GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI MÜKEMMEL HALKALAR

SEVİL KARACİF

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.

SİNOP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI MÜKEMMEL HALKALAR

SEVİL KARACİF

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN

YRD. DOÇ. DR. YILMAZ MEHMET DEMİRCİ

SİNOP – 2016

T.C.

SİNOP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 05/02/2016 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz Mehmet DEMİRCİ

Üye : Doç. Dr. Nayil KILIÇ

Üye : Doç. Dr. Ergül TÜRKMEN

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Turgay KORKUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI MÜKEMMEL HALKALAR

ÖZET

H. Bass tarafından tanımlanan projektif örtüler ve mükemmel halkalar modül teorisinde önemli bir yere sahiptir. Mükemmel ve yarı-mükemmel halkalar üzerine geniş araştırmalar yapılmış ve hala devam etmektedir. Bu halkaların genellemeleri üzerine yapılan çalışmalar da literatürde büyük öneme sahiptir.

Bu çalışmada bu genellemelerden bazıları olan G-mükemmel, A-mükemmel, B-mükemmel ve G-yarı-mükemmel halkalar, özellikleri ve aralarındaki ilişkiler incelenmiş ve örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Düz B-örtü, G-yarı-mükemmel halka, Mükemmel halka

GENERALIZED SEMIPERFECT RINGS

ABSTRACT

Projective covers and perfect rings defined by H. Bass is an important topic in the theory modules. Perfect and semiperfect rings are extensively studied. Studies concerning generalizations of these rings also have importance in the literature.

In this work, some of these generalizations including G-perfect, A-perfect, B-perfect and G-semiperfect rings are studied along with their properties and connections in between and examples for such rings are given.

Key Words: Flat B-cover, G-Semiperfect Rings, Perfect Rings

TEŞEKKÜR

Çalışmamın hazırlanmasında bilgi ve tecrübeleriyle beni aydınlatan, her aşamada bana yardımcı olan, yapıcı ve yönlendirici fikirleri ile bana daima yol gösteren danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yılmaz Mehmet DEMİRCİ' ye sonsuz teşekkürler.

Tezimin değerlendirilmesinde katkılarını sunan çok değerli hocalarım Doç. Dr. Nayil KILIÇ ve Doç. Dr. Ergül TÜRKMEN' e teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmam boyunca sevgi ve desteklerini benden esirgemeyen başta ailem olmak üzere yanımda olan tüm dostlarıma yardımları için teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

SEMBOLLER

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\leq$	: Alt grup, alt modül
$\ll$	: Küçük alt modül
$A \times B$	: A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
$Kerf$	: $f: M \to N$ homomorfizmasının çekirdeği
$\operatorname{Im} f$	: $f: M \to N$ homomorfizmasının görüntüsü
$N \underset{\max}{\leq} M$	: N, M' nin maksimal alt modülü
$M \cong N$	: M, N' ye izomorf
M_R	: M sağ R-modül
${}_R M$	: M sol R-modül
A/B	: A modülünün B alt modülüne göre bölüm modülü
$\bigoplus_{i \in I} A_i$	: $\{A_i\}_{i \in I}$ modüller topluluğunun direkt toplamı
$A \otimes_R B = A \otimes B$	: A sağ, B sol R-modüllerinin tensör çarpımı
$f \otimes g$	: f ve g homomorfizmalarının tensör çarpım homomorfizması
1_R	: R' nin çarpmaya göre birim elemanı
$\operatorname{Rad} M$	: M modülünün radikali
$J(R)$	: R halkasının radikali

$Hom(A,B)$: A modülünden B modülüne homomorfizmalar kümesi

1. GİRİŞ

Bu çalışmada kullanılan tüm halkalar birimli, birleşmeli ve aksi belirtilmedikçe bütün modüller üniter sağ R-modüldür. Halkalar ile ilgili muhtemel kısıtlamalar ilgili bölümde belirtilecektir. Halka ve modül teorisi ile ilgili burada verilmeyen bilgiler (Fuller, 1992), (Lam, 1999), (Xu, 1996), (Wisbauer, 1991)' de bulunabilir.

Bu tezde sağ mükemmel halkaların genellemeleri incelenmiş, G-yarı-mükemmel halkalar tanımlanmış ve bu halkaların özellikleri incelenmiştir.

Sağ mükemmel halkalarla ilgili ilk çalışma H. Bass tarafından yapılmıştır. (Bass, 1960)' da mükemmel halka her modülün projektif örtüsü bulunan halka olarak tanımlanmıştır. Sağ mükemmel halkaların ilk karakterizasyonları da aynı çalışmada verilmiştir. Daha sonra mükemmel halkaların özellikleri yoğun bir şekilde araştırılmıştır. (Azumaya, 1974), (Hausen ve Johnson, 1983), (Lomp, 1999), (Nicholson, 1975), (Sandomierskİ, 1968), (Varadarajan, 1979) bu çalışmalardan bazılarıdır. Sağ mükemmel halkaların birçok genellemesi vardır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde modül tanımı ile çalışmada kullanılacak bazı özel modüllerin özellikleri ele alınmıştır. Tensör çarpımı verilerek düz modül tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde, mükemmel halkaların tanımı verilip (Bass, 1960)' a göre bir M modülünün projektif örtüsü tanımlanmıştır. Projektif örtü üzerinden yarı-mükemmel halkaların homolojik tanımları verilmiştir. Daha sonra yarı-mükemmel halkaların karakterizasyonları ile ilgili bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde projektif örtüde ele alınan modülün özelliği değiştirilip buradan yola çıkarak Amini (2007)' ye göre düz B-örtü tanımlanmıştır. Daha sonra Enochs (1981) anlamında düz örtüden bahsedilmiştir. Düz B-örtü tanımından yola çıkılarak genelleştirilmiş mükemmel halkalar ve özel olarak A-mükemmel ve B-mükemmel halkalar tanımları verilip; bunlarla ilgili birkaç teorem ve örnek üzerinde durulmuştur.

Son bölümde ise dördüncü bölümde ele alınan genelleştirilmiş mükemmel halkalar tanımında yer alan her M modülü yerine her basit M modülünün düz B-

örtüsünün varlığı incelenmiştir. Böylece genelleştirilmiş yarı-mükemmel halkalar tanımlanmıştır.

Bunlarla ilgili teoremler, G-mükemmel halkalar ile karşılaştırmaları ve birtakım sonuçlar elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Modüller

Tanım 2.1.1: R birimli bir halka, $(A,+)$ değişmeli grup olsun. Herhangi $\bullet: A\times R \to A$ olmak

üzere $\bullet((a,r)) = ar$ şeklinde tanımlanan fonksiyon aşağıdaki özellikleri sağlarsa A' ya bir üniter sağ R-modül denir. Her $r,s\in R$ ve her $a,b\in A$ için

i) $(a+b)r = ar + br$

ii) $a(r+s)= ar+as$

iii) $a(rs)=(ar)s$

iv) $a\cdot 1_R = a$.

Benzer şekilde sol R-modül tanımı da verilir.

Bu çalışmada, modül denildiğinde üniter sağ R-modüller kastedilecektir.

Tanım 2.1.2: R bir halka ve A'da R-modül olsun. $\varnothing \neq B \subseteq A$ alt kümesi A'daki işlemlere göre bir R-modül yapısına sahipse B' ye A'nın bir alt modülü denir ve $B\leq A$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.3: A bir R-modül ve $0\neq B\subseteq A$ olsun. B'nin , A modüllünün alt modülü olması için gerek ve yeter koşul her $b,b'\in B$, her $r\in R$ için $b-b'\in B$ ve br $\in B$ olmasıdır. $N\leq M$ ve $m\in M$ olsun. M modülünün $N+m=\{n+m \mid n\in N\}$ alt kümesine M' nin N alt modülüne göre sağ yan sınıfı denir ve bütün sağ yan sınıflar kümesi M/N ile gösterilir.

Önerme 2.1.4: M/N kümesinde toplama işlemi $(m+N)+(k+N)=(m+k)+N$ ve halkanın bir r elemanı ile çarpma işlemi de $(m+N)r = mr+N$ ile tanımlandığında M/N bir R-modül yapısına sahiptir.

Tanım 2.1.5: $\{M_k \mid k \in K\}$, M modülünün alt modüllerinin topluluğu olsun. Bu alt modüllerin elemanlarının toplamı şeklinde gösterilebilen, yani $m = m_{k_1} + m_{k_2} + \cdots m_{k_n}$ şeklinde yazılabilen $m \in M$ elemanlarının oluşturduğu küme M modülünün bir alt modülüdür ve $\sum_{k \in K} M_k$ ile gösterilir. $\sum_{k \in K} M_k$ alt modülüne $\{M_k \mid k \in K\}$ alt modüller topluluğunun toplamı denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.1.6: $N \leq M$ ve $N \neq M$ olsun. M modülünün N' yi içeren alt modülü bulunmuyorsa, N ye M' nin maksimal alt modülü denir. Başka bir deyişle, $N \leq K \leq M$ durumu sadece $K = M$ ve $K = N$ için gerçeklenirse, N ye M modülünün maksimal alt modülü denir.

R halkasının I_R sağ ideali R_R modülünde maksimal alt modül ise, I ya R halkasının maksimal sağ ideal denir.

Tanım 2.1.7: Sıfırdan ve kendisinden başka alt modülü bulunmayan sıfırdan farklı modüle basit modül denir.

Tanım 2.1.8: R bir halka olmak üzere M ve N R-modüller olsun. Bir $f : M \to N$ fonksiyonu her m, $m' \in M$ için, $f(m+m') = f(m) + f(m')$, her $r \in R$ ve her $m \in M$ için, $f(rm) = r f(m)$ koşullarını sağlıyorsa, f' ye modül homomorfizması denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.9: Bir homomorfizma bire bir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma, hem bire bir hem de örten ise izomorfizma denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.10: M, R halkası üzerinde modül olsun. $N \leq M$ alt modülü için $S + N = M \Rightarrow N = M$ oluyorsa $S \leq M$ alt modülüne M modülünün küçük alt modülüdür denir ve $S \ll M$ ile gösterilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.1.11: P bir R-modül olsun. Her $f : A \to B$ epimorfizması ve her $g : P \to B$ homomorfizması için $g = f \circ h$ olacak şekilde bir $h : P \to A$ homomorfizması bulunursa P' ye projektif modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.1.12: M bir modül $\{M_k \mid k \in K\}$ da M' nin alt modüllerinin topluluğu olsun. Her $m \in M$ elemanı tek türlü olarak M_k alt modüllerinin elemanlarının toplamı şeklinde, yani $m = m_{k_1} + m_{k_2} + \cdots + m_{k_n}$, $m_{k_i} \in M_{k_i}$ şeklinde yazılabilirse M' ye M_k alt modüllerinin iç direkt toplamı denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.1.13: M bir R-modül ve $\{M_i\}_{i \in I}$ M modülünün alt modüllerinin ailesi olsun. M'nin $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin iç direkt toplamı olması için gerek ve yeter koşul

1) $M = \sum_{i \in I} M_i$ ve

2) Her $i \in I$ için $M_i \cap \left(\sum_{i \neq j} M_j \right) = 0$ olmasıdır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.14: M modülünün N alt modülü için $M = N \oplus K$ olacak şekilde M nin bir K alt modülü varsa N' ye M modülünün bir direkt toplam terimi denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.1.15: M bir R-modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

a) M, basit alt modüller ailesinin bir direkt toplamıdır.

b) M, toplamı M olan basit alt modüller ailesine sahiptir.

c) M'nin her alt modülü M'nin bir direkt toplam terimidir.

Tanım 2.1.16: Yukarıdaki önermede denk koşullardan herhangi birini sağlayan M modülüne yarı-basit modül denir. Kendi üzerinde bir sol R-modül olarak yarı-basit olan halkaya (sol) yarı-basit halka denir. Benzer tanım sağ yarı-basit halkalar için verilebilir (Pancar ve Türkmen, 2014).

2.2. Tümleyenler ve Tümlenmiş Modüller

Bu bölümde tümleyenler ve tümlenmiş modüller ile ilgili tanımlar ve bazı sonuçlar verilecektir.

Tanım 2.2.1: M bir R-modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ özelliğini sağlayan minimal V alt modülü varsa V' ye U' nun tümleyeni denir.

Lemma 2.2.2: $U,V \leq M$ olsun. V ' nin U ' nun tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $U+V=M$ ve $U \cap V \ll V$ olmasıdır.

Tümleyenlerin özellikleri aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 2.2.3: $U,V \subseteq M$ ve V , U ' nun tümleyeni olsun.

1) $W \subseteq U$ için $W+V=M$ ise V , W ' nin tümleyenidir.

2) M sonlu üretilmişse, V de sonlu üretilmiştir.

3) U , M ' nin maksimal alt modülü ise V devirlidir ve $U \cap V = Rad(V)$, V ' nin maksimal alt modülüdür.

4) $K \ll M$ ise V , $U+K$ ' nın tümleyenidir.

5) $K \ll M$ ise, $V \cap K \ll V$ ve $Rad(V) = V \cap RadM$ olur.

6) $RadM \ll M$ ise, U , M 'nin maksimal alt modülünü içerir.

7) $L \subseteq U$ ise, $(V+L)/L$, U/L ' nin M/L de tümleyenidir.

8) $RadM \ll M$ ve $p: M \to M/RadM$ doğal epimorfizma ise

$M/RadM = p(U) \oplus p(V)$ olur (Wisbauer, 1991).

M modülünün her alt modülünün tümleyeni varsa M ' ye tümlenmiş modül denir. Yarı-basit modüller tümlenmiş modüllerdir. Kendi üzerinde modül olarak düşünüldüğünde $\mathbb{Z}$ tümlenmiş değildir. Bu da her modülün tümlenmiş olmadığını gösterir.

Önerme 2.2.4: M bir R-modül olsun.

1) U, $V \leq M$ olsun. U tümlenmiş modül ve $U+V$ ' nin de M ' de tümleyeni varsa V ' nin de M 'de tümleyeni vardır.

2) M_1, M_2 tümlenmiş modüller ve $M = M_1 + M_2$ olsun. Bu durumda M ' de tümlenmiştir.

3) M tümlenmiş ise, $M/_{RadM}$ yarı-basittir (Wisbauer, 1991).

2.3. Tensör Çarpımı ve Düz Modüller

Tanım 2.3.1: A_R bir sağ R-modül ve ${}_R B$ bir sol R-modül olmak üzere tabanı $A \times B$ kümesinden oluşan F serbest abel grubunu alalım.

$$F = \left\{ \sum_{i \in I} n_i (a_i, b_i) \mid n_i \in \mathbb{Z}, a_i \in A, b_i \in B \right\}.$$

$a, a_1, a_2 \in A$, $b, b_1, b_2 \in B$ ve $r \in R$ olsun.

$$(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)$$

$$(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2)$$

$(ar, b) - (a, rb)$ elemanlarının ürettiği alt grup K olsun. $F/_K$ bölüm grubuna A_R ve ${}_R B$ modüllerinin tensör çarpımı denir. Bu grup $A \otimes B$ ile gösterilir. $A \otimes B$ grubunun elemanları $(a, b) + K$ şeklindeki elemanlardan oluşur. Bu elemanlar $a \otimes b$ ile gösterilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.3.2: A_R bir sağ, ${}_R B$ bir sol R-modül ve C bir Abel grubu olsun. $f : A \times B \to C$ fonksiyonu her $a, a_1, a_2 \in A$ ve $b, b_1, b_2 \in B$ ve $r \in R$ için

1) $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$

2) $f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2)$

3) $f(ar, b) = f(a, rb)$ eşitliklerini sağlarsa, f ye bilineer fonksiyon denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.3: A_R, ${}_R B$ modüller, C bir abel grubu ve $f : A \times B \to C$ bir bilineer fonksiyon ise, $f = g \circ e$ olacak şekilde tek bir $g : A \otimes B \to C$ homomorfizması bulunur (Alizade ve Pancar, 1999).

Sonuç 2.3.4: $f: A\times B \to C$ bir bilineer fonksiyonsa, her $a\in A, b\in B$ için $g(a\otimes b)=f(a,b)$ olacak şekilde tek bir $g: A\otimes B\to C$ homomorfizması vardır (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.3.5: Her M, M' R-modülleri ve her $f: M\to M'$ monomorfizması için $f\otimes 1_u(m\otimes u)=f(m)\otimes u$ ile tanımlı $f\otimes 1_u : M\otimes U\to M'\otimes U$ homomorfizması bir monomorfizma oluyorsa U modülüne düz modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Örnek 2.3.6: Projektif modüller düz modüldür. Örneğin, tamsayılar halkası kendi üzerinde düz modüldür.

Tanım 2.3.7: R-modüllerin bir $\ldots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \ldots$ dizisi ve bunlar arasında da R-modül homomorfizmaları verilsin. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $\operatorname{Im} f_{n-1}=Ker f_n$ ise bu dizi M_n'de tamdır denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Belli bir yerden sonra (önce) modüller hep 0 olabilir, özel olarak; $0\longrightarrow A\xrightarrow{f} B\xrightarrow{g} C\longrightarrow 0$ şeklindeki diziye kısa tam dizi denir.

Kısa tam dizide f'nin monomorfizma , g'nin epimorfizma ve $\operatorname{Im} f = Ker g$ olduğu tamlık tanımından anlaşılır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Örnek 2.3.8:

1) $h: A\to A\oplus B$, $h(a)=(a,0)$ ve $g: A\oplus B\to B$, $g(a,b)=(0,b)$ olmak üzere $0\longrightarrow A\xrightarrow{h} A\oplus B\xrightarrow{g} B\longrightarrow 0$ dizisi bir kısa tam dizidir. Ayrıca bu dizi parçalanan kısa tam dizi olarak da ifade edilir.

2) $N\le M$ için $p: N\to M$, $p(n)=n$ ve $t: M\to M/N$, $t(m)=m+N$ olmak üzere $0\longrightarrow N\xrightarrow{p} M\xrightarrow{t} M/N\longrightarrow 0$ dizisi bir kısa tam dizidir.

3) $f: A\to B$ homomorfizması için $i: Kerf\to A$ $i(x)=x$ ve $\pi: A\to A/Kerf$ $\pi(a)=a+Kerf$ olmak üzere

$0\longrightarrow Ker f\xrightarrow{i} A\xrightarrow{\pi} A/Ker f\longrightarrow 0$ dizisi bir kısa tam dizidir.

4) $s:\operatorname{Im} f \to B$ $s(x)=x$ ve $r:B \to B/\operatorname{Im} f$ $r(b)=b+\operatorname{Im} f$ olmak üzere

$0 \longrightarrow \operatorname{Im} f \xrightarrow{s} B \xrightarrow{r} B/\operatorname{Im} f \longrightarrow 0$ dizisi bir kısa tam dizidir.

Lemma 2.3.9: K, V ve V' düz sağ R-modül ve $0 \longrightarrow K \longrightarrow V \longrightarrow V' \longrightarrow 0$ tam olsun. V' nin düz olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş $I \leq {}_R R$ ideali için $KI = K \cap VI$ olmasıdır (Fuller, 1997).

Sonuç 2.3.10: X_R' nin R_R' de saf olması için gerek ve yeter koşul her $I \leq {}_R R$ için $XI = X \cap RI$ olmasıdır.

2.4. Halkalar

Tanım 2.4.1: R halkasının sadece bir tane maksimal ideali varsa R'ye yerel halka denir (Lam, 1991).

Tanım 2.4.2: Bir R halkası için $R/J(R)$ yarı-basit oluyorsa R'ye yarı-yerel halka denir (Lam, 1991).

Tanım 2.4.3: R halkasının tüm maksimal ideallerinin kesişimine halkanın Jacobson Radikali denir ve $J(R)$ ile gösterilir (Lam, 1991).

Tanım 2.4.4: Her $a \in R$ için $a = aba$ koşulunu sağlayan $b \in R$ varsa R halkasına düzenli halka denir (Lam, 1991).

Tanım2.4.5: M bir R-modül olsun. M' nin alt modüllerinin $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \ldots (K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \ldots)$ şeklinde her bir artan (azalan) zinciri için $n \geq m$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $K_n = K_m$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}^+$ bulunuyorsa M' ye artan (azalan) zincir koşulunu sağlıyordur denir (Pancar ve Türkmen, 2014).

Tanım 2.4.6: Alt modülleri için artan zincir koşulunu (kısaca ACC) sağlayan modüle Noether modülü denir. Kendi üzerinde bir sağ R-modül olarak Noether olan halkaya sağ Noether halkası denir (Pancar ve Türkmen, 2014).

Tanım 2.4.7: Alt modülleri için azalan zincir koşulunu (kısaca DCC) sağlayan modüle Artin modülü denir. Kendi üzerinde bir sol R-modül olarak Artin olan halkaya sol Artin halkası denir (Lam, 1991).

Teorem 2.4.8: [Hopkins]: R bir halka ve $J=J(R)$ olsun. R halkasının sağ Artin olması için gerek ve yeter koşul R ' nin sağ Noether, J 'nin nilpotent ve $R/J(R)$ ' nin yarı-basit olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.4.9: R bir halka olsun. R ' nin bir S alt kümesi için $1\in S$ ve S çarpma işlemi altında kapalı ise S ' ye R ' nin bir çarpımsal alt kümesi denir. $R\times S$ üzerinde $\equiv$ bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$(r,s)\equiv(p,t)\Leftrightarrow(rt-ps)u=0\,,\ u\in S$$

Bu bağıntı yansıyan, simetrik ve geçişkendir, yani bir denklik bağıntısıdır. (r,s) nin denklik sınıfı r/s, tüm denklik sınıflarının kümesi de $S^{-1}R$ ile gösterilsin. $S^{-1}R$

$$(r/s)+(p/t)=(rt+ps)/st$$
$$(r/s)\cdot(p/t)=rp/st$$

ile tanımlı toplam ve çarpıma göre bir halka yapısına sahiptir. Bu halkaya R halkasının S çarpımsal kapalı alt kümesine göre yerelleştirmesi denir. Halkanın sıfırı $0_{S^{-1}R}=0_R/1$ ve birimi $1_{S^{-1}R}=1/1$ dir. Ayrıca, $f(x)=x/1$ ile tanımlı $f:R\to S^{-1}R$ fonksiyonu bir halka homomorfizmasıdır. Bu homomorfizma birebir olmak zorunda değildir.

Sonuç 2.4.10: N ve P, M_R modülünün alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir.

1) $S^{-1}(N+P)=S^{-1}(N)+S^{-1}(P)$

2) $S^{-1}(N\cap P)=S^{-1}(N)\cap S^{-1}(P)$

3) $S^{-1}(M/N)$ ve $(S^{-1}M)/(S^{-1}N)$ modülleri $S^{-1}R$ -modül olarak izomorftur.

Aşağıdaki önerme yerelleştirmenin evrensel özelliği olarak bilinir.

Önerme 2.4.11: $f:R\to R'$ bir halka homomorfizması ve $S\subseteq R$ bir çarpımsal küme olsun. Eğer her $s\in S$ için, $f(s)\in R'$ birimsel ise , $f=f'\circ\pi$ olacak şekilde tek bir

$f':S^{-1}R \to R$ homomorfizması vardır. Yani f homomorfizmasını $S^{-1}R$' ye genişletebiliriz (Çallıalp ve Tekir, 2009).

3. MÜKEMMEL VE YARI-MÜKEMMEL HALKALAR

3.1. Mükemmel Halkalar

Tanım 3.1.1: R halkasının bir A alt kümesine, elemanlarının her $\{a_1, a_2, ...\} \subseteq A$ dizisi için $a_1 \cdot ... \cdot a_n = 0$ $(a_n \cdot a_{n-1} ... a_2 \cdot a_1 = 0)$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ tam sayısı varsa sol (sağ) T-nilpotent denir (Bass, 1960).

Teorem 3.1.2: Her $I \subseteq R$ sağ ideali için aşağıdakiler denktir.

1) I sağ T-nilpotenttir.

2) Her $0 \neq M_R$ modülü için $MI = M \Rightarrow M = 0$

2') Her $M_R \neq 0$ modülü için $MI \ll M$

3) Her N_R modülü için $ann_N(I) = 0 \Rightarrow N = 0$'dır.

Burada $ann_N(I) = \{x \in N \mid xI = 0\}$ ile tanımlıdır.

4) Sayılabilir üretilmiş serbest $F = R^{(\mathbb{N})}$ modülü için $FI \ll F$'dir (Lam, 1991), (Anderson ve Fuller, 1992)

İspat: (1) $\Rightarrow$(3) $ann_N(I) = 0 \Rightarrow N \neq 0$ olduğunu kabul edelim. $0 \neq x \in N$ alalım.

$a_1 x \neq 0$, $a_2 x \neq 0, ..., a_n x \neq 0$ olur. $\{a_1, a_2, ... a_n\} \subseteq I$ için $a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 \neq 0$ olup I sağ T-nilpotent değildir.

(2') $\Rightarrow$(4) Açıktır.

(2) $\Rightarrow$(2') $N \subseteq M$ olsun. M/N bir sağ R - modüldür.

$\left(M/N\right) I = MI + N/N = M/N$ olduğundan hipotezden $M = N$ olur.

(2') $\Rightarrow$(2) $N = 0$ alınırsa $MI + N = M \Rightarrow MI = M \Rightarrow M = 0$ olur.

(3) $\Rightarrow$(2) $M_R \neq 0$ olsun. $A := ann(M) \subseteq R$ bir idealdir. $N = R/A$ sol R-modül dersek $B = \{b \in R \mid bI \subseteq A\}$ olduğu zaman $ann_N(I)$, B/A ile verilir

$$ann_{R/A}(I) = \{r + A \in R/A \mid (r+A)I = 0\} = \{r + A \in R/A \mid rI \subseteq A\} = B/A$$

$N \neq 0$ ise $B/A \neq 0$ olur. Yani $A \subsetneq B$'dir.

Bu nedenle $A \neq B$ ise $MB \neq 0$'dır. Diğer taraftan $IB \subseteq A$ ise $MIB \subseteq MA = 0 \Rightarrow$ $MI \neq M$ olup (2) doğrudur.

(4) $\Rightarrow$(1) $\{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} \subseteq I$ olsun. $F = \bigoplus_{i=1}^{\infty} e_i R$,$\{e_i \mid i \geq 0\}$ ve $M = F/S$ olsun. Burada S, F' nin $e_0 - e_1a_1, e_1 - e_2a_2, e_2 - e_3a_3, ...$ ile üretilen alt modülüdür. $\overline{e}_i = \overline{e}_{i+1} \cdot a_{i+1} \in M$ olduğundan hipotezden $MI = M \Rightarrow M = 0$ olup $F = S$ olur.

Buradan $e_0 = (e_0 - e_1a_1)b_1 + ... + (e_{n-1} - e_na_n)b_n$ olacak şekilde $b_1, b_2, ..., b_n$ elemanları vardır. Burada $b_1 = 1$, $b_2 = a_1 \cdot b_1 = a_1, b_n = a_{n-1} \cdot b_{n-1} = a_{n-1} \cdot ... \cdot a_2 \cdot a_1$ ve son olarak $0 = a_nb_n = a_{n-1} \cdot ... \cdot a_2 \cdot a_1$ olup I sağ T-nilpotenttir.

Tanım 3.1.3: R yarı-yerel bir halka ve $J(R)$ sağ (sol) T-nilpotent ise R halkasına sağ (sol) mükemmel halka denir (Lam, 1991).

Örnek 3.1.4: Her tek taraflı Artin halkası sağ ve sol mükemmeldir.

Teorem 3.1.5: Her R halkası için aşağıdakiler denktir.

1) R sağ mükemmel halkadır.

2) R temel idealler üzerinde DCC' yi sağlar.

3) Her ${}_RN$ modülü devirli alt modüller üzerinde DCC' yi sağlar.

Sonuçlar:

4) Her sol R-modül, sonlu üretilmiş alt modüller üzerinde DCC' yi sağlar.

5) R sonlu üretilmiş sol idealler üzerinde DCC' yi sağlar.

6) Her sağ R-modül devirli alt modüller üzerinde ACC' yi sağlar (Lam, 1991).

3.2. Yarı-Mükemmel Halkalar

Tanım 3.2.1: R halkası yarı-yerel ve $R/_{J(R)}$' nin idempotent elemanları R'den geliyorsa bu halkaya yarı mükemmel halka denir (Lam, 1991).

Teorem 3.2.2: Bir değişmeli R halkasının yarı mükemmel olması için gerek ve yeter koşul R' nin değişmeli yerel halkaların sonlu direkt çarpımı olmasıdır (Lam, 1991).

Tanım 3.2.3 : Bir sağ M R-modülü için, P bir projektif modül ve $Ker\theta \ll P$ olacak şekilde $\theta : P \rightarrow M$ epimorfizması (varsa) θ' ya M'nin projektif örtüsü denir (Lam, 1991).

Teorem 3.2.4: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

1) R yarı-mükemmel bir halkadır.

2) Her sonlu üretilmiş sağ R-modülün projektif örtüsü vardır.

3) Her devirli sağ R-modülün projektif örtüsü vardır (Lam, 1991).

4) Her basit sağ R-modülün projektif örtüsü vardır (Sandomierski, 1969).

Teorem 3.2.5: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

a) R_R yarı-mükemmeldir.

b) R_R tümlenmiştir.

c) Her sonlu üretilmiş R-modülün projektif örtüsü vardır.

d) Her sonlu üretilmiş R-modül tümlenmiştir.

e) $R/_{Jac(R)}$ yarı-basit ve $R/_{Jac(R)}$ deki idempotent elemanları R' den gelir.

f) Her basit R modülün projektif örtüsü vardır.

g) Her maksimal sağ idealin R' de tümleyeni vardır.

h) R_R yerel modüllerin direkt toplamıdır (Wishbauer, 1991).

4. MÜKEMMEL HALKALARIN GENELLEMELERİ

4.1. Genelleştirilmiş Mükemmel Halkalar

Bir modülün düz örtüsü kavramı E. Enochs tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Enochs, 1981).

Tanım 4.1.1: Bir M modülünün düz örtüsü aşağıdaki özellikleri sağlayan $\alpha : F \rightarrow M$ homomorfizmasıdır.

i) F düz modüldür.

ii) F' düz modül olmak üzere her $\beta : F' \rightarrow M$ homomorfizması için $\alpha \circ \gamma = \beta$ olacak şekilde $\gamma : F' \rightarrow F$ homomorfizma vardır.

iii) θ, F nin $\alpha \circ \theta = \alpha$ koşulunu sağlayan bir endomorfizması ise θ otomorfizmadır.

Bir M modülünün projektif örtüsü P projektif olmak üzere $Kerf \ll P$ koşulunu sağlayan bir $f : P \rightarrow M$ epimorfizması olarak tanımlanmıştır (Bass, 1960). Aynı çalışmada sağ mükemmel halkalar her modülün projektif örtüsünün bulunduğu halkalar olarak tanımlanmıştır. Bu tanımdaki projektif modül olma koşulu düz modül ile değiştirilip düz örtü tanımlanmıştır (Amini, 2007).

Teoremin ii ve iii koşulunu birlikte sağlayan örtüye M modülünün düz ön-örtüsü denir.

Tanım 4.1.2: M, R-modülü için F düz modül olmak üzere $Ker(\alpha) \ll F$ olacak şekilde $\alpha : F \rightarrow M$ epimorfizması varsa α' ya M modülünün düz B-örtüsü denir (Amini ve ark., 2007).

Lemma 4.1.3: $\varphi : F \rightarrow M$ düz örtü olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1) F projektiftir.

2) P projektif olmak üzere $f : P \rightarrow M$ epimorfizması vardır ve $Hom(P, M) \rightarrow Hom(F, M)$ örtendir.

3) P projektif olmak üzere $f : P \rightarrow M$ düz ön-örtüdür (Büyükaşık, 2011).

İspat: (1)⇒(2) $P=F$ alındığında ispat açıktır.

(2)⇒(3) G düz modül ve $h\in Hom(G,M)$ olsun. (2) ile $\varphi=f\circ\alpha$ olacak şekilde $\alpha\in Hom(F,P)$ vardır. Diğer taraftan $\varphi:F\to M$ düz örtü olduğundan $h=\varphi\circ\beta$ olacak şekilde $\beta\in Hom(G,F)$ vardır.

Bu nedenle aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\varphi"] & G \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "h"] \\ P \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

Bu durumda $h=\varphi\circ\beta$ ve $\varphi=f\circ\alpha$ eşitliklerinden $\alpha\circ\beta\in Hom(G,P)$ için $h=f(\alpha\circ\beta)$ elde edilir.

(3)⇒(1) (Xu, 1996) de ki Teorem 1.2.7 ile M' nin düz örtüsü P' nin direkt toplam terimidir. Bu nedenle F projektiftir.

Teorem 4.1.4: R yarı-yerel halka olsun. R halkasının sağ mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her yarı-basit R-modülün düz B-örtüsü olmasıdır (Ding ve Chen, 1999).

İspat: (⇒) Açıktır.

(⇐) F serbest sağ R-modül olsun. R/J yarı-basit olduğunda F/FJ yarı-basit sağ R-modül olur. P düz sağ R-modülü için $\alpha:P\to F/FJ$ homomorfizması F/FJ' nin düz B-örtüsü olsun. F projektif ve $\pi:F\to F/FJ$ standart epimorfizma olduğundan aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[r, "\alpha"'] & F/FJ \end{tikzcd}$$

π epimorfizma ve $Ker\alpha \ll P$ olduğundan β epimorfizmadır. $P \cong F/_{Ker\beta}$ ve $Ker\beta \leq Ker\pi = FJ = RadF$ olduğundan (Lam, 1991) de ki Alıştırma 4.20 ile $Ker\beta = 0$ olur. Böylece β izomorfizmadır. $Ker\alpha \ll P$ olduğundan $FJ = \beta^{-1}(Ker\alpha) \ll F$ olur.

Tanım 4.1.5: Bir R halkasının her sağ R-modülünün düz B-örtüsü varsa R halkasına sağ genelleştirilmiş mükemmel halka (sağ G-mükemmel halka) denir. Sol G-mükemmel halkanın tanımı da benzer şekilde yapılır. Eğer R halkası hem sağ hem de sol G-mükemmel ise halkaya G-mükemmel halka denir (Amini ve ark., 2007).

Sağ G-mükemmel halkalar için aşağıdaki sonuç vardır.

Teorem 4.1.6: R sağ G-mükemmel halka olsun. Bu durumda J sağ T-nilpotenttir. Özel olarak $R/_J$ ' nin idempotent elemanları R ' den gelir (Amini ve ark., 2007).

İspat: $M = \left(R/_J\right)^{(\mathbb{N})}$ ve $\pi : F_R \to M_R$ doğal epimorfizma olsun. Hipoteze göre M ' nin düz B-örtüsü olduğundan $\varphi : P \to M$ epimorfizması var ve P düz modüldür. F projektif olduğundan $\psi : F \to P$ homomorfizması vardır ve $\varphi \circ \psi = \pi$, $Ker(\varphi) \ll P$ ve ψ epimorfizmadır. Ayrıca $Ker(\psi) \subseteq Ker(\pi) = FJ = rad(F_R)$ ve $F/_{Ker(\psi)} \cong P$ düz sağ R- modüldür. Bu nedenle (Lam,1991) Alıştırma 4.20 ile $Ker(\psi) = 0$ 'dır. Bu nedenle ψ bir izomorfizma ve $FJ = \psi^{-1}(Ker(\varphi)) \ll F$ olur. Teorem 3.1.2 ile J sağ T-nilpotenttir. Her sağ T-nilpotent ideal nil olduğundan teoremin diğer basamağı (Anderson ve Fuller,1992) deki Önerme 27.1 ile gösterilir

Önerme 4.1.7: R sağ G-mükemmel halka olsun. R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul R halkasının Artin olmasıdır (Amini ve ark., 2007).

İspat: $(\Rightarrow)$ R sağ Noether olsun. $J(R)$ nil olduğunda nilpotent olur (Anderson and Fuller, 1992), Teorem 15.22. S_R basit bir R modül ve $f: F_R \to S_R$ S_R' nin düz örtüsü olsun. R Noether ve F_R devirli olduğunda F projektiftir. Bu da $f: F_R \to S_R$ homomorfizmasının S_R'nin projektif örtüsü olduğunu gösterir ve R yarı-mükemmel olur. Bu nedenle R sağ Noether ve yarı-asallı bir halkadır. Teorem 2.4.6 ile R sağ Artin olur.

$(\Leftarrow)$ Açıktır

Önerme 4.1.8: R ve S sağ G-mükemmel halkalar olsun.

a) R' nin her bölüm halkası G-mükemmeldir.

b) $R \times S$ G-mükemmeldir (Amini ve ark., 2007).

Örnekler 4.1.9:

1) Her düz modülün düz B-örtüsü vardır. Bu nedenle her düzenli halka G-mükemmeldir.

2) Her projektif modül düz olduğundan projektif örtüsü olan her modülün düz B-örtüsü vardır. Özel olarak sağ mükemmel halkalar sağ G-mükemmeldir (Amini ve ark., 2007).

3) $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \geq 2)$ olsun. M nin $\mathbb{Z}$-modül olarak düz B-örtüsü yoktur. $\varphi: F \to M$ homomorfizmasının M 'nin düz B-örtüsü olduğunu kabul edelim. F devirli, burulmasız $\mathbb{Z}$-modül olmalıdır ve bu yüzden $F \cong \mathbb{Z}$ dir. $\mathbb{Z}$'nin sıfırdan başka küçük alt modülü olmadığından çelişki elde edilir. Böylece $\mathbb{Z}$, G-mükemmel halka değildir (Amini ve ark., 2007).

Teorem 4.1.10: R sağdan çift taraflı halka olsun. R sağ G-mükemmel halka ise R/J düzenlidir (Amini ve ark., 2007).

Aşağıdaki tanım ve sonuçlar Teorem 4.1.10' un sonuçları için gereklidir.

Tanım 4.1.11: Sıfırdan farklı her sağ R modül M modülünün bir maksimal alt modülü varsa R' ye sağ maks halka denir (Faith, 1995).

Lemma 4.1.12: R bir halka olsun. R ' nin sağ maks olması için gerek ve yeter koşul J 'nin sağ T-nilpotent ve her sağ R/J -modülünün maksimal alt modülü olmasıdır (Hamsher, 1967).

Teorem 4.1.13: R değişmeli halka olsun. R ' nin sağ maks olması için gerek ve yeter koşul J ' nin T-nilpotent ve R/J ' nin düzenli halka olmasıdır (Hamsher, 1967).

Sonuç 4.1.14: R değişmeli G-mükemmel halka ise, R maks halkadır. Özel olarak R halkasının her asal ideali maksimaldir (Amini ve ark., 2007).

Sonuç 4.1.15: R değişmeli G-mükemmel halka olsun. R_R modülünün Noether olması için gerek ve yeter koşul R_R modülünün Artin olmasıdır (Amini ve ark., 2007).

4.2. A-Mükemmel Halkalar

Tanım 4.2.1: R bir halka olsun. Her düz sağ R-modülü R-projektif ise R ' ye sağ hemen hemen mükemmel halka (kısaca A- mükemmel halka) denir. Sol A-mükemmel halkalar da benzer şekilde tanımlanır. Eğer R halkası hem sağ hem de sol A-mükemmel halka ise R ' ye A-mükemmel halka denir (Amini ve ark., 2008).

Teorem 4.2.2: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

a) R sağ A-mükemmel halkadır.

b) R yarı-mükemmeldir ve sonlu üretilmiş modüllerin düz örtüleri sonlu üretilmiştir.

c) Sonlu üretilmiş düz modüller projektiftir ve sonlu üretilmiş modüllerin düz örtüleri sonlu üretilmiştir.

d) Sonlu üretilmiş modüllerin düz örtüsü projektiftir.

e) Devirli modüllerin düz örtüsü projektiftir (Amini ve ark., 2008).

Yukarıdaki teoremin sonucu olarak aşağıdaki tablo yazılabilir.

Sağ mükemmel halka $\Rightarrow$ Sağ A-mükemmel halka $\Rightarrow$ Yarı-mükemmel halka

4.3. B-Mükemmel Halkalar

Tanım 4.3.1: R bir halka ve S basit sağ R-modüller sınıfı olsun. Her F düz modülü, her $S \in \mathsf{S}$ ve $f : R \to S$, $h : F \to S$ homomorfizmaları için $h = f \circ g$ olacak şekilde $g : F \to R$ homomorfizması varsa R halkasına B-mükemmel halka denir (Büyükaşık, 2011).

Lemma 4.3.2: R yarı-yerel bir halka ve X basit sağ R-modül olsun. X' in düz örtüsü $f : F \to X$ ise $Kerf = F.J(R)$ dir (Büyükaşık, 2011).

Teorem 4.3.3: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

1) R sağ B-mükemmeldir.

2) Basit modüllerin düz örtüleri projektiftir.

3) R yarı-mükemmeldir ve basit modüllerin düz örtüleri devirlidir.

4) R yarı-mükemmeldir ve basit modüllerin düz örtüleri yereldir.

5) Sonlu üretilmiş yarı-basit modüllerin düz örtüsü projektiftir.

6) R yarı-mükemmel ve yarı-basit modüllerin düz örtüleri sonlu üretilmiştir (Büyükaşık, 2011).

İspat: (1)$\Rightarrow$(2) Lemma 4.1.3' ten açıktır.

(2)$\Rightarrow$(3) X basit sağ R-modül olmak üzere $f : P \to X$ bir düz örtüsü olsun. Bu takdirde, (2) den P projektiftir. $Kerf \ll P$ ve $F/_{Kerf} \ll X$ olduğundan F devirlidir. Diğer taraftan $f : F \to X$ X' in projektif örtüsüdür. Teorem 3.2.4 ile R yarı-mükemmeldir.

(3)$\Rightarrow$(4) $f : F \to X$ basit X R-modülünün düz örtüsü olsun. Lemma 4.3.2' den dolayı $J = J(R)$ için $Kerf = FJ$ olur. $F/_{FJ} \cong X$ basit ve $FJ \subseteq J(F)$ olduğundan F' nin tek maksimal alt modülü vardır. F sonlu üretilmiş olduğundan FJ, F' nin en büyük alt modülüdür. Böylece F yereldir.

(4)$\Rightarrow$(5) Yarı-mükemmel halkalar üzerinde sonlu üretilmiş düz modüller projektiftir. $M=\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} S_i$ yarı-basit modül ve $f_i : F_i \rightarrow S_i$ S_i' lerin düz örtüsü olsun. (Xu, 1996) daki Teorem 1.2.10 dan dolayı $\oplus f_i : \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i \rightarrow \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} S_i$, $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} S_i$'nin düz örtüsüdür. Hipotez gereği F_i ' ler projektiftir. Böylece $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} F_i$ projektifdir.

(5)$\Rightarrow$(6) Her basit modülün düz örtüsü projektiftir. Bu nedenle R yarı-mükemmeldir. M sonlu üretilmiş yarı-basit modül ve $\phi : F \rightarrow M$, M'nin düz örtüsü ise (5) ile F projektiftir. Böylece $Ker\phi \ll F$ olur. $F/_{Ker\phi} \cong M$ sonlu üretilmiştir.

(6)$\Rightarrow$(1) X bir basit modül ve G bir düz modül olmak üzere $f : R \rightarrow X$ epimorfizma ve $g : G \rightarrow X$ homomorfizma olsun. $\phi : F \rightarrow X$ düz örtü ise hipoteze göre F sonlu üretilmiştir. R yarı-mükemmel olduğundan F projektiftir. Böylece $f = \phi \circ h$ olacak şekilde $h : R \rightarrow F$ homomorfizması vardır. Lemma 4.1.4 ile $g = f \circ t$ olacak şekilde $t : G \rightarrow R$ homomorfizması vardır. Böylece R B-mükemmeldir.

Yukarıdaki teoremden anlaşılacağı gibi B-mükemmel halkalar sınıfı A-mükemmel halkalar sınıfını içerir.

Teorem 4.3.4: R bir halka olsun. R'nin sağ B-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul R' nin yarı yerel olması ve tek maksimal alt modüle sahip ayrıştırılamaz düz sağ R modüllerin projektif olmasıdır (Büyükaşık, 2011).

İspat: ($\Rightarrow$) R sağ B-mükemmel halka olsun. Teorem 4.3.3 ile R yarı-mükemmeldir. G tek maksimal K alt modülü olan ayrıştırılamaz düz modül olmak üzere $h : F \rightarrow G/_K$ düz örtü olsun. Teorem 4.3.3' ten dolayı F projektiftir ve $Kerh \ll F$'dır. $\pi : G \rightarrow G/_K$ bir epimorfizma için aşağıdaki değişmeli diyagram olacak şekilde $g : G \rightarrow F$ homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, dashed, "g"'] \arrow[d, "\pi"] & \\ F \arrow[r, "h"'] & G/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

(Xu, 1996) Teorem 1.2.12' nin ispatından g'nin bir epimorfizma olduğu ve dolasıyla $g:G \to F$ epimorfizmasının parçalanan olduğu görülür. G ayrıştırılamaz olduğundan g izomorfizmadır. Böylece G projektif modüldür.

($\Leftarrow$) X_R bir basit modül ve $f:F \to X$, X' in düz örtüsü olsun. $Kerf = FJ$, F'nin tek maksimal alt modülüdür. (Guil Asensio ve Herzog, 2005)' da bulunan Teorem 15'ten dolayı F ayrıştırılamazdır. Hipotezden F projektiftir. Teorem 2.4 ten dolayı R sağ B - mükemmel halkadır.

Örnek 4.3.5: $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olsun. p asal sayı olmak üzere $R = \left\{ \frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z}, (p,b) = 1 \right\}$ yerelleştirme halkasını düünelim. R tek maksimal ideali pR olan yerel halkadır. $R/_{pR}$' nin düz örtüsü (Xu, 1996), Teorem 1.3.8 ve sonraki örnekten F, $p-adik$ tamsayılar kümesine izomorf olur. F projektif R modül olmadığından dolayı R, B-mükemmel değildir. Diğer taraftan R yerel halka olduğundan yarı-mükemmeldir (Büyükaşık, 2011).

A-mükemmel olmayıp B-mükemmel olan halka örneği aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.3.6: K bir cisim ve $S = K[y_1, y_2, \ldots]$ polinom halkası olsun. S halkasının $\{y_i y_j : i = 1,2,\ldots\}$ tarafından üretilen ideali L olmak üzere $R = S/_L$ halkasını alalım. (Amini ve ark., 2009) Alıştırma 2.17' den dolayı R x , A-mükemmel değildir. Diğer taraftan (Amini ve ark., 2009) Alıştırma 2.22 den dolayı basit R x modüllerin düz örtüleri projektiftir. Teorem 4.3.3' ten dolayı R x bir B-mükemmel halkadır (Amini ve ark., 2009).

Tanım 4.3.7: Her düz F sağ R-modülü için $Ext_R^1(F,C)=0$ ise C sağ R-modülüne eş burulma denir (Xu, 1996).

Lemma 4.3.8: $f:F\to M$ M modülünün düz örtüsü ve $K=Ker(f)$ olsun. Her düz modül G için $Ext_R^1(G,K)=0$ dır. Yani K eş burulmadır (Xu, 1996).

Lemma 4.3.9: I, R halkasının kendisinden farklı bir ideali olsun. C eş burulma R/I modül ise C eş burulma R modüldür (Xu, 1996).

İspat: Her düz F, R modülü için $Ext_R^1(F,C)=0$ olduğu gösterilmelidir. $0\to M\to X\to F\to 0$ kısa tam dizisi ele alınsın. F düz modül olduğundan M, X' in saf alt modülüdür. $M\cap IX=IM=0$ ve $\dfrac{M+IX}{IX}\cong M$ dir. Böylece aşağıdaki değişmeli kısa tam dizi elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (M+IX)/IX \arrow[r] & X/IX \arrow[r] & X/(M+IX) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$X/M\otimes R/I\cong X/M+IX$ düz R/I modül olduğundan diyagramın alt satırı parçalanandır. Bu nedenle üstteki de parçalananadır. Böylece $Ext_R^1(F,M)=0$ olur ve M eş burulma R-modüldür.

Aşağıdaki Lemma, Lemma 4.3.9' un basit bir sonucudur.

Lemma 4.3.10: R yarı-yerel bir halka olsun. Her yarı-basit R modül eş burulmadır.

İspat: M yarı-basit bir sağ R- modül olsun. $M\cdot J(R)=0$ olduğundan M bir $R/J(R)$ modüldür. R yarı-yerel olduğundan $R/J(R)$ yarı-basittir. Böylece her

$R/J(R)$ modül eş burulmadır. Özel olarak M bir eş burulma $R/J(R)$ -modüldür. Lemma 4.3.9' dan dolayı M bir eş burulma R -modüldür.

Teorem 4.3.11: R halkası için aşağıdakiler denktir.

1) R sağ B -mükemmeldir.

2) R ' nin $J(R)$ ' yi içeren her sağ ideali eş burulmadır.

3) R ve R ' nin maksimal sağ idealleri eş burulmadır.

4) R yarı-yereldir ve $J(R)$ eş burulmadır (Büyükaşık, 2011).

İspat: (1)$\Rightarrow$(2) Teorem 4.3.3 ile R yarı-mükemmeldir ve sonlu üretilmiş yarı-basit modüllerin düz örtüsü projektiftir. Bu nedenle düz örtüler ve sonlu üretilmiş yarı-basit modüllerin projektif örtüsü çakışır.

$J(R) \ll R$ olduğundan $\pi : R \to R/J(R)$ projektif (düz) örtüdür. Lemma 4.3.8 ile $Ker\pi = J(R)$ eş burulma olur. I, $J(R)$' yi içeren sağ ideal olsun. R yarı-yerel olduğundan $I/J(R)$ yarı basit ve sonlu üretilmiştir. Lemma 4.3.10 ile $I/J(R)$ eş burulma R -modüldür.

Eş burulma modüller genişlemeler altında kapalı ve $J(R)$, $I/J(R)$ eş burulma olduğundan I eş burulmadır.

(2)$\Rightarrow$(3) Açıktır.

(3)$\Rightarrow$(1) F düz modül ve I_R, R ' nin maksimal sağ ideali olsun. Hipotezden $Ext_R^1(F,I)=0$ Bu nedenle; $0 \to I \to R \to R/I \to 0$ tam dizisine Hom funktorunun uygulanmasıyla $0 \to Hom(F,I) \to Hom(F,R) \to Hom(F,R/I) \to Ext(F,I)=0$ elde edilir. Böylece R, B -mükemmel halkadır.

(4) $\Rightarrow$(2) I, $J(R)$' nin sağ ideali olsun. R yarı-yerel olduğundan $R/J(R)$ yarı-basittir ve $I/J(R)$ sonlu üretilmiş ve yarı-basittir. Lemma 4.3.10 ile $I/J(R)$ eş burulma R-modüldür. Hipotez ile $J(R)$ de eş burulmadır. Bu nedenle I eş burulmadır. Çünkü eş burulma modüller genişlemeler altında kapalıdır.

(1) $\Rightarrow$(4) Teorem 4.3.3 ile R yarı-mükemmel ve bu nedenle yarı yereldir. (1)$\Rightarrow$(2)' nin ispatından ise $J(R)$ eş burulmadır.

Yerel halkalar için aşağıdaki önerme vardır.

Önerme 4.3.12: R yerel halka olsun. R' nin B-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul $\pi : R \to R/J(R)$ standart epimorfizmasının $R/J(R)$' nin düz örtüsü olmasıdır (Büyükaşık, 2011).

İspat: R, B-mükemmel halka olsun. Teorem 4.3.11 ile $J(R)$ eş burulmadır ve $\pi : R \to R/J(R)$ (Xu, 1996) Önerme 2.1.3 ile düz ön örtüdür. $\pi : F \to R/J(R)$, $R/J(R)$ nin düz örtüsü olsun. (Xu, 1996) deki Teorem 1.2.7 ile F, R' nin direkt toplamıdır. Fakat R ayrıştırılamaz olduğundan $R \cong F$ olur. Bu nedenle $\pi : R \to R/J(R)$, $R/J(R)$' nin düz örtüsüdür.

Tersine $\pi : R \to R/J(R)$ düz örtü olsun. $Ker\pi = J(R)$ eş burulmadır. Bu nedenle Teorem 4.3.11 ile R, B-mükemmel halkadır.

5. GENELLEŞTİRİLMİŞ YARI MÜKEMMEL HALKALAR

Tanım 5.1: Bir R halkası için her basit sağ R-modülün düz B-örtüsü varsa R'ye sağ genelleştirilmiş yarı-mükemmel halka (kısaca G-yarı-mükemmel) denir. Sol genelleştirilmiş yarı-mükemmel halkalar da benzer şekilde tanımlanır. Eğer R halkası hem sağ hem de sol genelleştirilmiş yarı-mükemmel halka ise R'ye genelleştirilmiş yarı-mükemmel halka denir.

Örnekler vermeden önce basit modüllerin düz B-örtülerini inceleyelim.

S bir basit R-modül ve $\psi : F \to S$ S' nin düz B- örtüsü olsun. S basit olduğundan $\phi : R \to S$ epimorfizması vardır. R projektif olduğundan $\phi = \psi \circ f$ olacak şekilde $f : R \to F$ homomorfizması vardır. $Ker\psi \ll F$ olduğundan f bir epimorfizma ve $F \cong R/I$ olacak şekilde I ideali vardır. Bu durumda I' yı içeren bir M maksimal ideali için $S \cong R/M$ olur. Ayrıca $F \cong R/I$ yereldir. Benzer şekilde her devirli sağ R-modülün düz B-örtüsünün yerel olması gerektiği de gösterilebilir.

Örnekler 5.2:

a) Her sağ G-mükemmel halka sağ G-yarı-mükemmeldir.

b) Her düz modülün düz B-örtüsü vardır. Bu nedenle her düzenli halka G-mükemmeldir.

c) Her sağ mükemmel halka sağ G-mükemmeldir ve her sağ yarı-mükemmel halka sağ G-yarı-mükemmel halkadır.

d) Son paragraftan tam sayılar halkası $\mathbb{Z}$' nin G-yarı-mükemmel olmadığı görülebilir (Demirci, 2015).

R' nin bir maksimal sağ idealinin düz B-örtüsü F için, $F \cong R/I$ ve $I \leq M$ olacak şekilde bir sağ I ideali her zaman bulunamayabilir. Aşağıdaki Lemma ek bir koşul altında bu ifadenin doğru olduğunu göstermektedir (Demirci, 2015).

Lemma 5.3: R bir halka olmak üzere M, R' nin maksimal sağ ideali olsun. R sağ G-yarı-mükemmel ise, R/M basit R-modülünün düz B-örtüsü R/I' ya izomorf olacak şekilde M sağ maksimal idealin içerdiği bir I sağ ideali vardır (Demirci, 2015).

Önerme 5.4: R ve S sağ G-yarı-mükemmel halkalar olsun.

a) R' nin her bölüm halkası sağ G-yarı-mükemmeldir.

b) $R \times S$ sağ G-yarı-mükemmeldir (Demirci, 2015).

İspat: a) I, R halkasının keyfi bir ideali olmak üzere $T = R/I$ olsun. Her basit T-modülün düz B- örtüye sahip olduğunu göstermeliyiz. S keyfi bir basit T-modül olsun. Bu taktirde $T/J \cong S$ olacak şekilde T' nin sağ maksimal J ideali vardır. Dolayısıyla $S \cong R/M$ olacak şekilde R halkasının sağ maksimal M ideali vardır. R sağ G-yarı-mükemmel halka olduğundan $f: F \to R/M$ R-modül düz B-örtüsü vardır.

b) $T = R \times S$ ve M basit T modül olsun. $e = (1_R, 0) \in T$ merkezi idempotenttir. $U = Me$ ve $V = M(1-e)$ olmak üzere $M = U \oplus V$ yazılabilir.

M basit T-modül olduğundan genelliği bozmadan $M = U$ kabul edebiliriz. $M(0 \times S) = 0$ olduğundan M bir R-modül yapısına sahiptir. Her R-modül bir T-modül olduğundan M_R basittir. Varsayımdan dolayı M_R' nin $f: F_R \to M_R$ düz B-örtüsü vardır. (Lam, 1991) deki Teorem 4.24 ile F_T' nin düz olduğu gösterilir. $Kerf \ll F_R$ olduğundan $Kerf \ll F_t$ olur. Böylece $f: F_T \to M_T$ M_T'nin düz B-örtüsüdür.

Önerme 5.5: R değişmeli bölge olsun. R'nin G-yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul R'nin yerel olmasıdır (Demirci, 2015).

İspat: ($\Leftarrow$) Açıktır.

($\Rightarrow$) F bir basit modülün düz B-örtüsü olsun. F yereldir ve burulmasızdır. Bu nedenle $R \cong F$ yereldir.

Teorem 5.6: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

(a) R yarı-mükemmeldir.

(b) R yarı-yereldir ve her basit R-modülün düz B-örtüsü vardır.

(c) R yarı-yereldir ve her sonlu üretilmiş R-modülün düz B-örtüsü vardır (Lomp, 1999).

İspat: (a) $\Rightarrow$**(c)** Projektif modüller düz olduğundan sağlanır.

(c) $\Rightarrow$**(b)** Açıktır.

(b)$\Rightarrow$**(a)** R yarı-yerel ve E_i'ler basit R-modüller olmak üzere $R/J(R) = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_n$ olarak yazılabilir. Her basit R modül E_i'lerin birine izomorftur. Hipotez ile her E_i'nin bir L_i düz örtüsü vardır. Böylece $L := L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$, $R/J(R)$'nin düz B- örtüsü olur. Bu nedenle aşağıdaki değişmeli diyagramı elde edilir.

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[dl, "g"'] \arrow[d] & \\ L \arrow[r, "f"'] & R/J(R) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

f küçük epimorfizma ve $g \circ f$ epimorfizma olduğundan $Ker(g) \subseteq Ker(g \circ f) = J(R)$ olur. Bu nedenle R, L düz modülünün projektif örtüsüdür. (Wisbauer, 1991)' deki Teorem 36.4 ile $L \cong R$ ve bu nedenle bütün L_i ler projektif olmalıdır. Böylece her bir basit R-modülün projektif örtüsü vardır ve (Wisbauer, 1991) de ki Teorem 42.6 ile R yarı-mükemmeldir.

Önerme 5.7: R sağ çift taraflı bir halka ve M R' nin maksimal sağ ideali olsun. Eğer R/I ve R/K M' nin içerdiği I ve Kidealleri için R/M'nin düz B-örtüleri ise $R/I \cap K$ da R/M' nin düz B-örtüsü olur (Demirci,2015).

İspat: Sağ çift taraflı halkaların sonlu sayıda saf sağ ideallerinin kesişimi yine saftır. Bu nedenle $R/I \cap K$ düzdür. Bir N sağ ideali için $M/I \cap K + N/I \cap K = R/I \cap K$ olsun.

$M+N=R$, $R/I = M+N/I = M/I + N+I/I$ ve $M/I \ll R/I$ olduğundan $R/I = N+I/I$ ve $N+I=R$ olur. Benzer şekilde $N+K=R$ elde edilir. R sağ çift taraflı halka ve I ile K, R 'de saf olduğundan

$$\begin{aligned} K = RK = (N+I)\cap K = NK + IK \\ \subseteq (N\cap K)+(I\cap K) \\ \subseteq N \end{aligned}$$

ve $R = N+K \subseteq N$ olur. Böylece $M/I\cap K \ll R/I\cap K$ ve $R/I\cap K$, R/M nin düz B -örtüsüdür.

Önerme 5.8: R değişmeli bir halka, S, R ' nin çarpımsal alt kümesi ve $S^{-1}R$ ' nin her maksimal ideali; M, R 'nin maksimal ideali olmak üzere $S^{-1}M$ formunda olsun. R, G -yarı-mükemmel halka ise $S^{-1}R$ de G -yarı-mükemmeldir (Demirci, 2015).

İspat: U, $S^{-1}R$ 'nin maksimal ideali olsun. Varsayımdan dolayı $U = S^{-1}M$ olacak şekilde R ' nin bir M maksimal ideali vardır. $I \leq M$ için R/I , R/M ' nin düz B -örtüsü olsun.

R/I düz B -örtü olduğundan $S^{-1}R/S^{-1}I \cong S^{-1}(R/I)$ düz $S^{-1}R$ -modüldür. R ' nin I ' yı içeren K ideali için $(S^{-1}M/S^{-1}I)+(S^{-1}K/S^{-1}I)=(S^{-1}R/S^{-1}I)$ olsun. $S^{-1}(M+K)=S^{-1}M+S^{-1}K=S^{-1}R$ 'dir ve böylece $(M+K)\cap S \neq \varnothing$ olur. $M\cap S=\varnothing$ olduğundan $M \subsetneq M+K$ ve $M+K=R$ elde edilir. $M/I \ll R/I$ ve $I\subseteq K$ olduğundan $K=R$ ve $S^{-1}K=S^{-1}R$ elde edilir. Bu nedenle $(S^{-1}R/S^{-1}I)$, $(S^{-1}R/S^{-1}M)$ nin düz B -örtüsüdür.

Teorem 5.6 ve önerme 5.8' in sonucu olarak aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 5.9: R bir değişmeli G-yarı-mükemmel halka olsun. R' nin her sonlu sayıda maksimal idealleri $M_1, M_2, ..., M_n$ ve $S = R \setminus \bigcup_{i=1}^{n} M_i$ için $S^{-1}R$ yarı-mükemmeldir (Demirci, 2015).

Aşağıdaki önerme Önerme 4.1.7' nin bir sonucudur.

Önerme 5.10: R sağ G-yarı-mükemmel halka ve $J(R)$ nil olsun. R' nin sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul R' nin sağ Artin olmasıdır (Demirci, 2015).

Aşağıdaki örnekler G-mükemmel ve yarı-mükemmel halkalar sınıfından olmayan G-yarı-mükemmel halka örnekleridir.

Örnekler 5.11:

a) R sağ mükemmel olmayan yarı-mükemmel halka olsun. Teorem 4.1.6 ile R, sağ G-mükemmel olmayan sağ G-yarı-mükemmel halkadır.

b) K bir düzenli halka ve $i = 1,2,3,...$ için $K = K_i$ olmak üzere $R = \prod_{i=1}^{\infty} K_i$ olsun. (Kash, 1982) Bölüm 10.4 ten dolayı R yarı-basit olmayan düzenli halkadır. Bu nedenle R yarı-mükemmel olmayan düzenli halkadır. Bundan dolayı R yarı-mükemmel olmayan G-yarı-mükemmel halkadır (Demirci, 2015).

6. KAYNAKLAR

Alizade, R. , Pancar, A. 1999. Homoloji Cebire Giriş. Samsun.

Amini, A. , Amini, B. , Ershad, M. , Sharif, H. 2007. On generalized perfect rings. Communications in Algebra, 35(3): 953–963.

Amini, A. , Amini, B. , Ershad, M. , Sharif, H. 2008. Rings over which flat covers of finitely genereted modules are projective, Communications in Algebra, 36: 2862–2871.

Amini, B. , Amini, A. , Ershad, M. 2009. Almost-perfect rings and modules, Commun. Algebra, 37: 4227–4240.

Anderson, F. W. , Fuller, K. R. 1992. Rings and Categories of Modules. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

Azumaya, G. 1974. Characterizations of semi-perfect and perfect modules. Math. Z., 140: 95–103.

Bass, H. 1960. Finitistic dimension and homological generalization of semiprimary rings. Trans. Amer. Math. Soc. , 95: 466–488.

Büyükaşık, E. 2012. Rings over which flat covers of simple modules are projective. Journal of Algebra and Its Applications, 11(3).

Büyükaşık, E. , Lomp, C. 2010. When δ-semiperfect rings are semiperfect, Turkish J. Math., 34(3): 317–324.

Çallıalp, F. , Tekir, Ü. 2009. Değişmeli Halkalar ve Modüller. Ankara: Birsen Yayınevi.

Ding, N. , Chen, Jianlog. 1999. On a characterization of perfect rings. Comm. Algebra, 27: 785–791.

Demirci, Y.M. 2015. On Generalizations Of Semiperfect and Perfect Rings, Bull. Iran. Math. Soc. (Kabul edildi).

Faith, C. 1995. Locally perfect commutative rings are those whose modules have maximal submodules. Comm. Algebra 23: 4885–4886

Fieldhouse, D. J. 1985. Semi-perfect and F-semi-perfect modules. Internat. J. Math. & Math. Sci. , 8: 545–548.

Guil Asensio, P.A. , Herzog, I. 2005. Sigma- cotorsion rings, Adv. Math. 191: 11–28.

Hausen, J. , Johnson, J. A. 1983. A new characterization of perfect and semi-perfect rings. Bull. Cal. Math. Soc. , 75: 57–58.

Hamsher, R. M. 1967. Commutative rings over which every module has a maximal submodule. Proc. Amer. Math. Soc. , 18: 1133–1137.

Kasch, F. 1982. Modules and Rings. London Mathematical Society Monographs, 17. London-New York: Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers]. Translated from the German and with a preface by D. A. R. Wallace.

Lam, T. Y. 1991. A First Course in Noncommutative Rings. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag.

Lomp, C. 1999. On semilocal modules and rings. Comm. Algebra, 27(4): 1921–1935.

Nicholson, W. K. 1975. On semiperfect modules. Canad. Math. Bull. , 18: 77–80

Pancar, A. , Türkmen, B.N. 2014. İnjektif Modüllere Giriş. Ankara: Pegem Akademi.

Sandomierski, F.L. 1969. On semiperfect and perfect rings. Proe. Amer. Math. Soc., 21: 205–207.

Varadarajan, K. 1979. Modules with supplements. Pac. J. Math. , 82: 559–564.

Xu, J. 1996. Flat Covers of Modules, Volume 1634 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin

Wisbauer, R. 1991. Foundations of Module and Ring Theory. Philadelphia: Gordon and Breach.

ÖZGEÇMİŞ

Sevil KARACİF 1991 yılında Kırklareli' nde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Samsun' da tamamladı. 2009 yılında girdiği Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nden 2013 yılında mezun oldu. Aynı yıl Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve öğrenimi halen devam etmektedir.