vardır. Üstelik bir katlı kök birden fazla bağımsız çözüm meydana getirebilir. Öncelikle

$$\begin{aligned} h'(s)&=a_0-b_1 w e^{-ws} \\ h^{(k)}(s)&=(-1)^k b_1 w^k e^{-ws}, k=2,3,\ldots \end{aligned} \tag{4.4}$$

olduğu düşünülürse, $n\geq 1$ için

$$L(t^n e^{st})=a_0(t^n s e^{st}+n t^{n-1}e^{st})+b_0 t^n e^{st}+b_1(t-w)^n e^{s(t-w)} \tag{4.5}$$

yazılabilir. $(t-w)^n$ Binom açılımından (4.5) denklemindeki $t^{n-k}e^{st}$ $(o\leq k\leq n)$ ifadesinin katsayılarının

$$\binom{n}{k}h^{(k)}(s)$$

olduğu görülür. Sonuç olarak

$$L(t^n e^{st})=e^{st}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}t^{n-k}h^{(k)}(s) \tag{4.6}$$

elde edilir.

Bu denklemden s, m. dereceden katlı kök ise $h(s),h'(s),\ldots,h^{(m-1)}(s)$ s' nin bu değeri için sıfır olacağından $0\leq n\leq m-1$ aralığında herhangi bir n tamsayısı için $L(t^n e^{st})=0$ olduğu görülür. Böylelikle, m. dereceden katlı kök olan s' nin oluşturduğu $e^{st}, te^{st},\ldots,t^{m-1}e^{st}$ tüm reel t değerleri için $L(u)=0$ denkleminin çözümü olur. Herhangi bir aralıkta bu m tane fonksiyon lineer bağımsızdır. $L(u)=0$ denklemi lineer ve homojen olduğundan $p(t)e^{st}$ ifadesi de bir çözümdür (burada $p(t)$, derecesi $m-1$ den büyük olmayan bir polinomdur).

Teorem 4.3 (Tian, 2003)

$$L(u)=a_0u'(t)+b_0u(t)+b_1u(t-w)=0 \tag{4.7}$$

$$\sum p_\tau(t)e^{s_\tau t} \tag{4.8}$$

(4.8) iadesi, (4.7) denklemini sağlar. Burada $\{s_\tau\}$, L' nın karakteristik köklerinin bir dizisi, $p_\tau(t)$, derecesi s_τ' nın derecesinden küçük olan bir polinomdur, toplam ifadesi ise yakınsaklığı garantilemek için uygun olan koşullarla birlikte ya sonlu ya da sonsuzdur.

O halde çıkarılan sonuçların adi diferansiyel denklemlerdeki sonuçlara benzer olmasına rağmen, aralarında çok önemli bir fark vardır. Adi diferansiyel denklemde sadece sonlu sayıda kök varken genellikle gecikmeli fark denklemlerinde sonsuz sayıda karakteristik kök, böylelikle de sonsuz sayıda üstel çözüm vardır. Örneğin, adi diferansiyel denkleminin başlangıç şartlarını sağlayan çözümü, üstel çözümlerin bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. Aynısı (4.7) denkleminde uygulanmak istenirse aşağıdaki sorular ortaya çıkar:

a) Tüm s_τ kökleri nasıl hesaplanabilir?

b) (4.7) denkleminin her çözümü (4.8) formunda yazılabilir mi?

c) Eğer yazılabilirse, tüm $p_\tau(t)$ katsayılarını (başlangıç koşularını sağlayacak şekilde) nasıl hesaplanabilir?

Şimdi bu sorular cevaplansın.

5. ÇÖZÜMLERİN BÜYÜME MERTEBESİ

Yukarıdaki soruların cevaplanabilmesi için, Laplace dönüşüm tekniklerini kullanmak yararlı olacaktır. Bu amaçla bazı değerlendirmeler verilsin.

Lemma 5.1: $w(t)$ pozitif ve monoton azalmayan, $u(t)\geq 0, v(t)\geq 0$ sürekli üç fonksiyon ve

$$u(t)\leq w(t)+\int_a^t u(t_1)v(t_1)dt_1,\ a\leq t\leq b \tag{5.1}$$

ise,

$$u(t)\leq w(t)\exp\left[\int_a^t v(t_1)dt_1\right],\ a\leq t\leq b \tag{5.2}$$

olur.

Bu lemmayı ispatlamak için, w monoton azalmayan olduğundan

$$\frac{u(t)}{w(t)}\leq 1+\int_a^t \frac{u(t_1)v(t_1)}{w(t)}dt_1\leq 1+\int_a^t \frac{u(t_1)v(t_1)}{w(t_1)}dt_1$$

$$\left(a\geq 0, u(t)\geq 0, v(t)\geq 0 \text{ ve } u(t)\leq a+\int_0^t u(s)v(s)ds\Rightarrow u(t)\leq a\exp\left[\int_0^t v(s)ds\right]\right)$$

olacağı ve $\dfrac{u(t)}{w(t)}$ fonksiyonu düşünülürse yukarıdaki parantez içindeki açıklamadan dolayı

$$\frac{u(t)}{w(t)}\leq \exp\left[\int_a^t v(t_1)dt_1\right] \tag{5.3}$$

yazılabilir. Buradan da

$$u(t)\leq w(t)\exp\left[\int_a^t v(t_1)dt_1\right] \tag{5.4}$$

elde edilir.

Teorem 5.1: $u(t)\in C^1\left[0,\infty\right)$ fonksiyonu

$$L(u)=a_0u'(t)+b_0u(t)+b_1u(t-w)=f(t) \tag{5.5}$$

denkleminin bir çözümü olsun. $f\in C^0\left[0,\infty\right)$, c_1, c_2 pozitif sabitler ve

$$\left|f(t)\right|\leq c_1e^{c_2t},\ t\geq 0 \tag{5.6}$$

olsun.

$$m = \max_{0 \le t \le w} |u(t)| \tag{5.7}$$

olmak üzere

$$|u(t)| \le c_3 (c_1 + m) e^{c_4 t}, \ t \ge 0 \tag{5.8}$$

yazılabilir. Burada c_3 ve c_4 pozitif sabitler olup, c_2, (5.5) denklemindeki katsayılara bağlıdır. (5.5) denkleminden

$$a_0 u(t) = a_0 u(w) + \int_w^t f(t_1) dt_1 - b_0 \int_w^t u(t_1) dt_1 - b_1 \int_w^t u(t_1 - w) dt_1, \ t \ge w$$

elde edilir. O halde

$$|a_0 u(t)| \le |a_0| m + c_1 \int_w^t e^{c_2 t_1} dt_1 + |b_0| \int_0^t |u(t_1)| \, dt_1 - |b_1| \int_0^{t-w} |u(t_1)| \, dt_1, \ t \ge w$$

$$|u(t)| \le m + \frac{c_1}{c_2 |a_0|} e^{c_2 t} + \frac{|b_0| + |b_1|}{|a_0|} \int_0^t |u(t_1)| \, dt_1, \ t \ge w$$

olur.

$$c_3 = \max\left(1, \frac{1}{c_2 |a_0|}\right), \ c_5 = \frac{|b_0| + |b_1|}{|a_0|} \ \text{denilirse}$$

$$|u(t)| \le c_3 (c_1 + m) e^{c_2 t} + c_5 \int_0^t |u(t_1)| \, dt_1, \ t \ge w \tag{5.9}$$

yazılır.

$0 \le t \le w$ için $|u(t)| \le m \le c_3 m e^{c_2 t}$ olduğundan (5.9) eşitsizliği $t \ge 0$ için sağlanır. Bu sebeple Lemma 5.1'den

$$|u(t)| \le c_3 (c_1 + m) e^{(c_2 + c_5) t}, \ t \ge 0$$

ifadesi elde edilir. Benzer bir uygulama $L(u)$' nun başlangıç koşullarına bağlı olan sürekli bir çözümü için de yapılabilir.

6. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ ÇÖZÜMÜ

Laplace dönüşümü sabit katsayılı lineer gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etmede oldukça kullanışlıdır.

$$u'(t) = u(t-1) \tag{6.1}$$

denkleminden yararlanılarak bu yöntemin nasıl kullanılacağı gösterilsin. Denklem e^{-st} ile çarpılıp 1' den ∞' a integrali alınırsa

$$\int_1^\infty u'(t)e^{-st}dt = \int_1^\infty u(t-1)e^{-st}dt \tag{6.2}$$

olur. Sağ tarafa değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\int_1^\infty u(t-1)e^{-st}dt = e^{-s}\int_0^\infty u(t)e^{-st}dt$$

$$= e^{-s}\left[\int_1^\infty u(t)e^{-st}dt + \int_0^1 u(t)e^{-st}dt\right]$$

elde edilir. Kısmi integral alınıp $t \to \infty$ için $u(t)e^{-st} \to 0$ olduğu düşünülürse

$$\int_1^\infty u'(t)e^{-st}dt = -u(1)e^{-s} + s\int_1^\infty u(t)e^{-st}dt$$

bulunur.

Bu durumda son ifade (6.2) denkleminde yerine yazılırsa

$$(s-e^{-s})\int_1^\infty u(t)e^{-st}dt = u(1)e^{-s} + e^{-s}\int_0^1 u(t)e^{-st}dt$$

olur.

$s - e^{-s} \neq 0$ ise

$$\int_1^\infty u(t)e^{-st}dt = \frac{u(1)e^{-s} + e^{-s}\int_0^1 u(t)e^{-st}dt}{s-e^{-s}} \tag{6.3}$$

elde edilir. Bu denklem u' nun dönüşümünü, $0 \le t \le 1$ aralığı boyunca u değerleri ile ifade etmektedir. Ters dönüşüm formülü uygulanırsa

$$u(t) = \int_{(c)} \frac{\left[u(1)e^{-s} + e^{-s}\int_0^1 u(t')e^{-st'}dt'\right]}{s-e^{-s}} e^{st}ds, \quad t > 1 \tag{6.4}$$

bulunur.

Böylelikle (6.1) denkleminin çözümü $(0,1]$ aralığında u' nun başlangıç değerlerinin eğrisel integrali olarak ifade edildi. Böyle bir eğrisel integral çözüm hakkında bilgi elde etmede oldukça önemli bir araçtır.

Lemma 6.1 (Bellman ve Cooke 1963): $h(s)=a_0s+b_0+b_1e^{-ws}=0$ denkleminin tüm kökleri kompleks s düzleminden bazı dikey doğruların soluna doğru uzanmaktadır. Yani, $\mathrm{Re}(s)<c$ şartını sağlayan tüm s kökleri için bir reel c sabiti vardır. Bu lemma kullanılarak aşağıdaki teorem ispatlanabilir.

Teorem 6.1 $u(t)$ sürekli fonksiyonu

$$\begin{cases} L(u)=a_0u'(t)+b_0u(t)+b_1u(t-w)=f(t),\ t\rangle w,\ a_0\neq 0 \\ u(t)=g(t),\quad 0\leq t\leq w \end{cases} \tag{6.5}$$

probleminin çözümü, $g(t)\in C^0[0,w]$, $f\in C^0[0,\infty)$ ve

$$|f(t)|\leq c_1e^{c_2t},\ t\geq 0,\ a>0,\ c_2>0 \tag{6.6}$$

olsun.

Bu durumda yeteri kadar geniş c sabiti için

$$u(t)=\int_{(c)} e^{ts}h^{-1}(s)\left[p_0(s)+q(s)\right]ds,\ t>w \tag{6.7}$$

olur.

Burada

$$p_0(s)=a_0g(w)e^{-ws}-b_1e^{-ws}\int_0^w g(t_1)e^{-st_1}dt_1\,, \tag{6.8}$$

$$q(s)=\int_w^\infty f(t_1)e^{-st_1}dt_1\ . \tag{6.9}$$

Ayrıca,

$$u(t)=\int_{(c)} e^{ts}h^{-1}(s)\left[p(s)+q(s)\right]ds,\quad t>0 \tag{6.10}$$

olur. Burada

$$p(s)=a_0g(w)e^{-ws}+(a_0s+b_0)\int_0^w g(t_1)e^{-st_1}dt \tag{6.11}$$

$\left(g\in C^1[0,w]\right)$

olur. (6.6) ifadesi ve Teorem 5.1 kullanılırsa

$$|u(t)|\leq c_3e^{c_4t},\quad t\geq 0 \tag{6.12}$$

olacak şekilde c_3 ve c_4 pozitif sabitlerinin varlığı görülür. Bu durumda $\mathrm{Re}(s) > c_4$ şartını sağlayan her s kompleks sayısı için

$$\int_0^{\infty} u(t)e^{-st}dt, \int_w^{\infty} u(t-w)e^{-st}dt, \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

integralleri yakınsaktır.

Kısmi integrasyonla

$$\int_w^{t'} u'(t)e^{-st}dt = u(t')e^{-st'} - g(w)e^{-ws} + s\int_w^{t'} u(t)e^{-st}dt \tag{6.13}$$

yazılır. Eğer $\mathrm{Re}(s) > c_4$ ise $t' \to \infty$ iken $u(t')e^{-st'} \to 0$ olacağından (6.12) yardımıyla (6.13) ün sağ tarafı $t' \to \infty$ iken sıfıra yakınsar. Aynı zamanda sol taraf da sıfıra yakınsar ve

$$\int_w^{\infty} u'(t)e^{-st}dt = -g(w)e^{-ws} + s\int_w^{\infty} u(t)e^{-st}dt \tag{6.14}$$

olur. Ayrıca

$$\int_w^{\infty} u(t-w)e^{-st}dt = e^{-ws}\left[\int_w^{\infty} u(t)e^{-st}dt + \int_0^{w} g(t)e^{-st}dt\right] \tag{6.15}$$

olduğu açıktır. Bu, (6.5) ifadesinde yerine yazılırsa

$$h(s)\int_w^{\infty} u(t)e^{-st}dt = p_0(s) + q(s), \quad \mathrm{Re}(s) > c_4 \tag{6.16}$$

elde edilir.

c yeteri kadar büyük ise Lemma 6.1' den $\mathrm{Re}(s) > c$ için $h(s)$' nin sıfır olmadığı görülür.

Böylelikle,

$$\int_w^{\infty} u(t)e^{-st}dt = h^{-1}(s)\left[p_0(s) + q(s)\right], \mathrm{Re}(s) > c \tag{6.17}$$

yazılabilir.

$u(t) \in C^1[w, \infty)$ olduğundan, Teorem 3.1' den (6.7) denklemini elde edilebilmesi için ters dönüşüm formülü uygulanabilir.

(6.10) denklemini elde edilebilmesi için ise (6.14) ve (6.15) denklemlerinin kullanılması yerine

$$\int_w^{\infty} u'(t)e^{-st}dt = -g(w)e^{-ws} + s\left[\int_0^{\infty} u(t)e^{-st}dt - \int_0^{w} g(t)e^{-st}dt\right],$$

$$\int_{w}^{\infty} u(t-w)e^{-st}dt = e^{-ws}\int_{0}^{\infty} u(t)e^{-st}dt$$

eşitlikleri (6.5) denkleminde yerine yazılır ve $\int_{0}^{\infty} u(t)e^{-st}dt$ için çözülür:

$$\int_{0}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = h^{-1}(s)[p(s)+q(s)],\ \mathrm{Re}(s) > c. \qquad (6.18)$$

$g(t) \in C^1[0,w]$, $u(t) \in C^1[0,w]$ ve $[w,\infty)$ olarak kabul edildiğinden, (6.4) ters formülü (6.10) denklemindeki sonucu verir. Bu sonuç gecikmeli ve advanced tip denklemler arasındaki fark hakkında yorum yapmak için yol göstericidir.

$$a_1 u'(t-w) + b_0 u(t) + b_1 u(t-w) = f(t) \qquad (6.19)$$

denklemi ikinci tip iken (6.5) denklemi birinci tiptir. Bu metodu sonradan gelen denkleme uygulanırsa

$$h(s) = a_1 s e^{-ws} + b_0 + b_1 e^{-ws}$$

olmak üzere (6.18) şeklinde bir eşitlik elde edilir. Bu eşitliğin karakteristik fonksiyonun keyfi geniş reel kısmının kökleri olduğu gösterilebilir. $h^{-1}(s)$ fonksiyonunun keyfi geniş reel kısmı, s değerleri için tekildir. Böylece, her bir karakteristik kök (6.19) denkleminin bir çözümünü oluşturduğundan çözümler (6.12) ifadesinde olduğu gibi üstel olarak sınırlı değildir.

Örnek (Dolan ve ark. , 1980)

$$\varepsilon u'(t) + u(t) = \frac{1}{2}u(t-1), t \in [0,2]$$

$$u(t) = 2, t \in I_0 = [-1,0]$$

örneği ele alınsın.

$I_1 = [0,1]$ aralığı için

$$\begin{cases} \varepsilon u'(t) + u(t) = 1 \\ u(0) = 2 \end{cases}$$

çözümüne $u_1(t)$ denilirse, $u_1(t) = 1 + e^{-\frac{t}{\epsilon}}$ olur.

$I_2 = [1,2]$ için $t-1 \in I_1$,

$$\begin{cases} \varepsilon u'(t)+u(t)=\dfrac{1}{2}\left(1+e^{-\frac{t-1}{\varepsilon}}\right) \\ u(1)=1+e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \end{cases}$$

çözümüne $u_2(t)$ denilirse, $u_2(t)=\dfrac{1}{2}+e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+\dfrac{1}{2}e^{-\frac{t-1}{\varepsilon}}+\dfrac{t-1}{2\varepsilon}e^{-\frac{t-1}{\varepsilon}}$ olur.

$$u(t)=\begin{cases} 2, & t\in[-1,0] \\ 1+e^{-\frac{t}{\varepsilon}}, & t\in[0,1] \\ \dfrac{1}{2}+e^{-\frac{t}{\varepsilon}}+\dfrac{1}{2}e^{-\frac{t-1}{\varepsilon}}+\dfrac{t-1}{2\varepsilon}e^{-\frac{t-1}{\varepsilon}}, & t\in[1,2] \end{cases}$$

elde edilir. Bu çözüm her yerde süreklidir.

Şimdi $u(t)$' nin 1. ve 2. türevi bulunsun ve türevlerin sürekliliğine bakılsın:

$$u'(t)=\begin{cases} 0, & t\in[-1,0] \\ -\dfrac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}, & t\in(0,1] \\ -\dfrac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}-\dfrac{t-1}{2\varepsilon^2}e^{-\frac{t-1}{\varepsilon}}, & t\in[1,2] \end{cases}$$

0 noktasında sürelilik: $\lim\limits_{t\to 0^-}u'(t)=0$

$$\lim_{t\to 0^+}u'(t)=-\frac{1}{\varepsilon}$$

olup 0 noktasında sürekli değildir.

1 noktasında süreklilik: $\lim\limits_{t\to 1^-}u'(t)=-\dfrac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$

$$\lim_{t\to 1^+}u'(t)=-\frac{1}{\varepsilon}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

olup 1 noktasında süreklidir.

$$u''(t)=\begin{cases} 0, & t\in[-1,0] \\ \dfrac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}, & t\in[0,1) \\ \dfrac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}-\dfrac{1}{2\varepsilon^2}e^{-\frac{t-1}{\varepsilon}}+\dfrac{t-1}{2\varepsilon^3}e^{-\frac{t-1}{\varepsilon}}, & t\in[1,2] \end{cases}$$

0 noktasındaki süreksizdir.

1 noktasındaki süreklilik: $\lim_{t\to 1^-} u''(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$

$$\lim_{t\to 1^+} u''(t) = \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} - \frac{1}{2\varepsilon^2}$$

1 noktasında süreksizdir.

2. türev $t=0$, $t=1$ hariç, $t>1$ için her yerde süreklidir.

3. türev $t=0$, $t=1$ ve $t=2$ hariç, $t>2$ için her yerde süreklidir.

.

.

.

.

k. türev $t=0,,\ldots,$ $t=k-1$ hariç, $t>k-1$ için her yerde süreklidir.

u denklemde her yerde süreklidir. 1. türev için $u'(t)$, $t=1$' de sürekli ve $u(t-1)$, $t=0$' da sürekli olduğundan $u'(1)$ sürekli olur.

$$\varepsilon u''(t) = -u'(t) + \frac{1}{2}u'(t-1)$$

2. türevinin sürekliliği için $t=2$' de $u'(t)$ ve $u'(t-1)$ de $t=1$ noktasında sürekli olduğu için denklemden 2. türev de sürekli olur.

Sınır katı incelenirse

$$u'(t) = \left\{ -\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{t}{\varepsilon}},\ t \in [0,1] \right\}$$

olduğu görülür.

1. türev için $O(\varepsilon)$ genişliğinde türev sınırsızdır.

$\varepsilon \to 0$ için

$\left|u'(1^-)\right| = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ sınırlıdır,

$\left|u'(1^+)\right| = \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ sınırlıdır.

$t = 1 + O(\varepsilon)$ için $\left|u'(1+k\varepsilon)\right| = -\frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{1}{\varepsilon}-k} - \frac{k}{2\varepsilon} e^{-k}$ (k, c gibi bir sabit)

dır.

Dolayısıyla $t=1$' in hafif sağında ($1+\mathrm{k}\varepsilon$ noktasında) sınır katı vardır.

2. türev için

$$u''(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}, & t\in[0,1]\\ \dfrac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{t}{\varepsilon}}-\dfrac{1}{2\varepsilon^2}e^{-\frac{t-1}{\varepsilon}}+\dfrac{t-1}{2\varepsilon^2}e^{-\frac{t-1}{\varepsilon}}, & t\in[1,2]\end{cases}$$

$$u''(1^+)=\frac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{1}{\varepsilon}}-\frac{1}{2\varepsilon^2}$$

$t=1$ noktasında sınırsızdır.

1. türev $t=1$' de sınırlı iken 2. türev sınırsızdır. Sınır katları da $x=0,\ x=1,\ x=2,\ldots$ noktalarının sağ civarında vardır.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, fen ve mekanik alanlarında sıklıkla karşılaşılan ve kullanılan problem tiplerinden olan birinci mertebeden gecikmeli diferansiyel denklemler için nümerik çözüm bulma üzerinde duruldu. Sabit katsayılı lineer denklem tipi üzerinde çalışıldı ve bu modellere bazı metotlar uygulanarak nümerik sonuçlar elde edildi. Uygun üstel çözümler açık bir biçimde ifade edildi.

Birinci mertebeden başlangıç değer şartları bilinen gecikmeli problemin incelendiği bu çalışma fen, fizik, mekanik ve tıp alanlarındaki birçok problemin çözümüne katkı sağlayacağından dolayı önemlidir. Gecikmeli denklem; şizofreni, panik atak, epilepsi gibi psikiyatri hastalıklarına da uygulanmıştır. Ayrıca bu tip gecikmeli zaman etkisi; fizikte çift duyarlı lazerle, ekonomide de ürün fiyatlarının dalgalanması şeklinde ortaya çıkabilmektedir.

8. KAYNAKLAR

Amiraliyev, G. M., Erdoğan F. 2007. Uniform numerical method for singularly perturbed delay differential equations, Computer Math., 53: 1251-1259.

Bellen, A., Maset, S. 2000. Numerical solution of constant cofficient linear delay differential equation as abstract Cauchy problems, Numer. Math., 84: 351-374.

Bellman, R., Cooke, K. L. 1963. Differential- Difference Equations, Academy Press, New York.

Chow, S. N., Hale, J. K., Huang, W. 1992. From fine waves to square waves in delay equations, Proc. Roy. Soc. Edinburg Sect. A, 120: 223-229.

Derstine, M. W., Gibbs, H. M., Hopf, F. A., Kaplan, D.L. 1982. Bifurcation gap in a hybrid optical system, Phys. Rev. A., 26: 3720-3722.

Doolan, E. P., Miller, J. J. H., Schilders, W. H. A. 1980. Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers, Boole Press, Dublin.

Driver, R. D. 1977. Ordinary and Delay Differential Equations, Springer, Berlin.

Hale, J. K., Sternberg, N. 1988. Onset of chaos in differential delay equations. J. Comput. Phys. , 77: 221-239.

In't Hout, K. J. 1992. A new interpolation procedure for adapting Runge-Kutta methods to delay differential equations, BIT, 32: 634-649.

In't Hout, K. J. 1997. Stability analysis of Runge-Kutta methods for systems of delay differential equations, , IMA J.Numer. Anal., 17: 17-27.

Mackey, M. C., Glass, L. 1977. Oscillation and choas in physiological control systems. Science, 197: 287-289.

Maset, S. 2003. Numerical solution of retarded functional differential equations as abstract Cauchy problems, J. Comput. Appl. Math., 161: 259-282.

Tian, H. 2002. The exponential asymptotic stability of singularly perturbed delay equations with a bounded lag, J. Math. Anal. Appl., 270: 143149.

Tian, H. 2003. Asymptotic expansion for the solution of singularly perturbed delay differential equations, J. Math. Anal. Appl., 281(2): 678-696.

Tian, H. 2004. Numerical Methods for Singularly Perturbed Delay Differential Equations. An International Conference on Boundary and Interior Layers : Computational and Asiymptotic Methods, Australia, 1-6.

ÖZGEÇMİŞ

Elif ÇELİKER, 1986 yılında Sinop' ta doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Sinop' ta tamamladı. 2005 yılında girdiği Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nü 2010 yılında bitirdi. 2011 yılında Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı ve halen yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.