DÜZ GÜÇLÜ ÖRTÜLER

SAMED ÖZKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T.C.

SİNOP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DÜZ GÜÇLÜ ÖRTÜLER

SAMED ÖZKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN

YRD. DOÇ. DR. YILMAZ MEHMET DEMİRCİ

SİNOP – 2017

T.C.

SİNOP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma, jürimiz tarafından 10 / 02 / 2017 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Yılmaz Mehmet DEMİRCİ

Üye : Doç. Dr. Fadime DİRİK

Üye : Doç. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

13/2/2017

Doç. Dr. Turgay KORKUT

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DÜZ GÜÇLÜ ÖRTÜLER

ÖZET

Projektif örtüler ve mükemmel halkalar ilk kez H. Bass tarafından tanımlanmıştır. Her modülün projektif örtüsünün bulunduğu mükemmel halkalar modül teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle bu halkaların genellemeleri kapsamlı olarak incelenmiştir.

Bu çalışmada mükemmel ve yarı-mükemmel halkalarla birlikte bunların genellemeleri olan G-mükemmel, A-mükemmel, B-mükemmel, G-yarı-mükemmel halkalardan, özelliklerinden ve aralarındaki ilişkilerden bahsedilmiştir. Ayrıca bu halkaların düz güçlü örtüler yardımıyla verilen karakterizasyonları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Düz güçlü örtü, Düz B-örtü, Mükemmel halka, A-mükemmel halka, B-mükemmel halka, G-mükemmel halka, G-yarı-mükemmel halka

FLAT STRONG COVERS

ABSTRACT

Projective covers and perfect rings are defined by H. Bass. Perfect rings over which every module has a projective cover is an important subject in the theory of modules. For this reason, generalizations of these rings are extensively studied.

In this work, perfect, semiperfect rings and some of their generalizations including G-perfect, A-perfect, B-perfect and G-semiperfect rings are studied along with their properties and connections in between. Furthermore, the characterizations of these rings using flat strong covers are given.

Key Words: Flat strong cover, Flat B-cover, Perfect ring, A-perfect ring, B-perfect ring, G-perfect ring, G-semiperfect ring

TEŞEKKÜR

Çalışmam boyunca bana her konuda yardımcı olan, her zaman desteğini hissettiren, yapıcı ve yönlendirici fikirleri ile bana daima yol gösteren, yüksek lisansa başlamam konusunda beni cesaretlendiren değerli Hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yılmaz Mehmet DEMİRCİ' ye teşekkür etmeyi borç bilirim.

Tezimin değerlendirilmesinde katkılarını sunan çok değerli hocalarım Doç. Dr. Fadime DİRİK ve Doç. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN' e teşekkür ederim.

Eğitim hayatımın en büyük mimarları olan, her türlü fedakarlığı gösteren, sevgi ve desteklerini her zaman hissettiğim aileme, annem Mürvet ÖZKAN' a, babam Bahattin ÖZKAN' a, değerli kardeşlerime ve yanımda olan tüm dostlarıma sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

SEMBOLLER

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\leq$	: Alt grup, alt modül
$\ll$	: Küçük alt modül
$A \times B$	: A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı
$Kerf$	: $f: M \to N$ homomorfizmasının çekirdeği
$\operatorname{Im} f$	: $f: M \to N$ homomorfizmasının görüntüsü
$N \underset{\max}{\leq} M$	: N , M ' nin maksimal alt modülü
$M \cong N$	: M , N ' ye izomorf
M_R	: M sağ R -modül
${}_R M$	: M sol R -modül
A/B	: A modülünün B alt modülüne göre bölüm modülü
$A \otimes_R B = A \otimes B$	: A sağ, B sol R -modüllerinin tensör çarpımı
$f \otimes g$	: f ve g homomorfizmalarının tensör çarpım homomorfizması
1_R	: R ' nin çarpmaya göre birim elemanı
$\operatorname{Rad} M$	: M modülünün radikali

$J(R)$	: R halkasının radikali
$Hom(A,B)$	: A modülünden B modülüne homomorfizmalar kümesi
$\sum_{i\in I} A_i$	: $\{A_i\}_{i\in I}$ alt modüller ailesinin toplamı
$\bigoplus_{i\in I} A_i$	: $\{A_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin direkt toplamı
$\prod_{i\in I} A_i$	: $\{A_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin direkt çarpımı
$F^{(I)}$	: F modülünün I indisine göre direkt toplamı
F^{I}	: F modülünün I indisine göre direkt çarpımı
$T(A)$	: A grubunun burulma kısmı
ACC	: Artan zincir koşulu
DCC	: Azalan zincir koşulu
$R[x]$	: Katsayıları R ’ den alınan polinomlar halkası
$R[[x]]$	: Katsayıları R ’ den alınan kuvvet serisi halkası

ŞEKİLLER

Sayfa No

1. GİRİŞ

Bu çalışmada kullanılan tüm halkalar birimli, birleşmeli ve aksi belirtilmedikçe bütün modüller üniter sağ R -modüldür. Halka ve modül teorisi ile ilgili burada verilmeyen bilgiler (Lam, 1991), (Wisbauer, 1991), (Anderson ve Fuller, 1992), (Xu, 1996), (Lam, 1999)' de bulunabilir.

Bu tezde mükemmel ve yarı-mükemmel halkaların genellemelerinden bahsedilmiş, düz güçlü örtüler ve özellikleri incelenmiştir.

Projektif örtüler ve sağ mükemmel halkalarla ilgili ilk çalışma H. Bass tarafından yapılmıştır. (Bass, 1960)' da mükemmel halka her modülün projektif örtüsü bulunan halka olarak tanımlanmıştır. Sağ mükemmel halkaların ilk karakterizasyonları da aynı çalışmada verilmiştir. Bu halkaların ve özelliklerinin incelendiği (Sandomierski, 1968), (Azumaya, 1974), (Nicholson, 1975), (Varadarajan, 1979), (Hausen ve Johnson, 1983), (Fieldhouse, 1985), (Ding ve Chen, 1999), (Lomp, 1999) çalışmalar konunun önemini göstermektedir.

Bu çalışma 6 bölümden oluşmaktadır.

Çalışmanın ikinci bölümünde halkalar ve modüllerle ilgili genel bilgiler verilmiştir. Tensör çarpımı verilerek düz modül tanımlanmıştır.

Üçüncü bölümde, mükemmel halkaların tanımı verilip (Bass, 1960)' a göre bir M modülünün projektif örtüsü tanımlanmıştır. Projektif örtü üzerinden yarı-mükemmel halkaların homolojik tanımları verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde ilk olarak χ -örtü tanımlanmış daha sonra Enochs (1981) anlamında düz örtüden bahsedilmiştir. Projektif örtüde ele alınan modülün özelliği değiştirilip buradan yola çıkarak Amini (2007)' ye göre düz B -örtü tanımlanmıştır. Düz B -örtü tanımından yola çıkılarak genelleştirilmiş mükemmel halkalar ve özel olarak A -mükemmel ve B -mükemmel halkalar tanımlanarak bunlarla ilgili teorem ve örneklere yer verilmiştir. Genelleştirilmiş mükemmel halkalar tanımında yer alan her M modülü yerine her basit M modülünün düz B - örtüsünün varlığı incelenmiştir. Böylece genelleştirilmiş yarı-mükemmel halkalar tanımlanmıştır.

Her modül dördüncü bölümde ele alınan bir düz B - örtüye sahip olmak zorunda değildir. Bir modülün bir düz B-örtüsü bulunması da bu örtünün bir düz örtü olmasını gerektirmez. Bu düşünceyle beşinci bölümde (Demirci, 2016) de verilen düz örtülerin aynı zamanda düz B-örtü olduğu durum araştırılmıştır.

Son bölümde ise kaynaklara yer verilmiştir.

2.GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezde kullanılacak tanımlar, teoremler ve bunlarla ilgili örnekler verilecektir. Bahsi geçen halkalar ve modüllerle ilgili daha çok bilgi için (Wisbauer, 1991), (Lam, 1991), (Anderson ve Fuller, 1992), (Lam, 1999) kaynaklarına bakılabilir.

2.1. Halkalar ve Modüller

Tanım 2.1.1: R boş kümeden farklı bir küme ve R üzerinde tanımlı ikili işlemler "$+$" ve "$\bullet$" olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(R,\ +,\ \bullet)$ cebirsel yapısına halka denir.

(H_1**)** R toplama işlemine göre değişmeli gruptur.

(H_2**)** Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği sağlanır.

Ayrıca;

(H_3**)** R halkasında çarpma işlemi, birleşme özelliğini sağlarsa halkaya birleşmeli halka denir.

(H_4**)** Her $x \in R$ için $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$ olacak şekilde $1 \in R$ varsa halkaya birimli halka denir.

Bu çalışmada kullanılan tüm halkalar birimli ve birleşmeli halkalar olarak ele alınacaktır.

Tanım 2.1.2: R bir halka ve $\varnothing \neq I \subset R$ olsun.

(I_1**)** Her $a, b \in I$ için $a - b \in I$

(I_2**)** Her $a \in I$ ve her $r \in R$ için $ar \in I$ ($ra \in I$) ise I ' ya R ' nin bir sağ (sol) ideali denir. Hem sol hem de sağ ideale iki taraflı ideal veya kısaca ideal denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.3: R değişmeli bir halka ve I sıfırdan ve halkanın kendisinden farklı bir ideali olsun. $x.y \in I$ olması $x \in I$ ya da $y \in I$ olmasını gerektiriyorsa I ' ya R ' nin bir asal ideali denir.

Tanım 2.1.4: R bir halka, $(A,+)$ değişmeli grup olsun.

$\bullet: A\times R \to A,\ \bullet((a,r)) = ar$

şeklinde tanımlanan fonksiyon her $r,s\in R$ ve her $a,b\in A$ için

(1) $(a+b)r = ar+br$

(2) $a(r+s) = ar+as$

(3) $a(rs) = (ar)s$

şartlarını sağlarsa A' ya bir sağ R modül denir.

Ayrıca;

(4) Her $a\in A$ için $a1_R = a$ oluyorsa A' ya bir üniter sağ R-modül denir.

Benzer şekilde sol R-modül tanımı da verilir.

Bu çalışmada modül denildiğinde üniter sağ R-modüller kastedilecektir.

Örnekler 2.1.5:

(1) Her A değişmeli grubu bir üniter $\mathbb{Z}$-modüldür.

(2) Her R halkası, $R\times R\to R$ fonksiyonu olarak R' deki çarpma işlemi ile kendi üzerinde bir modül olur.

(3) I, R halkasının bir sağ ideali ise R' deki çarpım ar alınırsa I bir sağ R-modül olur.

Tanım 2.1.6: R bir halka ve A' da R-modül olsun. $\emptyset\neq B\subseteq A$ alt kümesi A' daki işlemlere göre bir R-modül yapısına sahipse B' ye A' nın bir alt modülü denir ve $B\leq A$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.7: R bir halka ve $f: A\to B$' ye R-modül homomorfizması olsun. Bu durumda $\operatorname{Im} f$, B' nin alt modülüdür.

Örnek 2.1.8: $\{B_i : i \in I\}$ bir A modülünün alt modülleri ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{i\in I} B_i$, A' nın bir alt modülüdür.

İspat: $\{B_i : i \in I\}$ bir A modülünün alt modülleri ailesi olsun.

$x, y \in \bigcap_{i\in I} B_i$ için $x - y \in \bigcap_{i\in I} B_i$ $(?)$

$x, y \in \bigcap_{i\in I} B_i \Rightarrow$ her $i \in I$ için $x, y \in B_i \Rightarrow$ her $i \in I$ için $x - y \in B_i \Rightarrow x - y \in \bigcap_{i\in I} B_i$

Her $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, her $r \in R$ için $xr \in \bigcap_{i\in I} B_i$

$x \in \bigcap_{i\in I} B_i$, $r \in R \Rightarrow$ her $i \in I$ için $x \in B_i$, $r \in R \Rightarrow$ her $i \in I$ için $xr \in B_i \Rightarrow xr \in \bigcap_{i\in I} B_i$

olup $\bigcap_{i\in I} B_i \leq A$' dır.

Tanım 2.1.9: R bir halka, A bir R modül, $X \subseteq A$ alt kümesi olsun. Bu durumda A' nın X ' i kapsayan alt modüllerinin kesişimi olan alt modüle X tarafından üretilen alt modül denir ve

$$\langle X \rangle := \bigcap_{\substack{X \subseteq B \\ B \leq A}} B \leq A$$

Tanım 2.1.10: $N \leq M$ ve $N \neq M$ olsun. M modülünün N ' yi içeren alt modülü bulunmuyorsa, N ' ye M ' nin maksimal alt modülü denir. Başka bir deyişle, $N \leq K \leq M$ durumu sadece $K = M$ ve $K = N$ için gerçeklenirse, N ' ye M modülünün maksimal alt modülü denir.

R halkasının I_R sağ ideali R_R modülünde maksimal alt modül ise, I ' ya R halkasının maksimal sağ ideal denir.

Tanım 2.1.11: Sıfırdan ve kendisinden başka alt modülü bulunmayan, sıfırdan farklı modüle basit modül denir.

A bir R-modül, M ve N, A' nın alt modülleri olsun. M ve N' nin toplamı $M+N$; $m \in M$, $n \in N$ olmak üzere $m+n$ şeklindeki tüm elemanların kümesidir. $M+N$, A' nın M ve N' yi içeren en küçük alt modülüdür. Bu düşünceyi genelleyerek M_i alt modüllerinin toplamı $\left(\sum_{i\in I} M_i\right)$, her $i \in I$ için $x_i \in M_i$ ve x_i' lerin hemen hemen hepsi (sonlu sayıda x_i hariç) sıfır olmak üzere $\sum_{i\in I} x_i$ şeklindeki tüm elemanların kümesi olarak tanımlansın. $\sum_{i\in I} M_i$, A' nın *her* $i \in I$ için M_i alt modüllerini içeren en küçük alt modüldür.

Tanım 2.1.12: $\{M_k \mid k \in K\}$, M modülünün alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu alt modüllerin elemanlarının toplamı şeklinde gösterilebilen, yani $m = m_{k_1} + m_{k_2} + \cdots m_{k_n}$ şeklinde yazılabilen $m \in M$ elemanlarının oluşturduğu küme M modülünün bir alt modülüdür ve $\sum_{k\in K} M_k$ ile gösterilir. $\sum_{k\in K} M_k$ alt modülüne $\{M_k \mid k \in K\}$ alt modüller ailesinin toplamı denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.1.13: M bir modül $\{M_k \mid k \in K\}$ da M' nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Her $m \in M$ elemanı tek türlü olarak M_k alt modüllerinin elemanlarının toplamı şeklinde, yani $m = m_{k_1} + m_{k_2} + \cdots + m_{k_n}$, $m_{k_i} \in M_{k_i}$ şeklinde yazılabilirse M' ye M_k alt modüllerinin iç direkt toplamı denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.1.14: M bir R-modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$ M modülünün alt modüllerinin bir ailesi olsun. M' nin $\{M_i\}_{i\in I}$ ailesinin iç direkt toplamı olması için gerek ve yeter koşul

(1) $M = \sum_{i\in I} M_i$ ve

(2) Her $i \in I$ için $M_i \cap \left(\sum_{i\neq j} M_j\right) = 0$ olmasıdır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.15: M_1 ve M_2 modülleri M' nin alt modülleri olsun. $M_1 + M_2 = M$ ve $M_1 \cap M_2 = 0$ oluyorsa $M = M_1 \oplus M_2$ şeklinde yazılır ve M_1 (M_2) modülüne M modülünün bir direkt toplam terimi denir.

Tanım 2.1.16: $I \neq \varnothing$ olmak üzere A_i modüllerinin bir ailesi $\{A_i\}_{i \in I} = \{A_i : i \in I\}$ olsun. Her $i \in I$ için $\alpha(i) \in A_i$ ile tanımlı $\alpha : I \to \bigcup_{i \in Ai} A_i$ fonksiyonlarının kümesine $\{A_i : i \in I\}$ ailesinin direkt çarpımı denir ve $\prod_{i \in I} A_i$ ile gösterilir.

$$\prod_{i \in I} A_i = \{\alpha : \alpha : I \to \bigcup_{i \in Ai} A_i \text{ , her } i \in I \text{ } için \text{ } \alpha(i) \in A_i \}$$

Tanım 2.1.17: Lineer bağımsız $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ kümesi tarafından üretilmiş M modülüne tabanı $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olan serbest modül denir.

Örnek 2.1.18: Her vektör uzayı bir serbest modüldür. Çünkü her vektör uzayının bir bazı vardır.

Örnek 2.1.19: Her R halkası kendi üzerinde bir serbest modüldür. Taban olarak $\{1_R\}$ alınabilir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.20: R bir halka olmak üzere M ve N, R-modüller olsun. Bir $f : M \to N$ fonksiyonu her m, $m' \in M$ için, $f(m+m') = f(m) + f(m')$, her $r \in R$ ve her $m \in M$ için, $f(rm) = rf(m)$ koşullarını sağlıyorsa, f ' ye modül homomorfizması denir. Bir homomorfizma bire-bir ise monomorfizma, örten ise epimorfizma, hem bire-bir hem de örten ise izomorfizma denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.21: P bir sağ R-modül olsun. Her $g : R \to X$ epimorfizma ve her $\alpha : P \to X$ homomorfizması için $\alpha = g\beta$ olacak şekilde bir $\beta : P \to R$ homomorfizması bulunursa P ' ye R ' ye göre projektif (R-projektif) denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.1.22: P bir R-modül olsun. Her $f : A \to B$ epimorfizması ve her $g : P \to B$ homomorfizması için $g = fh$ olacak şekilde bir $h : P \to A$ homomorfizması bulunursa P ' ye projektif modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Sonuç 2.1.23: Her serbest modül projektiftir. Örneğin; bütün vektör uzayları projektiftir.

Teorem 2.1.24: P ’ nin projektif olması için gerek ve yeter koşul bir serbest modülün direkt toplam terimine izomorf olmasıdır.

Tanım 2.1.25: I bir R -modül olsun. Her $\alpha : A \to B$ monomorfizma ve her $\beta : A \to I$ homomorfizması için $\beta = h\alpha$ olacak şekilde bir $h : B \to I$ homomorfizması bulunursa I ’ ya injektif modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.1.26: M , R halkası üzerinde modül olsun. $N \leq M$ alt modülü için $S + N = M \Rightarrow N = M$ oluyorsa $S \leq M$ alt modülüne M modülünün küçük alt modülüdür denir ve $S \ll M$ ile gösterilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.1.27: Sonlu sayıda küçük alt modülün toplamı da küçüktür (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.1.28: R halkasının tüm maksimal ideallerinin kesişimine R ’ nin Jacobson Radikali denir ve $J(R)$ ile gösterilir (Lam, 1991).

Bir R halkası için R ’ nin Jacobson radikali

$$\begin{aligned} J(R) &= \sum \{ L \leq R : L \ll R \} \\ &= \bigcap \{ K : K \underset{\max}{\leq} R \} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır ve $J(R)$, R ’ nin bir çift taraflı idealidir. Bundan sonra kısaca $J = J(R)$ şeklinde gösterilecektir.

Önerme 2.1.29: M bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(a) M , basit alt modüller ailesinin bir direkt toplamıdır.

(b) M , toplamı M olan basit alt modüller ailesine sahiptir.

(c) M ’ nin her alt modülü M ’ nin bir direkt toplam terimidir.

Tanım 2.1.30: Yukarıdaki önermede denk koşullardan herhangi birini sağlayan M modülüne yarı-basit modül denir. Kendi üzerinde bir sağ R -modül olarak yarı-basit olan halkaya (sağ) yarı-basit halka denir. Benzer tanım sol yarı-basit halkalar için verilebilir (Pancar ve Türkmen, 2014).

Tanım 2.1.31: Bir R halkasının bir tane maksimal ideali varsa R ’ ye yerel halka denir (Lam, 1991).

Tanım 2.1.32: Bir R halkası için R/J yarı-basit oluyorsa R ’ ye yarı-yerel halka denir (Lam, 1991).

Teorem 2.1.33: Her R yerel halkası yarı-yereldir (Lam, 1991).

Tanım 2.1.34: Her $a \in R$ için $a = aba$ koşulunu sağlayan $b \in R$ varsa R halkasına düzenli (regüler) halka denir (Lam, 1991).

Tanım 2.1.35: M bir R -modül olsun. M ’ nin alt modüllerinin $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq ...(K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 ...)$ şeklinde her bir artan (azalan) zinciri için $n \geq m$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $K_n = K_m$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}^+$ bulunuyorsa M ’ ye artan (azalan) zincir koşulunu sağlıyordur denir (Pancar ve Türkmen, 2014).

Tanım 2.1.36: Alt modülleri için artan zincir koşulunu (kısaca ACC) sağlayan modüle Noether modülü denir. Kendi üzerinde bir sağ R -modül olarak Noether olan halkaya sağ Noether halkası denir (Pancar ve Türkmen, 2014).

Örnek 2.1.37: $\mathbb{Z}$ bir noether halkasıdır.

Tanım 2.1.38: Alt modülleri için azalan zincir koşulunu (kısaca DCC) sağlayan modüle Artin modülü denir. Kendi üzerinde bir sağ R -modül olarak Artin olan halkaya sağ Artin halkası denir (Lam, 1991).

Örnek 2.1.39: $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ bir Artin modülüdür. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ve $n \neq 0$ olmak üzere $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkaları Artindir.

Tanım 2.1.40: R bir halka ve $x \in R$ için $x^n = 0$ koşulunu sağlayacak şekilde n pozitif tamsayısı varsa x ’ e nilpotent eleman denir.

Tanım 2.1.41: R bir halka ve $x \in R$ için $x^2 = x$ ise x ’ e idempotent eleman denir. 0_R ve 1_R idempotent elemanlardır.

Tanım 2.1.42: I , R halkasının bir ideali ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I^k = 0$ oluyorsa I ’ ya nilpotent ideal denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.1.43: I , R halkasının bir ideali ve I ’ daki her eleman nilpotent ise I ’ ya nil ideal denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.1.44 (Hopkins): R bir halka ve $J = J(R)$ olsun. R halkasının sağ Artin olması için gerek ve yeter koşul R ’ nin sağ Noether, J ’ nin nilpotent ve R/J ’ nin yarı-basit olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

2.2. Tensör Çarpımı ve Düz Modüller

Tanım 2.2.1: A_R bir sağ R -modül ve ${}_RB$ bir sol R -modül olmak üzere tabanı $A\times B$ kümesinden oluşan

$$F = \left\{ \sum_{i\in I} n_i(a_i, b_i) \mid n_i \in \mathbb{Z}, a_i \in A, b_i \in B \right\}$$

serbest abel grubunu alınsın. Yine $a, a_1, a_2 \in A,\ b, b_1, b_2 \in B$ ve $r \in R$ olmak üzere tüm mümkün

$$(a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b)$$

$$(a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2)$$

$$(ar, b) - (a, rb)$$

elemanlarının ürettiği alt grup K olsun. F/K bölüm grubuna A_R ve ${}_RB$ modüllerinin tensör çarpımı denir. Bu grup $A\otimes B$ ile gösterilir. $A\otimes B$ grubu $(a,b)+K$ şeklindeki elemanlardan oluşur. Bu elemanlar $a\otimes b$ ile gösterilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.2.2: A_R bir sağ, ${}_RB$ bir sol R -modül ve C bir abel grubu olsun. $f: A\times B \to C$ fonksiyonu her $a, a_1, a_2 \in A$ ve $b, b_1, b_2 \in B$ ve $r \in R$ için

(1) $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$

(2) $f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2)$

(3) $f(ar,b)=f(a,rb)$ eşitliklerini sağlarsa, f ' ye bilineer fonksiyon denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.3: A_R , ${}_R B$ modüller, C bir abel grubu ve $f: A\times B \to C$ bir bilineer fonksiyon ise, $f = ge$ olacak şekilde tek bir $g: A\otimes B \to C$ homomorfizması bulunur (Alizade ve Pancar, 1999).

Sonuç 2.2.4: $f: A\times B \to C$ bir bilineer fonksiyonsa, her $a\in A,\ b\in B$ için $g(a\otimes b)=f(a,b)$ olacak şekilde tek bir $g: A\otimes B \to C$ homomorfizması vardır (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.2.5: Her M , M' sol R-modülleri ve her $f: M \to M'$ monomorfizması için $(1_u \otimes f)(u\otimes m)=u\otimes f(m)$ ile tanımlı $1_u\otimes f: U\otimes M \to U\otimes M'$ homomorfizması bir monomorfizma oluyorsa U sağ modülüne düz modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Örnek 2.2.6: Her projektif modül düz modüldür.

Tanım 2.2.7: $A_R \le \mathrm{B}_R$ ve $i: A \to B$ gömme homomorfizması olsun. Her ${}_R M$ için $(i\otimes 1_M)(a\otimes m)=a\otimes m$ ile tanımlı $i\otimes 1_M : A_R \otimes {}_R M \to B_R \otimes {}_R M$ homomorfizması bir monomorfizma oluyorsa A, B ' de saftır denir (Wisbauer, 1991).

Lemma 2.2.8: M ' nin düz olması için gerek ve yeter koşul $Hom_{\mathbb{Z}}(M,\ {}^{\mathbb{Q}}\!/\!_{\mathbb{Z}})$ ' nin injektif olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

Önerme 2.2.9: I bir indis kümesi olmak üzere $\{M_i : i\in I\}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigoplus_{i\in I} M_i$ ' nin düz olması için gerek ve yeter koşul her $i\in I$ için M_i ' nin düz olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.10: R -modüllerin bir $\ldots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \ldots$ dizisi ve bunlar arasında da R -modül homomorfizmaları verilsin. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $\operatorname{Im} f_{n-1} = Ker\, f_n$ ise bu dizi M_n ' de tamdır denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Belli bir yerden sonra (önce) modüller hep 0 olabilir, özel olarak; $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ şeklindeki diziye kısa tam dizi denir.

Kısa tam dizide f ’ nin monomorfizma, g ’ nin epimorfizma ve $\operatorname{Im} f = Ker\, g$ olduğu tamlık tanımından anlaşılır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Örnek 2.2.11:

(1) $h: A \to A \oplus B$, $h(a) = (a,0)$ ve $g: A \oplus B \to B$, $g(a,b) = b$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{h} A \oplus B \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

dizisi bir kısa tam dizidir. Ayrıca bu dizi parçalanan kısa tam dizi olarak da ifade edilir.

(2) $N \leq M$ için $p: N \to M$, $p(n) = m$ ve $t: M \to M/N$, $t(m) = m + N$ olmak üzere

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{p} M \xrightarrow{t} M/N \longrightarrow 0$$

dizisi bir kısa tam dizidir.

Tanım 2.2.12: M ve L bir sağ R -modül olsun.

(1) M ’ nin X alt kümesi için $M = \sum_{x \in X} xR$ ise X ’ e M ’ nin bir üreteç kümesi denir.

(2) Sonlu bir üreteç kümesi olan modüle sonlu üretilmiş modül denir.

(2)’ ye denk olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

$x_1, x_2, ..., x_k \in M$ olmak üzere $M = x_1R + x_2R + ... + x_kR$ olması için gerek ve yeter koşul $x_k \in \operatorname{Im} f$ olan her $f: L \to M$ homomorfizmasının epimorfizma olmasıdır.

(3) Bir modülün (sağ idealin) tek elemanlı bir üreteç kümesi varsa bu modüle (sağ ideale) devirli modül (sağ ideal) denir (Xu, 1996).

Tanım 2.2.13: Bir sonlu üretilmiş M modülü için F sonlu üretilmiş serbest modül olmak üzere her $0 \longrightarrow K \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$ tam dizisinde K ’ da sonlu üretilmiş oluyorsa M ’ ye sonlu gösterilmiş denir (Xu, 1996).

Lemma 2.2.14: K , V , V' sağ R -modüller, V düz ve $0 \longrightarrow K \longrightarrow V \longrightarrow V' \longrightarrow 0$ tam olsun. V' nin düz olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş $I \leq {}_R R$ ideali için $KI = K \cap VI$ olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

Sonuç 2.2.15: X_R ' nin R_R ' de saf olması için gerek ve yeter koşul her $I \leq {}_R R$ için $XI = X \cap RI$ olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

Lemma 2.2.16: M bir sağ R -modül olsun. M ' nin düz olması için gerek ve yeter koşul her (sonlu üretilmiş) I sol ideali için $\mu_I(m \otimes a) = ma$ ile tanımlı $\mu_I : M \otimes {}_R I \to MI$, $\mathbb{Z}$ -epimorfizmasının bire bir olmasıdır (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 2.2.17: Her sonlu üretilmiş sağ ideali sonlu gösterilmiş olan halkaya sağ bağdaşık halka denir (Xu, 1996).

Teorem 2.2.18: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

(a) Düz sağ R -modüllerin her direkt çarpımı düzdür.

(b) Her I indis kümesi için R_R^I düzdür.

(c) R sol bağdaşıktır (Anderson ve Fuller, 1992).

Tensör çarpım ve düz modüllerle ilgili detaylı bilgi için (Lam, 1991), (Alizade ve Pancar, 1999) kaynaklarına bakılabilir.

3. MÜKEMMEL ve YARI-MÜKEMMEL HALKALAR

Bu bölümde mükemmel halkalar ve yarı-mükemmel halkaların önceden verilmiş bazı özellikleri incelenmiştir.

3.1. Mükemmel Halkalar

Tanım 3.1.1: R halkasının bir A alt kümesine, elemanlarının her $\{a_1, a_2, ...\} \subseteq A$ dizisi için $a_n \cdot a_{n-1} \cdot ... \cdot a_2 \cdot a_1 = 0$ $(a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_{n-1} \cdot a_n = 0)$ olacak şekilde bir $n \geq 1$ tamsayısı varsa sağ (sol) T-nilpotent denir (Bass, 1960).

Teorem 3.1.2: Her $I \subseteq R$ sağ ideali için aşağıdakiler denktir.

(1) I sağ T-nilpotenttir.

(2) Her $M_R \neq 0$ modülü için $MI \neq M$

(2') Her $M_R \neq 0$ modülü için $MI \ll M$

(3) Her N_R modülü için $ann_N(I) = 0 \Rightarrow N = 0$' dır.

Burada $ann_N(I) = \{x \in N \mid xI = 0\}$ ile tanımlıdır.

(4) Sayılabilir üretilmiş serbest $F = R^{(\mathbb{N})}$ modülü için $FI \ll F$' dir (Lam, 1991), (Anderson ve Fuller, 1992).

Tanım 3.1.3: R yarı-yerel bir halka ve J sağ (sol) T-nilpotent ise R halkasına sağ (sol) mükemmel halka denir (Lam, 1991).

Örnek 3.1.4: Her sağ Artin halkası sağ mükemmeldir..

Mükemmel halkaların projektif örtü ile ilgili karakterizasyonlarına geçmeden önce projektif örtü tanımını verelim.

Tanım 3.1.5: Bir sağ M R-modülü için, P bir projektif modül ve $Ker\theta \ll P$ olacak şekilde $\theta : P \rightarrow M$ epimorfizması (varsa) θ' ya (aynı zamanda P' ye) M' nin projektif örtüsü denir (Lam, 1991).

Önerme 3.1.6: P' bir projektif R-modül ve $\theta' : P' \rightarrow M$ bir epimorfizma olsun. $\theta\alpha = \theta'$ ile tanımlı $\theta : P \rightarrow M$ bir projektif örtü ise $\alpha : P' \rightarrow P$ parçalanan epimorfizma olur. Eğer $\theta': P' \to M$ ' de M ' nin bir projektif örtüsü ise α bir izomorfizma olur (Lam, 1991).

Teorem 3.1.7: R birleşmeli halkası için aşağıdakiler denktir.

(1) R sağ mükemmeldir.

(2) R yarı-yerel ve J sağ T -nilpotenttir.

(3) R yarı-yerel ve sıfırdan farklı her sağ R -modülün bir maksimal alt modülü vardır (Xu,1996).

(4) Her sağ R modülün projektif örtüsü vardır (Lam, 1991).

Teorem 3.1.8: Her R halkası için aşağıdakiler denktir.

(1) R sağ mükemmel halkadır.

(2) R temel idealler üzerinde DCC' yi sağlar.

(3) Her N_R modülü devirli alt modüller üzerinde DCC' yi sağlar (Lam, 1991).

Sonuçlar 3.1.9:

(1) Her sağ R -modül, sonlu üretilmiş alt modüller üzerinde DCC' yi sağlar.

(2) R sonlu üretilmiş sağ idealler üzerinde DCC' yi sağlar.

(3) Her sağ R -modül devirli alt modüller üzerinde ACC' yi sağlar (Lam, 1991).

Önerme 3.1.10: Bir değişmeli R halkasının mükemmel olması için gerek ve yeter koşul R ' nin, maksimal idealleri T -nilpotent olan değişmeli yerel halkaların sonlu direkt çarpım olmasıdır (Lam, 1991).

Sonuç 3.1.11: R mükemmel halka ise her $I \subseteq R$ ideali için R/I bölüm halkası da mükemmeldir(Lam, 1991).

3.2. Yarı-Mükemmel Halkalar

Tanım 3.2.1: R/J ’ nin her $e+J$ idempotent elemanı için $a_e + J = e + J$ olacak şekilde bir $a_e \in R$ idempotent elemanı bulunursa R/J ’ nin idempotent elemanları R ’ den geliyor denir.

Tanım 3.2.2: R halkası yarı-yerel ve R/J ’ nin idempotent elemanları R ’den geliyorsa bu halkaya yarı mükemmel halka denir (Lam, 1991).

Teorem 3.2.3: Bir değişmeli R halkasının yarı mükemmel olması için gerek ve yeter koşul R ’ nin değişmeli yerel halkaların sonlu direkt çarpımı olmasıdır (Lam, 1991).

Teorem 3.2.4: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

(a) R yarı-mükemmeldir.

(b) Her sonlu üretilmiş R -modülün projektif örtüsü vardır.

(c) Her basit R -modülün projektif örtüsü vardır (Wisbauer, 1991).

Sonuç 3.2.5: R yarı-mükemmel halka ise her $I \subseteq R$ ideali için R/I bölüm halkası da yarı-mükemmel olur (Lam, 1991).

4. MÜKEMMEL ve YARI-MÜKEMMEL HALKALARIN GENELLEMELERİ

Bu bölümde G-mükemmel, A-mükemmel, B-mükemmel, G-yarı-mükemmel halkalar ve örtülerin özelliklerinden bahsedilmiş ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Ayrıca bölümle alakalı olan yeni tanım ve teoremlere de yer verilmiştir.

4.1. Örtüler

χ, sol R-modüllerin bir sınıfı olsun. χ izomorfizmalar altında kapalı, yani $M \in \chi$ ve $N \cong M$ iken $N \in \chi$ olsun. Ayrıca χ' in sonlu direkt toplamlar ve direkt toplam terimleri altında kapalı olduğu, diğer bir deyişle $M_1, M_2, ..., M_t \in \chi$ ise $M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_t \in \chi$ ve $M_1 = N \oplus L$ ise $N, L \in \chi$ olduğu kabul edilsin.

Tanım 4.1.1: Bir M R-modülü ve $\mathrm{X} \in \chi$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir $\varphi : \mathrm{X} \to M$ homomorfizması varsa φ' ye (aynı zamanda X' e) M' nin bir χ-örtüsü denir.

(1) $\mathrm{X}' \in \chi$ olmak üzere her $\varphi' : \mathrm{X}' \to M$ homomorfizması için $\varphi' = \varphi f$ olacak şekilde $f : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ homomorfizması vardır veya buna denk olarak her $\mathrm{X}' \in \chi$ için $Hom_R(\mathrm{X}', \mathrm{X}) \to Hom_R(\mathrm{X}', M) \to 0$ dizisi tamdır.

(2) f, X'in $\varphi = \varphi f$ koşulunu sağlayan bir endomorfizması ise f otomorfizmadır.

Eğer sadece (1) şartı sağlanırsa $\varphi : \mathrm{X} \to M$ homomorfizmasına bir χ-önörtü denir.

Bir modülün χ-örtüleri (varsa) izomorfizma altında tektir. Aşağıdaki teorem χ-örtülerin tekliğiyle ilgilidir.

Teorem 4.1.2: M bir R-modül olsun. $i = 1, 2$ için $\varphi_i : \mathrm{X}_i \to M$' nin farklı χ-örtüleri ise $\mathrm{X}_1 \cong \mathrm{X}_2$' dır (Xu, 1996).

Teorem 4.1.3: M' nin, χ-örtüsü olduğu ve $\varphi : \mathrm{X} \to M$' nin bir χ-önörtü olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\mathrm{X} = \mathrm{X}_1 \oplus K$, $\varphi|_{\mathrm{X}_1} : \mathrm{X}_1 \to M$ bir χ-örtü ve $K \subset \ker(\varphi)$ olacak şekilde $\mathrm{X}_1, K \leq \mathrm{X}$ vardır (Xu, 1996).

Aşağıdaki teoremler χ -örtülerin direkt toplam ve direkt çarpım altında iyi özelliklere sahip olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.4: χ keyfi direkt çarpımlar altında kapalı ve her i için , $\varphi_i : \mathrm{X}_i \to M_i$ M_i ' nin χ -önörtüsü olsun. Bu durumda φ_i ' lerin direkt çarpımı $\prod \varphi_i : \prod \mathrm{X}_i \to \prod M_i$ bir χ -önörtüdür (Xu, 1996).

Teorem 4.1.5: $i = 1, 2, ..., n$ için $\varphi_i : \mathrm{X}_i \to M_i$ bir χ -örtü ise $\oplus\varphi_i : \oplus\mathrm{X}_i \to \oplus M_i$ ' de bir χ -örtüdür (Xu, 1996).

Γ ile projektif R -modüllerin sınıfı gösterilsin. Aşağıdaki teorem projektif örtü ve Γ -örtü kavramlarının uyumlu olduğunu göstermektedir.

Teorem 4.1.6: M sağ R -modül ve $P \in \Gamma$ olmak üzere $\varphi : P \to M$ homomorfizması için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $\varphi : P \to M$ Γ -örtüdür.

(2) $\varphi : P \to M$ projektif örtüdür.

İspat: (1)$\Rightarrow$(2) İlk olarak φ ' nin örten olduğu gösterilsin. Yine $\varphi : P \to M$ bir Γ -örtü olsun. F projektif olmak üzere bir $f : F \to M$ epimorfizması vardır. F projektif olduğundan $F \in \Gamma$ ' dir ve örtülerin birinci özelliğinden $\varphi g = f$ olacak şekilde $g : F \to P$ homomorfizması bulunur. f epimorfizma olduğundan φg epimorfizmadır; dolayısıyla φ epimorfizmadır. $K = Ker(\varphi)$ olsun. $L \leq P$ için $K + L = P$ olduğunu kabul edelim. $\varphi|_L : L \to M$ örtendir. P projektif olduğundan $\varphi|_L h = \varphi$ olacak şekilde $h : P \to L$ homomorfizması vardır. Böylece aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir.

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
L \arrow[r, "\varphi|_L"] \arrow[d, "i"'] & M \\
P \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}
$$

Şekil 4.1. Teorem 4.1.6 için değişmeli diyagram

Burada $\varphi|_L h = \varphi$ ve $\varphi i = \varphi|_L$ eşitlikleri sağlanır ve $\varphi(ih) = \varphi$ elde edilir. Örtünün ikinci özelliğinden $ih : P \to P$ otomorfizmadır. Dolayısıyla i örten olur. i gömme homomorfizması olduğundan $L = P$ elde edilir.

(2)$\Rightarrow$(1) $\varphi : P \to M$, M ' nin bir projektif örtüsü olsun. Γ projektif modüller sınıfı olduğundan $\varphi : P \to M$ bir Γ -önörtüdür. P ' nin $\varphi = \varphi f$ koşulunu sağlayan bir f endomorfizması alınsın. Bu durumda $P = Ker(\varphi) + \mathrm{Im}(f)$ olur. $Ker(\varphi) \ll P$ olduğundan f ' nin epimorfizma olduğu görülür. $\mathrm{Im}(f) = P$ projektif olduğundan $0 \to Ker(f) \to P \to P \to 0$ dizisi parçalanandır. $Ker(f) \le Ker(\varphi) \ll P$ olduğundan $Ker(f) = 0$ elde edilir. Böylece f bir otomorfizmadır.

4.2. Genelleştirilmiş Mükemmel Halkalar

χ olarak düz modüller sınıfı seçilirse bir M modülünün χ -örtüsüne düz örtü denir.

Bir modülün düz örtüsü kavramı ilk kez E. Enochs tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Enochs, 1981).

Tanım 4.2.1: Bir M modülünün düz örtüsü aşağıdaki özellikleri sağlayan $\alpha : F \to M$ homomorfizmasıdır.

(i) F düz modüldür.

(ii) F' düz modül olmak üzere her $\beta : F' \to M$ homomorfizması için $\alpha\gamma = \beta$ olacak şekilde $\gamma : F' \to F$ homomorfizması vardır.

(iii) θ, F ’ nin $\alpha\theta = \alpha$ koşulunu sağlayan bir endomorfizması ise θ otomorfizmadır.

Teoremin i ve ii koşulunu birlikte sağlayan örtüye M modülünün düz ön-örtüsü denir.

Her modülün düz örtüsünün varlığı bilinmektedir (Bican ve ark., 2001).

Projektif örtü tanımında projektif modül yerine düz modül kullanılabilir. Bu durumda bu örtüye düz örtü denir (Amini ve ark., 2007).

Anlam karmaşasını önlemek için bu örtüye düz B-örtü denilecektir. Diğer bir deyişle bir M R-modülü için F düz modül olmak üzere, $Kerf \ll F$ olacak şekilde bir $f: F \to M$ epimorfizması varsa f ’ ye M ’ nin bir düz B -örtüsü denir. Bu durumda F , M ’nin düz B -örtüsüdür de denir..

Tanım 4.2.2: M , R -modülü için F düz modül olmak üzere $Ker(\alpha) \ll F$ olacak şekilde $\alpha : F \to M$ epimorfizması varsa α ’ ya M modülünün düz B -örtüsü denir (Amini ve ark., 2007).

Bir modülün düz B -örtüsü bulunmayabilir. Bunu göstermek için aşağıdaki tanım ve önermeye ihtiyaç vardır.

Tanım 4.2.3: Bir A abel grubunun sonlu mertebeli elemanlarının oluşturduğu alt küme $T(A)$ ile gösterilir ve bu küme A ’ nın bir alt grubudur. $T(A)$ ’ ya A grubunun burulma kısmı denir. $T(A) = A$ ise A ’ ya burulma grubu, $T(A) = 0$ ise A ’ ya burulmasız grup denir.

Önerme 4.2.4: Bir abel grubunun düz olması için gerek ve yeter koşul burulmasız olmasıdır (Fuchs, §62).

Örnek 4.2.5: p bir asal sayı ve F düz abel grubu olmak üzere $f : F \to \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p$ ’ nin bir düz B-örtüsü olsun. $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_p$ standart epimorfizma olmak üzere, $\mathbb{Z}$ projektif olduğundan $fg = \pi$ olacak şekilde bir $g : \mathbb{Z} \to F$ homomorfizması bulunur. $Kerf + \operatorname{Im} g = F$ ve $Kerf \ll F$ olduğundan g epimorfizmadır. $F \cong \mathbb{Z}/Kerg$ grubu düz olduğundan burulmasızdır, böylece $Kerg = 0$ elde edilir. $F \cong \mathbb{Z}$ ’ nin küçük alt grubu bulunmadığından ($J(\mathbb{Z}) = 0$), $Kerf = 0$ ve $F \cong \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_p$ çelişkisi elde edilir.

Lemma 4.2.6: $\varphi : F \to M$ düz örtü olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(1) F projektiftir.

(2) P projektif olmak üzere $f : P \to M$ epimorfizması vardır ve $Hom(P,M) \to Hom(F,M)$ örtendir.

(3) P projektif olmak üzere $f : P \to M$ düz ön-örtüdür (Büyükaşık, 2012).

İspat: **(1)⇒(2)** $P = F$ alındığında ispat açıktır.

(2) ⇒ (3) G düz modül ve $h \in Hom(G,M)$ olsun. (2) ile $\varphi = f\alpha$ olacak şekilde $\alpha \in Hom(F,P)$ vardır. Diğer taraftan $\varphi : F \to M$ düz örtü olduğundan $h = \varphi\beta$ olacak şekilde $\beta \in Hom(G,F)$ vardır.

Bu nedenle aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\varphi"] & G \arrow[l, "\beta"'] \arrow[d, "h"] \\ P \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

Şekil 4.2. Lemma 4.2.6 için değişmeli diyagram

Bu durumda $h = \varphi\beta$ ve $\varphi = f\alpha$ eşitliklerinden $\alpha\beta \in Hom(G,P)$ için $h = f(\alpha\beta)$ elde edilir.

(3)⇒(1) Teorem 4.1.3 ile M ’ nin düz örtüsü P ’ nin direkt toplam terimidir. Bu nedenle F projektiftir.

Teorem 4.2.7: R yarı-yerel halka olsun. R halkasının sağ mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her yarı-basit R-modülün düz B-örtüsünün bulunmasıdır (Ding ve Chen, 1999).

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) F serbest sağ R-modül ve $J = J(R)$ olsun. R/J yarı-basit olduğunda F/FJ yarı-basit sağ R-modül olur. P düz sağ R-modülü için $\alpha : P \to F/FJ$ homomorfizması F/FJ ' nin düz B-örtüsü olsun. F projektif ve $\pi : F \to F/FJ$ standart epimorfizma olduğundan aşağıdaki değişmeli diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[d, "\pi"] \\
P \arrow[r, "\alpha"'] & F/FJ
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.3. Teorem 4.2.7 için değişmeli diyagram

π epimorfizma ve $Ker\alpha \ll P$ olduğundan β epimorfizmadır. $P \cong F/Ker\beta$ ve $Ker\beta \le Ker\pi = FJ = RadF$ olduğundan (Lam, 1999) deki Alıştırma 4.20 ile $Ker\beta = 0$ olur. Böylece β izomorfizmadır. $Ker\alpha \ll P$ olduğundan $FJ = \beta^{-1}(Ker\alpha) \ll F$ olur.

Tanım 4.2.8: Bir R halkasının her sağ R-modülünün düz B-örtüsü varsa R halkasına sağ genelleştirilmiş mükemmel halka (sağ G-mükemmel halka) denir. Sol G-mükemmel halkanın tanımı da benzer şekilde yapılır. Eğer R halkası hem sağ hem de sol G-mükemmel ise halkaya G-mükemmel halka denir (Amini ve ark., 2007).

Sağ G-mükemmel halkalar için aşağıdaki sonuç vardır.

Teorem 4.2.9: R sağ G-mükemmel halka olsun. Bu durumda J sağ T-nilpotenttir. Özel olarak R/J ' nin idempotent elemanları R ' den gelir (Amini ve ark., 2007).

İspat: $M=\left(R/J\right)^{(\mathbb{N})}$ ve $\pi:F_R\to M_R$ doğal epimorfizma olsun. Hipoteze göre M ' nin düz B -örtüsü olduğundan $\varphi:P\to M$ epimorfizması var ve P düz modüldür. F projektif olduğundan $\psi:F\to P$ homomorfizması vardır ve $\varphi\psi=\pi$, $Ker(\varphi)\ll P$ ve ψ epimorfizmadır. Ayrıca $Ker(\psi)\subseteq Ker(\pi)=FJ=rad(F_R)$ ve $F/Ker(\psi)\cong P$ düz sağ R -modüldür. Bu nedenle (Lam, 1999) deki Alıştırma 4.20 ile $Ker(\psi)=0$ ' dır. Bu nedenle ψ bir izomorfizma ve $FJ=\psi^{-1}\left(Ker(\varphi)\right)\ll F$ olur. Teorem 3.1.2 ile J sağ T -nilpotenttir. Her sağ T -nilpotent ideal nil olduğundan teoremin diğer basamağı (Anderson ve Fuller, 1992) deki Önerme 27.1 ile gösterilir.

Önerme 4.2.10: R sağ G -mükemmel halka olsun. R halkasının sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul R halkasının sağ Artin olmasıdır (Amini ve ark., 2007).

İspat: ($\Rightarrow$) R sağ Noether olsun. J nil olduğunda nilpotent olur (Anderson and Fuller, 1992), Teorem 15.22. S_R basit bir R modül ve $f:F_R\to S_R$ S_R ' nin düz örtüsü olsun. R Noether ve F_R devirli olduğunda F projektiftir. Bu da $f:F_R\to S_R$ homomorfizmasının S_R ' nin projektif örtüsü olduğunu gösterir ve R yarı-mükemmel olur. Bu nedenle R sağ Noether, J nilpotent ve R/J yarı-basittir. Teorem 2.1.44 ile R sağ Artin olur.

($\Leftarrow$) Açıktır.

Önerme 4.2.11: R ve S sağ G -mükemmel halkalar olsun.

(a) R ' nin her bölüm halkası G -mükemmeldir.

(b) $R\times S$ G -mükemmeldir (Amini ve ark., 2007).

Örnekler 4.2.12:

(1) Her düz modülün düz B -örtüsü vardır. Bu nedenle her düzenli halka G -mükemmeldir.

(2) Her projektif modül düz olduğundan projektif örtüsü olan her modülün düz B-örtüsü vardır. Özel olarak sağ mükemmel halkalar sağ G-mükemmeldir (Amini ve ark., 2007).

(3) Örnek 4.2.5' ten dolayı $\mathbb{Z}$, G-mükemmel halka değildir.

Teorem 4.2.13: R sağdan çift taraflı halka olsun. R sağ G-mükemmel halka ise ${}^{R}\!/_{J}$ düzenlidir (Amini ve ark., 2007).

Aşağıdaki tanım ve sonuçlar Teorem 4.2.13' ün sonuçları için gereklidir.

Tanım 4.2.14: Sıfırdan farklı her sağ R modülünün bir maksimal alt modülü varsa R' ye sağ maks halka denir (Faith, 1995).

Lemma 4.2.15: R bir halka olsun. R' nin sağ maks olması için gerek ve yeter koşul J' nin sağ T-nilpotent ve her sağ ${}^{R}\!/_{J}$-modülünün maksimal alt modülü olmasıdır (Hamsher, 1967).

Teorem 4.2.16: R değişmeli halka olsun. R' nin sağ maks olması için gerek ve yeter koşul J' nin T-nilpotent ve ${}^{R}\!/_{J}$' nin düzenli halka olmasıdır (Hamsher, 1967).

Sonuç 4.2.17: R değişmeli G-mükemmel halka ise, R maks halkadır. Özel olarak R halkasının her asal ideali maksimaldir (Amini ve ark., 2007).

4.3. A-Mükemmel Halkalar

Tanım 4.3.1: R bir halka olsun. Her düz sağ R-modülü R-projektif ise R' ye sağ hemen hemen mükemmel halka (kısaca A-mükemmel halka) denir. Sol A-mükemmel halkalar da benzer şekilde tanımlanır. Eğer R halkası hem sağ hem de sol A-mükemmel halka ise R' ye A-mükemmel halka denir (Amini ve ark., 2008).

Teorem 4.3.2: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

(a) R sağ A-mükemmel halkadır.

(b) R yarı-mükemmeldir ve sonlu üretilmiş modüllerin düz örtüleri sonlu üretilmiştir.

(c) Sonlu üretilmiş düz modüller projektiftir ve sonlu üretilmiş modüllerin düz örtüleri sonlu üretilmiştir.

(d) Sonlu üretilmiş modüllerin düz örtüsü projektiftir.

(e) Devirli modüllerin düz örtüsü projektiftir (Amini ve ark., 2008).

Yukarıdaki teoremin sonucu olarak aşağıdaki tablo yazılabilir.

Sağ mükemmel halka $\Rightarrow$Sağ A-mükemmel halka $\Rightarrow$Yarı-mükemmel halka

4.4. B-Mükemmel Halkalar

Tanım 4.4.1: R bir halka ve S basit sağ R-modüller sınıfı olsun. Her F düz modülü, her $S \in \mathsf{S}$ ve $f: R \to S$, $h: F \to S$ homomorfizmaları için $h = fg$ olacak şekilde $g: F \to R$ homomorfizması varsa R halkasına B-mükemmel halka denir (Büyükaşık, 2012).

Lemma 4.4.2: R yarı-yerel bir halka ve X basit sağ R-modül olsun. X ' in düz örtüsü $f: F \to X$ ise $Kerf = FJ$ dir (Büyükaşık, 2012).

Teorem 4.4.3: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

(1) R sağ B-mükemmeldir.

(2) Basit modüllerin düz örtüleri projektiftir.

(3) R yarı-mükemmeldir ve basit modüllerin düz örtüleri devirlidir.

(4) R yarı-mükemmeldir ve basit modüllerin düz örtüleri yereldir.

(5) Sonlu üretilmiş yarı-basit modüllerin düz örtüsü projektiftir.

(6) R yarı-mükemmel ve yarı-basit modüllerin düz örtüleri sonlu üretilmiştir (Büyükaşık, 2012).

İspat: (1)$\Rightarrow$(2) Lemma 4.2.6' dan açıktır.

(2)$\Rightarrow$(3) X basit sağ R-modül olmak üzere $f: P \to X$ bir düz örtüsü olsun. Bu takdirde, (2) den P projektiftir. $Kerf \ll P$ ve $F/Kerf \ll X$ olduğundan F devirlidir.

Diğer taraftan $f: F \to X$, X ' in projektif örtüsüdür. Teorem 3.1.7 ile R yarı-mükemmeldir.

(3)$\Rightarrow$(4) $f: F \to X$ basit X R -modülünün düz örtüsü olsun. Lemma 4.4.2' den dolayı $J = J(R)$ için $Kerf = FJ$ olur. $F/_{FJ} \cong X$ basit ve $FJ \subseteq J(F)$ olduğundan F ' nin tek maksimal alt modülü vardır. F sonlu üretilmiş olduğundan FJ , F ' nin en büyük alt modülüdür. Böylece F yereldir.

(4)$\Rightarrow$(5) Yarı-mükemmel halkalar üzerinde sonlu üretilmiş düz modüller projektiftir. $M = \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$ yarı-basit modül ve $f_i : F_i \to S_i$ S_i ' lerin düz örtüsü olsun. Teorem 4.1.5' ten dolayı $\oplus f_i : \bigoplus_{i=1}^{n} F_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} S_i$, $\bigoplus_{i=1}^{n} S_i$ ' nin düz örtüsüdür. Hipotez gereği F_i ' ler projektiftir. Böylece $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ projektiftir.

(5)$\Rightarrow$(6) Her basit modülün düz örtüsü projektiftir. Bu nedenle R yarı-mükemmeldir. M sonlu üretilmiş yarı-basit modül ve $\phi: F \to M$, M ' nin düz örtüsü ise (5) ile F projektiftir. Böylece $Ker\phi \ll F$ olur. $F/_{Ker\phi} \cong M$ sonlu üretilmiştir.

(6) $\Rightarrow$ (1) X bir basit modül ve G bir düz modül olmak üzere $f: R \to X$ epimorfizma ve $g: G \to X$ homomorfizma olsun. $\phi: F \to X$ düz örtü ise hipoteze göre F sonlu üretilmiştir. R yarı-mükemmel olduğundan F projektiftir. Böylece $f = \phi h$ olacak şekilde $h: R \to F$ homomorfizması vardır. Lemma 4.2.6 ile $g = ft$ olacak şekilde $t: G \to R$ homomorfizması vardır. Böylece R B -mükemmeldir.

Yukarıdaki teoremden anlaşılacağı gibi B -mükemmel halkalar sınıfı, A -mükemmel halkalar sınıfını içerir.

Teorem 4.4.4: R bir halka olsun. R ' nin sağ B -mükemmel olması için gerek ve yeter koşul R ' nin yarı yerel olması ve tek maksimal alt modüle sahip ayrıştırılamaz düz sağ R -modüllerin projektif olmasıdır (Büyükaşık, 2012).

İspat: ($\Rightarrow$) R sağ B -mükemmel halka olsun. Teorem 4.4.3 ile R yarı-mükemmeldir. G tek maksimal K alt modülü olan ayrıştırılamaz düz modül olmak üzere

$h: F \to G/K$ düz örtü olsun. Teorem 4.4.3' ten dolayı F projektiftir ve $Kerh \ll F$ ' dır. $\pi : G \to G/K$ bir epimorfizma için aşağıdaki değişmeli diyagram olacak şekilde $g : G \to F$ homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd}
 & G \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, dashed, "g"'] & \\
F \arrow[r, "h"'] & G/K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.4. Teorem 4.4.4 için değişmeli diyagram

Teorem 4.1.6' nın ispatından g ' nin bir epimorfizma olduğu ve dolayısıyla $g : G \to F$ epimorfizmasının parçalanan olduğu görülür. G ayrıştırılamaz olduğundan g izomorfizmadır. Böylece G projektif modüldür.

($\Leftarrow$) X_R bir basit modül ve $f : F \to X$, X ' in düz örtüsü olsun. $Kerf = FJ$, F ' nin tek maksimal alt modülüdür. (Guil Asensio ve Herzog, 2005)' da bulunan Teorem 15' ten dolayı F ayrıştırılamazdır. Hipotezden F projektiftir. Teorem 4.4.3' ten dolayı R sağ B -mükemmel halkadır.

Yarı-mükemmel olup B -mükemmel olmayan halka örneği aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.4.5: $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olsun. p asal sayı olmak üzere $R = \left\{ \frac{a}{b} : a,b \in \mathbb{Z}, (p,b) = 1 \right\}$ yerelleştirme halkasını düşünelim. R tek maksimal ideali pR olan yerel halkadır. R/pR ' nin düz örtüsü (Xu, 1996), Teorem 1.3.8 ve sonraki örnekten F , $p-adik$ tamsayılar kümesine izomorf olur. F projektif R -modül olmadığından dolayı R , B -mükemmel değildir. Diğer taraftan R yerel halka olduğundan yarı-mükemmeldir (Büyükaşık, 2012).

A -mükemmel olmayıp B -mükemmel olan halka örneği aşağıda verilmiştir.

Örnek 4.4.6: K bir cisim ve $S = K[y_1, y_2, ...]$ polinom halkası olsun. S halkasının $\{y_i y_j : i = 1, 2, ...\}$ tarafından üretilen ideali L olmak üzere $R = S/L$ halkasını alalım. (Amini ve ark., 2009) Alıştırma 2.17' den dolayı $R[[x]]$, A -mükemmel değildir. Diğer taraftan (Amini ve ark., 2009) Alıştırma 2.22' den dolayı basit $R[[x]]$ modüllerin düz örtüleri projektiftir. Teorem 4.4.3' ten dolayı $R[[x]]$ bir B -mükemmel halkadır (Büyükaşık, 2012).

Tanım 4.4.7: Her düz sağ R -modül F için $Ext_R^1(F, C) = 0$ ise C sağ R -modülüne eş burulma denir (Xu, 1996).

Lemma 4.4.8: $f : F \to M$, M modülünün düz örtüsü ve $K = Ker(f)$ olsun. Her düz modül G için $Ext_R^1(G, K) = 0$ dır. Yani K eş burulmadır (Xu, 1996).

Lemma 4.4.9: I, R halkasının kendisinden farklı bir ideali olsun. C eş burulma R/I modül ise C eş burulma R -modüldür (Xu, 1996).

İspat: Her düz sağ R -modül F için $Ext_R^1(F, C) = 0$ olduğu gösterilmelidir. $0 \to M \to X \to F \to 0$ kısa tam dizisi ele alınsın. F düz modül olduğundan M, X ' in saf alt modülüdür. $M \cap IX = IM = 0$ ve $(M + IX)/IX \cong M$ dir. Böylece aşağıdaki değişmeli kısa tam dizi elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & (M+IX)/IX \arrow[r] & X/IX \arrow[r] & X/M+IX \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.5. Lemma 4.4.9 için değişmeli diyagram

${X}/{M} \otimes {R}/{I} \cong {X}/{M+IX}$ düz ${R}/{I}$ modül olduğundan diyagramın alt satırı parçalanandır. Bu nedenle üstteki de parçalananadır. Böylece $Ext_R^1\left(F,M\right)=0$ olur ve M eş burulma R-modüldür.

Aşağıdaki Lemma, Lemma 4.4.9' un basit bir sonucudur.

Lemma 4.4.10: R yarı-yerel bir halka olsun. Her yarı-basit R-modül eş burulmadır.

İspat: M yarı-basit bir sağ R-modül olsun. $MJ=0$ olduğundan M bir ${R}/{J}$ modüldür. R yarı-yerel olduğundan ${R}/{J}$ yarı-basittir. Böylece her ${R}/{J}$ modül eş burulmadır. Özel olarak M bir eş burulma ${R}/{J}$-modüldür. Lemma 4.4.9' dan dolayı M bir eş burulma R-modüldür.

Eş burulma kullanılarak B-mükemmel halkalar aşağıdaki şekilde karakterize edilmiştir.

Teorem 4.4.11: R halkası için aşağıdakiler denktir.

(1) R sağ B-mükemmeldir.

(2) R' nin J' yi içeren her sağ ideali eş burulmadır.

(3) R ve R' nin maksimal sağ idealleri eş burulmadır.

(4) R yarı-yereldir ve J eş burulmadır (Büyükaşık, 2012).

İspat: **(1)** $\Rightarrow$ **(2)** Teorem 4.4.3 ile R yarı-mükemmeldir ve sonlu üretilmiş yarı-basit modüllerin düz örtüsü projektiftir. Bu nedenle düz örtüler ve sonlu üretilmiş yarı-basit modüllerin projektif örtüsü çakışır.

$J \ll R$ olduğundan $\pi : R \to {R}/{J}$ projektif (düz) örtüdür. Lemma 4.4.8 ile $Ker\pi = J$ eş burulma olur. I, J' yi içeren sağ ideal olsun. R yarı-yerel olduğundan ${I}/{J}$ yarı basit ve sonlu üretilmiştir. Lemma 4.4.10 ile ${I}/{J}$ eş burulma R-modüldür. Eş burulma modüller genişlemeler altında kapalı ve J , I/J eş burulma olduğundan I eş burulmadır.

(2)$\Rightarrow$(3) Açıktır.

(3) $\Rightarrow$ (1) F düz modül ve I_R , R ' nin maksimal sağ ideali olsun. Hipotezden $Ext_R^1(F,I)=0$ Bu nedenle; $0\rightarrow I\rightarrow R\rightarrow R/I\rightarrow 0$ tam dizisine Hom funktorunun uygulanmasıyla $0\rightarrow Hom\,(F,I)\rightarrow Hom\,(F,R)\rightarrow Hom\,(F,R/I)\rightarrow 0$ elde edilir. Böylece R , B -mükemmel halkadır.

(4)$\Rightarrow$(2) I , J ' nin sağ ideali olsun. R yarı-yerel olduğundan R/J yarı-basittir ve I/J sonlu üretilmiş ve yarı-basittir. Lemma 4.4.10 ile I/J eş burulma R -modüldür. Hipotez ile J de eş burulmadır. Bu nedenle I eş burulmadır. Çünkü eş burulma modüller genişlemeler altında kapalıdır.

(1)$\Rightarrow$(4) Teorem 4.4.3 ile R yarı-mükemmel ve bu nedenle yarı yereldir. (1)$\Rightarrow$(2)' nin ispatından ise J eş burulmadır.

Yerel halkalar için aşağıdaki önerme vardır.

Önerme 4.4.12: R yerel halka olsun. R ' nin B -mükemmel olması için gerek ve yeter koşul $\pi :\, R\rightarrow R/J$ standart epimorfizmasının R/J ' nin düz örtüsü olmasıdır (Büyükaşık, 2012).

İspat: R , B -mükemmel halka olsun. Teorem 4.4.11 ile J eş burulmadır ve $\pi :\, R\rightarrow R/J$ (Xu, 1996) Önerme 2.1.3 ile düz ön örtüdür. $\pi :\, F\rightarrow R/J$, R/J 'in düz örtüsü olsun. Teorem 4.1.3 ile F , R ' nin direkt toplamıdır. Fakat R ayrıştırılamaz olduğundan $R\cong F$ olur. Bu nedenle $\pi :\, R\rightarrow R/J$, R/J ' nin düz örtüsüdür.

Tersine $\pi :\, R\rightarrow R/J$ düz örtü olsun. $Ker\pi = J$ eş burulmadır. Bu nedenle Teorem 4.4.11 ile R , B -mükemmel halkadır.

4.5.Genelleştirilmiş Yarı-Mükemmel Halkalar

Tanım 4.5.1: Bir R halkası için her basit sağ R-modülün düz B-örtüsü varsa R' ye sağ genelleştirilmiş yarı-mükemmel halka (kısaca G-yarı-mükemmel) denir. Sol genelleştirilmiş yarı-mükemmel halkalar da benzer şekilde tanımlanır. Eğer R halkası hem sağ hem de sol genelleştirilmiş yarı-mükemmel halka ise R' ye genelleştirilmiş yarı-mükemmel halka denir (Demirci, 2016).

Örnekler vermeden önce basit modüllerin düz B-örtülerini inceleyelim.

S bir basit R-modül ve $\psi : F \to S$, S' nin düz B-örtüsü olsun. S basit olduğundan $\phi : R \to S$ epimorfizması vardır. R projektif olduğundan $\phi = \psi f$ olacak şekilde $f : R \to F$ homomorfizması vardır. $Ker\psi \ll F$ olduğundan f bir epimorfizma ve $F \cong R/I$ olacak şekilde I ideali vardır. Bu durumda I' yı içeren bir M maksimal ideali için $S \cong R/M$ olur. Ayrıca $F \cong R/I$ yereldir. Benzer şekilde her devirli sağ R-modülün düz B-örtüsünün devirli olması gerektiği de gösterilebilir (Demirci, 2016).

Örnekler 4.5.2:

(a) Her sağ G-mükemmel halka sağ G-yarı-mükemmeldir.

(b) Her düz modülün düz B-örtüsü vardır. Bu nedenle her düzenli halka G-mükemmeldir.

(c) Her sağ mükemmel halka sağ G-mükemmeldir ve her sağ yarı-mükemmel halka sağ G-yarı-mükemmel halkadır.

(d) Son paragraftan tam sayılar halkası $\mathbb{Z}$' nin G-yarı-mükemmel olmadığı görülebilir (Demirci, 2016).

R' nin bir maksimal sağ idealinin düz B-örtüsü F için, $F \cong R/I$ ve $I \leq M$ olacak şekilde bir sağ I ideali her zaman bulunamayabilir. Aşağıdaki Lemma ek bir koşul altında bu ifadenin doğru olduğunu göstermektedir (Demirci, 2016).

Lemma 4.5.3: R bir halka olmak üzere M, R ' nin maksimal sağ ideali olsun. R sağ G -yarı-mükemmel ise, R/M basit R -modülünün düz B -örtüsü R/I ' ya izomorf olacak şekilde M sağ maksimal idealin içerdiği bir I sağ ideali vardır (Demirci, 2016).

Önerme 4.5.4: R ve S sağ G -yarı-mükemmel halkalar olsun.

(a) R ' nin her bölüm halkası sağ G -yarı-mükemmeldir.

(b) $R\times S$ sağ G -yarı-mükemmeldir (Demirci, 2016).

İspat: **(a)** I, R halkasının keyfi bir ideali olmak üzere $T = R/I$ olsun. Her basit T -modülün düz B - örtüye sahip olduğunu göstermeliyiz. S keyfi bir basit T -modül olsun. Bu taktirde $T/J \cong S$ olacak şekilde T ' nin sağ maksimal J ideali vardır. Dolayısıyla $S \cong R/M$ olacak şekilde R halkasının sağ maksimal M ideali vardır. R sağ G -yarı-mükemmel halka olduğundan $f: F \to R/M$ R -modül düz B -örtüsü vardır.

(b) $T = R\times S$ ve M basit T modül olsun. $e = (1_R, 0) \in T$ merkezi idempotenttir. $U = Me$ ve $V = M(1-e)$ olmak üzere $M = U \oplus V$ yazılabilir.

M basit T -modül olduğundan genelliği bozmadan $M = U$ kabul edebiliriz. $M(0\times S) = 0$ olduğundan M bir R -modül yapısına sahiptir. Her R -modül bir T -modül olduğundan M_R basittir. Varsayımdan dolayı M_R ' nin $f: F_R \to M_R$ düz B -örtüsü vardır. (Lam, 1999) deki Teorem 4.24 ile F_T ' nin düz olduğu gösterilir. $Kerf \ll F_R$ olduğundan $Kerf \ll F_T$ olur. Böylece $f: F_T \to M_T$, M_T ' nin düz B -örtüsüdür.

Önerme 4.5.5: R değişmeli bölge olsun. R ' nin G -yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul R ' nin yerel olmasıdır (Demirci, 2016).

İspat: **($\Leftarrow$)** Açıktır.

($\Rightarrow$) F bir basit modülün düz B -örtüsü olsun. F yereldir ve burulmasızdır. Bu nedenle $R \cong F$ yereldir.

Teorem 4.5.6: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

(a) R yarı-mükemmeldir.

(b) R yarı-yereldir ve her basit R -modülün düz B -örtüsü vardır.

(c) R yarı-yereldir ve her sonlu üretilmiş R -modülün düz B -örtüsü vardır (Lomp, 1999).

İspat: (a)$\Rightarrow$(c) Projektif modüller düz olduğundan sağlanır.

(c)$\Rightarrow$(b) Açıktır.

(b) $\Rightarrow$ (a) R yarı-yerel ve E_i ’ ler basit R -modüller olmak üzere $R/J = E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots \oplus E_{n-1} \oplus E_n$ olarak yazılabilir. Her basit R modül E_i ’ lerin birine izomorftur. Hipotez ile her E_i ’ nin bir L_i düz örtüsü vardır. Böylece $L := L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$, R/J ’ nin düz B -örtüsü olur. Bu nedenle aşağıdaki değişmeli diyagramı elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "g"'] \arrow[d] & \\
L \arrow[r, "f"'] & R/J \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Şekil 4.6. Teorem 4.5.6 için değişmeli diyagram

f küçük epimorfizma ve gf epimorfizma olduğundan $Ker(g) \subseteq Ker(gf) = J$ olur. Bu nedenle R , L düz modülünün projektif örtüsüdür. (Wisbauer, 1991) daki Teorem 36.4 ile $L \cong R$ ve bu nedenle bütün L_i ler projektif olmalıdır. Böylece her bir basit R -modülün projektif örtüsü vardır ve (Wisbauer, 1991) daki Teorem 42.6 ile R yarı-mükemmeldir.

Önerme 4.5.7: R sağ çift taraflı bir halka ve M, R' nin maksimal sağ ideali olsun. Eğer R/I ve R/K M' nin içerdiği I ve K idealleri için R/M' nin düz B-örtüleri ise $R/I\cap K$ da R/M' nin düz B-örtüsü olur (Demirci, 2016).

İspat: Sağ çift taraflı halkaların sonlu sayıda saf sağ ideallerinin kesişimi yine saftır. Bu nedenle $R/I\cap K$ düzdür. Bir N sağ ideali için $M/I\cap K + N/I\cap K = R/I\cap K$ olsun.

$M+N=R$, $R/I = M+N/I = M/I + N+I/I$ ve $M/I \ll R/I$ olduğundan $R/I = N+I/I$ ve $N+I=R$ olur. Benzer şekilde $N+K=R$ elde edilir. R sağ çift taraflı halka ve I ile K, R' de saf olduğundan

$$
\begin{aligned}
K = RK = (N+I)\cap K = NK + IK & \\
&\subseteq (N\cap K)+(I\cap K)\\
&\subseteq N
\end{aligned}
$$

ve $R = N+K \subseteq N$ olur. Böylece $M/I\cap K \ll R/I\cap K$ ve $R/I\cap K$, R/M nin düz B-örtüsüdür.

Aşağıdaki önerme, Önerme 4.2.10' nun bir sonucudur.

Önerme 4.5.8: R sağ G-yarı-mükemmel halka ve J nil olsun. R' nin sağ Noether olması için gerek ve yeter koşul R' nin sağ Artin olmasıdır (Demirci, 2016).

Aşağıdaki örnekler G-mükemmel ve yarı-mükemmel halkalar sınıfından olmayan G-yarı-mükemmel halka örnekleridir.

Örnekler 4.5.9:

(a) R sağ mükemmel olmayan yarı-mükemmel halka olsun. Teorem 4.2.9 ile R, sağ G-mükemmel olmayan sağ G-yarı-mükemmel halkadır.

(b) K bir düzenli halka ve $i=1,2,3,...$ için $K=K_i$ olmak üzere $R=\prod_{i=1}^{\infty} K_i$ olsun. (Kasch, 1982) Bölüm 10.4 ten dolayı R yarı-basit olmayan düzenli halkadır. Bu nedenle R yarı-mükemmel olmayan düzenli halkadır. Bundan dolayı R yarı-mükemmel olmayan G -yarı-mükemmel halkadır (Demirci, 2016).

5. DÜZ GÜÇLÜ ÖRTÜLER

Bir önceki bölümde gördüğümüz gibi her modül düz B-örtüye sahip olmak zorunda değildir. Bir modülün bir düz B-örtüsü bulunması da bu örtünün bir düz örtü olmasını gerektirmez. Bu düşünceyle (Demirci, 2016) de düz örtülerin aynı zamanda düz B-örtü olduğu durum araştırılmıştır. Bu bölümdeki sonuçlar (Demirci, 2016) den alınmıştır.

Tanım 5.1: Bir sağ R -modül M ' nin, bir $f: F \to M$ düz örtüsü aynı zamanda bir düz B-örtü ise, bu örtüye M ' nin bir güçlü düz örtüsü denir. Bu durumda, F ' ye M ' nin bir düz güçlü örtüsü de denir.

Genelde, düz güçlü örtüye sahip olma özelliği alt modüller tarafından korunmak zorunda değildir.

Önerme 5.2: R, herhangi bir M modülü için $RadM = MJ \ll M$ koşulunu sağlayan bir halka, $K \leq L$ ve L/K düz olsun. L ' nin bir düz güçlü örtüsü varsa, K ' nın da vardır.

İspat: $\phi: F \to L$, L ' nin bir düz güçlü örtüsü olsun. $P = \phi^{-1}(K)$ için, (Xu, 1996) daki Lemma 3.1.3' ten dolayı ϕ tarafından verilen $\phi': P \to K$ K ' nın bir düz önörtüsüdür. Teorem 4.1.3 kullanılarak $P = X \oplus Y$, $Y \leq Ker\phi' = Ker\phi$ ve $\phi'_{|X}: X \to K$, K ' nın bir düz örtüsü olacak şekilde X ve Y alt modülleri vardır. X ' nin W alt modülü için $W + Ker\phi'_{|X} = W + (Ker\phi \cap X) = X$ olsun. Bu durumda $Ker\phi = Ker\phi \cap P = Ker\phi \cap (X + Y) = (Ker\phi \cap X) + Y$ ve $P = X + Y = W + (Ker\phi \cap X) + Y = W + Ker\phi$ olur. (Amini ve ark., 2007) Önerme 3.11' den dolayı $Ker\phi \ll P$ olduğundan $P = W = X$ tir ve $\phi': P \to K$, K ' nın bir düz güçlü örtüsüdür.

Tanım 5.3: Her basit sağ modülü injektif olan halkaya sağ V -halka denir.

Önerme 5.4: R, düzenli bir halka ve R -modüllerin düz B -örtüleri (izomorfizma gözetmeksizin) tek olsun. Bu durumda R bir sağ V -halkadır (Demirci, 2016).

V-halka olmayan bir düzenli R halkası üzerinde, her modülün bir düz güçlü örtüsü vardır fakat Önerme 5.4' ten dolayı modüllerin düz B-örtülerinin tek olması gerekmez. Böyle bir halka örneği (Srivastava, §2)' de bulunabilir.

Lemma 5.5: R sağdan çift taraflı bir halka, B bir devirli R-modül ve A, B' nin küçük alt modülü olsun. B ve B/A düz ise $A=0$' dır.

Önerme 5.6: R sağdan çift taraflı bir halka olsun. Her basit modül düz güçlü örtüye sahipse basit modüllerin düz B-örtüleri düz güçlü örtülerdir.

İspat: F ve P düz modüller olmak üzere, S basit modülü için $f: F \to S$ S' nin düz güçlü örtüsü ve $g: P \to S$ S'nin düz B-örtüsü olsun. F düz örtü olduğundan $g = fh$ olacak şekilde bir $h: P \to F$ homomorfizması vardır. $Kerf \ll F$ olduğundan h epimorfizmadır. Ayrıca F ve P devirli ve $Kerh \leq Kerg \ll P$ olur. Bu durumda Lemma 5.5' ten $Kerh = 0$ olur ve $P \cong F$ dir.

Önerme 5.7: R sağdan çift taraflı bir halka olsun. Her devirli modül düz güçlü örtüye sahipse devirli modüllerin düz B-örtüleri düz güçlü örtülerdir.

İspat: F ve P düz modüller olmak üzere, C devirli modülü için $f: F \to C$ C' nin düz güçlü örtüsü ve $g: P \to C$ C'nin düz B-örtüsü olsun. F düz örtü olduğundan $g = fh$ olacak şekilde bir $h: P \to F$ homomorfizması vardır. $Kerf \ll F$ olduğundan h epimorfizmadır. Ayrıca F ve P devirli ve $Kerh \leq Kerg \ll P$ olur. Bu durumda Lemma 5.5' ten $Kerh = 0$ olur ve $P \cong F$ dir.

Bir M modülü projektif örtüye sahip olsa bile M' nin düz örtüsünün projektif olması gerekmez.

Lemma 5.8: M bir R-modül olsun. M' nin düz örtüsünün projektif olması için gerek ve yeter koşul M' nin bir projektif örtüye ve bir düz güçlü örtüye sahip olmasıdır.

İspat: Gereklilik kısmı, Teorem 4.1.6 ile açıktır. Yeterlilik kısmını göstermek için M bir R-modül, $f: F \to M$ M' nin bir düz güçlü örtüsü ve $g: P \to M$ M' nin bir projektif örtüsü olsun. Bu durumda $g = fh$ koşulunu sağlayan $h: P \to F$ homomorfizması epimorfizmadır. P projektif, F düz ve $Kerh \leq Kerg \ll P$ olduğundan (Lam, 1999) deki Alıştırma 4.20' den dolayı F de projektiftir.

Düz güçlü örtüler A-mükemmel, B-mükemmel ve mükemmel halkaların karakterizasyonlarında kullanılmıştır.

Teorem 5.9: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) Devirli modüllerin düz örtüleri projektiftir.

(ii) R yarı-yereldir ve her devirli modülün bir düz güçlü örtüsü vardır.

İspat: (i)$\Rightarrow$(ii) R, (Amini ve ark., 2008) deki Teorem 3.7' den dolayı yarı-yereldir. F projektif olmak üzere C bir devirli R-modül ve $f:F\rightarrow C$ homomorfizması C' nin bir düz örtüsü olsun. Teorem 4.1.6' dan dolayı $Kerf \ll F$ 'dir. Böylece $f:F\rightarrow C$ homomorfizması C' nin bir düz güçlü örtüsüdür.

(ii)$\Rightarrow$(i) C devirli modül olsun. Teorem 4.5.6' dan dolayı R yarı-mükemmeldir. Bu nedenle C projektif örtüye sahiptir. Ayrıca C bir projektif örtüye ve bir düz güçlü örtüye sahiptir. Lemma 5.8' den dolayı C' nin düz örtüsü projektiftir.

Teorem 5.10: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) Basit modüllerin düz örtüleri projektiftir.

(ii) R yarı-yereldir ve her basit modülün bir düz güçlü örtüsü vardır.

İspat: (i)$\Rightarrow$(ii) R, (Amini ve ark., 2008) deki Teorem 3.7' den dolayı yarı-yereldir. G projektif olmak üzere D bir basit R-modüldür ve $g:G\rightarrow D$ homomorfizması D' nin düz örtüsü olsun.Teorem 4.1.6' dan dolayı $Kerg \ll G$ ' dir. Böylece $g:G\rightarrow D$ homomorfizması D' nin bir düz güçlü örtüsüdür.

(ii)$\Rightarrow$(i) D basit modül olsun. Teorem 4.5.6' dan dolayı R yarı-mükemmeldir. Bu nedenle D projektif örtüye sahiptir. Ayrıca D bir projektif örtüye ve bir düz güçlü örtüye sahiptir. Lemma 5.8' den dolayı D' nin düz örtüsü projektiftir.

Teorem 5.11: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) R sağ mükemmeldir.

(ii) Yarı-basit modüllerin düz örtüleri projektiftir.

(iii) R yarı-yereldir ve her yarı-basit modül bir düz güçlü örtüye sahiptir.

(iv) Her yarı-basit modül bir düz B-örtüye sahiptir ve basit modüllerin düz örtüleri projektiftir.

(v) Her yarı-basit modül bir düz B-örtüye sahiptir ve basit modüllerin düz B-örtüleri projektiftir.

İspat: (i)$\Rightarrow$(ii) Bir mükemmel halka üzerinde düz modüller projektiftir.

(ii)$\Rightarrow$(iii) R, (Büyükaşık, 2012) deki Teorem 2.4' ten dolayı yarı-yereldir. F projektif olmak üzere $f:F\rightarrow X$ X yarı-basit modülünün bir düz örtüsü ise Teorem 4.1.6' dan dolayı aynı zamanda düz B-örtüsüdür. Böylece her yarı-basit modül düz güçlü örtüye sahiptir.

(iii)$\Rightarrow$**(iv)** Teorem 5.10' un bir sonucudur.

(iv)$\Rightarrow$**(v)** S bir basit modül, $f: F \to S$ homomorfizması düz B-örtü ve P projektif olmak üzere $g: P \to S$ S'nin düz örtüsü olsun. Bu durumda $g = fh$ olacak şekilde bir $h: P \to F$ homomorfizması vardır. $Kerf \ll F$ olduğundan h epimorfizmadır. Lemma 5.7. den dolayı $Kerg \ll P$ ' dir. Bu durumda $F \cong P/Kerh$, P projektif, F düz ve $Kerh \leq Kerg \ll P$ 'dir. (Lam, 1999) deki Alıştırma 4.20' den dolayı $Kerh = 0$ ve böylece $F \cong P$ projektiftir.

(v)$\Rightarrow$**(i)** Her basit modülün (Amini ve ark., 2008) deki Teorem 3.7' den dolayı projektif örtüsü vardır. Böylece R yarı-mükemmeldir. Teorem 4.2.7 ispatı tamamlar.

6. KAYNAKLAR

Alizade, R. , Pancar, A. 1999. Homoloji Cebire Giriş. Samsun, 185 s.

Amini, A. , Amini, B. , Ershad, M. , Sharif, H. 2007. On generalized perfect rings. Comm. Algebra, 35(3): 953–963.

Amini, A. , Amini, B. , Ershad, M. , Sharif, H. 2008. Rings over which flat covers of finitely generated modules are projective. Comm. Algebra, 36(8): 2862–2871.

Amini, B. , Amini, A. , Ershad, M. 2009. Almost-perfect rings and modules. Comm. Algebra, 37(12): 4227–4240.

Anderson, F. W. , Fuller, K. R. 1992. Rings and categories of modules. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag. Page 385.

Atiyah, M. F. , Macdonald, I. G. 1969. Introduction to Commutative Algebra. Mass.-London-Don Mills, Ont., Addison-Wesley Publishing Co. Page 138.

Azumaya, G. 1974. Characterizations of semiperfect and perfect modules. Math. Z., 140: 95–103.

Bass, H. 1960. Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings. Trans. Amer. Math. Soc. , 95: 466–488.

Bican, L. , El Bashir, R. , Enochs, E. 2001. All modules have flat covers. Bull. London Math. Soc. 4: 385-390.

Büyükaşık, E. 2012. Rings over which flat covers of simple modules are projective. J. Algebra Appl, 11(3).

Büyükaşık, E. , Lomp, C. 2010. When δ-semiperfect rings are semiperfect, Turkish J. Math., 34(3): 317–324.

Çallıalp, F. , Tekir, Ü. 2009. Değişmeli Halkalar ve Modüller. Birsen Yayınevi, İstanbul, 278 s.

Ding, N. , Chen, J. 1999. On a characterization of perfect rings. Comm. Algebra, 27(2): 785–791.

Demirci, Y. M. 2016. On Generalizations Of Semiperfect and Perfect Rings, Bull. Iran. Math. Soc. , 42 (6):1441–1450.

Faith, C. 1995. Locally perfect commutative rings are those whose modules have maximal submodules. Comm. Algebra, 23(13): 4885–4886.

Fieldhouse, D. J. 1985. Semiperfect and F-semiperfect modules. Internat. J. Math. Math. Sci. , 8(3): 545–548.

Fuchs, L. 1970. Infinite abelian groups. Vol. I. New York-London, AcademicPress, Page 289.

Guil Asensio, P. A. , Herzog, I. 2005. Sigma- cotorsion rings, Adv. Math. 191(1): 11–28.

Hausen, J. , Johnson, J. A. 1983. A new characterization of perfect and semiperfect rings. Bull. Calcutta Math. Soc. , 75(1): 57–58.

Hamsher, R. M. 1967. Commutative rings over which every module has a maximal submodule. Proc. Amer. Math. Soc. , 18(6): 1133–1137.

Kasch, F. 1982. Modules and Rings. London Mathematical Society Monographs, 17. London-New York: Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers]. Translated from the German and with a preface by D. A. R. Wallace.

Lam, T. Y. 1991. A First Course in Noncommutative Rings. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag. Page 388.

Lam, T. Y. 1999. Lectures on Modules and Rings. New York, Springer-Verlag. Page 557.

Lomp, C. 1999. On semilocal modules and rings. Comm. Algebra, 27(4): 1921–1935.

Nicholson, W. K. 1975. On semiperfect modules. Canad. Math. Bull. , 18(1): 77–80

Pancar, A. , Türkmen, B. N. 2014. İnjektif Modüllere Giriş. Pegem Akademi, Ankara, 224 s.

Sandomierski, F. L. 1969. On semiperfect and perfect rings. Proc. Amer. Math. Soc., 21: 205–207.

Srivastava, A. K. 2011. On $\sum$-V rings, Comm. Algebra, 39(7): 2430-2436.

Varadarajan, K. 1979. Modules with supplements. Pacific. J. Math. , 82(2): 559–564.

Wisbauer, R. 1991. Foundations of module and ring theory. Philadelphia: Gordon and Breach Science Publishers.

Xu, J. 1996. Flat Covers of Modules, Volume 1634 of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin. Page 162.

ÖZGEÇMİŞ

Samed ÖZKAN, 1990 yılında İstanbul'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2009 yılında kazandığı Sinop Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2013 yılında mezun oldu. Aynı yıl Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı ve öğrenimi halen devam etmektedir.