

**T.C.**  
**SİNOP ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AĞIRLIKLI WEIBULL DAĞILIMI VE UYGULAMALARI

YAZAR  
Firdevs YILMAZ

DANIŞMAN  
DR. ÖĞR. ÜYESİ DEMET HAN AYDIN

**SİNOP – 2019**

## TEZ KABUL

Firdevs YILMAZ tarafından hazırlanan “Ağırlıklı Weibull Dağılımı ve Uygulamaları” başlıklı bu çalışma, 07.10.2019 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **YÜKSEK LİSANS tezi** olarak kabul edilmiştir.

**Başkan** Doç. Dr. Fadime DİRİK  
Sinop Üniversitesi/ Fen-Edebiyat Fakültesi

**Üye** Dr.Öğr. Üyesi Demet HAN AYDIN  
Sinop Üniversitesi/ Fen-Edebiyat Fakültesi

**Üye** Dr.Öğr. Üyesi Fatma Gül AĞGÜL  
Artvin Çoruh Üniversitesi/ Mühendislik Fakültesi

## ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Firdevs YILMAZ

## İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER .....	I
SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ .....	III
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	V
TABLolar LİSTESİ.....	VI
ÖZET .....	vii
ABSTRACT.....	viii
TEŞEKKÜR .....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	6
2.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu.....	6
2.2. Birikimli Dağılım Fonksiyonu.....	6
2.3. $r$ . Moment.....	6
2.4. Mod Değeri.....	7
2.5. Medyan.....	7
2.6. Moment Çıkaran Fonksiyon.....	7
2.7. Karakteristik Fonksiyon.....	8
2.8. $i$ . Sıra İstatistiği.....	8
2.9. Güvenilirlik Fonksiyonu .....	8
2.10. Bozulma Oranı Fonksiyonu .....	9
2.11. Glaser'in Lemması.....	9
2.12. Fisher Bilgi Matrisi.....	10
2.13. Deneysel Dağılım Fonksiyonu.....	10
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER.....	11
3.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi .....	11
3.2. En Küçük Kareler Yöntemi.....	11
3.3. Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi .....	11
3.4. Kolmogorov-Smirnov Uyum İyiliği Testi.....	12
3.5. Model Değerlendirme Testi .....	13
4. WEIBULL DAĞILIMI VE BAZI İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ.....	14
4.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu.....	14
4.2. Weibull Dağılımının Birikimli Dağılım Fonksiyonu .....	17
4.3. Weibull Dağılımının $r$ . Momenti .....	18
4.4. Weibull Dağılımının Modu .....	19
4.5. Weibull Dağılımının Medyanı .....	20
4.6. Weibull Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu.....	20
4.7. Weibull Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu .....	21

4.8. Weibull Dağılımı için <i>i</i> . Sıra İstatistiği .....	21
4.9. Weibull Dağılımının Güvenilirlik Fonksiyonu .....	22
4.10. Weibull Dağılımının Bozulma Oranı Fonksiyonu .....	23
4.11. Weibull Dağılımının Diğer Dağılımlarla İlişkisi .....	24
4.12. Weibull Dağılımının Parametrelerinin Tahmini.....	27
4.12.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Parametrelerin Tahmini .....	27
4.12.2. En Küçük Kareler Yöntemi ile Parametrelerin Tahmini.....	29
4.12.3. Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi ile Parametrelerin Tahmini .....	30
5. AĞIRLIKLI WEIBULL DAĞILIMI VE BAZI İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ.....	31
5.1. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu.....	31
5.2. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Birikimli Dağılım Fonksiyonu.....	33
5.3. Ağırlıklı Weibull Dağılımının <i>r</i> . Momenti .....	35
5.4. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Modu.....	36
5.5. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Medyanı.....	37
5.6. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu .....	37
5.7. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu.....	38
5.8. Ağırlıklı Weibull Dağılımı için <i>i</i> . Sıra İstatistiği .....	38
5.9. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Güvenilirlik Fonksiyonu .....	39
5.10. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Bozulma Oranı Fonksiyonu .....	40
5.11. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Diğer Dağılımlarla İlişkisi.....	42
5.12. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Parametrelerinin Tahmini .....	42
5.12.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Parametrelerin Tahmini .....	43
5.12.2. En Küçük Kareler Yöntemi ile Parametrelerin Tahmini.....	45
5.12.3. Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi ile Parametrelerin Tahmini .....	45
6. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI .....	46
6.1. Weibull Dağılımının Parametrelerinin Tahmini için Simülasyon Çalışması.....	46
6.2. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Parametrelerinin Tahmini için Simülasyon Çalışması ....	48
7. BULGULAR .....	51
8. TARTIŞMA VE SONUÇ .....	55
9. KAYNAKLAR.....	56
10. EKLER.....	60
EK 1 Weibull Dağılımı için Fisher Bilgi Matrisindeki Bazı Beklenen Değer Hesapları.....	60
EK 2 Ağırlıklı Weibull Dağılımı için Fisher Bilgi Matrisindeki Bazı Beklenen Değer Hesapları.....	64
ÖZGEÇMİŞ.....	65

## SEMBOLLER VE KISALTMALAR LİSTESİ

### SEMBOLLER

$X$	: Rasgele değişken
$k$	: Şekil parametresi
$\lambda$	: Ölçek parametresi
$F(x)$	: $X$ rasgele değişkenin birikimli dağılım fonksiyonu
$F^{-1}(x)$	: $Bdf$ 'nin tersi
$f(x)$	: $X$ rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu
$f^w(x)$	: Ağırlıklı dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu
$R(x)$	: Güvenilirlik fonksiyonu
$h(x)$	: Bozulma oranı fonksiyonu
$\beta_1$	: Çarpıklık katsayısı
$\beta_2$	: Basıklık katsayısı
$E(X)$	: $X$ rasgele değişkenin beklenen değeri
$\text{Var}(X)$	: $X$ rasgele değişkenin varyansı
$\text{Med}_x$	: $X$ rasgele değişkenin medyan değeri
$x_M$	: $X$ rasgele değişkeninin modu
$M_X(t)$	: $X$ rasgele değişkeninin moment çıkarıcı fonksiyonu
$E(e^{itX})$	: $X$ rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu
$f_{i:n}(x)$	: $i$ . sıra istatistiğinin olasılık yoğunluk fonksiyonu
$L(\cdot)$	: Olabilirlik fonksiyonu
$I(\cdot, \cdot)$	: Fisher bilgi matrisi
$\gamma$	: Euler sabiti
$\Gamma(\cdot)$	: Gamma fonksiyonu
$\Gamma'(x)$	: Gamma fonksiyonunun $x$ 'e göre birinci türevi
$\Gamma''(x)$	: Gamma fonksiyonunun $x$ 'e göre ikinci türevi
$\Psi(x)$	: Digamma fonksiyonu
$\Psi^n(x)$	: Poligamma fonksiyonu
$\hat{\theta}_i$	: $\theta$ parametresinin $i$ . tekrardaki tahmin değeri
$w(x)$	: Ağırlık fonksiyonu
$f'(x)$	: $f(x)$ 'in $x$ 'e göre birinci türevi
$R^2$	: Belirtme katsayısı

## KISALTMALAR

<i>AEKK</i>	: Ağırlıklı En Küçük Kareler
<i>Bdf</i>	: Birikimli dağılım fonksiyonu
<i>Df</i>	: Dağılım fonksiyonu
<i>EÇO</i>	: En Çok Olabilirlik
<i>EKK</i>	: En Küçük Kareler
<i>MSE</i>	: Hata Kareler Ortalaması
<i>RMSE</i>	: Hata Kareler Ortalamasının Karekökü
<i>KS</i>	: Kolmogorov-Smirnov Testi
<i>Oyf</i>	: Olasılık yoğunluk fonksiyonu



## ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 4.1. Şekil parametresinin $1 < k < 2.6$ aralığındaki değerleri için Weibull dağılımı grafiği .....	15
Şekil 4.2. Şekil parametresinin $2.6 < k < 3.7$ aralığındaki değerleri için Weibull dağılımı grafiği .....	15
Şekil 4.3. Şekil parametresinin $k > 3.7$ aralığındaki değerleri için Weibull dağılımı grafiği .....	16
Şekil 4.4. Ölçek parametresinin farklı değerleri için Weibull dağılımının <i>oyf</i> grafiği.....	16
Şekil 4.5. Ölçek parametresinin farklı değerleri için Weibull dağılımının <i>oyf</i> grafiği.....	17
Şekil 4.6. Ölçek parametresinin farklı değerleri için Weibull dağılımının <i>bdf</i> grafiği.....	18
Şekil 4.7. Şekil parametresinin farklı değerleri için Weibull dağılımının güvenilirlik fonksiyonu grafiği.....	22
Şekil 4.8. Şekil parametresinin farklı değerleri için Weibull dağılımının bozulma oranı fonksiyonu grafiği.....	24
Şekil 4.9. Weibull dağılımının diğer dağılımlarla olan ilişkisi.....	27
Şekil 5.1. Şekil parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının <i>oyf</i> grafiği .....	32
Şekil 5.2. Ölçek parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının <i>oyf</i> grafiği .....	33
Şekil 5.3. Şekil parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının <i>bdf</i> grafiği .....	34
Şekil 5.4. Ölçek parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının <i>bdf</i> grafiği .....	35
Şekil 5.5. Şekil parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının güvenilirlik fonksiyonu grafiği.....	39
Şekil 5.6. Şekil parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının bozulma oranı fonksiyonu grafiği.....	40
Şekil 7. 1. Her bir mevsim verisine ait ağırlıklı Weibull dağılımı (a) ve Weibull dağılımı (b) için Q-Q grafikleri.....	53
Şekil 7. 2. Her bir mevsim verisi için uygunluk grafikleri .....	54



## TABLÖLAR LİSTESİ

<b>Tablo 6.1.</b> Weibull dağılımının $k$ ve $\lambda$ parametrelerinin $E\check{C}O$ , $EKK$ ve $AEKK$ tahminleri .....	47
<b>Tablo 6.2.</b> Ağırlıklı Weibull dağılımının $k$ ve $\lambda$ parametrelerinin $E\check{C}O$ , $EKK$ ve $AEKK$ tahminleri .....	49
<b>Tablo 7.1.</b> Sinop ili Merkez istasyonu için her bir mevsim verisine ilişkin bazı belirleyici istatistikler.....	51
<b>Tablo 7.2.</b> Her bir veri seti için ağırlıklı Weibull ve Weibull dağılımlarına ilişkin parametre tahminleri, $RMSE$ , $R^2$ ve $KS$ değerleri .....	52

## ÖZET

### AĞIRLIKLIL WEIBULL DAĞILIMI VE UYGULAMALARI

Bu tez çalışmasında, Weibull ve ağırlıklı Weibull dağılımlarının bazı istatistiksel özellikleri incelenmiş ve diğer dağılımlarla olan ilişkileri araştırılmıştır. Her iki dağılımın bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek için en çok olabilirlik, en küçük kareler ve ağırlıklı en küçük kareler olmak üzere üç farklı tahmin yöntemi kullanılmıştır. Bu tahmin yöntemlerinin performansları Monte-Carlo simülasyon çalışması ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma kriterleri olarak yan ve hata kareler ortalaması kullanılmıştır.

Son olarak ağırlıklı Weibull dağılımının Weibull dağılımına karşı veri modelleme performansını göstermek amacı ile Sinop ili mevsimlik günlük ortalama rüzgar hızı verileri analiz edilmiştir. Bu analiz sonucunda ağırlıklı Weibull dağılımının belirtilen veriyi Weibull dağılımına göre daha iyi modellediği hem istatistiksel testler hem de grafiksel yöntemler kullanılarak gösterilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Weibull dağılımı, Ağırlıklı Weibull dağılımı, Parametre tahmini, Fisher bilgi matrisi, Monte-Carlo simülasyonu, Rüzgar hızı verisi.

## ABSTRACT

### WEIGHTED WEIBULL DISTRIBUTION AND ITS APPLICATIONS

In this thesis, some statistical properties of Weibull and weighted Weibull distributions are examined, and their relations with other distributions are investigated. Three different parameter estimation methods, maximum likelihood, least squares and weighted least squares, are used to obtain estimates of unknown parameters of both distributions. The performances of these estimation methods are compared with Monte-Carlo simulation study. Bias and mean square error are used as comparison criteria.

Finally, in order to show the modeling performance of the weighted Weibull distribution against the Weibull distribution, the seasonal daily mean wind speed data of Sinop province are analyzed. As a result of this analysis, it is shown that the weighted Weibull distribution provides better modelling than the Weibull distribution using both statistical tests and graphical methods.

**Key Words:** Weibull distribution, Weighted Weibull distribution, Parameter estimation, Fisher information matrix, Monte-Carlo simulation, Wind speed data.

## TEŞEKKÜR

Tez alıőmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösterici ve destek olan değerli danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Demet HAN AYDIN (Sinop Üniversitesi)'a, ilgisini ve önerilerini göstermekten kaçınmayan Matematik Anabilim Dalı Başkanı Sayın Doç. Dr. Fadime DİRİK (Sinop Üniversitesi)'e ve çalıőmalarımın her safhasında önerileriyle beni yönlendiren Dr. Öğr. Üyesi Fatma Gül AKGÜL (Artvin Çoruh Üniversitesi)'e sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Çalıőmalarım boyunca yardımını hiç esirgemeyen değerli hocalarım Arő. Dr. Pınar OKÇU ŐAHİN (Sinop Üniversitesi)'e, Arő. Dr. Erdiń KOLAY (Sinop Üniversitesi)'a, ve Arő. Gör. Mutlu KAYA (Sinop Üniversitesi)'ya teőekkürü bir borç bilirim.

Çalıőmalarım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme de sonsuz teőekkürler ederim.



Firdevs YILMAZ

## 1. GİRİŞ

İstatistiksel dağılımlar hayatımızın birçok alanında kullanılmaktadır. Örneğin; öğrenme üzerinde harcanan zaman, yolculuk süreleri, salgın hastalıkların sürme müddeti, belli bir hastalığı olan hastaların tedaviden sonra iyileşme süreleri, bir makinenin ya da makinenin bir parçasının bozuluncaya kadar ki geçen süre, işsiz bir kişinin yeni bir iş buluncaya kadar geçen süre gibi örnekler birer dağılım oluşturmaktadır. Ayrıca bu dağılımlar ekonomi, tıp, mühendislik vb. gibi bilimsel alanlarda önemli role sahiptir.

Bilindiği üzere araştırmada kullanılan verinin analizinde parametrik testlerin kullanılabilmesi için verinin dağılımının belirlenmesi gerekmektedir. Ayrıca verilerin hangi dağılıma sahip olduğunun tespit edilmesi dağılımın karakteristik özelliklerinin belirlenmesinde kolaylık sağlar.

Diğer taraftan, uygulanan analiz sonuçlarının güvenilirliği araştırmada kullanılan verinin dağılımının tam ya da tama yakın bir şekilde belirlenmesine bağlıdır. Bu nedenle literatürde kesikli ve sürekli olmak üzere birçok istatistiksel dağılım ortaya atılmıştır. Her geçen günde bu dağılımlara ek olarak birçok yeni istatistiksel dağılımlar türetilmektedir. Birçok uygulama alanında yaygın olarak kullanılan dağılımlardan bir tanesi Weibull dağılımıdır.

Geniş bir uygulama alanına sahip sürekli bir olasılık dağılımı olan Weibull dağılımı, ilk kez Frechet (1927) tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra bu dağılım, Rosin ve Rammler (1933) tarafından taneciklerin parçacık dağılımını (moleküller ile ilgili bir çalışma) modellemek için ve dağılıma ismini veren İsveçli fizikçi profesör Waloddi Weibull (1939) tarafından malzemenin (kopuncaya veya kırılıncaya kadar dayanabildiği en yüksek) çekme geriliminin dağılımını açıklamak için kullanılmıştır (Gupta ve Kundu, 2001; Lai 2014). Weibull dağılımının uygulanabilirliğinin ve çok yönlülüğünün vurgulanması, ancak dağılımın özelliklerinin ayrıntılı olarak tanımlandığı Waloddi Weibull (1951)'in çalışması ile olmuştur.

Weibull dağılımı özellikle güvenilirlik analizinde başarısızlık olarak adlandırılan ve genellikle bozulma ya da ölüm ile sonuçlanan olayların meydana gelmesine kadar geçen sürenin modellenmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır (Rinne, 2008). Ayrıca, hava

tahmini, biyolojik ve tıbbi uygulamalarda örneğin insan veya laboratuvar hayvanlarında ortaya çıkan tümörlerin meydana gelme zamanlarının modellenmesi, üretilen ürünlerin ömürleri veya dayanıklılık sürelerinin modellenmesi gibi kullanım alanlarına sahip bir olasılık dağılımıdır (Lawless, 2003; Abernethy, 2004).

Weibull dağılımı aynı zamanda sıra dışı doğa olaylarının örneğin yağmur, sel, deprem (Hagiwara, 1974) ve rüzgâr hızı (Akpınar ve Akpınar, 2009; Akdağ ve Güler, 2009; Shu ve ark., 2015) gibi çevresel verileri modellemek için de sıklıkla kullanılmaktadır.

Weibull dağılımı üstel dağılımın genelleştirilmiş halidir. Birçok durumda üstel dağılımın zamana karşı dayanma modeli olarak yetersiz kalması bozulma oranı fonksiyonunun sabit olmasından kaynaklanmaktadır. Weibull dağılımının bozulma oranı fonksiyonunun zamana bağlı olarak değişmesi nedeni ile daha genel ve esnek bir dağılım olması uygulamada üstel dağılımdan daha fazla tercih edilmesini sağlamaktadır (Saygı, 2007).

Literatürde kullanım alanlarına göre iki veya üç parametrelili Weibull dağılımları ile sıkça karşılaşmaktadır. Bunlar:

i) *Üç Parametrelili Weibull Dağılımı*: Weibull dağılımının klasik en genel şekli üç parametrelili Weibull dağılımıdır. Üç Parametrelili Weibull dağılımına sahip  $X$  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu (*oyf*) aşağıdaki eşitlik ile tanımlanır:

$$f(x; k, \lambda, \beta) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left( \frac{x-\beta}{\lambda} \right)^{k-1} e^{-\left( \frac{x-\beta}{\lambda} \right)^k}, & x \geq \beta \\ 0, & x < \beta \end{cases}$$

Burada;  $k > 0$  olmak üzere şekil parametresidir ve dağılımın kuyruğunun şeklini, diğer bir ifade ile dağılımın çarpıklığını belirler.

$\lambda > 0$  olmak üzere ölçek parametresidir ve karakteristik yaşam (ömür) parametresi olarak da isimlendirilir.  $\beta \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $\beta$  konum parametresidir. Üç parametrelili *oyf*, parametrelerin tahmininde yaşanan zorluklardan dolayı pek fazla tercih edilmez. Bu sebepten dolayı konum parametresinin değeri sıfır olarak kabul edilir.

ii) *İki Parametrelili Weibull Dağılımı*: Konum parametresi  $\beta = 0$  olduğunda dağılım iki parametrelili Weibull dağılımına indirgenir. İki parametrelili Weibull dağılımı özellikle

malzeme biliminde yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Ayrıca rüzgâr dağılımı ve değişimi ile ilgili çalışmalarda Weibull dağılımının bu versiyonu yaygın olarak kullanılmaktadır (Elitok, 2006).

Bununla birlikte Weibull dağılımı birçok alanda yaygın olarak kullanılmasına rağmen bazı verilerin modellenmesinde yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle Weibull dağılımına alternatif olabilmesi için bu dağılımdan türetilmiş birçok yeni dağılım önerilmiştir. Literatürde genelleştirilmiş veya değiştirilmiş birçok Weibull dağılımı bulunmaktadır. Bunlardan bazıları; Weibull dağılımının log dönüşümüyle elde edilen log-Weibull dağılımını Gumbel (1958), lineer dönüşümüyle elde edilen reflected (yansıtılmış) Weibull dağılımını Cohen (1973) önermiştir. Genelleştirilmiş Gamma dağılımı olarak bilinen Stacy's Weibull dağılımını Stacy (1962) tanımlamıştır. Reel sayılarda tanımlı double Weibull dağılımını Balakrishnan ve Kocherlakota (1985) tanıtmıştır. Kies (1958) dört parametrelili Weibull dağılımı önermiş ve Phani (1987) bu dağılımın beş parametrelili Weibull dağılımı olarak bir genişlemesini önermiştir. Ayrıca üstelleştirilmiş (exponentiated) Weibull dağılımını Mudholkar ve Srivastava (1993), esnek (flexible) Weibull dağılımını Gurvich ve ark. (1997), genişletilmiş (extended) Weibull dağılımını Marshall ve Olkin (1997), Weibull dağılımının ağırlıklı versiyonu olan ağırlıklı (weighted) Weibull dağılımını Das ve Roy (2011) tanıtmıştır.

Diğer taraftan; insan, vahşi yaşam, böcek ya da balık gibi canlı popülasyonlarının incelendiği gözlemsel çalışmalarda örnekleme alınan birimlerin seçimi eşit olasılıklı olmayabilir. Bu durumda, örneklem çerçeveleri iyi tanımlanmadığından bu gözlemlerin seçimi rasgele olmaz. Bu nedenle bu gözlemler kitlenin sahip olduğu dağılım ile modellenemediğinden ağırlıklı dağılımlara ihtiyaç duyulur (Jain ve ark., 1989).

Ağırlıklı dağılımlar kavramı ilk kez Fisher (1934)'ın araştırma yöntemlerinin kaydedilen gözlemlerin dağılımlarını nasıl etkileyebildiği ile ilgili çalışmasında ortaya çıkmıştır. Daha sonra Rao (1965) çalışmasında bazı olayların gözlenememesi, orijinal gözlemlerin hasar görmesi, gözlemlerin eşit olasılıklarla örnekleme alınamaması durumlarında var olan istatistiksel dağılımların uygun olmadığını ve bu gibi durumlarda veriyi modellemek için ağırlıklı dağılımları tanıtmış ve formüle etmiştir.

Ağırlıklı dağılımların  $oyf$ 'si aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f^w(x) = \frac{w(x)f(x)}{E(w(x))}, E(w(x)) < \infty$$

Burada  $w(x)$  ağırlık fonksiyonudur ve bu fonksiyonun seçimi en önemli problemdir. Ağırlık fonksiyonu  $w(x)$ 'in seçimine bağlı olarak farklı ağırlıklı dağılımlar oluşturulabilir. Örneğin ağırlık fonksiyonu  $w(x) = x$  olarak alındığında elde edilen dağılıma uzunluk-eğilimli (length-biased) dağılım denir. Uzunluk-eğilimli dağılımlar Cox (1962) tarafından klinik deneyler, güvenilirlik teorisi, hayatta kalma analizi ve popülasyon araştırmaları ile ilgili çalışmalarında kullanılmak üzere tanımlandı. Daha genel olarak, ağırlık fonksiyonu  $w(x) = x^c$  ise elde edilen dağılım boyut-eğilimli (size-biased) dağılım olarak adlandırılır. Literatürde Bu ağırlık fonksiyonu yaygın olarak kullanılarak birçok ağırlıklı dağılım ortaya çıkarılmıştır. Boyut-eğilimli dağılımlar yaşam analizi çalışmalarında (Blumenthal, 1967; Scheaffer, 1972), etiyojik çalışmalarda (Simon, 1980) ve vahşi yaşam popülasyonunda ve insan ailelerinde yapılan çalışmalarda (Patil ve Rao, 1977; Patil ve Rao, 1978; Rao, 1965; Rao, 1977; Rao, 1985; Patil ve Ord, 1976), hücre kinetiği ve hücre popülasyonları ile ilgili çalışmalarda (Takahasi, 1969; Bartlett, 1969; Zelen, 1974) kullanılmaktadır.

Bununla birlikte ağırlıklı dağılımların oluşturulmasında kullanılan önemli ağırlık fonksiyonları Haldane (1938), Rao (1965), Neel ve Schull (1954), Cook ve Martin (1974), Patil ve Ord (1976), Kemp (1973) ve Patil ve Rao (1977) gibi farklı yazarlar tarafından incelenmiştir ve bunlar:

- i)  $w(x) = x$
- ii)  $w(x) = x^c; c > 0$
- iii)  $w(x) = (1 - (1 - \beta)^x); 0 < \beta < 1$
- iv)  $w(x) = (x + 1)$
- v)  $w(x) = x(x - 1) \dots (x - r + 1); r > 0$
- vi)  $w(x) = \phi^x; 0 < \phi < 1$
- vii)  $w(x) = e^{\phi x}$ .

Bu tez çalışmasında, Das ve Roy (2011) tarafından tanıtılan üç parametrelili ağırlıklı Weibull dağılımının iki parametrelili versiyonu incelenmiştir. Das ve Roy (2011) çalışmalarında,  $w(x) = x^{c\beta}$  ( $c > 0$  ve  $\beta > 0$ ) ağırlık fonksiyonunu kullanarak, üç parametrelili ağırlıklı Weibull dağılımını önermişlerdir. Daha sonra bu önerdikleri dağılımın güvenilirlik fonksiyonunu, bozulma oranı fonksiyonunu ve momentlerini elde etmişlerdir.



Parametreleri tahmin etmek için, momentler tahmin yöntemine dayanan bir yöntem kullanmışlardır. Önerdikleri dağılımın veri modelleme performansını göstermek için yağış miktarı verilerini analiz etmişlerdir.

Burada, Das ve Roy (2011)'un çalışmalarından farklı olarak  $w(x) = x$  ağırlık fonksiyonu ile elde edilen iki parametrelili ağırlıklı Weibull dağılımı incelenmiştir. Bu dağılımın bazı istatistiksel özelliklerinin yanı sıra güvenilirlik özellikleri belirlenmeye çalışılmıştır. Literatürde yaygın olarak kullanılan tahmin yöntemlerinden en çok olabilirlik, en küçük kareler ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemleri kullanılarak parametre tahminleri elde edilmiştir. Bu tahmin yöntemlerinin etkinlikleri Monte-Carlo simülasyon yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Ayrıca, tahmin edicilerin varyans alt sınırlarını vermek için Fisher bilgi matrisi elde edilmiştir. Çalışmanın uygulama bölümünde, Sinop ili merkez istasyonuna ait mevsimlik günlük ortalama rüzgar hızı verileri için, incelenen dağılımın veri modelleme performansının Weibull dağılımına göre daha iyi olduğu görülmüştür.

Tez düzeni şu şekildedir: 1. Bölüm'de Weibull dağılımı ve ağırlıklı dağılımlar hakkında bilgi verilmiştir. Bu çalışmada kullanılan temel kavramlar ve yöntemler 2. ve 3. Bölümler'de tanıtılmıştır. Weibull ve ağırlıklı Weibull dağılımlarının bazı temel istatistiksel ve güvenilirlik özellikleri parametre tahminleri 4. ve 5. Bölümler'de anlatılmıştır. Tezin 6. Bölüm'ünde simülasyon çalışması yer almaktadır. Rüzgar hızı verilerinin analizi 7. Bölüm'dedir. Çalışmaya ilişkin elde edilen sonuçlar 8. Bölüm'de verilmiştir. Çalışmada kullanılan kaynaklar ve bazı eşitliklerin nasıl elde edildikleri ile ilgili ayrıntılar 9. ve 10 Bölümler'de bulunmaktadır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu tez çalışması için gerekli olan tanımlar ve temel bilgiler bu bölümde verilmiştir.

### 2.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

$X$  sürekli bir rasgele değişken olmak üzere

$$i) \quad f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$ii) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

koşullarını sağlayan  $f(x)$  fonksiyonuna  $X$  rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu denir.

### 2.2. Birikimli Dağılım Fonksiyonu

$X$  sürekli bir rasgele değişken olmak üzere, herhangi bir gerçektek  $x$  değeri için,  $X$  rasgele değişkeninin  $x$ 'e eşit ya da ondan küçük bir değer alma olasılığı birikimli dağılım fonksiyonu ( $bdf$ ) ya da kısaca dağılım fonksiyonu ( $df$ ) olarak tanımlanır. Başka bir ifade ile, herhangi bir  $X$  rasgele değişkeninin  $bdf$ 'si,

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt \quad (2.1)$$

eşitliği ile elde edilmektedir.

### 2.3. $r$ . Moment

Bir  $X$  rasgele değişkeninin  $oyf$ 'si  $f(x)$  ve her  $r \in \mathbb{N}$  için  $E(X^r) < \infty$  olsun.  $E(X^r)$  değerine  $X$  rasgele değişkeninin  $r$ . moment denir ve

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx \quad (2.2)$$

formülü ile elde edilir.

Bilindiği gibi (2.2) eşitliği kullanılarak dağılımın beklenen değeri ve varyansı elde edilir.

Ayrıca dağılımın çarpıklık ( $\beta_1$ ) ve basıklık ( $\beta_2$ ) katsayıları bu eşitlik yardımı ile

$$\beta_1 = \frac{E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E(X)^3}{Var(X)^{3/2}} \quad (2.3)$$

$$\beta_2 = \frac{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X)^2E(X^2) - 4E(X)^4}{Var(X)^2} \quad (2.4)$$

olarak elde edilir.

#### 2.4. Mod Değeri

Bir veri setinde en çok gözlenen (en çok tekrar eden) değere veya frekansı en fazla olan rasgele değişken değerine mod (tepe değeri) adı verilir. Bir  $X$  sürekli rasgele değişkeninin modu ise, en yüksek olasılığa sahip rasgele değişkeninin değeridir.  $X$  rasgele değişkeninin  $oyf'$  sinin  $x$ 'e göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenip çözümlenmesi sonucunda elde edilir. Veri setinin modu olmayacağı gibi birden fazla modu olabilir.

#### 2.5. Medyan

Bir veri setini büyükten küçüğe veya küçükten büyüğe sıraladığımızda tam orta noktadan veri setini iki eşit parçaya ayıran değere medyan adı verilir. Medyan veri setinde aşırı uçlu gözlemler olduğunda ortalamaya göre daha güvenilirdir ve veri setindeki tüm gözlemlerden etkilenmez.

Bir dağılımın medyan değeri, o dağılımın  $bdf'$  sinin  $\frac{1}{2}$ 'ye eşitlenmesi ile elde edilir. Başka bir ifade ile:

$$Med_x = F^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ ya da } P(X \leq Med_x) = \frac{1}{2} \quad (2.5)$$

dir. Burada  $F^{-1}$   $bdf'$  nin tersidir.

#### 2.6. Moment Çıkaran Fonksiyon

Herhangi bir  $X$  sürekli rasgele değişkeninin moment çıkarıcı fonksiyonu,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \quad (2.6)$$

şeklinde hesaplanmaktadır.

## 2.7. Karakteristik Fonksiyon

Bir  $X$  sürekli rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu  $x \in \mathbb{R}$  ve  $i^2 = -1$  olmak üzere

$$E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx$$

integrali ile hesaplanmaktadır.

## 2.8. $i$ . Sıra İstatistiği

$\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ ,  $oyf$ 'si  $f(x)$  olan bir kitleden alınan  $n$  birimlik rasgele bir örneklem olsun.  $X_{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) rasgele değişkenlerinin  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$  olacak şekilde sıralanması ile elde edilen  $i$ . sıra istatistiği ve  $x_{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ise  $X_{(i)}$  sıra istatistiğinin gözlem değeri olsun. Bu durumda  $i$ . sıra istatistiği  $X_{(i)}$ 'nin  $oyf$ 'si aşağıda verilen eşitlikten elde edilir:

$$f_{i:n}(x) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} f(x) [F(x)]^{i-1} [1 - F(x)]^{n-i}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

## 2.9. Güvenilirlik Fonksiyonu

Bir ürün ya da parça için güvenilirlik, belirli koşullar altında, belirli bir zaman dilimi boyunca bozulmadan çalışma olasılığı olarak tanımlanabilir. Bozuluncaya (ölünceye) kadar geçen zaman  $X$  ile gösterilsin. Bu durumda bir parçanın ya da sistemin belli bir  $x$  anındaki güvenilirliği bu sistemin  $x$  anında çalışıyor olmasının olasılığıdır. Başka bir ifade ile güvenilirlik fonksiyonu

$$R(x) = P(X > x), \quad x \geq 0 \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır.

## 2.10. Bozulma Oranı Fonksiyonu

Bozulma oranı fonksiyonu,  $x$  zamanına kadar yaşadığı bilinen bir parçanın  $x + \Delta x$  gibi küçük bir zaman aralığındaki ani bozulma olasılığının oranı olarak tanımlanmaktadır. Bozulma oranı fonksiyonu  $(0, \infty)$  aralığında değerler alır. Herhangi bir dağılım için bozulma oranı fonksiyonu aşağıdaki formül ile elde edilir:

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{f(x)}{1-F(x)}. \quad (2.9)$$

Eşitlik (2.9)'dan da gözüktüğü gibi bozulma oranı fonksiyonu,  $f(x)$ 'in güvenilirlik fonksiyonuna oranı olarak tanımlanır.

## 2.11. Glaser'in Lemması

$f(x)$  iki kez türevlenebilir sürekli  $X$  rasgele değişkenin *oyf*'si ve  $f'(x)$ ,  $f(x)$ 'in  $x$ 'e göre birinci türevi olmak üzere,  $\eta(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)}$  olarak tanımlansın. Ayrıca,  $\eta(x)$  fonksiyonunun birinci türevi mevcut olsun. Bu durumda:

- i) Eğer her  $x > 0$  için  $\eta'(x) > 0$  ise  $h(x)$  monoton azalandır (*Decreasing Failure Rate-DFR*).
- ii) Eğer her  $x > 0$  için  $\eta'(x) < 0$  ise  $h(x)$  monoton artandır (*Increasing Failure Rate-IFR*).
- iii) Öyle bir  $x_0$  noktası için

$$\begin{cases} \eta'(x) > 0 \text{ ve } \eta'(x_0) = 0, & 0 < x < x_0 \\ \eta'(x) < 0, & x > x_0 \end{cases}$$

olsun. Ayrıca,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  ise  $h(x)$  ters küvet eğrisi (*Upside Down Bathtub Shape-UBT*) ya da ters U ( $\cap$ ) şekline sahiptir.

- iv) Öyle bir  $x_0$  noktası için

$$\begin{cases} \eta'(x) < 0 \text{ ve } \eta'(x_0) = 0, & 0 < x < x_0 \\ \eta'(x) > 0, & x > x_0 \end{cases}$$

olsun. Ayrıca,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$  ise  $h(x)$  küvet eğrisi (*Bathtub Shape-BT*) ya da U şekline sahiptir.

v) Eğer her  $x > 0$  için  $\eta'(x) = 0$  ise  $h(x)$  sabit bir fonksiyondur.

## 2.12. Fisher Bilgi Matrisi

Fisher bilgi matrisi, istatistik tahmin süreci için çok önemli araçlardan biridir ve bazı düzgünlük koşulları altında bilinmeyen parametrelerin tahmin edicilerinin varyansları için bir alt sınır vermek için kullanılır. Başka bir ifade ile Fisher bilgi matrisinin tersinin köşegen elemanları bazı düzgünlük koşulları altında Cramer-Rao alt sınırına eşittirler. Bir  $X$  rasgele değişkeninin *oyf*'si  $f(x; \theta)$  ve bilinmeyen parametre vektörü  $\theta = [\theta_1, \theta_2]'$  olmak üzere Fisher bilgi matrisi

$$I(\theta) = \begin{bmatrix} -E \left( \frac{\partial^2 \ln L(\theta | \underline{x})}{\partial \theta_1^2} \right) & -E \left( \frac{\partial^2 \ln L(\theta | \underline{x})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right) \\ -E \left( \frac{\partial^2 \ln L(\theta | \underline{x})}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \right) & -E \left( \frac{\partial^2 \ln L(\theta | \underline{x})}{\partial \theta_2^2} \right) \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. Burada  $I(\theta)$ 'nin bileşenleri, Fisher bilgi matrisinin öğeleri  $\ln L(\theta | \underline{x})$  ( $\ln L$ , olabilirlik fonksiyonunun doğal logaritması) fonksiyonunun  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  parametrelerine göre ikinci dereceden kısmi türevlerinin beklenen değerlerinin (-1) ile çarpılmasından elde edilir.

## 2.13. Deneysel Dağılım Fonksiyonu

Dağılım fonksiyonu  $F(x)$  olan bir kitleden seçilen  $n$  birimlik rasgele örneklem  $X_1, X_2, \dots, X_n$  ve  $X_{(1)} < X_{(2)} < \dots < X_{(n)}$ 'ler bu örnekleme karşılık gelen sıra istatistiklerini göstermektedir. Deneysel dağılım fonksiyonu,  $x$ 'ten küçük veya eşit gözlem sayısının örneklem büyüklüğüne oranı olarak tanımlanır ve

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ i/n, & x_{(i)} < x < x_{(i+1)} \\ 1, & x_{(n)} \leq x \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.  $F_n(x)$ ,  $F(x)$ 'in bir tahmin edicisidir ve  $x \rightarrow \infty$  iken  $F_n(x)$ ,  $F(x)$ 'in tutarlı bir tahmin edicisidir.

### 3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

Bu bölümde bu tez çalışmasında kullanılan bazı yöntemler tanıtılacaktır.

#### 3.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi

En çok olabilirlik yöntemi (*EÇO*), tahmin edicileri bulmak için kullanılan bir yöntemdir.  $\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$  parametresi  $\theta$ , *oyf*'si  $f(x; \theta)$  olan bir dağılımdan alınan rasgele bir örneklem olmak üzere;  $\theta$ 'nın olabilirlik fonksiyonu;

$$L(\theta | \underline{X} = \underline{x}) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \quad (3.1)$$

dir.  $\theta$  parametresinin *EÇO* tahmin edicisi ( $\hat{\theta}$ ), olabilirlik fonksiyonun doğal logaritmasını ( $\ln L(\theta | \underline{x})$ )  $\theta$  parametresine göre birinci dereeden kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenip elde edilen denklemlerin çözümlenmesi sonucunda elde edilirler.

#### 3.2. En Küçük Kareler Yöntemi

En küçük kareler (*EKK*) yöntemi ilk kez Swain ve ark. (1988) tarafından önerilmiş olup, uygulananın kolay olması nedeni ile istatistiksel tahmin süreci içerisinde literatürde yaygın olarak kullanılmaktadır.  $\theta$  bilinmeyen parametre olmak üzere,  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  *oyf*  $f(x_i | \theta)$  olan dağılımdan alınan rasgele bir örneklem olsun.  $X_{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) *i*. sıra istatistiği ve  $x_{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ise  $X_{(i)}$  sıra istatistiğinin gözlem değeri olsun.  $F(x_{(i)})$   $x_{(i)}$ 'e ilişkin dağılım fonksiyonu olmak üzere,  $\theta$  parametresinin *EKK* tahmin edicisi

$$G(\theta) = \sum_{i=1}^n (F(x_{(i)}) - p_i)^2 \quad (3.2)$$

eşitliği ile verilen  $G(\theta)$  fonksiyonunun  $\theta$ 'ya göre minimum yapılması sonucu elde edilir. Burada  $p_i$ ,  $F(x_{(i)})$ 'nin tahmininin beklenen değeridir ve genel olarak  $p_i = \frac{i}{n+1}$  olarak alınır (Herd, 1960; Johnson, 1964).

#### 3.3 Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi

Ağırlıklı en küçük kareler (*AEKK*) yöntemi de Swain ve ark. (1988) tarafından önerilmiş olup, herhangi bir dağılımın  $\theta$  parametresinin *AEKK* tahmin edicileri

$$G_A(\theta) = \sum_{i=1}^n w_i (F(x_{(i)}) - p_i)^2 \quad (3.3)$$

biçiminde elde edilen  $G_A(\theta)$  fonksiyonunu  $\theta$  parametresine göre minimum yapan değerlerdir. Literatürde kullanılan birçok ağırlık fonksiyonu  $w_i$  vardır. Bu çalışmada

$$w_i = \frac{1}{\text{Var}(F(x_{(i)}))}$$

olarak alınmıştır. Burada,  $\text{Var}(F(x_{(i)})) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)}$ 'dir.

### 3.4. Kolmogorov-Smirnov Uyum İyiliği Testi

Bilinmeyen bir kitleden çekilen  $n$  birimlik örneklemin belirli bir dağılımdan gelip gelmediğini test etmek amacıyla uyum iyiliği (goodness of fit) testlerinden yararlanır. Uyum iyiliği testlerine örnek olarak; Pearson ki-kare, Cramer-von Mises, Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Shapiro-Wilk, Shapiro-Francia, Lilliefors, Jarque-Bera, D'Agostino-Pearson testleri verilebilir. Literatürde en yaygın olarak kullanılan uyum iyiliği testi Kolmogorov-Smirnov'dur. Bu test istatistiği ilk olarak Rus matematikçi Andrey N. Kolmogorov (1933) tarafından geliştirilmiş ancak uyum iyiliği testlerinde kullanılması Nikolai V. Smirnov (1939) tarafından gerçekleştirilmiştir. Bu sebeple literatürde Kolmogorov-Smirnov (KS) uyum iyiliği testleri olarak bilinmektedir.

$F_n(x)$ ,  $n$  birimlik  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  örnekleminin birikimli deneysel dağılım fonksiyonu (ampirik dağılım fonksiyonu) ve  $F(x)$ 'de varsayılan dağılımın dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda, örneklemin dağılımının varsayılan dağılıma eşit olduğu

$$H_0: F(x) = F_n(x)$$

şeklinde kurulan  $H_0$  yokluk hipotezinin sınaması

$$KS_n = \max|F(x) - F_n(x)| \quad (3.4)$$



eşitliği ile verilen Kolmogorov-Smirnov test istatistiği ile yapılabilir. Kolmogorov-Smirnov test istatistiğinin değeri ( $KS_n$ ) kritik değer tablosunda verilen değer ( $KS_t$ ) den büyük ise ( $KS_n > KS_t$ ),  $H_0$  yokluk hipotezi reddedilir.

### 3.5. Model Değerlendirme Testi

Üzerinde çalışılan veriyi modellemek için varsayılan olasılık dağılımları arasından veriye en iyi uyum sağlayanın belirlenebilmesi yada bu varsayılan dağılımların veriyi modelleme performanslarını karşılaştırmak için literatürde birçok kriter kullanılmaktadır. Bunlar arasında en yaygın olanları; Akaike bilgi kriteri, bayes bilgi kriteri, hata kareler ortalamasının karekökü kriteri, belirtme katsayısı kriteri ve ki-kare kriteridir. Bu çalışmada varsayılan dağılımlar arasında veriyi en iyi modelleyen dağılımı belirlemek için hata kareler ortalamasının karekökü (*Root Mean Square Error-RMSE*) ve belirtme katsayısı ( $R^2$ ) kriterleri ele alınmıştır. Bu ölçüler aşağıdaki formüller ile hesaplanmaktadır:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{F}(X_{(i)}) - p_i)^2} \quad (3.5)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{F}(X_{(i)}) - p_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\hat{F}(X_{(i)}) - \bar{\hat{F}})^2}, \quad (3.6)$$

(Nash ve Sutcliffe, 1970; Barrett, 1974; Jöreskog ve Sörbom, 1981; Willmott, 1982). Burada,  $\hat{F}(X_{(i)})$   $F(x_{(i)})$ 'nin tahmini,  $\bar{\hat{F}}$  ise  $\hat{F}(X_{(i)})$  tahminlerinin ortalamasıdır ve  $\bar{\hat{F}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{F}$  formülü ile hesaplanır.

#### 4. WEIBULL DAĞILIMI VE BAZI İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Weibull dağılımının *oyf*'si ve *bdf*'si verilmiş ve Matlab R2015a programında şekil ve ölçek parametresinin farklı değerleri için Weibull dağılımının *oyf* ve *bdf* grafikleri çizdirilmiştir. Ayrıca Weibull dağılımının bazı temel özellikleri tanıtılmış, *r*. momenti, moment çıkarıcı fonksiyonu, karakteristik fonksiyonu, *i*. sıra istatistiği gibi özelliklerinin formüllerinin nasıl elde edildiği anlatılmış, dağılımın güvenilirlik ve bozulma oranı fonksiyonunun özellikleri tanıtılıp Matlab R2015a programında şekil ve ölçek parametrelerinin bazı değerleri için grafikleri çizdirilmiştir.

##### 4.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

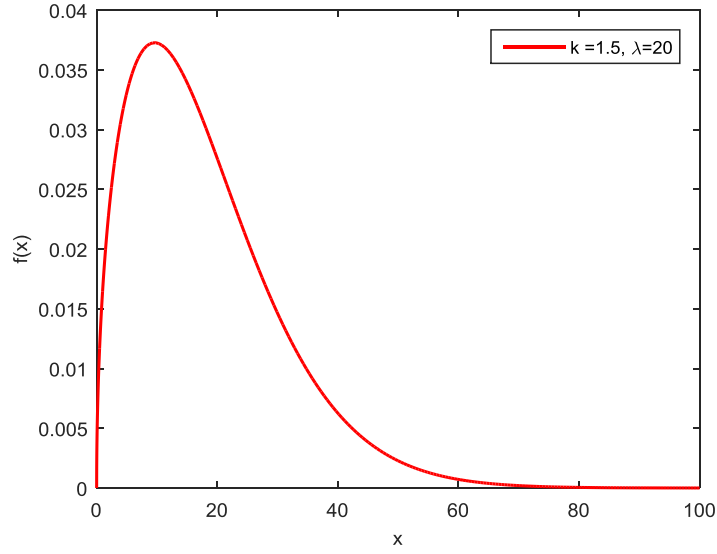
Weibull dağılımına sahip *X* rasgele değişkeninin *oyf*'si aşağıdaki eşitlik ile tanımlanır:

$$f(x; k, \lambda) = \begin{cases} \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Burada;  $k > 0$  olmak üzere şekil parametresidir ve dağılımın şeklini belirler.  $\lambda > 0$  olmak üzere ölçek parametresidir ve karakteristik yaşam(ömür) parametresi olarak da isimlendirilmektedir. Aynı zamanda  $x$  arttıkça, yoğunluk fonksiyonu monoton azalan ve konveks bir fonksiyondur (Lai, 2014).

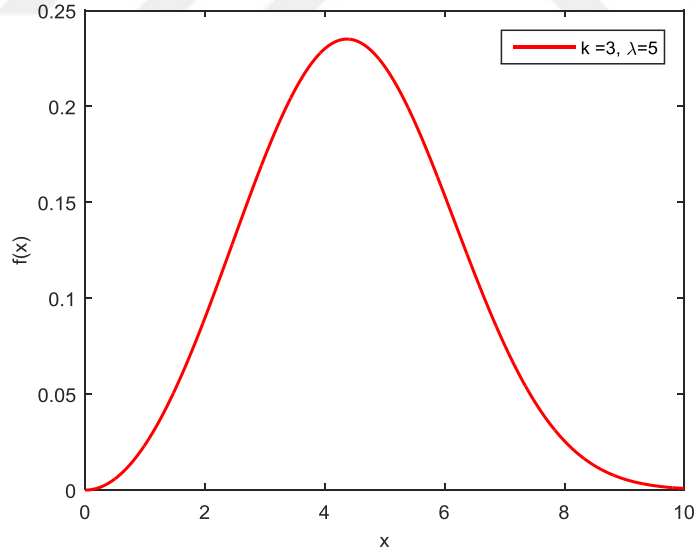
Weibull dağılımı sağa çarpık bir dağılım olarak bilinmektedir ya da literatürde bu şekli ile yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak şekil parametresinin aldığı değerlere bağlı olarak dağılımın şekli değişiklikler gösteren esnek bir dağılımdır. Bunlar aşağıdaki gibi özetlenmiştir:

- i) Şekil parametresi  $1 < k < 2.6$  aralığında değerler aldığı anda dağılımın sağa çarpık olduğunu söyleyebiliriz. Şekil 4.1'de şekil parametresinin  $k = 1.5$  değeri için çizilen grafiği verilmiştir.



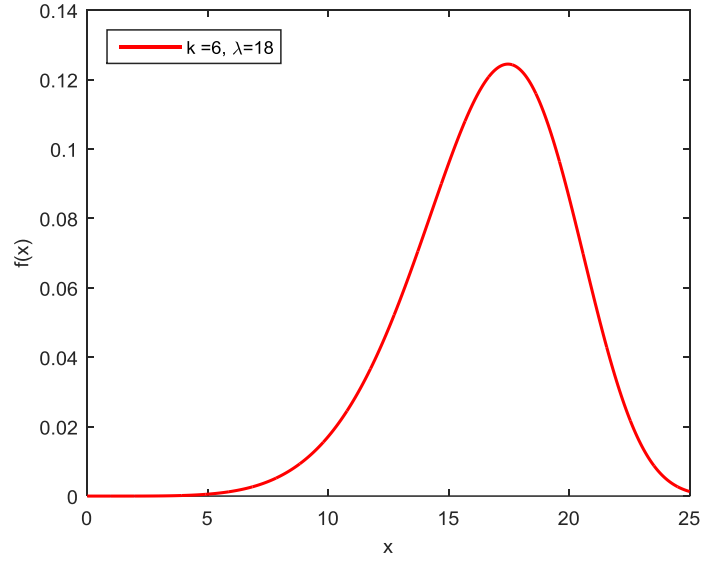
**Şekil 4.1.** Şekil parametresinin  $1 < k < 2.6$  aralığındaki değerleri için Weibull dağılımı grafiği

ii) Şekil parametresi  $2.6 < k < 3.7$  aralığında değerler aldığıında dağılımın normale yakınsadığını söyleyebiliriz. Şekil 4.2’de şekil parametresinin  $k = 3$  değeri için çizilen grafiği verilmiştir.



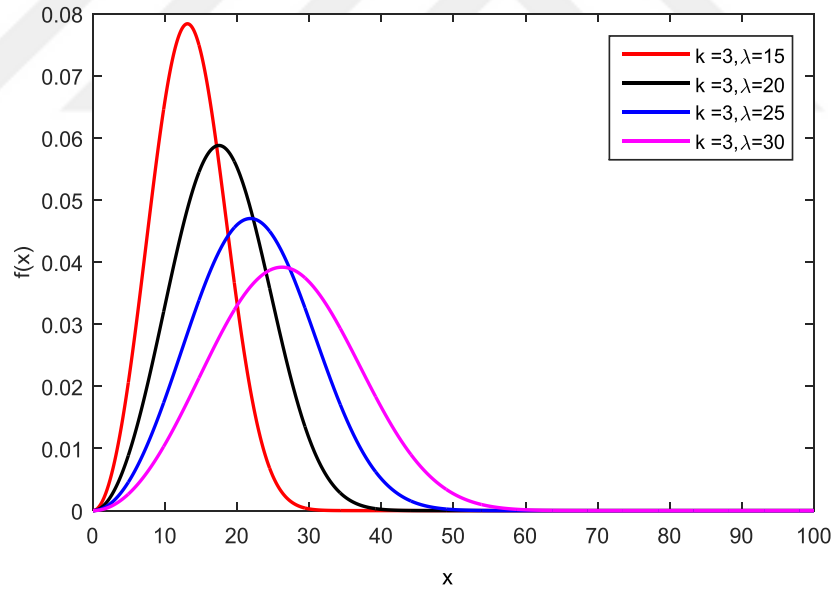
**Şekil 4.2.** Şekil parametresinin  $2.6 < k < 3.7$  aralığındaki değerleri için Weibull dağılımı grafiği

iii) Şekil parametresi  $k > 3.7$  olduğunda ise sola çarpık bir dağılım olduğunu söyleyebiliriz. Şekil 4.3’te şekil parametresinin  $k = 6$  değeri için çizilen grafiği verilmiştir.



**Şekil 4.3.** Şekil parametresinin  $k > 3.7$  aralığındaki değerleri için Weibull dağılımı grafiği

Ayrıca,  $\lambda$  ölçek parametresinin farklı değerleri için çizdirilen *oyf*'ler Şekil 4.4'de verilmiştir.



**Şekil 4.4.** Ölçek parametresinin farklı değerleri için Weibull dağılımının *oyf* grafiği

Bu şekil incelendiğinde, şekil parametresi aynı kalırken, ölçek parametresi  $\lambda$ 'nın artması durumunda dağılımın basıklığı artar, dolayısıyla dağılımın yüksekliği azalır. Diğer bir ifade ile şekil parametresi aynı kalırken, ölçek parametresinin azalması durumunda dağılımın tepe noktası sivrileşir ve yüksekliği artar.

#### 4.2. Weibull Dağılımının Birikimli Dağılım Fonksiyonu

Bir  $X$  rasgele değişkeni Weibull dağılımına sahipse, *bdf* eşitlik (2.1)'den aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F(x) = \int_0^x \frac{k}{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k} dt. \quad (4.2)$$

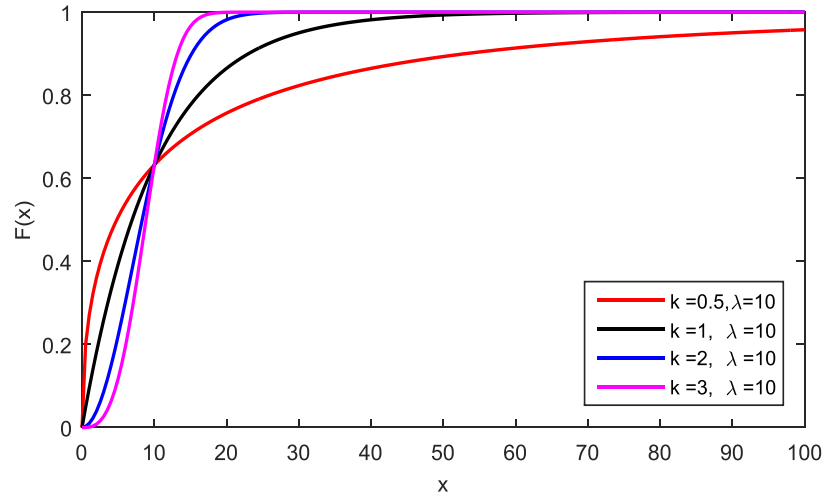
Eşitlik (4.2)'deki integralin çözümü için

$$y = \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k, \quad dy = \frac{k}{\lambda^k} t^{k-1} dt \quad (4.3)$$

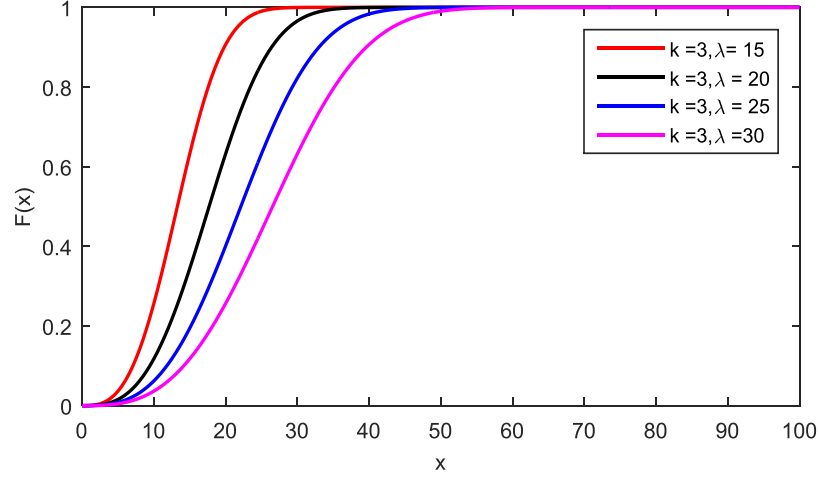
ile verilen değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} e^{-y} dt \\ &= 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \quad k, \lambda > 0, x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

olarak elde edilir. Şekil parametresi  $k$ 'nin farklı değerleri için çizilen *bdf* grafikleri Şekil 4.5-4.6'da gösterilmiştir.



Şekil 4.5. Ölçek parametresinin farklı değerleri için Weibull dağılımının *oyf* grafiği



Şekil 4.6. Ölçek parametresinin farklı değerleri için Weibull dağılımının *bdf* grafiği

#### 4.3. Weibull Dağılımının *r*. Momenti

(2.2) eşitliğinde yer alan  $f(x)$  yerine Weibull dağılımının (4.1)'de verilen *oyf*'si yazıldığında

$$E(X^r) = \int_0^{\infty} x^r \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} dx \quad (4.5)$$

olur. Eşitlik (4.5) deki integralin çözümü için

$$u = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k, du = \frac{k}{\lambda^k} x^{k-1} dx \quad (4.6)$$

ile verilen değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \int_0^{\infty} \left(\lambda u^{\frac{1}{k}}\right)^r e^{-u} du \\ &= \lambda^r \Gamma\left(1 + \frac{r}{k}\right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

elde edilir. Burada  $\Gamma(\cdot)$  ile gösterilen Gamma fonksiyonudur. Gamma fonksiyonu  $t > 0$  olmak üzere,

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx$$

ile tanımlanır. (4.7) eşitliğinde  $r = 1$  alındığında dağılımın beklenen değeri

$$E(X) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde dağılımın varyansı

$$\text{Var}(X) = \lambda^2 \left( \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right)$$

olarak elde edilir. Burada ( $r = 2$  için)

$$E(X^2) = \lambda^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right)$$

olarak elde edilmiştir. Ayrıca (2.3) ve (2.4) eşitlikleri yardımı ile Weibull dağılımının çarpıklık ( $\beta_1$ ) ve basıklık ( $\beta_2$ ) katsayıları sırasıyla,

$$\beta_1 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{k}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) + 2\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^{3/2}}$$

$$\beta_2 = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{4}{k}\right) - 4\Gamma\left(1 + \frac{3}{k}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) + 6\Gamma^2\left(1 + \frac{2}{k}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) - 4\Gamma^4\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)^2}$$

olarak verilebilir.

#### 4.4. Weibull Dağılımının Modu

Weibull dağılımının modu, yukarıdaki eşitlik (4.1)'de elde edilen Weibull dağılımının  $oyf'$ sinin  $x$ 'e göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi sonucunda aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$x_M = \lambda \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Weibull dağılımı  $k > 1$  değeri için tek mod değerli(unimod),  $0 < k \leq 1$  değeri için dağılımın mod değeri yoktur.

#### 4.5. Weibull Dağılımının Medyanı

Bu durumda Weibull dağılımının medyan değeri eşitlik (2.5) ve eşitlik (4.4)'te verilen *bdf* yardımı ile

$$\text{Med}_x = \lambda(\ln 2)^{1/k}$$

olarak elde edilir.

#### 4.6. Weibull Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu

Weibull dağılımına sahip  $X$  rasgele değişkeninin moment çıkarar fonksiyonu (2.6) ve eşitlik (4.1)'de verilen *oyf* yardımı ile

$$E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{k}{\lambda^k} x^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} dx \quad (4.8)$$

integralinin hesaplanması sonucunda elde edilir. Eşitlik (4.8)'de yer alan  $e^{tX}$  yerine bu terimin Maclourin serisine açılımı yani  $e^{tX} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tx)^i}{i!}$  yazılırsa

$$E(e^{tX}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \int_0^{\infty} \frac{k}{\lambda^k} x^{i+k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} dx$$

olur. Yukarıdaki integralin çözümü için (4.6)'da verilen değişken dönüşümü uygulanırsa

$$E(e^{tX}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \int_0^{\infty} (\lambda u^{\frac{1}{k}})^i e^{-u} du$$

olur. Bu eşitlikten  $M_X(t)$

$$M_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(t\lambda)^i}{i!} \Gamma\left(1 + \frac{i}{k}\right)$$

olarak elde edilir.



#### 4.7. Weibull Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu

Weibull dağılımına sahipse  $X$  sürekli rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu moment çıkaran fonksiyonunun elde edilmişindeki yöntemlerin kullanılması sonucunda

$$E(e^{itX}) = \frac{\sum_{s=0}^{\infty} (it\lambda)^s}{s!} \Gamma\left(1 + \frac{s}{k}\right)$$

olarak elde edilir.

#### 4.8. Weibull Dağılımı için $i$ . Sıra İstatistiği

(2.7) eşitliğinde  $X_{(i)}$ 'nin  $oyf$ 'sinde yer alan  $[1 - F(x)]^{n-i}$  teriminin

$$[1 - F(x)]^{n-i} = \sum_{r=0}^{n-i} \binom{n-i}{r} (-1)^r [F(x)]^r$$

eşitliği ile verilen binom açılımının (2.7)'de yerine yazılması ile

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r=0}^{n-i} \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \binom{n-i}{r} (-1)^r f(x) [F(x)]^{i+r-1} \quad (4.9)$$

olur. Daha sonra elde edilen (4.9) eşitliğinde Weibull dağılımının (4.1) ve (4.4)'de verilen  $oyf$  ve  $ddf$ 'leri yazılırsa

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r=0}^{n-i} \binom{n-i}{r} \binom{n-i}{r} (-1)^r \frac{k}{\lambda^k} x^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \left[1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}\right]^{i+r-1}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikte yer alan  $\left[1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}\right]^{i+r-1}$  teriminin

$$\left[1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}\right]^{i+r-1} = \sum_{t=0}^{i+r-1} \binom{i+r-1}{t} (-1)^t e^{-t\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$$

şeklindeki binom açılımı yerine yazılıp elde edilen ifade de gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r=0}^{n-i} \sum_{t=0}^{i+r-1} \psi_{i,r,t,n} f(x; k, \lambda/(t+1)^{1/k}) \quad (4.10)$$

elde edilir. Burada;

$$\psi_{i,r,t,n} = \binom{n}{i} \binom{n-i}{r} \binom{i+r-1}{t} (-1)^{r+t}$$

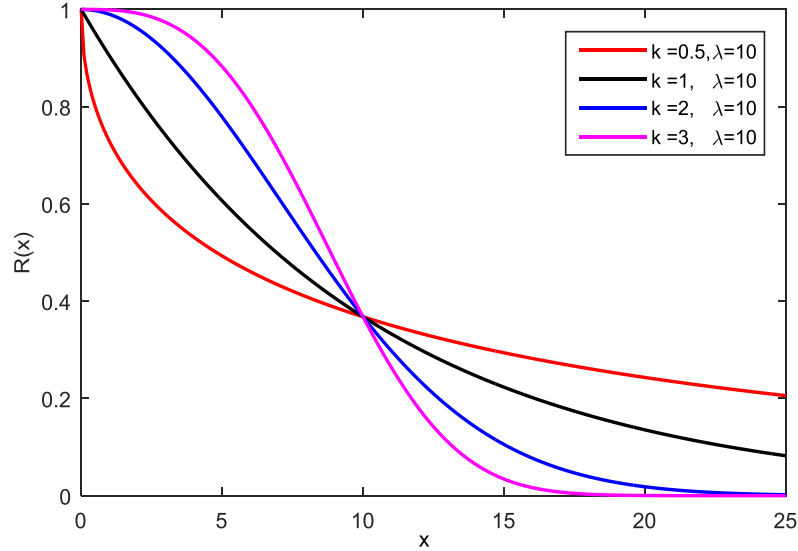
ve  $f(x; k, \lambda/(t+1)^{1/k})$ ,  $k$  ve  $\lambda/(t+1)^{1/k}$  parametrelili Weibull dağılımıdır. Son olarak elde edilen (4.10) eşitliğinde  $i = 1$  alınırsa  $X_{(1)} = \text{Min}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  (1. sıra istatistiği)'nin  $oyf$ 'si ve  $i = n$  alınırsa  $X_{(n)} = \text{Max}(X_1, X_2, \dots, X_n)$  ( $n$ . sıra istatistiği)'nin  $oyf$ 'si elde edilir.

#### 4.9. Weibull Dağılımının Güvenilirlik Fonksiyonu

Weibull dağılımı için güvenilirlik fonksiyonu eşitlik (2.8) yardımı ile

$$R(x) = e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$$

biçimindedir. Şekil parametresinin farklı değerleri için çizilen güvenilirlik fonksiyonunun grafikleri Şekil 4.7'de verilmiştir.



**Şekil 4.7.** Şekil parametresinin farklı değerleri için Weibull dağılımının güvenilirlik fonksiyonu grafiği

Şekil 4.7'de verilen  $R(x)$  fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i)  $0 < k < 1$  için  $R(x)$  fonksiyonu konvektir, aynı zamanda keskin monoton azalandır.
- ii)  $k = 1$  için  $R(x)$  fonksiyonu konvektir, monoton azalandır fakat  $0 < k < 1$  aralığındaki aldığı değerlere göre daha az keskindir.
- iii)  $k > 1$  için  $R(x)$  fonksiyonu  $x$  arttıkça azalandır. Ancak  $k = 1$ 'deki aldığı değerlere göre daha az keskindir. Ayrıca büküm noktasından sonra keskin bir şekilde azalır (Stapelberg, 2009).

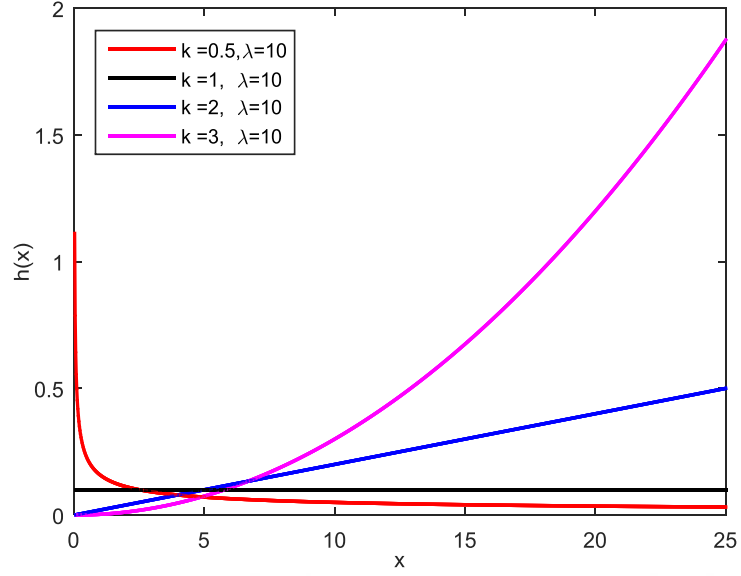
#### 4.10. Weibull Dağılımının Bozulma Oranı Fonksiyonu

Weibull dağılımı için bozulma oranı fonksiyonu eşitlik (2.9)'dan

$$h(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}$$

biçiminde elde edilir. Şekil parametresi bozulma oranı fonksiyonunun şekli üzerinde güçlü bir etkiye sahiptir. Şekil parametresinin bazı değerleri için çizdirilen bozulma oranı fonksiyonu grafiklerinin yer aldığı Şekil 4.8'den de görüleceği gibi;

- i)  $0 < k < 1$  için  $h(x)$  azalan bir fonksiyondur.
- ii)  $k = 1$  için  $h(x)$  sabit.
- iii)  $k > 1$  için  $h(x)$  artan bir fonksiyondur.



**Şekil 4.8.** Şekil parametresinin farklı değerleri için Weibull dağılımının bozulma oranı fonksiyonu grafiği

#### 4.11. Weibull Dağılımının Diğer Dağılımlarla İlişkisi

Gerek istatistik gerekse diğer uygulamalı alanlar da oldukça önemli bir yere sahip olan Weibull dağılımının diğer dağılımlar ile ilişkisi aşağıda verilmiştir:

i) *Weibull Dağılımının Üstel Dağılım ile İlişkisi:*

(4.1) ile verilen  $o_{yf}$ 'de  $k = 1$  alınırsa  $f(x; k, \lambda)$  ile gösterilen Weibull dağılımı;

$$f(x; \lambda) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}},$$

ile  $\lambda$  parametrelili üstel dağılıma dönüşür.

ii) *Weibull Dağılımının Rayleigh Dağılımı ile İlişkisi:*

(4.1) ile verilen  $o_{yf}$ 'de  $k = 2$  ve  $\lambda = \sqrt{2}\sigma$  alınırsa  $f(x; k, \lambda)$  ile gösterilen Weibull dağılımı;

$$f(x; k, \lambda) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

ile  $\sigma$  parametrelili Rayleigh dağılımına dönüşür.

iii) *Weibull Dağılımının Gumbel (Extrem Value Type I) Dağılımı İle İlişkisi:*  
 $X$  rasgele değişkeninin dağılımı  $k$  ve  $\lambda$  parametrelili Weibull dağılımı olmak üzere,

$$Y = -\ln x$$

biçiminde tanımlanan  $Y$  rasgele değişkeni Gumbel dağılımına sahip olur.

*İspat:* Değişken dönüştürme tekniği kullanıldığında

$$Y = -\ln x, g^{-1}(y) = x = e^{-Y} \text{ ve } dx = -e^{-Y} dy$$

olur. Bu durumda  $Y$ 'nin *oyf'si*

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| \\ &= \frac{k}{\lambda^k} (e^{-y})^{k-1} e^{-\left(\frac{e^{-y}}{\lambda}\right)^k} |-e^{-y}| \\ &= \frac{k}{\lambda^k} e^{-\left(yk + \frac{e^{-yk}}{\lambda^k}\right)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

biçiminde elde edilir. (4.11) eşitliğinde  $\lambda = e^{-\theta}$  ve  $k = \frac{1}{\delta}$  alınır gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra

$$f(y; \theta, \delta) = \frac{1}{\delta} e^{-\left(\frac{y-\theta}{\delta} + e^{-\left(\frac{y-\theta}{\delta}\right)}\right)}, y \in \mathbb{R}$$

olur. Burada,  $\theta \in \mathbb{R}$  konum parametresi ve  $\delta > 0$  ise ölçek parametresidir.

iv) *Weibull Dağılımı İle Frechet (Extrem Value Type II) İle İlişkisi:*

$X, X \sim \text{Weibull}(k, \lambda)$  biçiminde gösterilen Weibull dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Bu durumda,

$$Y = \frac{1}{X}$$

olarak verilen  $Y$  fonksiyonu Frechet dağılımına sahip olur.

*İspat:* Değişken dönüştürme tekniği kullanıldığında

$$Y = \frac{1}{x}, g^{-1}(y) = x = \frac{1}{y} \text{ ve } dx = -\frac{1}{y^2} dy$$

olur. Bu durumda  $Y$ 'nin *oyf*

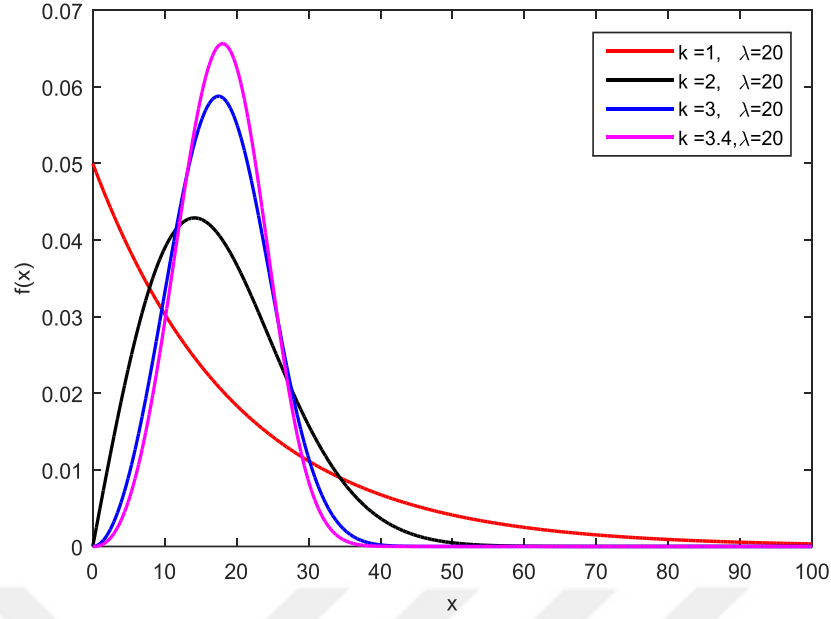
$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dx}{dy} \right| \\ &= \frac{k}{\lambda^k} (y^{-1})^{k-1} e^{-\left(\frac{y^{-1}}{\lambda}\right)^k} |-y^{-2}| \\ &= \frac{k}{\lambda^k} y^{-k-1} e^{-\left(\frac{y^{-1}}{\lambda}\right)^k} \end{aligned} \tag{4.12}$$

olarak elde edilir. Ancak (4.12) eşitliğinde  $k = \alpha$  ve  $\lambda = \frac{1}{\delta}$  alınır;

$$f(y; \alpha, \delta) = \frac{\alpha}{\delta^{-\alpha}} y^{-\alpha-1} e^{-\left(\frac{y}{\delta}\right)^{-\alpha}}, y > 0$$

olur. Burada,  $\alpha > 0$  şekil parametresi ve  $\delta > 0$  ölçek parametresidir.

Ayrıca Weibull dağılımının üstel dağılım, Rayleigh dağılımı ve Normal dağılım ile olan ilişkisi Şekil 4.9'da grafiksel olarak gösterilmiştir.



**Şekil 4.9.** Weibull dağılımının diğer dağılımlarla olan ilişkisi

Şekil 4.9'dan da görüldüğü üzere Weibull dağılımı şekil parametresi  $k = 1$  değerini aldığı anda üstel dağılıma,  $k = 2$  değerini aldığı anda Rayleigh dağılımına ve şekil parametresinin bazı değerleri  $2.6 < k < 3.7$  için de Normal dağılıma yakınsamaktadır.

#### 4.12. Weibull Dağılımının Parametrelerinin Tahmini

Bu bölümde Weibull dağılımının tahmin edicilerinin bulunmasına yönelik üç farklı yöntem üzerinde durulmuş ve literatürde çok kullanılan yöntemlerden en çok olabilirlik, en küçük kareler ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemi olmak üzere üç farklı yöntemin en iyisinin belirlenmesine yönelik tahmin yöntemleri incelenmiştir.

##### 4.12.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Parametrelerin Tahmini

$\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$  parametreleri  $k$  ve  $\lambda$  olan Weibull dağılımından alınan rasgele bir örneklem olmak üzere; eşitlik (3.1)'den Weibull dağılımının olabilirlik fonksiyonu,

$$L(k, \lambda | \underline{x}) = \left(\frac{k}{\lambda^k}\right)^n \prod_{i=1}^n x_i^{k-1} e^{-\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\lambda}\right)^k}$$

ve ln-olabilirlik fonksiyonu da,

$$\ln L(k, \lambda | \underline{x}) = n \ln k - nk \ln \lambda + (k-1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n x_i^k \quad (4.13)$$

şeklindedir.

$k$  ve  $\lambda$  parametrelerinin en çok olabilirlik ( $E\check{C}O$ ) tahmin edicileri  $\ln L(k, \lambda | \underline{x})$  fonksiyonunun birinci dereeden kısmi türevi alınıp sifıra eşitlenip elde edilen denklemlerin çözümlenmesi sonucunda elde edilirler.

Buna göre,  $\ln L(k, \lambda | \underline{x})$  fonksiyonunun  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerine göre kısmi türevleri sonucu elde edilen olabilirlik denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k} = \frac{n}{k} - n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n \ln x_i + \frac{\ln \lambda}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n x_i^k - \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n x_i^k \ln x_i = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial \lambda} = \frac{-nk}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}} \sum_{i=1}^n x_i^k = 0$$

Elde edilen bu denklemlerin çözümlenmesi sonucunda  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerine ilişkin tahmin denklemleri

$$\hat{k} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_i^{\hat{k}} \ln x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^{\hat{k}}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i \right)^{-1} \quad (4.14)$$

$$\hat{\lambda} = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^{\hat{k}} \right)^{1/\hat{k}} \quad (4.15)$$

olarak elde edilmiştir. Burada (4.14) ve (4.15) eşitliklerinden de görüldüğü gibi  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerinin  $E\check{C}O$  tahminlerini elde etmek için oluşturulan denklemlerin açık çözümleri yoktur. Bu nedenle  $k$  ve  $\lambda$ 'nın tahminleri ancak nümerik yöntemler ile bulunabilir.

Weibull dağılımının  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerinin tahmin edicilerinin minimum varyans sınırını bulabilmek için gerekli olan Fisher bilgi matrisinin elde edilişi aşağıda verilmiştir.

*Fisher Bilgi Matrisi:* Fisher bilgi matrisi (4.1)'de verilen  $oyf$ 'ye sahip Weibull dağılımı için,



$$I(k, \lambda) = \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k \partial \lambda}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k \partial \lambda}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial \lambda^2}\right) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanır. Burada  $I(k, \lambda)$ , Fisher bilgi matrisinin öğeleri  $\ln L(k, \lambda | \underline{x})$  fonksiyonunun  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerine göre ikinci dereceden kısmi türevlerinin beklenen değerleri bulunup  $(-1)$  ile çarpılmasından elde edilir.

Eşitlik (4.13)'de verilen  $\ln L(k, \lambda | \underline{x})$  fonksiyonunun ikinci dereceden türevlerinin beklenen değerleri:

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k^2}\right) = -\frac{n}{k^2} - \frac{1}{\lambda^k} (\ln \lambda)^2 \sum_{i=1}^n E(x_i^k) + 2 \frac{1}{\lambda^k} \ln \lambda \sum_{i=1}^n E(x_i^k \ln x_i) - \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n E(x_i^k \ln^2 x_i) \quad (4.16)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial \lambda^2}\right) = \frac{nk}{\lambda^2} - \frac{k(k+1) \sum_{i=1}^n E(x_i^k)}{\lambda^{k+2}} = \frac{-nk^2}{\lambda^2} \quad (4.17)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k \partial \lambda}\right) = -\frac{n}{\lambda} + \frac{\sum_{i=1}^n E(x_i^k) + k \sum_{i=1}^n E(x_i^k \ln x_i) - k \ln \lambda \sum_{i=1}^n E(x_i^k)}{\lambda^{k+1}} \quad (4.18)$$

olarak elde edilir. Bu eşitliklerde geçen beklenen değerlerin nasıl elde edildikleri EK 1'de ayrıntılı olarak anlatılmıştır.

Fisher bilgi matrisi;

$$I(k, \lambda) = \begin{bmatrix} \frac{nk^2}{\lambda^2} & -0,422785 \frac{n}{\lambda} \\ -0,422785 \frac{n}{\lambda} & 1,82368 \frac{n}{k^2} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

#### 4.12.2. En Küçük Kareler Yöntemi ile Parametrelerin Tahmini

Weibull dağılımının  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerinin *EKK* tahmin edicileri (4.4)'de verilen *bdf*'nin (3.2) denkleminde yazılması sonucunda

$$G(k, \lambda) = \sum_{i=1}^n \left( 1 - e^{-\left(\frac{x_{(i)}}{\lambda}\right)^k} - p_i \right)^2$$

olarak elde edilen  $G(k, \lambda)$  fonksiyonunu minimum yapan  $k$  ve  $\lambda$  değerleridir.  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerinin *EKK* tahmini  $G(k, \lambda)$  fonksiyonunun ilgili parametrelere göre elde edilen kısmi türev denklemlerinin sıfıra eşitlenmesi sonucunda elde edilen tahmin denklemlerinin çözümlenmesi ile elde edilirler. Ancak bu denklemlerin açık çözümleri olmadığından iteratif yöntemler uygulanır.

#### 4.12.3. Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi ile Parametrelerin Tahmini

Weibull dağılımının  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerinin *AEKK* tahmin edicileri eşitlik (4.4)'de verilen *bdf*'sinin (3.3) denkleminde yazılması sonucunda

$$G_A(k, \lambda) = \sum_{i=1}^n w_i \left( 1 - e^{-\left(\frac{x_{(i)}}{\lambda}\right)^k} - p_i \right)^2$$

biçiminde elde edilen  $G_A(k, \lambda)$  fonksiyonunu  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerine göre minimum yapan değerlerdir. Literatürde kullanılan birçok ağırlık fonksiyonu vardır. Bu çalışmada kullanılan ağırlık fonksiyonu,

$$w_i = \frac{1}{\text{Var}(F(x_{(i)}))}$$

dır. Burada,  $\text{Var}(F(x_{(i)})) = \frac{i(n-i+1)}{(n+1)^2(n+2)}$  şeklindedir.  $k$  ve  $\lambda$ 'nın *AEKK* tahminleri de ancak iteratif yöntemler kullanılarak elde edilirler.

## 5. AĞIRLIKLI WEIBULL DAĞILIMI VE BAZI İSTATİSTİKSEL ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde ağırlıklı Weibull dağılımı tanıtılmıştır ve bu dağılımın bazı temel istatistiksel özellikleri anlatılmıştır. Ayrıca  $E\check{C}O$ ,  $EKK$  ve  $AEKK$  yöntemlerine göre parametre tahminlerinin nasıl elde edildiğinden bahsedilmiştir.

### 5.1. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu

Ağırlıklı Weibull dağılımının  $oyf$ 'si

$$f^w(x) = \frac{w(x)f(x)}{E(w(x))}, \quad E(w(x)) < \infty$$

dır. Burada  $f(x)$ , (4.1) eşitliğinde tanımlandığı üzere Weibull dağılımının  $oyf$ 'sidir.  $w(x) > 0$  olmak üzere,  $w(x) = x$  ağırlık fonksiyonudur.  $E(w(x))$  ağırlık fonksiyonunun ortalaması aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} E(w(x)) &= \int_0^{\infty} w(x)f(x)dx \\ &= \int_0^{\infty} x \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} dx. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Eşitlik (5.1)'deki integralin çözümü için

$$y = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k, \quad dy = \frac{k}{\lambda^k} x^{k-1} dx \quad (5.2)$$

ile verilen değişken dönüşümü uygulanırsa

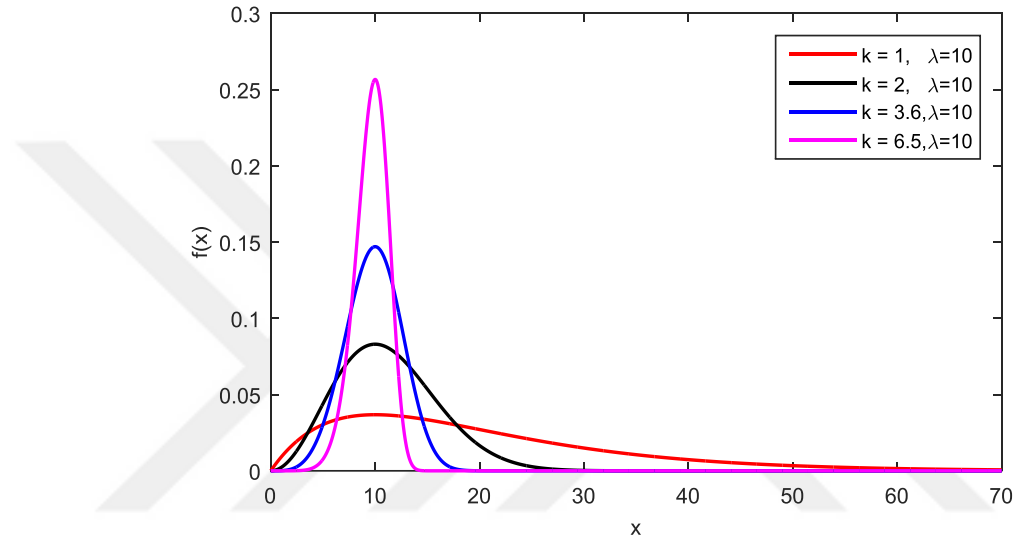
$$E(w(x)) = \lambda \Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak ağırlıklı Weibull dağılımına sahip  $X$  rasgele değişkeninin  $oyf$ 'si

$$f^w(x) = \frac{kx^k e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}}{\lambda^{k+1} \Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right)}, \quad x > 0 \quad (5.3)$$

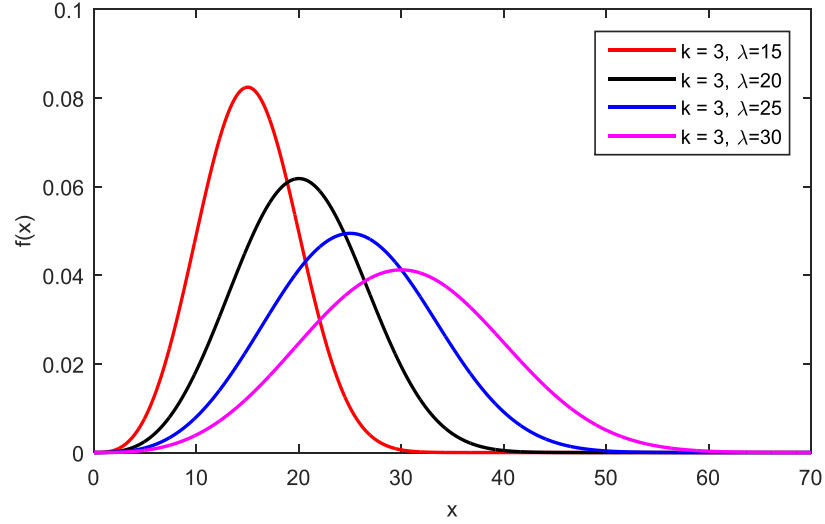
olur. Burada  $k > 0$  olmak üzere şekil parametresi ve  $\lambda > 0$  olmak üzere ölçek parametresidir.

$k$  şekil parametresinin ve  $\lambda$  ölçek parametresinin farklı değerleri için ayrı ayrı ağırlıklı Weibull dağılımının  $oyf$  grafikleri çizdirilmiştir. Şekil 5.1'de  $\lambda = 10$  ve  $k$  şekil parametresinin 1, 2, 3.6, 6.5 değerleri için ve Şekil 5.2'de  $k = 3$  ve ölçek parametresinin 15, 20, 25, 30 değerleri için  $oyf$  grafikleri verilmiştir.



**Şekil 5.1.** Şekil parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının  $oyf$  grafiği

Şekil 5.1 incelendiğinde  $k$  değerleri arttıkça dağılımın şeklinin basıklığı azalmaktadır. Ayrıca,  $k = 1$  ve 2 değerleri için dağılımın sağa çarpık olduğu,  $k > 2$  için de dağılımın şeklinin simetrikleştiği görülmektedir.



**Şekil 5.2.** Ölçek parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının *oyf* grafiği

Şekil 5.2’de ölçek parametresinin değerleri arttıkça dağılımın şeklinin beklenildiği gibi basıklaştığı görülmektedir.

## 5.2. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Birikimli Dağılım Fonksiyonu

$X$  rasgele değişkeni ağırlıklı Weibull dağılımına sahipse, *bdf*’si eşitlik (2.1)’den aşağıdaki gibi elde edilir.

$$F(x) = \int_0^x \frac{kt^k e^{-\left(\frac{t}{\lambda}\right)^k}}{\lambda^{k+1} \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} dt \quad (5.4)$$

Eşitlik (5.4)’deki integralin çözümü için

$$u = \left(\frac{t}{\lambda}\right)^k, \quad du = \frac{k}{\lambda^k} t^{k-1} dt$$

ile verilen değişken dönüşümü uygulanırsa

$$F(x) = \frac{1}{\lambda \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} \int_0^{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \lambda u^{\frac{1}{k}} e^{-u} du$$

olur. Ağırlıklı Weibull dağılımının *bdf*’si

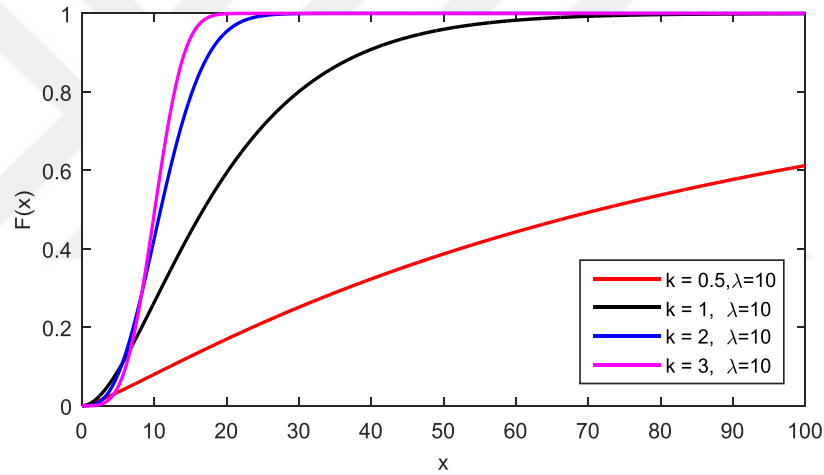
$$F(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} \Upsilon\left(\frac{1}{k}+1, \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right) \quad (5.5)$$

şeklinde elde edilir. Burada,  $\Upsilon(\cdot, \cdot)$  tam olmayan Gamma fonksiyonudur ve

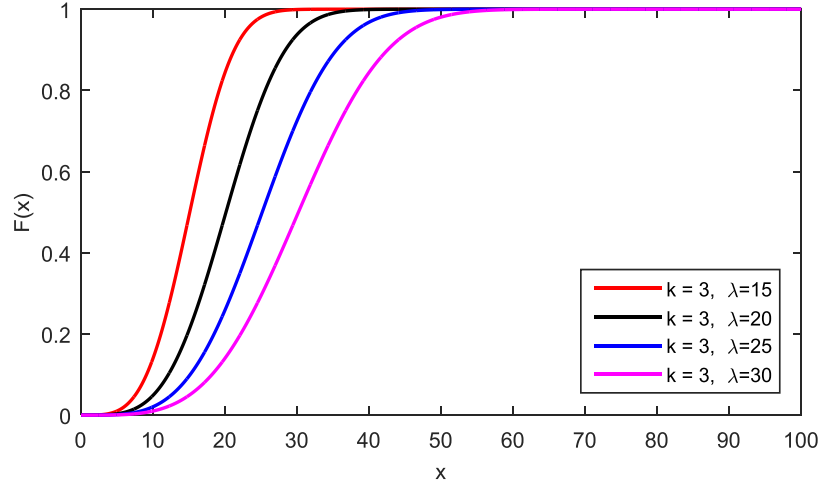
$$\Upsilon\left(\frac{1}{k}+1, \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right) = \int_0^{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} u^{\frac{1}{k}} e^{-u} du$$

integral ile hesaplanır.

Şekil 5.3 ve Şekil 5.4'te ölçek ve şekil parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının *bdf* grafikleri verilmiştir.



**Şekil 5.3.** Şekil parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının *bdf* grafiği



**Şekil 5.4.** Ölçek parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının *bdf* grafiği

### 5.3. Ağırlıklı Weibull Dağılımının *r*. Momenti

Ağırlıklı Weibull Dağılımının *r*. Momenti, (2.2) eşitliğinde  $f(x)$  yerine ağırlıklı Weibull dağılımının (5.3)'de verilen  $oyf'$ 'si yazıldığında

$$E(X^r) = \int_0^{\infty} \frac{x^r k x^k e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}}{\lambda^{k+1} \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} dx \quad (5.6)$$

olur. Eşitlik (5.6)'daki integralin çözümü için eşitlik (5.2)'de verilen değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} E(X^r) &= \frac{1}{\lambda \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} \int_0^{\infty} x^{1+r} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\lambda \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} \int_0^{\infty} \left(\lambda y^{\frac{1}{k}}\right)^{1+r} e^{-y} dy \\ &= \frac{\lambda^{1+r}}{\lambda \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} \underbrace{\int_0^{\infty} y^{\frac{1+r}{k}} e^{-y} dy}_{\Gamma\left(\frac{1+r}{k}+1\right)} \\ &= \frac{\lambda^r}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} \Gamma\left(\frac{1+r}{k} + 1\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

elde edilir. Eşitlik (5.7)'de  $r = 1$  alındığında dağılımın beklenen değeri

$$E(X) = \frac{\lambda}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} \Gamma\left(\frac{2}{k} + 1\right)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde dağılımın varyansı,

$$\text{Var}(X) = \frac{\lambda^2 \Gamma\left(\frac{3}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} - \left(\frac{\lambda \Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right)^2$$

olarak elde edilir. Burada ( $r = 2$  için)

$$E(X^2) = \frac{\lambda^2 \Gamma\left(\frac{3}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}$$

dır. Ayrıca (2.3) ve (2.4) eşitlikleri yardımı ile çarpıklık ( $\beta_1$ ) ve basıklık ( $\beta_2$ ) katsayıları

$$\beta_1 = \frac{\left(\frac{\lambda^3 \Gamma\left(\frac{4}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right) - 3 \left(\frac{\lambda \Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right) \left(\frac{\lambda^2 \Gamma\left(\frac{3}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right) + 2 \left(\frac{\lambda \Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right)^3}{\left(\frac{\lambda^2 \Gamma\left(\frac{3}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} - \left(\frac{\lambda \Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right)^2\right)^{3/2}}$$

$$\beta_2 = \frac{\left(\frac{\lambda^4 \Gamma\left(\frac{5}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right) - 4 \left(\frac{\lambda \Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right) \left(\frac{\lambda^3 \Gamma\left(\frac{4}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right) + 6 \left(\frac{\lambda \Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right)^2 \left(\frac{\lambda^2 \Gamma\left(\frac{3}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right) - 4 \left(\frac{\lambda \Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right)^4}{\left(\frac{\lambda^2 \Gamma\left(\frac{3}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} - \left(\frac{\lambda \Gamma\left(\frac{2}{k}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}\right)^2\right)^2}$$

olarak elde edilmiştir.

#### 5.4. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Modu

Ağırlıklı Weibull dağılımının modu, eşitlik (5.3)'te elde edilen ağırlıklı Weibull dağılımının  $oyf'$ 'sinin  $x$ 'e göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi sonucunda elde edilir.

Buna göre,  $f^w(x)$ 'in  $x$ 'e göre türevi

$$\frac{df^w(x)}{dx} = \frac{k}{\lambda^{k+1} \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} \left( kx^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} - \frac{k}{\lambda^k} x^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} x^k \right) = 0$$



şeklinde elde edilmiştir. Bu türev denkleminin  $x$ 'e göre çözümlenmesi sonucunda dağılımın modu

$$x_M = \lambda$$

olarak elde edilir.

### 5.5. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Medyanı

Ağırlıklı Weibull dağılımının medyan değeri eşitlik (5.5)'de verilen *bdf* yardımı ile

$$F(\text{Med}_x) = \frac{\Upsilon\left(\frac{1}{k}+1, \left(\frac{\text{Med}_x}{\lambda}\right)^k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} = \frac{\int_0^{\left(\frac{\text{Med}_x}{\lambda}\right)^k} \frac{1}{u^k} e^{-u} du}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} = 0.5$$

eşitliğinden elde edilir. Dağılım fonksiyonunun karmaşık yapısı (tam olmayan Gamma fonksiyonu içerdiğinden) sebebi ile denklemin açık çözümü yoktur. Bu nedenle denklemin çözümü için nümerik yöntemler gereklidir.

### 5.6. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Moment Çıkaran Fonksiyonu

Ağırlıklı Weibull dağılımına sahip  $X$  rasgele değişkeninin moment çıkararı fonksiyonu;

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{kx^k e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}}{\lambda^{k+1}\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} dx \quad (5.8)$$

integralinin hesaplanması sonucunda elde edilir. Eşitlik (5.8)'de yer alan  $e^{tX}$  yerine bu terimin Maclourin serisine açılımı yani  $e^{tX} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(tx)^i}{i!}$  yazılırsa

$$E(e^{tX}) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \int_0^{\infty} \frac{kx^{i+k} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}}{\lambda^{k+1}\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} dx$$

elde edilir. Yukarıdaki integralin çözümü için (5.2)'de verilen değişken dönüşümü uygulanırsa

$$E(e^{tX}) = \frac{1}{\lambda \Gamma(\frac{1}{k}+1)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \int_0^{\infty} (y^{\frac{1}{k}} \lambda)^{i+1} e^{-y} dy$$

olur. Bu eşitliğin çözümlenmesi sonucunda

$$M_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} \lambda^i \frac{\Gamma(\frac{i+1}{k}+1)}{\Gamma(\frac{1}{k}+1)}$$

olarak elde edilir.

### 5.7. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Karakteristik Fonksiyonu

Ağırlıklı Weibull dağılımına sahip  $X$  rasgele değişkeninin karakteristik fonksiyonu

$$E(e^{itX}) = \int_0^{\infty} e^{itx} \frac{kx^k e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}}{\lambda^{k+1} \Gamma(\frac{1}{k}+1)} dx, \quad i^2 = -1$$

ile tanımlanır. Bu integralin hesaplanmasında,  $M_X(t)$ 'nin elde edilmesinde kullanılan yöntemlerin sırası ile uygulanması sonucunda

$$E(e^{itX}) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(it)^s}{s!} \lambda^s \frac{\Gamma(\frac{s+1}{k}+1)}{\Gamma(\frac{1}{k}+1)}$$

olarak elde edilir.

### 5.8. Ağırlıklı Weibull Dağılımı için $i$ . Sıra İstatistiği

Eşitlik (2.7)'de  $X_{(i)}$ 'nin  $oyf$ 'sinde yer alan  $[F(x)]^{i-1}$  terimi yerine

$$[F(x)]^{i-1} = [1 - (1 - F(x))]^{i-1} = \sum_{r=0}^{i-1} \binom{i-1}{r} (-1)^r [1 - F(x)]^r$$

eşitliği ile verilen binom serisi açılımı yazılırsa

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r=0}^{i-1} i \binom{i-1}{r} \binom{n}{i} (-1)^r f(x) [1 - F(x)]^{n-i+r} \quad (5.9)$$

olur. Elde edilen (5.9) eşitliğindeki  $[1 - F(X)]^{n-i+r}$  terimi yerine

$$[1 - F(x)]^{n-i+r} = \sum_{t=0}^{n-i+r} \binom{n-i+r}{t} (-1)^t [F(x)]^t$$

eşitliği ile verilen binom serisi açılımı yazılırsa

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r=0}^{i-1} \sum_{t=0}^{n-i+r} i \binom{i-1}{r} \binom{n-i+r}{t} \binom{n}{i} (-1)^{r+t} f(x) [F(x)]^t \quad (5.10)$$

olur. Daha sonra elde edilen eşitlik (5.10)'da ağırlıklı Weibull dağılımının (5.3) ve (5.5)'de verilen *oyf* ve *bdf*'leri yazılırsa

$$f_{i:n}(x) = \sum_{r=0}^{i-1} \sum_{t=0}^{n-i+r} i \binom{i-1}{r} \binom{n-i+r}{t} \binom{n}{i} (-1)^{r+t} \frac{kx^k e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}}{\lambda^{k+1} \Gamma^2\left(\frac{1}{k}+1\right)} \left[ \gamma\left(\frac{1}{k}+1, \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right) \right]^t$$

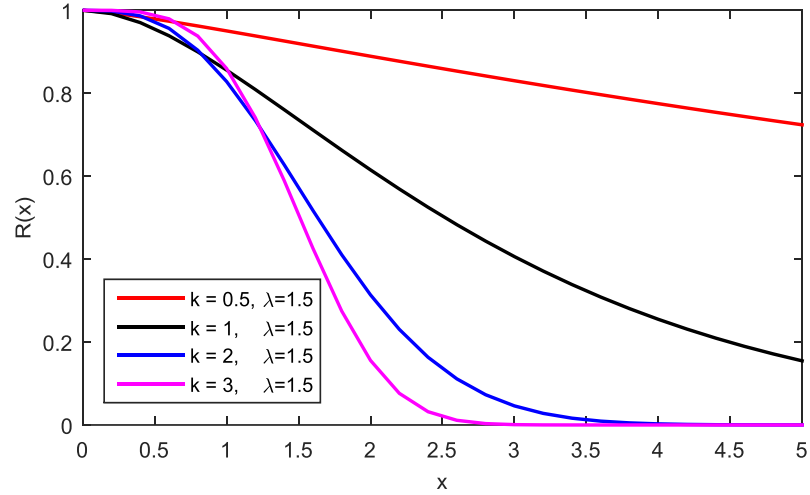
olarak elde edilir.

### 5.9. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Güvenilirlik Fonksiyonu

Ağırlıklı Weibull dağılımı için güvenilirlik fonksiyonu (2.8) eşitliği yardımı ile

$$R(x) = 1 - \frac{\gamma\left(\frac{1}{k}+1, \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}, \quad x > 0$$

biçimindedir. Şekil parametresinin farklı değerleri ve  $\lambda = 1.5$  değeri için dağılımın güvenilirlik fonksiyonu grafikleri Şekil 5.5'de verilmiştir.



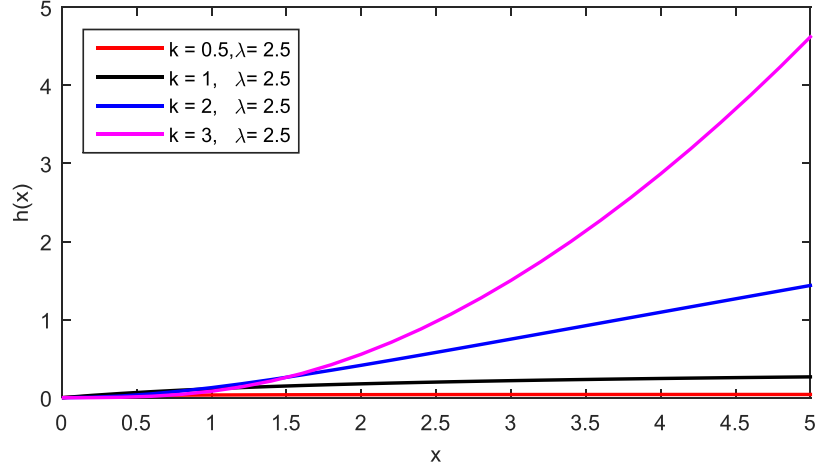
**Şekil 5.5.** Şekil parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının güvenilirlik fonksiyonu grafiği

### 5.10. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Bozulma Oranı Fonksiyonu

Ağırlıklı Weibull dağılımı için bozulma oranı fonksiyonu, eşitlik (2.9) yardımı ile aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{f(x)}{1-F(x)} \\
 &= \frac{\frac{kx^k e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}}{\lambda^{k+1} \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)}}{1 - \frac{\gamma\left(\frac{1}{k}+1, \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)}{\lambda^{k+1}}} \\
 &= \frac{kx^k e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}}{\lambda^{k+1} \left[ \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right) - \gamma\left(\frac{1}{k}+1, \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right) \right]} \\
 &= \frac{kx^k e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}}{\lambda^{k+1} \Gamma\left(\frac{1}{k}+1, \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)} \tag{5.11}
 \end{aligned}$$

Şekil 5.6'da,  $k$ 'nın farklı değerleri ve  $\lambda = 2.5$  için bozulma oranı fonksiyonu grafikleri verilmiştir.



**Şekil 5.6.** Şekil parametresinin farklı değerleri için ağırlıklı Weibull dağılımının bozulma oranı fonksiyonu grafiği

Ağırlıklı Weibull dağılımı için, bozulma oranı fonksiyonu tam olmayan (incomplete) Gamma fonksiyonu içerdiğinden  $h(x)$ 'in şeklini doğrudan belirlemek zordur. Bu nedenle  $h(x)$ 'in şeklini belirlemek için Glaser (1980)'ın lemması kullanılmıştır.

Bu lemma kullanılarak eşitlik (5.11) ile verilen  $h(x)$  fonksiyonunun şekli aşağıdaki gibi belirlenir:

Temel kavramlar bölümünde verilen Lemmanın tanımında  $\eta(x)$  ve bu fonksiyonun türevi olan  $\eta'(x)$  fonksiyonu

$$\eta(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)} = -\frac{k}{x} \left(1 - \frac{x^k}{\lambda^k}\right)$$

$$\eta'(x) = \frac{k}{x^2} \left(1 - \frac{(k-1)x^{k+1}}{\lambda^k}\right)$$

olarak elde edilir. Buradan

$$\eta'(x) = \frac{k}{x^2} \left(1 - \frac{(k-1)x^{k+1}}{\lambda^k}\right) = 0$$

olduğunda bu denklemin çözümü

$$x_0 = \sqrt[k+1]{\frac{\lambda^k}{k-1}}, k > 1$$

dır. Burada  $k > 1$  ve  $\lambda > 0$  olmak üzere, elde edilen  $0 < x < x_0$  noktası için  $\eta'(x) > 0$  ve  $x > x_0$  için  $\eta'(x) < 0$ 'dır. Ayrıca,  $\lim_{x \rightarrow 0} f_w(x) = 0$  olduğundan  $h(x)$  ters kuvvet eğrisi (UBT) ya da ters U ( $\cap$ ) şekline sahip olur.

### 5.11. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Diğer Dağılımlarla İlişkisi

Bu bölümde ağırlıklı Weibull dağılımının iki parametrelili Gamma dağılımı ve Maxwell-Boltzmann dağılımı ile olan ilişkisi aşağıda verilmiştir.

i) *Ağırlıklı Weibull Dağılımının İki Parametrelili Gamma Dağılımı ile İlişkisi:*

(5.3) eşitliği ile verilen  $oyf$ 'de  $k = 1$  alınırsa  $f^w(x; k, \lambda)$  ile gösterilen ağırlıklı Weibull dağılımı;

$$f(x; k, \lambda) = \frac{x e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)}}{\lambda^2 \Gamma(2)}$$

ile şekil parametresi 2 ve ölçek parametresi  $\lambda$  olan Gamma dağılımına dönüşür.

ii) *Ağırlıklı Weibull Dağılımının Maxwell-Boltzmann Dağılımı ile İlişkisi:*

(5.3) eşitliği ile verilen  $oyf$ 'de  $k = 2$  ve  $\lambda = \sqrt{2}\sigma$  alınırsa  $f^w(x; k, \lambda)$  ile gösterilen ağırlıklı Weibull dağılımı;

$$f(x; k, \lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{\sigma^3} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

ile  $\sigma$  parametrelili Maxwell-Boltzmann dağılımına dönüşür.

### 5.12. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Parametrelerinin Tahmini

Weibull dağılımında olduğu gibi bu bölümde de ağırlıklı Weibull dağılımının tahmin edicilerinin bulunmasına yönelik en çok olabilirlik, en küçük kareler ve ağırlıklı en küçük kareler yöntemi olmak üzere üç farklı yöntem incelenmiştir.

### 5.12.1. En Çok Olabilirlik Yöntemi ile Parametrelerin Tahmini

$\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_n\}$  parametreleri  $k$  ve  $\lambda$  olan ağırlıklı Weibull dağılımından alınan rasgele bir örneklem olmak üzere; eşitlik (3.1)'den ağırlıklı Weibull dağılımının olabilirlik fonksiyonu;

$$L(k, \lambda | \underline{x}) = \frac{k^n}{(\lambda^{k+1})^n \Gamma(\frac{1}{k} + 1)^n} e^{-\frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n x_i^k} \prod_{i=1}^n x_i^k$$

ve ln-olabilirlik fonksiyonu da,

$$\ln L(k, \lambda | \underline{x}) = n \ln k - n(k+1) \ln \lambda - n \ln \Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right) - \frac{1}{\lambda^k} \sum_{i=1}^n x_i^k + k \sum_{i=1}^n \ln x_i \quad (5.12)$$

şeklinde dir.

Buna göre,  $\ln L(k, \lambda | \underline{x})$  fonksiyonunun  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerine göre kısmi türevleri sonucu elde edilen olabilirlik denklemleri aşağıda verilmiştir.

$$\frac{\partial \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k} = \frac{n}{k} - n \ln \lambda + \frac{n}{k^2} \Psi\left(\frac{1}{k} + 1\right) + \frac{\ln \lambda \sum_{i=1}^n x_i^k - \sum_{i=1}^n x_i^k \ln x_i}{\lambda^k} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial \lambda} = \frac{-n(k+1)}{\lambda} + \frac{k}{\lambda^{k+1}} \sum_{i=1}^n x_i^k = 0$$

Burada digamma fonksiyonu olarak adlandırılan  $\Psi(\cdot)$  fonksiyonu  $\ln \Gamma(\cdot)$ 'nin türevi olup

$$\Psi\left(\frac{1}{k} + 1\right) = \frac{\frac{d}{dk} \Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right)} = \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{k} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right)}$$

dır (Ek 1'e bakınız). Elde edilen bu denklemlerin çözümlenmesi sonucunda  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerine ilişkin tahmin denklemlerin açık çözümleri yoktur. Bu nedenle  $k$  ve  $\lambda$ 'nın EÇÖ tahminleri ancak nümerik yöntemler ile bulunabilir.

Ağırlıklı Weibull dağılımının şekil ve ölçek parametrelerinin tahmin edicilerinin en küçük varyans sınırı için Fisher bilgi matrisi aşağıda verilmiştir.

*Fisher Bilgi Matrisi:* Fisher bilgi matrisi (5.3)'de verilen  $oyf$ 'ye sahip ağırlıklı Weibull dağılımı için şu şekilde tanımlanır:

$$I(k, \lambda) = \begin{bmatrix} -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k^2}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k \partial \lambda}\right) \\ -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k \partial \lambda}\right) & -E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial \lambda^2}\right) \end{bmatrix}$$

Burada  $I(k, \lambda)$ , Fisher bilgi matrisinin öğeleri olan eşitlik (5.12)'de verilen  $\ln L(k, \lambda | \underline{x})$  fonksiyonunun ikinci dereceden türevlerinin beklenen değerleri:

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k^2}\right) = -\frac{n}{k^2} - \frac{n}{k^4} \left[ \frac{\Gamma''\left(\frac{1}{k} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right)} - \Psi^2\left(\frac{1}{k} + 1\right) \right] - \frac{2n}{k^3} \Psi\left(\frac{1}{k} + 1\right) + \frac{2 \ln \lambda \sum_{i=1}^n E(x_i^k \ln x_i)}{\lambda^k} - \frac{(\ln \lambda)^2 \sum_{i=1}^n E(x_i^k)}{\lambda^k} - \frac{\sum_{i=1}^n E(x_i^k \ln^2 x_i)}{\lambda^k} \quad (5.13)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial \lambda^2}\right) = \frac{n(k+1)}{\lambda^2} - \frac{k(k+1) \sum_{i=1}^n E(x_i^k)}{\lambda^{k+2}} \quad (5.14)$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k \partial \lambda}\right) = -\frac{n}{\lambda} + \frac{\sum_{i=1}^n E(x_i^k) + k \sum_{i=1}^n E(x_i^k \ln x_i) - k \ln \lambda \sum_{i=1}^n E(x_i^k)}{\lambda^{k+1}} \quad (5.15)$$

olarak elde edilir. Burada (Ek 2.1) ile (Ek 2.2) eşitliklerinin (5.13)'de yerine yazılması sonucunda

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k^2}\right) = -\frac{n}{k^2} - \frac{n}{k^4} \left( \frac{\Gamma''\left(\frac{1}{k} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right)} - \Psi^2\left(\frac{1}{k} + 1\right) \right) - \frac{2n}{k^3} \Psi\left(\frac{1}{k} + 1\right) - \frac{n}{k^2} \left(\frac{1}{k} + 1\right) \left( \Psi'\left(\frac{1}{k} + 2\right) + \Psi^2\left(\frac{1}{k} + 2\right) \right)$$

Eşitlik (5.7)'den  $E(x_i^k)$ 'nin (5.14)'te yerine yazılması ile

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial \lambda^2}\right) = \frac{-nk(k+1)}{\lambda^2}$$

olarak elde edilir. Ayrıca (5.7) ve (Ek 2.1) eşitliklerinin (5.15)'de yerine yazılması sonucunda



$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \mathbf{x})}{\partial k \partial \lambda}\right) = \frac{n}{\lambda} \left( \frac{1}{k} + \left( \frac{1}{k} + 1 \right) \Psi \left( \frac{1}{k} + 2 \right) \right)$$

olarak bulunur.

### 5.12.2. En Küçük Kareler Yöntemi ile Parametrelerin Tahmini

Ağırlıklı Weibull dağılımının  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerinin *EKK* tahmin edicileri (5.5)'de verilen *bdf*'sinin (3.2) denkleminde yazılması sonucunda

$$G(k, \lambda) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} \Upsilon\left(\frac{1}{k} + 1, \left(\frac{x_{(i)}}{\lambda}\right)^k\right) - p_i \right)^2$$

olarak elde edilen  $G(k, \lambda)$  fonksiyonunun ilgili parametrelere göre elde edilen kısmi türevlerinin sıfıra eşitlenip çözümlenmesi sonucunda elde edilirler.

### 5.12.3. Ağırlıklı En Küçük Kareler Yöntemi ile Parametrelerin Tahmini

Ağırlıklı Weibull dağılımının  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerinin *AEKK* tahmin edicileri, eşitlik (5.5)'de verilen *bdf*'nin (3.3)'deki eşitlikte yerine yazılması sonucunda

$$G_A(k, \lambda) = \sum_{i=1}^n w_i \left( \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} \Upsilon\left(\frac{1}{k} + 1, \left(\frac{x_{(i)}}{\lambda}\right)^k\right) - p_i \right)^2$$

biçiminde elde edilen  $G_A(k, \lambda)$  fonksiyonunu  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerine göre minimum yapan değerlerdir.

## 6. SİMÜLASYON ÇALIŞMASI

Bu bölümde, Weibull ve ağırlıklı Weibull dağılımlarının parametrelerini tahmin etmek için elde edilen *EÇO*, *EKK* ve *AEKK* tahmin edicilerinin performanslarını karşılaştırmak için Monte-Carlo simülasyon çalışması yapılmıştır.

Tahmin edicilerinin performanslarını karşılaştırmak için *bias* (yan) ve *MSE* (*Mean Square Error*, Hata Kareler Ortalaması) kriterleri kullanılmıştır. Herhangi bir bilinmeyen  $\theta$  parametresinin herhangi bir tahmin edicisinin *bias* ve *MSE*

$$Bias(\hat{\theta}) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (\theta - \hat{\theta}_i)$$

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (\theta - \hat{\theta}_i)^2$$

formülleri kullanılarak hesaplanabilir. Burada,  $t$  simülasyon tekrar sayısı ve  $\hat{\theta}_i$ ,  $\theta$  parametresinin  $i$ . tekrardaki tahmin değeridir.

### 6.1. Weibull Dağılımının Parametrelerinin Tahmini İçin Simülasyon Çalışması

Weibull dağılımından rasgele sayı üretmek için ters dağılım fonksiyonu tekniği ile elde edilen

$$x = F^{-1}(u) = \left( -\lambda^k \ln(1 - u) \right)^{1/k}, u \sim U(0,1)$$

formülü kullanılmıştır. Burada  $u$ , düzgün dağılıma sahip rasgele bir sayıdır.

Bu simülasyon çalışmasında Weibull dağılımının ölçek parametresi  $\lambda = 1$  olarak alınmış ve şekil parametresinin farklı değerleri  $k = 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4$  için Matlab R2015a programında program yazılmıştır.

Örneklem büyüklüğü  $n = 15, 30, 50, 100$  ve simülasyon tekrar sayısı 4000 olarak alınmıştır. Elde edilen simülasyon sonuçları Tablo 6.1'de verilmiştir.

**Tablo 6.1.** Weibull dağılımının  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerinin  $E\hat{C}O$ ,  $E\hat{K}K$  ve  $A\hat{E}K\hat{K}$  tahminleri

	$\lambda = 1$		$k = 1.5$		$\lambda = 1$		$k = 2$	
$n = 15$	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>
$E\hat{C}O$	0.0023	0.0325	-0.1488	0.1501	0.0023	0.0185	-0.2044	0.2823
$E\hat{K}K$	-0.0188	0.0369	-0.0010	0.1874	-0.0128	0.0209	-0.0029	0.3476
$A\hat{E}K\hat{K}$	-0.0147	0.0351	-0.0136	0.1665	-0.0098	0.0199	-0.0202	0.3158
<b><math>n = 30</math></b>								
$E\hat{C}O$	-0.0020	0.0160	-0.0713	0.0598	0.0030	0.0087	-0.0896	0.1041
$E\hat{K}K$	-0.0115	0.0177	0.0019	0.0756	-0.0046	0.0097	0.0049	0.1430
$A\hat{E}K\hat{K}$	-0.0087	0.0167	-0.0117	0.0659	-0.0023	0.0092	-0.0127	0.1241
<b><math>n = 50</math></b>								
$E\hat{C}O$	-0.0007	0.0095	-0.0417	0.0326	0.0016	0.0056	-0.0558	0.0566
$E\hat{K}K$	-0.0074	0.0107	0.0043	0.0436	-0.0029	0.0062	0.0001	0.0797
$A\hat{E}K\hat{K}$	-0.0049	0.0100	-0.0075	0.0372	-0.0012	0.0058	-0.0150	0.0673
<b><math>n = 100</math></b>								
$E\hat{C}O$	0.0007	0.0049	-0.0209	0.0152	0.0009	0.0027	-0.0257	0.0262
$E\hat{K}K$	-0.0030	0.0054	0.0022	0.0212	-0.0010	0.0029	0.0044	0.0365
$A\hat{E}K\hat{K}$	-0.0014	0.0050	-0.0060	0.0175	-0.0002	0.0028	-0.0066	0.0306
	$\lambda = 1$		$k = 2.5$		$\lambda = 1$		$k = 3$	
$n = 15$	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>
$E\hat{C}O$	0.0074	0.0114	-0.2430	0.4204	0.0073	0.0085	-0.3182	0.6832
$E\hat{K}K$	-0.0044	0.0126	0.0112	0.5068	-0.0032	0.0094	-0.0070	0.7939
$A\hat{E}K\hat{K}$	-0.0022	0.0120	-0.0110	0.4593	-0.0009	0.0090	-0.0359	0.7161
<b><math>n = 30</math></b>								
$E\hat{C}O$	0.0020	0.0059	-0.1120	0.1627	0.0026	0.0039	-0.1470	0.2478
$E\hat{K}K$	-0.0043	0.0066	0.0096	0.2057	-0.0019	0.0043	0.0048	0.3108
$A\hat{E}K\hat{K}$	-0.0024	0.0062	-0.0122	0.1814	-0.0007	0.0041	-0.0238	0.2731
<b><math>n = 50</math></b>								
$E\hat{C}O$	0.0014	0.0037	-0.0755	0.0940	0.0032	0.0024	-0.0788	0.1249
$E\hat{K}K$	-0.0027	0.0040	-0.0015	0.1264	0.0001	0.0027	0.0127	0.1689
$A\hat{E}K\hat{K}$	-0.0011	0.0038	-0.0225	0.1073	0.0013	0.0025	-0.0130	0.1436
<b><math>n = 100</math></b>								
$E\hat{C}O$	-0.0002	0.0017	-0.0366	0.0421	0.0002	0.0012	-0.0450	0.0618
$E\hat{K}K$	-0.0017	0.0019	-0.0012	0.0612	-0.0012	0.0013	-0.0028	0.0864
$A\hat{E}K\hat{K}$	-0.0010	0.0018	-0.0144	0.0499	-0.0006	0.0013	-0.0179	0.0711
	$\lambda = 1$		$k = 3.5$		$\lambda = 1$		$k = 4$	
$n = 15$	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>
$E\hat{C}O$	0.0047	0.0059	-0.3604	0.8798	0.0047	0.0044	-0.4149	1.1446
$E\hat{K}K$	-0.0043	0.0066	-0.0059	1.0267	-0.0029	0.0049	-0.0274	1.4244
$A\hat{E}K\hat{K}$	-0.0023	0.0063	-0.0431	0.9576	-0.0013	0.0047	-0.0599	1.3096
<b><math>n = 30</math></b>								
$E\hat{C}O$	0.0016	0.0031	-0.1622	0.3353	0.0029	0.0024	-0.2007	0.4609
$E\hat{K}K$	-0.0028	0.0034	0.0158	0.4189	-0.0007	0.0026	-0.0041	0.5825
$A\hat{E}K\hat{K}$	-0.0014	0.0033	-0.0187	0.3703	0.0003	0.0025	-0.0420	0.5098
<b><math>n = 50</math></b>								
$E\hat{C}O$	0.0015	0.0019	-0.0965	0.1783	0.0011	0.0014	-0.1073	0.2377
$E\hat{K}K$	-0.0011	0.0022	-0.0013	0.2445	-0.0013	0.0015	0.0132	0.3215
$A\hat{E}K\hat{K}$	-0.0002	0.0020	-0.0251	0.2064	-0.0004	0.0015	-0.0170	0.2738
<b><math>n = 100</math></b>								
$E\hat{C}O$	0.0004	0.0009	-0.0501	0.0831	0.0001	0.0006	-0.0504	0.1073
$E\hat{K}K$	-0.0007	0.0010	0.0035	0.1172	-0.0009	0.0008	0.0145	0.1546
$A\hat{E}K\hat{K}$	-0.0001	0.0010	-0.0169	0.0976	-0.0004	0.0007	-0.0089	0.1265

Tablo 6.1'e göre;

- i)  $n = 15$  için bütün tahmin edicilerin yanlı oldukları görülmektedir. Ancak örneklem hacmi arttıkça yan miktarlarının azaldığı hatta yansız oldukları gözlenmiştir. Ayrıca, örneklem değerleri artıkça  $MSE$  değerlerinin de azaldığı görülmektedir. Bu durumda her üç tahmin edicinin de tutarlı oldukları söylenir.
- ii) Tahmin ediciler  $MSE$  kriterine göre değerlendirildiğinde,  $E\check{C}O$  tahmin edicisinin en iyi performansa sahip olduğu görülmektedir.  $E\check{C}O$  tahmin edicisini  $AEKK$  tahmin edicisi takip etmektedir. Bu sonuç beklenen sonuçtur.
- iii) Diğer durumlar açısından incelendiğinde hem ölçek hem de şekil parametresi için hemen hemen bütün tahmin edicilerin yansız oldukları ve  $MSE$  bakımından  $E\check{C}O$  tahmin edicisinin bütün durumlar için en iyi olduğu söylenir. Ancak, özellikle  $k \geq 2.5$  için,  $n = 100$  dışında örneklem hacmi arttıkça yan miktarının azalmasına rağmen  $E\check{C}O$  tahmin edicisinin yanlı olduğu gözlenmiştir.
- iv) Ayrıca ölçek parametresi değerleri ve örneklem değerleri artıkça  $MSE$ 'lerinin de azaldığı görülmektedir.

## 6.2. Ağırlıklı Weibull Dağılımının Parametrelerinin Tahmini için Simülasyon Çalışması

Ağırlıklı Weibull dağılımından rasgele sayı üretmek için ters dağılım fonksiyonu tekniği ile elde edilen

$$x = F^{-1}(u) = \lambda \left( \gamma^{-1} \left( \frac{1}{k} + 1, \Gamma \left( \frac{1}{k} + 1 \right) u \right) \right)^{1/k}, u \sim U(0,1)$$

formülü kullanılmıştır. Burada  $u$ , düzgün dağılıma sahip rasgele bir sayıdır. Bu simülasyon çalışmasında ağırlıklı Weibull dağılımının ölçek parametresi  $\lambda = 1$  olarak alınmış ve şekil parametresinin farklı değerleri  $k = 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4$  için Matlab R2015a programında program yazılmıştır. Örneklem büyüklüğü  $n = 15, 30, 50, 100$  ve simülasyon tekrar sayısı 4000 olarak alınmıştır. Elde edilen simülasyon sonuçları Tablo 6.2'de verilmiştir.

**Tablo 6.2.** Ağırlıklı Weibull dağılımının  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerinin  $E\check{C}O$ ,  $EKK$  ve  $AEKK$  tahminleri

	$\lambda = 1$		$k = 1.5$		$\lambda = 1$		$k = 2$	
$n = 15$	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>
<i>E\check{C}O</i>	-0.0361	0.0538	-0.2010	0.2643	-0.0183	0.0269	-0.2659	0.4516
<i>EKK</i>	0.0561	0.0720	-0.0068	0.3158	0.0366	0.0365	-0.0084	0.4929
<i>AEKK</i>	0.0424	0.0657	-0.0239	0.2863	0.0286	0.0334	-0.0325	0.4593
<b><math>n = 30</math></b>								
<i>E\check{C}O</i>	-0.0185	0.0276	-0.0964	0.1014	-0.0096	0.0134	-0.1252	0.1611
<i>EKK</i>	0.0265	0.0348	-0.0034	0.1273	0.0177	0.0168	0.0048	0.1962
<i>AEKK</i>	0.0157	0.0314	-0.0200	0.1117	0.0110	0.0152	-0.0178	0.1691
<b><math>n = 50</math></b>								
<i>E\check{C}O</i>	-0.0148	0.0169	-0.0578	0.0521	-0.0042	0.0077	-0.0667	0.0843
<i>EKK</i>	0.0129	0.0214	0.0013	0.0707	0.0124	0.0095	0.0091	0.1152
<i>AEKK</i>	0.0044	0.0190	-0.0132	0.0594	0.0071	0.0086	-0.0108	0.0969
<b><math>n = 100</math></b>								
<i>E\check{C}O</i>	-0.0055	0.0085	-0.0285	0.0242	-0.0033	0.0039	-0.0367	0.0387
<i>EKK</i>	0.0089	0.0105	0.0021	0.0345	0.0045	0.0047	-0.0018	0.0571
<i>AEKK</i>	0.0031	0.0093	-0.0088	0.0280	0.0013	0.0042	-0.0147	0.0464
	$\lambda = 1$		$k = 2.5$		$\lambda = 1$		$k = 3$	
$n = 15$	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>
<i>E\check{C}O</i>	-0.0063	0.0149	-0.3069	0.6634	-0.0046	0.0096	-0.3598	0.8840
<i>EKK</i>	0.0294	0.0200	0.0102	0.7372	0.0198	0.0124	0.0057	0.9998
<i>AEKK</i>	0.0236	0.0184	-0.0193	0.6750	0.0160	0.0115	-0.0266	0.9009
<b><math>n = 30</math></b>								
<i>E\check{C}O</i>	-0.0072	0.0077	-0.1448	0.2265	-0.0023	0.0049	-0.1635	0.3165
<i>EKK</i>	0.0099	0.0094	0.0029	0.2924	0.0092	0.0058	0.0100	0.4036
<i>AEKK</i>	0.0054	0.0086	-0.0242	0.2489	0.0062	0.0054	-0.0228	0.3499
<b><math>n = 50</math></b>								
<i>E\check{C}O</i>	-0.0024	0.0047	-0.0846	0.1261	-0.0018	0.0029	-0.1055	0.1783
<i>EKK</i>	0.0076	0.0055	0.0055	0.1728	0.0051	0.0034	-0.0034	0.2444
<i>AEKK</i>	0.0043	0.0051	-0.0187	0.1450	0.0030	0.0032	-0.0291	0.2076
<b><math>n = 100</math></b>								
<i>E\check{C}O</i>	-0.0019	0.0022	-0.0444	0.0558	-0.0009	0.0015	-0.0503	0.0800
<i>EKK</i>	0.0029	0.0025	-0.0016	0.0818	0.0025	0.0017	0.0061	0.1140
<i>AEKK</i>	0.0010	0.0023	-0.0162	0.0659	0.0011	0.0016	-0.0139	0.0932
	$\lambda = 1$		$k = 3.5$		$\lambda = 1$		$k = 4$	
$n = 15$	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>	<i>Bias</i>	<i>MSE</i>
<i>E\check{C}O</i>	-0.0024	0.0069	-0.4184	1.1448	-0.0006	0.0052	-0.4879	1.5545
<i>EKK</i>	0.0152	0.0085	0.0006	1.3230	0.0113	0.0062	-0.0243	1.7166
<i>AEKK</i>	0.0123	0.0080	-0.0390	1.1956	0.0094	0.0059	-0.0635	1.5566
<b><math>n = 30</math></b>								
<i>E\check{C}O</i>	-0.0019	0.0034	-0.1989	0.4305	-0.0015	0.0026	-0.2252	0.5414
<i>EKK</i>	0.0066	0.0040	0.0242	0.5160	0.0045	0.0030	0.0017	0.7153
<i>AEKK</i>	0.0044	0.0037	-0.0193	0.4480	0.0030	0.0028	-0.0418	0.6268
<b><math>n = 50</math></b>								
<i>E\check{C}O</i>	-0.0004	0.0021	-0.1117	0.2230	-0.0006	0.0015	-0.1335	0.3049
<i>EKK</i>	0.0042	0.0024	0.0059	0.3132	0.0030	0.0017	-0.0022	0.4032
<i>AEKK</i>	0.0028	0.0022	-0.0241	0.2617	0.0017	0.0016	-0.0375	0.3416
<b><math>n = 100</math></b>								
<i>E\check{C}O</i>	-0.0007	0.0010	-0.0618	0.1003	-0.0007	0.0007	-0.0589	0.1329
<i>EKK</i>	0.0017	0.0011	-0.0041	0.1542	0.0024	0.0008	0.0090	0.1866
<i>AEKK</i>	0.0008	0.0011	-0.0247	0.1232	0.0018	0.0008	-0.0148	0.1536

Tablo 6.2’de bulunan simülasyon sonuçlarına göre;

- i) *MSE* kriterine göre  $k$  ve  $\lambda$  parametrelerinin *EÇO* tahmin edicileri bütün parametre değerleri için en iyi etkinliğe sahiptir. Örneklem hacmi arttıkça *MSE* değerlerinin azaldığı başka bir ifade ile bütün tahmin edicilerin etkinliklerinin arttığı görülmektedir. Ayrıca, *MSE* kriterine göre *EÇO* tahmin edicisinden sonra en iyi etkinliğe sahip olan *AEKK* tahmin edicisidir.
- ii) Bias değerlerine göre tahmin edicilerin performansları karşılaştırıldığında; özellikle  $k > 3$  durumunda  $\lambda$ ’nın *EÇO* tahmin edicisi  $n = 15, 30, 50, 100$  için en iyidir.  $k \leq 3$  durumunda ise  $\lambda$ ’nın *EÇO* tahmin edicisi özellikle  $n = 15, 30$  için iyi performans göstermektedir. Şekil parametresinin *EKK* tahmin edicisi bütün değerler için en iyi performansa sahiptir.

## 7. BULGULAR

Bu bölümde ağırlıklı Weibull dağılımının uygulanabilirliğini ve kullanılabilirliğini göstermek için, Meteoroloji Genel Müdürlüğünden alınan 01.09-31.12 2018 ve 01.01-31.08 2019 dönemlerine ait Sinop ili Merkez istasyonu günlük ortalama mevsimlik rüzgar hızı (m/s) verileri analiz edilmiştir. Burada, 01.09-31.11 2018 arası sonbahar, 01.12.2018-28.02.2019 arası kış, 01.03-31.05 2019 arası ilkbahar ve 01.06-31.08 2019 arası yaz mevsimi olarak alınmıştır. Verileri özetlemek ve veriler hakkında ön bilgi sağlamak amacı ile verilere ait bazı belirleyici istatistikler hesaplanmıştır. Bu belirleyici istatistikler minimum değer (*Min*), maksimum değer (*Mak*), ortalama, standart sapma (*SS*), medyan (ortanca) ve genişlik (*Range*) şeklinde her bir mevsim için Tablo 7.1’de sunulmuştur.

**Tablo 7.1.** Sinop ili Merkez istasyonu için her bir mevsim verisine ilişkin bazı belirleyici istatistikler

Mevsim	<i>n</i>	<i>Min</i>	<i>Mak</i>	<i>Ort.</i>	<i>SS</i>	Medyan	Genişlik
Sonbahar	91	0.7000	6.2000	2.2187	1.2023	2.0000	5.5000
Kış	89	0.8000	6.1000	2.8708	1.0599	2.7000	5.3000
İlkbahar	92	1.3000	5.9000	2.9837	1.1805	2.7000	4.6000
Yaz	92	0.7000	4.9000	2.4620	0.8061	2.3000	4.2000

Varsayılan dağılımlara ait bilinmeyen parametrelerin tahminleri *EÇO* yöntemine göre her bir mevsim verisi için ayrı ayrı elde edilmiştir ve sonuçlar Tablo 7.2’de verilmiştir. Bu bölümdeki diğer hesaplamalar için bu tahminler kullanılmıştır. Verilerin varsayılan dağılımlara uygunluğu Kolmogorov-Smirnov (*KS*) ile test edilmiştir. Tablo 7.2’de her bir veri seti için elde edilen analiz sonuçları yer almaktadır. *KS* testi ile ilgili sonuçların değerlendirilmesinde,

$H_0$ : Rüzgar hızı verisinin dağılımı varsayılan dağılımdır

şeklinde kurulan  $H_0$  hipotezi,  $KS_n < KS_t$  (hesaplanan *KS* değeri tablo *KS* değerinden küçük) ise red edilemez. Başka bir ifade ile rüzgar hızı verilerinin dağılımının varsayılan dağılım olduğu kabul edilir. Bu kurala göre Tablo 7.2 incelendiğinde, sonbahar, kış, ilkbahar ve yaz mevsimlerine ait günlük ortalama rüzgar hızı verilerinin dağılımının ağırlıklı Weibull ve Weibull olduğu söylenir. Ayrıca, burada elde edilen teorik sonuçlar görsel olarak desteklemek amacı ile günlük ortalama rüzgar hızı verilerinin Q-Q grafikleri ağırlıklı Weibull ve Weibull dağılımları için ayrı ayrı çizdirilmiştir. Şekil 7.1’de verilen grafikler incelendiğinde, özellikle sonbahar, ilkbahar ve yaz mevsimine ait gözlem verilerinin bir doğru etrafında dağılım gösterdiği gözlenmiştir. Bu elde edilen sonuca göre,

belirtilen mevsimlere ait rüzgar hızı verilerinin varsayılan dağılımlara uygunluk gösterdiği söylenebilir. Kış mevsimi verilerine ait hem ağırlıklı Weibull dağılımı hem de Weibull dağılımı Q-Q grafikleri incelendiğinde, gözlemlerin çoğunun bir doğru etrafında saçılım gösterdiği ancak doğrunun sağ uç noktasındaki dört gözlemin doğruya olan uzaklıklarının diğer gözlemlere göre daha fazla olduğu gözlemlenmiştir.

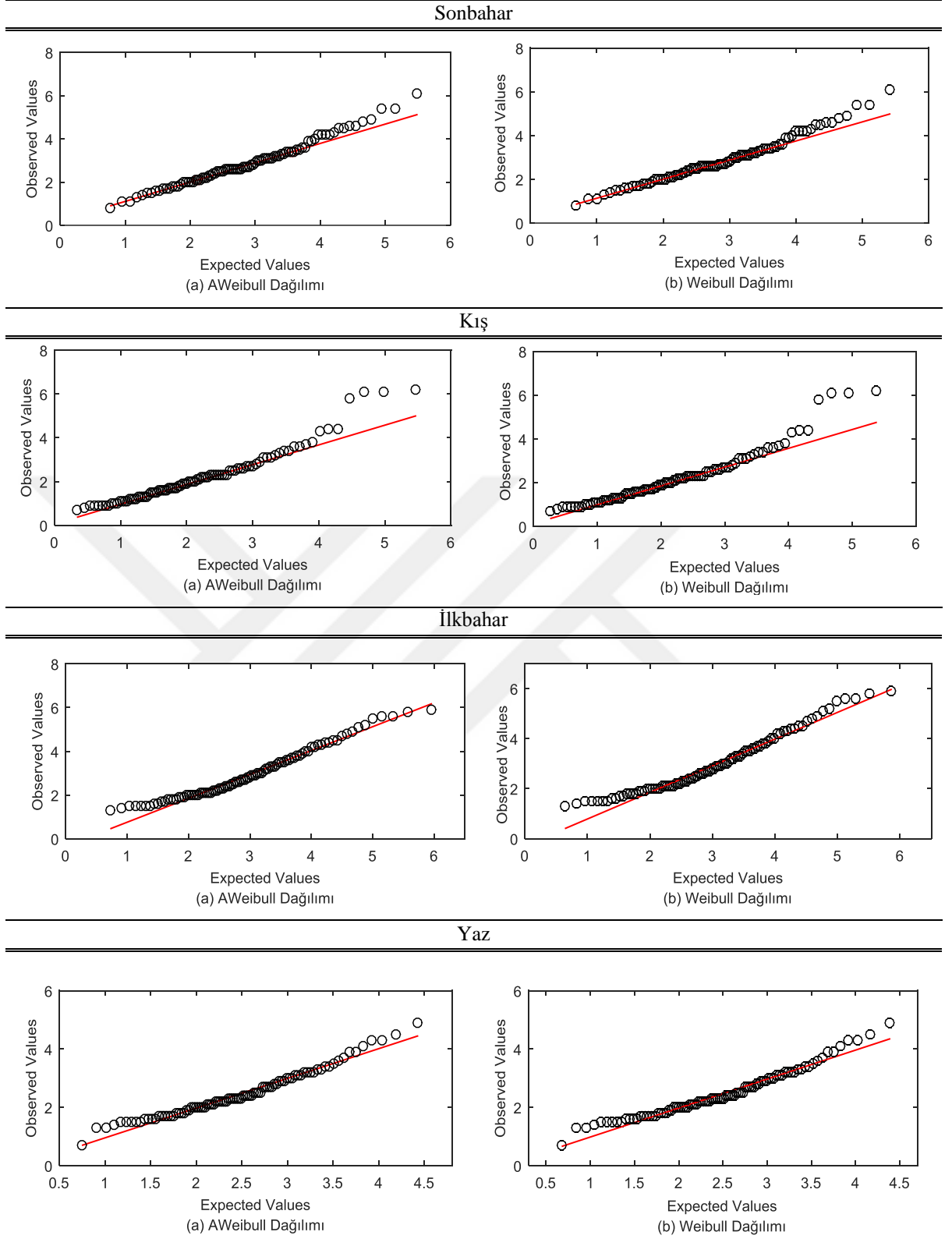
**Tablo 7.2.** Her bir veri seti için ağırlıklı Weibull ve Weibull dağılımlarına ilişkin parametre tahminleri,  $RMSE$ ,  $R^2$  ve  $KS$  değerleri

	Sonbahar					Kış				
	$\hat{k}$	$\hat{\lambda}$	$RMSE$	$R^2$	$KS_n$	$\hat{k}$	$\hat{\lambda}$	$RMSE$	$R^2$	$KS_n$
AW	1.5202	1.7007	0.0275	0.9796	0.1009	2.3772	2.6977	0.0218	0.9895	0.0806
W	1.9908	2.5174	0.0331	0.9693	0.1150	2.9005	3.2211	0.0254	0.9855	0.0885
	İlkbahar					Yaz				
	$\hat{k}$	$\hat{\lambda}$	$RMSE$	$R^2$	$KS_n$	$\hat{k}$	$\hat{\lambda}$	$RMSE$	$R^2$	$KS_n$
AW	2.1976	2.7400	0.0307	0.9792	0.0911	2.7116	2.3869	0.0247	0.9841	0.1026
W	2.7262	3.3639	0.0339	0.9743	0.0953	3.2302	2.7454	0.0274	0.9801	0.1102

$KS$  test sonucuna göre varsayılan her iki dağılımında veriye uygunluk gösterdiği belirlenmiştir ancak, hangi dağılımın veriyi daha iyi modellediğini belirlemek için  $RMSE$  ve  $R^2$  kriterlerinin hesaplanan değerlerine bakılmıştır.  $RMSE$  kriterine göre, en küçük  $RMSE$  değerine sahip dağılımın veriyi diğer varsayılan dağılımlara göre daha iyi modellediği ya da veriye daha iyi uyum sağladığı söylenir.  $R^2$  kriterine göre ise, en büyük  $R^2$  değerine sahip olan dağılımın veriyi daha iyi modellediği sonucuna varılır. Buna göre, Tablo 8.2 incelendiğinde hem  $RMSE$  hem de  $R^2$  kriterlerine göre, ağırlıklı Weibull dağılımının her bir veri setini Weibull dağılımına göre daha iyi modellediği söylenebilir. Bu çalışmada kullanılan  $KS_t$  ( $KS$  testi tablo değeri) değerleri  $KS_t = \frac{1.36}{\sqrt{n}}$ , ( $\alpha = 0.05$ ) formülüne göre hesaplanmıştır ve  $n = 89$  için  $KS_t = 0.144$ ,  $n = 91$  için  $KS_t = 0.142$  ve  $n = 92$  için  $KS_t = 0.141$  olarak elde edilmiştir.

Son olarak verilere ait histogramların üstüne uygun varsayılan teorik dağılımlara ilişkin  $oyf$  grafikleri çizdirilerek veriler ile teorik  $oyf$ 'lerin uyumları görsel olarak belirlenmeye çalışılmıştır. Elde edilen grafikler Şekil 7.2'de her bir rüzgar hızı verisi için ayrı ayrı verilmiştir.

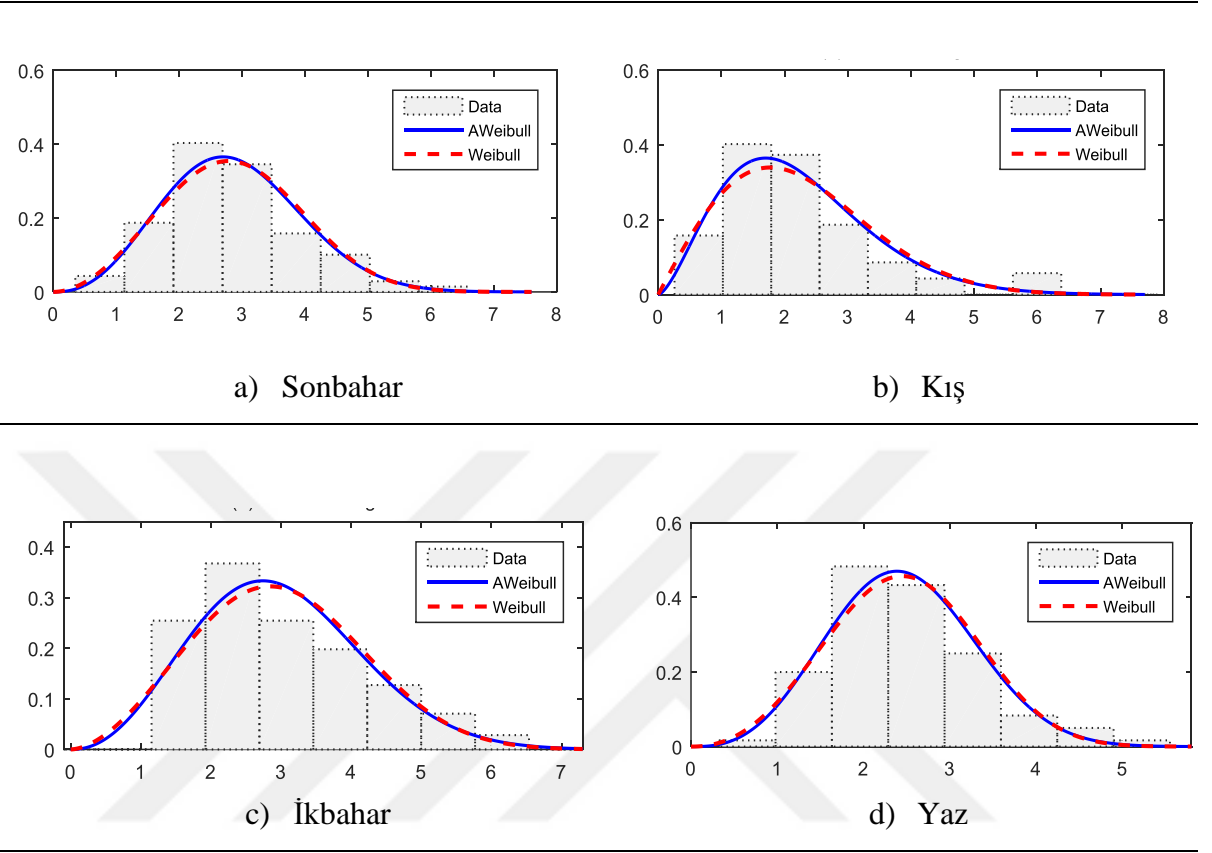




**Şekil 7. 1.** Her bir mevsim verisine ait ağırlıklı Weibull (AWeibull) dağılımı (a) ve Weibull dağılımı (b) için Q-Q grafikleri.

Şekil 7.2’de verilen grafikler incelendiğinde her bir mevsim için günlük ortalama rüzgar hızı verilerini ağırlıklı Weibull (AWeibull) dağılımının Weibull dağılımına göre daha iyi

modellediği görülmüştür. Bu elde edilen sonuçların Tablo 7.2’de verilen teorik sonuçlar ile uyumlu olduğu ifade edilebilir.



**Şekil 7. 2.** Her bir mevsim verisi için uygunluk grafikleri

## 8. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında ağırlıklı Weibull dağılımı ele alınmıştır. Bu dağılımın moment çıkaran fonksiyonu, bozulma oranı fonksiyonu, güvenilirlik fonksiyonu, Fisher bilgi matrisi gibi bazı temel istatistiksel özellikleri incelenmiştir. Ağırlıklı Weibull dağılımının diğer dağılımlar ile olan ilişkileri araştırılmıştır. *EÇO*, *EKK* ve *AEKK* yöntemleri kullanılarak dağılımın şekil ve ölçek parametrelerinin tahmin edicileri elde edilmiştir. Monte-Carlo simülasyonu ile bu tahmin edicilerin etkinlikleri karşılaştırılmıştır. Bu elde simülasyon sonuçlarına göre *EÇO* tahmin edicilerinin performansının diğer tahmin edicilere göre daha iyi olduğu gözlenmiştir.

Bulgular bölümünde, 01.09-31.12 2018 ve 01.01-31.08 2019 dönemlerine ait Sinop ili mevsimlik günlük ortalama rüzgar hızı verileri kullanılarak önerilen dağılımın uygulanabilirliği araştırılmıştır. Sonbahar, kış, ilkbahar ve yaz mevsimi verileri için ayrı ayrı analizler yapılmış ve ağırlıklı Weibull dağılımının veri modelleme performansının Weibull dağılımına göre daha iyi olduğu hem istatistiksel analiz yöntemleri hem de grafiksel yöntemlerle tespit edilmiştir. Bu nedenle ağırlıklı Weibull dağılımı rüzgar hızı ile ilgili çalışmalarda ve diğer alanlarda istatistiksel veri analizi için Weibull dağılımına alternatif bir model olarak düşünülebilir.

Ağırlıklı Weibull dağılımının oluşturulmasında kullanılan ağırlık fonksiyonunun farklı versiyonlarının kullanımı sonucunda elde edilen yeni dağılımların, istatistiksel veri analizi açısından etkinliğinin incelenmesinin gelecekte yapılacak bir çalışma olarak planlanmasının bu alana önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

## 9. KAYNAKLAR

- Akpınar, S. and Akpınar, E.K. 2009. Estimation of wind energy potential using finite mixture distribution models. *Energy Conversion and Management*, 50: 877–84.
- Akdag, S. and Guler, O. 2009. Calculation of wind energy potential and economic analysis by using Weibull distribution-a case study from Turkey. Part 1: Determination of Weibull Parameters. *Energy Sources Part B*, 4(1): 1–8.
- Abernethy, R.B. 2004. *The new Weibull handbook*. Robert B. Abernethy, USA, p. 334.
- Abramowitz, M. and Stegun, I.A. 1972. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*. Dover Publications Inc, New York, p. 1046.
- Blumenthal, S. 1967. Proportional sampling in life length studies. *Technometrics*, 9: 205–218.
- Balakrishnan, N. and Kocherlakota, S. 1985. On the double weibull distribution: order statistics and estimation, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistic*, 47(2): 161–178.
- Barrett, J.P. 1974. The coefficient of determination-some limitations. *American Statistician*, 2: 19–20.
- Bartlett, M. S. 1969. Distributions associated with cell populations. *Biometrika*, 56: 391–400.
- Cohen, A.C. 1973. The reflected Weibull distribution. *Technometrics*, 15 (4): 867–873.
- Cook, R.C. and Martin, F.B. 1974. A model for quadrat sampling with visibility bias. *Journal of the American Statistical Association*, 69: 345–349.
- Cox, D.R. 1962. *Renewal Theory*. Methuen and Company Limited, London, p. 142.
- Das, K.K. and Roy, T.D. 2011. On some length-biased weighted Weibull distribution. *Advances in Applied Science Research*, 2(5): 465-475.
- Elitok, Ö. 2006. Weibull dağılımı ve uygulamaları. Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırıkkale, 59 s.
- Fisher, R.A. 1934. The effects of methods of ascertainment upon the estimation of frequencies. *Annals of Eugenics*, 6: 13–25.
- Frechet, M. 1927. Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, 6: 93–116.
- Glaser, R.E. 1980. Bathtub and related failure rate characterization. *Journal of the American Statistical Association*, 75: 667–672.
- Gumbel, E.J. 1958. *Statistics of extremes*. Columbia University Press, New York, p. 201.

- Gupta, R.D. and Kundu, D. 2001. Exponentiated exponential family: an alternative to Gamma and Weibull distributions. *Biometrical Journal: Journal of Mathematical Methods in Biosciences*, 43(1): 117-130.
- Gurvich, M.R., Dibenedetto, A.T. and Ranade, S.V. 1997. A new statistical distribution for characterizing the random strength of brittle materials. *Journal of Materials Science*, 32: 2559–2564.
- Hagiwara, Y. 1974. Probability of earthquake occurrence as obtained from a Weibull distribution analysis of crustal strain. *Tectonophysics*, 23: 323–318.
- Haldane, J.B.S. 1938. The estimation of the frequency of recessive conditions in man. *Annals of Eugenics*, 8: 255–262.
- Herd, G.R. 1960. Estimation of reliability from incomplete data. *Proceedings of the Sixth National Symposium on Reliability and Quality Control*, 202–217.
- Jain, K., Singh, H. and Bagai, I. 1989. Relations for reliability measures of weighted distributions. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 18(12): 4393–4412.
- Johnson, L.G. 1964. *The statistical treatment of fatigue experiments*. Elsevier, New York, p. 37.
- Jöreskog, K.G. and Sörbom, D. 1981. LISREL V: Analysis of linear structural relationships by maximum likelihood and least squares methods. *Research Report 81–8*, University of Uppsala, Department of Statistics, Uppsala, Sweden.
- Kemp, C.D. 1973. An elementary ambiguity in accident theory. *Accident Analysis and Prevention*, 5(4): 371–373.
- Kies, J. A. 1958. *The Strength of Glass*. Naval Research Laboratory, Washington DC (No. 5093). Report.
- Kolmogorov, A. (1933). Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Inst. Ital. Attuari, Giorn.*, 4: 83–91.
- Lai, C.D. 2014. *Generalized Weibull distributions*. Springer, New Zealand, p. 117.
- Lawless, J.F. 2003. *Statistical models and methods for lifetime data*. Wiley, New York, p. 628.
- Marshall, A.W. and Olkin, I. 1997. A new method of adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and Weibull families. *Biometrika*, 84 (3): 641–652.
- Mudholkar, G.S. and Srivastava, D.K. 1993. Exponentiated Weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE Transactions on Reliability*, 42 (2): 299–302.

- Nash, J.E. and Sutcliffe, J.V. 1970. River flow forecasting through conceptual models part I—A discussion of principles. *Journal of Hydrology*, 10: 282–290.
- Neel, J.V. and Schull, W.J. 1954. *Human Heredity*. University of Chicago Press, Chicago, p. 280.
- Patil, G.P. and Ord, J.K. 1976. On size-biased sampling and related form-invariant Weighted distributions. *Industrial Journal of Statistics*, 38(1): 48–61.
- Patil, G.P. and Rao, C.R. 1977. The weighted distributions: A survey of their applications. *Applications of Statistics*, 383: 383–405.
- Patil, G.P. and Rao, C.R. 1978. Weighted distributions and size-biased sampling with applications to wildlife populatopns and human families. *Biometrics*, 34(2): 179–189.
- Phani, K.K. 1987. A new modified Weibull distribution function. *Journal of the American Ceramic Society*, 70(8): 182–184.
- Sebah, P. and Gourdon, X. 2002. [www.csie.ntu.edu.tw/~b89089/link/gammaFunction.pdf](http://www.csie.ntu.edu.tw/~b89089/link/gammaFunction.pdf) (Erişim tarihi: 17.03.2017).
- Rinne, H. 2008. *The Weibull distribution a handbook*. Taylor and Francis, USA, p. 782.
- Rao, C.R. 1965. On discrete distributions arising out of methods of ascertainment. In *Classical and Contagious Discrete Distributions*, G. P. Patil (ed.). Statistical Publishing Society, Calcutta, 320–332.
- Rao, C.R. 1977. A natural example of a weighted binomial distribution. *American Statistician*, 31(1): 24–26.
- Rao, C.R. 1985. Weighted distributions arising out of methods of ascertainment: What population does a sample represent?. In: *A celebration of statistics*. Springer, New York, p. 543-569.
- Rosin, P. and Rammler, E. 1933. The laws governing the fineness of powdered coal. *Journal of the Institute of Fuel*, 7: 29–36.
- Saygı, H. 2007. Su ürünleri araştırmalarında yaşam modelleri ve kullanılan istatistiksel yöntemler. Doktora Tezi, Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, 208 s.
- Scheaffer, R. L. 1972. Size-biased sampling. *Technometrics*, 1: 635–644.
- Simon, R. 1980. Length biased sampling in etiological studies. *Amer. J. Epidemiology*, 11: 444–452.
- Shu, Z.R., Li, Q.S. and Chan, P.W. 2015. Statistical analysis of wind characteristics and wind energy potential in Hong Kong. *Energy Conversion and Management*, 101: 644–57.

- Smirnov, N.V. 1939. On the estimation of the discrepancy between empirical curves of distribution for two independent samples. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2(2): 3-14.
- Stacy, E.W. 1962. A Generalization of the Gamma distribution. *Annals of Mathematical Statistics*, 33(3): 1187–1192.
- Stapelberg, R.F. 2009. *Handbook of reliability, availability, maintainability and safety in engineering design*. Springer, London, p. 827.
- Swain, J., Venkatraman, S. and Wilson, J. 1988. Least-squares estimation of distribution function in Johnson's translation system. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 29: 271–297.
- Weibull, W. 1939. A statistical theory of the strength of material, Report No: 151. *Ingeniors Vetenskaps Akademiens Handligar*.
- Weibull, W. 1951. A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, 18: 293–297.
- Willmott, C.J. 1982. Some comments on the evaluation of model performance. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 63: 1309–1313.
- Takahasi, K. 1969. On the estimation of the population mean based on ordered samples from an equicorrelated multivariate distribution. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 21(1): 249–255.
- Zelen, M. 1974. Problems in cell kinetics and the early detection of disease. *Reliability and Biometry*, 56(3): 701–726.

## 10. EKLER

### EK 1 Weibull Dağılımı için Fisher Bilgi Matrisindeki Bazı Beklenen Değer Hesapları

i)  $E(x^k \ln x)$  'in hesaplanması:

Eşitlik (4.16)'da yer alan

$$E(x^k \ln x) = \int_0^{\infty} x^k \ln x \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} dx$$

ile verilen integralin çözümü için eşitlik (4.6)'da verilen değişken dönüşümü uygulanırsa

$$E(x^k \ln x) = \int_0^{\infty} \lambda^k t \ln(\lambda t^{\frac{1}{k}}) e^{-t} dt$$

olur ve

$$\begin{aligned} E(x^k \ln x) &= \int_0^{\infty} \lambda^k t [\ln \lambda + \frac{1}{k} \ln t] e^{-t} dt \\ &= \lambda^k \ln \lambda \int_0^{\infty} t e^{-t} dt + \lambda^k \frac{1}{k} \int_0^{\infty} t \ln t e^{-t} dt \\ &= \lambda^k \ln \lambda \Gamma(2) + \frac{\lambda^k}{k} \Gamma'(2.2) \\ &= \lambda^k \ln \lambda + \frac{\lambda^k}{k} (1 - \gamma) \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.1})$$

olarak elde edilir. Burada,  $\gamma$  Euler sabitidir ve

$$\gamma = - \int_0^{\infty} \ln t e^{-t} dt$$

ile hesaplanır ve  $\gamma \cong 0.5772$ 'dir. Ayrıca Gamma fonksiyonunun 1. dereceden türevi

$$\Gamma'(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t dt$$

dir (Abramowitz ve Stegun, 1972). Özel olarak bu integralde  $x = 1$  alındığında

$$\Gamma'(1) = -\gamma$$



olur.

ii)  $E(x^k \ln^2 x)$  hesaplanması:

Eşitlik (4.16)'da bulunan  $E(x^k \ln^2 x)$  terimi

$$E(x^k \ln^2 x) = \int_0^{\infty} x^k (\ln x)^2 f(x) dx$$

den elde edilir. Bu integralin çözümü için eşitlik (4.6)'da verilen değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} E(x^k \ln^2 x) &= \int_0^{\infty} \lambda^k t [\ln \lambda + \ln t^{\frac{1}{k}}]^2 e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \lambda^k t [(\ln \lambda)^2 + 2 \ln \lambda \ln t^{\frac{1}{k}} + (\ln t^{\frac{1}{k}})^2] e^{-t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \lambda^k t (\ln \lambda)^2 e^{-t} dt + \int_0^{\infty} \lambda^k t 2 \ln \lambda \ln t^{\frac{1}{k}} e^{-t} dt + \int_0^{\infty} \lambda^k t (\ln t^{\frac{1}{k}})^2 e^{-t} dt \\ &= \lambda^k (\ln \lambda)^2 \Gamma(2) + \lambda^k 2 \ln \lambda \frac{1}{k} \Gamma'(2) + \lambda^k \frac{1}{k^2} \Gamma''(2) \end{aligned} \quad (\text{Ek 1.2})$$

olarak elde edilir. Burada,

$$\Gamma'(2) = \int_0^{\infty} t \ln t e^{-t} dt \quad (\text{Ek 1.3})$$

$$\Gamma''(2) = \int_0^{\infty} t \ln^2 t e^{-t} dt \quad (\text{Ek 1.4})$$

dir. (Ek 1.3) ve (Ek 1.4) eşitlikleri gamma fonksiyonunun logaritmik türev fonksiyonları olan digamma ve poligamma fonksiyonları yardımı ile hesaplanabilir (Sebah ve Gourdon, 2002). Bu fonksiyonlar sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Psi(x) = \frac{d \ln \Gamma(x)}{dx} = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \sum_{p=1}^{x-1} \frac{1}{p}, \quad x > 0 \quad (\text{Ek 1.5})$$

$$\Psi^n(x) = \frac{d^n \Psi(x)}{dx^n} = \frac{\partial^{n+1} \ln \Gamma(x)}{\partial x^{n+1}}, \quad x > 0 \quad (\text{Ek 1.6})$$

$\Gamma'(2)$  çözümü için eşitlik (Ek 1.5)'de  $x = 2$  yazıldığında

$$\Psi(2) = \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} = -\gamma + 1$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned}\Gamma'(2) &= \Gamma(2)(1 - \gamma) \\ &= 1 - \gamma\end{aligned}\tag{Ek 1.7}$$

şeklinde elde edilir.  $\Gamma''(2)$ 'nin çözümü için eşitlik (Ek 1.6)'da  $n = 1$  yazıldığında

$$\begin{aligned}\Psi^1(x) &= \frac{d\Psi(x)}{dx} = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p+x-1)^2} \\ &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right] \\ &= \frac{d^2 \ln \Gamma(x)}{dx^2} \\ &= \frac{\Gamma''(x)\Gamma(x) - \Gamma'(x)\Gamma'(x)}{[\Gamma(x)]^2} \\ &= \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - \left[ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right]^2\end{aligned}$$

olur. Aynı zamanda

$$\Psi^1(x) = \frac{\Gamma''(x)}{\Gamma(x)} - \left[ \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right]^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p+x-1)^2}\tag{Ek 1.8}$$

dir. Eşitlik (Ek 1.8)'de  $x = 2$  yazıldığında

$$\Psi^1(2) = \frac{\Gamma''(2)}{\Gamma(2)} - \left[ \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} \right]^2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(p+1)^2}\tag{Ek 1.9}$$

olur. Eşitlik (Ek 1.9)

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

olduğundan

$$\Psi^1(2) = \frac{\Gamma''(2)}{\Gamma(2)} - \left[ \frac{\Gamma'(2)}{\Gamma(2)} \right]^2 = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

dir. Eşitlik (Ek 1.7)'in kullanılması ile

$$\Gamma'''(2) = \frac{\pi^2}{6} - 1 + (1 - \gamma)^2 \quad (\text{Ek 1.10})$$

olarak elde edilir.

EK 1'de elde edilen eşitlikler (Ek 1.1), (Ek 1.2), (Ek 1.7) ve (Ek 1.10)'un (4.16)'da yerine yazılması sonucunda

$$E \left( \frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial k^2} \right) = -1,82368 \frac{n}{k^2} \quad (\text{Ek 1.11})$$

olarak elde edilir. Ayrıca eşitlik (Ek 1.1)'in eşitlik (4.18)'de yazılması ile

$$E \left( \frac{\partial^2 \ln L(k, \lambda | \underline{x})}{\partial \lambda \partial k} \right) = \frac{n}{\lambda} (1 - \gamma) = 0,422785 \frac{n}{\lambda} \quad (\text{Ek 1.12})$$

olur.

## EK 2 Ağırlıklı Weibull Dağılımı için Fisher Bilgi Matrisindeki Bazı Beklenen Değer Hesapları

i)  $E(x^k \ln x)$  'in hesaplanması:

Eşitlik (5.13)'de yer alan

$$E(x^k \ln x) = \int_0^{\infty} x^k \ln x \frac{kx^k e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}}{\lambda^{k+1} \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} dx$$

ile verilen integralin çözümü için eşitlik (5.2)'de verilen değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} E(x^k \ln x) &= \frac{\lambda^k \ln \lambda \Gamma\left(\frac{1}{k}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} + \frac{\lambda^k \Gamma'\left(\frac{1}{k}+2\right)}{k \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} \\ &= \lambda^k \ln \lambda \left(\frac{1}{k} + 1\right) + \left(\frac{1}{k} + 1\right) \frac{\lambda^k \Gamma'\left(\frac{1}{k}+2\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{k}+2\right)} \\ &= \lambda^k \left(\frac{1}{k} + 1\right) \left[ \ln \lambda + \frac{1}{k} \Psi\left(\frac{1}{k} + 2\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{Ek 2.1})$$

olarak elde edilir.

ii)  $E(x^k \ln^2 x)$  hesaplanması:

Eşitlik (5.13)'de bulunan  $E(x^k \ln^2 x)$  terimi

$$E(x^k \ln^2 x) = \int_0^{\infty} x^k (\ln x)^2 \frac{kx^k e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}}{\lambda^{k+1} \Gamma\left(\frac{1}{k}+1\right)} dx$$

den elde edilir. Bu integralin çözümü için eşitlik (5.2)'de verilen değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned} E(x^k \ln^2 x) &= \lambda^k \left(\frac{1}{k} + 1\right) (\ln \lambda)^2 + \frac{2\lambda^k}{k} \left(\frac{1}{k} + 1\right) \ln \lambda \Psi\left(\frac{1}{k} + 2\right) + \frac{\lambda^k}{k^2} \left(\frac{1}{k} + 1\right) \left[ \Psi'\left(\frac{1}{k} + 2\right) \right] \\ &\quad + \Psi^2\left(\frac{1}{k} + 2\right) \end{aligned} \quad (\text{Ek 2.2})$$

olur.

## ÖZGEÇMİŞ

---

### Kişisel Bilgiler

<b>Ad Soyad</b>	Firdevs YILMAZ
<b>Doğum Tarihi</b>	30.12.1991
<b>Doğum Yeri</b>	İstanbul \ Beykoz
<b>E-posta Adresi</b>	<a href="mailto:firdevs.ylmz91@gmail.com">firdevs.ylmz91@gmail.com</a>

### Eğitim Bilgileri

---

Lisans	Sinop Üniversitesi, İstatistik Bölümü (2011-2015)
Yüksek Lisans	Sinop Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2015-...)

### İş Deneyimi

---

Ekim 2015-2018	Sinop Boyabat MEB Ücretli Öğretmenlik
Kasım 2018-2019	Sinop Boyabat Genç Kazanım Eğitim Kurumları Ortaöğretim Matematik Öğretmeni

### Yayımlar, Çalışmalar

---