**T.C.**

**SİNOP ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA FERMI-WALKER TÜREVİ

YAZAR

Rahman KILIÇ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Fatma KARAKUŞ

**SİNOP – 2019**

## TEZ KABUL

Rahman KILIÇ tarafından hazırlanan "3-Boyutlu Minkowski Uzayında Fermi-Walker Türevi" başlıklı bu çalışma, 25.06.2019 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

| | | |
|---|---|---|
| **Başkan** | Prof. Dr. Abdullah MAĞDEN<br>Atatürk Üniversitesi / Fen Fakültesi | |
| **Üye** | Doç. Dr. Fatma KARAKUŞ<br>Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi | F. Karakuş |
| **Üye** | Dr. Öğr. Üyesi Esra ÖZTÜRK SÖZEN<br>Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi | |

## ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Rahman KILIÇ

## İÇİNDEKİLER

## SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | : Reel sayılar kümesi |
| $E^n$ | : $n$-boyutlu Öklid uzayı |
| $E_1^3$ | : 3-boyutlu Minkowski uzayı |
| $\alpha(s)$ | : $E^n$ uzayında birim hızlı eğri |
| $\kappa(s)$ | : $\alpha(s)$ eğrisinin $s-$ noktasındaki 1. eğriliği (eğrilik fonksiyonu) |
| $\tau(s)$ | : $\alpha(s)$ eğrisinin $s-$ noktasındaki 2. eğriliği (burulma fonksiyonu) |
| $k_1(s)$ | : $\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre $s-$ noktasındaki 1. eğriliği |
| $k_2(s)$ | : $\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre $s-$ noktasındaki 2. eğriliği |
| $W$ | : $\alpha(s)$ eğrisinin Darboux vektörü |
| $W^*$ | : $\alpha(s)$ eğrisinin Frenet çatısına göre Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü |
| $\varpi$ | : $\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre Darboux vektörü |
| $\dot{X}(s)$ | : $X$ vektör alanının Öklid türevi |
| $\tilde{\nabla}_T X$ | : $X$ vektör alanının Fermi-Walker türevi |

# ÖZET

## 3-BOYUTLU MINKOWSKI UZAYINDA FERMI-WALKER TÜREVİ

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, literatür özeti ve tezin içeriği verilmiştir. İkinci bölümde, Öklid ve Minkowski uzaylarıyla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca 3-boyutlu Öklid ve Minkowski uzaylarında Frenet çatısı, Bishop çatısı, Darboux vektörü ve Fermi-Walker türevi tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde, bu tezin hazırlanmasında kullanılan materyal ve yöntemlerden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm iki kısıma ayrılmıştır. Birinci kısımda, 3-boyutlu Minkowski uzayında Frenet çatısına göre Fermi-Walker türevi, Fermi-Walker paralellik, non-rotating (dönmeyen) çatı ve Darboux vektörü incelenmiştir. Benzer şekilde ikinci kısımda, 3-boyutlu Minkowski uzayında Bishop çatısına göre Fermi-Walker türevi, Fermi-Walker paralellik ve non-rotating (dönmeyen) çatı elde edilmiştir.

Son bölümde ise bu çalışmanın kısa bir değerlendirilmesi verilmiştir.



**Anahtar Kelimeler:** Fermi-Walker türevi, Fermi-Walker paralellik, non-rotating (dönmeyen) çatı, Frenet çatısı, Bishop çatısı, Darboux vektörü, Minkowski uzayı.

## ABSTRACT

### THE FERMI-WALKER DERIVATIVE IN MINKOWSKI 3-SPACE

This master thesis consists of four sections. In the first section, the summary of the literature and the content of the thesis are given. The second section is devoted to basic definitions and theorems related to Euclidean and Minkowski spaces. Also, Frenet frame, Bishop frame and Fermi-Walker derivative are defined in Euclidean 3-space and Minkowski spaces.

In the third section, materials and methods which are used for preparation of this thesis are given.

The fourth section is divided to two chapters. In the first chapter, Fermi-Walker derivative, Fermi-Walker parallelism, non-rotating frame and Darboux vector are defined according to Frenet frame in Minkowski 3-space. Similarly in the second chapter, Fermi-Walker derivative, Fermi-Walker parallelism, non-rotating frame and Darboux vector are investigated according to Bishop frame in Minkowski 3-space.

In the last section, a short assessment of this study is presented.



**Key Words:** Fermi-Walker derivative, Fermi-Walker parallelism, non-rotating frame, Frenet frame, Bishop frame, Darboux vector, Minkowski space.

**TEŞEKKÜR**

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam sayın Doç. Dr. Fatma KARAKUŞ'a sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teşekkürler ederim.

Rahman KILIÇ

# 1. GİRİŞ

Bir cismin hareketini ve konumunu incelemek için aynı hareketi yapan bir $\gamma$ gözlemcisinden faydalanılır. Bu cismin belirli bir $t$ zamanındaki hareketinin geometrik olarak yorumlanabilmesi için $\gamma$ gözlemcisinin hareket ettiği eğri boyunca, sabit yönleri ve merkezi olan uygun bir çatı seçimine ihtiyaç duyulur. Cisim serbest düşüş hareketi yapıyorsa, $\gamma$ gözlemcisi uzayda hareketini Levi-Civita paralellik vasıtasıyla yapar. Eğer cisim hızlanan (ivmelenen) bir hareket yapıyorsa, $\gamma$ gözlemcisinin hareket ettiği uzayda Levi-Civita paralellik artık kullanılmaz. Bu durumda sabit yönleri tanımlamak için bir başka paralellik olan Fermi-Walker ötelemesi kullanılır.

Fermi (1922), hızlanan gözlemciler için Fermi türevini tanımlamıştır. Walker (1932), Fermi türevini uzay eğrilerine genişleterek Fermi-Walker türevini tanımlamıştır. Daha sonra Hawking ve Ellis (1973), "The Large Scale Structure of Spacetime" adlı kitaplarında bu türevin fiziksel uygulamalarını incelemişlerdir. 1989 yılından sonra ise Fermi-Walker türevi ve Fermi-Walker paralellik kavramları daha kapsamlı şekilde çalışılmaya başlanmıştır. Hehl ve ark. (1991), Fermi-Walker türevinin uzaysal bir öteleme olduğundan bahsetmişlerdir.

Fermi-Walker paralellik eğri boyunca tanjant uzaylar arasında bir izometridir ve sabit yönleri tanımlamak için kullanılır. Fermi-Walker paralelliğini Levi-Civita paralellikten ayıran hızlanan gözlemciler için de geçerli olmasıdır (Sachs ve Wu, 1972; Weinberg, 1972; Pripoae, 1999; Pripoae, 2000). Eğrinin geodezik olması durumunda bu iki paralellik birbirleriyle çakışırlar. Bu sebeple Manoff (1998), hem hızlanan hem de hızlanmayan gözlemciler için geçerli olacak Fermi-Walker öteleme genelleştirmelerini yapmıştır. Tüm bu fiziksel uygulamaların yanında derinlemesine bir matematiksel çalışma yapılmamıştır. Bu nedenle Karakuş ve Yaylı 2012 ve 2017 yılları arasındaki çalışmalarında Fermi-Walker türevini çeşitli uzaylarda incelemişler ve çalışmalarında bu türevin geometrik yorumlarını vermişlerdir.

Bu yüksek lisans tezinde öncelikle Öklid ve Minkowski uzaylarıyla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Frenet çatısı, Bishop çatısı, Darboux vektörü ve Fermi-Walker türevi tanımlanmıştır. Frenet çatısına göre Fermi-Walker türevi, Fermi-Walker paralellik, non-rotating (dönmeyen) çatı ve Darboux vektörü 3-boyutlu Minkowski uzayında incelenmiştir. Daha sonra Bishop çatısına göre Fermi-Walker türevi, Fermi-Walker paralellik ve non-rotating (dönmeyen) çatı kavramlarının 3-boyutlu Minkowski uzayındaki incelemelerine yer verilmiştir.

# 2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez için gerekli temel tanım ve kavramlara yer verilecektir.

## 2.1. Öklid Uzayı ve Fermi-Walker Türevi

**Tanım 2.1.1.** $A$ reel afin uzay ve $A$ ile birleşen bir vektör uzayı da $V$ olsun. $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ olmak üzere, $V$ vektör uzayında $\forall x,y\in V$ için

$$\langle,\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$$
$$(x,y)\to\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

şeklinde bir iç çarpım tanımlanıyorsa, $A$ afin uzayına **Öklid uzayı** denir ve $E^n$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 2000a).

**Tanım 2.1.2.** $E^n$, $n$-boyutlu Öklid uzayı ve $\mathbb{R}$ nin irtibatlı bir açık alt cümlesi $I$ olmak üzere, $\alpha : I\subset\mathbb{R}\to E^n$ dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine $E^n$ de bir **eğri** ve $t\in I$ değişkenine ise **eğrinin parametresi** denir (Hacısalihoğlu, 2000a).

**Tanım 2.1.3.** $M$, $(I,\alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri olmak üzere, $\forall s\in I$ için $\|\alpha'(s)\|=1$ oluyorsa $M$ eğrisine $(I,\alpha)$ koordinat komşuluğunda **birim hızlı eğri** ve $s\in I$ parametresine de eğrinin **yay parametresi** denir (Hacısalihoğlu, 2000a).

**Tanım 2.1.4.** $M$, $(I,\alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilmiş bir eğri ve $\psi=\left(\alpha',\alpha'',...,\alpha^{(r)}\right)$ sistemi lineer bağımsız olsun. Bu durumda $k>r$ olacak şekildeki $\forall\alpha^{(k)}$ için $\alpha^{(k)}\in Sp\{\psi\}$ olmak üzere, $\psi$ den elde edilen $\{V_1,V_2,...,V_r\}$ ortonormal sistemine, $M$ eğrisinin **Frenet r-ayaklı alanı** ve $\forall m\in M$ noktası için $\{V_1(m),V_2(m),...,V_r(m)\}$ ye ise eğrinin $m$ noktasındaki **Frenet r-ayaklısı** denir. $1\le i\le r$ olmak üzere her bir $V_i$ vektörüne **Frenet vektörü** denir (Hacısalihoğlu, 2000a).

**Tanım 2.1.5.** $U$, $\mathbb{R}^n$ uzayının açık bir alt kümesi olsun. $U$ nun her bir $q$ noktasına, $q$ noktasında bir teğet vektör karşılık getiren fonksiyona, $U$ üstünde bir **vektör alanı** denir (Sabuncuoğlu, 2010).

$\mathbb{R}^n$ üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir (Sabuncuoğlu, 2010).

**Tanım 2.1.6.** $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi $s$-yay parametreli bir eğri olmak üzere, $\forall s \in I$ için eğrinin teğet vektör alanı

$$T(s) = \alpha'(s)$$

eğrinin asli normal vektör alanı

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

ve eğrinin binormal vektör alanı

$$B(s) = T(s) \wedge N(s)$$

olmak üzere, $\{T, N, B\}$ sistemine **Frenet 3-ayaklısı** denir. $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısı ortonormal bir çatıdır (Hacısalihoğlu, 2000a).

**Tanım 2.1.7.** $M$ eğrisi $(I, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilsin. $s$-yay parametresi olmak üzere, $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet r-ayaklısı $\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$ olsun. Buna göre

$$k_i : I \to \mathbb{R}, \quad 1 \leq i \leq r$$

$$s \to k_i(s) = \langle V_i'(s), V_{i+1}(s) \rangle$$

şeklinde tanımlı $k_i$ fonksiyonuna $M$ eğrisinin **i-yinci eğrilik fonksiyonu** ve $s \in I$ için $k_i(s)$ reel sayısına da $M$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki **i-yinci eğriliği** denir (Hacısalihoğlu, 2000a).

**Teorem 2.1.8.** $(I, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile $M \subset E^n$ eğrisi verilsin. $s \in I$ yay parametresi olmak üzere; $k_i(s)$, $\alpha$ eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki i-yinci eğriliği ve $\{V_1(s), ..., V_r(s)\}$ Frenet r-ayaklısı ise

$$V_1'(s) = k_1(s) V_2(s)$$

$$V_i'(s) = -k_{i-1}(s) V_{i-1}(s) + k_i(s) V_{i+1}(s), \ 1 < i < r$$

$V_r'(s) = -k_{r-1}(s)V_{r-1}(s)$

olur (Hacısalihoğlu, 2000a).

**Tanım 2.1.9.** $\alpha_i : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq 3$ koordinat fonksiyonları olmak üzere $s$-yay parametresi ile verilen

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^3$$

$$s \to \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s))$$

eğrisinin $\alpha(s)$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ olsun. Bu durumda,

$$T'(s) = k_1(s)N(s)$$

$$N'(s) = -k_1(s)T(s) + k_2(s)B(s)$$

$$B'(s) = -k_2(s)N(s)$$

denklemlerine **Frenet formülleri** denir (Hacısalihoğlu, 2000a).

**Tanım 2.1.10.** $s$-yay parametreli $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi için

$$k_1(s) = \kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

değerine $\alpha(s)$ eğrisinin **$s$-noktasındaki eğriliği** denir (Carmo, 1976).

$k_1(s) = \kappa(s)$ eğriliği, eğrinin teğet vektörden ne kadar uzaklaştığını ölçer (Hacısalihoğlu, 2000a).

**Tanım 2.1.11.** $s$-yay parametresi ile verilen $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi için $\alpha''(s) \neq 0$ olmak üzere

$$B'(s) = -\tau(s)N(s)$$

eşitliği ile tanımlanan $\tau(s)$ sayısına $\alpha(s)$ eğrisinin **$s$-noktasındaki burulması** denir. $k_2(s) = \tau(s)$ burulması, eğrinin oskülatör düzlemden ne kadar saptığını ölçer (Hacısalihoğlu, 2000a).

**Tanım 2.1.12.** $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^3$ birim hızlı eğrisi verilsin. Eğrinin $\{T, N, B\}$ Frenet 3-ayaklısının her $s$ anında, bir eksen etrafında, ani bir helis hareketi yaptığı kabul edilir. Bu eksene eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux (ani dönme) ekseni** denir. Bu eksenin yön ve doğrultusunu veren vektör,

$$W = \tau T + \kappa B$$

olup, eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki **Darboux vektörü** adını alır. Bu vektör

$$W = N \wedge N'$$

eşitliğiyle bulunur (Hacısalihoğlu, 2000a).

**Tanım 2.1.13.** $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$ eğrisi için $\alpha''(s) \neq 0$ ise $\alpha(s)$ eğrisine **Frenet eğrisi** veya **uzay eğrisi** denir (Kühnel, 2006).

**Tanım 2.1.14.** $E^3$ Öklid uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^3$ birim hızlı eğri ve $\alpha(s)$ eğrisinin teğet vektör alanı $T$ olsun.

$$\langle T, N_1 \rangle = \langle T, N_2 \rangle = \langle N_1, N_2 \rangle = 0$$

şartını sağlayan vektör alanları $N_1$ ve $N_2 = T \wedge N_1$ olmak üzere $T$, $N_1$, $N_2$ vektör alanları hareketli $\alpha$ eğrisi boyunca ortonormal bir çatı oluşturur. Bu $\{T, N_1, N_2\}$ çatısına **Bishop çatısı** denir (Bishop, 1975).

**Teorem 2.1.15.** $E^3$ Öklid uzayında birim hızlı $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^3$ eğrisi verilsin. Eğrinin $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı ve $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı arasındaki ilişki

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $\phi$, $N$ ile $N_1$ arasındaki açıdır. $T$, $N_1$ ve $N_2$ vektör alanlarının türevleri

$$T'(s) = k_1(s) N_1(s) + k_2(s) N_2(s),$$

$$N_1'(s) = -k_1(s) T(s),$$

$$N_2'(s) = -k_2(s)T(s),$$

şeklindedir. Burada $k_1(s)$ ve $k_2(s)$, $\alpha(s)$ eğrisinin Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonlarıdır. Ayrıca $\kappa(s)$ ve $\tau(s)$, sırasıyla, eğrinin eğrilik ve burulması olmak üzere

$$k_1(s) = \kappa(s)\cos\phi,$$

$$k_2(s) = \kappa(s)\sin\phi,$$

$$\tau(s) = \phi'(s)$$

eşitlikleri sağlanır (Bishop, 1975).

**Tanım 2.1.16.** $\alpha(s)$, $s$-yay parametreli bir uzay eğrisi olsun. $\alpha(s)$ eğrisi boyunca

$$\frac{dT}{ds} = \varpi \wedge T$$

$$\frac{dN_1}{ds} = \varpi \wedge N_1$$

$$\frac{dN_2}{ds} = \varpi \wedge N_2$$

eşitlikleriyle tanımlı

$$\varpi = -k_2 N_1 + k_1 N_2$$

vektörüne $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısına göre **Darboux vektörü** denir (Bükcü ve Karacan, 2008a; Hanson ve Ma, 1995a; Hanson ve Ma, 1995b; Selig 2007).

**Tanım 2.1.17.** $E^n$ Öklid uzayında $s$-yay parametreli $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$ eğrisi verilsin. $\alpha$ boyunca bir $X$ vektör alanının Öklid türevi $\frac{dX}{ds}$ olmak üzere

$$\dot{X} = \frac{dX}{ds} = 0$$

oluyorsa $X$ vektör alanına $\alpha$ eğrisi boyunca **Öklid anlamında paraleldir** denir (Hacısalihoğlu, 2000b).

**Tanım 2.1.18.** $X$ **,** $s$-yay parametreli $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E^n$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X\rangle A + \langle A, X\rangle T$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\nabla}_T X$ türevine $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca vektör alanının **Fermi-Walker türevi** denir. Burada $T = \dfrac{d\alpha}{ds}$, $A = \dfrac{dT}{ds}$ (Benn ve Tucker, 1989).

**Tanım 2.1.19.** $X$ **,** $s$-yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere eğri boyunca vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

ise $X$ vektör alanına $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca **Fermi-Walker anlamında paraleldir** denir (Benn ve Tucker, 1989).

**Tanım 2.1.20.** $s$-yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca $U$, $V$ ve $W$ ortonormal vektörler olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T U = 0$$
$$\tilde{\nabla}_T V = 0$$
$$\tilde{\nabla}_T W = 0$$

ise bu vektörlerin oluşturduğu $\{U, V, W\}$ çatısına **non-rotating (dönmeyen) çatı** denir (Balakrishnan, 2005).

**Tanım 2.1.21.** $s$-yay parametreli $\alpha(s)$ uzay eğrisi boyunca

$$W^* = \tau T$$

vektörüne $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre **Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü** denir. Burada $\tilde{\nabla}_T T = W^* \wedge T$ , $\tilde{\nabla}_T N = W^* \wedge N$ , $\tilde{\nabla}_T B = W^* \wedge B$ dir (Karakuş ve Yaylı, 2012).

**Teorem 2.1.22.** $M$ , $E^3$ de $(I, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve $s \in I$ bu eğrinin yay-parametresi, $\kappa$ eğrinin eğriliği, $\tau$ eğrinin burulması, $\{T, N, B\}$ ise eğrinin Frenet 3-ayaklısı olsun. $M$ eğrisinin düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul $\tau = 0$ olmasıdır (Yüce, 2013).

## 2.2. Minkowski Uzayı ve Fermi-Walker Türevi

**Tanım 2.2.1.** $V$ bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle_L : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u, v, w \in V$ için

**i)** $\langle u,v\rangle_L = \langle v,u\rangle_L$

**ii)** $\langle au+bv,w\rangle_L = a\langle u,w\rangle_L + b\langle v,w\rangle_L$ **,** $\langle u,av+bw\rangle_L = a\langle u,v\rangle_L + b\langle u,w\rangle_L$

özelliklerine sahip ise bu dönüşüme $V$ vektör uzayı üzerinde bir **simetrik bilineer form** denir (O'Neil, 1983).

**Tanım 2.2.2.** $V$ reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\langle,\rangle_L$ olsun.

**i)** $\forall v\in V$ ve $v\neq 0$ için $\langle v,v\rangle_L > 0$ ise $\langle,\rangle_L$ ye **pozitif tanımlı**,

**ii)** $\forall v\in V$ ve $v\neq 0$ için $\langle v,v\rangle_L < 0$ ise $\langle,\rangle_L$ ye **negatif tanımlı**,

**iii)** $\forall v\in V$ ve $v\neq 0$ için $\langle v,v\rangle_L \geq 0$ ise $\langle,\rangle_L$ ye **yarı-pozitif tanımlı**,

**iv)** $\forall v\in V$ ve $v\neq 0$ için $\langle v,v\rangle_L \leq 0$ ise $\langle,\rangle_L$ ye **yarı-negatif tanımlı**,

**v)** $\forall v\in V$ için $\langle v,w\rangle_L = 0 \Rightarrow w=0$ ise $\langle,\rangle_L$ ye **non-dejeneredir** denir (O'Neil, 1983).

**Tanım 2.2.3.** $V$ bir reel vektör uzayı ve

$\langle,\rangle_L : V\times V \to \mathbb{R}$

dönüşümü simetrik, bilineer ve non-dejenere ise $\langle,\rangle_L$ ye $V$ üzerinde bir **skalar çarpım,** bu durumda $V$ vektör uzayına da **skalar çarpım uzayı** denir (O'Neil, 1983).

**Tanım 2.2.4.** $V$ bir reel vektör uzayı ve

$\langle,\rangle_L : V\times V \to \mathbb{R}$

$V$ üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.

$\langle,\rangle_L : W\times W \to \mathbb{R}$

negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu $W$ alt uzayının boyutuna $\langle,\rangle_L$ simetrik bilineer formunun **indeksi** denir ve $\nu$ ile gösterilir. $\langle,\rangle_L$ skalar çarpımının indeksi $\nu$ ise $0\leq \nu \leq boyV$ dir. Ayrıca $V$ skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı $\langle,\rangle_L$ skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır (O'Neil, 1983).

**Tanım 2.2.5.** $V$ bir skalar çarpım uzayı olsun. $V$ nin indeksi $\nu$ olmak üzere $\nu=1$ ve $boyV\geq 2$ ise $V$ skalar çarpım uzayına **Lorentz uzayı** denir (O'Neil, 1983).

**Tanım 2.2.6.** $E^n$, n-boyutlu standart reel vektör uzayı olsun. $\forall X,Y\in E^n$ ve $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, $Y=(y_1,y_2,...,y_n)$ olmak üzere

$\langle,\rangle_L : \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$(X,Y)\to\langle X,Y\rangle_L = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

fonksiyonu bir skalar çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona $E^n$ üzerinde **Lorentz metriği** denir (O'Neil, 1983).

**Tanım 2.2.7.** $E^n$ üzerinde tanımlı Lorentz metriği ile birlikte $\left\{\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_L\right\}$ ikilisi n-boyutlu Lorentz uzayı veya kısaca **Lorentz uzayı** denir ve $\mathbb{L}^n$ ile gösterilir (O'Neil, 1983).

**Tanım 2.2.8.** $X=\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ ve $Y=\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$**,** $E^3$ Öklid 3-uzayında iki vektör olmak üzere

$$\langle X, Y\rangle=\langle X, Y\rangle_L=x_1 y_1+x_2 y_2-x_3 y_3$$

Lorentz metriği ile donatılmış $E^3$ uzayına, **Minkowski 3-uzayı** denir ve $E_1^3$ ile gösterilir (Lopez, 2008).

**Tanım 2.2.9.** Bir $X \in E_1^3$ vektörüne

**i)** $\langle X, X\rangle>0$ veya $X=0$ ise **spacelike vektör,**

**ii)** $\langle X, X\rangle<0$ ise **timelike vektör,**

**iii)** $\langle X, X\rangle=0$ ve $X \neq 0$ ise **lightlike (null) vektör** denir (Lopez, 2008).

**Tanım 2.2.10.** $X \in E_1^3$ olmak üzere

$$\|X\|=\sqrt{|\langle X, X\rangle|}$$

reel sayısına $X$ vektörünün **normu** denir. Normu bir birim olan vektöre **birim vektör** denir. Sonuç olarak

**i)** $X$ spacelike vektör ise $\|X\|=\sqrt{\langle X, X\rangle}$ ,

**ii)** $X$ timelike vektör ise $\|X\|=\sqrt{-\langle X, X\rangle}$

dir (Lopez, 2008).

**Tanım 2.2.11.** $X, Y \in E_1^3$ olmak üzere

$$\wedge: E_1^3 \times E_1^3 \rightarrow E_1^3$$

$$(X, Y) \rightarrow X \wedge Y=\left|\begin{array}{ccc} i & j & -k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{array}\right|=\left(x_2 y_3-x_3 y_2,\ x_3 y_1-x_1 y_3,\ x_2 y_1-x_1 y_2\right)$$

şeklinde tanımlı "$\wedge$" operatörüne Lorentz anlamında **vektörel çarpım** denir. Vektörel çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar

**i)** $X \wedge Y=-Y \wedge X$ ,

**ii)** $X \wedge Y$ vektörü, $X$ ve $Y$ ye diktir,

**iii)** $X \wedge Y=0 \Leftrightarrow\{X, Y\}$ orantılıdır,

**iv)** $X \wedge Y \neq 0$ vektörü $P = \langle X, Y \rangle$ düzleminde yatar $\Leftrightarrow$ $P$ lightlike (null) düzlemdir (Lopez, 2008).

**Teorem 2.2.12.** $E_1^3$ Minkowski uzayında üç vektör $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ ve $Z = (z_1, z_2, z_3)$ olsun. Bu durumda

**i)** $\langle X \wedge Y, Z \rangle = -\det(X, Y, Z)$,

**ii)** $(X \wedge Y) \wedge Z = -\langle X, Z \rangle Y + \langle Y, Z \rangle X$,

**iii)** $\langle X \wedge Y, X \rangle = 0$ ve $\langle X \wedge Y, Y \rangle = 0$,

**iv)** $\langle X \wedge Y, X \wedge Y \rangle = -\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle + (\langle X, Y \rangle)^2$

dir (Turgut, 1995).

**Tanım 2.2.13.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $I$, $0 \in I$ olacak şekilde bir açık aralık olsun. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ dönüşümü diferensiyellenebilir ise $\alpha(I)$ cümlesine $E_1^3$ de bir **eğri** denir (Lopez, 2008).

**Tanım 2.2.14.** $\alpha$, $E_1^3$ de bir eğri olsun. $\alpha$ nın hız vektörü $\alpha'$ olmak üzere

**i)** $\alpha'(s)$ spacelike bir vektör ise $\alpha$ eğrisine **spacelike**,

**ii)** $\alpha'(s)$ timelike bir vektör ise $\alpha$ eğrisine **timelike**,

**iii)** $\alpha'(s)$ lightlike (null) bir vektör ise $\alpha$ eğrisine **lightlike (null)**

**eğri** denir (Lopez, 2008).

**Teorem 2.2.15.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ birim hızlı timelike bir eğri olsun. $T(s) = \alpha'(s)$ eğrinin birim teğet vektörü olmak üzere $T'(s) \neq 0$ vektörü $T(s)$ den bağımsız spacelike bir vektördür. $\alpha$ eğrisinin $s$ noktasındaki asli normali $N(s) = \dfrac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$ ve binormal vektörü $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ olmak üzere Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir. $\alpha$ birim hızlı timelike eğrisi için

$\langle T, T \rangle = -1$, $\langle N, N \rangle = 1$, $\langle B, B \rangle = 1$

$T \wedge N = B,\ N \wedge B = -T,\ B \wedge T = N$

şeklindedir (Lopez, 2008).

**Teorem 2.2.16.** $\alpha$ , $E_1^3$ de regüler bir timelike eğri olsun. Bu durumda $\alpha$ timelike eğrisinin eğriliği ve burulması

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3},\ \tau = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

şeklindedir. Yani $\kappa(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$, $\tau(s) = \langle N'(s), B(s) \rangle$ biçiminde tanımlanır (Lopez, 2008).

**Teorem 2.2.17.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ birim hızlı spacelike bir eğri olsun. Eğrinin hız vektörü $T(s)$ olmak üzere $T'(s)$ vektörünün karakterine göre iki durum vardır :

**Durum 1:** $E_1^3$ Minkowski uzayında normali lightlike (null) olmayan spacelike eğri $\alpha(s)$ olsun. $T'(s)$ spacelike bir vektördür. $\alpha$ eğrisinin $s$ noktasındaki asli normali $N(s) = \dfrac{T'(s)}{\kappa(s)}$ ve binormal vektörü $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ olmak üzere Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\varepsilon_1 \kappa & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir. Normali lightlike (null) olmayan spacelike $\alpha$ eğrisi için

$\langle T, T \rangle = \varepsilon_0 = \mp 1,\ \varepsilon_1 = \langle N, N \rangle = \mp 1,\ \langle B, B \rangle = \varepsilon_2 = \mp 1$

$T \wedge N = -\varepsilon_1 B,\ N \wedge B = T,\ B \wedge T = \varepsilon_1 N$

şeklinde tanımlıdır (Lopez, 2008).

**Durum 2:** $E_1^3$ Minkowski uzayında normali lightlike (null) olan spacelike eğri $\alpha(s)$ olsun. $T'(s)$ lightlike (null) bir vektördür. $T'(s) \neq 0$ ve $T'(s)$, $T(s)$ vektörü ile orantılı değildir. $\alpha$ eğrisinin $s$ noktasındaki asli normali $N(s) = T'(s)$ ile $T(s)$ lineer bağımsızdır.

$\langle N(s), B(s)\rangle = 1$ olup $T(s)$ vektörüne dik olan bir tek $B(s)$ lightlike (null) binormal vektörü vardır. $\alpha$ eğrisinin eğriliği tanımlı değildir. $\tau$ foksiyonu $\alpha$ nın torsiyonu olmak üzere Frenet denklemleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \tau & 0 \\ -1 & 0 & -\tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir. Normali lightlike (null) olan spacelike $\alpha$ eğrisi için

$\langle T, T\rangle = 1$, $\langle N, N\rangle = 0$, $\langle B, B\rangle = 0$, $\langle T, N\rangle = 0$, $\langle T, B\rangle = 0$, $\langle N, B\rangle = 1$

$T \wedge N = N$, $N \wedge B = T$, $T \wedge B = -B$

şeklindedir (Lopez, 2008).

**Tanım 2.2.18.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ herhangi bir eğri olsun. $X$, eğri boyunca herhangi bir vektör alanı olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \varepsilon_0 \langle T, X\rangle A + \varepsilon_0 \langle A, X\rangle T \qquad (2.1)$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{\nabla}_T X$ türevine eğri boyunca **Fermi-Walker türevi** denir. Burada $\langle T, T\rangle = \varepsilon_0 = \mp 1$ dir (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**Tanım 2.2.19.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ timelike bir eğri olsun.

$W^* = \tau T$

vektörüne $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre **Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü** denir. Burada $\tilde{\nabla}_T T = W^* \wedge T$, $\tilde{\nabla}_T N = W^* \wedge N$, $\tilde{\nabla}_T B = W^* \wedge B$ dir (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**Tanım 2.2.20.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ normali lightlike (null) olmayan spacelike bir eğri olsun.

$W^* = -\varepsilon_1 \tau T$

vektörüne $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre **Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü** denir. Burada $\tilde{\nabla}_T T = W^* \wedge T$, $\tilde{\nabla}_T N = W^* \wedge N$, $\tilde{\nabla}_T B = W^* \wedge B$ ve $\langle N, N\rangle = \varepsilon_1 = \mp 1$ dir (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**Tanım 2.2.21.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ normali lightlike (null) olan spacelike bir eğri olsun.

$$W^* = \tau T$$

vektörüne $\{T, N, B\}$ Frenet çatısına göre **Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü** denir. Burada $\tilde{\nabla}_T T = W^* \wedge T$, $\tilde{\nabla}_T N = W^* \wedge N$, $\tilde{\nabla}_T B = W^* \wedge B$ dir (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**Tanım 2.2.22.** $X$, $\alpha : I \to E_1^3$ eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı olsun. $X$ in normal bileşeninin türevi, $\alpha$ eğrisinin birim teğet vektör alanı $T$ ile lineer bağımlı ise $X$ vektör alanına **bağlantılı paralel vektör alanı** denir (Da Silva, 2017).

**Tanım 2.2.23.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ birim hızlı bir eğri ve $\alpha$ eğrisinin teğet vektör alanı $T$ olsun.

$$\langle T, N_1\rangle = \langle T, N_2\rangle = \langle N_1, N_2\rangle = 0$$

şartlarını sağlayan vektör alanları $N_1$ ve $N_2 = T \wedge N_1$ bağlantılı paralel normal vektör alanları olmak üzere $T$, $N_1$ ve $N_2$ vektör alanları haraketli $\alpha$ eğrisi boyunca ortonormal bir çatı oluşturur. Bu $\{T, N_1, N_2\}$ çatısına **Bishop Çatısı** denir (Da Silva, 2017).

**Teorem 2.2.24.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ timelike bir eğri olsun. $T$, $N_1$ ve $N_2$ Bishop vektör alanlarının türevleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & k_2 \\ k_1 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $k_1$ ve $k_2$, $\alpha$ eğrisinin Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonlarıdır. Ayrıca $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı için iç çarpım ve vektörel çarpım

$$\langle T, T\rangle = -1,\ \langle N_1, N_1\rangle = 1,\ \langle N_2, N_2\rangle = 1$$

$T \wedge N_1 = N_2$, $N_1 \wedge N_2 = -T$, $N_2 \wedge T = N_1$

şeklinde tanımlıdır (Kişi ve Öztürk, 2015).

**Teorem 2.2.25.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ spacelike bir eğri olsun. $T$, $N_1$ ve $N_2$ Bishop vektör alanlarının türevleri

$$\begin{bmatrix} T' \\ N_1' \\ N_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 & -k_2 \\ -\varepsilon_1^* k_1 & 0 & 0 \\ -\varepsilon_1^* k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada $k_1$ ve $k_2$, $\alpha$ eğrisinin Bishop çatısına göre eğrilik fonksiyonlarıdır. Ayrıca $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı için iç çarpım ve vektörel çarpım

$$\langle T, T \rangle = \varepsilon_0^* = \mp 1,\ \langle N_1, N_1 \rangle = \varepsilon_1^* = \mp 1,\ \langle N_2, N_2 \rangle = \varepsilon_2^* = \mp 1$$

$$T \wedge N_1 = -\varepsilon_1^* N_2,\ N_1 \wedge N_2 = T,\ N_2 \wedge T = \varepsilon_1^* N_1$$

şeklinde tanımlıdır (Kişi ve Öztürk, 2015).

**Tanım 2.2.26.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ timelike bir eğri olsun.

$$\varpi = -k_2 N_1 + k_1 N_2$$

vektörüne $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısına göre **Darboux vektörü** denir (Karacan ve Bükcü, 2008).

**Tanım 2.2.27.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to E_1^3$ spacelike bir eğri olsun.

$$\varpi = -\varepsilon_1^* \left( k_2 N_1 - k_1 N_2 \right)$$

vektörüne $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısına göre **Darboux vektörü** denir. Burada $\varepsilon_1^* = \langle N_1, N_1 \rangle = \mp 1$ dir (Bükcü ve Karacan, 2008b; Bükcü ve Karacan, 2010).

# 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında öncelikle kaynak taraması yapılmış, gerekli tanım ve kavramlar verilmiştir. Bu tanım ve kavramlar baz alınarak çalışmanın esas konusuyla ilgili teoremler verilmiştir. Minkowski uzayında herhangi bir vektör alanının Frenet ve Bishop çatılarına göre hangi koşullar altında Fermi-Walker paralel olacağı saptanmıştır. Minkowski uzayında Frenet ve Bishop çatılarının hangi durumlarda non-rotating (dönmeyen) çatı olduğu ispatlanmış ve Frenet çatısına göre Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü incelenmiştir. Elde edilen bulgular Microsoft Office ve MathType programları yardımıyla yazılmıştır.

# 4. BULGULAR

Bu bölümde, temel tanım ve kavramlardan yararlanılarak elde edilen ve bu yüksek lisans tezinin ana konusunu teşkil eden bulgulara yer verilecektir.

## 4.1. Frenet Çatısı ve Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde Fermi-Walker türevi, 3-boyutlu Minkowski uzayında alınan herhangi bir eğri boyunca eğrinin karakterine göre incelenecektir.

### 4.1.1. Frenet Çatısına Göre Timelike Eğriler Boyunca Fermi-Walker Türevi

**Lemma 4.1.1.1.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ timelike bir eğri olsun. $\alpha(s)$ timelike eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı $X$ olmak üzere, $X$ vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa(B \wedge X) \tag{4.1}$$

şeklinde ifade edilir (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** (2.1) denkleminde timelike eğriler için Frenet denklemleri yerine yazılarak düzenlenirse

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \langle T, X\rangle \kappa N - \langle \kappa N, X\rangle T$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa\left(-\langle T, X\rangle N + \langle N, X\rangle T\right)$$

bulunur. Lorentz vektörel çarpım özelliğinden

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa\left((T \wedge N) \wedge X\right)$$

olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \kappa(B \wedge X)$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.1.2.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ timelike bir eğri olsun. $\lambda_1$, $\lambda_2$ ve $\lambda_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanının Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda_1(s)=sabit$$

$$\lambda_2(s)=c_1\cos\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)+c_2\sin\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)$$

$$\lambda_3(s)=-c_1\sin\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)+c_2\cos\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)$$

olmasıdır (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** (2.1) denkleminde $X=\lambda_1T+\lambda_2N+\lambda_3B$ vektör alanı yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_TX=\nabla_T(\lambda_1T+\lambda_2N+\lambda_3B)+\langle T,\lambda_1T+\lambda_2N+\lambda_3B\rangle A-\langle A,\lambda_1T+\lambda_2N+\lambda_3B\rangle T$$

bulunur. Bu eşitlikte timelike eğriler için Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_TX=\nabla_T(\lambda_1T+\lambda_2N+\lambda_3B)+\langle T,\lambda_1T+\lambda_2N+\lambda_3B\rangle \kappa N-\langle \kappa N,\lambda_1T+\lambda_2N+\lambda_3B\rangle T$$

$$\tilde{\nabla}_TX=\nabla_T(\lambda_1T+\lambda_2N+\lambda_3B)+\langle T,\lambda_1T\rangle \kappa N-\langle \kappa N,\lambda_2N\rangle T$$

$$\tilde{\nabla}_TX=\nabla_T(\lambda_1T+\lambda_2N+\lambda_3B)+\lambda_1\langle T,T\rangle \kappa N-\lambda_2\kappa\langle N,N\rangle T$$

elde edilir. Timelike eğriler için $\langle T,T\rangle=-1$ ve $\langle N,N\rangle=1$ olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_TX=\nabla_T(\lambda_1T+\lambda_2N+\lambda_3B)-\lambda_1\kappa N-\lambda_2\kappa T$$

$$\tilde{\nabla}_TX=\left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T+\lambda_1\nabla_TT+\left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right)N+\lambda_2\nabla_TN+\left(\frac{d\lambda_3}{ds}\right)B+\lambda_3\nabla_TB-\lambda_1\kappa N-\lambda_2\kappa T$$

bulunur. Bu eşitlikte timelike eğriler için Frenet denklemleri yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_TX=\left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T+\lambda_1\kappa N+\left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right)N+\lambda_2\kappa T+\lambda_2\tau B+\left(\frac{d\lambda_3}{ds}\right)B-\lambda_3\tau N-\lambda_1\kappa N-\lambda_2\kappa T$$

$$\tilde{\nabla}_TX=\left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T+\left(\frac{d\lambda_2}{ds}-\lambda_3\tau\right)N+\left(\frac{d\lambda_3}{ds}+\lambda_2\tau\right)B \tag{4.2}$$

elde edilir. $X$, $\alpha(s)$ timelike eğrisi boyunca Fermi-Walker paralel olduğundan $\tilde{\nabla}_TX=0$ olacaktır. O halde

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = 0$$
$$\frac{d\lambda_2}{ds} - \lambda_3\tau = 0$$
$$\frac{d\lambda_3}{ds} + \lambda_2\tau = 0$$

olmalıdır. Lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümünden

$$\lambda_1(s) = sabit$$
$$\lambda_2(s) = c_1 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right) + c_2 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)$$
$$\lambda_3(s) = -c_1 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right) + c_2 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)$$

elde edilir.

Tersine, $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı için

$$\lambda_1(s) = sabit$$
$$\lambda_2(s) = c_1 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right) + c_2 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)$$
$$\lambda_3(s) = -c_1 \sin\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right) + c_2 \cos\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)$$

olsun. (2.1) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - \lambda_3\tau\right)N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \lambda_2\tau\right)B$$

elde edilir. Bu eşitlikte; $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ ve $\lambda_3(s)$ ün türevleri yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

bulunur.

**Sonuç 4.1.1.3.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ timelike bir eğri olsun. $\lambda_1$, $\lambda_2$ ve $\lambda_3$ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanının eğri boyunca Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin düzlemsel olmasıdır (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** $X$ , $\alpha(s)$ timelike eğrisi boyunca Fermi-Walker paralel olsun.

(4.2) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} - \lambda_3\tau\right)N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \lambda_2\tau\right)B$$

olmak üzere, bu denklem düzenlenirse

$$\tilde{\nabla}_T X = \tau\left(-\lambda_3 N + \lambda_2 B\right)$$

elde edilir. $\tilde{\nabla}_T X = 0$ olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T X = \tau\left(-\lambda_3 N + \lambda_2 B\right) = 0$$

olacaktır. Buna göre,

$$\tau = 0$$

elde edilir.

Tersine, $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı için $\alpha(s)$ eğrisi düzlemsel bir eğri olsun.

(2.1) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X = \tau\left(-\lambda_3 N + \lambda_2 B\right)$$

elde edilir. $\alpha(s)$ eğrisi düzlemsel bir eğri olduğundan $\tau = 0$ olup

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.1.4.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ timelike bir eğri olsun. $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı düzlemsel eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** (4.1) denkleminden

$\tilde{\nabla}_T T = \nabla_T T - \kappa N$

$\tilde{\nabla}_T N = \nabla_T N - \kappa T$

$\tilde{\nabla}_T B = \nabla_T B$

yazılır. Burada timelike eğriler için $T$ , $N$ ve $B$ vektör alanlarının türevleri yazılarak gerekli işlemler yapılırsa

$\tilde{\nabla}_T T = 0$

$\tilde{\nabla}_T N = 0$

$\tilde{\nabla}_T B = 0$

elde edilir. Buna göre, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı düzlemsel eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

**Teorem 4.1.1.5.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ timelike bir eğri olsun. $W^*(s) = \tau(s)T(s)$ Fermi-Walker anlamında Darboux vektörünün Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \frac{d\tau}{ds} T(s)$$

dir (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** (2.1) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \nabla_T W^* + \langle T, W^* \rangle A - \langle A, W^* \rangle T$$

yazılır. Timelike eğriler için Frenet denklemleri ve Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \nabla_T (\tau T) + \langle T, \tau T \rangle \kappa N - \langle \kappa N, \tau T \rangle T$$

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \nabla_T (\tau T) + \tau \langle T, T \rangle \kappa N - \kappa\tau \langle N, T \rangle T$$

bulunur. Timelike eğriler için $\langle T, T \rangle = -1$ ve $\langle N, T \rangle = 0$ olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \nabla_T (\tau T) - \tau\kappa N$$

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \frac{d\tau}{ds}T + \tau(\nabla_T T) - \tau\kappa N$$

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \frac{d\tau}{ds}T(s)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

**Sonuç 4.1.1.6.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ timelike bir eğri olsun. Fermi-Walker anlamında Darboux vektörünün timelike eğriler boyunca Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart $\tau(s) = sabit$ olmasıdır (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** Teorem 4.1.1.5. ten

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \frac{d\tau}{ds}T(s)$$

olmak üzere, $\tilde{\nabla}_T X = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\tau(s) = sabit$ olmasıdır.

### 4.1.2 Frenet Çatısına Göre Spacelike Eğriler Boyunca Fermi-Walker Türevi

Bu kısımda Fermi-Walker türevi, 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike eğriler boyunca incelenecektir.

#### 4.1.2.1. Frenet Çatısına Göre Normali Lightlike (Null) Olmayan Spacelike Eğriler Boyunca Fermi-Walker Türevi

Bu kısımda Fermi-Walker türevi, $E_1^3$ Minkowski uzayında Frenet çatısına göre alınan herhangi bir eğri boyunca, normal vektör alanının timelike veya spacelike olma durumları için birlikte incelenecektir.

**Lemma 4.1.2.1.1.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ normali lightlike (null) olmayan spacelike bir eğri olsun. Normali lightlike (null) olmayan $\alpha(s)$ spacelike eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı $X$ olmak üzere, $X$ vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \varepsilon_1 \kappa (X \wedge B) \tag{4.3}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\langle N, N \rangle = \varepsilon_1 = \mp 1$ dir (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** (2.1) denkleminde normali lightlike (null) olmayan spacelike eğriler için Frenet denklemleri yerine yazılarak düzenlenirse

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle \kappa N + \langle \kappa N, X \rangle T$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \kappa\left(-\langle T, X \rangle N + \langle N, X \rangle T\right)$$

bulunur. Lorentz vektörel çarpım özelliğinden

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \kappa\left(\left(T \wedge N\right) \wedge X\right)$$

olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \varepsilon_1 \kappa\left(X \wedge B\right)$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.2.1.2.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ lightlike (null) olmayan spacelike bir eğri olsun. $\lambda_1$, $\lambda_2$ ve $\lambda_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanının Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda_1(s) = sabit$$
$$\lambda_2(s) = c_1 \cosh\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right) + c_2 \sinh\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)$$
$$\lambda_3(s) = -c_1 \sinh\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right) - c_2 \cosh\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)$$

olmasıdır (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** (4.3) denkleminde $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T\left(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B\right) + \varepsilon_1 \kappa\left(\left(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B\right) \wedge B\right)$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right) T + \lambda_1 \nabla_T T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right) N + \lambda_2 \nabla_T N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds}\right) B + \lambda_3 \nabla_T B - \lambda_1 \kappa N + \varepsilon_1 \lambda_2 \kappa T$$

bulunur. Bu eşitlikte normali lightlike (null) olmayan spacelike eğriler için Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_3\tau\right)N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \lambda_2\tau\right)B \tag{4.4}$$

elde edilir. $X$, normali lightlike (null) olmayan $\alpha(s)$ spacelike eğrisi boyunca Fermi-Walker paralel olduğundan $\tilde{\nabla}_T X = 0$ olacaktır. O halde

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = 0$$
$$\frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_3\tau = 0$$
$$\frac{d\lambda_3}{ds} + \lambda_2\tau = 0$$

olmalıdır. Lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümünden

$$\lambda_1(s) = sabit$$
$$\lambda_2(s) = c_1 \cosh\left(\int_1^s \tau(s)ds\right) + c_2 \sinh\left(\int_1^s \tau(s)ds\right)$$
$$\lambda_3(s) = -c_1 \sinh\left(\int_1^s \tau(s)ds\right) - c_2 \cosh\left(\int_1^s \tau(s)ds\right)$$

elde edilir.

Tersine, $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı için

$$\lambda_1(s) = sabit$$
$$\lambda_2(s) = c_1 \cosh\left(\int_1^s \tau(s)ds\right) + c_2 \sinh\left(\int_1^s \tau(s)ds\right)$$
$$\lambda_3(s) = -c_1 \sinh\left(\int_1^s \tau(s)ds\right) - c_2 \cosh\left(\int_1^s \tau(s)ds\right)$$

olsun. (4.3) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_3\tau\right)N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} + \lambda_2\tau\right)B$$

elde edilir. Bu eşitlikte; $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ ve $\lambda_3(s)$ ün türevleri yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.2.1.3.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ normali lightlike (null) olmayan spacelike bir eğri olsun. $\lambda_1$, $\lambda_2$ ve $\lambda_3$ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere $X=\lambda_1 T+\lambda_2 N+\lambda_3 B$ vektör alanının eğri boyunca Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin düzlemsel olmasıdır (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** $X$, normali lightlike (null) olmayan spacelike $\alpha(s)$ eğrisi boyunca Fermi-Walker paralel olsun. (4.4) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X=\left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T+\left(\frac{d\lambda_2}{ds}+\lambda_3\tau\right)N+\left(\frac{d\lambda_3}{ds}+\lambda_2\tau\right)B$$

olmak üzere, bu denklem düzenlenirse

$$\tilde{\nabla}_T X=\tau\left(\lambda_3 N+\lambda_2 B\right)$$

elde edilir. $\tilde{\nabla}_T X=0$ olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T X=\tau\left(\lambda_3 N+\lambda_2 B\right)=0$$

olacaktır. Buna göre

$$\tau=0$$

elde edilir.

Tersine, $X=\lambda_1 T+\lambda_2 N+\lambda_3 B$ vektör alanı için $\alpha(s)$ eğrisi düzlemsel bir eğri olsun.

(2.1) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X=\tau\left(\lambda_3 N+\lambda_2 B\right)$$

elde edilir. $\alpha(s)$ eğrisi düzlemsel bir eğri olduğundan $\tau=0$ olup

$$\tilde{\nabla}_T X=0$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.2.1.4.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ normali lightlike (null) olmayan spacelike bir eğri olsun. $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı düzlemsel eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** (4.3) denkleminden, $\alpha(s)$ normali spacelike olan spacelike bir eğri olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T T = \nabla_T T - \kappa N$$

$$\tilde{\nabla}_T N = \nabla_T N + \kappa T$$

$$\tilde{\nabla}_T B = \nabla_T B$$

yazılır. Benzer şekilde (4.3) denkleminden, $\alpha(s)$ normali timelike olan spacelike bir eğri olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T T = \nabla_T T - \kappa N$$

$$\tilde{\nabla}_T N = \nabla_T N - \kappa T$$

$$\tilde{\nabla}_T B = \nabla_T B$$

yazılır. Burada normali lightlike (null) olmayan spacelike eğriler için $T$, $N$ ve $B$ vektör alanlarının türevleri yazılarak gerekli işlemler yapılırsa, her iki durum için

$$\tilde{\nabla}_T T = 0$$

$$\tilde{\nabla}_T N = 0$$

$$\tilde{\nabla}_T B = 0$$

elde edilir. Buna göre, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı düzlemsel eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

**Teorem 4.1.2.1.5.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ normali lightlike (null) olmayan spacelike bir eğri olsun. $W^*(s) = -\varepsilon_1 \tau(s) T(s)$ Fermi-Walker anlamında Darboux vektörünün Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T W^* = -\varepsilon_1 \frac{d\tau}{ds} T(s)$$

dir (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** (4.3) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \tilde{\nabla}_T W^* + \varepsilon_1 \kappa \left( W^* \wedge B \right)$$

yazılır. Normali lightlike (null) olmayan spacelike eğriler için Frenet denklemleri ve Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \tilde{\nabla}_T \left( -\varepsilon_1 \tau T \right) + \varepsilon_1 \kappa \left( \left( -\varepsilon_1 \tau T \right) \wedge B \right)$$

$$\tilde{\nabla}_T W^* = -\varepsilon_1 \frac{d\tau}{ds} T - \varepsilon_1 \tau \left( \nabla_T T \right) + \varepsilon_1 \kappa \tau N$$

$$\tilde{\nabla}_T W^* = -\varepsilon_1 \frac{d\tau}{ds} T(s)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

**Sonuç 4.1.2.1.6.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ normali lightlike (null) olmayan spacelike bir eğri olsun. Fermi-Walker anlamında Darboux vektörünün normali lightlike (null) olmayan spacelike eğriler boyunca Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart $\tau(s) = sabit$ olmasıdır (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** Teorem 4.1.2.1.5. ten

$$\tilde{\nabla}_T W^* = -\varepsilon_1 \frac{d\tau}{ds} T(s)$$

olmak üzere $\tilde{\nabla}_T W^* = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\tau(s) = sabit$ olmasıdır.

#### 4.1.2.2. Frenet Çatısına Göre Normali Lightlike (Null) Olan Spacelike Eğriler Boyunca Fermi-Walker Türevi

**Lemma 4.1.2.2.1.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ normali lightlike (null) olan spacelike bir eğri olsun. Normali lightlike (null) olan $\alpha(s)$ spacelike eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı $X$ olmak üzere, $X$ vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \left(N \wedge X\right) \tag{4.5}$$

şeklinde ifade edilir (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** (2.1) denkleminde Lorentz vektörel çarpım özelliği kullanılıp düzenlenirse

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle N + \langle N, X \rangle T$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \left(\left(T \wedge N\right) \wedge X\right)$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \left(N \wedge X\right)$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.2.2.2.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha\left(s\right)$ normali lightlike (null) olan spacelike bir eğri olsun. $\lambda_1$, $\lambda_2$ ve $\lambda_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanının Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda_1\left(s\right) = sabit$$
$$\lambda_2\left(s\right) = c_1 \exp\left(-\int_1^s \tau\left(s\right) ds\right)$$
$$\lambda_3\left(s\right) = c_2 \exp\left(\int_1^s \tau\left(s\right) ds\right)$$

olmasıdır (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** (2.1) denkleminde $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T \left(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B\right) - \langle T, \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B \rangle A + \langle A, \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B \rangle T$$

bulunur. Bu eşitlikte normali lightlike (null) olan spacelike eğriler için Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T \left(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B\right) - \langle T, \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B \rangle N + \langle N, \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B \rangle T$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T \left(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B\right) - \langle T, \lambda_1 T \rangle N + \langle N, \lambda_3 B \rangle T$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T \left(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B\right) - \lambda_1 \langle T, T \rangle N + \lambda_3 \langle N, B \rangle T$$

elde edilir. Normali lightlike (null) olan spacelike eğriler için $\langle T,T\rangle =1$ ve $\langle N,B\rangle =1$ olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T \left(\lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B\right) - \lambda_1 N + \lambda_3 T$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right) T + \lambda_1 \nabla_T T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right) N + \lambda_2 \nabla_T N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds}\right) B + \lambda_3 \nabla_T B - \lambda_1 N + \lambda_3 T$$

bulunur. Bu eşitlikte normali lightlike (null) olan spacelike eğriler için Frenet denklemleri yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right) T + \lambda_1 N + \left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right) N + \lambda_2 \tau N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds}\right) B - \lambda_3 T - \lambda_3 \tau B - \lambda_1 N + \lambda_3 T$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right) T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_2 \tau\right) N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} - \lambda_3 \tau\right) B \tag{4.6}$$

elde edilir. $X$ , normali lightlike (null) olan $\alpha(s)$ spacelike eğrisi boyunca Fermi-Walker paralel olduğundan $\tilde{\nabla}_T X = 0$ olacaktır. O halde

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = 0$$
$$\frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_2 \tau = 0$$
$$\frac{d\lambda_3}{ds} - \lambda_3 \tau = 0$$

olmalıdır. Lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümünden

$$\lambda_1(s) = sabit$$
$$\lambda_2(s) = c_1 \exp\left(-\int_1^s \tau(s)\, ds\right)$$
$$\lambda_3(s) = c_2 \exp\left(\int_1^s \tau(s)\, ds\right)$$

elde edilir.

Tersine, $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı için

$$\lambda_1(s) = sabit$$
$$\lambda_2(s) = c_1 \exp\left(-\int_1^s \tau(s)\,ds\right)$$
$$\lambda_3(s) = c_2 \exp\left(\int_1^s \tau(s)\,ds\right)$$

olsun. (2.1) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_2\tau\right)N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} - \lambda_3\tau\right)B$$

elde edilir. Bu eşitlikte; $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ ve $\lambda_3(s)$ ün türevleri yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

bulunur.

**Sonuç 4.1.2.2.3** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ normali lightlike (null) olan spacelike bir eğri olsun. $\lambda_1$, $\lambda_2$ ve $\lambda_3$ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanının eğri boyunca Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart $\alpha(s)$ eğrisinin düzlemsel olmasıdır (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** $X$, normali lightlike (null) olan $\alpha(s)$ spacelike eğrisi boyunca Fermi-Walker paralel olsun. (4.6) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds} + \lambda_2\tau\right)N + \left(\frac{d\lambda_3}{ds} - \lambda_3\tau\right)B$$

olmak üzere, bu denklem düzenlenirse

$$\tilde{\nabla}_T X = \tau(\lambda_2 N - \lambda_3 B)$$

elde edilir. $\tilde{\nabla}_T X = 0$ olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T X = \tau(\lambda_2 N - \lambda_3 B) = 0$$

olacaktır. Buna göre

$\tau = 0$

elde edilir.

Tersine, $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$ vektör alanı için $\alpha(s)$ eğrisi düzlemsel bir eğri olsun.

(2.1) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X = \tau(\lambda_2 N - \lambda_3 B)$$

bulunur. $\alpha(s)$ eğrisi düzlemsel bir eğri olduğundan $\tau = 0$ olup

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.2.2.4.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ normali lightlike (null) olan spacelike bir eğri olsun. $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı düzlemsel eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** (4.5) denkleminden yola çıkılarak

$$\tilde{\nabla}_T T = \nabla_T T - N$$

$$\tilde{\nabla}_T N = \nabla_T N$$

$$\tilde{\nabla}_T B = \nabla_T B + T$$

yazılır. Buradan normali lightlike (null) olan spacelike eğriler için $T$, $N$ ve $B$ vektör alanlarının türevleri yazılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T T = 0$$

$$\tilde{\nabla}_T N = 0$$

$$\tilde{\nabla}_T B = 0$$

elde edilir. Buna göre, $\{T, N, B\}$ Frenet çatısı düzlemsel eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

**Teorem 4.1.2.2.5.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ normali lightlike (null) olan spacelike bir eğri olsun. $W^*(s)=\tau(s)T(s)$ Fermi-Walker anlamında Darboux vektörünün Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \frac{d\tau}{ds}T(s)$$

dir (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** (2.1) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \nabla_T W^* - \langle T, W^* \rangle A + \langle A, W^* \rangle T$$

yazılır. Normali lightlike (null) olan spacelike eğriler için Frenet denklemleri ve Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \nabla_T(\tau T) - \langle T, \tau T \rangle N + \langle N, \tau T \rangle T$$

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \nabla_T(\tau T) - \tau \langle T, T \rangle N + \tau \langle N, T \rangle T$$

bulunur. Normali lightlike (null) olan spacelike eğriler için $\langle T, T \rangle = 1$ ve $\langle N, T \rangle = 0$ olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \nabla_T(\tau T) - \tau N$$

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \frac{d\tau}{ds}T + \tau(\nabla_T T) - \tau N$$

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \frac{d\tau}{ds}T(s)$$

elde edilir.

**Sonuç 4.1.2.2.6.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ normali lightlike (null) olan spacelike bir eğri olsun. Fermi-Walker anlamında Darboux vektörünün normali lightlike (null) olan spacelike eğriler boyunca Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart $\tau(s) = sabit$ olmasıdır (Karakuş ve Yaylı, 2017).

**İspat:** Teorem 4.1.2.2.5. ten

$$\tilde{\nabla}_T W^* = \frac{d\tau}{ds} T(s)$$

olmak üzere $\tilde{\nabla}_T W^* = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\tau(s) = sabit$ olmasıdır.

## 4.2. Bishop Çatısı ve Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde Fermi-Walker türevi, 3-boyutlu Minkowski uzayında alınan herhangi bir eğri boyunca, Bishop çatısına ve eğrinin karakterine göre incelenecektir.

### 4.2.1. Bishop Çatısına Göre Timelike Eğriler Boyunca Fermi-Walker Türevi

**Lemma 4.2.1.1.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ timelike bir eğri olsun. $\alpha(s)$ timelike eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı $X$ olmak üzere, $X$ vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge \varpi \tag{4.7}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\varpi$, Bishop çatısına göre timelike eğriler için Darboux vektörüdür.

**İspat:** (2.1) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \langle T, X \rangle A - \langle A, X \rangle T$$

olduğundan Lorentz vektörel çarpımı kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \left( \left( A \wedge T \right) \wedge X \right)$$

elde edilir. Timelike eğriler için Bishop çatı vektörlerinin türevleri yerine yazılıp düzenlenirse

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \left( \left( \left( k_1 N_1 + k_2 N_2 \right) \wedge T \right) \wedge X \right)$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + k_1 \left( \left( N_1 \wedge T \right) \wedge X \right) + k_2 \left( \left( N_2 \wedge T \right) \wedge X \right)$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - k_1 \left( N_2 \wedge X \right) + k_2 \left( N_1 \wedge X \right)$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \left( -k_1 N_2 + k_2 N_1 \right) \wedge X$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge \left( -k_2 N_1 + k_1 N_2 \right)$$

bulunur. Bishop çatısına göre timelike eğriler için Darboux vektörü,

$$\varpi = -k_2 N_1 + k_1 N_2$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge \varpi$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.1.2.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ timelike bir eğri olsun. $\lambda_1$, $\lambda_2$ ve $\lambda_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2$ vektör alanının Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = sabit$$

olmasıdır.

**İspat:** (4.7) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge \varpi$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - k_1 \left( N_2 \wedge X \right) + k_2 \left( N_1 \wedge X \right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2$ vektör alanı yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T X = {} & \nabla_T \left( \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2 \right) - k_1 \left( N_2 \wedge \left( \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2 \right) \right) \\ & + k_2 \left( N_1 \wedge \left( \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2 \right) \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T X = {} & \nabla_T \left( \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2 \right) - k_1 \left( \lambda_1 \left( N_2 \wedge T \right) + \lambda_2 \left( N_2 \wedge N_1 \right) + \lambda_3 \left( N_2 \wedge N_2 \right) \right) \\ & + k_2 \left( \lambda_1 \left( N_1 \wedge T \right) + \lambda_2 \left( N_1 \wedge N_1 \right) + \lambda_3 \left( N_1 \wedge N_2 \right) \right)\end{aligned}$$

bulunur.

$$T \wedge N_1 = N_2 , \; N_1 \wedge N_2 = -T , \; N_2 \wedge T = N_1$$

ifadeleri yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T \left( \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2 \right) - \lambda_1 k_1 N_1 - \lambda_2 k_1 T - \lambda_1 k_2 N_2 - \lambda_3 k_2 T$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T + \lambda_1 \nabla_T T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right)N_1 + \lambda_2 \nabla_T N_1 + \left(\frac{d\lambda_3}{ds}\right)N_2 + \lambda_3 \nabla_T N_2 - \lambda_1 k_1 N_1 - \lambda_2 k_1 T$$

$$-\lambda_1 k_2 N_2 - \lambda_3 k_2 T$$

elde edilir. Bu eşitlikte timelike eğriler için Bishop çatı vektörlerinin türevleri yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T + \lambda_1 k_1 N_1 + \lambda_1 k_2 N_2 + \left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right)N_1 + \lambda_2 k_1 T + \left(\frac{d\lambda_3}{ds}\right)N_2 + \lambda_3 k_2 T - \lambda_1 k_1 N_1$$

$$-\lambda_2 k_1 T - \lambda_1 k_2 N_2 - \lambda_3 k_2 T$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right)T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right)N_1 + \left(\frac{d\lambda_3}{ds}\right)N_2$$

bulunur. $X$ , $\alpha(s)$ timelike eğrisi boyunca Fermi-Walker paralel olduğundan $\tilde{\nabla}_T X = 0$ olacaktır. Buna göre

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = 0$$
$$\frac{d\lambda_2}{ds} = 0$$
$$\frac{d\lambda_3}{ds} = 0$$

olmalıdır. Lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümünden

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = sabit$$

elde edilir.

Tersine, $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2$ vektör alanı için

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = sabit$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge \varpi$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = 0$$

elde edilir.

**Sonuç 4.2.1.3.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ timelike bir eğri olsun. $\lambda_1$, $\lambda_2$ ve $\lambda_3$ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2$ vektör alanı eğri boyunca Fermi-Walker paraleldir.

**Sonuç 4.2.1.4.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ timelike bir eğri olsun. $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı timelike eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

**İspat:** (4.7) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T T = \nabla_T T - k_1 N_1 - k_2 N_2$$

$$\tilde{\nabla}_T N_1 = \nabla_T N_1 - k_1 T$$

$$\tilde{\nabla}_T N_2 = \tilde{\nabla}_T N_2 - k_2 T$$

elde edilir. Buradan timelike eğriler için $T$, $N_1$ ve $N_2$ vektör alanlarının türevleri yazılarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_T T = 0$$

$$\tilde{\nabla}_T N_1 = 0$$

$$\tilde{\nabla}_T N_2 = 0$$

olur. Buna göre, $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı timelike eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

### 4.2.2 Bishop Çatısına Göre Spacelike Eğriler Boyunca Fermi-Walker Türevi

Bu kısımda Fermi-Walker türevi, $E_1^3$ Minkowski uzayında Bishop çatısına göre alınan herhangi bir eğri boyunca, $N_1$ vektör alanının timelike veya spacelike olma durumları için birlikte incelenecektir.

**Lemma 4.2.2.1.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ spacelike bir eğri olsun. $\alpha(s)$ spacelike eğrisi boyunca herhangi bir vektör alanı $X$ olmak üzere, $X$ vektör alanının Fermi-Walker türevi

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge \varpi \tag{4.8}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\varpi$, Bishop çatısına göre spacelike eğriler için Darboux vektörüdür.

**İspat:** (2.1) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \langle T, X \rangle A + \langle A, X \rangle T$$

olduğundan Lorentz vektörel çarpım özelliği kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \left( (T \wedge A) \wedge X \right)$$

elde edilir. Spacelike eğriler için Bishop çatı vektörlerinin türevleri yerine yazılıp düzenlenirse

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \left( \left( T \wedge \left( k_1 N_1 - k_2 N_2 \right) \right) \wedge X \right)$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + k_1 \left( (T \wedge N_1) \wedge X \right) - k_2 \left( (T \wedge N_2) \wedge X \right)$$

bulunur. Spacelike eğriler için $T \wedge N_1 = -\varepsilon_1^* N_2$ ve $N_2 \wedge T = \varepsilon_1^* N_1$ olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \varepsilon_1^* k_1 \left( N_2 \wedge X \right) + \varepsilon_1^* k_2 \left( N_1 \wedge X \right)$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + \varepsilon_1^* \left( k_2 N_1 - k_1 N_2 \right) \wedge X$$

bulunur. Bishop çatısına göre spacelike eğriler için Darboux vektörü,

$$\varpi = -\varepsilon_1^* \left( k_2 N_1 - k_1 N_2 \right)$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge \varpi$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.2.2.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ spacelike bir eğri olsun. $\lambda_1$, $\lambda_2$ ve $\lambda_3$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2$ vektör alanının Fermi-Walker paralel olması için gerek ve yeter şart

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = sabit$$

olmasıdır.

**İspat:** (4.8) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X + X \wedge \varpi$$

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T X - \varepsilon_1^* k_1 \left(N_2 \wedge X\right) + \varepsilon_1^* k_2 \left(N_1 \wedge X\right)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $X = \lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2$ vektör alanı yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T X = {} & \nabla_T \left(\lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2\right) - \varepsilon_1^* k_1 \left(N_2 \wedge \left(\lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2\right)\right) \\ & + \varepsilon_1^* k_2 \left(N_1 \wedge \left(\lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2\right)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T X = {} & \nabla_T \left(\lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2\right) - \varepsilon_1^* k_1 \left(\lambda_1 \left(N_2 \wedge T\right) + \lambda_2 \left(N_2 \wedge N_1\right) + \lambda_3 \left(N_2 \wedge N_2\right)\right) \\ & + \varepsilon_1^* k_2 \left(\lambda_1 \left(N_1 \wedge T\right) + \lambda_2 \left(N_1 \wedge N_1\right) + \lambda_3 \left(N_1 \wedge N_2\right)\right)\end{aligned}$$

bulunur.

$$T \wedge N_1 = -\varepsilon_1^* N_2, \; N_1 \wedge N_2 = T, \; N_2 \wedge T = \varepsilon_1^* N_1$$

ifadeleri yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \nabla_T \left(\lambda_1 T + \lambda_2 N_1 + \lambda_3 N_2\right) - \lambda_1 k_1 N_1 + \varepsilon_1^* \lambda_2 k_1 T - \lambda_1 k_2 N_2 + \varepsilon_1^* \lambda_3 k_2 T$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_T X = {} & \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right) T + \lambda_1 \nabla_T T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right) N_1 + \lambda_2 \nabla_T N_1 + \left(\frac{d\lambda_3}{ds}\right) N_2 + \lambda_3 \nabla_T N_2 - \lambda_1 k_1 N_1 + \varepsilon_1^* \lambda_2 k_1 T \\ & - \lambda_1 k_2 N_2 + \varepsilon_1^* \lambda_3 k_2 T\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte spacelike eğriler için Bishop çatı vektörlerinin türevleri yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X = \left(\frac{d\lambda_1}{ds}\right) T + \left(\frac{d\lambda_2}{ds}\right) N_1 + \left(\frac{d\lambda_3}{ds}\right) N_2$$

bulunur. $X$, $\alpha(s)$ spacelike eğrisi boyunca Fermi-Walker paralel olduğundan $\tilde{\nabla}_T X = 0$ olacaktır. Buna göre

$$\frac{d\lambda_1}{ds}=0$$
$$\frac{d\lambda_2}{ds}=0$$
$$\frac{d\lambda_3}{ds}=0$$

olmalıdır. Lineer diferansiyel denklem sisteminin çözümünden

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=sabit$$

elde edilir.

Tersine, $X=\lambda_1 T+\lambda_2 N_1+\lambda_3 N_2$ vektör alanı için

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=sabit$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_T X=\nabla_T X+X\wedge\varpi$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_T X=0$$

elde edilir.

**Sonuç 4.2.2.3.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ spacelike bir eğri olsun. $\lambda_1$, $\lambda_2$ ve $\lambda_3$ sıfırdan farklı sabitler olmak üzere $X=\lambda_1 T+\lambda_2 N_1+\lambda_3 N_2$ vektör alanı eğri boyunca Fermi-Walker paraleldir.

**Sonuç 4.2.2.4.** $E_1^3$ Minkowski uzayında $\alpha(s)$ spacelike bir eğri olsun. $\{T,N_1,N_2\}$ Bishop çatısı spacelike eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

**İspat:** $N_1$ spacelike olmak üzere, (4.8) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T T=\nabla_T T-k_1 N_1+k_2 N_2$$

$$\tilde{\nabla}_T N_1=\nabla_T N_1+k_1 T$$

$$\tilde{\nabla}_T N_2=\nabla_T N_2+k_2 T$$

elde edilir. Benzer şekilde $N_1$ timelike olmak üzere, (4.8) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_T T = \nabla_T T - k_1 N_1 + k_2 N_2$$

$$\tilde{\nabla}_T N_1 = \nabla_T N_1 - k_1 T$$

$$\tilde{\nabla}_T N_2 = \nabla_T N_2 - k_2 T$$

elde edilir. Buradan spacelike eğriler için $T$ , $N_1$ ve $N_2$ vektör alanlarının türevleri yazılarak gerekli işlemler yapılırsa, her iki durum için

$$\tilde{\nabla}_T T = 0$$

$$\tilde{\nabla}_T N_1 = 0$$

$$\tilde{\nabla}_T N_2 = 0$$

olur. Buna göre, $\{T, N_1, N_2\}$ Bishop çatısı spacelike eğriler boyunca non-rotating (dönmeyen) çatıdır.

# 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu yüksek lisans tezinde hızlanan cisimlerin hareketini inceleyen Fermi-Walker türevi ele alınmıştır. Fermi-Walker türevi bizlere fiziksel hareketleri inceleme ve geometrik olarak sonuçlar elde etme imkanı sağlar. Karakuş ve Yaylı (2017) tarafından yapılan çalışmada, 3-boyutlu Minkowski uzayında Frenet çatısına göre Fermi-Walker türevi tanımlanmış ve Fermi-Walker paralellik incelenmiştir. Sonra Frenet çatısının hangi koşullar altında non-rotating (dönmeyen) çatı olduğu ispatlanmış ve Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü incelenmiştir.

Bu yüksek lisans tezinde öncelikle Karakuş ve Yaylı (2017)' nın çalışmaları üzerinde durulmuştur. Daha sonra Bishop çatısına göre, Fermi-Walker türevleri tanımlanmış ve herhangi bir vektör alanının hangi koşullar altında Fermi-Walker paralel olacağı incelenmiştir. Ayrıca Bishop çatısının hangi durumlarda non-rotating (dönmeyen) çatı olduğu ispatlanmıştır.

# KAYNAKLAR


Balakrishnan, R. 2005. Space curves, anholonomy and nonlinearity. Pramana Journal of Physics., 64(4): 607-615.

Benn, I. M., Tucker, R. W. 1989. Wave mechanics and inertial guidance. Physical Review D, 39(6): 1594-1601.

Bishop, R. L. 1975. There is more than one way to frame a curve. The American Mathematical Monthly, 82(3): 246-251.

Bükcü, B., Karacan, M. K. 2008a. Special Bishop motion and Bishop Darboux rotation axis of the space curve. Journal of Dynamical Systems and Geometric Theories, 6(1): 27-34.

Bükcü, B., Karacan, M. K. 2008b. Bishop frame of the spacelike curve with a spacelike principal normal in Minkowski 3-space. Communications Series A1 Mathematics & Statictics, 57(1).

Bükcü, B., Karacan, M. K. 2010. Bishop frame of the spacelike curve with a spacelike binormal in Minkowski 3-Space. Selçuk Journal of Applied Mathematics, 11(1): 15-25.

Carmo, M. 1976. Differantial Geometry of Curves and Surfaces. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

Da Silva, L. C. (2017). Moving frames and the characterization of curves that lie on a surface. Journal of Geometry, 108(3): 1091-1113.

Fermi, E. 1922. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fiz. Mat. Nat., 31: 184-306.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000a. Diferensiyel Geometri, Cilt I. A. Ü. Fen Fakültesi, Ankara, 1-175.

Hacısalihoğlu, H. H. 2000b. Diferensiyel Geometri, Cilt II. A. Ü. Fen Fakültesi, Ankara, 54-68.

Hanson, A. J., Ma, H. 1995a. Parallel transport approach to curve framing. Indiana University, Techreports, TR425(11): 3-7.

Hanson, A. J., Ma, H. 1995b. Quaternion frame approach to streamline visualization. Ieee Transactions on Visualization and Computer Graphics, 1(2): 164-174.

Hawking, S. W., Ellis, G. F. R. 1973. The Large Scale Structure of Spacetime. 4.1. Cambridge Univ. Press, 393.

Hehl F. W., Lemke J., Mielke E. W. 1991. Two lectures on Fermions and Gravity, Geometry and Theoretical Physics, J. Debrus and A.C. Hirshfeld (eds.), Springer Verlag, N.Y., 56-140.

Karacan, M. K., Bükcü, B. 2008. Bishop frame of the timelike curve in Minkowski 3-space. Sdü Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi (e-dergi), 3(1): 80-90.

Karakuş, F. 2012. Fermi-Walker türevi ve uygulamaları. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi.

Karakuş, F., Yaylı, Y. 2012. On the Fermi-Walker derivative and non-rotating frame. Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 9(8): 1250066 (11 pages).

Karakuş, F., Yaylı, Y. 2017. The Fermi-Walker derivative in Minkowski space $E_1^3$. Advances in Applied Clifford Algebras, 27(2): 1353-1368.

Kişi, İ., Öztürk, G. 2015. Constant ratio curves according to Bishop frame in Minkowski 3-space. Facta Universitatis, Series: Mathematics and Informatics, 30(4): 527-538.

Kühnel, W. 2006. Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds, Second edition. American Mathematical Society, Rhode Island, 380 s.

Lopez, R. 2008. Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space. arXiv preprint arXiv:0810.3351.

Manoff, S. 1998. Fermi derivative and Fermi-Walker transports over $\left(\bar{L}_n, g\right)$-spaces. Int. J. Modern Phys. A, 13(25): 4289-4308.

O'Neill, B. 1983. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity. Academic Press, 103.

Pripoae, G. T. 1999. Generalized Fermi-Walker transport, Libertas Math., XIX: 65-69.

Pripoae, G. T. 2000. Generalized Fermi-Walker parallelism induced by generalized Schouthen connections. Proceedings of the Conference of Applied Differential Geometry-General Relativity and the Workshop on Global Analysis, DifferentialGeometry and Lie Algebras, Balkan Society of Geometers (2000), pp. 117–125.

Sabuncuoğlu, A. 2010. Diferensiyel Geometri, Nobel Yayınları, s. 4-328, Ankara.

Sachs, R. K., Wu, H. 1977. General Relativity for Mathematicians Springer Verlag, N.Y., 3.3.

Selig, J. M. 2007. Curves of stationary acceleration in SE(3). IMA Journal of Mathematical Control and Information, 24(1): 95-113.

Turgut, A. 1995. 3-boyutlu Minkowski uzayında spacelike ve timelike regle yüzeyler. Doktora tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Walker, A.G. 1932. Relative co-ordinates. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 52: 345-353.

Weinberg, S. 1972. Gravitation and Cosmology. J. Wiley Publ., N.Y, 5.1.

Yüce, S. 2013. Diferensiyel Geometri. Sürat Üniversite Yayınları, İstanbul, 140.

## ÖZGEÇMİŞ

### 1. KişiselBilgiler

| | |
|---|---|
| **Ad Soyad** | Rahman KILIÇ |
| **Doğum Tarihi** | 20.09.1987 |
| **Doğum Yeri** | TERME |
| **E-posta Adresi** | kilicrahman@gmail.com |

### 2. Eğitim Bilgileri

| | |
|---|---|
| Lisans | 2012-2016 Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü |
| Yüksek Lisans | 2017-2019 Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı<br>Tez adı: 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Fermi-Walker Türevi<br>Danışman: Doç. Dr. Fatma KARAKUŞ |