YÜKSEK LİSANS TEZİ

BETÜL DUMAN AYDIN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EQUI İSTATİSTİKSEL VE AĞIRLIKLI EQUI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMI İLE KOROVKİN TİPİ TEOREMLER

T.C.
SİNOP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EQUI İSTATİSTİKSEL VE AĞIRLIKLI EQUI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMI İLE KOROVKİN TİPİ TEOREMLER

YAZAR
BETÜL DUMAN AYDIN

DANIŞMAN
DOÇ. DR. FADİME DİRİK

SİNOP – 2019

TEZ KABUL

Betül DUMAN AYDIN tarafından hazırlanan "Equi İstatistiksel ve Ağırlıklı Equi İstatistiksel Yakınsaklık Yardımı ile Korovkin Tipi Teoremler" başlıklı bu çalışma, **12.04.2019** tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan	Prof. Dr. Ali ARAL Kırıkkale Üniversitesi / Fen Edebiyat Fakültesi
Üye	Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ Sinop Üniversitesi /Fen Edebiyat Fakültesi
Üye	Doç. Dr. Fadime DİRİK Sinop Üniversitesi /Fen Edebiyat Fakültesi

ETİK BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Betül DUMAN AYDIN

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\lvert A\rvert$	: A kümesinin eleman sayısı
δ	: Yoğunluk fonksiyonu
c	: Yakınsak diziler uzayı
st	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
$B[a,b]$	: $[a,b]$ aralığı üzerindeki sınırlı fonksiyonların uzayı
$\lVert . \rVert$	: $B[a,b]$ uzayının alışılmış supremum normu
$C[a,b]$	: $[a,b]$ aralığı üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı
$\lVert . \rVert$	: $C[a,b]$ uzayının alışılmış supremum normu
$S_{\overline{N}}$	: Ağırlıklı istatistiksel yakınsak dizi uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\omega(f;\delta)$	: f fonksiyonun süreklilik modülü
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu

ÖZET

EQUI İSTATİSTİKSEL VE AĞIRLIKLI EQUI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK YARDIMI İLE KOROVKİN TİPİ TEOREMLER

Bu yüksek lisans tezi üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, bu tezde kullanılacak bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde istatistiksel ve ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtıldı. Buna ilişkin örnekler ve bazı sonuçlar verildi.

Bulgular bölümün birinci kısmında equi-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak Korovkin tipi teorem çalışıldı ve bu teorem için yakınsaklık mertebesi verildi. İkinci kısımda ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak pozitif lineer operatörlerin dizileri için Korovkin tipi teorem çalışıldı. Üçüncü kısımda ise ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaklık kullanılarak bir Korovkin tipi teorem çalışıldı. Daha sonra ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaklık mertebesi süreklilik modülü yardımıyla hesaplandı. Ayrıca Voronoskaya tipi teorem incelendi.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık, pozitif lineer operatör, Korovkin tipi yaklaşım teoremi, istatistiksel düzgün yakınsaklık, süreklilik modülü, equi-istatistiksel yakınsaklık, ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık, Voronoskaya teorem.

ABSTRACT

KOROVKIN TYPE THEOREMS VIA EQUI STATISTICAL CONVERGENCE AND WEIGHTED EQUI STATISTICAL CONVERGENCE

This thesis consist of three sections.

In the first section, some main definitions and theorems to be used in this thesis have been given.

In the second section, the concepts of statistical convergence and weighted statistical convergence has been introduced. Some examples and results for these convergences have been given.

In the first part of findings section, using the equi-statistical convergence, Korovkin type theorem has been studied and the rate of convergence for this theorem has been given. In the second part, using the concept of weighted statistical convergence Korovkin type theorem has been studied for a sequence of positive linear operators. In the thirth part, using the concept of weighted equi-statistical convergence, Korovkin type theorem has been studied. Later, the rate of this convergence has been calculated with the help of modulus continuity. Finally, Voronovskaya type theorem has been studied.

Keywords: Statistical convergence, positive linear operator, Korovkin type approximation theorem, statistical uniform convergence, the modulus of continuity, equi-statistical convergence, weigheted statistical convergence, Voronovskaya theorem.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve çalışmam boyunca bana her açıdan yardımcı olan saygı değer danışman hocam, Sayın Doç. Dr. Fadime DİRİK (Sinop Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü)' e, çalışmalarımda yardımlarını ve desteğini esirgemeyen Araş. Gör. Pınar OKÇU ŞAHİN'e en içten saygılarımla teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca manevi desteğini esirgemeyen aileme ve eşim Doğan AYDIN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Canım AİLEM'e…

Betül DUMAN AYDIN

Nisan, 2019

1. GİRİŞ

Steinhaus ve Fast'in reel sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklığı tanımladığı 1951 yılından bu yana, bu tanımın birçok genellemesi ve uygulaması araştırılmaktadır. (L_n), $L_n : C[a,b] \rightarrow B[a,b]$ tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olmak üzere, Korovkin 1960 yılında $f_i(x) = x^i$, $i = 0,1,2$ test fonksiyonlarını kullanarak $(L_n(f;x))$ dizisinin bir f fonksiyonuna yaklaşımı problemini incelemiştir. Daha sonra 2002 yılında istatistiksel yakınsaklık tanımı yardımı ile Gadjiev ve Orhan Korovkin tipi yaklaşım teoremini ispatlamış ve daha güçlü sonuçlar elde etmişlerdir. Birçok araştırmacı pozitif lineer operatör dizileri yardımıyla sürekli fonksiyonların yaklaşımını ele almış ve Korovkin'in bu çalışmasını çeşitli operatörler için araştırmışlardır. Ayrıca, istatistiksel düzgün yakınsaklık kavramı Korovkin tipi yaklaşım teorisinde kullanılmış ve daha güçlü sonuçlar elde edilmiştir (Demirci ve Orhan, 2015; Dirik ve Demirci, 2010; Duman ve Orhan, 2004; Gökhan ve ark., 2007). Balcerzak ve ark., 2007 yılında düzgün yakınsaklık ve istatistiksel düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olan equi-istatistiksel yakınsaklık tanımını ifade etmişlerdir. İstatistiksel noktasal ve istatistiksel düzgün yakınsaklık arasında bulunan bu yakınsama için Karakuş ve ark., 2008 yılında Korovkin tipi yaklaşım teoremini ispatlamışlardır.

Ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramı ise ilk olarak 2009 yılında Karakaya ve Chishti tarafından verilmiştir. Mursaleen ve ark., 2012 yılında bu kavramı yeniden ele almışlardır. Fakat, Ghosal 2016 yılında önceki tanımların iyi tanımlanmadığını göstererek, ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık tanımını tekrar ifade etmiştir.

Bu yüksek lisans tezinde ilk olarak tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan istatistiksel yakınsaklık ve pozitif lineer operatörlerde Korovkin tipi teorem tanıtılıp bu teoremin koşullarını sağlayan bir örnek verilecektir. Sonrasında istatistiksel yaklaşım ile elde edilen Korovkin tipi teorem ve istatistiksel yakınsaklığın mertebesi verilecektir. Ayrıca istatistiksel Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlayan pozitif lineer operatörler dizisine bir örnek verilecektir. Daha sonra 2007 yılında Balcerzak ve ark. tarafından tanımlanan istatistiksel düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olan equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak Karakuş ve ark., 2008 yılında çalışılan Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilip bir örnek ile gösterilecektir. Ayrıca süreklilik modülü yardımıyla equi-istatistiksel yakınsaklık mertebesi incelenecektir. Son olarak 2016 yılında Akdağ tarafından çalışılan ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaklık kavramı kullanılarak Korovkin tipi teorem verilecektir. Daha sonra bu teoremin klasik ve istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoreminden daha kuvvetli olduğu bir örnekle gösterilip ağırlık equi-istatistiksel yakınsaklık mertebesi incelenecek ve ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaklık yardımıyla Voronovskaya tipi teorem verilecektir.

2. GENEL BİLGİLER

Genel bilgiler kısmında tezin diğer bölümlerinde kullanılacak temel tanımlar ve teoremler verilecektir.

2.1. İstatistiksel Yakınsaklık

A kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi ve $A_n := \{k \le n : k \in A\}$ olsun. A_n kümesinin eleman sayısı da $|A_n|$ ile gösterilsin.

2.1.1. Tanım: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir A alt kümesi için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{n}$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine A kümesinin yoğunluğu denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir (Niven ve Zuckerman, 1980).

Şimdi, Niven ve Zuckerman tarafından ifade edilen aşağıdaki karekterisazyon verilsin:

Pozitif tamsayıların artan bir dizisi (a_n) ve $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere A kümesinin yoğunluğu mevcut ise;

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n}$$

dir (Niven ve Zuckerman, 1980).

Örneğin; bu tanım yardımı ile

$$\delta(\mathbb{N}) = 1\,,\ \delta\left(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}\right) = 0,\ \delta\left(\{2n : n \in \mathbb{N}\}\right) = \delta\left(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}\right) = \frac{1}{2},$$

olduğu görülür. Ayrıca $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin her bir sonlu alt kümesi sıfır yoğunlukludur. Bir A kümesi yoğunluğa sahip ise, buradan $\delta(\mathbb{N} - A) = 1 - \delta(A)$ olur.

Şimdi bu ifadeden yararlanarak istatistiksel yakınsaklık tanımı verilsin.

2.1.2. Tanım: $x = (x_k)$ reel yada kompleks terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{k \le n : |x_k - \alpha| \ge \varepsilon\} \right| = 0$$

olacak şekilde bir α sayısı varsa, x dizisi α sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir ve $st-\lim x=\alpha$ şeklinde ifade edilir (Steinhauss, 1951; Fast, 1951).

Şimdi Fridy tarafından verilen ve bir dizinin istatistiksel yakınsak olmasını karakterize eden aşağıdaki teorem verilsin.

2.1.3. Teorem: $x=(x_k)$ dizisi verilsin. $st-\lim x=\alpha$ olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin $\delta(A)=0$ olacak şekilde bir A alt kümesi vardır öyle ki $\mathbb{N}\setminus A=\{n_k;k\in\mathbb{N}\}$ için $\lim\limits_{n\to+\infty} x_{n_k}=\alpha$ olmasıdır (Fridy, 1985).

2.1.4. Örnek: $x=(x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k=\begin{cases}1, & k=n^2\\ \dfrac{1}{k}, & k\neq n^2\end{cases}\quad \text{, n=1,2,3,…}$$

olsun. $K=\{k^2:k\in\mathbb{N}\}$ denirse $\delta(K)=0,\ \delta(\mathbb{N}\setminus K)=1$ olup

$$(x_{n_k})=\left(\frac{1}{k}\right)\to 0,\ (n_k\in\mathbb{N}\setminus K,\ k\in\mathbb{N})$$

olduğundan $st-\lim x=0$ bulunur.

Ayrıca yakınsak her dizinin sınırlı olduğunu biliyoruz fakat istatistiksel yakınsak dizilerin sınırlı olması gerekmez. Şimdi buna bir örnek verilsin.

2.1.5. Örnek: Genel terimi

$$x_k=\begin{cases}\sqrt{k}\ , & k=m^2\\ 0\ , & k\neq m^2\end{cases}\quad \text{, m=1,2,3,…}$$

şeklinde tanımlanan $x=(x_k)$ dizisi için $st-\lim x=0$ olmasına rağmen bu dizi üstten sınırsızdır.

$x=(x_k)$ verilsin. Buradan, eğer $st-\lim x=\alpha$ ise, bu durumda α sayısının her $\varepsilon>0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinin yoğunluğu sıfıra eşit olmak üzere yine diziye ait sonsuz çoklukta terim bulunabilir.

Bu ise, istatistiksel yakınsaklığın klasik anlamda yakınsaklıktan daha genel olduğunu gösterir. Böylece yakınsak dizi uzayı c ile istatistiksel yakınsak dizi uzayı da st ile gösterilirse, $c \subset st$ olduğu açıktır. Böylelikle yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir.

Klasik anlamda yakınsaklık metodunun lineer olduğu biliniyor. Aşağıdaki teorem istatistiksel yakınsaklık metodunun da lineer olduğunu gösterir.

2.1.6. Teorem: $st-\lim x = L_1$, $st-\lim y = L_2$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda;

(i) $st-\lim(x+y) = L_1 + L_2$

(ii) $st-\lim ax = aL_1$,

sağlanır (Fast, 1951).

İspat: *(i)* $st-\lim x = L_1$ olsun. Burada $A \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(A)=0$ olduğunda $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_1$ ve her $k \in \mathbb{N}/A$ için $|x_k - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $k_1 \in \mathbb{N}$ vardır.

$st-\lim y = L_2$ olsun. O halde $B \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(B)=0$ olduğunda $\varepsilon > 0$ verildiğinde her $k > k_2$ ve her $k \in \mathbb{N}/B$ için $|y_k - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde $k_2 \in \mathbb{N}$ vardır.

Sıfır yoğunluklu iki kümenin arakesiti de sıfır yoğunluklu olacağından $\delta(A \cap B) = 0$, $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ olmak üzere her $k \in \mathbb{N}/(A \cap B)$ ve her $k > k_0$ için $|(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \leq |x_k - L_1| + |y_k - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : |(x_k + y_k) - (L_1 + L_2)| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olup

$$st-\lim(x+y) = L_1 + L_2$$

elde edilir.

(ii) Eğer $a=0$ ise $ax=0$ olup $st-\lim ax=aL_1$ dir. Şimdi $a\neq 0$ olmak üzere $st-\lim x=L_1$ olsun. O halde $A\subseteq\mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(A)=0$ olduğunda, $\varepsilon>0$ verildiğinde her $k>k_1$ ve her $k\in\mathbb{N}/A$ için $|x_k-L_1| < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ olacak şekilde $k_1\in\mathbb{N}$ vardır. Böylece her $k\in\mathbb{N}/A$ ve $k>k_1$ için

$$|ax_k-aL_1|=|a||x_k-L_1|<|a|\frac{\varepsilon}{|a|}<\varepsilon$$

olup, her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_n\frac{1}{n}\left|\left\{k\leq n:|ax_k-aL_1|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

elde edilir. Yani; $st-\lim ax=aL_1$ dır.

2.2. Pozitif Lineer Operatörler ve Korovkin Teoremi

İlk olarak gerekli olan bazı fonksiyon uzayları tanıtılsın.

$C[a,b]$ **Uzayı:** $[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve aralığın tüm noktalarında sürekli fonksiyonların uzayıdır. *a, b* uç noktalarında bu uzayın elemanları sırasıyla sağdan ve soldan sürekli fonksiyonlardır. $f\in C[a,b]$ için $\|f\|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ alışılmış supremum normu ile birlikte $C[a,b]$ bir Banach uzayıdır.

$B[a,b]$ **Uzayı:** $[a,b]$ aralığı üzerindeki sınırlı tüm fonksiyonların uzayıdır. Ayrıca, $\|f\|=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$ normu ile $B[a,b]$ uzayı bir Banach uzayı olup bu norma göre yakınsaklık, düzgün yakınsaklıktır.

X ve Y reel değerli fonksiyonların iki uzayı olsun.

2.2.1. Tanım: Eğer X uzayındaki herhangi bir f fonksiyonunu Y uzayında bir ve yalnız bir g fonksiyonu karşılık getiren bir L kuralı varsa bu takdirde " X uzayında bir operatör tanımlanmıştır" denir ve bu durum

$$g(x)=L(f(y);x)$$

şeklinde gösterilir. Burada $L(f(y);x)$ gösterimi yerine $L(f;x)$ ifadesi kullanılacaktır. X uzayı, L operatörünün "tanım kümesi" olup $X = D_L$ ile gösterilir. Ayrıca $R_L = \{g : L(f;x) = g(x),\ f \in D_L\}$ kümesi L operatörünün değer kümesi olup $R_L \subset Y$ dir.

X uzayı lineer uzay olsun.

2.2.2. Tanım: X uzayına ait herhangi iki fonksiyon *f*, *g* ve $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ için *L* operatörü;

$$L(\beta_1 f + \beta_2 g; x) = \beta_1 L(f;x) + \beta_2 L(g;x)$$

koşulunu sağlıyor ise *L* operatörüne "lineer operatör" denir.

Eğer *L* lineer operatör ise bu durumda $L(0;x) = 0$ olur.

Şimdi pozitif lineer operatör tanımı verilsin:

2.2.3. Tanım: $X^+ = \{f \in X : f(x) \geq 0\}$, $Y^+ = \{g \in Y : g(x) \geq 0\}$ olsun. X uzayı üzerinde tanımlı bir *L* lineer operatörü, X^+ kümesine ait herhangi bir *f* fonksiyonunu Y^+ kümesine ait bir *g* fonksiyonuna dönüştürüyorsa bu takdirde *L* lineer operatörüne "pozitif lineer operatör" denir. Yani; $f(x) \geq 0$ olduğunda $L(f;x) \geq 0$ olur.

Ayrıca *L* pozitif lineer operatörü için $f(x) \leq g(x)$ olduğunda $L(f;x) \leq L(g;x)$ sağlanır. Bu ise pozitif lineer operatörler dizisinin monoton olduğunu ifade eder.

Örneğin; 1912 yılında S. Bernstein $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyona yakınsayan polinom tanımlamıştır (Bernstein, 1912). Bernstein polinomu olarak bilinen bu polinom $x \in [0,1]$ olmak üzere

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},\ \ x \in [0,1]$$

şeklindedir. Burada $f(x) \geq 0$ olmak üzere, $x^k(1-x)^{n-k} \geq 0$ olduğundan $B_n(f;x)$ pozitif lineer operatördür. Benzer şekilde $S_k : C[0,1] \to B[0,1]$ ve $f \in C[0,1]$ olmak üzere

$$S_k(f;x) = e^{-kx} \sum_{n=0}^{\infty} f\left(\frac{n}{k}\right) \frac{(kx)^n}{n!},\ x \in [0,1]$$

ile tanımlanan Szász operatörü de $f(x)\geq 0$ olmak üzere, $\frac{(kx)^n}{n!}>0$ ve $e^{-kx}\geq 0$ olduğundan pozitif lineer bir operatördür (Szász, 1950).

1960 yılında Korovkin, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin (L_n) dizisi için $(L_n(f;x))$ dizisinin f fonksiyonuna yakınsaması problemini incelemiştir.

Kabul edelim ki $f_i(x)=x^i$, $i=0,1,2$ olsun.

Şimdi Korovkin teoremi verilsin.

2.2.4. Teorem: (L_n), $L_n:C[a,b]\rightarrow B[a,b]$ pozitif lineer operatörler dizisi için $[a,b]$ aralığında $n\rightarrow\infty$ için

$\|L_n(f_i)-f_i\|\rightarrow 0, i=0,1,2$

koşullarını gerçekliyorsa bu takdirde tüm reel eksen de sınırlı herhangi bir $f\in C[a,b]$ fonksiyonu için

$\|L_n(f)-f\|\rightarrow 0,\ a\leq x\leq b$

olur (Korovkin, 1960).

İspat: f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğu için öyle bir M pozitif sayısı bulunabilir ki tüm x ler için

$$|f(x)|\leq M \tag{1}$$

sağlanır. $f\in C[a,b]$ olduğundan $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $y\in(-\infty,\infty)$ ve $x\in[a,b]$ için $|y-x|<\delta$ olduğunda

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon \tag{2}$$

sağlanır. $x,y\in[a,b]$ olduğunda (2) eşitsizliği f fonksiyonu $[a,b]$ sürekli olduğundan gerçeklenir. $x\in[a,b]$, $y\notin[a,b]$ olduğunda ise (2) eşitsizliği f fonksiyonu a ve b noktalarından sırasıyla soldan ve sağdan sürekli olduğu için gerçeklenir.

(1) ve (2) eşitsizliklerinden dolayı tüm $y\in(-\infty,\infty)$ ve $x\in[a,b]$ için

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(y-x)^2 \tag{3}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Çünkü $|y-x|<\delta$ olduğunda (3) eşitsizliği (2) eşitsizliğinden dolayı $\frac{2M}{\delta^2}(y-x)^2$ ifadesi pozitif olduğu için sağlanır.

$|y-x|\geq\delta$ olduğunda ise $\frac{(y-x)^2}{\delta^2}\geq 1$ olacağından $\frac{2M}{\delta^2}(y-x)^2\geq 2M$ eşitsizliği gerçeklenir. Bu durumda $\varepsilon>0$ için (1) eşitsizliğinden (3) eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned}|L_n(f;x)-f(x)| &= |L_n(f(y);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)|\\ &= |L_n(f(y)-f(x);x)+f(x)(L_n(1;x)-1)|\\ &\leq |L_n(f(y)-f(x);x)|+|f(x)||L_n(1;x)-1|\\ &\leq |L_n(|f(y)-f(x)|;x)|+\|f\||L_n(1;x)-1|\end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur. Burada birinci terime bakarsak (3) eşitsizliğinden dolayı

$$\begin{aligned}L_n(|f(y)-f(x)|;x) &\leq L_n\left(\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(y-x)^2;x\right)\\ &=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left((y-x)^2;x\right)\\ &=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left(y^2-2yx+x^2;x\right)\\ &=\varepsilon+\varepsilon\left(L_n(f_0;x)-f_0(x)\right)+\frac{2M}{\delta^2}\left(L_n(f_2;x)-f_2(x)\right)-2x\frac{2M}{\delta^2}\left(L_n(f_1;x)-f_1(x)\right)\\ &\quad+x^2\frac{2M}{\delta^2}\left(L_n(f_0;x)-f_0(x)\right)\end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla $x\in[a,b]$ için supremum alırsak

$$\|L_n(f)-f\|\leq\left(\varepsilon+|x|^2\frac{2M}{\delta^2}+\|f\|\right)\|L_n(f_0)-f_0\|+\left(2|x|\frac{2M}{\delta^2}\right)\|L_n(f_1)-f_1\|+\left(\frac{2M}{\delta^2}\right)\|L_n(f_2)-f_2\|+\varepsilon$$

olup kabulümüzden ve $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan $n\to\infty$ için

$$\left\| L_n(f) - f \right\| \to 0.$$

Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlayan bir örnek verilsin. Şimdi, Bernstein polinomlar dizisi için Korovkin teoremi koşullarının sağlandığı gösterilsin:

$$(i) B_n(f_0;x) = \sum_{k=0}^{n} c_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k} = (1-x+x)^n = f_0(x)$$

$$\begin{aligned}
(ii) B_n(f_1;x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= x \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} = x(1-x+x)^{n-1} = f_1(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(iii) B_n(f_2;x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{n!}{(n-k)!k!} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} x^{k-2} (1-x)^{n-k} + \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= x^2 \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} c_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-k-2} + \frac{x}{n} = x^2 \frac{n-1}{n} + \frac{x}{n} = f_2(x) + \frac{x-x^2}{n}
\end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $n \to \infty$ için

$$\left\| B_n(f_i) - f_i \right\| \to 0, \; i = 0,1,2$$

sağlanır. Korovkin teoremine göre $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı herhangi $f \in C[0,1]$ fonksiyonu ve $n \to \infty$ için

$$\left\| B_n(f) - f \right\| \to 0$$

gerçeklenir.

2.3. İstatistiksel Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi ve İstatistiksel Yakınsaklık Mertebesi

Bu bölümde istatistiksel yaklaşım ile elde edilen Korovkin tipi teoremi ve istatistiksel yakınsaklığın mertebesi verilecektir.

2.3.1.Teorem: (L_n), $L_n : C[a,b] \to B[a,b]$ tanımlı pozitif lineer operatörlerin dizisi için

$$st-\lim\left\|L_n(f_i)-f_i\right\|=0,\ i=0,1,2 \tag{4}$$

koşulları sağlanıyorsa tüm reel eksende sınırlı herhangi bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için

$$st-\lim\left\|L_n(f)-f\right\|=0 \tag{5}$$

dır (Gadijev ve Orhan , 2002).

İspat: f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan öyle bir R pozitif sayısı bulunabilir öyle ki tüm x ve y 'ler için

$$|f(y)-f(x)| \le 2R$$

yazılabilir. Ayrıca f , $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan tüm x ve y 'ler için $|y-x|<\delta$ olduğunda $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ dır. Dolayısıyla tüm $y\in(-\infty,\infty)$ ve tüm $x\in[a,b]$ için δ sabit reel sayı olmak üzere

$$|f(y)-f(x)| \le \varepsilon+\frac{2R}{\delta^2}(y-x)^2$$

elde edilir. Ayrıca L_n pozitif ve lineer olduğundan

$$L_n(f;x)-f(x)=L_n(f(y)-f(x);x)+f(x)(L_n(1;x)-1)$$

yazılır. Böylece; her $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}|L_n(f;x)-f(x)| &= |L_n(f(y);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)| \\ &= |L_n(f(y)-f(x);x)+f(x)(L_n(1;x)-1)| \\ &\le |L_n(f(y)-f(x);x)|+|f(x)||L_n(1;x)-1| \\ &\le |L_n(|f(y)-f(x)|;x)|+\|f\||L_n(1;x)-1|\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|L_n(f;x)-f(x)\right| &\le \|f\|\left|L_n(1;x)-1\right|+L_n\left(\left|f(y)-f(x)\right|;x\right)\\
&\le L_n\left(\varepsilon+\frac{2R}{\delta^2}(y-x)^2;x\right)+\|f\|\left|L_n(1;x)-1\right|\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2R}{\delta^2}L_n\left((y-x)^2;x\right)+\|f\|\left|L_n(1;x)-1\right|\\
&=\varepsilon L_n(1;x)+\frac{2R}{\delta^2}L_n\left(y^2-2yx+x^2;x\right)+\|f\|\left|L_n(1;x)-1\right|\\
&\le \varepsilon+\varepsilon\left(L_n(f_0;x)-f_0(x)\right)+\frac{2R}{\delta^2}\left(L_n(f_2;x)-f_2(x)\right)-2x\frac{2R}{\delta^2}\left(L_n(f_1;x)-f_1(x)\right)\\
&+x^2\frac{2R}{\delta^2}\left(L_n(f_0;x)-f_0(x)\right)+R\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|
\end{aligned}
$$

bulunur. Burada $K_1=max\left\{\varepsilon+R+\frac{2R}{\delta^2}\|x^2\|,\frac{4R}{\delta^2}\|x\|\right\}$ olmak üzere $x\in[a,b]$ üzerinden supremum alırsak

$$\|L_n(f)-f\|\le K_1\left\{\|L_n(f_0)-f_0\|+\|L_n(f_1)-f_1\|+\|L_n(f_2)-f_2\|\right\}+\varepsilon$$

bulunur. Son eşitsizlik gösteriyor ki $\varepsilon'>\varepsilon$ olacak şekilde herhangi bir $\varepsilon'>0$ için

$$\left\{n:\|L_n(f)-f\|\ge\varepsilon'\right\}\subseteq\left\{n:\|L_n(f_0)-f_0\|+\|L_n(f_1)-f_1\|+\|L_n(f_2)-f_2\|\ge\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{K_1}\right\}$$

olup

$$\left|\left\{n:\|L_n(f;x)-f(x)\|\ge\varepsilon'\right\}\right|\le\left|\left\{n:\|L_n(f_0)-f_0\|+\|L_n(f_1)-f_1\|+\|L_n(f_2)-f_2\|\ge\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{K_1}\right\}\right|$$

elde edilir. Şimdi

$$D:=\left\{n:\|L_n(f_0)-f_0\|+\|L_n(f_1)-f_1\|+\|L_n(f_2)-f_2\|\ge\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{K_1}\right\}$$

$$D_1:=\left\{n:\|L_n(f_0)-f_0\|\ge\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{3K_1}\right\}$$

$$D_2:=\left\{n:\|L_n(f_1)-f_1\|\ge\frac{\varepsilon'-\varepsilon}{3K_1}\right\}$$

$$D_3 := \left\{ n : \left\| L_n\left(f_2\right) - f_2 \right\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K_1} \right\}$$

kümeleri belirlensin. Buradan $D \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$ olduğu kolaylıkla görülür. Böylece

$$\begin{aligned} \left| \left\{ n : \left\| L_n(f) - f \right\| \geq \varepsilon' \right\} \right| \leq & \left| \left\{ n : \left\| L_n\left(f_0\right) - f_0 \right\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K_1} \right\} \right| \\ & + \left| \left\{ n : \left\| L_n\left(f_1\right) - f_1 \right\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K_1} \right\} \right| \\ & + \left| \left\{ n : \left\| L_n\left(f_2\right) - f_2 \right\| \geq \frac{\varepsilon' - \varepsilon}{3K_1} \right\} \right| \end{aligned} \tag{6}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n}$ ile çarpılıp $n \to \infty$ için limit alınırsa (4) den

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ n : \left\| L_n\left(f\right) - f \right\| \geq \varepsilon' \right\} \right| = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$st - \lim \left\| L_n\left(f\right) - f \right\| = 0$$

dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Örneğin;

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \text{ , } 0 \leq x \leq 1$$

klasik Bernstein polinomlar dizisi istatistiksel Korovkin tipi teoremin koşullarını sağlar.

Şimdi istatistiksel Korovkin tipi teoremi koşullarını sağlayan fakat klasik Korovkin tipi teoremi koşullarını sağlamayan pozitif lineer operatörler dizisine bir örnek verilsin.

2.3.2. Örnek: $\left(B_n\right)$, Bernstein polinomları ve $\left(\alpha_n\right)$ dizisi;

$$\alpha_n := \begin{cases} 1 \text{ , } n = k^2 \\ 0 \text{ , } n \neq k^2 \end{cases} \quad \text{k=1,2,3,...}$$

şeklinde tanımlansın. (α_n) dizisi ıraksak bir dizi olup $st-\lim\alpha=0$ dır.

Şimdi $L_n : C[0,1]\to B[0,1]$ olmak üzere

$$L_n(f;x)=(1+\alpha_n)B_n(f;x)$$

şeklinde tanımlı (L_n) dizisi göz önüne alınsın. Ayrıca

$$B_n(f_0;x)=f_0(x),\ B_n(f_1;x)=f_1(x),\ B_n(f_2;x)=f_2(x)+\frac{x-x^2}{n}$$

dır. (L_n) dizisinin istatistiksel Korovkin tipi teoremi koşullarını sağladığı gösterilsin.

(i) $\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|L_n(1;x)-1\right|=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|(1+\alpha_n)-1\right|=\sup\limits_{x\in[0,1]}\alpha_n=\alpha_n$

olup $st-\lim\alpha=0$ olduğundan $st-\lim\left\|L_n(f_0)-f_0\right\|=0$ elde edilir.

(ii) $\left\|L_n(f_1)-f_1\right\|=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|L_n(y;x)-x\right|=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|(1+\alpha_n)x-x\right|=\sup\limits_{x\in[0,1]}x\alpha_n=\alpha_n\sup\limits_{x\in[0,1]}x=\alpha_n$

olup $st-\lim\alpha=0$ olduğundan $st-\lim\left\|L_n(f_1)-f_1\right\|=0$ elde edilir.

(iii) $$\left\|L_n(f_2)-f_2\right\|=\sup_{x\in[0,1]}\left|L_n(y^2;x)-x^2\right|=\sup_{x\in[0,1]}\left|\frac{x-x^2}{n}+\left(x^2+\frac{x-x^2}{n}\right)\alpha_n\right|$$

$$\leq\sup_{x\in[0,1]}\frac{x-x^2}{n}+\sup_{x\in[0,1]}x^2\alpha_n+\sup_{x\in[0,1]}\left(\frac{x-x^2}{n}\right)\alpha_n$$

$$=\frac{1}{4n}+\alpha_n+\frac{1}{4n}\alpha_n$$

olup $st-\lim\alpha=0$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4n}=0$ ve dolayısıyla $st-\lim\frac{1}{4n}=0$ olduğundan

$st-\lim\left\|L_n(f_2)-f_2\right\|=0$ olur. İstatistiksel Korovkin tipi teoremden dolayı herhangi bir $f\in C[0,1]$ fonksiyonu için

$$st-\lim\left\|L_n(f)-f\right\|=0$$

elde edilir. Diğer taraftan $\left\| L_n\left(f_0\right) - f_0 \right\| = \alpha_n$ ve $\left(\alpha_n\right)$ ıraksak olduğundan $n \to \infty$ için

$$\left\| L_n\left(f_0\right) - f_0 \right\| \not\to 0$$

olup klasik Korovkin tipi teoremin şartı sağlanmaz. Buradan

$$\left\| L_n\left(f\right) - f \right\| \not\to 0$$

olur.

Şimdi ise istatistiksel yakınsaklık mertebesi tanımı verilsin.

2.3.3. Tanım: $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| \left\{ k \le n : \left| \alpha_k - L \right| \ge \varepsilon \right\} \right|}{n^{1-\beta}} = 0$$

ise $\alpha = \left(\alpha_n\right)$ sayı dizisi $0 < \beta < 1$ mertebesi ile L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $\alpha_n - L = st - o\left(n^{-\beta}\right)$ ile gösterilir (Gadijev ve Orhan , 2002).

2.3.4. Teorem: (L_n), $L_n : C\left[a,b\right] \to B\left[a,b\right]$ pozitif lineer operatörler dizisi $n \to \infty$ için

(*i*) $\left\| L_n(f_0) - f_0 \right\| = st - o\left(n^{-\beta_o}\right)$

(*ii*) $\left\| L_n(f_1) - f_1 \right\| = st - o\left(n^{-\beta_1}\right)$

(*iii*) $\left\| L_n(f_2; x) - f_2 \right\| = st - o\left(n^{-\beta_2}\right)$

koşulları sağlanıyorsa herhangi bir $f \in C\left[a,b\right]$ için $n \to \infty$ iken $\beta = \min\left\{\beta_0, \beta_1, \beta_2\right\}$ olmak üzere

$$\left\| L_n(f) - f \right\| = st - o(n^{-\beta})$$

dır (Gadjiev ve Orhan, 2002).

İspat: 2.3.1. Teorem’in ispatındaki (9) eşitsizliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\left|\left\{n:\|L_n(f)-f\|\geq \varepsilon^{'}\right\}\right|}{N^{1-\beta}} \leq \frac{\left|\left\{n:\|L_n(f_0)-f_0\|\geq \frac{\varepsilon^{'}-\varepsilon}{3K}\right\}\right|}{N^{1-\beta_0}}\frac{N^{1-\beta_0}}{N^{1-\beta}}$$

$$+\frac{\left|\left\{n:\|L_n(f_1)-f_1\|\geq \frac{\varepsilon^{'}-\varepsilon}{3K}\right\}\right|}{N^{1-\beta_1}}\frac{N^{1-\beta_1}}{N^{1-\beta}}$$

$$+\frac{\left|\left\{n:\|L_n(f_2)-f_2\|\geq \frac{\varepsilon^{'}-\varepsilon}{3K}\right\}\right|}{N^{1-\beta_2}}\frac{N^{1-\beta_2}}{N^{1-\beta}}.$$

$N\to\infty$ için limit alınırsa $(i),(ii),(iii)$ ‘den istenilen sonuç elde edilir.

Şimdi

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}, x\in[0,1]$$

klasik Bernstein polinomları dizisi tekrar ele alınsın. Burada

$$B_n(f_0;x)=f_0(x), B_n(f_1;x)=f_1(x), B_n(f_2;x)=f_2(x)+\frac{x-x^2}{n}$$

olduğu bilindiğine göre ilk olarak (i) ve (ii) ’nin sağlandığı görülür. Ayrıca

$$\left\{n:\|B_n(f_2)-f_2\|\geq \varepsilon^{'}\right\}=\left\{n:\frac{1}{4n}\geq \varepsilon^{'}\right\}$$

kümesi doğal sayılar kümesinin sonlu bir alt kümesidir böylece (iii) de sağlanır.

Sonuç olarak: eğer f, $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon ise $\beta\in(0,1)$ için $n\to\infty$ iken

$$\|B_n(f)-f\|=st-o(n^{-\beta})$$

sağlanır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında ilk olarak 2008 yılında Karakuş ve ark.'nın çalışmasındaki yöntemler kullanılarak Korovkin tipi teorem çalışıldı. İkinci kısımda Ghosal (2016) tarafından düzenlenen ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi teorem çalışıldı. Son bölümde Akdağ (2016) tarafından verilen çalışma kullanılarak ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Korovkin tipi teorem çalışıldı.

4. BULGULAR

4.1. Equi İstatistiksel Yakınsaklık ve Korovkin Tipi Yaklaşım Teoremi

İlk olaral equi-istatistiksel yakınsaklık kavramını hatırlatalım. X reel sayıların kompakt bir alt kümesi ve $f, f_n \in C(X)$ olsun. $\varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi_n(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : \left| f_k(x) - f(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \ ,\ x \in X$$

ve

$$\phi_n(\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : \left\| f_k - f\right\| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

gösterilsin.

4.1.1. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_n(x,\varepsilon)}{n} = 0$$

oluyorsa yani;

$$st - \lim \left| f_n(x) - f(x)\right| = 0$$

ise (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna istatistiksel noktasal yakınsaktır denir ve $f_n \to f$ (ist.) ile gösterilir (Duman ve Orhan, 2004).

4.1.2. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için

$$st - \lim \left\| f_n - f\right\| = 0$$

ya da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\phi_n(\varepsilon)}{n} = 0$$

oluyorsa (f_n) fonksiyon dizisi f fonksiyonuna istatistiksel düzgün yakınsaktır denir ve $f_n \rightrightarrows f$ (ist.) ile gösterilir (Duman ve Orhan, 2004).

4.1.3. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n(x,\varepsilon)}{n}=0,\ x\in X \text{ 'e göre düzgün}$$

yani;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|\varphi_n(.,\varepsilon)\|}{n}=0$$

ise (f_n), X üzerinde f fonksiyonuna equi-istatistiksel yakınsaktır denir ve $f_n \to f$ (equi-ist.) ile gösterilir (Balcerzak ve ark, 2007).

Bu tanımlar göz önüne alınarak $C(X)$ uzayı üzerinde alışılmış düzgün yakınsaklık, istatistiksel düzgün yakınsaklık, istatistiksel noktasal yakınsaklık ve equi-istatistiksel yakınsaklık ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

4.1.4. Lemma: X üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ ise $f_n \rightrightarrows f$ (ist.), X üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ (ist.) ise $f_n \to f$ (equi-ist.). Ayrıca, X üzerinde $f_n \to f$ (equi-ist.) ise $f_n \to f$ (ist.) (Balcerzak ve ark, 2007).

İspat: Öncelikle X üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ olsun. Bu durumda $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|=0$ yani;

$\forall\varepsilon>0$ için $\exists n_0\in\mathbb{N}$ vardır $\ni$ $\forall n>n_0$ için $\|f_n - f\|<\varepsilon$ olur. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\phi_n(\varepsilon)}{n}=0$$

olup, bu ise X üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ (ist.) olduğunu gösterir.

Şimdi X üzerinde $f_n \rightrightarrows f$ (ist.) olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\phi_n(\varepsilon)}{n}=0$$

yazılır. Her $x\in X$ için

$$|f_n(x)-f(x)|\le\sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|=\|f_n - f\|$$

olduğunda her $x\in X$ için

$$\{k\le n: |f_k(x)-f(x)|\ge\varepsilon\}\subseteq\{k\le n: \|f_k - f\|\ge\varepsilon\}$$

yazılır. Buradan

$$\left|\left\{k \le n : |f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\right\}\right| \le \left|\left\{k \le n : \|f_k - f\| \ge \varepsilon\right\}\right|$$

olup eşitsizlik $\frac{1}{n}$ ile çarpılıp, $n \to \infty$ için limit alınırsa istenilen elde edilir. Yani X üzerinde $f_n \to f$ (equi-ist.) olur.

Bu lemmanın karşıtının her zaman doğru olmadığı bir örnekle gösterilsin.

4.1.5. Örnek: Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x \in [0,1]$ ve $g(x) = 0$ olmak üzere $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonları

$$g_n(x) = \begin{cases} 2^{n+1}\left(x - \frac{1}{2^n}\right) & , \quad x \in \left[\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}}\right] \\ -2^{n+1}\left(x - \frac{1}{2^{n-1}}\right) & , \quad x \in \left[\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ 0 & , \quad \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $x \in [0,1]$ için

$$\frac{\left|\left\{k \le n : |g_k(x) - g(x)| \ge \varepsilon\right\}\right|}{n} \le \frac{1}{n}$$

olur. Buradan

$$g_n \to g = 0 \text{ (equi-ist.)}$$

olduğu görülebilir. Ancak, her $n \in \mathbb{N}$ için $c_n = \sup_{x \in [0,1]} |g_n(x) - g(x)| = 1$ olduğundan (g_n) fonksiyon dizisi istatistiksel düzgün yakınsak ve bilinen anlamda düzgün yakınsak değildir.

Şimdi 2008 yılında Karakuş ve ark, tarafından verilen Korovkin tipi yaklaşım teoremi verilsin.

4.1.6. Teorem: (L_n), $L_n : C(X) \to C(X)$ pozitif lineer operatörler dizisi olsun. Her $f \in C(X)$ için, X üzerinde

$$L_n(f)\to f \text{ (equi-ist.)} \tag{7}$$

olması için gerek ve yeter şart, $f_i(x)=x^i$, $i=0,1,2$ olmak üzere X üzerinde

$$L_n(f_i)\to f_i \text{ (equi-ist.)} \tag{8}$$

olmasıdır (Karakuş ve ark, 2008).

İspat: (7) sağlansın. f_i $(i=0,1,2)$ fonksiyonları $C(X)$ uzayına ait olduğundan (8) koşulunun sağlandığı açıktır.

Şimdi (8) koşulunun sağlandığını yani, X üzerinde $L_n(f_i)\to f_i$ (equi-ist.) olduğunu kabul edelim. $f\in C(X)$ ve $x\in X$ sabit olsun.

f, x noktasında sürekli olduğundan her $\varepsilon>0$ için $|y-x|<\delta$ koşulunu sağlayan her $y\in X$ için $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Bu takdirde $X_\delta=[x-\delta,x+\delta]\cap X$ olduğundan

$$|f(y)-f(x)|=|f(y)-f(x)|\chi_{X_\delta}(y)+|f(y)-f(x)|\chi_{X/X_\delta}(y)$$

olur. Buradan $M:=\|f\|$ olmak üzere her $y\in X$ için

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon+2M\frac{(y-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. L_n pozitif ve lineer olduğundan

$$\begin{aligned}
|L_n(f;x)-f(x)| &= |L_n(f(y);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)|\\
&= |L_n(f(y)-f(x);x)+f(x)(L_n(f_0;x)-f_0(x))|\\
&\le L_n(|f(y)-f(x)|;x)+|f(x)||L_n(f_0;x)-f_0(x)|\\
&\le L_n\left(\varepsilon+2M\frac{(y-x)^2}{\delta^2};x\right)+\|f\||L_n(f_0;x)-f_0(x)|
\end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon L_n\left(f_0;x\right)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left(\left(y-x\right)^2;x\right)+M\left|L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right|$$

$$\leq \varepsilon+\varepsilon\left|L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right|+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left(\left(y-x\right)^2;x\right)+M\left|L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right|$$

$$=\varepsilon+\left(\varepsilon+M\right)\left|L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right|+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left(\left(y-x\right)^2;x\right)$$

yazılır. Burada “$L_n\left(\left(y-x\right)^2;x\right)$” ifadesi göz önüne alınırsa;

$$L_n\left(\left(y-x\right)^2;x\right)=L_n(y^2-2xy+x^2;x)=L_n\left(y^2;x\right)-2xL_n\left(y;x\right)+x^2L_n\left(1;x\right)$$

olup, böylece

$$\left|L_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq \varepsilon+\left(\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}\left|x\right|^2\right)\left|L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right|$$
$$+\frac{4M}{\delta^2}\left|x\right|\left|L_n\left(f_1;x\right)-f_1\left(x\right)\right|+\frac{2M}{\delta^2}\left|L_n\left(f_2;x\right)-f_2\left(x\right)\right|$$

elde edilir. $T:=\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}\left(\|f_2\|+2\|f_1\|+1\right)$ olmak üzere

$$\left|L_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\leq \varepsilon+T\sum_{i=0}^{2}\left|L_n\left(f_i;x\right)-f_i\left(x\right)\right| \tag{9}$$

elde edilir. Verilmiş bir $r>0$ için $\varepsilon>0$ seçilsin öyle ki $\varepsilon>r$ olsun. Ayrıca

$$\varphi_n\left(x,r\right):=\left|\left\{k\leq n:\left|L_k\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\geq r\right\}\right|,$$

$$\varphi_{i,n}\left(x,r\right):=\left|\left\{k\leq n:\left|L_k\left(f_i;x\right)-f_i\left(x\right)\right|\geq \frac{r-\varepsilon}{3T}\right\}\right|, \qquad i=0,1,2,$$

kümeleri belirlensin. (9) eşitsizliğinden

$$\varphi_n(x,r)\leq \sum_{i=0}^{2}\varphi_{i,n}(x,r)$$

olur. Buradan

$$\frac{\left\|\varphi_n\left(.,r\right)\right\|}{n}\leq \sum_{i=0}^{2}\left(\frac{\left\|\varphi_n\left(.,r\right)\right\|}{n}\right)$$

elde edilir. (8) den

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{2}\left(\frac{\|\varphi_n(.,r)\|}{n}\right)=0$$

olup, her $r>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|\varphi_n(.,r)\|}{n}=0$$

elde edilir. Bu ise X üzerinde

$L_n(f)\to f$ (equi-ist.)

olduğunu gösterir. Böylelikle ispat tamamlanır.

Bu teoremin klasik ve istatistiksel Korovkin tipi teoremlerden daha kuvvetli olduğunu gösteren bir örnek verilsin.

4.1.7. Örnek: $C[0,1]$ üzerinde tanımlı klasik $B_n(f;x)$ Bernstein polinomları ve

$$g_n(x)=\begin{cases} 2^{n+1}\left(x-\frac{1}{2^n}\right) & , \quad x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right] \\ -2^{n+1}\left(x-\frac{1}{2^{n-1}}\right) & , \quad x\in\left[\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ 0 & , \quad \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ile tanımlı (g_n) fonksiyon dizisi yardımı ile

$$D_n(f;x)=(1+g_n(x))B_n(f;x)$$

pozitif lineer operatörü oluşturulsun.

$$B_n(f_0;x)=f_0(x),\, B_n(f_1;x)=f_1(x),\, B_n(f_2;x)=f_2(x)+\frac{x-x^2}{n}$$

olduğundan

$$D_n(f_0;x)=(1+g_n(x))\,f_0(x),$$
$$D_n(f_1;x)=(1+g_n(x))\,f_1(x),$$
$$D_n(f_2;x)=(1+g_n(x))\left(f_2(x)+\frac{x(1-x)}{n}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $[0,1]$ üzerinde $g_n\to g=0$ (equi-ist.) olup,

$$D_n(f_i)\to f_i \text{ (equi-ist.) } (i=0,1,2) \tag{10}$$

bulunur. Yani;

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\le n:\left|D_n(f_0;x)-f_0(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\le n:\left|(1+g_n(x))(f_0(x))-f_0(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\le n:\left|g_n(x)\,f_0(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\le n:\left|g_n(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\le n:\left|D_n(f_1;x)-f_1(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\le n:\left|(1+g_n(x))\,f_1(x)-f_1(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\le n:\left|g_n(x)\,f_1(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{n}\\&\le\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\le n:\left|g_n(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{n}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\le n:\left|D_n(f_2;x)-f_2(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\le n:\left|(1+g_n(x))\left(f_2(x)+\frac{x-x^2}{n}\right)-f_2(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\le n:\left|g_n(x)\,f_2(x)+g_n(x)\left(\frac{x-x^2}{n}\right)+\frac{x-x^2}{n}\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{n}\end{aligned}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{k \leq n : \left|g_n(x)\left(1+\frac{1}{4n}\right)+\frac{x-x^2}{4n}\right| \geq \varepsilon\right\}\right|}{n}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{k \leq n : \left|g_n(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{k \leq n : \frac{x-x^2}{4n} \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|}{n}$$

yazılır. Dolayısıyla $[0,1]$ üzerinde $(g_n) \to g = 0$ ‘a (equi-ist.) olduğundan $D_n(f_i) \to f_i$ (equi-ist.), i=0,1,2 olduğu elde edilir. 4.1.6. Teorem’den her $f \in C[0,1]$ için $D_n(f) \to f$ (equi-ist.) olduğu görülmektedir. Fakat (g_n), $[0,1]$ üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna istatistiksel düzgün yakınsak olmadığından (D_n) pozitif lineer operatörler dizisi istatistiksel Korovkin tipi teorem sağlamaz. Ayrıca (g_n), $[0,1]$ üzerinde $g = 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olmadığından (D_n) pozitif lineer operatörler dizisi klasik Korovkin teoremini de sağlamaz.

Ayrıca bu bölümde $C(X)$ uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörler dizisinin equi-istatistiksel yakınsaklık mertebesi süreklilik modülü yardımıyla incelenecektir.

$C(X)$ üzerinde tanımlı f fonksiyonu için süreklilik modülü

$$\omega(f;\delta) := \sup_{\substack{|y-x|\leq\delta \\ x,y\in X}} \left|f(y) - f(x)\right| \qquad (\delta > 0)$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca

$x, y \in X$, $\delta > 0$ $n > 0$ ve $[n]$, n’nin tam kısmını göstermek üzere;

(i) $\omega(f;n\delta) \leq (1+[n])\omega(f;\delta)$,

(ii) $\left|f(y) - f(x)\right| \leq \omega(f;|y-x|)$,

(iii) $\left|f(y) - f(x)\right| \leq \left(1+\frac{|y-x|}{\delta}\right)\omega(f;\delta)$

olduğu bilinmektedir.

Şimdi ise Karakuş ve ark, (2008) ifade ettiği aşağıdaki tanım verilsin:

4.1.8. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}}=0,\ x\in X \text{ 'e göre düzgün}$$

ya da

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|\varphi_n(.,\varepsilon)\|}{n^{1-\beta}}=0$$

ise (f_n) fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna $\beta\in(0,1)$ mertebesi ile equi-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda X üzerinde

$$f_n-f=o\left(n^{-\beta}\right)(equi-ist.)$$

ile gösterilir (Karakuş ve ark, 2008).

Bu tanım kullanılarak 4.1.6. Teorem ile teoremin equi-istatistiksel yakınsaklık mertebesi bulunabilir. Öncelikle aşağıdaki lemma verilsin.

4.1.9. Lemma: $C(X)$ uzayında iki fonksiyon dizisi (f_n) ve (g_n) olsun. X üzerinde

$$f_n-f=o\left(n^{-\beta_1}\right)(equi-ist.),$$
$$g_n-g=o\left(n^{-\beta_2}\right)(equi-ist.)$$

olsun. $\beta:=\min\{\beta_1,\beta_2\}$ olmak üzere

(i) $(f_n+g_n)-(f+g)=o\left(n^{-\beta}\right)(equi-ist.),$

(ii) $(f_n-f).(g_n-g)=o\left(n^{-\beta}\right)(equi-ist.),$

(iii) Herhangi bir λ reel sayısı için $\lambda(f_n-f)=o\left(n^{-\beta_1}\right)(equi-ist.),$

(iv) $\sqrt{|f_n-f|}=o\left(n^{-\beta_1}\right)(equi-ist.)$

dır (Karakuş ve ark, 2008).

İspat: (i) X üzerinde $(f_n-f)=o\left(n^{-\beta_1}\right)(equi-ist.)$ ve $(g_n-g)=o\left(n^{-\beta_2}\right)(equi-ist.)$

olsun. $\varepsilon>0$ ve $x\in X$ için

$$\varphi_n(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : \left|(f_k + g_k)(x) - (f+g)(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right|,$$
$$\varphi_{1,n}(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : \left|f_k(x) - f(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|,$$
$$\varphi_{2,n}(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : \left|g_k(x) - g(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

kümeleri tanımlansın. Buradan

$$\left|(f_k + g_k)(x) - (f+g)(x)\right| \le \left|f_k(x) - f(x)\right| + \left|g_k(x) - g(x)\right|$$

olduğundan

$$\left|\left\{k \le n : \left|(f_k + g_k)(x) - (f+g)(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \le \left|\left\{k \le n : \left|f_k(x) - f(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \left|\left\{k \le n : \left|g_k(x) - g(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

yazılır. Dolayısıyla;

$$\varphi_n(x,\varepsilon) \le \varphi_{1,n}(x,\varepsilon) + \varphi_{2,n}(x,\varepsilon)$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{n^{1-\beta}}$ ile çarpılırsa

$$\frac{\varphi_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} \le \frac{\varphi_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} + \frac{\varphi_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}}$$

elde edilir. $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$ olduğundan

$$\frac{\varphi_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} \le \frac{\varphi_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta_1}} + \frac{\varphi_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta_2}}$$

bulunur. Buradan da

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\varphi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\varphi_{1,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\varphi_{2,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_2}}$$

olup kabulden, $\lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\varphi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}} = 0$ elde edilir.

(ii) $(f_n - f) = o\left(n^{-\beta_1}\right)(equi-ist.)$ ve $(g_n - g) = o\left(n^{-\beta_2}\right)(equi-ist.)$ olsun.

$\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için

$$\varphi_n(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : |f_k(x) - f(x)||g_k(x) - g(x)| \ge \varepsilon\right\}\right|,$$
$$\varphi_{1,n}(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : |f_k(x) - f(x)| \ge \sqrt{\varepsilon}\right\}\right|,$$
$$\varphi_{2,n}(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : |g_k(x) - g(x)| \ge \sqrt{\varepsilon}\right\}\right|$$

kümeleri belirlensin. Yine $\forall \alpha, \beta \ge 0$ için $\alpha\beta \ge \varepsilon$ ise $\alpha \ge \sqrt{\varepsilon}$ veya $\beta \ge \sqrt{\varepsilon}$ olduğundan

$$\frac{\varphi_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} \le \frac{\varphi_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} + \frac{\varphi_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}}$$

olup, $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\varphi_n(.,\varepsilon)\|}{n^{1-\beta}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\|\varphi_{1,n}(.,\varepsilon)\|}{n^{1-\beta_1}} + \lim_{n\to\infty} \frac{\|\varphi_{2,n}(.,\varepsilon)\|}{n^{1-\beta_2}}$$

bulunur. Dolayısıyla $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\|\varphi_n(.,\varepsilon)\|}{n^{1-\beta}} = 0$ olduğundan istenilen elde edilir.

(iii) X üzerinde $(f_n - f) = o\left(n^{-\beta_1}\right)(equi-ist.)$ ve λ herhangi bir reel sayı olsun.

$\lambda = 0$ ise sonuç aşikardır. $\lambda \ne 0$ ise

$$\left|\left\{k \le n : |\lambda||f_k(x) - f(x)| \ge \varepsilon\right\}\right| = \left|\left\{k \le n : |f_k(x) - f(x)| \ge \frac{\varepsilon}{|\lambda|}\right\}\right|$$

olup $\dfrac{1}{n^{1-\beta_1}}$ ile çarpıp limit alınırsa istenilen elde edilir.

(iv) X üzerinde $(f_n - f) = o\left(n^{-\beta_1}\right)(equi-ist.)$ olsun.

$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$ ise $\sqrt{|f_k(x) - f(x)|} \le \sqrt{\varepsilon}$

olup

$$\left\{k \le n : \sqrt{\left|f_k(x) - f(x)\right|} \ge \sqrt{\varepsilon}\right\} \subseteq \left\{k \le n : \left|f_k(x) - f(x)\right| \ge \varepsilon\right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\left|\left\{k \le n : \sqrt{\left|f_k(x) - f(x)\right|} \ge \sqrt{\varepsilon}\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}} \le \frac{\left|\left\{k \le n : \left|f_k(x) - f(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}}$$

olup $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{k \le n : \sqrt{\left|f_k(x) - f(x)\right|} \ge \sqrt{\varepsilon}\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{k \le n :_k \left|f_k(x) - f(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}}$$

bulunur. Hipotezden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\left\{k \le n : \sqrt{\left|f_k(x) - f(x)\right|} \ge \sqrt{\varepsilon}\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}} = 0$$

olup istenilen elde edilir.

Şimdi süreklilik modülü yardımıyla aşağıdaki teorem verilsin.

4.1.10. Teorem: (L_n), $L_n : C(X) \to C(X)$ pozitif lineer operatörler dizisi olsun.

$\delta_n(x) = \sqrt{L_n(\theta^2; x)}$ $\theta(y) = y - x$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlansın.

$(a) L_n(f_0) - f_0 = o\left(n^{-\beta_0}\right)(equi - ist.)$,
$(b) \omega(f; \delta_n) = o\left(n^{-\beta_1}\right)(equi - ist.)$.

Bu durumda her $f \in C(X)$ için $\beta = \min\{\beta_0, \beta_1\}$ olmak üzere

$$L_n(f) - f = o\left(n^{-\beta}\right)(equi - ist.)$$

dir (Karakuş ve ark, 2008).

İspat: $f \in C(X)$, $x \in X$ olsun. L_n operatörünün pozitif ve lineerliğinden $M := \|f\|$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\left|L_n(f;x)-f(x)\right| &= \left|L_n(f(y);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)\right| \\
&= \left|L_n((f(y)-f(x));x)+f(x)L_n(1;x)-1\right| \\
&\leq L_n(\left|f(y)-f(x)\right|;x)+\|f\|\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right| \\
&\leq L_n\left(\left(1+\frac{(y-x)}{\delta}\right)\omega(f;\delta);x\right)+M\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right| \\
&\leq \omega(f;\delta)\left\{L_n(1;x)+\frac{1}{\delta}L_n(\left|(y-x)\right|;x)\right\}+M\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|
\end{aligned}
$$

bulunur. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
L_n(\left|y-x\right|;x) &\leq \left(L_n\left((y-x)^2;x\right)^{1/2}\left(L_n(f_0;x)\right)^{1/2}\right) \\
&\leq \sqrt{L_n(\theta^2;x)}\sqrt{L_n(f_0;x)}
\end{aligned}
$$

olup

$$
\left|L_n(f;x)-f(x)\right| \leq M\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|+\omega(f;\delta)\left\{L_n(f_0;x)+\frac{1}{\delta}\sqrt{L_n(\theta^2;x)}\sqrt{L_n(f_0;x)}\right\}
$$

elde edilir. Burada $\delta=\delta_n=\sqrt{L_n(\theta^2;x)}$ alınırsa

$$
\left|L_n(f;x)-f(x)\right| \leq M\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|+\omega(f;\delta)\left\{L_n(f_0;x)+\sqrt{L_n(f_0;x)}\right\}
$$

olur. Buradan;

$$
\begin{aligned}
\left|L_n(f;x)-f(x)\right| &\leq M\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|+\omega(f;\delta)\left(L_n(f_0;x)-f_0(x)\right) \\
&\quad +\sqrt{L_n(f_0;x)-f_0(x)}+2 \\
&\leq M\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|+2\omega(f;\delta)+\omega(f;\delta)\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right| \\
&\quad +\omega(f;\delta)\sqrt{L_n(f_0;x)-f_0(x)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\varepsilon>0$ ve $x\in X$ için

$$
\begin{aligned}
\varphi_n(x,\varepsilon) &:= \left|\left\{k\leq n:\left|L_k(f;x)-f(x)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|, \\
\varphi_{1,n}(x,\varepsilon) &:= \left|\left\{k\leq n: M\left|L_k(f_0;x)-f_0(x)\right|\geq\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|,
\end{aligned}
$$

$$\varphi_{2,n}(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : 2\omega(f;\delta_k) \ge \frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|,$$

$$\varphi_{3,n}(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : \omega(f;\delta_k)\left|L_k(f_0;x) - f_0(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|,$$

$$\varphi_{4,n}(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le n : \omega(f;\delta_k)\sqrt{\left|L_k(f_0;x) - f_0(x)\right|} \ge \frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|$$

kümeleri tanımlansın. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$\frac{\varphi_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} \le \frac{\varphi_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} + \frac{\varphi_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} + \frac{\varphi_{3,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} + \frac{\varphi_{4,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}}$$

olduğu görülür. Buradan $\beta = \min\{\beta_0, \beta_1\}$ olduğundan

$$\frac{\varphi_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} \le \frac{\varphi_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta_0}} + \frac{\varphi_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta_1}} + \frac{\varphi_{3,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}} + \frac{\varphi_{4,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}}$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\frac{\left\|\varphi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}} \le \frac{\left\|\varphi_{1,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_0}} + \frac{\left\|\varphi_{2,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_1}} + \frac{\left\|\varphi_{3,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}} + \frac{\left\|\varphi_{4,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}}$$

olup buradan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\varphi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}} \le \lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\varphi_{1,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_0}} + \lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\varphi_{2,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_1}} + \lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\varphi_{3,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}} + \lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\varphi_{4,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}}$$

elde edilir. Hipotezden $\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\varphi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}} = 0$ olduğu görülmektedir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.1.11. Sonuç: 4.1.10. Teorem'deki (a) ve (b) koşulları, X üzerinde

$$L_n(f_i) - f_i = o\left(n^{-\beta_i}\right)(equi-ist.)(i = 0,1,2)$$

koşulları ile değiştirilsin. Ayrıca

$$\theta(y) = y - x,\ \theta^2(y) = y^2 - 2xy + x^2,\quad f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2$$

olsun. Bu durumda

$$L_n\left(\theta^2;x\right)=L_n\left(f_2;x\right)-2xL_n\left(f_1;x\right)+x^2L_n\left(f_0;x\right)$$
$$\leq\left|L_n\left(f_2;x\right)-f_2\left(x\right)\right|+2\left\|f_1\right\|\left|L_n\left(f_1;x\right)-f_1\left(x\right)\right|+\left\|f_2\right\|\left|L_n\left(f_0;x\right)-f_0\left(x\right)\right|$$

olup $M:=1+2\left\|f_1\right\|++\left\|f_2\right\|$ olmak üzere

$$L_n\left(\theta^2;x\right)\leq M\sum_{i=0}^{2}\left|L_n\left(f_i;x\right)-f_i\left(x\right)\right|$$

elde edilir. Buradan $\beta=\min\left\{\beta_0,\beta_1,\beta_2\right\}$ denilirse 4.1.9. Lemma'dan

$$\delta_n=\sqrt{L_n\left(\theta^2;x\right)}=o\left(n^{-\beta}\right)(equi-ist.)$$

dır. Buradan X üzerinde

$$\omega\left(f;\delta_n\right)=o\left(n^{-\beta}\right)(equi-ist.)$$

olduğu görülür. 4.1.10. Teorem'den

$$\omega\left(f;\delta_n\right)=o\left(n^{-\beta}\right)(equi-ist.)$$

kullanılırsa her $f\in C\left(X\right)$ için X üzerinde

$L_n\left(f\right)-f=o\left(n^{-\beta}\right)(equi-ist.)$ olur.

Böylece (a) ve (b) koşulları yerine $L_n\left(f_i\right)-f_i=o\left(n^{-\beta_i}\right)$ kullanılırsa equi-istatistiksel korovkin tipi teoremdeki pozitif lineer operatörler dizisi üzerinde equi-istatistiksel yakınsaklık mertebesi elde edilir.

Şimdi ise $x\in[0,1]$ ve $f\in C[0,1]$ olmak üzere 4.1.7. Örnek'de tanımlanan $\left(D_n\right)$ pozitif lineer operatörler dizisi için equi-istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Voronovskaya tipi teoremi elde etmek için teoremin ispatında gerekli olan aşağıdaki lemma verilsin.

4.1.12. Lemma: $x\in[0,1]$ ve $\theta(y):=y-x$ olsun. Bu durumda $[0,1]$ aralığında

$$n^2D_n\left(\theta^4;x\right)\to 3f_2\left(f_2-2f_1+f_0\right)(equi-ist.)$$

olur (Karakuş ve ark, 2008).

İspat: D_n pozitif lineer operatörler dizisi için

$$D_n\left(\left(y-x\right)^4;x\right)=D_n\left(y^4-4y^3x+6y^2x^2-4yx^3+x^4;x\right)$$
$$=\left(1+g_n\left(x\right)\right)\left\{B_n\left(y^4;x\right)-4xB_n\left(y^3;x\right)+6x^2B_n\left(y^2;x\right)-4x^3B_n\left(y;x\right)+x^4B_n\left(1;x\right)\right\}$$

şeklindedir. Bernstein polinomları göz önüne alındığında,

$$B_n\left(1;x\right)=1$$
$$B_n\left(y;x\right)=x,$$
$$B_n\left(y^2;x\right)=x^2+\frac{x-x^2}{n^2},$$
$$B_n\left(y^3;x\right)=\frac{\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{n^2}x^3+\frac{3\left(n-1\right)}{n^2}x^2+\frac{x}{n^2},$$
$$B_n\left(y^4;x\right)=\frac{\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)}{n^3}x^4+\frac{6\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{n^3}x^3+\frac{7\left(n-1\right)}{n^3}x^3+\frac{x}{n^3},$$

olduğu görülür. Bu değerler yukarıda yerine yazılırsa

$$D_n(\theta^4;x)=\left(1+g_n\left(x\right)\right)\left(\frac{3x^4}{n^2}-\frac{6x^4}{n^3}-\frac{6x^3}{n^2}+\frac{12x^3}{n^3}+\frac{3x^2}{n^2}-\frac{7x^2}{n^3}+\frac{x}{n^3}\right)$$

bulunur. Buradan

$$n^2D_n(\theta^4;x)=\left(1+g_n\left(x\right)\right)\left(3x^4-\frac{6x^4}{n}-6x^3+\frac{12x^3}{n}+3x^2-\frac{7x^2}{n}+\frac{x}{n}\right)$$
$$=\left(1+g_n\left(x\right)\right)\left(3x^4-6x^3+3x^2+\left(\frac{-6x^4+12x^3-7x^2+x}{n}\right)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left|n^2D_n\left(\theta^4;x\right)-3x^4+6x^3+3x^2\right|\le 12g_n\left(x\right)+\frac{26\left(1+g_n\left(x\right)\right)}{n}$$

olur. $g_n\to g=0\left(equi-ist.\right)$ olduğundan

$$12g_n+\frac{26\left(1+g_n\right)}{n}\to 0\left(equi-ist.\right)$$

olur. Buradan

$$n^2 D_n\left(\theta^4;x\right)\to 3f_2\left(f_2-2f_1+f_0\right)\left(equi-ist.\right)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

4.1.13. Teorem: $x\in[0,1]$ ve $f, f', f'' \in C[0,1]$ olsun. Bu durumda

$$n\left\{D_n\left(f\right)-f\right\}\to \frac{x(1-x)}{2} f''(x)\left(equi-ist.\right)$$

dır (Karakuş ve ark, 2008).

İspat: $f, f', f'' \in C[0,1]$ ve $x\in[0,1]$ için

$$\tau_x\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{f\left(y\right)-f\left(x\right)-\left(y-x\right)f'\left(x\right)-\frac{1}{2}\left(y-x\right)^2 f''\left(x\right)}{\left(y-x\right)^2}, & y\neq x\\ 0, & y=x\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\tau_x\left(x\right)=0$ ve $\tau_x\in C[0,1]$ 'de olduğu görülür. Taylor açılımından:

$$f\left(y\right)=f\left(x\right)+\left(y-x\right)f'\left(x\right)+\frac{\left(y-x\right)^2}{2}f''\left(x\right)+\left(y-x\right)^2\tau_x\left(y\right)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafına D_n operatörü uygulanırsa;

$$\begin{aligned}D_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)&=f\left(x\right)g_n\left(x\right)+f'\left(x\right)D_n\left(\theta;x\right)+\frac{f''\left(x\right)}{2}D_n\left(\theta^2;x\right)+D_n\left(\theta^2\tau_x;x\right)\\ &=f\left(x\right)g_n\left(x\right)+f'\left(x\right)\left\{B_n\left(y;x\right)-xB_n\left(1;x\right)\right\}\left(1+g_n\left(x\right)\right)\\ &+\frac{f''\left(x\right)}{2}\left\{B_n\left(y^2;x\right)-2xB_n\left(y;x\right)+x^2B_n\left(1;x\right)\right\}\left(1+g_n\left(x\right)\right)+D_n\left(\theta^2\tau_x;x\right)\\ &=f\left(x\right)g_n\left(x\right)+\frac{f''\left(x\right)}{2}\frac{\left(x-x^2\right)}{n}\left(1+g_n\left(x\right)\right)+D_n\left(\theta^2\tau_x;x\right)\\ &=f\left(x\right)g_n\left(x\right)+\frac{\left(x-x^2\right)f''\left(x\right)}{2n}\left(1+g_n\left(x\right)\right)+D_n\left(\theta^2\tau_x;x\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen son eşitlik n ile çarpılırsa

$$n\left(D_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right)=nf\left(x\right)g_n\left(x\right)+\frac{\left(x-x^2\right)f''\left(x\right)}{2}\left(1+g_n\left(x\right)\right)+D_n\left(\theta^2\tau_x;x\right)$$
$$=nf\left(x\right)g_n\left(x\right)+\frac{\left(x-x^2\right)f''\left(x\right)}{2}+\frac{\left(x-x^2\right)f''\left(x\right)}{2}g_n\left(x\right)+nD_n\left(\theta^2\tau_x;x\right)$$

olup $\theta(y)=y-x,\quad M:=\|f\|+\|f''\|$ olmak üzere

$$\left|n\left(D_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right)-\frac{\left(x-x^2\right)f''\left(x\right)}{2}\right|\leq M\left(n+1\right)g_n\left(x\right)+n\left|D_n\left(\theta^2\tau_x;x\right)\right|$$

yazılır. Dolayısıyla $n\left|D_n\left(\theta^2\tau_x;x\right)\right|$ ifadesine Cauch-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$n\left|D_n\left(\theta^2\tau_x;x\right)\right|\leq\left(n^2D_n\left(\theta^4;x\right)\right)^{1/2}\left(D_n\left(\tau_x{}^2;x\right)\right)^{1/2} \tag{11}$$

elde edilir. Burada $\eta_x\left(y\right):=\tau^2{}_x\left(y\right)\quad\eta_x\left(x\right)=0$ ve $\eta_x\left(.\right)\in C\left[0,1\right]$ olup

$$D_n\left(\eta_x\left(y\right)\right)\to 0\left(equi-ist.\right) \tag{12}$$

olduğu görülür. Ayrıca (11) ve (12) den yararlanılarak 4.1.12 Lemma’dan

$$nL_n\left(\theta^2\tau_x;x\right)\to 0\left(equi-ist.\right)$$

dır. Ayrıca $\varepsilon>0$ için

$$\psi_n\left(x,\varepsilon\right):=\left|\left\{k\leq n:\left|k\left(D_k\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right)-\frac{x\left(1-x\right)}{2}f''\left(x\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|,$$
$$\psi_{1,n}\left(x,\varepsilon\right):=\left|\left\{k\leq n:\left|\left(k+1\right)g_k\left(x\right)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2M}\right\}\right|,$$
$$\psi_{2,n}\left(x,\varepsilon\right):=\left|\left\{k\leq n:\left|kD_k\left(\theta^2\tau_x;x\right)\right|\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

kümeleri belirlensin. Bu durumda

$$\frac{\psi_n\left(x,\varepsilon\right)}{n}\leq\frac{\psi_{1,n}\left(x,\varepsilon\right)}{n}+\frac{\psi_{2,n}\left(x,\varepsilon\right)}{n}$$

yazılır. Buradan

$$\frac{\left\|\psi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n} \le \frac{\left\|\psi_{1,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n} + \frac{\left\|\psi_{2,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n}$$

elde edilir. Dolayısıyla $n \to \infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\psi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n} = 0$$

bulunur. Böylelikle ispat tamamlanır.

4.2. Ağırlıklı İstatistiksel Yakınsaklık ve Korovkin Tipi Teorem

$(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k$, $P_n \to \infty$, $p_1 > 0$ ve $\liminf_{n\to\infty} p_n > 0$ olsun.

4.2.1. Tanım: $x = (x_k)$ dizisi ve her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \left|\left\{k \le P_n : p_k \left|x_k - L\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0,$$

koşulu gerçekleniyorsa (x) dizisi L sayısına ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum

$$st_{\overline{N}} - \lim x = L$$

ile gösterilir (Ghosal, 2016).

Ayrıca tüm ağırlıklı istatistiksel yakınsak dizi uzayı $S_{\overline{N}}$ sembolü ile gösterilir. Eğer tüm k değerleri için $p_k = 1$ alınırsa, ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

4.2.2. Örnek: $x = (x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, k = n^2 \\ 0\ , k \ne n^2 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = k$ seçilsin. Buradan $P_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = \frac{n(n+1)}{2}$ olup

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \left|\left\{k \le P_n : p_k \left|x_k - 0\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sqrt{P_n} = 0$$

elde edilir. Yani; (x_k) dizisi 0' a ağırlıklı istatistiksel yakınsak iken bilinen anlamda yakınsak değildir.

Her $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$\Psi(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le P_n : p_k \left|f_k(x) - f(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right|,$$

$$\Phi(\varepsilon) := \left|\left\{k \le P_n : p_k \left\|f_k - f\right\| \ge \varepsilon\right\}\right|.$$

4.2.4. Tanım: Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(\varepsilon)}{P_n} = 0$$

ise (f_n) dizisi f fonksiyonuna ağırlıklı istatistiksel düzgün yakınsaktır denir.

Bu $f_n \rightrightarrows f$ *(w-ist.)* ile gösterilir (Akdağ, 2016).

4.2.5. Tanım: $\forall \varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Psi(x,\varepsilon)}{P_n} = 0$$

ise (f_n) dizisi f fonksiyonuna ağırlıklı istatistiksel noktasal yakınsaktır denir ve bu durum $f_n \to f$ *(w-ist.)* ile gösterilir (Akdağ, 2016).

4.2.6. Uyarı: Tüm k değerleri için $p_k = 1$ alınırsa ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık, ağırlıklı istatistiksel noktasal yakınsaklık ve ağırlıklı istatistiksel düzgün yakınsaklık sırasıyla equi-istatistiksel yakınsaklığa, noktasal istatistiksel yakınsaklığa ve düzgün istatistiksel yakınsaklığa indirgenir.

4.2.7. Teorem: $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $P_n=\sum_{k=1}^{n} p_k$, $P_n\to\infty$, $p_1>0$ ve $\liminf_{n\to\infty} p_n>0$ olsun. $L_n : C[a,b]\to B[a,b]$ şeklinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin (L_n) dizisi

(i) $st_{\overline{N}}-\lim\|L_n(f_0)-f_0\|=0$

(ii) $st_{\overline{N}}-\lim\|L_n(f_1)-f_1\|=0$

(iii) $st_{\overline{N}}-\lim\|L_n(f_2)-f_2\|=0$

koşulları sağlıyor ise herhangi bir $f\in C[a,b]$ fonksiyonu için

$$st_{\overline{N}}-\lim\|L_n(f)-f\|=0$$

dır.

İspat: f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan öyle bir $M:=\|f\|$ pozitif sayısı bulunur ki tüm x ve y ler için

$$|f(y)-f(x)|\le 2M$$

yazılır. Ayrıca f, $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan tüm x ve y ' ler için $|y-x|<\delta$ olduğunda $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ dır. Dolayısıyla tüm $y\in(-\infty,\infty)$ ve tüm $x\in[a,b]$ için $\delta>0$ olmak üzere

$$|f(y)-f(x)|\le\varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}(y-x)^2$$

elde ederiz. Ayrıca L_n pozitif ve lineer olduğundan

$$L_n(f;x)-f(x)=L_n(f(y)-f(x);x)+f(x)(L_n(1;x)-1)$$

yazılır. Böylece

$$\begin{aligned}\|L_n(f;x)-f(x)\|&=\|L_n(f(y)-f(x);x)+f(x)(L_n(1;x)-1)\|\\&\le\|L_n(f(y)-f(x);x)\|+|f(x)|\|L_n(1;x)-1\|\end{aligned}$$

$$\leq \left\| L_n\left(|f(y)-f(x)|;x\right)\right\| + M\left\| L_n(1;x)-1\right\|$$

$$\leq \left\| L_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2}(y-x)^2;x\right)\right\| + M\left\| L_n(1;x)-1\right\|$$

$$= \left\| L_n(\varepsilon;x) + \frac{2M}{\delta^2} L_n\left((y-x)^2;x\right)\right\| + M\left\| L_n(1;x)-1\right\|$$

$$\leq \left\| L_n(1;x)-1\right\| + \frac{2M}{\delta^2}\left\| L_n\left(y^2;x\right)-x^2\right\| + \frac{4M}{\delta^2}\|x\|\left\| L_n(y;x)-x\right\|$$

$$+\ \frac{2M}{\delta^2}\left\| x^2\right\|\left\| L_n(1;x)-1\right\| + M\left\| L_n(1;x)-1\right\| + \varepsilon$$

$$\leq \left(\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2}\left\| x^2\right\|\right)\left\| L_n(f_0)-f_0\right\| + \frac{4M}{\delta^2}\|x\|\left\| L_n(f_1)-f_1\right\|$$

$$+\ \frac{2M}{\delta^2}\left\| L_n(f_2)-f_2\right\| + \varepsilon$$

elde edilir. Burada $K_1 = max\left\{\varepsilon + M + \frac{2M}{\delta^2}\left\| x^2\right\|, \frac{4M}{\delta^2}\|x\|, \frac{2M}{\delta^2}\right\}$ alınırsa

$$\left\| L_n(f)-f\right\| \leq K_1\left\{\left\| L_n(f_0)-f_0\right\| + \left\| L_n(f_1)-f_1\right\| + \left\| L_n(f_2)-f_2\right\|\right\} + \varepsilon$$

bulunur. ε keyfi olduğundan

$$\left\| L_n(f)-f\right\| \leq K_1\left\{\left\| L_n(f_0)-f_0\right\| + \left\| L_n(f_1)-f_1\right\| + \left\| L_n(f_2)-f_2\right\|\right\}$$

eşitsizliğinin her iki tarafı p_k ile çarpılırsa

$$p_k\left\| L_n(f)-f\right\| \leq p_k K_1\left\{\left\| L_n(f_0)-f_0\right\| + \left\| L_n(f_1)-f_1\right\| + \left\| L_n(f_2)-f_2\right\|\right\}$$

bulunur. Buradan

$$\left\{k \leq P_n : p_k\left\| L_n(f)-f\right\| \geq \varepsilon'\right\} \subseteq \left\{k \leq P_n : p_k\left(\left\| L_n(f_0)-f_0\right\| + \left\| L_n(f_1)-f_1\right\| + \left\| L_n(f_2)-f_2\right\|\right) \geq \frac{\varepsilon'}{K_1}\right\}$$

olup

$$\left|\left\{k \leq P_n : p_k\left\| L_n(f)-f\right\| \geq \varepsilon'\right\}\right| \leq \left|\left\{k \leq P_n : p_k\left(\left\| L_n(f_0)-f_0\right\| + \left\| L_n(f_1)-f_1\right\| + \left\| L_n(f_2)-f_2\right\|\right) \geq \frac{\varepsilon'}{K_1}\right\}\right|$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$D := \left\{ k \le P_n : p_k \left(\left\| L_n\left(f_0\right) - f_0 \right\| + \left\| L_n\left(f_1\right) - f_1 \right\| + \left\| L_n\left(f_2\right) - f_2 \right\| \right) \ge \frac{\varepsilon'}{K_1} \right\}$$

$$D_1 := \left\{ k \le P_n : p_k \left(\left\| L_n\left(f_0\right) - f_0 \right\| \right) \ge \frac{\varepsilon'}{3K_1} \right\}$$

$$D_2 := \left\{ k \le P_n : p_k \left\| L_n\left(f_1\right) - f_1 \right\| \ge \frac{\varepsilon'}{3K_1} \right\}$$

$$D_3 := \left\{ k \le P_n : p_k \left\| L_n\left(f_2\right) - f_2 \right\| \ge \frac{\varepsilon'}{3K_1} \right\}$$

kümeleri belirlensin. Buradan $D \subset D_1 \cup D_2 \cup D_3$ olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \left| \left\{ k \le P_n : p_k \left\| L_n(f) - f \right\| \ge \varepsilon' \right\} \right| \le & \left| \left\{ k \le P_n : p_k \left\| L_n\left(f_0\right) - f_0 \right\| \ge \frac{\varepsilon'}{3K_1} \right\} \right| \\ & + \left| \left\{ k \le P_n : p_k \left\| L_n\left(f_1\right) - f_1 \right\| \ge \frac{\varepsilon'}{3K_1} \right\} \right| \\ & + \left| \left\{ k \le P_n : p_k \left\| L_n\left(f_2\right) - f_2 \right\| \ge \frac{\varepsilon'}{3K_1} \right\} \right| \end{aligned}$$

yazılır. Eşitsizliğin her iki tarafı $\frac{1}{P_n}$ ile çarpılıp $n \to \infty$ için limit alınırsa hipotezden

$$\lim \frac{1}{P_n} \left| \left\{ k \le P_n : p_k \left\| L_n(f) - f \right\| \ge \varepsilon' \right\} \right|$$

bulunur. Buradan

$$st_{\overline{N}} - \lim \left\| L_n\left(f\right) - f \right\| = 0$$

dır.

4.2.8. Örnek: Genel terimi

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2 \\ 0, & k \ne n^2 \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

olan $x=(x_k)$ dizisini ve Bernstein polinomları göz önüne alınsın. Şimdi $C[0,1]$ üzerinde tanımlı aşağıdaki polinom tanımlansın:

$$T_n(f;x)=(1+x_n)B_n(f;x).$$

Gerekli hesaplamalardan sonra

$$T_n(f_0;x)=(1+x_n),$$
$$T_n(f_1;x)=(1+x_n)x,$$
$$T_n(f_2;x)=(1+x_n)\left(x^2+\frac{x(1-x)}{n}\right)$$

elde edilir. $st_{\overline{N}}-\lim x_n=0$ olduğundan,

$$st_{\overline{N}}-\lim\|T_n(f_i)-f_i\|=0\ (i=0,1,2)$$

bulunur. 4.2.7. Teorem'den her $f\in C[0,1]$ için $st_{\overline{N}}-\lim\|T_n(f)-f\|=0$ olduğu görülmektedir. Fakat (x_n), 0 'a klasik anlamda yakınsak olmadığından (T_n) pozitif lineer operatörler dizisi klasik Korovkin teoremini sağlamaz.

4.3. Ağırlıklı Equi-İstatistiksel Yakınsaklık ve Korovkin Tipi Teorem

Balcerzak ark., istatistiksel düzgün yakınsaklıktan daha kuvvetli olan equi-istatistiksel yakınsaklık kavramını ilk olarak 2007 yılında verdiler. Daha sonra Akdağ (2016) bu kavram yardımı ile ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaklık tanımını verdi.

4.3.1. Tanım: Eğer $\forall\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Psi(x,\varepsilon)}{P_n}=0,\ x\in X \text{ 'e göre düzgün,}$$

yani;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|\Psi(.,\varepsilon)\|}{P_n}=0$$

ise (f_n) dizisi f fonksiyonuna ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaktır. Bu yakınsaklık

$f_n \to f$ (w-equi-ist.)

şeklinde gösterilir (Akdağ, 2016).

Yukarıdaki tanımlar göz önüne alınarak aşağıdaki lemma verilsin.

4.3.2. Lemma: X üzerinde $f_n \rightrightarrows f\,(w-ist.)$ ise $f_n \to f\left(w-equi-ist.\right)$, X üzerinde $f_n \to f\left(w-equi-ist.\right)$ ise $f_n \to f\left(w-ist.\right)$ dir (Akdağ, 2016).

İspat: Öncelikle X üzerinde $f_n \rightrightarrows f\,(w-ist.)$ olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \left| \left\{ k \le P_n : p_k \left\| f_k - f \right\| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

dır. Her $x \in X$ için $p_k \left| f_k(x) - f(x) \right| \le p_k \left\| f_k - f \right\|$ olduğundan

$$\left\{ k \le P_n : p_k \left| f_k(x) - f(x) \right| \ge \varepsilon \right\} \subseteq \left\{ k \le P_n : p_k \sup_{x\in X} \left| f_k(x) - f(x) \right| \ge \varepsilon \right\},$$

dolayısıyla

$$\left| \left\{ k \le P_n : p_k \left| f_k(x) - f(x) \right| \ge \varepsilon \right\} \right| \le \left| \left\{ k \le P_n : p_k \sup_{x\in X} \left| f_k(x) - f(x) \right| \ge \varepsilon \right\} \right|$$

yazılır. Kabulden

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left| \left\{ k \le P_n : p_k \left| f_k(x) - f(x) \right| \ge \varepsilon \right\} \right|}{P_n} = 0,\ x \in X \text{ 'e göre düzgün}$$

olup X üzerinde $f_n \to f\,(w-equi-ist.)$ olduğu elde edilir.

Bu lemmanın karşıtının her zaman doğru olmadığı bir örnekle gösterilsin.

4.3.3. Örnek: Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $x \in [0,1]$ ve $g(x) = 0$ olmak üzere, $g_n : C[0,1] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu

$$g_n(x)=\begin{cases} 2^{n+1}\left(x-\frac{1}{2^n}\right), & x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right] \\ -2^{n+1}\left(x-\frac{1}{2^{n-1}}\right), & x\in\left[\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ 0 , & d.d. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $p_k=\sqrt{k}\ \ (k=1,2,...)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|g_k(x)-g(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{P_n} &= \frac{\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|g_k(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|}{P_n} \\ &\le \frac{\left|\left\{k\le P_n : p_k g_k(x)\ne 0\right\}\right|}{P_n} \\ &\le \frac{1}{P_n}\to 0\ \ (n\to\infty) \end{aligned}$$

dır. Dolayısıyla $[0,1]$ üzerinde $g_n\to g=0\ (w-equi-ist.)$ elde edilir. Ancak her $n\in\mathbb{N}$ için $c_n=\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|g_n(x)-g(x)\right|=1$ olduğundan (g_n) fonksiyon dizisi ağırlıklı istatistiksel düzgün yakınsak değildir.

4.3.4. Teorem: (L_n), $L_n:C(X)\to C(X)$ pozitif lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Her $f\in C(X)$ için, X üzerinde

$$L_n(f)\to f\ \ (w-equi-ist.)$$

olması için gerek ve yeter şart $f_i(x)=x^i$, (i=0,1,2) olmak üzere

$$L_n(f_i)\to f_i\ \ (w-equi-ist.)$$

olmasıdır (Akdağ, 2016).

İspat: Her $f\in C(X)$ için X üzerinde $L_n(f)\to f\ (w-equi-ist.)$ olduğundan özel olarak her $f_i\in C(X)$ için $L_n(f_i)\to f_i(w-equi-ist.)$ sağlanır.

$L_n(f_i)\to f_i(w-equi-ist.)$ olduğu kabul edilsin. $f\in C(X)$ ve $x\in X$ sabit olsun.

f, x noktasında sürekli olduğundan her $\varepsilon>0$ için $|y-x|<\delta$ koşulunu sağlayan her $y\in X$ için $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır. Bu takdirde $X_\delta=[x-\delta,x+\delta]\cap X$ olduğunda

$$|f(y)-f(x)|=|f(y)-f(x)|\chi_{X_\delta}(y)+|f(y)-f(x)|\chi_{X/X_\delta}(y)$$

yazılır. Buradan $M:=\|f\|$ olmak üzere her $y\in X$ için

$$|f(y)-f(x)|<\varepsilon+2M\frac{(y-x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. L_n pozitif ve lineer olduğundan

$$\begin{aligned}
|L_n(f;x)-f(x)| &= |L_n(f(y);x)-L_n(f(x);x)+L_n(f(x);x)-f(x)| \\
&= |L_n((f(y)-f(x));x)+f(x)(L_n(1;x)-1)| \\
&\le |L_n((f(y)-f(x));x)|+|f(x)||L_n(1;x)-1| \\
&\le |L_n(|f(y)-f(x)|;x)|+|f(x)||L_n(1;x)-1| \\
&\le L_n\left(\varepsilon+2M\frac{(y-x)^2}{\delta^2};x\right)+\|f\||L_n(1;x)-1| \\
&\le \varepsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left((y-x)^2;x\right)+M|L_n(1;x)-1| \\
&\le \varepsilon+\varepsilon|L_n(1;x)-1|+\frac{2M}{\delta^2}\left\{L_n(y^2;x)-2xL_n(y;x)+x^2L_n(1;x)\right\}+M|L_n(1;x)-1| \\
&\le \varepsilon+\frac{2M}{\delta^2}\left\{|L_n(f_2;x)-f_2(x)|+2|x||L_n(f_1;x)-f_1(x)|+x^2|L_n(f_0;x)-f_0(x)|\right\} \\
&\quad +(M+\varepsilon)|L_n(f_0;x)-f_0(x)| \\
&= \varepsilon+\left(\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}x^2\right)|L_n(f_0;x)-f_0(x)|+\frac{2M}{\delta^2}|x||L_n(f_1;x)-f_1(x)| \\
&\quad +\frac{2M}{\delta^2}|L_n(f_2;x)-f_2(x)|
\end{aligned}$$

yazılır. Burada $K:=\varepsilon+M+\frac{2M}{\delta^2}\left(\|x^2\|+2\|x\|+1\right)$ olmak üzere $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan

$$|L_n(f;x)\,f(x)|\le K\left\{|L_n(f_0;x)-f_0(x)|+|L_n(f_1;x)-f_1(x)|+|L_n(f_2;x)-f_2(x)|\right\}$$

elde edilir. Buradan

$$p_k\left|L_n(f;x)-f(x)\right|\le K\left\{p_k\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|+p_k\left|L_n(f_1;x)-f_1(x)\right|\right.$$
$$\left.+\,p_k\left|L_n(f_2;x)-f_2(x)\right|\right\} \tag{13}$$

yazılır. Ayrıca

$$\psi_n(x,r):=\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|L_k(f;x)-f(x)\right|\ge r\right\}\right|,$$
$$\psi_{1,n}(x,r):=\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|L_k(f_0;x)-f_0(x)\right|\ge \frac{r}{3K}\right\}\right|,$$
$$\psi_{2,n}(x,r):=\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|L_k(f_1;x)-f_1(x)\right|\ge \frac{r}{3K}\right\}\right|,$$
$$\psi_{3,n}(x,r):=\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|L_k(f_2;x)-f_2(x)\right|\ge \frac{r}{3K}\right\}\right|$$

kümeleri belirlensin. (13)' den

$$\frac{\psi_n(x,r)}{P_n}\le\frac{\psi_{1,n}(x,r)}{P_n}+\frac{\psi_{2,n}(x,r)}{P_n}+\frac{\psi_{3,n}(x,r)}{P_n}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\left\|\psi_n(.,r)\right\|}{P_n}\le\frac{\left\|\psi_{1,n}(.,r)\right\|}{P_n}+\frac{\left\|\psi_{2,n}(.,r)\right\|}{P_n}+\frac{\left\|\psi_{3,n}(.,r)\right\|}{P_n} \tag{14}$$

yazılır. Dolayısıyla $L_n(f_i)\to f_i\ \ (w-equi-ist.)$ olduğundan (14)' den

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\psi_n(.,r)\right\|}{P_n}=0\quad x\in X \text{ ‘e göre düzgün}$$

yani; $L_n(f)\to f\ \ (w-equi-ist.)$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

Bu teoremin klasik ve istatistiksel Korovkin tipi yaklaşım teoreminden daha kuvvetli olduğu bir örnekle gösterilsin.

4.3.5. Örnek: $C[0,1]$ üzerinde tanımlı klasik $B_n(f;x)$ Bernstein polinomları kullanılarak,

$$g_n(x)=\begin{cases} 2^{n+1}\left(x-\frac{1}{2^n}\right) & , \quad x\in\left[\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right] \\ -2^{n+1}\left(x-\frac{1}{2^{n-1}}\right) & , \quad x\in\left[\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^{n+1}},\frac{1}{2^{n-1}}\right] \\ 0 & , \quad \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

ve $p_k=\sqrt{k}$ olmak üzere aşağıdaki pozitif lineer operatörler dizisi oluşturulsun:

$$D_n(f;x)=\left(1+g_n(x)\right)B_n(f;x) \quad x\in[0,1] \text{ ve } f\in C[0,1].$$

Öte yandan $B_n(f_0;x)=f_0(x), B_n(f_1;x)=f_1(x), B_n(f_2;x)=f_2(x)+\frac{x-x^2}{n}$ olduğundan

$$D_n(f_0;x)=\left(1+g_n(x)\right)f_0(x),$$
$$D_n(f_1;x)=\left(1+g_n(x)\right)f_1(x),$$
$$D_n(f_2;x)=\left(1+g_n(x)\right)\left(f_2(x)+\frac{x(1-x)}{n}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla $[0,1]$ üzerinde $g_n\to g=0$ $(w-equi-ist.)$ olduğundan

$$D_n(f_i)\to f_i \ (w-equi-ist.) \ (i=0,1,2)$$

elde edilir. Dolayısıyla 4.3.4. Teorem'den her $f\in C[0,1]$ için

$$D_n(f)\to f \ (w-equi-ist.)$$

olduğu kolaylıkla görülmektedir. Ayrıca $[0,1]$ üzerinde (g_n), $g=0$ fonksiyonuna ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaktır fakat, $[0,1]$ üzerinde $g=0$ fonksiyonuna istatistiksel düzgün yakınsak olmadığından (D_n) pozitif lineer operatörler dizisi istatistiksel Korovkin tipi teorem sağlanmaz. Öte yandan (g_n), $[0,1]$ üzerinde $g=0$ fonksiyonu düzgün yakınsak olmadığından (D_n) pozitif lineer operatörler dizisi için klasik Korovkin tipi teorem sağlanmaz.

Şimdi ise $C(X)$ uzayı üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörler dizisinin ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaklık mertebesi süreklilik modülü yardımıyla incelenecektir.

4.3.6. Tanım: Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta} P_n} = 0, \; x \in X \text{ 'e göre düzgün}$$

ya da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\| \psi(.,\varepsilon) \right\|}{n^{1-\beta} P_n} = 0$$

ise (f_n) fonksiyon dizisi bir f fonksiyonuna $\beta \in (0,1)$ mertebesi ile ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık

$$f_n - f = o\left(n^{-\beta}\right)(w - equi - ist.)$$

ile gösterilir (Akdağ, 2016).

Bu tanım kullanılarak ağırlıklı equi-istatistiksel Korovkin tipi teoremin ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaklık mertebesi bulunabilir. Öncelikle gerekli olan aşağıdaki lemma verilsin.

4.3.7. Lemma: $C(X)$ uzayının iki fonksiyon dizisi (f_n) ve (g_n) olsun. X üzerinde

$$f_n - f = o\left(n^{-\beta_1}\right)(w - equi - ist.),$$
$$g_n - g = o\left(n^{-\beta_2}\right)(w - equi - ist.)$$

olsun. $\beta := \min\{\beta_1, \beta_2\}$ olmak üzere

(i) $(f_n + g_n) - (f + g) = o\left(n^{-\beta}\right)(w - equi - ist.)$,

(ii) $(f_n - f)(g_n - g) = o\left(n^{-\beta}\right)(w - equi - ist.)$,

(iii) Herhangi bir λ reel sayısı için $\lambda(f_n - f) = o\left(n^{-\beta_1}\right)(w - equi - ist.)$,

(iv) $\sqrt{|f_n - f|} = o\left(n^{-\beta_1}\right)(w - equi - ist.)$

dır (Akdağ, 2016).

İspat: (i) X üzerinde $(f_n - f) = o(n^{-\beta_1})\ (w-equi-ist.)$ ve $(g_n - g) = o(n^{-\beta_2})\ (w-equi-ist.)$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için

$$\psi_n(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le P_n : p_k \left|(f_k + g_k)(x) - (f+g)(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right|,$$
$$\psi_{1,n}(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le P_n : p_k \left|f_k(x) - f(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|,$$
$$\psi_{2,n}(x,\varepsilon) := \left|\left\{k \le P_n : p_k \left|g_k(x) - g(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

kümeleri belirlensin. Buradan

$$\left|(f_k + g_k)(x) - (f+g)(x)\right| \le \left|f_k(x) - f(x)\right| + \left|g_k(x) - g(x)\right|$$

olup

$$\left|\left\{k \le P_n : p_k \left|(f_k + g_k)(x) - (f+g)(x)\right| \ge \varepsilon\right\}\right| \le \left|\left\{k \le P_n : p_k \left|f_k(x) - f(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right| + \left|\left\{k \le P_n : p_k \left|g_k(x) - g(x)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

yazılır. Dolayısıyla

$$\psi_n(x,\varepsilon) \le \psi_{1,n}(x,\varepsilon) + \psi_{2,n}(x,\varepsilon)$$

olur. Eşitsizliğin her iki tarafı $\dfrac{1}{n^{1-\beta} P_n}$ ile çarpılırsa

$$\frac{\psi_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta} P_n} \le \frac{\psi_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta} P_n} + \frac{\psi_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta} P_n}$$

elde edilir. $\beta = \min\{\beta_1, \beta_2\}$ olduğundan

$$\frac{\psi_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta} P_n} \le \frac{\psi_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta_1} P_n} + \frac{\psi_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta_2} P_n}$$

bulunur. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\psi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta} P_n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\psi_{1,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_1} P_n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\left\|\psi_{2,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_2} P_n}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\psi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}P_n}=0$$

elde edilir.

(ii) X üzerinde $\left(f_n-f\right)=o\left(n^{-\beta_1}\right)$ $\left(w-equi-ist.\right)$ ve $\left(g_n-g\right)=o\left(n^{-\beta_2}\right)$ $\left(w-equi-ist.\right)$ olsun. $\varepsilon>0$ ve $x\in X$ için

$$\psi_n(x,\varepsilon):=\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|f_k(x)-f(x)\right|\left|g_k(x)-g(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|,$$

$$\psi_{1,n}(x,\varepsilon):=\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|f_k(x)-f(x)\right|\ge\sqrt{\varepsilon}\right\}\right|,$$

$$\psi_{2,n}(x,\varepsilon):=\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|g_k(x)-g(x)\right|\ge\sqrt{\varepsilon}\right\}\right|$$

kümeleri belirlensin. Yine $\forall\alpha,\beta\ge0$ için $\alpha\beta\ge\varepsilon$ ise $\alpha\ge\sqrt{\varepsilon}$ veya $\beta\ge\sqrt{\varepsilon}$ olduğundan

$$\frac{\psi_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}P_n}\le\frac{\psi_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}P_n}+\frac{\psi_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}P_n}$$

olup, $\beta=\min\left\{\beta_1,\beta_2\right\}$ olduğundan $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\psi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}P_n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\psi_{1,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_1}P_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\psi_{2,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_2}P_n}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\psi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}P_n}=0$$

olduğundan istenilen elde edilir.

(iii) X üzerinde $\left(f_n-f\right)=o\left(n^{-\beta_1}\right)\left(w-equi-ist.\right)$ ve λ herhangi bir reel sayı olsun.

$\lambda=0$ ise sonuç aşikardır. $\lambda\ne0$ ise

$$\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|\lambda\right|\left|f_k(x)-f(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|f_k(x)-f(x)\right|\ge\frac{\varepsilon}{\left|\lambda\right|}\right\}\right|$$

olup $\frac{1}{n^{1-\beta_1}}$ ile çarpıp limit alınırsa istenilen elde edilir.

(iv) X üzerinde $(f_n - f) = o\left(n^{-\beta_1}\right)(w-equi-ist.)$ olsun.

$p_k\left|f_k(x)-f(x)\right|<\varepsilon$ ise $\sqrt{p_k\left|f_k(x)-f(x)\right|}\leq\sqrt{\varepsilon}$

olup

$$\left\{k\leq P_n:\sqrt{p_k\left|f_k(x)-f(x)\right|}\geq\sqrt{\varepsilon}\right\}\subseteq\left\{k\leq P_n:p_k\left|f_k(x)-f(x)\right|\geq\varepsilon\right\}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\left|\left\{k\leq P_n:\sqrt{p_k\left|f_k(x)-f(x)\right|}\geq\sqrt{\varepsilon}\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}P_n}\leq\frac{\left|\left\{k\leq P_n:p_k\left|f_k(x)-f(x)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}P_n}$$

olup $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\leq P_n:\sqrt{p_k\left|f_k(x)-f(x)\right|}\geq\sqrt{\varepsilon}\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}P_n}\leq\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\leq P_n:p_k\left|f_k(x)-f(x)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}P_n}$$

bulunur. Hipotezden

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\left\{k\leq P_n:\sqrt{p_k\left|f_k(x)-f(x)\right|}\geq\sqrt{\varepsilon}\right\}\right|}{n^{1-\beta_1}P_n}=0$$

olup istenilen elde edilir.

Şimdi süreklilik modülü yardımıyla aşağıdaki teorem verilsin.

4.3.8. Teorem: (L_n), $L_n:C(X)\to C(X)$ pozitif lineer operatörler dizisi için

$\delta_n(x)=\sqrt{L_n(\theta^2;x)}$, $\theta(y)=y-x$ olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlansın:

$(a)\,L_n(f_0)-f_0=o\left(n^{-\beta_0}\right)(w-equi-ist.)$,

$(b)\,\omega(f;\delta_n)=o\left(n^{-\beta_1}\right)(w-equi-ist.)$.

Bu durumda her $f \in C(X)$ için $\beta = \min\{\beta_0, \beta_1\}$ olmak üzere

$$L_n(f) - f = o\left(n^{-\beta}\right)(w - equi - ist.)$$

dır (Akdağ, 2016).

İspat: $f \in C(X)$, $x \in X$ olsun. L_n pozitif ve lineer olduğundan $M := \|f\|$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left|L_n(f;x) - f(x)\right| &= \left|L_n(f(y);x) - L_n(f(x);x) + L_n(f(x);x) - f(x)\right| \\
&= \left|L_n((f(y) - f(x));x) + f(x) L_n(1;x) - 1\right| \\
&\le L_n(\left|f(y) - f(x)\right|;x) + \|f\| \left|L_n(f_0;x) - f_0(x)\right| \\
&\le L_n\left(\left(1 + \frac{(y-x)}{\delta}\right)\omega(f;\delta);x\right) + M\left|L_n(f_0;x) - f_0(x)\right| \\
&\le \omega(f;\delta)\left\{L_n(1;x) + \frac{1}{\delta} L_n(\left|(y-x)\right|;x)\right\} + M\left|L_n(f_0;x) - f_0(x)\right|
\end{aligned}$$

bulunur. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
L_n(|y-x|;x) &\le \left(L_n\left((y-x)^2;x\right)^{1/2}\left(L_n(f_0;x)\right)^{1/2}\right) \\
&\le \sqrt{L_n(\theta^2;x)}\sqrt{L_n(f_0;x)}
\end{aligned}$$

olup

$$\left|L_n(f;x) - f(x)\right| \le M\left|L_n(f_0;x) - f_0(x)\right| + \omega(f;\delta)\left\{L_n(f_0;x) + \frac{1}{\delta}\sqrt{L_n(\theta^2;x)}\sqrt{L_n(f_0;x)}\right\}$$ elde

edilir. $\delta = \delta_n = \sqrt{L_n(\theta^2;x)}$ alınırsa

$$\left|L_n(f;x) - f(x)\right| \le M\left|L_n(f_0;x) - f_0(x)\right| + \omega(f;\delta)\left\{L_n(f_0;x) + \sqrt{L_n(f_0;x)}\right\}$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\left|L_n(f;x)-f(x)\right| &\le M\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|+\omega(f;\delta)\Big\{\big(L_n(f_0;x)-f_0(x)\big)\\
&\quad+\sqrt{L_n(f_0;x)-f_0(x)}+2\Big\}\\
&\le M\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|+2\omega(f;\delta)+\omega(f;\delta)\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|\\
&\quad+\omega(f;\delta)\sqrt{L_n(f_0;x)-f_0(x)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\psi_n(x,\varepsilon) &:= \left|\left\{k\le P_n : p_k\left|L_k(f;x)-f(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|,\\
\psi_{1,n}(x,\varepsilon) &:= \left|\left\{k\le P_n : p_k M\left|L_k(f_0;x)-f_0(x)\right|\ge\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|,\\
\psi_{2,n}(x,\varepsilon) &:= \left|\left\{k\le P_n : p_k 2\omega(f;\delta_k)\ge\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|,\\
\psi_{3,n}(x,\varepsilon) &:= \left|\left\{k\le P_n : p_k\omega(f;\delta_k)\left|L_k(f_0;x)-f_0(x)\right|\ge\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|,\\
\psi_{4,n}(x,\varepsilon) &:= \left|\left\{k\le P_n : \omega(f;\delta_k)\sqrt{p_k\left|L_k(f_0;x)-f_0(x)\right|}\ge\frac{\varepsilon}{4}\right\}\right|
\end{aligned}
$$

kümeleri belirlensin. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$
\frac{\psi_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}P_n}\le\frac{\psi_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}P_n}+\frac{\psi_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}P_n}+\frac{\psi_{3,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}P_n}+\frac{\psi_{4,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}P_n}
$$

olduğu görülür. Buradan $\beta=\min\{\beta_0,\beta_1\}$ olduğundan

$$
\frac{\psi_n(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}P_n}\le\frac{\psi_{1,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta_0}P_n}+\frac{\psi_{2,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta_1}P_n}+\frac{\psi_{3,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}P_n}+\frac{\psi_{4,n}(x,\varepsilon)}{n^{1-\beta}P_n}
$$

yazılır. Dolayısıyla

$$
\frac{\left\|\psi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}P_n}\le\frac{\left\|\psi_{1,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_0}P_n}+\frac{\left\|\psi_{2,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_1}P_n}+\frac{\left\|\psi_{3,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}P_n}+\frac{\left\|\psi_{4,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}P_n}
$$

olup buradan

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\psi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}P_n}\le\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\psi_{1,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_0}P_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\psi_{2,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta_1}P_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\psi_{3,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}P_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\psi_{4,n}(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}P_n}
$$

elde edilir. Hipotezden $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left\|\psi_n(.,\varepsilon)\right\|}{n^{1-\beta}P_n}=0$ olduğu görülmektedir.

4.3.9. Sonuç: 4.3.8. Teorem'deki (a) ve (b) koşulları, X üzerinde

$$L_n(f_i)-f_i=o\left(n^{-\beta_i}\right)(w-equi-ist.)\ (i=0,1,2)$$

koşulları ile değiştirilsin. Ayrıca $\theta(y)=y-x,\ \ \theta^2(y)=y^2-2xy+x^2,\ \ f_0(x)=1,\ \ f_1(x)=x,$ $f_2(x)=x^2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}L_n\left(\theta^2;x\right)&=L_n(f_2;x)-2xL_n(f_1;x)+x^2L_n(f_0;x)\\&\le\left|L_n(f_2;x)-f_2(x)\right|+2\|f_1\|\left|L_n(f_1;x)-f_1(x)\right|+\|f_2\|\left|L_n(f_0;x)-f_0(x)\right|\end{aligned}$$

olup $M:=1+2\|f_1\|++\|f_2\|$ olmak üzere

$$L_n\left(\theta^2;x\right)\le M\sum_{i=0}^{2}\left|L_n(f_i;x)-f_i(x)\right|$$

elde edilir. $\beta=\min\{\beta_0,\beta_1,\beta_2\}$ olmak üzere 4.3.7. Lemma 'dan

$$\delta_n=\sqrt{L_n\left(\theta^2;x\right)}=o\left(n^{-\beta}\right)(w-equi-ist.)$$

dır. Buradan X üzerinde

$$\omega(f;\delta_n)=o\left(n^{-\beta}\right)(w-equi-ist.)$$

olduğu görülür. 4.3.8. Teorem'de

$$\omega(f;\delta_n)=o\left(n^{-\beta}\right)(w-equi-ist.)$$

kullanılırsa her $f\in C(X)$ için X üzerinde

$L_n(f)-f=o\left(n^{-\beta}\right)(w-equi-ist.)$ olur.

Böylece (a) ve (b) koşulları yerine $L_n(f_i)-f_i=o\left(n^{-\beta_i}\right)$ kullanılırsa 4.3.8. Teorem'deki pozitif lineer operatörler dizisi üzerinde ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaklık mertebesi elde edilir (Akdağ, 2016).

Son olarak $x \in [0,1]$ ve $f \in C[0,1]$ olmak üzere 4.3.5. Örnek'de tanımlanan (D_n) pozitif lineer operatörler dizisi için ağırlıklı equi-istatistiksel yakınsaklık yardımı ile Voronovskaya tipi teoremi verilecektir. Öncelikle bu teoremin ispatında gerekli olan aşağıdaki lemma verilsin:

4.3.10. Lemma: $x \in [0,1]$, $p_k = \sqrt{k}$ $(k \in \mathbb{N})$ ve $\theta(y) := y - x$ olsun. Bu durumda

$$n^2 D_n(\theta^4; x) \to 3x^2(x^2 - 2x + 1)(w - equi - ist.)$$

dır (Akdağ, 2016).

İspat: D_n pozitif lineer operatörler dizisi için;

$$\begin{aligned} D_n\left((y-x)^4; x\right) &= D_n\left(y^4 - 4y^3x + 6y^2x^2 - 4yx^3 + x^4; x\right) \\ &= (1+g_n(x))\left\{B_n(y^4;x) - 4xB_n(y^3;x) + 6x^2B_n(y^2;x) - 4x^3B_n(y;x) + x^4B_n(1;x)\right\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Klasik Bernstein polinomlar dizisi göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} B_n(y^4;x) &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3}x^4 + \frac{6(n-1)(n-2)}{n^3}x^3 + \frac{7(n-1)}{n^3}x^3 + \frac{x}{n^3}, \\ B_n(y^3;x) &= \frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3 + \frac{3(n-1)}{n^2}x^2 + \frac{x}{n^2}, \\ B_n(y^2;x) &= x^2 + \frac{x-x^2}{n^2}, \\ B_n(y;x) &= x, \\ B_n(1;x) &= 1 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu değerler yukarıda yerine yazılırsa

$$D_n(\theta^4;x) = (1+g_n(x))\left(\frac{3x^4}{n^2} - \frac{6x^4}{n^3} - \frac{6x^3}{n^2} + \frac{12x^3}{n^3} + \frac{3x^2}{n^2} - \frac{7x^2}{n^3} + \frac{x}{n^3}\right)$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} n^2D_n(\theta^4;x) &= (1+g_n(x))\left(3x^4 - \frac{6x^4}{n} - 6x^3 + \frac{12x^3}{n} + 3x^2 - \frac{7x^2}{n} + \frac{x}{n}\right) \\ &= (1+g_n(x))\left(3x^4 - 6x^3 + 3x^2 + \left(\frac{-6x^4 + 12x^3 - 7x^2 + x}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\left|n^2 D_n\left(\theta^4;x\right)-3x^4+6x^3+3x^2\right|\leq 12g_n\left(x\right)+\frac{26\left(1+g_n\left(x\right)\right)}{n}$$

yazılır. Ayrıca $g_n \to g=0$ (w-equi-ist.) olduğundan

$$12g_n+\frac{26\left(1+g_n\right)}{n}\to 0 \quad \text{(w-equi-ist.)}$$

olur. Dolayısıyla

$$n^2 L_n\left(\theta^4;x\right)\to 3x^2\left(x^2-2x+1\right) \quad \text{(w-equi-ist.)}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

4.3.11. Teorem: $x\in\left[0,1\right]$ ve $f, f^{'}, f^{"}\in C\left[0,1\right]$ olsun. Bu durumda

$$n\left\{D_n(f)-f\right\}\to\frac{x(1-x)}{2}f''(x)\left(w-equi-ist.\right)$$

dır (Akdağ, 2016).

İspat: $f, f', f''\in C\left[0,1\right]$ ve $x\in\left[0,1\right]$ için

$$\tau_x\left(y\right)=\begin{cases}\dfrac{f\left(y\right)-f\left(x\right)-\left(y-x\right)f'\left(x\right)-\frac{1}{2}\left(y-x\right)^2 f''\left(x\right)}{\left(y-x\right)^2}, & y\neq x\\ 0, & y=x\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\tau_x\left(x\right)=0$ ve $\tau_x\in C\left[0,1\right]$ ‘de olduğu görülür. Taylor açılımından:

$$f\left(y\right)=f\left(x\right)+\left(y-x\right)f'\left(x\right)+\frac{\left(y-x\right)^2}{2}f''\left(x\right)+\left(y-x\right)^2\tau_x\left(y\right)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafına D_n operatörü uygulanırsa;

$$
\begin{aligned}
D_n(f;x)-f(x) &= f(x)g_n(x)+f'(x)D_n(\theta;x)+\frac{f''(x)}{2}D_n(\theta^2;x)+D_n(\theta^2\tau_x;x)\\
&= f(x)g_n(x)+f'(x)\{B_n(y;x)-xB_n(1;x)\}(1+g_n(x))\\
&+\frac{f''(x)}{2}\{B_n(y^2;x)-2xB_n(y;x)+x^2B_n(1;x)\}(1+g_n(x))+D_n(\theta^2\tau_x;x)\\
&= f(x)g_n(x)+\frac{f''(x)}{2}\frac{(x-x^2)}{n}(1+g_n(x))+D_n(\theta^2\tau_x;x)\\
&= f(x)g_n(x)+\frac{(x-x^2)f''(x)}{2n}(1+g_n(x))+D_n(\theta^2\tau_x;x)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Elde edilen son eşitlik *n* ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
n(D_n(f;x)-f(x)) &= nf(x)g_n(x)+\frac{(x-x^2)f''(x)}{2}(1+g_n(x))+D_n(\theta^2\tau_x;x)\\
&= nf(x)g_n(x)+\frac{(x-x^2)f''(x)}{2}+\frac{(x-x^2)f''(x)}{2}g_n(x)+nD_n(\theta^2\tau_x;x)
\end{aligned}
$$

olup $\theta(y)=y-x,\ \ M:=\|f\|+\|f''\|$ olmak üzere

$$
\left|n(D_n(f;x)-f(x))-\frac{(x-x^2)f''(x)}{2}\right|\le M(n+1)g_n(x)+n\left|D_n(\theta^2\tau_x;x)\right|
$$

yazılır. Dolayısıyla $n\left|D_n(\theta^2\tau_x;x)\right|$ ifadesine Cauch-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$
n\left|D_n(\theta^2\tau_x;x)\right|\le\left(n^2D_n(\theta^4;x)\right)^{1/2}\left(D_n(\tau_x{}^2;x)\right)^{1/2} \tag{18}
$$

elde edilir. Burada $\eta_x(y):=\tau^2{}_x(y)\quad \eta_x(x)=0$ ve $\eta_x(.)\in C[0,1]$ olup

$$
D_n(\eta_x(y))\to 0(w-equi-ist.) \tag{19}
$$

olduğu görülür. Ayrıca (18) ve (19) dan yararlanılarak 4.3.10 Lemma'dan

$$
nL_n(\theta^2\tau_x;x)\to 0(w-equi-ist.)
$$

dır. Ayrıca $\varepsilon>0$ için

$$\psi_n(x,\varepsilon):=\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|k\left(D_k(f;x)-f(x)\right)-\frac{x(1-x)}{2}f''(x)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|,$$

$$\psi_{1,n}(x,\varepsilon):=\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|(k+1)g_k(x)\right|\ge\frac{\varepsilon}{2M}\right\}\right|,$$

$$\psi_{2,n}(x,\varepsilon):=\left|\left\{k\le P_n : p_k\left|kD_k\left(\theta^2\tau_x;x\right)\right|\ge\frac{\varepsilon}{2}\right\}\right|$$

kümeleri belirlensin. Bu durumda

$$\frac{\psi_n(x,\varepsilon)}{P_n}\le\frac{\psi_{1,n}(x,\varepsilon)}{P_n}+\frac{\psi_{2,n}(x,\varepsilon)}{P_n}$$

yazılır. Buradan

$$\frac{\left\|\psi_n(.,\varepsilon)\right\|}{P_n}\le\frac{\left\|\psi_{1,n}(.,\varepsilon)\right\|}{P_n}+\frac{\left\|\psi_{2,n}(.,\varepsilon)\right\|}{P_n}$$

elde edilir. Dolayısıyla $n\to\infty$ için limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\psi_n(.,\varepsilon)\right\|}{P_n}=0$$

bulunur. Böylelikle ispat tamamlanır.

5. KAYNAKLAR

Akdağ, S. 2016. Weighted Equi-statistical convergence of the Korovkin Type approximation Theorems. Math. Subj. Class.,40A05,40G15,41A36.

Balcerzak, M., Dems, K., Komisarski, A., 2007. Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions. J. Math. Anal. Appl., 328, 715-729.

Bernstein, S. , 1912. Démonstration du Théoréme de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilities, Comm. Soc. Math. Kharkov, 13, 1-2.

Demirci K. and Orhan S. 2015. Statistically relatively uniform convergence of positive linear operators. Results. Math. DOI 10.1007/s00025-015-0484-9.

Dirik, F. and Demirci, K. 2010. Korovkin type approximation theorem for functions of two variables in statistical sense. Turk. J. Math. 34: 73-83.

Duman, O. and Orhan, C. 2004. μ-Statistically convergent function sequences, Czechoslovak Math. J. 54, 413-422.

Fast, H. 1951. Sur la Convergence Statistique. Colloq. Math., 2, 241-244.

Fridy, J.A., 1985. On statistical convergence. Analysis, 5, 301-313.

Gadjiev, A. D. and Orhan, C., 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. Rocky Mountain J. Math. 32, 129-138.

Ghosal, S., 2016. Weighted statistical convergence of order α and its applications, Journal of the Egyptian Mathematical Society, 24(1), 60-67.

Gökhan, A., Güngör, M., Et, M., 2007. Statistical convergence of double sequences of real- valued functions. International Mathematical Forum. 2(8): 365-374.

Karakaya, V. and Chishti, T.A., 2012. Weighted statistical convergence, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, 33, No. A3

Karakuş, S. , Demirci, K. , Duman, O. , 2008. Equi-statistical convergence of positive linear operators. J. Math. Anal. Appl. , 339: 1065-1072.

Korovkin, P. P., 1960. Linear Operators and Approximation Theory. Hindustan Publ. Co., Delhi.

Mursaleen, M., Karakaya, V., Ertürk, M. and Gürsoy, F., 2012. Weighted statistical convergence and its application to Korovkin type approximation theorem, Applied Mathematics and Computation, 218, 9132-9137.

Niven, I. and Zuckerman, H. S., 1980. An Introduction to the Theory of Numbers. John Wiley & Sons, Fourt Ed., New York.

Steinhaus, H. 1951. Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. Colloq. Math., 2: 73-74.

Szász, O. 1950. Generalization of S. Bernstein's Polynomials to The Infinite Interval. Journ. of Resarch of the Nat. Bureau of Stand., 45: 239-245.

ÖZGEÇMİŞ

KişiselBilgiler

Ad Soyad	Betül DUMAN AYDIN
Doğum Tarihi	17.05.1989
Doğum Yeri	ÇARŞAMBA
E-posta Adresi	duman_213@hotmail.com

Eğitim Bilgileri

Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi, SAMSUN (2008-2012)
Yüksek Lisans	Sinop Üniversitesi, SİNOP (2015-….)

İş Deneyimi

2012-2014	Sözleşmeli Matematik Öğretmenliği, SAMSUN
2014-2015	Sözleşmeli Matematik Öğretmenliği, İSTANBUL
2015-2018	Sözleşmeli Matematik Öğretmenliği, SİNOP