VİDA HAREKETLERİNE DAİR

YUSUF ÇAKIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.

SİNOP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VİDA HAREKETLERİNE DAİR

YUSUF ÇAKIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN

YRD. DOÇ. DR. FATMA KARAKUŞ

SİNOP – 2015

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

Yusuf ÇAKIR, tarafından hazırlanan "Vida Hareketlerine Dair" başlıklı bu çalışma, 24.07.2015 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Yusuf YAYLI
Jüri Başkanı

Prof.Dr.Kamil DEMİRCİ
Jüri Üyesi

Karakus
Yrd.Doç.Dr.Fatma KARAKUŞ
Jüri Üyesi

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Hünkar Avni DUYAR
Enstitü Müdürü

VİDA HAREKETLERİNE DAİR

ÖZET

Bu tez çalışması altı temel kısımdan oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmıdır. İkinci bölümde ise çalışma için önemli olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, reel ve dual kuaterniyonlar tanıtıldı. Dördüncü bölümde, vida hareketini oluşturan operatörler tanımlandı. Beşinci bölümde ise bölünmüş kuaterniyonlar ve dual bölünmüş kuaterniyonlar anlatıldı. Son bölümde ise reel uzayda ve Minkowski 3-uzayında vida hareketleri incelendi.

Anahtar Kelimeler: Dual sayılar, Minkowski 3-uzayı, dönme operatörü, öteleme operatörü, bölünmüş kuaterniyonlar, dual bölünmüş kuaterniyonlar, özel yarı ortogonal dual matris, vida hareketi.

ON THE SCREW MOTİONS

ABSTRACT

This study has six main chapter. The first chapter is devoted to the introduction. Basic definitions and teorems significant to the study are given in the second chapter. In the third chapter, real and dual quaternions are introduced. The operators that create screw motion are defined in the fourth chapter. In the fifth chapter, split quaternions and dual split quaternions are explained. In the last chapter, screw motions in real space and Minkowski 3-space are studied.

Key Words: Dual numbers, Minkowski 3-space, rotation operator, translation operator, split quaternion, dual split quaternion, special semi orthogonal matrix, screw motion.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının hazırlanmasında emeği olan ve çalışmalarımda bana yol gösteren danışman hocam Sayın Yrd.Doç.Dr. Fatma KARAKUŞ'a en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, bu süre zarfında maddi manevi desteğini esirgemeyen sevgili eşim Rukiye ÇAKIR'a ve aile büyüklerime çok teşekkür ederim.

Yusuf ÇAKIR

Temmuz, 2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET…………………………………………………………………… i

ABSTRACT……………………………………………………………… ii

TEŞEKKÜR…..………………………………………………………… iii

İÇİNDEKİLER ………………………………………………………… iv

SEMBOLLER…………………..……………………………………… vi

1. GİRİŞ……………………………………………………………… 1

2. TEMEL KAVRAMLAR……………………….……………………... 3

3. REEL VE DUAL KUATERNİYONLAR…………………………… 11

3.1. Reel Kuaterniyonlar…………………………………………………… 11

3.2. Dual Kuaterniyonlar…………………………………………………… 13

4. OPERATÖRLER……….……………………………………………… 15

4.1. Öteleme Operatörü…………………………………………………… 15

4.2. Dönme Operatörü……………………………………………………..… 17

4.3. Vida Operatörü………………………………………………………… 19

5. SPLİT KUATERNİYONLAR………………………………………… 21

5.1. Bölünmüş (Split) Kuaterniyonlar………..…………………………… 21

5.2. Dual Bölünmüş (Split) Kuaterniyonlar………………………………… 28

6. VİDA HAREKETİ…………………………………………………… 35

6.1. Reel Uzayda Vida Hareketi…………………………………………… 35

6.2. Minkowski 3-Uzayında Vida Hareketi.……………………………….. 42

6.2.1. Timelike Bölünmüş (Split) Kuaterniyonlar için Vida Hareketi……. 42

6.2.2. Spacelike Bölünmüş (Split) Kuaterniyonlar için Vida Hareketi…… 57

7. KAYNAKLAR.. 66

ÖZGEÇMİŞ.. 67

SEMBOLLER

Θ : Dual Açı

S^* : Dönme Ekseni

C : Minkowski 3-Uzayında Antisimetrik Matris

D : Dual Sayılar Halkası

K : Kuaterniyonlar Uzayı

$\wedge$: Minkowski 3-Uzayında Vektörel Çarpım

g : Minkowski 3-Uzayında Metrik Tensör

$\times$: Kuaterniyon Çarpımı

θ : Reel Açı

θ^* : Reel Uzaklık

H : Bölünmüş Kuaterniyonlar Uzayı

H_D : Dual Bölünmüş Kuaterniyonlar Uzayı

Ad_q, Υ : Yarı Ortogonal Matris

$\Psi, \Re$: Yarı Ortogonal Dual Matrisler

E_1^3 : Minkowski 3-Uzayı

Q, P : Dual Bölünmüş Kuaterniyonlar

1.GİRİŞ

Kinematik, kuvvet ve kütle kavramlarını içermeyen mekaniğin bir dalıdır. Yani kinematik, sadece bir nokta veya nokta sistemi (cisim) nin zamana bağlı olarak yer değiştirmesini inceler (Müller, 1963).

Matematiksel fiziğin en önemli yapıtaşlarından olan kuaterniyonlar 1843 yıllında İrlandalı Matematikçi William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından kompleks sayıları üç boyutlu uzaya taşımak amacıyla tanımlanmış ve kinematikte hareketlerin incelenmesi bakımından önemli rol oynadığı için birçok çalışmada ifade edilmiştir.

Hamilton kompleks sayıları üç boyutlu uzaya genelleştirmek istemiştir. Bu nedenle kuaterniyonun skalar kısmı kompleks sayı karakterini yansıtmak amacıyla muhafaza edilmiştir.

Kuaterniyonlar vektörlerin kullanıldığı fiziksel niceliklerin temsilinde önemli rol oynamaktadır. İşlevselliği nedeniyle dönme ve öteleme hareketinin temsilinde oldukça kullanışlıdırlar. Özellikle dönme hareketiyle ilişkili olan açısal yer değiştirme, açısal hız ve momentum kavramlarının oluşturulması konusunda çok önemlidir.

Kompleks ve dual kuaterniyonların reel kuaterniyonlardan en önemli farklarından birisi de reel kuaterniyonların aksine sekiz bileşen içermeleridir. Bu ise dual kuaterniyonlar için bir dezavantaj olmamış aksine daha geniş kullanım alanı bulmalarına neden olmuştur. Bu tezin amaçlarından birisi de dual kuaterniyonların kullanım alanlarını genişletmektir.

Dual kuaterniyonların yapıları dual sayılar ile kompleks baz elemanlarının bir kombinasyonudur. Yapıları nedeniyle dönme ve öteleme hareketinin birlikte yer aldığı sistemlerde yani vida hareketinde kullanılmaktadır. Ayrıca bunlara ek olarak dönme hareketinin geometrisinin kolaylıkla ifade edilebilmesi nedeniyle robotik uygulamalarda, kinematik ifadelerin elde edilmesinde kullanılmaktadır.

Son yıllarda ise kimyada molekül yapılarının incelenmesinde, tıbbi bilimlerde DNA ve protein yapıları, göz hareketlerinin tanımlanmasında, diş hekimliğinde implant cerrahisi tekniğinde ve astronomide de yaygın olarak kullanılmaktadır.

Veldkamp (1976) dual birim vektörler ve dual vektör çiftleri yardımıyla dual birim küreyi ifade etmiş ve dual küresel hareketleri vermiştir. Ayrıca dual hareket ve reel uzay hareket arasındaki bağlantıyı göstermiştir.

Hacısalihoğlu (1983) reel ve dual kuaterniyonları ve sağladıkları özellikleri ayrıntılı bir şekilde incelemiştir. Birim dual kuaterniyonlar yardımıyla dönme ve öteleme operatörlerini ifade etmiştir. Ayrıca vida operatörünün dönme ve öteleme operatörlerinin bileşkesi olarak yazılabileceğini göstermiştir. Vida hareketlerinin birleşimini ve Euler açılarının denklemlerini vermiştir.

Kula (2003) split (bölünmüş) kuaterniyonları incelemiş, Hamilton operatörlerini ve özelliklerini vermiştir. Ayrıca Minkowski 3-uzayında vida hareketini tanımlamıştır.

Son yıllarda yapılan çalışmalarda ise robotik sistemlerin temsilinde kuaterniyonlar adeta yeniden keşfedilmiştir.

Bu tez çalışmasında ise Minkowski 3-uzayında bölünmüş (split) kuaterniyonun zamansı (timelike) ve uzaysı (spacelike) olma durumuna göre vida hareketi incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak konularla ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir. H.H. Hacısalihoğlu’nun “Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi” (1983) isimli kitabı kaynak olarak kullanılmıştır.

2.1. Dual Sayılar

Tanım 2.1. $D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\left\{A=\left(a,a^*\right)\middle|a,a^*\in\mathbb{R}\right\}$ cümlesine dual sayılar cümlesi denir.

Tanım 2.2. D cümlesi üzerinde toplama, çarpma ve eşitlik işlemleri sırasıyla,

$$\begin{aligned}
&\oplus : D\times D\to D\\
&\quad\left(A,B\right)\to A\oplus B=\left(a,a^*\right)\oplus\left(\mathrm{b},\mathrm{b}^*\right)=\left(a+b,a^*+b^*\right),\\
&\odot : D\times D\to D\\
&\quad\left(A,B\right)\to A\odot B=\left(a,a^*\right)\odot\left(\mathrm{b},\mathrm{b}^*\right)=\left(ab,\mathrm{a}\,b^*+a^*b\right)
\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

İki dual sayının eşitliği de

$$A=B\Leftrightarrow a=b,\quad a^*=b^*$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1. $\left(D,\oplus,\odot\right)$ üçlüsü birimli ve değişmeli bir halkadır.

Tanım 2.3. $\left(0,1\right)$ dual sayısına D deki dual birim denir ve kısaca $\left(0,1\right)=\varepsilon$ ile gösterilir.

Sonuç 2.1. Dual sayılarda

$$\varepsilon^2=\varepsilon\odot\varepsilon=\left(0,1\right)\odot\left(0,1\right)=\left(0,0\right)=0 \quad \text{dır.}$$

Teorem 2.2. $A=\left(a,a^*\right)\in D$ sayısı $A=a+\varepsilon a^*$ şeklinde yazılabilir.

Yani $\left(a,a^*\right)=a+\varepsilon a^*$ dır.

Tanım 2.4. Bir dual sayının matris gösterimi, $\left(a,a^{*}\right)=a+\varepsilon a^{*}$ olmak üzere $\left(a,a^{*}\right)=\begin{bmatrix} a & a^{*} \\ 0 & a \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanmıştır.

Tanım 2.5. $D^{3}=D\times D\times D=\left\{A=\left(A_1,A_2,A_3\right)\middle|A_i\in D,\ 1\leq i\leq 3\right\}$ cümlesi üzerinde toplama ve skalar ile çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$+:D^{3}\times D^{3}\rightarrow D^{3}$$
$$\left(A,B\right)\rightarrow A+B=\left(A_i\right)+\left(B_i\right)=\left(A_i+B_i\right),$$
$$\bullet\ :D\times D^{3}\rightarrow\ D^{3}$$
$$\left(\lambda,\mathrm{A}\right)\rightarrow\lambda\cdot A=\left(\lambda A_i\right).$$

Burada $\vec{A}=\left(a_1+\varepsilon a^{*}{}_1,a_2+\varepsilon a^{*}{}_2,a_3+\varepsilon a^{*}{}_3\right)=\left(a_1,a_2,a_3\right)+\varepsilon\left(a^{*}{}_1,a^{*}{}_2,a^{*}{}_3\right)$ şeklindedir.

Teorem 2.3. $\left(D^{3},+\right)$ abel grubu, D dual sayılar halkası üzerinde bir modüldür. Bu modül kısaca D-Modül şeklinde gösterilecektir.

2.2. Dual Vektörler

Tanım 2.6. D – Modülün elemanları olan sıralı dual üçlülere dual vektörler denir.

Teorem 2.4. $\vec{a},\overrightarrow{a^*}\in\mathbb{R}^3$ olmak üzere D – Modülde her bir $\vec{A}$ dual vektörü,

$\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$, $\varepsilon=(0,1)\in D$ şeklinde yazılabilir.

$$\vec{A}=(a_1,a_2,a_3)+\varepsilon\left({a^*}_1,{a^*}_2,{a^*}_3\right)=\left(\vec{a},\overrightarrow{a^*}\right) \quad a_i,a_i^*\in\mathbb{R},\ 1\le i\le 3$$

Tanım 2.7. $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$, $\vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\in D^3$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle,\rangle : D^3\times D^3\to D$$
$$\left(\vec{A},\vec{B}\right)\to\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle=\left\langle\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*},\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\right\rangle=\langle a,b\rangle+\varepsilon\left(\left\langle\vec{a},\overrightarrow{b^*}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{a^*},\vec{b}\right\rangle\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.8. $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$, $\vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\in D^3$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$\wedge : D^3\times D^3\to D^3$$
$$\left(\vec{A},\vec{B}\right)\to\vec{A}\wedge\vec{B}=\left(\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}\right)\wedge\left(\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\right)=\vec{a}\wedge\vec{b}+\varepsilon\left(\vec{a}\wedge\overrightarrow{b^*}+\overrightarrow{a^*}\wedge\vec{b}\right)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.9. $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}\in D^3$ dual vektörünün normu

$$\left\|\vec{A}\right\|=\left(\left\langle\vec{A},\vec{A}\right\rangle\right)^{1/2}=\left(\left\|\vec{a}\right\|+\varepsilon\frac{\left\langle\vec{a},\overrightarrow{a^*}\right\rangle}{\left\|\vec{a}\right\|}\right),\ \vec{a}\neq\vec{0},$$

şeklinde bir dual sayıdır.

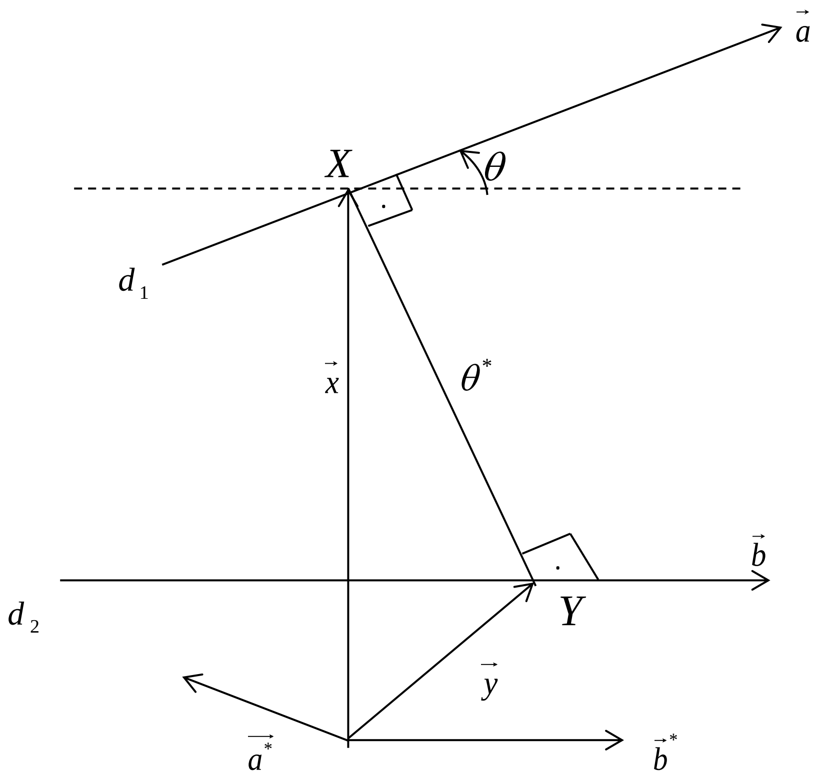
Tanım 2.10. $\left\|\vec{A}\right\|=(1,0)$ ise $\vec{A}$ vektörüne birim dual vektör denir.

Teorem 2.5. $\vec{A} \neq \left(\vec{0}, \vec{a}\right) \in D - Modül$ olmak üzere

$\vec{U} = \dfrac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|}$ birim dual vektördür.

Tanım 2.11. $k = \dfrac{\left\langle \vec{a}, \vec{a^*} \right\rangle}{\|\vec{a}\|^2}$ reel sayısına $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \vec{a^*}$ dual vektörünün adımı denir.

Tanım 2.12. $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual sayısına $\vec{A}$ ile $\vec{B}$ birim dual vektörleri arasındaki dual açı denir. Burada θ eksenler arasındaki reel açı, θ^* ise eksenler arasındaki en kısa uzaklıktır.



Şekil - 2.1. Dual açı

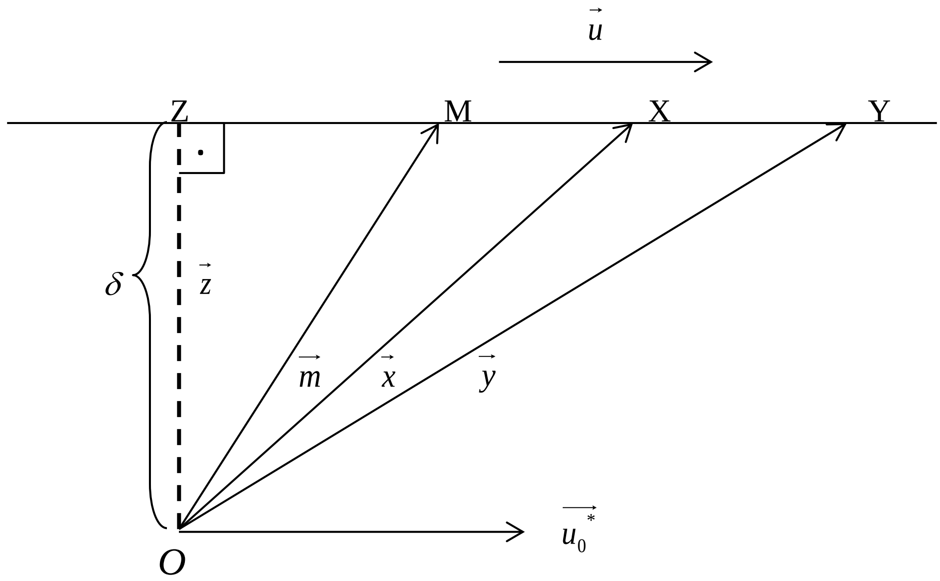
2.3. E. Study Dönüşümü

Tanım 2.13. $\left\{ \vec{X} = \vec{x} + \varepsilon \vec{x^*} \;\middle|\; \left\| \vec{X} \right\| = (1,0);\ \vec{x}, \vec{x^*} \in \mathbb{R}^3 \right\}$ cümlesine $D-$Modül uzayında birim dual küre denir.

Teorem 2.6. (E. Study).

$\vec{A} \neq \left(0, \vec{a}\right) \in D-$Modül olmak üzere $D-$Modülde denklemi

$\left\| \vec{A} \right\| = (1,0)$ olan birim dual kürenin dual noktaları, $\mathbb{R}^3$ deki yönlü doğrulara birebir karşılık gelir.



Şekil - 2.2.

$\mathbb{R}^3$ deki bir doğru, bir O başlangıç noktasına göre, üzerindeki bir M noktası ve doğrunun yönünü belirten bir $\vec{u}$ vektörü tarafından tamamen belirlenir.

Böyle bir doğrunun vektörel denklemi

$\left(\vec{x} - \vec{m}\right) \wedge \vec{u} = \vec{0}$ dır. (Şekil - 2.2.)

$\vec{x} \wedge \vec{u} = \vec{m} \wedge \vec{u} = \vec{y} \wedge \vec{u} = \vec{u_0^*}$ ve $\left\| \vec{u_0^*} \right\| = \left\| \vec{z} \right\| = \delta$ dır.

Şimdi ise Minkowski 3-uzayı ile ilgili tanım ve kavramları verelim.

Tanım 2.14. $E_1^3 = \left(\mathbb{R}^3, g\right)$, olmak üzere Lorentz - Minkowski uzayı bir metrik uzaydır.

$X = \left(x_1, x_2, x_3\right)$ ve $Y = \left(y_1, y_2, y_3\right)$ için $g\left(\mathrm{X}, \mathrm{Y}\right) = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

şeklinde tanımlıdır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.15. $X \in E_1^3$ vektörü için;

(i) $g\left(X, X\right) > 0$ veya $X = 0$ ise X e uzaysı (spacelike) vektör,

(ii) $g\left(X, X\right) < 0$ ise X e zamansı (timelike) vektör,

(iii) $g\left(X, X\right) = 0$ ve $X \neq 0$ ise X e ışıksı (lightlike, null veya isotropik) vektör denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.16. Lorentz uzayında bir $X \in E_1^3$ vektörünün normu $\left\| X \right\| = \sqrt{\left| g\left(X, X\right) \right|}$ şeklinde tanımlanır. Normu bir olan vektöre de birim vektör denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.7.

(i) $\vec{a}$ *ve* $\vec{b}$ Lorentz vektör uzayında zamansı vektörler olsun. Bu durumda

$$\left| g\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \right| \geq \left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\|$$

eşitsizliği vardır. Bu eşitsizlikte eşitlik olması için gerek ve yeter şart $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır.

(ii) $\vec{a}$ *ve* $\vec{b}$ aynı zamansı konide yatan vektörler olmak üzere;

$$g\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -\left\| \vec{a} \right\| \left\| \vec{b} \right\| \cosh \phi$$

olacak şekilde bir tek $\phi \geq 0$ sayısı vardır. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ arasındaki bu ϕ sayısına hiperbolik açı denir (O'Neill, 1983).

Teorem 2.8. $\vec{a},\vec{b}$ *ve* $\vec{c}$ Minkowski 3-uzayında vektörler olsun.

(i) $g\left(\vec{a}\wedge\vec{b},\vec{c}\right)=\det\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$

(ii) $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$

(iii) $\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)\wedge\vec{c}=-g\left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{c}+g\left(\vec{b},\vec{c}\right)\vec{a}$

(iv) $\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right)=-g\left(\vec{a},\vec{c}\right)\vec{b}+g\left(\vec{a},\vec{b}\right)\vec{c}$

Burada $\vec{a}=\left(a_1,a_2,a_3\right)$ ve $\vec{b}=\left(b_1,b_2,b_3\right)$ olmak üzere;

$$g\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

ve

$$\vec{a}\wedge\vec{b}=\begin{vmatrix}-\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\left(a_3b_2-a_2b_3,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1\right)$$

biçiminde tanımlıdır (Weinstein, 1995).

Tanım 2.17. D^3 de $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}$, $\vec{B}=\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}$ dual vektörlerinin Lorentz iç çarpımları

$$g\left(\vec{A},\vec{B}\right)=g\left(\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*},\vec{b}+\varepsilon\overrightarrow{b^*}\right)=g\left(a,b\right)+\varepsilon\left(g\left(\vec{a},\overrightarrow{b^*}\right)+g\left(\overrightarrow{a^*},\vec{b}\right)\right)$$

ile tanımlıdır. Bu Lorentz iç çarpımıyla, D^3 dual uzayına dual Lorentz uzayı denir ve D_1^3 ile gösterilir.

Tanım 2.18. $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\overrightarrow{a^*}\in D_1^3$ verilsin.

(i) $g\left(\vec{A},\vec{A}\right)<0$ ise $\vec{A}$ dual vektörüne zamansı (timelike) vektör,

(ii) $g\left(\vec{A},\vec{A}\right)>0$ veya $\vec{A}=0$ ise $\vec{A}$ dual vektörüne uzaysı (spacelike) vektör,

(iii) $g\left(\vec{A},\vec{A}\right)=0,\ \ \vec{A}\neq 0$ ise $\vec{A}$ dual vektörüne ışıksı (null), (lightlike) vektör denir (O’Neill, 1983).

Tanım 2.19. $\vec{A} = \vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}$ ve $\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \overrightarrow{b^*} \in D_1^3$ olsun.

$$\wedge : D_1^3 \times D_1^3 \to D_1^3$$

$$\left(\vec{A}, \vec{B}\right) \to \vec{A} \wedge \vec{B} = \left(\vec{a} + \varepsilon \overrightarrow{a^*}\right) \wedge \left(\vec{b} + \varepsilon \overrightarrow{b^*}\right) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \varepsilon \left(\vec{a} \wedge \overrightarrow{b^*} + \overrightarrow{a^*} \wedge \vec{b}\right)$$

ifadesine $A\, ve\, B$ dual vektörlerinin Lorentz anlamında vektörel çarpımı denir. $\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(a_3 b_2 - a_2 b_3, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1\right)$

şeklindedir.

Lemma 2.1. $\vec{A}, \vec{B} \in D_1^3$ için $\vec{A} \neq 0$ ve $\vec{B} \neq 0$ olmak üzere, $g\left(\vec{A}, \vec{B}\right) = 0$ olsun. Eğer $\vec{A}$ zamansı dual vektör ise, bu durumda $\vec{B}$ uzaysı dual vektördür (Ratcliffe, 1994).

3. REEL VE DUAL KUATERNİYONLAR

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler açıklanmıştır.

3.1. Reel Kuaterniyonlar

Tanım 3.1.1. $\mathrm{K} = \left\{ q = a_0 1 + a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3} \,\middle|\, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$

cümlesinin her bir elemanına reel kuaterniyon denir.

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3} \qquad \vec{e_1}^2 = \vec{e_2}^2 = \vec{e_3}^2 = -1$

kuaterniyonunun skalar kısmı S_q ve vektörel kısmı $\vec{V_q}$ olmak üzere iki kısma ayrılır.

$q = S_q + \vec{V_q}$ olmak üzere

$S_q = a_0 1$ ve $\vec{V_q} = a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3}$ dir.

Tanım 3.1.2. $q = a_0 1 + a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3}$ ve $p = b_0 1 + b_1 \vec{e_1} + b_2 \vec{e_2} + b_3 \vec{e_3}$ reel kuaterniyonlarının toplamı

$$q + p = \left(S_q + S_p \right) + \left(\vec{V_q} + \vec{V_p} \right)$$

şeklinde tanımlıdır.

$\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere skalarla çarpma işlemi ise

$$\lambda q = \left(\lambda a_0 \right) 1 + \left(\lambda a_1 \right) \vec{e_1} + \left(\lambda a_2 \right) \vec{e_2} + \left(\lambda a_3 \right) \vec{e_3}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Tanım 3.1.3. Reel kuaterniyonların çarpımı ise;

$$\begin{aligned} \times : \mathrm{K} \times \mathrm{K} &\to \mathrm{K} \\ (q, p) &\to q \times p = qp \end{aligned}$$

$qp = S_q S_p - \left\langle \vec{V_q}, \vec{V_p} \right\rangle + S_q \vec{V_p} + S_p \vec{V_q} + \vec{V_q} \wedge \vec{V_p}$ olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.4. Bir reel kuaterniyonun normu;

$$N : K \to \mathbb{R}$$
$$q \to N_q = N(q) = q\overline{q} = \overline{q}q$$

olarak tanımlanır.

$q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere $N_q = q\overline{q} = \overline{q}q = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.5. Normu bir $(N_q = 1)$ olan $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ reel kuaterniyonuna birim reel kuaterniyon denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.1.6. $q = a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere, q reel kuaterniyonunun normlanışı

$$q_0 = \frac{q}{\sqrt{N_q}} = \frac{a_0 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$ olarak ifade edilir.

Bu q_0 birim reel kuaterniyonu $q_0 = \cos\theta + \overrightarrow{S_0}\sin\theta$

biçiminde yazılabilir.

$$\cos\theta = \frac{a_0}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}},$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}{\sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$ ve

$$S_0 = \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$ birim vektörüne q_0 birim reel kuaterniyonunun ekseni denir (Hacısalihoğlu, 1983).

3.2. Dual Kuaterniyonlar

Tanım 3.2.1. $\mathbb{Q}=\left\{Q=A_0 1+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}\,\middle|\,A_0,A_1,A_2,A_3\in D\right\}$

cümlesinin her bir elemanına dual kuaterniyon denir.

$$A=A_0 1+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3} \qquad \overrightarrow{e_1}^2=\overrightarrow{e_2}^2=\overrightarrow{e_3}^2=-1$$

dual kuaterniyonunun skalar kısmı S_Q ve vektörel kısmı $\overrightarrow{V_Q}$ olmak üzere iki kısma ayrılır.

$Q=S_Q+\overrightarrow{V_Q}$ olmak üzere

$S_Q=A_0 1$ ve $\overrightarrow{V_Q}=A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}$ dir.

Tanım 3.2.2. $Q=A_0 1+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}$ ve $P=B_0 1+B_1\overrightarrow{e_1}+B_2\overrightarrow{e_2}+B_3\overrightarrow{e_3}$ dual kuaterniyonlarının toplamı

$$Q+P=\left(S_Q+S_P\right)+\left(\overrightarrow{V_Q}+\overrightarrow{V_P}\right)$$

şeklinde tanımlıdır.

$\lambda\in D$ olmak üzere skalarla çarpma işlemi ise

$$\lambda Q=\left(\lambda Q_0\right)1+\left(\lambda Q_1\right)\overrightarrow{e_1}+\left(\lambda Q_2\right)\overrightarrow{e_2}+\left(\lambda Q_3\right)\overrightarrow{e_3}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Tanım 3.2.3. Dual kuaterniyonların çarpımı ise;

$$\begin{aligned}\times:\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}&\to\mathbb{Q}\\ (Q,P)&\to Q\times P=QP\end{aligned}$$

$$QP=S_QS_P-\left\langle\overrightarrow{V_Q},\overrightarrow{V_P}\right\rangle+S_Q\overrightarrow{V_P}+S_P\overrightarrow{V_Q}+\overrightarrow{V_Q}\wedge\overrightarrow{V_P}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.4. Bir dual kuaterniyonun normu;

$$N:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$$
$$Q\to N_Q=N(Q)=Q\overline{Q}=\overline{Q}Q$$

olarak tanımlanır.

$Q=A_0+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere $N_Q=Q\overline{Q}=\overline{Q}Q=A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2$

dir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.2.5. Normu bir $(N_q=1)$ olan $Q=A_0+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}$ dual kuaterniyonuna birim dual kuaterniyon denir (Hacısalihoğlu, 1983).

Tanım 3.2.6. $Q=A_0+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere, Q dual kuaterniyonunun normlanışı

$$Q_0=\frac{Q}{\sqrt{N_Q}}=\frac{A_0+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2}}$$ olarak ifade edilir.

Bu Q_0 birim dual kuaterniyonu $Q_0=\cos\Theta+\overrightarrow{S^*}\sin\Theta$

biçiminde yazılabilir. Burada $\Theta=\theta+\varepsilon\theta^*$ ve $\overrightarrow{S^*}=\overrightarrow{S_0}+\varepsilon\overrightarrow{S_0^*}$ olup,

$$\cos\Theta=\frac{A_0}{\sqrt{A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2}},$$

$$\sin\Theta=\frac{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}{\sqrt{A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2}}$$ ve

$$\overrightarrow{S^*}=\frac{A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}}$$ birim vektörüne Q_0 birim dual kuaterniyonunun ekseni denir (Hacısalihoğlu, 1983).

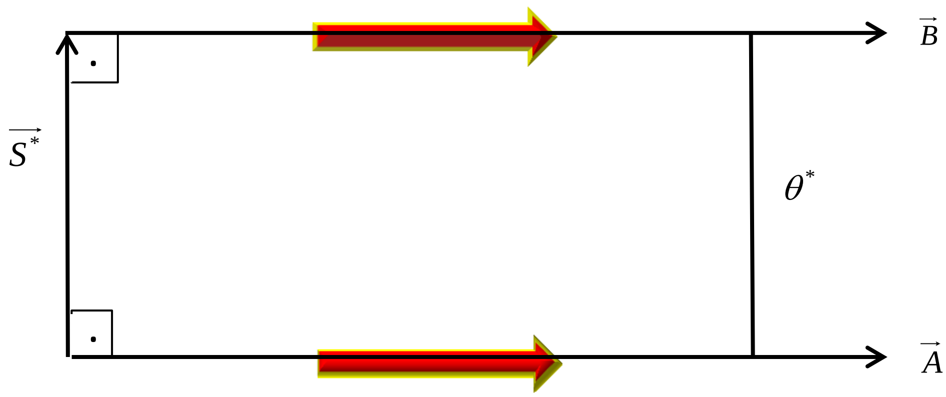
4. OPERATÖRLER

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler açıklanmıştır.

4.1. Öteleme (Kayma) Operatörü

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birim dual vektörlerinin arasındaki dual açı $\Theta = 0 + \varepsilon\theta^*$ olsun.

(Şekil - 4.1.) den de görüldüğü gibi bu iki doğru paraleldir.



Şekil – 4.1.

Buna göre

$$\left\langle \vec{S^*}, \vec{A} \right\rangle = 0$$
$$\left\langle \vec{S^*}, \vec{B} \right\rangle = 0$$

olur. Diğer yandan yönler aynı olduğundan

$$\vec{B} \times \left(\vec{A}\right)^{-1} = q_t = 1 + \varepsilon\theta^* \vec{S^*} \tag{4.1}$$

$$\left(\vec{B}\right)^{-1} \times \vec{A} = q_t = 1 + \varepsilon\theta^* \vec{S^*} \tag{4.2}$$

dır.

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \boldsymbol{K} \\ \boldsymbol{\theta}^{*} &\longrightarrow \mathbf{q}_{t} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon\theta}^{*}\overrightarrow{\boldsymbol{S}^{*}} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan q_t operatörüne öteleme operatörü denir

(4.1) ve (4.2) denklemlerinden

$$\vec{B} = \mathrm{q}_t \times \vec{A} \tag{4.3}$$
$$\vec{A} = \vec{B} \times \mathrm{q}_t \tag{4.4}$$

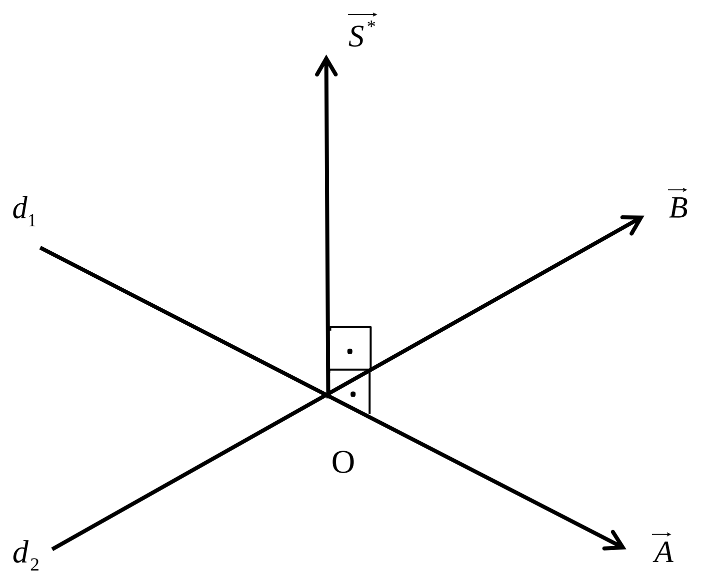
elde edilir.

Sonuç 4.1. $\overrightarrow{S^*}$ a dik bir $\vec{A}$ birim dual vektörünü $\mathrm{q}_t = 1 + \varepsilon\theta^*\overrightarrow{S^*}$ kuaterniyonu ile soldan çarpmak (sağdan çarpmak) demek $\vec{A}$ vektörüne karşılık gelen doğruyu, $\overrightarrow{S^*}$ ın doğrultu ve yönünde (ters yönünde) θ^* kadar ötelemek demektir.

4.2. Dönme Operatörü

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ iki birim dual vektör olsun. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ye karşılık gelen doğrular, sırasıyla d_1 *ve* d_2 olsun.

$d_1 \cap d_2 = \{O\}$ ve $\measuredangle(d_1, d_2) = \theta$ ise $\theta^* = 0$ olup $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ olduğundan $\Theta = \theta$ olur.



Şekil – 4.2.

Şekil - 4.2. de görüldüğü gibi $\vec{S^*} \;//\; \vec{A} \wedge \vec{B}$ olarak seçilirse,

$$\vec{B} \times \left(\vec{A}\right)^{-1} = q_r \tag{4.5}$$

$$\left(\vec{B}\right)^{-1} \times \vec{A} = q_r \tag{4.6}$$

olur.

$$\mathbb{R} \to K$$
$$\theta \to \mathrm{q}_r = \cos\ \theta + \vec{S^*}\ \sin\ \theta$$

şeklinde tanımlanan q_r operatörüne dönme operatörü denir.

(4.5) ve (4.6) denklemlerinden

$$\vec{B} = q_r \times \vec{A} \tag{4.7}$$
$$\vec{A} = \vec{B} \times q_r \tag{4.8}$$

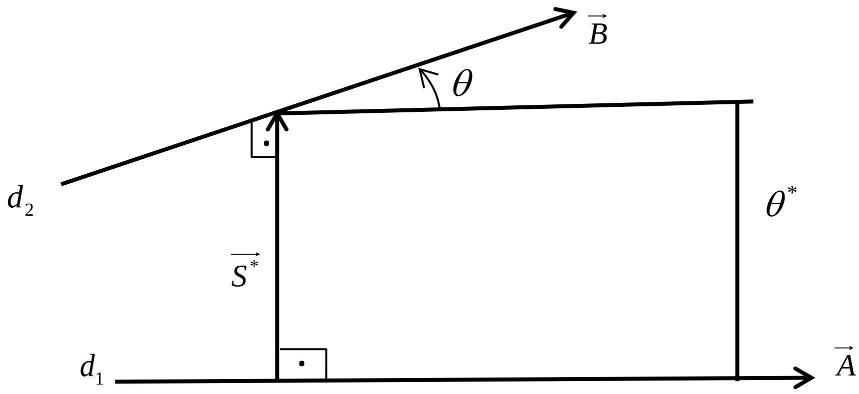
elde edilir.

Sonuç 4.2. $\overrightarrow{S^*}$ a dik bir birim dual vektörü $q_r = \cos\theta + \overrightarrow{S^*}\sin\theta$ ile soldan çarpmak (sağdan çarpmak) demek vektöre karşılık gelen doğruyu, $\overrightarrow{S^*}$ a normal olan düzlem içinde $\overrightarrow{S^*}$ doğrusu etrafında pozitif yönde (negatif yönde) θ kadar döndürmek demektir.

4.3. Vida Operatörü

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ aralarında $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$, $\theta \neq 0$, $\theta^* \neq 0$, dual açısı olan iki birim dual vektör olsun. O halde $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ ye kesişmeyen ve paralel olmayan iki doğru karşılık gelir.

Bu doğrular d_1 *ve* d_2 olsun. d_1 *ve* d_2 nin ortak dikme doğrusuna karşılık gelen ve $\vec{A}, \vec{B}$ ile bir sağ sistem oluşturan birim dual vektör $\overrightarrow{S^*}$ olsun. Yani $\overrightarrow{S^*}$ ın yönü $\vec{A} \wedge \vec{B}$ nin yönü ile aynı olsun. (Şekil - 4.3.)



Şekil – 4.3.

Bu durumda

$$Q^* = \cos\,\Theta + \overrightarrow{S^*}\,\sin\,\Theta$$

olmak üzere

$$\vec{B} \times \left(\vec{A}\right)^{-1} = Q^* \tag{4.9}$$

$$\left(\vec{B}\right)^{-1} \times \vec{A} = Q^* \tag{4.10}$$

yazabiliriz. (4.9) ve (4.10) denklemlerinde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\vec{B} = Q^* \times \vec{A} \;, \quad \vec{A} = \vec{B} \times Q^* \tag{4.11}$$

elde edilir.

Tanım 4.1.

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &\to \mathbb{Q} \\ \Theta &\to \mathrm{Q}^* = \cos\ \Theta\ +\ \overrightarrow{S^*}\ \sin\ \Theta \end{aligned}$$

operatörüne öteleme kısmı θ^*, dönme kısmı θ, adımı $\dfrac{\theta^*}{\theta}$ ve ekseni $\overrightarrow{S^*}$ olan bir vida operatörü denir.

Sonuç 4.3. $\mathrm{Q}^* = \cos\ \Theta\ +\ \overrightarrow{S^*}\ \sin\ \Theta$ birim dual kuaterniyonu ile bir $\vec{A}$ birim dual vektörünü soldan (sağdan) kuaterniyon anlamında çarpmak demek, $\vec{A}$ vektörüne karşılık gelen doğruyu, $\overrightarrow{S^*}$ ın doğrultu ve yönünde (ters yönünde) Θ ın dual kısmı olan θ^* kadar öteleyip ve hemen arkasından da $\overrightarrow{S^*}$ doğrusu etrafında pozitif yönde (negatif yönde) Θ ın reel kısmı olan θ kadar döndürmek demektir.

$\mathrm{Q}^* = \cos\ \Theta\ +\ \overrightarrow{S^*}\ \sin\ \Theta$ vida operatöründe $\Theta = \theta + \varepsilon\theta^*$ dual açısını yerine yazalım.

$$\begin{aligned} \mathrm{Q}^* &= \cos\ \left(\theta + \varepsilon\theta^*\right)\ +\ \overrightarrow{S^*}\ \sin\ \left(\theta + \varepsilon\theta^*\right) \\ &= \left(\cos\ \theta - \varepsilon\theta^* \sin\theta\right) + \overrightarrow{S^*}\left(\sin\theta + \varepsilon\theta^* \cos\theta\right) \\ &= \cos\ \theta - \varepsilon\theta^* \sin\theta + \overrightarrow{S^*} \sin\theta + \varepsilon\theta^* \overrightarrow{S^*} \cos\theta \\ &= \left(\cos\ \theta + \overrightarrow{S^*} \sin\theta\right) + \varepsilon\theta^* \left(-\sin\theta + \overrightarrow{S^*} \cos\theta\right) \end{aligned}$$

ifadesinde $\theta^* = 0$ yani öteleme sıfır iken $\Theta = \theta$ olup

Dönme operatörü $\mathrm{Q}^* = q_r = \cos\ \theta\ +\ \overrightarrow{S^*}\ \sin\ \theta$ elde edilir.

$\theta = 0$ yani dönme açısı sıfır iken

Öteleme operatörü $\mathrm{Q}^* = q_t = 1\ +\ \varepsilon\theta^* \overrightarrow{S^*}$ elde edilir.

5. SPLİT (BÖLÜNMÜŞ) KUATERNİYONLAR

Bu bölümde, J. Inoguchi'nin 1998 yılında tanımlamış olduğu bölünmüş (split) kuaterniyonlar verilecektir.

5.1. Bölünmüş (Split) Kuaterniyonlar

$$\mathrm{H}=\left\{q=a_0 1+a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}\ \middle|\ a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\right\} \qquad (5.1)$$

cümlesini ele alalım. Burada $\left\{1,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}\right\}$ birimlerinin çarpımı aşağıda verilmiştir.

$$\overrightarrow{e_1}^2=-1,\quad \overrightarrow{e_2}^2=1,\quad \overrightarrow{e_3}^2=1$$

$$\begin{array}{ll}
\overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_3} & \overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_1}=-\overrightarrow{e_3}\\
\overrightarrow{e_2}.\overrightarrow{e_3}=-\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_3}.\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_1}\\
\overrightarrow{e_3}\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_1}.\overrightarrow{e_3}=-\overrightarrow{e_2}
\end{array}$$

H nin her bir elemanına bir bölünmüş kuaterniyon denir (Inoguchi, 1998).

Burada a_0,a_1,a_2,a_3 reel sayılarına q bölünmüş kuaterniyonunun bileşenleri denir. Bundan sonraki bölümlerde, bir bölünmüş kuaterniyon için $q=a_0 1+a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}$ gösterimi kullanılacaktır. $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ birimleri 3- boyutlu reel vektör uzayının bir dik koordinat sisteminin baz vektörleri olarak alınabilir. Dolayısıyla bir $q=a_0 1+a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonu S_q ile gösterilen skalar kısım ve $\overrightarrow{V_q}$ ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısma ayrılır:

$$q=S_q+\overrightarrow{V_q} \qquad (5.2)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$S_q=a_0,\quad \overrightarrow{V_q}=a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}$$

dir.

$q=a_0 1+a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}$, $\quad p=b_0 1+b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+b_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonlarının toplamı

$$q+p=\left(S_q+S_p\right)+\left(\overrightarrow{V_q}+\overrightarrow{V_p}\right)$$

$$q+p=\left(a_0+b_0\right)+\left(a_1+b_1\right)\overrightarrow{e_1}+\left(a_2+b_2\right)\overrightarrow{e_2}+\left(a_3+b_3\right)\overrightarrow{e_3}$$

olarak tanımlıdır.

$\lambda\in\mathbb{R}$ ve $q=a_0 1+a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere λq dış işlemi

$$\lambda q=\left(\lambda a_0\right)+\left(\lambda a_1\right)\overrightarrow{e_1}+\left(\lambda a_2\right)\overrightarrow{e_2}+\left(\lambda a_3\right)\overrightarrow{e_3}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu iki işlemle birlikte H cümlesi reel sayılar cismi üzerinde 4-boyutlu bir vektör uzayıdır.

Ayrıca $q=a_0 1+a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}$, $\quad p=b_0 1+b_1\overrightarrow{e_1}+b_2\overrightarrow{e_2}+b_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonların çarpımı:

$$\begin{aligned}\times:\ & \mathrm{H}\times\mathrm{H}\to\mathrm{H}\\ & (q,p)\to q\times p=qp\end{aligned}$$

şeklinde bir işlem olup

$$\begin{aligned}qp=&\left(a_0b_0-a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)+\left(a_1b_0+a_0b_1-a_2b_3+a_3b_2\right)\overrightarrow{e_1}\\&+\left(a_0b_2+a_2b_0-a_1b_3+a_3b_1\right)\overrightarrow{e_2}+\left(a_0b_3+a_3b_0-a_2b_1+a_1b_2\right)\overrightarrow{e_3}\end{aligned}\tag{5.3}$$

veya

$$qp=S_qS_p+g\left(\overrightarrow{V_q},\overrightarrow{V_p}\right)+S_q\overrightarrow{V_p}+S_p\overrightarrow{V_q}+\overrightarrow{V_q}\wedge\overrightarrow{V_p}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned}g:\ & \operatorname{Im}\mathrm{H}\times\operatorname{Im}\mathrm{H}\to\mathbb{R}\\ & \left(\overrightarrow{V_q},\overrightarrow{V_p}\right)\to g\left(\overrightarrow{V_q},\overrightarrow{V_p}\right)=-a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{aligned}\tag{5.4}$$

$\wedge : \mathrm{Im}\ \mathrm{H} \times \mathrm{Im}\ \mathrm{H} \to \mathrm{Im}\ \mathrm{H}$

$$\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}\right) \to \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p} = \begin{vmatrix} -\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(a_3 b_2 - a_2 b_3\right)\overrightarrow{e_1} + \left(a_3 b_1 - a_1 b_3\right)\overrightarrow{e_2} + \left(a_1 b_2 - a_2 b_1\right)\overrightarrow{e_3}$$

dir. $\mathrm{Im}\ \mathrm{H} = \left\{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3} : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\right\}$ dir. Bu çarpma işlemleriyle birlikte H ye bölünmüş kuaterniyon cebiri denir.

Teorem 5.1. $q = a_0 1 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ zamansı birim bölünmüş kuaterniyon yani $I_q > 0$ olsun.

$$Ad_q = \begin{bmatrix} a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & 2\left(a_0 a_3 - a_1 a_2\right) & -2\left(a_0 a_2 + a_1 a_3\right) \\ 2\left(a_0 a_3 + a_1 a_2\right) & a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 & -2\left(a_0 a_1 + a_2 a_3\right) \\ 2\left(-a_0 a_2 + a_1 a_3\right) & 2\left(a_0 a_1 - a_2 a_3\right) & a_0^2 - a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 \end{bmatrix}$$

$Ad_q \in SO(3,1)$ matrisi yarı ortogonal matristir. Yani $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$Ad_q \varepsilon \left(Ad_q\right)^T \varepsilon = \left(Ad_q\right)^T \varepsilon Ad_q \varepsilon = I_3$$

ve

$\det\left(Ad_q\right) = 1$ dir (Kula, 2003).

Burada

$$Ad_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \sinh\theta \begin{bmatrix} 0 & c_3 & -c_2 \\ c_3 & 0 & -c_1 \\ -c_2 & c_1 & 0 \end{bmatrix} + \left(-1 + \cosh\theta\right) \begin{bmatrix} c_2^2 + c_3^2 & -c_1 c_2 & -c_1 c_3 \\ c_1 c_2 & -c_1^2 + c_3^2 & -c_2 c_3 \\ c_1 c_3 & -c_2 c_3 & -c_2^2 + c_2^2 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}0 & c_3 & -c_2\\ c_3 & 0 & -c_1\\ -c_2 & c_1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \varepsilon=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{olmak üzere}$$

$$Ad_q = I_3 + \sinh\theta C + \left(-1+\cosh\theta\right)C^2 \tag{5.5}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 5.2. $q = a_0 1 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ uzaysı birim bölünmüş kuaterniyon yani $I_q < 0$ olsun.

$$\Upsilon=\begin{bmatrix}a_0^{\,2}+a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2} & 2\left(a_0a_3-a_1a_2\right) & -2\left(a_0a_2+a_1a_3\right)\\ 2\left(a_0a_3+a_1a_2\right) & a_0^{\,2}-a_1^{\,2}-a_2^{\,2}+a_3^{\,2} & -2\left(a_0a_1+a_2a_3\right)\\ 2\left(-a_0a_2+a_1a_3\right) & 2\left(a_0a_1-a_2a_3\right) & a_0^{\,2}-a_1^{\,2}+a_2^{\,2}-a_3^{\,2}\end{bmatrix}$$

$\Upsilon \in SO(3,1)$ matrisi yarı ortogonal matristir. Yani $\varepsilon=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\Upsilon\varepsilon\left(\Upsilon\right)^T\varepsilon = \left(\Upsilon\right)^T\varepsilon\Upsilon\varepsilon = I_3$$

ve

$\det\left(\Upsilon\right) = -1$ dir.

Burada

$$\Upsilon=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}+\sinh\theta\begin{bmatrix}0 & c_3 & -c_2\\ c_3 & 0 & -c_1\\ -c_2 & c_1 & 0\end{bmatrix}+\left(1+\cosh\theta\right)\begin{bmatrix}c_2^2+c_3^2 & -c_1c_2 & -c_1c_3\\ c_1c_2 & -c_1^2+c_3^2 & -c_2c_3\\ c_1c_3 & -c_2c_3 & -c_2^2+c_2^2\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}0 & c_3 & -c_2\\ c_3 & 0 & -c_1\\ -c_2 & c_1 & 0\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \varepsilon=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\Upsilon = -I_3 + \sinh\theta C + \left(1+\cosh\theta\right)C^2 \tag{5.6}$$

şeklinde ifade edilebilir.

5.1.2.Bölünmüş Kuaterniyonlar Üzerine Temel İşlemler

a) Eşlenik:

$$\overline{(,)} : \mathrm{H} \to \mathrm{H}$$
$$q = S_q + \overrightarrow{V_q} \to \overline{q} = S_q - \overrightarrow{V_q}$$

şeklinde tanımlanır ve buna göre bir $q = a_0 1 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyon için, q nun eşleniği $\overline{q}$,

$$\overline{q} = a_0 1 - a_1\overrightarrow{e_1} - a_2\overrightarrow{e_2} - a_3\overrightarrow{e_3}$$

olur. Eşlenik işlemi aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

(i) $\overline{aq+bp} = a\overline{q} + b\overline{p}, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}, \forall q,p \in \mathrm{H}$

(ii) $\overline{qp} = \overline{p}\,\overline{q}, \quad \forall q,p \in \mathrm{H}$

(iii) $\overline{\overline{q}} = q, \quad \forall q \in \mathrm{H}.$

b) $q = a_0 1 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonu için;

$$I : \mathrm{H} \to \mathbb{R}$$
$$q \to I(q) = I_q = q\overline{q} = \overline{q}q$$

$I_q = a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2$ olmak üzere,

$I_q < 0$ ise, q bölünmüş kuaterniyonuna uzaysı (spacelike) bölünmüş kuaterniyon,

$I_q > 0$ ise, q bölünmüş kuaterniyonuna zamansı (timelike) bölünmüş kuaterniyon,

$I_q = 0$ ise, q bölünmüş kuaterniyonuna ışıksı (lightlike) bölünmüş kuaterniyon denir (Özdemir ve Ergin, 2005).

c) Norm:

$$N : \mathrm{H} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$q \rightarrow N(q) = N_q = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{\overline{q}q}$$

şeklinde tanımlanan N işlemine H üzerinde norm denir.

Bir $q = a_0 1 + a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2} + a_3\vec{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonu için, q nun N_q normu

$$N_q = \sqrt{\left|a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right|} \tag{5.7}$$

reel sayısıyla tanımlıdır (Özdemir ve Ergin, 2005).

Norm işlemi aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

(i) $N_{qp} = N_q N_p, \forall q, p \in \mathrm{H}$

(ii) $N_{\lambda q} = \lambda^2 N_q, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathrm{H}.$

d) İnvers :

$$(,)^{-1} : \mathrm{H} \rightarrow \mathrm{H}$$
$$q \rightarrow q^{-1} = \frac{\overline{q}}{I_q}, \quad I_q \neq 0$$

şeklinde tanımlanan işleme H de invers işlemi denir. $I_q \neq 0$ olmak üzere q bölünmüş kuaterniyonunun inversi

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{I_q} = \frac{a_0 - a_1\vec{e_1} - a_2\vec{e_2} - a_3\vec{e_3}}{a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2} \tag{5.8}$$

dir (Özdemir ve Ergin, 2005).

İnvers işlemi aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

(i) $(qp)^{-1} = p^{-1}\mathrm{q}^{-1}, \ \forall q, p \in \mathrm{H} \ \ ve \ \ I_q \neq 0, I_p \neq 0$

(ii) $(\lambda q)^{-1} = \frac{1}{\lambda} q^{-1},\ 0 \neq \lambda \in \mathbb{R},\ \forall q \in \mathrm{H}\ \ ve\ \ I_q \neq 0.$

e) Birim bölünmüş kuaterniyon :

$N_q = 1$ olan q bölünmüş kuaterniyonuna birim bölünmüş kuaterniyon denir (Kula, 2003).

f) İki bölünmüş vektörün çarpımı :

Skalar kısmı sıfır olan bölünmüş kuaterniyona bölünmüş vektör denir. $q = \overrightarrow{V_q} = a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$, $p = \overrightarrow{V_p} = b_1\overrightarrow{e_1} + b_2\overrightarrow{e_2} + b_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş vektörlerinin çarpımı

$$\begin{aligned} &\times : \mathrm{H} \times \mathrm{H} \to \mathrm{H} \\ &\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}\right) \to \overrightarrow{V_q} \times \overrightarrow{V_p} = g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_p}\right) + \overrightarrow{V_q} \wedge \overrightarrow{V_p} = g(q,p) + q \wedge p \end{aligned} \tag{5.9}$$

şeklinde bulunur (Kula, 2003).

g) $q = a_0 1 + a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonu için;

(i) Her uzaysı (spacelike) bölünmüş kuaterniyon $\left(I_q < 0\right)$, $q = N_q\left(\sinh\theta + S^*\cosh\theta\right)$ şeklinde yazılabilir. Burada S^*, E_1^3 uzayında uzaysı (spacelike) birim vektördür. $g\left(S^*, S^*\right) = 1$

(ii) Her zamansı (timelike) bölünmüş kuaterniyon $\left(I_q > 0\right)$, vektör kısmı uzaysı (spacelike) $\left(g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_q}\right) > 0\right)$ olmak üzere $q = N_q\left(\cosh\theta + S^*\sinh\theta\right)$ şeklinde yazılabilir. Burada S^*, E_1^3 uzayında uzaysı (spacelike) birim vektördür. $g\left(S^*, S^*\right) = 1$

(iii) Her zamansı (timelike) bölünmüş kuaterniyon $\left(I_q > 0\right)$, vektör kısmı zamansı (timelike) $\left(g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_q}\right) < 0\right)$ olmak üzere $q = N_q\left(\cos\theta + S^*\sin\theta\right)$ şeklinde yazılabilir. Burada S^*, E_1^3 uzayında zamansı (timelike) birim vektördür. $g\left(S^*, S^*\right) = -1$ (Özdemir ve Ergin, 2005).

5.2. Dual Bölünmüş (Split) Kuaterniyonlar

Bir A dual sayısı $A = a + \varepsilon a^{*}$ ifade edilir. Burada $a \; ve \; a^{*}$ reel sayılar ve ε bir reel sayı olmayıp

$$\varepsilon \neq 0, \quad 0\varepsilon = \varepsilon 0 = 0, \quad 1\varepsilon = \varepsilon 1 = \varepsilon, \quad \varepsilon^{2} = 0 \tag{5.10}$$

kurallarıyla belirlidir. Dual sayılar halkası D ile gösterilecektir.

$$\mathrm{H}_{D} = \left\{ Q = A_0 1 + A_1 \vec{e_1} + A_2 \vec{e_2} + A_3 \vec{e_3} \mid \mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3 \in D \right\} \tag{5.11}$$

cümlesini ele alalım. Burada $\left\{ 1, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \right\}$ birimlerinin çarpımı aşağıda verilmiştir.

$$\vec{e_1}^{2} = -1, \qquad \vec{e_2}^{2} = 1, \qquad \vec{e_3}^{2} = 1$$

$$\begin{array}{ll} \vec{e_1}.\vec{e_2} = \vec{e_3} & \vec{e_2}.\vec{e_1} = -\vec{e_3} \\ \vec{e_2}.\vec{e_3} = -\vec{e_1} & \vec{e_3}.\vec{e_2} = \vec{e_1} \\ \vec{e_3}\vec{e_1} = \vec{e_2} & \vec{e_1}.\vec{e_3} = -\vec{e_2} \end{array}$$

H_D nin her bir elemanına bir dual bölünmüş kuaterniyon denir. Burada A_0, A_1, A_2, A_3 dual sayılarına Q dual bölünmüş kuaterniyonunun bileşenleri denir.

Dolayısıyla bir $Q = A_0 1 + A_1 \vec{e_1} + A_2 \vec{e_2} + A_3 \vec{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonu

$q = a_0 1 + a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3}$ ve $q^{*} = a^{*}_{0} + a^{*}_{1} \vec{e_1} + a^{*}_{2} \vec{e_2} + a^{*}_{3} \vec{e_3}$ bölünmüş kuaterniyonlar olmak üzere,

$$Q = q + \varepsilon q^{*} = \left(a_0 + a_1 \vec{e_1} + a_2 \vec{e_2} + a_3 \vec{e_3} \right) + \varepsilon \left(a^{*}_{0} + a^{*}_{1} \vec{e_1} + a^{*}_{2} \vec{e_2} + a^{*}_{3} \vec{e_3} \right) \tag{5.12}$$

şeklinde ifade edilir. Q dual bölünmüş kuaterniyonu S_Q ile gösterilen skalar kısım ve $\overrightarrow{V_Q}$ ile gösterilen vektörel kısım olmak üzere iki kısma ayrılır:

$$Q = S_Q + \overrightarrow{V_Q} \tag{5.12}$$

biçiminde yazılır. Burada

$$S_Q = A_0\,, \quad \overrightarrow{V_Q} = A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$$

dir.

$Q = A_0 1 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}\,,$ $\quad P = B_0 1 + B_1\overrightarrow{e_1} + B_2\overrightarrow{e_2} + B_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonlarının toplamı

$$Q + P = \left(S_Q + S_P\right) + \left(\overrightarrow{V_Q} + \overrightarrow{V_P}\right)$$

$$Q + P = \left(A_0 + B_0\right) + \left(A_1 + B_1\right)\overrightarrow{e_1} + \left(A_2 + B_2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(A_3 + B_3\right)\overrightarrow{e_3}$$

olarak tanımlıdır.

$\lambda \in D$ ve $Q = A_0 1 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ olmak üzere λQ dış işlemi

$$\lambda Q = \left(\lambda A_0\right) + \left(\lambda A_1\right)\overrightarrow{e_1} + \left(\lambda A_2\right)\overrightarrow{e_2} + \left(\lambda A_3\right)\overrightarrow{e_3}$$

şeklinde tanımlıdır.

Bu iki işlemle birlikte H_D cümlesi reel sayılar cismi üzerinde 8-boyutlu bir vektör uzayı ve dual sayılar halkası üzerinde ise 4-boyutlu bir modüldür.

Ayrıca $Q = A_0 1 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}\,,$ $\quad P = B_0 1 + B_1\overrightarrow{e_1} + B_2\overrightarrow{e_2} + B_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonların çarpımı:

$$\begin{aligned} \times : \mathrm{H}_D \times \mathrm{H}_D &\to \mathrm{H}_D \\ \left(Q, P\right) &\to Q \times P = QP \end{aligned}$$

şeklinde bir işlem olup

$$\begin{aligned} QP =\, &\left(A_0B_0 - A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3\right) + \left(A_1B_0 + A_0B_1 - A_2B_3 + A_3B_2\right)\overrightarrow{e_1} \\ &+ \left(A_0B_2 + A_2B_0 - A_1B_3 + A_3B_1\right)\overrightarrow{e_2} + \left(A_0B_3 + A_3B_0 - A_2B_1 + A_1B_2\right)\overrightarrow{e_3} \\ &= qp + \varepsilon\left(qp^* + q^* p\right) \end{aligned} \tag{5.13}$$

veya

$$QP = S_Q S_P + g\left(\overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P}\right) + S_Q \overrightarrow{V_P} + S_P \overrightarrow{V_Q} + \overrightarrow{V_Q} \wedge \overrightarrow{V_P}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$\begin{aligned} g &: \mathrm{Im}\ \mathrm{H}_D \times \mathrm{Im}\ \mathrm{H}_D \to D \\ &\left(\overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P}\right) \to g\left(\overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P}\right) = -A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \end{aligned} \qquad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \wedge &: \mathrm{Im}\ \mathrm{H}_D \times \mathrm{Im}\ \mathrm{H}_D \to \mathrm{Im}\ \mathrm{H}_D \\ &\left(\overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P}\right) \to \overrightarrow{V_Q} \wedge \overrightarrow{V_P} = \begin{vmatrix} -\overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(A_3B_2 - A_2B_3\right)\overrightarrow{e_1} + \left(A_3B_1 - A_1B_3\right)\overrightarrow{e_2} + \left(A_1B_2 - A_2B_1\right)\overrightarrow{e_3} \end{aligned} \qquad (5.15)$$

dir. $\mathrm{Im}\ \mathrm{H}_D = \left\{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3} : A_1, A_2, A_3 \in D\right\}$ dir (Kula, 2003).

5.2.1. Dual Bölünmüş Kuaterniyonlar Üzerine Temel İşlemler

a) Eşlenik:

$$\begin{aligned} \overline{(,)} &: \mathrm{H}_D \to \mathrm{H}_D \\ Q &= S_Q + \overrightarrow{V_Q} \to \overline{Q} = S_Q - \overrightarrow{V_Q} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır ve buna göre bir $Q = A_0 1 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyon için, Q nun eşleniği $\overline{Q}$,

$$\begin{aligned} \overline{Q} &= A_0 1 - A_1\overrightarrow{e_1} - A_2\overrightarrow{e_2} - A_3\overrightarrow{e_3} \\ &= \overline{q} + \varepsilon \overline{q}^* \end{aligned} \qquad (5.16)$$

olur. Eşlenik işlemi aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

(i) $\overline{aQ+bP}=a\overline{Q}+b\overline{P},\quad \forall a,b\in D, \forall Q,P\in \mathrm{H}_D$

(ii) $\overline{QP}=\overline{P}\,\overline{Q},\quad \forall Q,P\in \mathrm{H}_D$

(iii) $\overline{\overline{Q}}=Q,\quad \forall Q\in \mathrm{H}_D$

(Kula, 2003).

b) $Q=A_0 1+A_1\vec{e_1}+A_2\vec{e_2}+A_3\vec{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonu için;

$$I:\mathrm{H}_D\to\mathbb{R}$$
$$Q\to I(Q)=I_Q=Q\overline{Q}=\overline{Q}Q$$

$$\begin{aligned}
I_Q &= A_0^{\;2}+A_1^{\;2}-A_2^{\;2}-A_3^{\;2}\\
&=\left(a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)+2\varepsilon\left(a_0a_0^*+a_1a_1^*-a_2a_2^*-a_3a_3^*\right)\\
&= q\overline{q}+\varepsilon\left(q\overline{q^*}+q^*\overline{q}\right)\\
&= I_q-2\varepsilon\left\langle q,q^*\right\rangle=-\left\langle q,q\right\rangle-2\varepsilon\left\langle q,q^*\right\rangle
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$I_Q<0$ ise, Q dual bölünmüş kuaterniyonuna uzaysı (spacelike) dual bölünmüş kuaterniyon,

$I_Q>0$ ise, Q dual bölünmüş kuaterniyonuna zamansı (timelike) dual bölünmüş kuaterniyon,

$I_Q=0$ ise, Q dual bölünmüş kuaterniyonuna ışıksı (lightlike) dual bölünmüş kuaterniyon denir.

c) Norm:

$$N:\mathrm{H}_D\to D$$
$$Q=N(Q)=N_Q=\sqrt{Q\overline{Q}}=\sqrt{\overline{Q}Q}$$

şeklinde tanımlanan N işlemine H_D üzerine norm denir. Bir $Q=A_0 1+A_1\vec{e_1}+A_2\vec{e_2}+A_3\vec{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonu için, Q nun N_Q normu

$$
\begin{aligned}
N_Q &= \sqrt{\left|A_0^{\,2} + A_1^{\,2} - A_2^{\,2} - A_3^{\,2}\right|} \\
&= \sqrt{\left|\left(a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right) + 2\varepsilon\left(a_0 a_0^* + a_1 a_1^* - a_2 a_2^* - a_3 a_3^*\right)\right|} \\
&= \sqrt{\left|q\overline{q} + \varepsilon\left(q\overline{q^*} + q^*\overline{q}\right)\right|} \\
&= \sqrt{\left|N_q - 2\varepsilon\left\langle q, q^*\right\rangle\right|} = \sqrt{\left|-\left\langle q, q\right\rangle - 2\varepsilon\left\langle q, q^*\right\rangle\right|}
\end{aligned} \tag{5.17}
$$

dual sayısıyla tanımlıdır. Norm işlemi aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

(i) $N_{QP} = N_Q N_P, \forall Q, P \in \mathrm{H}_D$

(ii) $N_{\lambda Q} = \lambda^2 N_Q, \forall \lambda \in D, \forall Q \in \mathrm{H}_D.$

c) İnvers :

$$
\begin{aligned}
&(,)^{-1} : \mathrm{H}_D \rightarrow \mathrm{H}_D \\
&\quad Q \rightarrow Q^{-1} = \frac{\overline{Q}}{I_Q}, \quad \left(I_Q\right)^2 \neq 0
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanan işleme H_D de invers işlemi denir. $\left(I_Q\right)^2 \neq 0$ olmak üzere Q dual bölünmüş kuaterniyonunun inversi

$$
Q^{-1} = \frac{\overline{Q}}{I_Q} = \frac{A_0 - A_1\vec{e_1} - A_2\vec{e_2} - A_3\vec{e_3}}{A_0^{\,2} + A_1^{\,2} - A_2^{\,2} - A_3^{\,2}} = q^{-1} - \varepsilon\left(q^{-1}q^*q^{-1}\right),\ \left(I_Q\right)^2 \neq 0. \tag{5.18}
$$

dir. İnvers işlemi aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır:

(i) $\left(QP\right)^{-1} = P^{-1}\mathrm{Q}^{-1},\ \forall Q, P \in \mathrm{H}_D\ \ ve\ \left(I_Q\right)^2 \neq 0, \left(I_P\right)^2 \neq 0$

(ii) $\left(\lambda Q\right)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}Q^{-1},\ \left(0 + \varepsilon s\right) \neq \lambda \in D,\ \forall Q \in \mathrm{H}_D\ \ ve\ \left(I_Q\right)^2 \neq 0.$

d) Birim dual bölünmüş kuaterniyon :

$N_Q = 1$ olan Q dual bölünmüş kuaterniyonuna birim dual bölünmüş kuaterniyon denir.

Q birim dual bölünmüş kuaterniyonu için, $\left\langle q, q^*\right\rangle = 0$ olmalıdır (Kula, 2003).

e) İki dual bölünmüş vektörün vektörel çarpımı :

Skalar kısmı sıfır olan dual bölünmüş kuaterniyona dual bölünmüş vektör denir. $Q=\overrightarrow{V_Q}=A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}$, $P=\overrightarrow{V_P}=B_1\overrightarrow{e_1}+B_2\overrightarrow{e_2}+B_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş vektörlerinin vektörel çarpımı,

$$\begin{aligned} \wedge : \mathrm{H}_D \times \mathrm{H}_D &\to \mathrm{H}_D \\ \left(\overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_P}\right) &\to \overrightarrow{V_Q} \wedge \overrightarrow{V_P} = \frac{1}{2}(QP-PQ) \end{aligned} \tag{5.19}$$

olarak bulunur (Kula, 2003).

f) İki dual bölünmüş kuaterniyonun skalar çarpımı :

$Q=A_0+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}$, $P=B_0+B_1\overrightarrow{e_1}+B_2\overrightarrow{e_2}+B_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonlarının skalar çarpımı,

$$\begin{aligned} \langle Q,P\rangle &= -A_0B_0-A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3 \\ &= -\frac{1}{2}\left(\overline{Q}P+\overline{P}Q\right) \\ &= \langle q,p\rangle+\varepsilon\left(\langle q,p^*\rangle+\langle q^*,p\rangle\right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

olarak bulunur (Kula, 2003).

g) $Q=A_0+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}$ dual bölünmüş kuaterniyonu için;

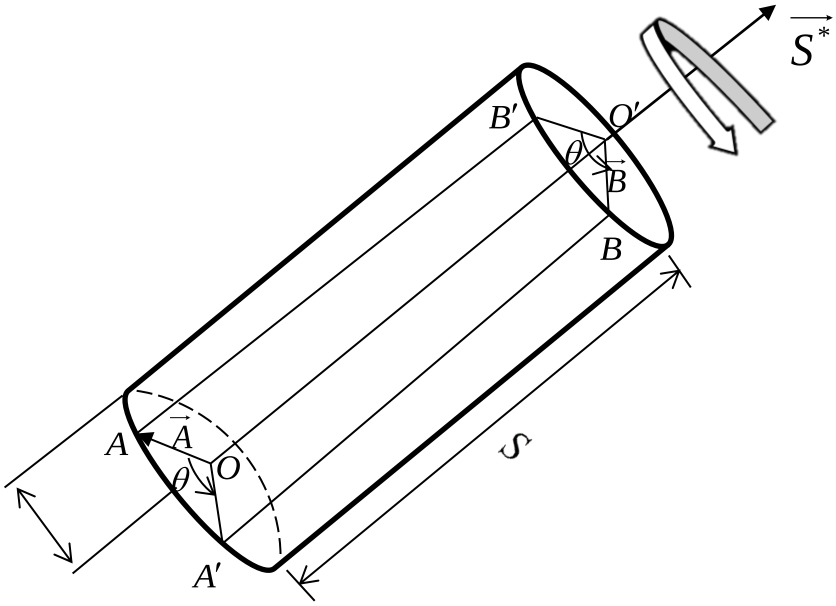
(i) Her uzaysı (spacelike) dual bölünmüş kuaterniyon $\left(I_Q<0\right)$, $Q=N_Q\left(\sinh\Theta+S^*\cosh\Theta\right)$ şeklinde yazılabilir. Burada S^*, E_1^3 uzayında uzaysı (spacelike) birim vektördür. $g\left(S^*,S^*\right)=1$

(ii) Her zamansı (timelike) dual bölünmüş kuaterniyon $\left(I_Q>0\right)$, vektör kısmı uzaysı (spacelike) $\left(g\left(\overrightarrow{V_Q},\overrightarrow{V_Q}\right)>0\right)$ olmak üzere $Q=N_Q\left(\cosh\Theta+S^*\sinh\Theta\right)$ şeklinde yazılabilir. Burada S^*, E_1^3 uzayında uzaysı (spacelike) birim vektördür. $g\left(S^*,S^*\right)=1$

(iii) Her zamansı (timelike) dual bölünmüş kuaterniyon $\left(I_Q > 0\right)$, vektör kısmı zamansı (timelike) $\left(g\left(\overrightarrow{V_Q},\overrightarrow{V_Q}\right) < 0\right)$ olmak üzere $Q = N_Q\left(\cos\Theta + S^*\sin\Theta\right)$ şeklinde yazılabilir. Burada S^*, E_1^3 uzayında zamansı (timelike) birim vektördür. $g\left(S^*,S^*\right) = -1$

6. VİDA HAREKETİ

6.1. Reel Uzayda Vida Hareketi



Şekil – 6.1.1.

Şekil - 6.1. de yüksekliği S olan, birim yarıçaplı bir dik silindir görülmektedir. Bu şekilde $\overrightarrow{S^*}$ birim dual vektörü silindirin eksenine, $\vec{A}$ birim dual vektörü ise silindir tabanında yatan OA yönlü doğrusuna, $\vec{B}$ birim dual vektörü de silindirin üst taban düzleminde yatan $O'B$ yönlü doğrusuna karşılık gelmektedir. OA ve $O'B$ yönlü doğruları arasındaki açının ölçüsü $\theta \in \mathbb{R}$ dır. Buna göre $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörleri arasındaki bağıntı

$$\vec{B} = Q^* \times \vec{A} \tag{6.1.1}$$

şeklinde yazılabilir. Bir diğer ifadeyle $\vec{B}$ birim dual vektörü $\vec{A}$ birim dual vektöründen bir vida hareketi ile elde edilmiştir, öyle ki bu vida hareketi

$$Q^* = \cos\,\Theta + \overrightarrow{S^*}\,\sin\,\Theta$$

vida operatörü ile ifade edilmektedir. Buna göre, A noktasından B noktasına varış silindir yüzeyi üzerinde bir helis yörüngesi çizerek olur.

$\vec{A}$ nın $\vec{B}$ konumunu alması için mümkün olan 2 yol vardır. Bunlardan birincisi, önce $\overrightarrow{S^*}$ ekseni etrafında $\vec{A}$ vektörü θ kadar döner ve A noktası A' noktasına getirilir; sonra da $\overrightarrow{S^*}$ boyunca S kadar ötelenerek $\overrightarrow{OA'}$ vektörü $\vec{B}$ konumuna getirilir.

Buna göre

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} q_r^* & q_t^* \end{bmatrix} \vec{A} \tag{6.1.2}$$

şeklinde yazılabilir, burada

$$q_r^* = \cos\theta + \overrightarrow{S^*}\sin\theta$$

dönme operatörü ve

$$q_t^* = 1 + \varepsilon\theta^* \overrightarrow{S^*}$$

da öteleme operatörüdür.

İkinci yol ise, önce $\overrightarrow{S^*}$ boyunca S kadar $\vec{A}$ ötelenir ve $\overrightarrow{O'B'}$ vektörü konumuna getirilir, sonra da $\overrightarrow{S^*}$ ekseni etrafında θ kadar $\overrightarrow{O'B'}$ vektörü döndürülür ve $\vec{B}$ konumuna getirilir. Buna göre

$$\vec{B} = \begin{bmatrix} q_t^* & q_r^* \end{bmatrix} \vec{A} \tag{6.1.3}$$

şeklinde yazılabilir, böylece bu son üç ifadeden

$$Q^* = q_r^* \times q_t^* = q_t^* \times q_r^* \tag{6.1.4}$$

elde edilir.

Sonuç 6.1.

(i) Bir eksen etrafındaki sadece dönme hareketi, öteleme kısmı olmayan bir vida hareketidir.

$S=0$ ise $q_t^*=1$ olur. Dolayısıyla,

$$\left[Q^*\right]_{S=0}=q_r^*$$

(ii) Bir eksen boyunca sadece öteleme hareketi, dönme kısmı olmayan bir vida hareketidir.

$\theta=0$ ise $q_r^*=1$ olur. Dolayısıyla,

$$\left[Q^*\right]_{\theta=0}=q_t^*$$

Örnek :

$$d_1 \ldots \qquad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{0}$$

$$d_2 \ldots \qquad \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{y}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=z-1$$

doğruları veriliyor. d_1 doğrusunu d_2 doğrusuna dönüştüren vida operatörünü bulalım.

İlk önce E.Study teoremi (Teorem 2.6.) gereğince bu doğrulara karşılık gelen dual vektörleri bulalım.

d_1 doğrusu için $M=(1,0,0)$ ve $\vec{a}=(1,0,0)$ olmak üzere

E.study teoremi (Teorem 2.6.) gereği $\vec{a}^{\,*}=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{a}$ olduğundan

$$\vec{a}^{\,*}=\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(0,0,0)$$

ve d_2 doğrusu için $N=(0,0,1)$ ve $\vec{b}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$ olmak üzere

$\vec{b}^{\,*}=\overrightarrow{ON}\wedge\vec{b}$ olduğundan

$$\vec{b}^{\,*}=\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0) \text{ dır.}$$

d_1 doğrusuna karşılık gelen dual vektör $\vec{A}=\vec{a}+\varepsilon\vec{a}^{\,*}=(1,0,0)+\varepsilon(0,0,0)$

d_2 doğrusuna karşılık gelen dual vektör

$$\vec{B} = \vec{b} + \varepsilon \vec{b}^{*} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right) + \varepsilon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$$

olmak üzere bu iki dual vektörü birimleştirelim.

$$\overrightarrow{A_0} = \frac{\vec{A}}{\left\| \vec{A} \right\|} = \frac{(1,0,0) + \varepsilon (0,0,0)}{1} = (1,0,0)$$

$$\overrightarrow{B_0} = \frac{\vec{B}}{\left\| \vec{B} \right\|} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right) + \varepsilon \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)}{\sqrt{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \varepsilon \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$= \Big(\underbrace{\frac{1}{2} - \varepsilon \frac{1}{2}}_{\overrightarrow{B_1}}, \underbrace{\frac{1}{2} + \varepsilon \frac{1}{2}}_{\overrightarrow{B_2}}, \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon 0}_{\overrightarrow{B_3}} \Big)$$

Şimdi ise vida operatörünü hesaplayalım.

$$\overrightarrow{B_0} = Q^{*} \times \overrightarrow{A_0}$$

$$\overrightarrow{B_0} \times \left(\overrightarrow{A_0} \right)^{-1} = Q^{*}$$

buradan da

$$-\overrightarrow{B_0} \times \overrightarrow{A_0} = Q^{*}$$

o halde

$Q^{*} = \left\langle \overrightarrow{B_0}, \overrightarrow{A_0} \right\rangle - \overrightarrow{B_0} \wedge \overrightarrow{A_0}$ eşitliği elde edilir.

$$\left\langle \overrightarrow{B_0}, \overrightarrow{A_0} \right\rangle = \overrightarrow{B_1}\overrightarrow{A_1} + \overrightarrow{B_2}\overrightarrow{A_2} + \overrightarrow{B_3}\overrightarrow{A_3}$$

$$\left\langle \overrightarrow{B_0}, \overrightarrow{A_0} \right\rangle = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \frac{1}{2} \right)(1) + \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \frac{1}{2} \right)(0) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon 0 \right)(0)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \frac{1}{2} \right)$$

$\overrightarrow{B_0} \wedge \overrightarrow{A_0} = \vec{b} \wedge \vec{a} + \varepsilon \left(\vec{b} \wedge \vec{a}^{\,*} + \vec{b}^{\,*} \wedge \vec{a} \right)$ eşitliğini kullanırsak,

$$\vec{b} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{b} \wedge \vec{a}^{\,*} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0)$$

$$\vec{b}^{\,*} \wedge \vec{a} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_1} & \overrightarrow{e_2} & \overrightarrow{e_3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{B_0} \wedge \overrightarrow{A_0} &= \vec{b} \wedge \vec{a} + \varepsilon \left(\vec{b} \wedge \vec{a}^{\,*} + \vec{b}^{\,*} \wedge \vec{a} \right) \\ &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right) + \varepsilon \left\{ (0,0,0) + \left(0, 0, -\frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right) + \varepsilon \left(0, 0, -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q^* &= \left\langle \overrightarrow{B_0}, \overrightarrow{A_0} \right\rangle - \overrightarrow{B_0} \wedge \overrightarrow{A_0} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \varepsilon \frac{1}{2} \right) - \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right) - \varepsilon \left(0, 0, -\frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

bulunur.

$$\left\langle \overrightarrow{B_0}, \overrightarrow{A_0} \right\rangle = \cos\Theta = \cos\left(\theta + \varepsilon\theta^*\right) \qquad \text{olduğundan}$$
$$= \cos\theta - \varepsilon\theta^* \sin\theta$$

$$\left\langle \overrightarrow{B_0}, \overrightarrow{A_0} \right\rangle = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\frac{1}{2}\right) \text{ ise } \quad \cos\theta - \varepsilon\theta^* \sin\theta = \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\frac{1}{2}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \quad \text{olup,} \quad -\theta^* \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{olur.}$$

$$\theta^* = \left|-\frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\right| = \left|-\frac{1}{\sqrt{3}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad \text{vida adımı } \frac{\theta^*}{\theta} \cong 0,5 \text{ mm}$$

Sonuç olarak, d_1 doğrusunu 60° derece döndürerek ve $\frac{\sqrt{3}}{3}$ br öteleyerek d_2 doğrusu elde edilir.

6.2. Minkowski 3-Uzayında Vida Hareketi

6.2.1. Timelike Bölünmüş (Split) Kuaterniyonlar için Vida Hareketi

Teorem 6.2.1. (E. Study Teoremi)

Minkowski 3-uzayında doğrultmanı zamansı (uzaysı) vektör olan yönlü doğrular ile $\left(x, x^*\right)$ sıralı dual vektör çiftleri arasında birebir eşleme vardır. Burada $g\left(x,x\right)=-1 \quad \left(g\left(x,x\right)=1\right) \;\; ve \;\; g\left(x,x^*\right)=0$ dır.

Bu birebir eşlemede doğrunun doğrultman vektörü x ve x vektörünün orijine göre momenti x^* dır (Yaylı, Çalışkan, Uğurlu 2002).

Teorem 6.2.2. $Q = A_0 1 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$ birim dual bölünmüş kuaterniyon olsun.

$$\Psi = \begin{bmatrix} A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 & 2\left(A_0A_3 - A_1A_2\right) & -2\left(A_0A_2 + A_1A_3\right) \\ 2\left(A_0A_3 + A_1A_2\right) & A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 & -2\left(A_0A_1 + A_2A_3\right) \\ 2\left(-A_0A_2 + A_1A_3\right) & 2\left(A_0A_1 - A_2A_3\right) & A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 \end{bmatrix} \qquad (6.2.1)$$

dual matrisi yarı ortogonal dual matristir. Yani $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$\Psi\varepsilon\Psi^T\varepsilon = \Psi^T\varepsilon\Psi\varepsilon = I_3$$

ve

$\det\Psi = 1$ dir (Kula, 2003).

İspat : $\Psi\varepsilon$ ve $\Psi^T\varepsilon$ matrislerinin çarpımları sırasıyla,

$$\Psi\varepsilon = \begin{bmatrix} A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 & 2\left(A_0A_3 - A_1A_2\right) & -2\left(A_0A_2 + A_1A_3\right) \\ 2\left(A_0A_3 + A_1A_2\right) & A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 & -2\left(A_0A_1 + A_2A_3\right) \\ 2\left(-A_0A_2 + A_1A_3\right) & 2\left(A_0A_1 - A_2A_3\right) & A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 & 2\left(A_0A_3 - A_1A_2\right) & -2\left(A_0A_2 + A_1A_3\right) \\ -2\left(A_0A_3 + A_1A_2\right) & A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 & -2\left(A_0A_1 + A_2A_3\right) \\ 2\left(A_0A_2 - A_1A_3\right) & 2\left(A_0A_1 - A_2A_3\right) & A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$\Psi^T\varepsilon=\begin{bmatrix} A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2 & 2\left(A_0A_3+A_1A_2\right) & 2\left(-A_0A_2+A_1A_3\right) \\ 2\left(A_0A_3-A_1A_2\right) & A_0^2-A_1^2-A_2^2+A_3^2 & 2\left(A_0A_1-A_2A_3\right) \\ -2\left(A_0A_2+A_1A_3\right) & -2\left(A_0A_1+A_2A_3\right) & A_0^2-A_1^2+A_2^2-A_3^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} -A_0^2-A_1^2-A_2^2-A_3^2 & 2\left(A_0A_3+A_1A_2\right) & 2\left(-A_0A_2+A_1A_3\right) \\ 2\left(-A_0A_3+A_1A_2\right) & A_0^2-A_1^2-A_2^2+A_3^2 & 2\left(A_0A_1-A_2A_3\right) \\ 2\left(A_0A_2+A_1A_3\right) & -2\left(A_0A_1+A_2A_3\right) & A_0^2-A_1^2+A_2^2-A_3^2 \end{bmatrix}$$

dir. O halde

$$\Psi\varepsilon\Psi^T\varepsilon=\left(A_0^2+A_1^2-A_2^2-A_3^2\right)^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I_3$$

olarak bulunur ve $\det\Psi=\left(A_0^2+A_1^2-A_2^2-A_3^2\right)^3=1$ dir.

Şimdi bileşenleri Q kuaterniyonunun bileşenleri cinsinden yazılan Ψ yarı ortogonal dual matris yardımıyla vida hareketi ifade edilecektir.

$$\begin{aligned} Q &= A_0 1+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3} \\ &=\left(a_0+a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}\right)+\varepsilon\left(a_0^*+a_1^*\overrightarrow{e_1}+a_2^*\overrightarrow{e_2}+a_3^*\overrightarrow{e_3}\right) \end{aligned}$$

birim dual bölünmüş kuaterniyonunu ele alalım. Q birim olduğundan,

$$\begin{aligned} N_Q &= A_0^2+A_1^2-A_2^2-A_3^2 \\ &= \left(a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)+2\varepsilon\left(a_0a_0^*+a_1a_1^*+a_2a_2^*+a_3a_3^*\right) \\ &= 1+\varepsilon 0 \end{aligned}$$

dir.

$$a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2=1 \quad\Rightarrow\quad a_0^2=1+\left(-a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)$$

$-a_1^2+a_2^2+a_3^2>0$ olmak üzere

$$\sqrt{-A_1^2+A_2^2+A_3^2}=\sqrt{\left(-a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)+2\varepsilon\left(-a_1a_1^*+a_2a_2^*+a_3a_3^*\right)}$$
$$=\sqrt{-a_1^2+a_2^2+a_3^2}+\varepsilon\frac{-a_1a_1^*+a_2a_2^*+a_3a_3^*}{\sqrt{-a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

olup, benzer şekilde $a_1^2-a_2^2-a_3^2>0$ olmak üzere

$$\sqrt{A_1^2-A_2^2-A_3^2}=\sqrt{\left(a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)+2\varepsilon\left(a_1a_1^*-a_2a_2^*-a_3a_3^*\right)}$$
$$=\sqrt{a_1^2-a_2^2-a_3^2}+\varepsilon\frac{a_1a_1^*-a_2a_2^*-a_3a_3^*}{\sqrt{a_1^2-a_2^2-a_3^2}}$$

olur.

$$g\left(\overrightarrow{V_Q},\overrightarrow{V_Q}\right)=-A_1^2+A_2^2+A_3^2$$
$$=\left(-a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)+2\varepsilon\left(-a_1a_1^*+a_2a_2^*+a_3a_3^*\right)$$
$$=g\left(\overrightarrow{V_q},\overrightarrow{V_q}\right)+2\varepsilon g\left(\overrightarrow{V_q},\overrightarrow{V_{q^*}}\right)$$

eşitliğinde,

$g\left(\overrightarrow{V_q},\overrightarrow{V_q}\right)=-a_1^2+a_2^2+a_3^2>0$ veya $\overrightarrow{V_q}=\vec{0}$ ise $\overrightarrow{V_Q}$ ya uzaysı dual bölünmüş vektör,

$g\left(\overrightarrow{V_q},\overrightarrow{V_q}\right)<0$ ise $\overrightarrow{V_Q}$ ya zamansı dual bölünmüş vektör,

$\overrightarrow{V_q}\neq 0$ olmak üzere $g\left(\overrightarrow{V_q},\overrightarrow{V_q}\right)=0$ ise $\overrightarrow{V_Q}$ ya boşluksu dual bölünmüş vektör denir (Kula, 2003).

a) $\overrightarrow{V_Q}\neq 0$ uzaysı dual bölünmüş vektör olsun. Q birim dual bölünmüş kuaterniyonunu kutupsal formda yazarsak

$$Q=A_0+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}$$
$$=A_0+\sqrt{-A_1^2+A_2^2+A_3^2}\,\frac{A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-A_1^2+A_2^2+A_3^2}} \tag{6.2.2}$$
$$=\cosh\frac{\Theta}{2}+\sinh\frac{\Theta}{2}\overrightarrow{S^*}$$

biçiminde olup,

$$\cosh\frac{\Theta}{2}=A_0,\ \sinh\frac{\Theta}{2}=\sqrt{-A_1^2+A_2^2+A_3^2}$$

$$\overrightarrow{S^*}=\frac{A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-A_1^2+A_2^2+A_3^2}}=S_1\overrightarrow{e_1}+S_2\overrightarrow{e_2}+S_3\overrightarrow{e_3} \qquad (6.2.3)$$

$$g\left(\overrightarrow{S^*},\overrightarrow{S^*}\right)=\overrightarrow{S^*}\overrightarrow{S^*}=1$$

dir. Ayrıca $\frac{\Theta}{2}=\frac{\theta}{2}+\varepsilon\frac{\theta^*}{2}$ dual açısı ve Q birim dual bölünmüş kuaterniyonunun $\overrightarrow{S^*}$ ekseni sırasıyla,

$$\frac{\theta}{2}=\operatorname{arccosh}\left(a_0\right)$$

$$\frac{\theta^*}{2}=\frac{a_0^*}{\sqrt{a_0^2-1}}$$

$$\overrightarrow{S_0}=\frac{a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\overrightarrow{S_0^*}=\frac{a_1^*\overrightarrow{e_1}+a_2^*\overrightarrow{e_2}+a_3^*\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-a_1^2+a_2^2+a_3^2}}-\frac{a_0a_0^*\left(a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}\right)}{\sqrt{\left(-a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)^3}}$$

biçimindedir ve

$$\overrightarrow{S^*}=\overrightarrow{S_0}+\varepsilon\overrightarrow{S_0^*} \qquad (6.2.4)$$

Aşağıdaki eşitlikler ve $(6.2.3)$ ile verilen ifadeler yardımıyla

$$\cosh^2\frac{\Theta}{2}-\sinh^2\frac{\Theta}{2}=1$$

$$\cosh^2\frac{\Theta}{2}+\sinh^2\frac{\Theta}{2}=\cosh\Theta$$

$$\cosh^2\frac{\Theta}{2}=\frac{1+\cosh\Theta}{2}$$

$$\sinh^2\frac{\Theta}{2}=\frac{-1+\cosh\Theta}{2}$$

$$2\sinh\frac{\Theta}{2}\cosh\frac{\Theta}{2}=\sinh\Theta$$

Teorem$(6.2.2)$ deki Ψ matrisinin bileşenleri

$$A_0^{\,2}+A_1^{\,2}+A_2^{\,2}+A_3^{\,2}=1+(-1+\cosh\Theta)(S_2^2+S_3^2)$$

$$A_0^{\,2}-A_1^{\,2}-A_2^{\,2}+A_3^{\,2}=1+(-1+\cosh\Theta)(-S_1^2+S_3^2)$$

$$A_0^{\,2}-A_1^{\,2}+A_2^{\,2}-A_3^{\,2}=1+(-1+\cosh\Theta)(-S_1^2+S_2^2)$$

$$2(A_0A_3+A_1A_2)=S_3\sinh\Theta+(-1+\cosh\Theta)S_1S_2$$

$$2(A_0A_3-A_1A_2)=S_3\sinh\Theta-(-1+\cosh\Theta)S_1S_2$$

$$2(-A_0A_2+A_1A_3)=-S_2\sinh\Theta+(-1+\cosh\Theta)S_1S_3$$

$$-2(A_0A_2+A_1A_3)=-S_2\sinh\Theta-(-1+\cosh\Theta)S_1S_3$$

$$2(A_0A_1-A_2A_3)=S_1\sinh\Theta-(-1+\cosh\Theta)S_2S_3$$

$$-2(A_0A_1+A_2A_3)=-S_1\sinh\Theta-(-1+\cosh\Theta)S_2S_3$$

şeklinde bulunur.

O halde

$$\Psi=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\sinh\Theta\begin{bmatrix}0&S_3&-S_2\\S_3&0&-S_1\\-S_2&S_1&0\end{bmatrix}+(-1+\cosh\Theta)\begin{bmatrix}S_2^2+S_3^2&-S_1S_2&-S_1S_3\\S_1S_2&-S_1^2+S_3^2&-S_2S_3\\S_1S_3&-S_2S_3&-S_1^{\,2}+S_2^2\end{bmatrix}\qquad(6.2.5)$$

$$\Psi=I_3+\sinh\Theta S^*+(-1+\cosh\Theta)S^{*2}$$

olarak bulunur. Burada

$$S^*=\begin{bmatrix}0&S_3&-S_2\\S_3&0&-S_1\\-S_2&S_1&0\end{bmatrix},\qquad \varepsilon=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad(6.2.6)$$

olmak üzere

$$S^{*T} = -\varepsilon S^{*}\varepsilon$$

olduğundan S^{*} matrisi dual antisimetrik matristir. Ayrıca $\left(S^{*}\right)^{2n-1} = S^{*}$ ve $\left(S^{*}\right)^{2n} = \left(S^{*}\right)^{2}$ dir.

Şimdi Ψ matrisinin $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ dual bölünmüş vektöründeki görüntüsü vektörel formda

$$\begin{aligned} \Psi\mathrm{X} &= X + \sinh\Theta\left(\overrightarrow{S^{*}} \wedge X\right) + \left(-1+\cosh\Theta\right)\left(\overrightarrow{S^{*}} \wedge \left(S^{*} \wedge X\right)\right) \\ &= X + \sinh\Theta\left(\overrightarrow{S^{*}} \wedge X\right) + \left(-1+\cosh\Theta\right)\left(-g\left(\overrightarrow{S^{*}}, X\right)\overrightarrow{S^{*}} + g\left(\overrightarrow{S^{*}}, \overrightarrow{S^{*}}\right)X\right) \qquad (6.2.7) \\ &= \cosh\Theta X + \sinh\Theta\left(\overrightarrow{S^{*}} \wedge X\right) + \left(1-\cosh\Theta\right)g\left(\overrightarrow{S^{*}}, X\right)\overrightarrow{S^{*}} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. X yerine $S^{*} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$ birim dual bölünmüş vektörünü alırsak

$\Psi\overrightarrow{S^{*}} = \overrightarrow{S^{*}}$ dir. $\overrightarrow{S^{*}}$ ın Ψ matrisi altındaki görüntüsü değişmez. O halde $\overrightarrow{S^{*}}$, $(6.2.5)$ ile verilen Ψ özel yarı ortogonal matrisinin eksenidir.

Ayrıca Ψ matrisini $\sinh\Theta = \sinh\theta + \varepsilon\theta^{*}\cosh\theta$ ve $\cosh\Theta = \cosh\theta + \varepsilon\theta^{*}\sinh\theta$ eşitlikleri yardımıyla

$$\Psi = \left(I_3 + \sinh\theta S^{*} + \left(-1+\cosh\theta\right)S^{*2}\right) + \varepsilon\theta^{*}\left(\cosh\theta S^{*} + \sinh\theta S^{*2}\right) \qquad (6.2.8)$$

olarak ifade edebiliriz.

$$G = \left(I_3 + \sinh\theta S^{*} + \left(-1+\cosh\theta\right)S^{*2}\right)$$

$$H = \left(\cosh\theta S^{*} + \sinh\theta S^{*2}\right)$$

olmak üzere,

$$S^*G = S^*\left(I_3 + \sinh\theta S^* + \left(-1+\cosh\theta\right)S^{*2}\right)$$
$$= \cosh\theta S^* + \sinh\theta S^{*2}$$
$$= H$$

ve

$$GS^* = \left(I_3 + \sinh\theta S^* + \left(-1+\cosh\theta\right)S^{*2}\right)S^*$$
$$= \cosh\theta S^* + \sinh\theta S^{*2}$$
$$= H$$

dır. O halde eşitliği

$$\begin{aligned}\Psi &= \left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)G \\ &= G\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)\end{aligned} \qquad (6.2.9)$$

olarak yazabiliriz. Denklem $(6.2.9)$ da dönme açısı sıfır $(\theta = 0)$ alınırsa

$\Psi = I_3 + \varepsilon\theta^* S^*$ elde edilir. $(6.2.10)$

Bir $X = x + \varepsilon x^*$ birim dual vektörünün $\Psi = \left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)$ altındaki görüntüsü

$$Y = \left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)(X) = \left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)\left(x + \varepsilon x^*\right)$$
$$= x + \varepsilon\left(x^* + \theta^* S^* x\right)$$
$$= \vec{x} + \varepsilon\left(\overrightarrow{x^*} + \theta^*\left(\overrightarrow{S_0} \wedge \vec{x}\right)\right)$$

olarak bulunur. Burada

$$\varepsilon\overrightarrow{S^*} = \varepsilon\left(\overrightarrow{S_0} + \varepsilon\overrightarrow{S_0^*}\right) = \varepsilon\overrightarrow{S_0}$$

dir ve Y birim dual vektör olur.

Yani $\Psi = \left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)$ matrisi $\vec{x}$ vektörünü sabit bırakırken, $\overrightarrow{x^*}$ vektörünü $\overrightarrow{x^*} + \theta^*\left(\overrightarrow{S_0} \wedge \vec{x}\right)$ vektörüne dönüştürmektedir.

O halde $\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)$ matrisi X birim dual bölünmüş vektörüne karşılık gelen yönlü doğruyu kendisine paralel diğer bir doğruya dönüştürmektedir. $\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)$ matrisine Öteleme matrisi (operatörü) diyeceğiz.

Ayrıca öteleme uzunluğu $\left(\theta^* = 0\right)$ alınırsa

$\Psi = G$ bulunur.

Bir $X = x + \varepsilon x^*$ birim dual bölünmüş vektörünün

$$\begin{aligned}
G &= \left(I_3 + \sinh\theta S^* + \left(-1+\cosh\theta\right) S^{*2}\right) \\
&= \left(I_3 + \sinh\theta S_0 + \left(-1+\cosh\theta\right) S_0^{\;2}\right) + \varepsilon\left(\sinh\theta S_{_0}^* + \left(-1+\cosh\theta\right)\left(S_0 S_{_0}^* + S_{_0}^* S_0\right)\right) \\
&= Ad_q + \varepsilon J
\end{aligned}$$

matrisi altındaki görüntüsü

$$GX = Ad_q x + \varepsilon\left(Ad_q x^* + Jx\right)$$

dir. Burada Ad_q (5 .)! eşitliğinde verilen $Ad_q = I_3 + \sinh\theta S_0 + \left(-1+\cosh\theta\right) S_0^{\;2}$ matrisi formundadır ve $J = \sinh\theta S_{_0}^* + \left(-1+\cosh\theta\right)\left(S_0 S_{_0}^* + S_{_0}^* S_0\right)$ dir.

Yani G matrisi x vektörünü $Ad_q x$ vektörüne ve x^* vektörünü $\left(Ad_q x^* + Jx\right)$ vektörüne dönüştürmektedir.

O halde G matrisi X birim dual bölünmüş vektörüne karşılık gelen doğruyu θ hiperbolik açısı kadar döndürmektedir. G matrisine Dönme matrisi (operatörü) diyeceğiz.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
G\varepsilon G^T\varepsilon &= \left(I_3 + \sinh\theta S^* + \left(-1+\cosh\theta\right) S^{*2}\right)\varepsilon\left(I_3 - \sinh\theta\varepsilon S^*\varepsilon + \left(-1+\cosh\theta\right)\varepsilon S^{*2}\varepsilon\right)\varepsilon \\
&= \left(\varepsilon + \sinh\theta S^*\varepsilon + \left(-1+\cosh\theta\right) S^{*2}\varepsilon\right)\left(\varepsilon - \sinh\theta\varepsilon S^* + \left(-1+\cosh\theta\right)\varepsilon S^{*2}\right) \\
&= I_3 + \left(2\left(-1+\cosh\theta\right) - \sinh^2\theta + \left(-1+\cosh\theta\right)^2\right) S^{*2} \\
&= I_3
\end{aligned}$$

ve

$$G^T \varepsilon G \varepsilon = \left(\varepsilon - \sinh\theta \varepsilon S^* + \left(-1+\cosh\theta\right)\varepsilon S^{*2}\right)\left(\varepsilon + \sinh\theta S^* \varepsilon + \left(-1+\cosh\theta\right) S^{*2} \varepsilon\right)$$
$$= I_3 + \left(2\left(-1+\cosh\theta\right) + \sinh^2\theta + \left(-1+\cosh\theta\right)^2\right)\varepsilon S^{*2}\varepsilon$$
$$= I_3$$

dir. G matrisinin determinantı

$$\det G = 1 - 2\left(-S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right) + \left(-S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)^2$$
$$+ 2\cosh\theta\left(-S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right) - \sinh^2\theta\left(-S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)$$
$$- 2\cosh\theta\left(-S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)^2 + \cosh^2\theta\left(-S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)^2$$
$$= 1$$

olduğundan G matrisi $\overrightarrow{S^*}$ dual eksenli yarı ortogonal dual matristir.

Benzer şekilde

$F = I_3 + \varepsilon\theta^* S^*$ matrisini ele alalım.

$$F \varepsilon F^T \varepsilon = \left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)\varepsilon\left(I_3 - \varepsilon\theta^* \varepsilon S^* \varepsilon\right)\varepsilon$$
$$= \left(\varepsilon + \varepsilon\theta^* S^* \varepsilon\right)\left(\varepsilon - \varepsilon\theta^* \varepsilon S^*\right)$$
$$= I_3$$

ve

$$F^T \varepsilon F \varepsilon = \left(I_3 - \varepsilon\theta^* \varepsilon S^* \varepsilon\right)\varepsilon\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)\varepsilon$$
$$= \left(\varepsilon - \varepsilon\theta^* \varepsilon S^*\right)\left(\varepsilon + \varepsilon\theta^* S^* \varepsilon\right)$$
$$= I_3$$

dir. F matrisinin determinantı

$$\det F = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon\theta^* S_3 & -\varepsilon\theta^* S_2 \\ \varepsilon\theta^* S_3 & 1 & -\varepsilon\theta^* S_1 \\ -\varepsilon\theta^* S_2 & \varepsilon\theta^* S_1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

olduğundan F matrisi yarı ortogonal dual matristir. Ayrıca $S^* = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$F\overrightarrow{S^*} = \overrightarrow{S^*}$$

dir (Kula, 2003).

b) $\overrightarrow{V_Q}$ zamansı dual bölünmüş vektör olsun. Q birim dual bölünmüş kuaterniyonunu kutupsal formda yazarsak

$$\begin{aligned} Q &= A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3} \\ &= A_0 + \sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}\,\frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}} \\ &= \cos\frac{\Theta}{2} + \sin\frac{\Theta}{2}\overrightarrow{S^*} \end{aligned} \tag{6.2.11}$$

biçimde olup,

$$\cos\frac{\Theta}{2} = A_0, \quad \sin\frac{\Theta}{2} = \sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}$$

$$\overrightarrow{S^*} = \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2 - A_3^2}} = S_1\overrightarrow{e_1} + S_2\overrightarrow{e_2} + S_3\overrightarrow{e_3} \tag{6.2.12}$$

$$g\left(\overrightarrow{S^*}, \overrightarrow{S^*}\right) = \overrightarrow{S^*}\,\overrightarrow{S^*} = -1$$

dir. Ayrıca $\frac{\Theta}{2} = \frac{\theta}{2} + \varepsilon\frac{\theta^*}{2}$ dual açısı ve Q birim dual bölünmüş kuaterniyonunun $\overrightarrow{S^*}$ ekseni sırasıyla,

$$\frac{\theta}{2} = \arccos(a_0)$$

$$\frac{\theta^*}{2} = -\frac{a_0^*}{\sqrt{1 - a_0^2}}$$

$$\overrightarrow{S_0} = \frac{a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}}$$

$$\overrightarrow{S_0^*} = \frac{a_1^*\overrightarrow{e_1} + a_2^*\overrightarrow{e_2} + a_3^*\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}} + \frac{a_0 a_0^*\left(a_1\overrightarrow{e_1} + a_2\overrightarrow{e_2} + a_3\overrightarrow{e_3}\right)}{\sqrt{\left(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2\right)^3}}$$

biçimindedir ve $\overrightarrow{S^*} = \overrightarrow{S_0} + \varepsilon \overrightarrow{S_0^*}$ $(6.2.13)$

Aşağıdaki ve $(6.2.12)$ ile verilen eşitlikler yardımıyla

$$\cos^2\frac{\Theta}{2} + \sin^2\frac{\Theta}{2} = 1$$

$$\cos^2\frac{\Theta}{2} - \sin^2\frac{\Theta}{2} = \cos\Theta$$

$$\cos^2\frac{\Theta}{2} = \frac{1+\cos\Theta}{2}$$

$$\sin^2\frac{\Theta}{2} = \frac{1-\cos\Theta}{2}$$

$$2\sin\frac{\Theta}{2}\cos\frac{\Theta}{2} = \sin\Theta$$

Teorem $(6.2.2)$ deki Ψ matrisinin bileşenleri

$$A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = 1 + (1-\cos\Theta)\left(S_2^2 + S_3^2\right)$$

$$A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 = 1 + (1-\cos\Theta)\left(-S_1^2 + S_3^2\right)$$

$$A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 = 1 + (1-\cos\Theta)\left(-S_1^2 + S_2^2\right)$$

$$2\left(A_0A_3 + A_1A_2\right) = S_3\sin\Theta + (1-\cos\Theta)S_1S_2$$

$$2\left(A_0A_3 - A_1A_2\right) = S_3\sin\Theta - (1-\cos\Theta)S_1S_2$$

$$2\left(-A_0A_2 + A_1A_3\right) = -S_2\sin\Theta + (1-\cos\Theta)S_1S_3$$

$$-2\left(A_0A_2 + A_1A_3\right) = -S_2\sin\Theta - (1-\cos\Theta)S_1S_3$$

$$2\left(A_0A_1 - A_2A_3\right) = S_1\sin\Theta - (1-\cos\Theta)S_2S_3$$

$$-2\left(A_0A_1 + A_2A_3\right) = -S_1\sin\Theta - (1-\cos\Theta)S_2S_3$$

olarak bulunur.

O halde

$$\Psi=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\sin\Theta\begin{bmatrix}0&S_3&-S_2\\S_3&0&-S_1\\-S_2&S_1&0\end{bmatrix}+\left(1-\cos\Theta\right)\begin{bmatrix}S_2^2+S_3^2&-S_1S_2&-S_1S_3\\S_1S_2&-S_1^2+S_3^2&-S_2S_3\\S_1S_3&-S_2S_3&-S_2^2+S_2^2\end{bmatrix}\qquad(6.2.14)$$

$$\Psi=I_3+\sin\Theta S^*+\left(1-\cos\Theta\right)S^{*2}$$

olarak bulunur. Burada

$$S^*=\begin{bmatrix}0&S_3&-S_2\\S_3&0&-S_1\\-S_2&S_1&0\end{bmatrix},\qquad \varepsilon=\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad(6.2.15)$$

olmak üzere

$$S^{*T}=-\varepsilon S^*\varepsilon$$

olduğundan S^* matrisi dual antisimetrik matristir. Ayrıca $\left(S^*\right)^{2n-1}=\left(-1\right)^{n+1}S^*$ ve $\left(S^*\right)^{2n}=\left(-1\right)^{n+1}\left(S^*\right)^2$ dir.

Ψ matrisinin $\mathrm{X}=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}$ dual bölünmüş vektöründeki görüntüsü vektörel formda

$$\begin{aligned}\Psi\mathrm{X}&=X+\sin\Theta\left(\overrightarrow{S^*}\wedge X\right)+\left(1-\cos\Theta\right)\left(\overrightarrow{S^*}\wedge\left(S^*\wedge X\right)\right)\\&=X+\sin\Theta\left(\overrightarrow{S^*}\wedge X\right)+\left(1-\cos\Theta\right)\left(-g\left(\overrightarrow{S^*},X\right)\overrightarrow{S^*}+g\left(\overrightarrow{S^*},\overrightarrow{S^*}\right)X\right)\qquad(6.2.16)\\&=\cos\Theta X+\sin\Theta\left(\overrightarrow{S^*}\wedge X\right)-\left(1-\cos\Theta\right)g\left(\overrightarrow{S^*},X\right)\overrightarrow{S^*}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. X yerine $S^*=\begin{bmatrix}S_1\\S_2\\S_3\end{bmatrix}$ birim dual bölünmüş vektörünü alırsak

$\Psi\overrightarrow{S^*}=\overrightarrow{S^*}$ dir. $\overrightarrow{S^*}$ ın Ψ matrisi altındaki görüntüsü değişmez. O halde $\overrightarrow{S^*}$ ile verilen Ψ özel yarı ortogonal matrisinin eksenidir.

Ayrıca Ψ matrisini $\sin\Theta = \sin\theta + \varepsilon\theta^* \cos\theta$ ve $\cos\Theta = \cos\theta - \varepsilon\theta^* \sin\theta$ eşitlikleri yardımıyla

$$\Psi = \left(I_3 + \sin\theta S^* + (1-\cos\theta)S^{*2}\right) + \varepsilon\theta^*\left(\cos\theta S^* + \sin\theta S^{*2}\right) \qquad (6.2.17)$$

olarak ifade edebiliriz.

$$G = \left(I_3 + \sin\theta S^* + (1-\cos\theta)S^{*2}\right)$$

$$H = \left(\cos\theta S^* + \sin\theta S^{*2}\right)$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} S^*G &= S^*\left(I_3 + \sin\theta S^* + (1-\cos\theta)S^{*2}\right) \\ &= \cos\theta S^* + \sin\theta S^{*2} \\ &= H \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} GS^* &= \left(I_3 + \sin\theta S^* + (1-\cos\theta)S^{*2}\right)S^* \\ &= \cos\theta S^* + \sin\theta S^{*2} \\ &= H \end{aligned}$$

dır. O halde $(6.2.17)$ eşitliği

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)G \\ &= G\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right) \end{aligned} \qquad (6.2.18)$$

olarak yazabiliriz.

$(6.2.18)$ denkleminde dönme açısı $(\theta = 0)$ alınırsa

$$\Psi = I_3 + \varepsilon\theta^* S^* \qquad (6.2.19)$$

Bir $X = x + \varepsilon x^*$ birim dual vektörünün $\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)$ altındaki görüntüsü

$$
\begin{aligned}
Y &= \left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)(X) = \left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)\left(x + \varepsilon x^*\right) \\
&= x + \varepsilon\left(x^* + \theta^* S^* x\right) \\
&= \vec{x} + \varepsilon\left(\overrightarrow{x^*} + \theta^*\left(\overrightarrow{S_0} \wedge \vec{x}\right)\right)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

Burada

$$
\varepsilon\overrightarrow{S^*} = \varepsilon\left(\overrightarrow{S_0} + \varepsilon\overrightarrow{S^*_0}\right) = \varepsilon\overrightarrow{S_0}
$$

dir ve Y birim dual vektör olur.

Yani $\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)$ matrisi $\vec{x}$ vektörünü sabit bırakırken, $\overrightarrow{x^*}$ vektörünü $\overrightarrow{x^*} + \theta^*\left(\overrightarrow{S_0} \wedge \vec{x}\right)$ vektörüne dönüştürmektedir.

O halde $\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)$ matrisi X birim dual bölünmüş vektörüne karşılık gelen yönlü doğruyu kendisine paralel diğer bir doğruya dönüştürmektedir. $\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)$ matrisine Öteleme matrisi (operatörü) diyeceğiz.

Ayrıca öteleme uzunluğu $\theta^* = 0$ alınırsa

$\Psi = G$ bulunur.

Bir $X = x + \varepsilon x^*$ birim dual bölünmüş vektörünün

$$
\begin{aligned}
G &= \left(I_3 + \sin\theta S^* + (1-\cos\theta) S^{*2}\right) \\
&= \left(I_3 + \sin\theta S_0 + (1-\cos\theta) S_0{}^2\right) + \varepsilon\left(\sin\theta S^*_0 + (1-\cos\theta)\left(S_0 S^*_0 + S^*_0 S_0\right)\right) \\
&= Ad_q + \varepsilon J
\end{aligned}
$$

matrisi altındaki görüntüsü

$$
GX = Ad_q x + \varepsilon\left(Ad_q x^* + Jx\right)
$$

dir.

Ad_q bu ifade de $Ad_q = I_3 + \sin\theta C + (1-\cos\theta)C^2$ matrisi formundadır ve $J = \sin\theta S^*_0 + (1-\cos\theta)\left(S_0 S^*_0 + S^*_0 S_0\right)$ dir.

Yani G matrisi x vektörünü $Ad_q x$ vektörüne ve x^* vektörünü $\left(Ad_q x^* + Jx\right)$ vektörüne dönüştürmektedir.

O halde G matrisi X birim dual bölünmüş vektörüne karşılık gelen doğruyu θ açısı kadar döndürmektedir. G matrisine Dönme matrisi (operatörü) diyeceğiz.

Ayrıca

$$
\begin{aligned}
G\varepsilon G^T\varepsilon &= \left(I_3 + \sin\theta S^* + (1-\cos\theta)S^{*2}\right)\varepsilon\left(I_3 - \sin\theta\varepsilon S^*\varepsilon + (1-\cos\theta)\varepsilon S^{*2}\varepsilon\right)\varepsilon \\
&= \left(\varepsilon + \sin\theta S^*\varepsilon + (1-\cos\theta)S^{*2}\varepsilon\right)\left(\varepsilon - \sin\theta\varepsilon S^* + (1-\cos\theta)\varepsilon S^{*2}\right) \\
&= I_3 + \left(2(1-\cos\theta) - \sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2\right)S^{*2} \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
G^T\varepsilon G\varepsilon &= \left(\varepsilon - \sin\theta\varepsilon S^* + (1-\cos\theta)\varepsilon S^{*2}\right)\left(\varepsilon + \sin\theta S^*\varepsilon + (1-\cos\theta)S^{*2}\varepsilon\right) \\
&= I_3 + \left(2(1-\cos\theta) + \sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2\right)\varepsilon S^{*2}\varepsilon \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

ve

G matrisinin determinantı

$$
\begin{aligned}
\det G = 1 &+ 2\left(-S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right) + \left(-S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)^2 \\
&- 2\cos\theta\left(-S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right) - \sin^2\theta\left(-S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right) \\
&- 2\cos\theta\left(-S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)^2 + \cos^2\theta\left(-S_1^2 + S_2^2 + S_3^2\right)^2 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

olduğundan G matrisi $\overrightarrow{S^*}$ dual eksenli yarı ortogonal dual matristir.

F matrisi ise a) daki ile aynıdır (Kula, 2003).

6.2.2. Spacelike Bölünmüş (Split) Kuaterniyonlar için Vida Hareketi

Teorem 6.2.2. $Q = A_0 1 + A_1\vec{e_1} + A_2\vec{e_2} + A_3\vec{e_3}$ birim dual uzaysı (spacelike) bölünmüş kuaterniyon olsun.

$$\Re = \begin{bmatrix} A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 & 2(A_0A_3 - A_1A_2) & -2(A_0A_2 + A_1A_3) \\ 2(A_0A_3 + A_1A_2) & A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 & -2(A_0A_1 + A_2A_3) \\ 2(-A_0A_2 + A_1A_3) & 2(A_0A_1 - A_2A_3) & A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 \end{bmatrix} \quad (6.2.20)$$

dual matrisi yarı ortogonal dual matristir. Yani $\varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$\Re\varepsilon\Re^T\varepsilon = \Re^T\varepsilon\Re\varepsilon = I_3$

ve

$\det\Re = -1$ dir.

İspat : $\Re\varepsilon$ ve $\Re^T\varepsilon$ matrislerinin çarpımları sırasıyla,

$$\Re\varepsilon = \begin{bmatrix} A_0^2 + A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 & 2(A_0A_3 - A_1A_2) & -2(A_0A_2 + A_1A_3) \\ 2(A_0A_3 + A_1A_2) & A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 & -2(A_0A_1 + A_2A_3) \\ 2(-A_0A_2 + A_1A_3) & 2(A_0A_1 - A_2A_3) & A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 - A_3^2 & 2(A_0A_3 - A_1A_2) & -2(A_0A_2 + A_1A_3) \\ -2(A_0A_3 + A_1A_2) & A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 & -2(A_0A_1 + A_2A_3) \\ 2(A_0A_2 - A_1A_3) & 2(A_0A_1 - A_2A_3) & A_0^2 - A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 \end{bmatrix}$$

ve

$$\Re^T\varepsilon=\begin{bmatrix} A_0^{\,2}+A_1^{\,2}+A_2^{\,2}+A_3^{\,2} & 2\left(A_0A_3+A_1A_2\right) & 2\left(-A_0A_2+A_1A_3\right) \\ 2\left(A_0A_3-A_1A_2\right) & A_0^{\,2}-A_1^{\,2}-A_2^{\,2}+A_3^{\,2} & 2\left(A_0A_1-A_2A_3\right) \\ -2\left(A_0A_2+A_1A_3\right) & -2\left(A_0A_1+A_2A_3\right) & A_0^{\,2}-A_1^{\,2}+A_2^{\,2}-A_3^{\,2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -A_0^{\,2}-A_1^{\,2}-A_2^{\,2}-A_3^{\,2} & 2\left(A_0A_3+A_1A_2\right) & 2\left(-A_0A_2+A_1A_3\right) \\ 2\left(-A_0A_3+A_1A_2\right) & A_0^{\,2}-A_1^{\,2}-A_2^{\,2}+A_3^{\,2} & 2\left(A_0A_1-A_2A_3\right) \\ 2\left(A_0A_2+A_1A_3\right) & -2\left(A_0A_1+A_2A_3\right) & A_0^{\,2}-A_1^{\,2}+A_2^{\,2}-A_3^{\,2} \end{bmatrix}$$

dir. O halde

$$\Re\varepsilon\Re^T\varepsilon=\left(A_0^{\,2}+A_1^{\,2}-A_2^{\,2}-A_3^{\,2}\right)^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=I_3$$

olarak bulunur ve $\det\Re=\left(A_0^{\,2}+A_1^{\,2}-A_2^{\,2}-A_3^{\,2}\right)^3=-1$ dir.

$$\begin{aligned} Q &= A_0 1+A_1\overrightarrow{e_1}+A_2\overrightarrow{e_2}+A_3\overrightarrow{e_3} \\ &=\left(a_0+a_1\overrightarrow{e_1}+a_2\overrightarrow{e_2}+a_3\overrightarrow{e_3}\right)+\varepsilon\left(a_0^*+a_1^*\overrightarrow{e_1}+a_2^*\overrightarrow{e_2}+a_3^*\overrightarrow{e_3}\right) \end{aligned}$$

birim dual uzaysı (spacelike) bölünmüş kuaterniyonunu ele alalım. Q birim dual uzaysı (spacelike) bölünmüş kuaterniyon olduğundan $I_Q=-1<0$ ve $N_Q=1$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} I_Q &= A_0^{\,2}+A_1^{\,2}-A_2^{\,2}-A_3^{\,2} \\ &=\left(a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)+2\varepsilon\left(a_0a_0^*+a_1a_1^*+a_2a_2^*+a_3a_3^*\right) \\ &=-1+\varepsilon 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_Q &= \sqrt{\left|A_0^{\,2}+A_1^{\,2}-A_2^{\,2}-A_3^{\,2}\right|} \\ &=\sqrt{\left|\left(a_0^2+a_1^2-a_2^2-a_3^2\right)+2\varepsilon\left(a_0a_0^*+a_1a_1^*+a_2a_2^*+a_3a_3^*\right)\right|} \\ &=1+\varepsilon 0 \end{aligned}$$

dir.

$$a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad a_0^2 + a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 < 0$$

$$0 < a_0^2 < -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

$-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ olduğundan

$$\sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} = \sqrt{\left(-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) + 2\varepsilon\left(-a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + a_3 a_3^*\right)}$$
$$= \sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} + \varepsilon \frac{-a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + a_3 a_3^*}{\sqrt{-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

bulunur.

$$g\left(\overrightarrow{V_Q}, \overrightarrow{V_Q}\right) = -A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$
$$= \left(-a_1^2 + a_2^2 + a_3^2\right) + 2\varepsilon\left(-a_1 a_1^* + a_2 a_2^* + a_3 a_3^*\right)$$
$$= g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_q}\right) + 2\varepsilon g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_{q^*}}\right)$$

eşitliğinde,

$g\left(\overrightarrow{V_q}, \overrightarrow{V_q}\right) = -a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 > 0$ olup $\overrightarrow{V_Q}$ ya uzaysı (spacelike) dual bölünmüş vektör denir.

$$Q = A_0 + A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}$$
$$= A_0 + \sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}\,\frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} \qquad (6.2.21)$$
$$= N_Q\left(\sinh\frac{\Theta}{2} + \cosh\frac{\Theta}{2}\overrightarrow{S^*}\right)$$

şeklinde kutupsal formda ifade edilebilir.

Bu ifade de

$$\sinh\frac{\Theta}{2} = A_0, \quad \cosh\frac{\Theta}{2} = \sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

$$\overrightarrow{S^*} = \frac{A_1\overrightarrow{e_1} + A_2\overrightarrow{e_2} + A_3\overrightarrow{e_3}}{\sqrt{-A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}} = S_1\overrightarrow{e_1} + S_2\overrightarrow{e_2} + S_3\overrightarrow{e_3} \qquad (6.2.22)$$

$$g\left(\overrightarrow{S^*},\overrightarrow{S^*}\right)=\overrightarrow{S^*}\overrightarrow{S^*}=1$$

dir.

Ayrıca $\frac{\Theta}{2}=\frac{\theta}{2}+\varepsilon\frac{\theta^*}{2}$ dual açısı ve Q dual bölünmüş kuaterniyonunun $\overrightarrow{S^*}$ ekseni sırasıyla,

$$\frac{\theta}{2}=\operatorname{arcsinh}\left(a_0\right) \qquad \text{ve} \qquad \frac{\theta^*}{2}=\frac{a_0^*}{\sqrt{a_0^2+1}} \tag{6.2.23}$$

$\overrightarrow{S^*}=\overrightarrow{S_0}+\varepsilon\overrightarrow{S_0^*}$ biçimindedir.

Aşağıdaki eşitlikler ve $(6.2.21)$ ile verilen ifadeler yardımıyla

$$\cosh^2\frac{\Theta}{2}-\sinh^2\frac{\Theta}{2}=1$$

$$\cosh^2\frac{\Theta}{2}+\sinh^2\frac{\Theta}{2}=\cosh\Theta$$

$$\cosh^2\frac{\Theta}{2}=\frac{1+\cosh\Theta}{2}$$

$$\sinh^2\frac{\Theta}{2}=\frac{-1+\cosh\Theta}{2}$$

$$2\sinh\frac{\Theta}{2}\cosh\frac{\Theta}{2}=\sinh\Theta$$

Teorem $(6.2.2)$ deki Ψ matrisinin bileşenleri

$$A_0^2+A_1^2+A_2^2+A_3^2=-1+\left(1+\cosh\Theta\right)\left(S_2^2+S_3^2\right)$$

$$A_0^2-A_1^2-A_2^2+A_3^2=-1+\left(1+\cosh\Theta\right)\left(-S_1^2+S_3^2\right)$$

$$A_0^2-A_1^2+A_2^2-A_3^2=-1+\left(1+\cosh\Theta\right)\left(-S_1^2+S_2^2\right)$$

$$2\left(A_0A_3+A_1A_2\right)=S_3\sinh\Theta+\left(1+\cosh\Theta\right)S_1S_2$$

$$2\left(A_0A_3-A_1A_2\right)=S_3\sinh\Theta-\left(1+\cosh\Theta\right)S_1S_2$$

$$2\left(-A_0A_2 + A_1A_3\right) = -S_2 \sinh\Theta + \left(1+\cosh\Theta\right) S_1S_3$$

$$-2\left(A_0A_2 + A_1A_3\right) = -S_2 \sinh\Theta - \left(1+\cosh\Theta\right) S_1S_3$$

$$2\left(A_0A_1 - A_2A_3\right) = S_1 \sinh\Theta - \left(1+\cosh\Theta\right) S_2S_3$$

$$-2\left(A_0A_1 + A_2A_3\right) = -S_1 \sinh\Theta - \left(1+\cosh\Theta\right) S_2S_3$$

şeklinde bulunur.

O halde

$$\Re = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \sinh\Theta \begin{bmatrix} 0 & S_3 & -S_2 \\ S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & S_1 & 0 \end{bmatrix} + \left(1+\cosh\Theta\right) \begin{bmatrix} S_2^2 + S_3^2 & -S_1S_2 & -S_1S_3 \\ S_1S_2 & -S_1^2 + S_3^2 & -S_2S_3 \\ S_1S_3 & -S_2S_3 & -S_2^2 + S_2^2 \end{bmatrix} \quad (6.2.24)$$

$$\Re = -I_3 + \sinh\Theta S^* + \left(1+\cosh\Theta\right) S^{*2}$$

olarak bulunur. Burada

$$S^* = \begin{bmatrix} 0 & S_3 & -S_2 \\ S_3 & 0 & -S_1 \\ -S_2 & S_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (6.2.25)$$

olmak üzere

$$S^{*T} = -\varepsilon S^* \varepsilon$$

olduğundan S^* matrisi dual antisimetrik matristir. Ayrıca $\left(S^*\right)^{2n-1} = S^*$ ve $\left(S^*\right)^{2n} = \left(S^*\right)^2$ dir.

$\Re$ matrisinin $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$ dual bölünmüş vektöründeki görüntüsü vektörel formda

$$
\begin{aligned}
\Re \mathrm{X} &= -X + \sinh\Theta\left(\overrightarrow{S^*} \wedge X\right) + (1+\cosh\Theta)\left(\overrightarrow{S^*} \wedge \left(S^* \wedge X\right)\right) \\
&= -X + \sinh\Theta\left(\overrightarrow{S^*} \wedge X\right) + (1+\cosh\Theta)\left(-g\left(\overrightarrow{S^*}, X\right)\overrightarrow{S^*} + g\left(\overrightarrow{S^*}, \overrightarrow{S^*}\right)X\right) \qquad (6.2.26) \\
&= \cosh\Theta X + \sinh\Theta\left(\overrightarrow{S^*} \wedge X\right) - (1+\cosh\Theta)\, g\left(\overrightarrow{S^*}, X\right)\overrightarrow{S^*}
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. X yerine $S^* = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$ birim dual bölünmüş vektörünü alırsak

$\Re\overrightarrow{S^*} = -\overrightarrow{S^*}$ dir.

Ayrıca $\Re$ matrisini $\sinh\Theta = \sinh\theta + \varepsilon\theta^* \cosh\theta$ ve $\cosh\Theta = \cosh\theta + \varepsilon\theta^* \sinh\theta$ eşitlikleri yardımıyla

$$
\Re = \left(-I_3 + \sinh\theta S^* + (1+\cosh\theta) S^{*2}\right) + \varepsilon\theta^* \left(\cosh\theta S^* + \sinh\theta S^{*2}\right) \qquad (6.2.27)
$$

olarak ifade edebiliriz.

$$
M = \left(-I_3 + \sinh\theta S^* + (1+\cosh\theta) S^{*2}\right)
$$

$$
N = \left(\cosh\theta S^* + \sinh\theta S^{*2}\right)
$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
S^* M &= S^*\left(-I_3 + \sinh\theta S^* + (1+\cosh\theta) S^{*2}\right) \\
&= \cosh\theta S^* + \sinh\theta S^{*2} \\
&= \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
MS^* &= \left(-I_3 + \sinh\theta S^* + (1+\cosh\theta) S^{*2}\right) S^* \\
&= \cosh\theta S^* + \sinh\theta S^{*2} \\
&= N
\end{aligned}
$$

dır. O halde eşitliği

$$\begin{aligned}\Re &= \left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right) M \\ &= M\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)\end{aligned} \tag{6.2.28}$$

olarak yazabiliriz. $(6.2.27)$ denkleminde $\theta = 0$ alınırsa

$$\Re = I_3 + \varepsilon\theta^* S^* \tag{6.2.29}$$

Bir $X = x + \varepsilon x^*$ birim dual vektörünün $\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)$ altındaki görüntüsü

$$\begin{aligned} Z &= \left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)(X) = \left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)\left(x + \varepsilon x^*\right) \\ &= x + \varepsilon\left(x^* + \theta^* S^* x\right) \\ &= \vec{x} + \varepsilon\left(\overrightarrow{x^*} + \theta^*\left(\overrightarrow{S_0} \wedge \vec{x}\right)\right)\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Burada

$$\varepsilon\overrightarrow{S^*} = \varepsilon\left(\overrightarrow{S_0} + \varepsilon\overrightarrow{S^*_0}\right) = \varepsilon\overrightarrow{S_0}$$

dir ve Z birim dual vektör olur.

Yani $\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)$ matrisi $\vec{x}$ vektörünü sabit bırakırken, $\overrightarrow{x^*}$ vektörünü $\overrightarrow{x^*} + \theta^*\left(\overrightarrow{S_0} \wedge \vec{x}\right)$ vektörüne dönüştürmektedir.

O halde $\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)$ matrisi X birim dual bölünmüş vektörüne karşılık gelen yönlü doğruyu kendisine paralel diğer bir doğruya dönüştürmektedir. $\left(I_3 + \varepsilon\theta^* S^*\right)$ matrisine Öteleme matrisi (operatörü) diyeceğiz.

Ayrıca $\theta^* = 0$ alınırsa

$\Re = M$ bulunur.

$S^* = S_0 + \varepsilon S^*_0$ olmak üzere, bir $X = x + \varepsilon x^*$ birim dual bölünmüş vektörünün

$$
\begin{aligned}
M &= \left(-I_3 + \sinh\theta S^* + (1+\cosh\theta) S^{*2}\right) \\
&= \left(-I_3 + \sinh\theta S_0 + (1+\cosh\theta) S_0^{\;2}\right) + \varepsilon\left(\sinh\theta S_{_0}^* + (1+\cosh\theta)\left(S_0 S_{_0}^* + S_{_0}^* S_0\right)\right) \\
&= \Upsilon + \varepsilon \mathrm{P}
\end{aligned}
$$

matrisi altındaki görüntüsü

$$
MX = \Upsilon + \varepsilon\left(\Upsilon x^* + \mathrm{P} x\right)
$$

dir.

Burada Υ (5.6) eşitliği ile verilen matris formundadır ve

$\mathrm{P} = \sinh\theta S_{_0}^* + (1+\cosh\theta)\left(S_0 S_{_0}^* + S_{_0}^* S_0\right)$ dir.

Yani M matrisi x vektörünü Υ vektörüne ve x^* vektörünü $\left(\Upsilon x^* + \mathrm{P}x\right)$ vektörüne dönüştürmektedir.

O halde M matrisi X birim dual bölünmüş vektörüne karşılık gelen doğruyu θ hiperbolik açısı kadar döndürmektedir. M matrisine Dönme matrisi (operatörü) diyeceğiz.

Ayrıca

$$
\begin{aligned}
M\varepsilon M^T\varepsilon &= \left(-I_3 + \sinh\theta S^* + (1+\cosh\theta) S^{*2}\right)\varepsilon\left(-I_3 - \sinh\theta\varepsilon S^*\varepsilon + (1+\cosh\theta)\varepsilon S^{*2}\varepsilon\right)\varepsilon \\
&= \left(-\varepsilon + \sinh\theta S^*\varepsilon + (1+\cosh\theta) S^{*2}\varepsilon\right)\left(-\varepsilon - \sinh\theta\varepsilon S^* + (1+\cosh\theta)\varepsilon S^{*2}\right) \\
&= I_3 - \left(2(1+\cosh\theta) + \sinh^2\theta - (1+\cosh\theta)^2\right) S^{*2} \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
M^T\varepsilon M\varepsilon &= \left(-\varepsilon - \sinh\theta\varepsilon S^* + (1+\cosh\theta)\varepsilon S^{*2}\right)\left(-\varepsilon + \sinh\theta S^*\varepsilon + (1+\cosh\theta) S^{*2}\varepsilon\right) \\
&= I_3 - \left(2(1+\cosh\theta) + \sinh^2\theta - (1+\cosh\theta)^2\right)\varepsilon S^{*2}\varepsilon \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

ve

M matrisinin determinantı

$$
\begin{aligned}
\det M &= -1-2\left(-S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)+\left(-S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)^2 \\
&\quad +2\cosh\theta\left(-S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)-\sinh^2\theta\left(-S_1^2+S_2^2+S_3^2\right) \\
&\quad -2\cosh\theta\left(-S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)^2+\cosh^2\theta\left(-S_1^2+S_2^2+S_3^2\right)^2 \\
&= -1
\end{aligned}
$$

olduğundan M matrisi $\overrightarrow{S^*}$ dual eksenli yarı ortogonal dual matristir.

Benzer şekilde

$N = I_3 + \varepsilon\theta^* S^*$ matrisini ele alalım.

$$
\begin{aligned}
N\varepsilon N^T\varepsilon &= \left(I_3+\varepsilon\theta^* S^*\right)\varepsilon\left(I_3-\varepsilon\theta^*\varepsilon S^*\varepsilon\right)\varepsilon \\
&= \left(\varepsilon+\varepsilon\theta^* S^*\varepsilon\right)\left(\varepsilon-\varepsilon\theta^*\varepsilon S^*\right) \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
N^T\varepsilon N\varepsilon &= \left(I_3-\varepsilon\theta^*\varepsilon S^*\varepsilon\right)\varepsilon\left(I_3+\varepsilon\theta^* S^*\right)\varepsilon \\
&= \left(\varepsilon-\varepsilon\theta^*\varepsilon S^*\right)\left(\varepsilon+\varepsilon\theta^* S^*\varepsilon\right) \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

dir. N matrisinin determinantı

$$
\det N = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon\theta^* S_3 & -\varepsilon\theta^* S_2 \\ \varepsilon\theta^* S_3 & 1 & -\varepsilon\theta^* S_1 \\ -\varepsilon\theta^* S_2 & \varepsilon\theta^* S_1 & 1 \end{vmatrix} = 1
$$

olduğundan N matrisi yarı ortogonal dual matristir. Ayrıca $S^* = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$
N\overrightarrow{S^*} = \overrightarrow{S^*}
$$

dir.

7. KAYNAKLAR

Hacısalihoğlu, H.H. 1983. Hareket Geometrisi ve Kuaterniyonlar Teorisi, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat. No. 2, Ankara.

O'Neill, B. 1983. Semi Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York.

Müller, H.R. 1963. Kinematik Dersleri, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları Mat. 27, Ankara.

Kula, L. 2003. Bölünmüş Kuaterniyonlar ve Geometrik Uygulamaları, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Ankara.

Agrawal, O.P. 1987. Hamilton Operators and Dual Numbers Quaternions in Spectral Kinematic, Mech. Mach. Theory Vol. 22, no.6, 569-575 pp.

Ward, J.P. 1997. Quaternions and Cayley Numbers Algebra and Applications, Published by Kluwer Acedemic Publishers, 250 pp.

Veldkamp, G.R. 1976. On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous, Spatial Kinematics. Mech. Mach. Theory. Vol. 11, No.2-E.

Özdemir, M. ve Ergin, A.A. 2006. Rotations With Unit Timelike Quaternions In Minkowski 3-Space, Journal of Geometry And Physcis, Vol. 56, 322-336 pp.

Sakurai, J.J. 1994. Modern Quantum Mechanics, University of California, Los Angeles, Addison Wesley Publishing Company, 152-174 pp.

Demir, S. 2003. Kompleks ve Dual Kuaterniyonların Fiziksel Uygulamaları, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Eskişehir.

Özdemir, M. ve Ergin, A.A. 2005. Some Geometric Applications Of Split Quaternions, Proc. 16th Int. Conf. Jangjeon Math. Soc., Vol. 16, 108-115 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Yusuf ÇAKIR, 1987 yılında Samsun' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Samsun' da tamamladı. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2011 yılında mezun oldu. 2011 yılında Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans bilimsel hazırlık öğrenimini tamamladı. 2012 yılında Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2014 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nden 'Pedagojik Formasyon Sertifikası'nı aldı. 2015 yılı Şubat ayında Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Kuantum Sistemleri ve Modelleme Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı.