T.C.

SİNOP ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

AĞIRLIKLI DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARI VE BAZI UYGULAMALARI

YAZAR

CİHAN ÜNAL

DANIŞMAN

DOÇ. DR. İSMAİL AYDIN

SİNOP – 2019

TEZ KABUL

Cihan ÜNAL tarafından hazırlanan "Ağırlıklı Değişken Üslü Sobolev Uzayları ve Bazı Uygulamaları" başlıklı bu çalışma, 15.11.2019 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak, jürimiz tarafından **DOKTORA tezi** olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Ahmet Turan Gürkanlı
Arel Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye Prof. Dr. Ramazan Akgün
Balıkesir Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye Doç. Dr. Öznur Kulak
Giresun Üniversitesi / Görele Uygulamalı Bilimler Yüksekokulu

Üye Doç. Dr. Fadime Dirik
Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi

Üye Doç. Dr. İsmail Aydın
Sinop Üniversitesi / Fen-Edebiyat Fakültesi

ETİK BEYANI

Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında; tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi, tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu, tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı, bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Cihan ÜNAL

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER ve KISALTMALAR LİSTESİ

$\|A\|$ veya $\mu(A)$	: A kümesinin Lebesgue ölçümü
$C(\mathbb{R}^d)$	: $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonların uzayı
$C^\infty(\mathbb{R}^d)$	: $\mathbb{R}^d$ üzerinde her mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların uzayı
$C_c(\mathbb{R}^d)$	: $\mathbb{R}^d$ üzerinde sürekli ve kompakt destekli fonksiyonları uzayı
$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$	: $\mathbb{R}^d$ üzerinde her mertebeden sürekli türevlere sahip ve kompakt destekli fonksiyonların uzayı
L_{loc}^1	: Yerel integrallenebilen fonksiyonların uzayı
f^*	: f fonksiyonunun kanonik temsilcisi
ϑ	: Ağırlık fonksiyonu
$L_\vartheta^{p(.)}$	: Ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayı
$\\|\cdot\\|_{p(.),\vartheta}$	: $L_\vartheta^{p(.)}$ uzayının Luxemburg normu
$W_\vartheta^{k,p(.)}$	: Ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayları
$\\|\cdot\\|_{k,p(.),\vartheta}$	: $W_\vartheta^{k,p(.)}$ uzayının normu
$\overline{A}$	: A kümesinin kapanışı
$A\hookrightarrow B$	: A uzayının B uzayına sürekli olarak gömülmesi
$A\hookrightarrow\hookrightarrow B$	: A uzayının B uzayına kompakt olarak gömülmesi
$f \rightharpoonup g$	: f fonksiyonunun g fonksiyonuna zayıf yakınsak olması
$\operatorname{diam}\Omega$	: Ω kümesinin çapı
$B(x,r)$	: x merkezli r yarıçaplı açık yuvar

ÖZET

AĞIRLIKLI DEĞİŞKEN ÜSLÜ SOBOLEV UZAYLARI VE BAZI UYGULAMALARI

Bu tez çalışması üç temel kısımdan oluşmaktadır. İlk bölüm giriş niteliğinde olup, bu bölümde değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının tarihçesi ve uygulama alanları ele alınmıştır. Tezde kullanılan temel tanımlara ve teoremlere ise ikinci bölümde yer verilmiştir.

Bulgular bölümünün birinci kısmında kapasite kavramından bahsedilmiş olup özel olarak ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzaylarında Sobolev $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesinin yerine düşünülebilecek olan rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesi tanımlanıp bazı önemli özellikleri incelenmiştir. İkinci kısımda ise sıfır sınır değerli ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayları $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ tanıtılmış ve bazı temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, bu uzaylarda Poincaré eşitsizliği ispatlanmıştır. Yine, $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayının elemanlarından oluşan yeni bir kapasite tanımlanıp Sobolev $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesi ile arasındaki bazı eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü kısımda, rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesi yardımıyla tanımlanan $\left(p(.),\vartheta\right)$-fine (iyi) açık kümeler incelenmiştir. Ayrıca, bu kümelerden üretilen ve Öklid topolojisinden daha ince olan fine (iyi) topoloji, ağırlıklı değişken üslü duruma genelleştirilmiştir. Dördüncü kısımda ise, $L_{\vartheta_1}^{r}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ağırlıklı klasik Lebesgue uzayı ile $W_{\vartheta_2}^{k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayının arakesiti uygun bir normla donatılmış, bu uzayın bazı temel özellikleri incelenmiş ve bazı sürekli-kompakt gömülmeleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayları, Rölatif kapasite, İyi topoloji, Kompakt gömülme.

ABSTRACT

WEIGHTED VARIABLE EXPONENT SOBOLEV SPACES AND SOME APPLICATIONS

This thesis study consists of three basic sections. The first part of it has the characteristics of introduction, in this section the history of weighted variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces and some applications. The basic definitions and theorems are given in second section.

The notion of capacity has mentioned in the first part of findings section, in particular, relative $\left(p(.),\vartheta\right)$-capacity is presented for an alternative of Sobolev $\left(p(.),\vartheta\right)$-capacity in weighted variable exponent Sobolev spaces. In the second part, weighted variable exponent Sobolev spaces with zero boundary values $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ are introduced and investigated their some basic properties. Also, the Poincaré inequality is proved in these spaces. In addition, a new capacity in $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ is defined and given some inequalities between it and Sobolev $\left(p(.),\vartheta\right)$-capacity. In the third part, $\left(p(.),\vartheta\right)$-finely open sets defined by the relative $\left(p(.),\vartheta\right)$-capacity are investigated. Moreover, the fine topology, which is generated these sets and is finer than Euclidean topology, is extented to weighted variable exponent case. In the fourth part, an intersection space between weighted classical Lebesgue spaces $L_{\vartheta_1}^{r}\left(\mathbb{R}^d\right)$ and weighted variable exponent Sobolev spaces $W_{\vartheta_2}^{k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ has revealed with a suitable norm. Moreover, some properties and continuous-compact embeddings of this space are examined.

Key Words: Weighted variable exponent Sobolev spaces, Relative capacity, Fine topology, Compact embedding.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının yürütülmesi sırasında tecrübelerini aktarıp, yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. İsmail AYDIN'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Hayatım boyunca karşılaştığım her türlü zorlukta yanımda olan, çalışmalarım süresince sabırları ve destekleriyle bana her zaman güç veren başta annem Zennure ÜNAL, babam Şemsettin ÜNAL ve sevgili eşim Mine ÜNAL olmak üzere çok değerli aileme sonsuz teşekkürler.

1. GİRİŞ

Potansiyel teorinin tarihi 17-inci yüzyıla kadar uzanmaktadır. Teorinin gelişmesinde Newton, Euler, Laplace, Lagrange, Fourier, Green, Gauss, Poisson, Dirichlet, Riemann, Weierstrass, Poincaré gibi önemli isimlerin katkıları vardır. Potansiyel teorinin tarihi için (Kellogg, 1929) ve bu çalışmanın kaynakları incelenebilir.

Değişken üslü Lebesgue uzayları literatürde ilk olarak (Orlicz, 1931) tarafından tanımlanmıştır. Orlicz kendi adını taşıyan L^{ϕ} Orlicz uzayları teorisini geliştirmiştir. Orlicz uzaylarının bir genelleştirilmesi olan modüler uzaylar düzenli olarak ilk kez (Nakano 1950), (Nakano, 1951) tarafından çalışılmıştır. Fakat buna rağmen, modüler uzaylar, Orlicz uzayları kadar ilgi görmedi. 1970 ve 1980'li yıllarda, modüler fonksiyon uzayları, (Hudzik, 1976), (Hudzik, 1983), (Musielak, 1983) başta olmak üzere birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Ayrıca, (Sharapudinov, 1979) çalışmasında $L^{p(.)}([0,1])$ uzayı üzerindeki topoloji üzerine bazı incelemeler yapılmıştır.

Değişken üslü Lebesgue uzayları ile klasik Lebesgue uzaylarının ortak birçok özellikleri olmasına rağmen, ötelemelerin invaryantlığı, ötelemelerin sürekliliği ve girişim gibi önemli özellikler L^p uzayında sağlanıyorken $L^{p(.)}$ uzayında sağlanmaz (Kováčik ve Rákosník, 1991), (Samko, 1998). Ayrıca, (Diening, 2004a) çalışmasında sınırlı bölgede tanımlı $L^{p(.)}$ uzayında maksimal operatörün sınırlılığı ispatlanmıştır. Bu çalışmadan sonra bu uzaylara olan ilgi artmış ve günümüze kadar çeşitli konularda makaleler yapılmıştır. 1800'lü yıllarda bilim dünyasındaki en önemli problemlerden birisi Laplace denklemleri ve eliptik diferansiyel denklemler için sınır-değer problemlerinin çözümleriydi. Sobolev, bu problemin temel zorluğunun üstesinden gelmiş ve 1938 yılında yaptığı çalışmayla Sobolev uzayını tanıtmıştır (Sobolev, 1938). Ayrıca, bu uzay Morrey, Besov, Meyers, Hudzik gibi birçok matematikçi tarafından da çalışılmıştır.

Literatürde değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarındaki en önemli çalışma 1991 yılında Kováčik ve Rákosník tarafından yapılmıştır (Kováčik ve Rákosník, 1991). Bu çalışmada, en genel durumda değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının birçok temel özellikleri verilmiştir.

Değişken üslü fonksiyon uzayları teorisi son yıllarda, elastik mekanik, akışkanlar dinamiği, varyasyonel hesap ve bazı özel diferansiyel denklemler ile ilgili problemler üzerine çalışılmıştır. Elektroreolojik akışkanlar (EA) ile ilgili ilk önemli bilgiler (Winslow, 1949) çalışmasında ifade edilmiştir. (Růžička, 2000) katsayıları değişken büyüme oranlı doğrusal olmayan sistem içeren EA için matematiksel model üzerinde çalışmıştır. EA, robot bilimi ve uzay teknolojisinde kullanılmakta olup deneysel araştırmalar Nasa laboratuarlarında yapılmaktadır. Ayrıca EA, kumaşın içine derinlemesine işleme ve kumaşın normal durumundan çok daha dayanıklı hale çok hızlı bir şekilde dönüşmesi özelliklerinden faydalanarak, günümüzdekilerden çok daha hafif olan kurşun geçirmez yelekler üretilmesi amaçlanmaktadır.

Sabit üsse göre düşünüldüğünde değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarında çalışmak teorisi ve uygulamaları açısından bazı zorluklarına rağmen birçok fayda sağlamaktadır. Örneğin; EA belirli bir manyetik alanla karşılaştıklarında bu akışkanların parçacıkları hareket sırasında belli oranda kütle kaybeder. p kuvveti sabit olduğunda $x \in \mathbb{R}^d$ için farklı noktalardaki kütle kaybının eşit olduğunu kabul etme zorunluluğu görülür ve bu durumda farklı kütle kayıpları hesaba katılamamaktadır. Bu ise fizik, mekanik, mühendislik ve EA ile ilgili problemlere karşılık gelen matematiksel modellerin güvenilirliğinde problemlere yol açar. Bu sorunu ortadan kaldırmak için p yerine $p(x)$ şeklinde ölçülebilir pozitif reel değerli bir fonksiyon seçilebilir ve farklı kütle kayıpları hesaplanabilir. Dolayısıyla, EA'dan kaynaklanan standart olmayan büyüme koşullu doğrusal olmayan eliptik denklemler için matematiksel modeller ancak değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarında ele alınabilir.

Ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayları, kısmi türevli denklemlerin çözümü ile ilgili çalışmalarda önemli bir yer alır. Çözümler, Sobolev uzaylarının bir elemanı olup, kısmi türevli diferansiyel denklemler özel olarak eliptik ve parabolik diferansiyel denklemler; uygulamalı matematikte, fizikte ve mühendisliğin birçok alanında önemli rol oynamaktadır.

Kapasite kavramı potansiyel teorideki ölçüm kavramıyla bağlantılıdır. Ölçümle birçok benzer özelliğe sahiptir. Bu tez çalışmasının amaçlarından biri de rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasiteyi tanımlayarak ölçüme bir alternatif sunmaktır. Sabit üslü uzaylar için Sobolev kapasitesi birçok yazar tarafından çalışılmıştır (Evans ve Gariepy, 1992), (Maz´ja, 1985). Ayrıca, (Kilpeläinen, 1994) çalışmasında ağırlıklı Sobolev kapasiteyi tanıtmış ve (Harjulehto ve ark., 2003b) çalışmasında ise bu kapasitenin değişken üslü durumu $W^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayında ele alınmıştır. Ayrıca, (Aydın, 2012b) çalışmasında değişken üslü Sobolev kapasite ağırlıklı değişken üslü duruma genellenmiştir.

Rölatif kapasite, $\mathbb{R}^d$ üzerinde doğrusal olmayan potansiyel teoride de sıklıkla kullanılır. Herhangi bir $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ açık bir küme ve $K \subset \Omega$ kompakt kümesi alınsın. Bu takdirde rölatif p-kapasite

$$\mathrm{cap}_p(K,\Omega) = \inf_f \int_\Omega |\nabla f(x)|^p \, dx$$

olarak tanımlanır. Buradaki infimum K kümesinde $f \geq 1$ olan düzgün ve sıfır sınır değerli fonksiyonlar üzerinden alınmıştır. Ayrıca, kapasite için kabul edilebilir fonksiyonların kümesi olarak, K kümesinde $f \geq 1$ olan sürekli birinci mertebeden Sobolev fonksiyonları da alınabilir. Rölatif kapasite ile ilgili detaylı bilgiler için (Heinonen ve ark., 1993) çalışması incelenebilir. (Harjulehto ve ark., 2007) çalışmasında da bir rölatif kapasite tanımlanmıştır. Ayrıca, tanımlanan rölatif kapasitenin özellikleri incelenmiş ve Sobolev kapasitesi ile karşılaştırması verilmiştir.

(Acerbi ve Mingione, 2001) ve (Coscia ve Mingione, 1999) çalışmalarında sınırlı bir $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ bölgesinde

$$\int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)} \, dx$$

şeklinde tanımlı $p(.)$-Dirichlet enerji integralinin bazı özelliklerini, enerji integral minimize edicilerinin varlığı, tekliğini ve çokluluğunu ele alınmıştır. (Shanmugalingam, 2001) çalışmasında metrik uzaylar üzerinde Dirichlet enerji integrali incelenmiştir. Ayrıca, Dirichlet sınır-değer problemlerinin çözümleriyle ilgili bilgiler verilmiştir.

Fine (iyi) topoloji ilk defa Cartan tarafından 1946 yılında ortaya konulmuştur (Cartan, 1946) ve analitik fonksiyonlar teorisi, olasılık dahil olmak üzere birçok alanda uygulaması vardır. Bu topolojinin temel özellikleri ve uygulama alanları için (Constantinescu ve Cornea, 1972), (Doob, 1984), (Fuglede, 1988), (Helms, 1969) çalışmaları örnek olarak verilebilir. Ayrıca (Meyers, 1975) çalışmasında iyi topoloji için ilk genellemeler yapılmıştır. İyi topoloji ile ilgili tarihsel süreç ve bilimsel bilgiler için (Heinonen ve ark., 1993) çalışması da incelenebilir.

Bu tez çalışmasında, ölçümün yerine düşünülebilecek olan rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzaylarında tanımlanacaktır. Ayrıca, bu kapasitenin birçok özelliği ele alınacak, diğer kapasitelerle ve ölçümle ilişkisi incelenecektir. Yine, ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayının bir alt uzayı olan ve kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümünde önemli bir yer alan sıfır sınır değerli ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayı tanımlanıp bazı sürekli gömülmeler ve eşitsizlikler verilecektir. Yine, iyi topolojinin ağırlıklı değişken üslü durumu ele alınıp bazı karşılaştırmalar ve genellemeler verilecektir. Tez çalışmasının son kısmında ise uygun normla donatılmış bir arakesit uzayı tanıtılacak ve temel özellikleri incelenecektir. Ayrıca, bu uzayın bazı sürekli ve kompakt gömülmeleri verilip bulunan sonuçların eliptik diferansiyel denklemlerin çözümleri için öneminden bahsedilecektir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezde kullanılacak tanımlar, teoremler ve simgeler tanıtılacaktır.

2.1. Bazı Tanım ve Kavramlar

Tanım 2.1.1: X bir topolojik uzay, E bir vektör uzayı, f fonksiyonu da X uzayından E uzayına tanımlı olmak üzere, $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ şeklinde tanımlanan kümenin kapanışına f fonksiyonunun desteği denir ve bu küme $\operatorname{supp} f$ ile gösterilir (Treves, 1967).

Tanım 2.1.2: Her mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların oluşturduğu vektör uzayı $C^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ ile gösterilir. Bu uzayın elemanları düzgün (smooth) fonksiyon adını da alır. Her mertebeden sürekli türevlere sahip kompakt destekli fonksiyonların oluşturduğu vektör uzayı da $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ ile gösterilir. Bu uzayın elemanlarına ise test fonksiyonu denir (Rudin, 1973).

Tanım 2.1.3: f, $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer her $K \subset \mathbb{R}^d$ kompakt alt kümesi için

$$\int_K |f(x)|\,dx < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa f fonksiyonuna yerel integrallenebilir fonksiyon denir. Bu fonksiyonların uzayı $L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ ile gösterilir (Rudin, 1973).

Teorem 2.1.4 (Banach Teoremi): E ve F birer Banach uzayı olsunlar. Eğer E uzayından F uzayına giden f fonksiyonu doğrusal, sürekli, birebir ve örtense f fonksiyonuna E uzayından F uzayına bir homeomorfizmdir (Cartan, 1971).

Teorem 2.1.5 Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $\varepsilon > 0$ için

$$|a+b|^p \leq \begin{cases} (1+\varepsilon)^{p-1}|a|^p + \left(1+\dfrac{1}{\varepsilon}\right)^{p-1}|b|^p, & 1 \leq p < \infty \\ |a|^p + |b|^p, & 0 < p < 1 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır (Maly ve Ziemer, 1997).

Tanım 2.1.6: $(A, \|.\|_A)$, $(B, \|.\|_B)$ normlu uzaylar ve $A \subset B$ olsun. Eğer, herhangi bir $f \in A$ fonksiyonu için $\|f\|_B \leq c\|f\|_A$ olacak şekilde bir $c > 0$ varsa A uzayı B uzayına sürekli olarak gömülür denir ve $A \hookrightarrow B$ ile gösterilir (Kufner ve ark., 1977).

Tanım 2.1.7: $(A,\|.\|_A)$, $(B,\|.\|_B)$ normlu uzayları ve $T:A\to B$ operatörü verilsin. Eğer, $A\hookrightarrow B$ sağlanıyorsa ve her $(x_n)\subset A$ sınırlı dizisi için $(T(x_n))\subset B$ operatör dizisinin yakınsak bir alt dizisi bulunuyorsa, A uzayı B uzayına kompakt olarak gömülür denir ve $A\hookrightarrow\hookrightarrow B$ olarak gösterilir (Kufner ve ark., 1977).

Teorem 2.1.8: $(A,\|.\|_A)$, $(B,\|.\|_B)$ normlu uzaylar ve A yansımalı bir uzay olsun. Ayrıca, $T:A\to B$ operatörü verilsin. Bu takdirde, $A\hookrightarrow\hookrightarrow B$ olması için gerek ve yeter koşul, T operatörünün A uzayında zayıf yakınsak dizileri B uzayında kuvvetli yakınsak dizilere dönüştürmesidir (Ciarlet, 2013), (Conway, 1985).

Tanım 2.1.9: $p(.):\mathbb{R}^d\to[1,\infty)$ ölçülebilir fonksiyonuna değişken üs denir. Değişken üs fonksiyonlarının ailesi $P(\mathbb{R}^d)$ ile gösterilsin. Yine $p(.)\in P(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere

$$p^-=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^d} p(x)$$

$$p^+=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^d} p(x)$$

biçiminde tanımlansın. Buradan $1\le p^-\le p(.)\le p^+\le\infty$ yazılır.

Herhangi $p(.)\in P(\mathbb{R}^d)$ ve $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonları verilsin. Bu takdirde konveks modüler fonksiyon

$$\rho_{p(.)}(f)=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^{p(x)}\,dx$$

biçiminde tanımlanır. Değişken üslü Lebesgue uzayları

$$L^{p(.)}(\mathbb{R}^d)=\left\{f:\rho_{p(.)}(\lambda f)<\infty,\exists\lambda>0\right\}$$

şeklinde tanımlanıp üzerindeki

$$\|f\|_{p(.)}=\inf\left\{\alpha>0:\rho_{p(.)}\left(\frac{f}{\alpha}\right)\le 1\right\}$$

Luxemburg normu ile bir Banach uzayıdır. Özel olarak $p(.)\equiv p$ sabit ise $L^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayı ile $L^p(\mathbb{R}^d)$ uzayı çakışır (Kováčik ve Rákosník, 1991).

Tanım 2.1.10: Herhangi bir $\vartheta:\mathbb{R}^d\to(0,\infty)$ ölçülebilir ve yerel integrallenebilen fonksiyona bir ağırlık fonksiyonu denir. Ayrıca, ağırlıklı modüler fonksiyonu

$$\rho_{p(.),\vartheta}(f)=\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^{p(x)}\,\vartheta(x)\,dx$$

şeklinde tanımlanır. Yine $L_{\vartheta}^{p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayları, $\|f\|_{p(.),\vartheta}=\left\|f\vartheta^{\frac{1}{p(.)}}\right\|_{p(.)}<\infty$ olan $\mathbb{R}^d$ kümesindeki ölçülebilir fonksiyonlardan oluşur (Aydın, 2012b).

Teorem 2.1.11: $p^- < \infty$ olsun. Eğer herhangi bir $f \in L_{\vartheta}^{p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ için $\rho_{p(.),\vartheta}(f) > 0$ veya $p^+ < \infty$ ise,

$$\min\left\{\rho_{p(.),\vartheta}(f)^{\frac{1}{p^-}}, \rho_{p(.),\vartheta}(f)^{\frac{1}{p^+}}\right\} \le \|f\|_{p(.),\vartheta} \le \operatorname{maks}\left\{\rho_{p(.),\vartheta}(f)^{\frac{1}{p^-}}, \rho_{p(.),\vartheta}(f)^{\frac{1}{p^+}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır (Kováčik ve Rákosník, 1991).

Tanım 2.1.12: Herhangi $j \in \mathbb{N}$ için $\alpha_j \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $d \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_d)$ şeklinde tanımlanan α sayısına çoklu-indis denir ve tüm çoklu indislerin kümesi $\mathbb{N}_0^d$ ile gösterilir. Ayrıca $|\alpha| = \sum_{j=1}^{d} \alpha_j$ olmak üzere $1 \le j \le d$ için $D_j^{\alpha_j} = \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$ ise, $D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} ... D_d^{\alpha_d}$ ifadesi $|\alpha|$-ıncı mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. Şimdi herhangi $f \in L_{loc}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ verilsin. Herhangi bir $\phi \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) D^{\alpha}\phi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} g_{\alpha}(x)\phi(x)\,dx$$

olacak şekilde bir $g_{\alpha} \in L_{loc}^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ bulunuyor ise g_{α} fonksiyonuna f fonksiyonunun α-ıncı zayıf türevi denir. Eğer f fonksiyonu, klasik anlamda $D^{\alpha}f$ sürekli kısmi türevlere sahip olacak şekilde yeterince düzgün ise, $D^{\alpha}f$ aynı zamanda f fonksiyonunun zayıf türevidir. Bunun ispatı herhangi $\phi \in C_0^{\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)$ için

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) D^{\alpha}\phi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^d} D^{\alpha}f(x)\phi(x)\,dx$$

eşitliğinde $j = 1, 2, ..., d$ için x_j değişkenlerine göre α_j-kez kısmi integrasyon yapılırsa kolaylıkla görülür. Böylece f fonksiyonunun α-ıncı zayıf türevi $D^{\alpha}f = g_{\alpha}$ olarak gösterilir (Adams ve Fournier, 2003), (Burenkov, 1998).

Bir fonksiyonun klasik türevinin olması zayıf türevinin de olacağı anlamına gelir. Fakat tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 2.1.13: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ olmak üzere $f(x)=|x|$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun zayıf türevi $\operatorname{sgn}(x)$ fonksiyonudur (Burenkov, 1998).

Çözüm: Fonksiyonun tanımından $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ olduğu görülür. Ayrıca herhangi $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ için

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx=-\int_{-\infty}^{0} x\phi'(x)dx+\int_{0}^{\infty} x\phi'(x)dx$$

yazılır. İntegrallerde ayrı ayrı kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx&=\int_{-\infty}^{0}\phi(x)dx-\int_{0}^{\infty}\phi(x)dx\\&=-\int_{\mathbb{R}}\operatorname{sgn}(x)\phi(x)dx\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\operatorname{sgn}(x)\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ olduğundan $D^1f=\operatorname{sgn}(x)$ olarak bulunur.

Önerme 2.1.14: Herhangi bir $k\in\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$ olmak üzere $\vartheta^{-\frac{1}{p(.)-1}}\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ olsun. Bu takdirde $L^{p(.)}_\vartheta(\mathbb{R}^d)$ bir Banach fonksiyon uzayıdır. Diğer bir ifadeyle, $L^{p(.)}_\vartheta(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ gömülmesi vardır (Aydın, 2012b), (Kokilashvili ve Samko, 2003).

Önerme 2.1.14'ten dolayı $L^{p(.)}_\vartheta(\mathbb{R}^d)$ uzayının her elemanının zayıf türevi vardır. Böylece ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayı iyi tanımlıdır.

Tanım 2.1.15: Ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayı

$$W^{k,p(.)}_\vartheta(\mathbb{R}^d)=\left\{f\in L^{p(.)}_\vartheta(\mathbb{R}^d):\alpha\in\mathbb{N}_0^d,0\le|\alpha|\le k,D^\alpha f\in L^{p(.)}_\vartheta(\mathbb{R}^d)\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca herhangi bir $f\in W^{k,p(.)}_\vartheta(\mathbb{R}^d)$ için

$$\|f\|_{k,p(.),\vartheta}=\sum_{0\le|\alpha|\le k}\|D^\alpha f\|_{p(.),\vartheta}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayı $W_{\vartheta}^{k,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ üzerinde bir norm belirtir ve bu norma göre bir Banach uzayıdır (Diening ve ark., 2011). Eğer $k=(0,0,...,0)=0\in\mathbb{R}^d$ ise herhangi bir $f\in L_{\vartheta}^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ için $D^{(0,0,...,0)}f=f$ olup $W_{\vartheta}^{0,p(.)}(\mathbb{R}^d)=L_{\vartheta}^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ olduğu görülür. Özel olarak $p(.)\equiv p$ sabit ise $W_{\vartheta}^{k,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ ile klasik ağırlıklı Sobolev uzayı $W_{\vartheta}^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ çakışır. Ayrıca $W_{\vartheta}^{k,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayı $1\le p^-\le p(.)\le p^+<\infty$ koşulu altında ayrılabilir olup $1<p^-\le p(.)\le p^+<\infty$ koşulu için de yansımalıdır (Diening ve ark., 2011). Yine $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ uzayı $W_{\vartheta}^{k,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayında yoğundur (Aydın, 2012b), (Diening, 2004a), (Kokilashvili ve Samko, 2003). Yine, $W_{\vartheta}^{k,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayının normunun tanımından $W_{\vartheta}^{k,p(.)}(\mathbb{R}^d)\hookrightarrow L_{\vartheta}^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ bulunur.

Teorem 2.1.16: Eğer $1<p(.)\le q(.)<\infty$, h.h.h. $x\in\Omega$ için $0<\omega(x)\le\vartheta(x)$ ve $|\Omega|<\infty$ ise, her $f\in L_{\vartheta}^{q(.)}(\mathbb{R}^d)$ için $\|f\|_{L_{\omega}^{p(.)}(\Omega)}\le C\|f\|_{L_{\vartheta}^{q(.)}(\Omega)}$ olacak şekilde f fonksiyonundan bağımsız bir $C>0$ sayısı vardır (Liu, 2008).

Tanım 2.1.17: Her $x\in\mathbb{R}^d$ için $\vartheta_1(x)\le c\vartheta_2(x)$ olacak şekilde en az bir $c>0$ varsa $\vartheta_1\prec\vartheta_2$ biçiminde gösterilir. Eğer $\vartheta_1\prec\vartheta_2$ ve $\vartheta_2\prec\vartheta_1$ ifadeleri sağlanıyor ise, ϑ_1 ve ϑ_2 olarak ifade edilen ağırlık fonksiyonları denktirler denir ve $\vartheta_1\approx\vartheta_2$ ifadesi ile gösterilir. (Aydın, 2012a), (Feichtinger ve Gürkanlı, 1990), (Fischer ve ark., 1996).

Tanım 2.1.18: Her $t\ge 0$ ve h.h.h. $x\in\mathbb{R}^d$ için

$$t^{p_1(.)}\vartheta_1(x)\le K_1(K_2t)^{p_2(.)}\vartheta_2(x)+h(x)$$

olacak şekilde pozitif K_1,K_2 sabitleri ve $h\in L^1(\mathbb{R}^d), h\ge 0$ varsa, $p_1(.)$ değişken üssü $p_2(.)$ değişken üssünden daha güçlüdür denir ve $p_1(.)\preceq p_2(.)$ şeklinde gösterilir (Aydın, 2012a), (Diening, 2004a), (Musielak, 1983).

Tanım 2.1.19: $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ sınırlı bir küme ve ϑ bir ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer bir $f\in C_0^{\infty}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}|f(x)|\vartheta(x)dx\le c(\mathrm{diam}\Omega)\int_{\Omega}|\nabla f(x)|\vartheta(x)dx$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, f fonksiyonu $L^1_\vartheta(\Omega)$ uzayında Poincaré eşitsizliğini sağlar denir (Heinonen ve ark., 1993).

Tanım 2.1.20: $A \subset \mathbb{R}^d$ açık küme ve $E \subset A$ olmak üzere

$$S_{p(.),\vartheta}(E) = \left\{ f \in W^{1,p(.)}_\vartheta(\mathbb{R}^d) : \text{Her } x \in A \text{ için } f(x) \geq 1 \right\}$$

kümesi verilsin. Bu takdirde E kümesinin Sobolev $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi

$$C_{p(.),\vartheta}(E) = \inf_{f \in S_{p(.),\vartheta}(E)} \rho_{1,p(.),\vartheta}(f) = \inf_{f \in S_{p(.),\vartheta}(E)} \int_{\mathbb{R}^d} \left(|f(x)|^{p(x)} + |\nabla f(x)|^{p(x)} \right) \vartheta(x) dx$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $S_{p(.),\vartheta}(E) = \varnothing$ ise, infimum özelliğinden $C_{p(.),\vartheta}(E) = \infty$ olur (Aydın, 2012b).

Yukarıdaki tanım göz önünde bulundurulursa herhangi bir $E \subset \mathbb{R}^d$ için $f \in S_{p(.),\vartheta}(E)$ verildiğinde, $\min\{1, f\} \in S_{p(.),\vartheta}(E)$ olup $\rho_{1,p(.),\vartheta}(\min\{1, f\}) \leq \rho_{1,p(.),\vartheta}(f)$ eşitsizliği sağlanır. Bu ise Sobolev $(p(.),\vartheta)$-kapasiteyi test için $0 \leq f \leq 1$ olmak üzere $f \in S_{p(.),\vartheta}(E)$ fonksiyonunun seçilmesinin yeterli olacağını gösterir.

Tanım 2.1.21: Eğer bir özellik kapasitesi sıfır olan kümenin dışında sağlanıyorsa $(p(.),\vartheta)$-quasi her yerde sağlanır denir. Ayrıca her $\varepsilon > 0$ için herhangi bir f fonksiyonu $\mathbb{R}^d - A$ kümesinde sürekli olacak şekilde $C_{p(.),\vartheta}(A) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan açık bir A kümesi varsa f fonksiyonuna $\mathbb{R}^d$ kümesinde $(p(.),\vartheta)$-quasi sürekli denir (Aydın, 2012b).

Bu tez çalışmasında $1 < p^- \leq p(.) \leq p^+ < \infty$ ve $\vartheta^{-\frac{1}{p(.)-1}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ koşullarının varlığı kabul edilecektir. Yine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ açık küme olarak alınacaktır. Ayrıca "hemen hemen her yerde", "quasi her yerde" ve "quasi sürekli" sözcükleri yerine, sırasıyla, "h.h.h.", "q.e." ve "q.c." kısaltmaları kullanılacaktır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bulgular bölümünde, ölçümün yerine düşünülebilecek olan rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi tanımlanıp (Aydın, 2012b), (Harjulehto ve ark., 2003b), (Harjulehto ve ark., 2007) çalışmalarındaki yöntemler kullanılarak bu kapasitenin özellikleri incelendi.

Kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin de arandığı (Harjulehto ve ark., 2003a) çalışmasında yer alan sıfır sınır değerli değişken üslü Sobolev uzaylarının ağırlıklı durumu ele alındı. Ayrıca, Poincaré eşitsizliği ispatlanarak bu uzaylarda denk bir nom elde edildi.

Yine, $(p(.),\vartheta)$-fine (iyi) açık kümelerden oluşan fine (iyi) topoloji tanımlandı ve Öklid topoloji ile arasındaki ilişki verildi. $(p(.),\vartheta)$-iyi açık kümeler, çalışmanın ilk kısmında tanımlanan rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi yardımıyla tanımlandığından literatürde çalışılan ve (Harjulehto ve Latvala, 2008) çalışmasındaki iyi topoloji kavramından farklıdır.

Son olarak, ağırlıklı klasik Lebesgue uzayı ve ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayının arakesiti olarak tanımlanan uzayın temel özellikleri ele alındı. Ayrıca, bu arakesit uzayının diğer uzaylarla arasındaki sürekli ve kompakt gömülmeleri (Kim ve ark., 2010), (Mashiyev ve ark., 2010), (Saiedinezhad ve Ghaemi, 2015) çalışmaları göz önüne alınarak incelendi.

4. BULGULAR

4.1. Rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-Kapasitesi ve Bazı Özellikleri

Bu bölümde, Sobolev $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesinin bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca bu kapasitenin yerine düşünülebilecek olan, ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzaylarında rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesi tanımlanıp bazı önemli özellikleri incelenecektir.

Teorem 4.1.1: Herhangi $\left(E_i\right)_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}^d$ kümeler ailesi verilsin. Eğer her $i\in\mathbb{N}$ için $C_{p(.),\vartheta}\left(E_i\right)=0$ ise, $C_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=0$ eşitliği sağlanır.

İspat: Herhangi $0<\varepsilon<1$ sayısı verilsin. Ayrıca $p^+<\infty$ olduğundan modüler ve norm yakınsamanın birbirine denk olduğu biliniyor. O halde, $\left\|f_i\right\|_{1,p(.),\vartheta}\leq\frac{\varepsilon}{2^i}$ olacak şekilde $f_i\in S_{p(.),\vartheta}\left(E_i\right)$ fonksiyonları bulunabilir. Şimdi $g_i=f_1+f_2+...+f_i$ fonksiyonu tanımlansın. $\left(g_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu ve $W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayının Banach uzay olduğu dikkate alınırsa h.h.h. $g_i\to g$ olacak şekilde bir $\left(g_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunur. Yine $U_i=f_i^{-1}\left(\left[1,\infty\right)\right)$ olarak tanımlansın. Buradan her $x\in U_i$ ve $j\geq i$ için $g_j\left(x\right)=f_1\left(x\right)+f_2\left(x\right)+...+f_j\left(x\right)\geq 1$ yani h.h.h. $g_j|_{U_i}\geq 1$ olur. Bu ise h.h.h. $g|_{U_i}\geq 1$ olduğunu gösterir. Bunu ispatlamak için ifadenin doğru olmadığı kabul edilsin. O halde $g|_{U_i}<1$ ve $\left|N\cap U_i\right|>0$ olacak şekilde bir N kümesi ve i indisi vardır. Ayrıca her $i\in\mathbb{N}$ için $E_i\subset U_i$ olduğundan $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$ kapsaması sağlanır. Yine $f_i\in S_{p(.),\vartheta}\left(E_i\right)$ olduğundan $U_i=f_i^{-1}\left(\left[1,\infty\right)\right)$, dolayısıyla, $\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i$ açık küme olur. Buradan $g\in S_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)$ elde edilir. Ayrıca

$$\left\|g\right\|_{1,p(.),\vartheta}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\left\|f_n\right\|_{1,p(.),\vartheta}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer Teorem 2.1.11 kullanılırsa

$$0\leq C_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\inf_{g\in S_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)}\rho_{1,p(.),\vartheta}\left(g\right)\leq\rho_{1,p(.),\vartheta}\left(g\right)\leq\left\|g\right\|_{1,p(.),\vartheta}\leq\varepsilon$$

olup $C_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)=0$ elde edilir.

Uyarı 4.1.2: Genel olarak $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)\cap W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayının $W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında yoğun olmadığı biliniyor (Samko, 2005). Ancak Zhikov ve Surnachev bazı koşullar altında bu yoğunluğun varlığını ispatladı (Zhikov ve Surnachev, 2016). Çalışma boyunca $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)\cap W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayının $W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında yoğun olduğu kabul edilecektir.

Teorem 4.1.3: Herhangi bir $K\subset\mathbb{R}^d$ kompakt kümesi verilsin. Eğer $S_{p(.),\vartheta}^{\infty}(K)=S_{p(.),\vartheta}(K)\cap C^{\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)$ kümesi tanımlanırsa, $C_{p(.),\vartheta}(K)=\inf_{f\in S_{p(.),\vartheta}^{\infty}(K)}\rho_{1,p(.),\vartheta}(f)$ elde edilir.

İspat: Herhangi bir $f\in S_{p(.),\vartheta}(K)$ fonksiyonu için $0\le f\le 1$ olduğu kabul edilsin. $C^{\infty}\left(\mathbb{R}^n\right)\cap W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayı $W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında yoğun olduğundan $W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında $\alpha_n\to f$ olacak şekilde bir $\left(\alpha_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\subset C^{\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)\cap W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ dizisi vardır. Şimdi, U kümesinde $f=1$ olacak şekilde $K\subset U$ açık sınırlı bir küme seçilsin. Ayrıca K kümesinin açık komşuluğunda $\alpha=0$ ve $\mathbb{R}^d-U$ kümesinde $\alpha=1$ olan bir $\alpha\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $0\le\alpha\le 1$ fonksiyonu alınsın. O halde $\beta_n=1-\left(1-\alpha_n\right)\alpha$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
f-\beta_n &= f-1+\left(1-\alpha_n\right)\alpha+\alpha f-\alpha f\\
&=\left(f-\alpha_n\right)\alpha+(1-\alpha)(f-1)\\
&=\left(f-\alpha_n\right)\alpha
\end{aligned}$$

bulunur. Fonksiyonların tanımları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\rho_{p(.),\vartheta}\left(\left(f-\alpha_n\right)\alpha\right)\\
&=\int_U\left|\left(f(x)-\alpha_n(x)\right)\alpha(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx+\int_{\mathbb{R}^d-U}\left|\left(f(x)-\alpha_n(x)\right)\alpha(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^d-U}\left|f(x)-\alpha_n(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx\le\int_{\mathbb{R}^d}\left|f(x)-\alpha_n(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx\\
&=\rho_{p(.),\vartheta}\left(f-\alpha_n\right)\to 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $\nabla\left(\left(f-\alpha_n\right)\alpha\right)=\left(f-\alpha_n\right)\nabla\alpha+\alpha\nabla\left(f-\alpha_n\right)$ eşitliği göz önüne alınırsa,

$$
\begin{aligned}
&\rho_{p(.),\vartheta}\left(\nabla\left(f-\alpha_n\right)\alpha\right)\\
&=\int_{\mathbb{R}^d}\left|\left(f(x)-\alpha_n(x)\right)\nabla\alpha(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx+\int_{\mathbb{R}^d}\left|\alpha(x)\nabla\left(f(x)-\alpha_n(x)\right)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx\\
&=\int_{U}\left|\left(f(x)-\alpha_n(x)\right)\nabla\alpha(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx+\int_{\mathbb{R}^d-U}\left|\left(f(x)-\alpha_n(x)\right)\nabla\alpha(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx\\
&\ +\int_{U}\left|\alpha(x)\nabla\left(f(x)-\alpha_n(x)\right)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx+\int_{\mathbb{R}^d-U}\left|\alpha(x)\nabla\left(f(x)-\alpha_n(x)\right)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx\\
&=\int_{\mathbb{R}^d-U}\left|\nabla\left(f(x)-\alpha_n(x)\right)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx\le\int_{\mathbb{R}^d}\left|\nabla\left(f(x)-\alpha_n(x)\right)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx\\
&=\rho_{p(.),\vartheta}\left(\left|\nabla\left(f-\alpha_n\right)\right|\right)\to 0
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yine, $p^{+}<\infty$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
\left\|f-\beta_n\right\|_{1,p(.),\vartheta}&=\left\|\left(f-\alpha_n\right)\alpha\right\|_{1,p(.),\vartheta}\\
&=\left\|\left(f-\alpha_n\right)\alpha\right\|_{p(.),\vartheta}+\left\|\left(\nabla\left|\left(f-\alpha_n\right)\alpha\right|\right)\right\|_{p(.),\vartheta}\to 0
\end{aligned}
$$

bulunur. O halde $W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında $\beta_n\to f$ yakınsaması elde edilir. Son olarak $\beta_n=1-\left(1-\alpha_n\right)\alpha\in S_{p(.),\vartheta}^{\infty}\left(K\right)$ olduğundan, tanımlanan $S_{p(.),\vartheta}^{\infty}\left(K\right)$ kümesinden $S_{p(.),\vartheta}\left(K\right)$ kümesine yoğun olduğu gösterilmiş olur. Bu ise ispatı bitirir.

Teorem 4.1.4: $A\subset\mathbb{R}^d$ olmak üzere $q(.)\le p(.)$ koşulu verilsin. Eğer $C_{p(.),\vartheta}\left(A\right)=0$ ise, $C_{q(.),\vartheta}\left(A\right)=0$ olur.

İspat: Herhangi bir $g\in C_0^{\infty}\left(B\left(0,r+1\right)\right)$ fonksiyonu için $0\le g\le 1$, $\left|\nabla g\right|\le 2$ ve $B\left(0,r\right)$ de $g=1$ olsun. Yine $f\in S_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B\left(0,r\right)\right)$ alınsın. Eğer $q(.)\le p(.)$ ise Ω sınırlı bir küme olmak üzere $L_{\vartheta}^{p(.)}\left(\Omega\right)\hookrightarrow L_{\vartheta}^{q(.)}\left(\Omega\right)$ gömülmesinin sağlandığı ve bu gömülme operatörünün normunun $1+\left|\Omega\right|$'yı geçemediği biliniyor (Kováčik ve Rákosník, 1991). Buradan

$$
\begin{aligned}
\left\|fg\right\|_{L_{\vartheta}^{q(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)}&=\left\|fg\right\|_{L_{\vartheta}^{q(.)}\left(B\left(0,r+1\right)\right)}\\
&\le\left(1+\left|B\left(0,r+1\right)\right|\right)\left\|f\right\|_{L_{\vartheta}^{p(.)}\left(B\left(0,r+1\right)\right)}
\end{aligned}
$$

olup $fg\in L_{\vartheta}^{q(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ elde edilir. Ayrıca, $\nabla\left(fg\right)=f\nabla\left(g\right)+g\nabla\left(f\right)$ olması kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\left\|\nabla(fg)\right\|_{L_{\vartheta}^{q(.)}(\mathbb{R}^d)} &= \left\|\nabla(fg)\right\|_{L_{\vartheta}^{q(.)}(B(0,r+1))} \\
&\leq \left\|f\nabla(g)\right\|_{L_{\vartheta}^{q(.)}(B(0,r+1))} + \left\|g\nabla(f)\right\|_{L_{\vartheta}^{q(.)}(B(0,r+1))} \\
&\leq 2\left\|f\right\|_{L_{\vartheta}^{q(.)}(B(0,r+1))} + \left\|\nabla(f)\right\|_{L_{\vartheta}^{q(.)}(B(0,r+1))} \\
&\leq 2\left(1+\left|B(0,r+1)\right|\right)\left[\left\|f\right\|_{L_{\vartheta}^{p(.)}(B(0,r+1))} + \left\|\nabla(f)\right\|_{L_{\vartheta}^{p(.)}(B(0,r+1))}\right] \\
&\leq 2\left(1+\left|B(0,r+1)\right|\right)\left\|f\right\|_{W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği bulunur. Böylece $fg \in W_{\vartheta}^{1,q(.)}(\mathbb{R}^d)$ olur. Ayrıca $f \in S_{p(.),\vartheta}(A \cap B(0,r))$ ve $B(0,r)$ kümesi üzerinde $g = 1$ olduğundan $fg \in S_{q(.),\vartheta}(A \cap B(0,r))$ elde edilir. Eğer $C_{p(.),\vartheta}(A \cap B(0,r)) = 0$ olduğu ve infimum özelliği kullanılırsa, herhangi $\varepsilon > 0$ için $h_n < \varepsilon$ olacak şekilde bir $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_{p(.),\vartheta}(A \cap B(0,r))$ dizisi vardır. O halde her $\varepsilon > 0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $h_n g \in S_{q(.),\vartheta}(A \cap B(0,r))$ yazılır. Böylece, herhangi $r > 0$ için $C_{q(.),\vartheta}(A \cap B(0,r)) = 0$ sağlanır. Ayrıca $\bigcup_{r=1}^{\infty}(A \cap B(0,r)) = A \cap \bigcup_{r=1}^{\infty} B(0,r) = A$ olup buradan

$$
0 \leq C_{q(.),\vartheta}(A) = C_{q(.),\vartheta}\left(\bigcup_{r=1}^{\infty}(A \cap B(0,r))\right) \leq \sum_{r=1}^{\infty} C_{q(.),\vartheta}(A \cap B(0,r)) = 0
$$

elde edilir.

Şimdi rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin tanımı verilsin.

Tanım 4.1.5: Bir $K \subset \Omega$ kompakt alt kümesi alınsın. Yine

$$
R_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) = \left\{ f \in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega) \cap C_c(\Omega) : f \geq 0 \text{ ve } K \text{ kümesinde } f > 1 \right\}
$$

kümesi verilsin. Ayrıca

$$
cap_{p(.),\vartheta}^{*}(K,\Omega) = \inf_{f \in R_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)} \int_{\Omega} \left|\nabla f(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx = \inf_{f \in R_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)} \rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|)
$$

olarak tanımlansın. Eğer $U \subset \Omega$ açık küme ise,

$$
cap_{p(.),\vartheta}(U,\Omega) = \sup_{\substack{K \subset U \\ K \text{ kompakt}}} cap_{p(.),\vartheta}^{*}(K,\Omega)
$$

ve her $A \subset \Omega$ kümesi için de

$$
cap_{p(.),\vartheta}(A,\Omega) = \inf_{\substack{A \subset U \subset \Omega \\ U \text{ açık}}} cap_{p(.),\vartheta}(U,\Omega)
$$

ifadeleri tanımlansın. Buradaki $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A,\Omega)$ sayısı A kümesinin Ω kümesine bağlı varyasyonel $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi olarak adlandırılır. Çalışma boyunca bu kapasite kısaca rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi olarak ifade edilecektir. Ayrıca rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi tanımında yer alan $f \in R_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$ üzerinden alınan infimum $0 \le f \le 1$ için de sağlanacağından bu doktora tez çalışmasının uygun yerlerinde bu ek koşuldan da faydalanılacaktır.

Teorem 4.1.6: Herhangi bir $K \subset \Omega$ kompakt alt kümesi verilsin ve

$$R^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) = \left\{ f \in W^{1,p(.)}_{\vartheta}(\Omega) \cap C_c(\Omega) : K \text{ da } f \ge 1 \right\}$$

kümesi tanımlansın. O halde $\operatorname{cap}^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) = \inf\limits_{f \in R^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)} \rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|)$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Tanımlar karşılaştırıldığında $R_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) \subset R^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$ olup $\inf\limits_{f \in R^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)} \rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|) \le \operatorname{cap}^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$ eşitsizliği sağlanır. Karşı eşitsizlik için herhangi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin ve $\rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|) \le \inf\limits_{f \in R^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)} \rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|) + \varepsilon$ olacak şekilde $f \in R^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$ fonksiyonu alınsın. Şimdi $g = (1+\varepsilon) f$ fonksiyonu tanımlansın. Yine $R^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$ kümesinin tanımından K'da $f \ge 1$ olup $g > 1$ sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned}
\operatorname{cap}^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) &= \inf_{g \in R_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)} \int_\Omega |\nabla g(x)|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx \le \int_\Omega |\nabla((1+\varepsilon) f(x))|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx \\
&= \int_\Omega (1+\varepsilon)^{p(x)} |\nabla f(x)|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx \le (1+\varepsilon)^{p^+} \rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|) \\
&\le (1+\varepsilon)^{p^+} \left(\inf_{f \in R^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)} \rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|) + \varepsilon \right)
\end{aligned}$$

olup $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa $\operatorname{cap}^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) \le \inf\limits_{f \in R^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)} \rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|)$ eşitsizliği elde edilir. Bu ise istenendir.

Teorem 4.1.7: Herhangi bir $K \subset \Omega$ kompakt alt kümesi verilsin. Bu takdirde $\operatorname{cap}^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) = \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$ eşitliği bulunur.

İspat: Rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi tanımından

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)=\inf_{\substack{K\subset U\subset\Omega\\ U\text{ açık}}}\left(\sup_{\substack{K\subset U\\ K\text{ kompakt}}}\operatorname{cap}^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)\right)$$

eşitliği sağlanır. Buradan $\operatorname{cap}^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)\le\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$ olduğu görülür. Karşı eşitsizlik için herhangi bir $\varepsilon>0$ sayısı verilsin ve $\rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|)\le\operatorname{cap}^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)+\varepsilon$ olacak şekilde $f\in R_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$ fonksiyonu alınsın. Ayrıca sürekli bir fonksiyonun açık küme üzerindeki ters görüntüsünün de açık olduğu bilindiğinden $f\in R_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$ için $U=f^{-1}((1,\infty))$ kümesi açıktır. Yine, f fonksiyonu kompakt desteğe sahip olduğundan U kümesinde $f>1$ ve $K\subset U$ kapsaması bulunur. Böylece her $T\subset U$ kompağı üzerinde $f>1$ olup $f\in R_{p(.),\vartheta}(T,\Omega)$ yazılır. Tanımdan

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(U,\Omega)=\sup_{\substack{T\subset U\\ T\text{ kompakt}}}\left(\inf_{f\in R_{p(.),\vartheta}(T,\Omega)}\rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|)\right)$$

olup $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(U,\Omega)\le\rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|)$ eşitsizliği sağlanır. O halde

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)&\le\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(U,\Omega)\le\rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|)\\&\le\operatorname{cap}^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)+\varepsilon\end{aligned}$$

olup $\varepsilon\to0$ için $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)\le\operatorname{cap}^*_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$ eşitsizliği elde edilir.

Şimdi rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin bazı temel özellikleri verilsin.

P1. $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(\varnothing,\Omega)=0$.

P2. Eğer $A_1\subset A_2\subset\Omega_2\subset\Omega_1$ sağlanıyorsa $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_1,\Omega_1)\le\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_2,\Omega_2)$ bulunur.

P3. Herhangi bir $A\subset\mathbb{R}^d$ kümesi için $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A,\Omega)=\inf_{\substack{A\subset U\subset\Omega\\ U\text{ açık}}}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(U,\Omega)$ sağlanır.

P4. Ω'nın herhangi K_1 ve K_2 kompakt alt kümeleri için

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K_1\cup K_2,\Omega)+\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K_1\cap K_2,\Omega)\le\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K_1,\Omega)+\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K_2,\Omega)$$

ifadesi doğrudur.

P5. Herhangi $n\in\mathbb{N}$ için K_n, Ω kümesinin kompakt alt kümelerinden oluşan azalan bir dizi olsun. O halde $\lim_{n\to\infty}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K_n,\Omega)=\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}K_n,\Omega\right)$ eşitliği sağlanır.

P6. Her $n\in\mathbb{N}$ için A_n, Ω kümesinin alt kümelerinden oluşan artan bir dizi olsun. O halde

$\lim_{n\to\infty} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega) = \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\Omega\right)$ eşitliği vardır.

P7. Her $n\in\mathbb{N}$ için $A_n \subset \Omega$ ise, $\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,\Omega\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega)$ eşitsizliği sağlanır.

(P1)-(P7) özelliklerinin ispatları (Diening ve ark., 2011), (Harjulehto ve ark., 2007) ve (Heinonen ve ark., 1993) çalışmalarındaki benzer tekniklerle gösterilebilir. Buradan rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin bir dış ölçü olduğu görülür. Ayrıca (P1), (P2), (P5) ve (P6) kapasite özelliklerini sağlayan bir küme fonksiyonunun Choquet kapasite olarak adlandırıldığı biliniyor (Choquet, 1954). Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.8: Herhangi bir $A\subset\Omega$ için $A \to \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A,\Omega)$ fonksiyonu bir Choquet kapasitedir. Özel olarak, tüm $A\subset\Omega$ Borel kümelerinin de kapasitesi vardır, yani

$$\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A,\Omega) = \inf_{\substack{A\subset U\subset\Omega \\ U\text{ açık}}} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(U,\Omega) = \sup_{\substack{K\subset A \\ K\text{ kompakt}}} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$$

eşitliği sağlanır (Choquet, 1954).

Teorem 4.1.9: Herhangi $A_1, A_2, ..., A_m \subset \Omega$ kümeleri verilsin. Ayrıca her $n=1,2,...,m$ için $B_n \subset A_n$ ve $\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n,\Omega\right) < \infty$ olsun. O halde,

$$\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n,\Omega\right) - \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n,\Omega\right) \le \sum_{n=1}^{m}\left[\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega) - \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(B_n,\Omega)\right]$$

bulunur.

İspat: İspat için üç farklı durum mevcuttur. İlk olarak, her A_n ve B_n kümeleri kompakt olsun. Ayrıca $T\subset K$ ve C kümeleri Ω kümesinin kompakt alt kümeleri olarak verilsin. Eğer (P2) ve (P4) özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K\cup C,\Omega) + \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(T,\Omega) \\
&= \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}((K\cup T)\cup C,\Omega) + \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K\cap T,\Omega) \\
&\le \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K\cup(T\cup C),\Omega) + \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}((K\cap T)\cup(K\cap C),\Omega) \\
&= \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K\cup(T\cup C),\Omega) + \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K\cap(T\cup C),\Omega) \\
&\le \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) + \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(T\cup C,\Omega)
\end{aligned}$$

olup

$$\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K\cup C,\Omega) + \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(T,\Omega) \le \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) + \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(T\cup C,\Omega)$$

elde edilir. Son eşitsizlik, $A_1 = K$ ve $B_1 = T = C$ olmak üzere ispatın m=1 için sağlandığını gösterir. Şimdi ispat edilecek eşitsizliğin m-1 için doğru olduğu kabul edilsin. O halde

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} A_n, \Omega\right) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} B_n, \Omega\right) \le \sum_{n=1}^{m-1}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(B_n,\Omega)\right]$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n, \Omega\right) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n, \Omega\right)\\
&= \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} A_n\right) \cup A_m, \Omega\right) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} B_n\right) \cup A_m, \Omega\right)\\
&+\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} B_n\right) \cup A_m, \Omega\right) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B_m \cup \left(\bigcup_{n=1}^{m-1} B_n\right), \Omega\right)\\
&\le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} A_n, \Omega\right) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m-1} B_n, \Omega\right)\\
&+\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_m,\Omega) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(B_m,\Omega)\\
&\le \sum_{n=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(B_n,\Omega)\right]
\end{aligned}$$

olup tümevarımdan ispat kompakt kümeler için sağlanır. Şimdi ispatın açık kümeler üzerindeki durumu ifade edilsin. Bunun için A_n ve B_n açık kümeler olsun. Yine $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Ayrıca supremum özelliğinden her $n = 1, 2, ..., m$ için $C_n \subset B_n$ ve

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(B_n,\Omega) \le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(C_n,\Omega) + \varepsilon \tag{4.1.9.1}$$

olacak şekilde $C_n \subset B_n$ kompakt kümeleri alınsın. Yine her $n = 1, 2, ..., m$ için $B_n \subset A_n$ kapsaması sağlandığından $C_n \subset K$ ve

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n, \Omega\right) \le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) + \varepsilon \tag{4.1.9.2}$$

olacak şekilde bir $K \subset \bigcup_{n=1}^{m} A_n$ kompakt kümesi alınabilir. Şimdi Ω kümesindeki X ve Y kümelerinin arasındaki uzaklık $\operatorname{dist}(X,Y) = \inf\{|x-y| : x \in X, y \in Y\}$ ile göstermek üzere ve

$$\delta = \min\left\{\operatorname{dist}\left(K, \Omega - \bigcup_{n=1}^{m} A_n\right), \operatorname{dist}(C_1, \partial A_1), ..., \operatorname{dist}(C_n, \partial A_n)\right\}$$

için $K_n = \{x \in K \cap A_n : \operatorname{dist}(x, \partial A_n) \ge \delta\}$ kümesi tanımlansın. O halde her $n = 1, 2, ..., m$ için

$C_n \subset K_n$ ve $K = \bigcup_{n=1}^{m} K_n$ olur (Diening ve ark., 2011), (Heinonen ve ark., 1993). Yine kompakt kümelerin sonlu birleşimleri de kompakt olduğundan $\bigcup_{n=1}^{m} C_n \subset \bigcup_{n=1}^{m} B_n$ kompakttır. Böylece, rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi tanımından

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} C_n,\Omega\right) \le \sup_{\substack{\bigcup_{n=1}^{m} C_n \subset \bigcup_{n=1}^{m} B_n \\ \bigcup_{n=1}^{m} C_n \text{ kompakt}}} \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} C_n,\Omega\right) = \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n,\Omega\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Son eşitsizlik ve (4.1.9.2)'den

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n,\Omega\right) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n,\Omega\right) \le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} K_n,\Omega\right) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} C_n,\Omega\right) + \varepsilon$$

olduğu görülür. Ayrıca $\bigcup_{n=1}^{m} K_n$ ve $\bigcup_{n=1}^{m} C_n$ kompakt olduklarından ispatlanan ilk durum kullanılabilir. O halde

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n,\Omega\right) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n,\Omega\right) \le \varepsilon + \sum_{n=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K_n,\Omega) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(C_n,\Omega)\right]$$

yazılır. Yine, her $n = 1,2,...,m$ için $K_n \subset A_n$ kapsaması ve rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi tanımı kullanılırsa

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K_n,\Omega) \le \sup_{\substack{K_n \subset A_n \\ K_n \text{ kompakt}}} \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K_n,\Omega) = \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega)$$

eşitsizliği sağlanır. Son eşitsizlik ve (4.1.9.1)'den

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} A_n,\Omega\right) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m} B_n,\Omega\right) &\le \varepsilon + \sum_{n=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(B_n,\Omega) + \varepsilon\right] \\ &= (m+1)\varepsilon + \sum_{n=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega) - \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(B_n,\Omega)\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon \to 0$ için limit göz önüne alınırsa ispat kompakt kümeler için de sağlanır. Son olarak A_n ve B_n keyfi kümeler olsun. Yine $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Ayrıca infimum özelliğinden tüm $n = 1,2,...,m$ için $A_n \subset U_n$ ve

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(U_n,\Omega) \le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega) + \varepsilon \tag{4.1.9.3}$$

olacak şekilde U_n açık kümeleri alınsın. Yine $B_n \subset V_n \subset U_n$ için $\bigcup_{n=1}^{m} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{m} V_n \subset \bigcup_{n=1}^{m} U_n$ olup infimum özelliğinden her $n = 1,2,...,m$ için

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}V_n,\Omega\right)\le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}B_n,\Omega\right)+\varepsilon \tag{4.1.9.4}$$

olacak şekilde V_n kümeleri seçilsin. Her $n=1,2,...,m$ için $A_n\subset U_n$ kapsamasından $\bigcup_{n=1}^{m}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{m}U_n$ olup sonlu açıkların birleşimi de açık olacağından rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesi tanımı gereği

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}A_n,\Omega\right)=\inf_{\substack{\bigcup_{n=1}^{m}A_n\subset\bigcup_{n=1}^{m}U_n\subset\Omega\\ \bigcup_{n=1}^{m}A_n\ \text{açık}}}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}U_n,\Omega\right)\le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}U_n,\Omega\right)$$

bulunur. Son eşitsizlik ve (4.1.9.4) göz önüne alınırsa

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}A_n,\Omega\right)-\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}B_n,\Omega\right)\le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}U_n,\Omega\right)-\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}V_n,\Omega\right)+\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\bigcup_{n=1}^{m}U_n$ ve $\bigcup_{n=1}^{m}V_n$ birleşimleri açık ve açık kümeler için ispatlanacak eşitsizlik geçerli olduğundan

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}A_n,\Omega\right)-\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}B_n,\Omega\right)\le \varepsilon+\sum_{n=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(U_n,\Omega\right)-\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(V_n,\Omega\right)\right]$$

elde edilir. Ayrıca her $n=1,2,...,m$ için $B_n\subset V_n$ sağlandığından rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesi tanımından $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B_n,\Omega\right)\le \inf_{\substack{B_n\subset V_n\subset U_n\subset\Omega\\ B_n\ \text{açık}}}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(V_n,\Omega\right)\le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(V_n,\Omega\right)$

bulunur. Son eşitsizlik ve (4.1.9.3) göz önünde bulundurulursa

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}A_n,\Omega\right)-\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}B_n,\Omega\right)&\le \varepsilon+\sum_{n=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A_n,\Omega\right)+\varepsilon-\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B_n,\Omega\right)\right]\\&\le (m+1)\varepsilon+\sum_{n=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A_n,\Omega\right)-\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B_n,\Omega\right)\right]\end{aligned}$$

olup $\varepsilon\to 0$ için

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}A_n,\Omega\right)-\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{n=1}^{m}B_n,\Omega\right)\le \sum_{n=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A_n,\Omega\right)-\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B_n,\Omega\right)\right]$$

elde edilir.

Teorem 4.1.10: $A_1\subset\Omega_1\subset A_2\subset\Omega_2\subset...\subset\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A_1,\Omega\right)\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A_n,\Omega_n\right)\right]^{\frac{1}{1-p^-}}\right)^{1-p^-}$$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_1,\Omega_1)<\infty$ kabul edilebilir, aksi halde ispat açıktır. Ayrıca bir m tam sayısı ve $\varepsilon>0$ verilsin. Yine infimum özelliğinden $A_1\subset U$ ve

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(U,\Omega_1)\le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_1,\Omega_1)+\varepsilon \tag{4.1.10.1}$$

olacak şekilde $U\subset\Omega_1$ açık kümesi bulunur. Şimdi $K_1\subset U$ kompağı ve $\int_{\Omega_1}|\nabla f_1(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx\le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K_1,\Omega_1)+\varepsilon$ olacak şekilde $f_1\in R_{p(.),\vartheta}(K_1,\Omega_1)$ fonksiyonu alınsın. Tümevarımdan her $n=2,3,...,m$ için $f_n\in W_\vartheta^{1,p(.)}(\Omega)\cap C_c(\Omega)$ fonksiyonlarını $f_n\in R_{p(.),\vartheta}(K_n,\Omega_n)$ ve $K_n=\operatorname{supp}f_{n-1}$ olarak tanımlanmak üzere $\int_{\Omega_n}|\nabla f_n(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx\le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K_n,\Omega_n)+\varepsilon$ şeklinde seçilebilir. Şimdi, $\sum_{n=1}^{m}a_n=1$ olacak şekilde negatif olmayan sayıların bir dizisi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olsun ve $g=\sum_{n=1}^{m}a_nf_n$ olarak tanımlansın. Eğer $W_\vartheta^{1,p(.)}(\Omega)\cap C_c(\Omega)$ uzayının vektör uzayı olduğu dikkate alınırsa $g\in W_\vartheta^{1,p(.)}(\Omega)\cap C_c(\Omega)$ olup $g\in R_{p(.),\vartheta}(K_1,\Omega)$ sağlanır. Ayrıca, $n\ge 2$ için $K_n\subset\Omega_{n-1}\subset A_n$ kapsaması sağlanır. Gerçekten, $A_1\subset\Omega_1\subset A_2\subset\Omega_2\subset...\subset\Omega=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n$ olduğu bilindiğinden $n\ge 2$ için $\Omega_{n-1}\subset A_n$ kapsaması görülür. Yine $K_n=\operatorname{supp}f_{n-1}$ için $f_n\in R_{p(.),\vartheta}(K_n,\Omega_n)$ olduğundan $K_2=\operatorname{supp}f_1$ için $f_1\in R_{p(.),\vartheta}(K_1,\Omega_1)$, $K_3=\operatorname{supp}f_2$ için $f_2\in R_{p(.),\vartheta}(K_2,\Omega_2)$ ve benzer şekilde devam edilip $K_n=\operatorname{supp}f_{n-1}$ için $f_n\in R_{p(.),\vartheta}(K_n,\Omega_n)$ bulunur. O halde, $n\ge 2$ verildiğinde sırasıyla $K_2\subset\Omega_1$, $K_3\subset\Omega_2$,..., $K_n\subset\Omega_{n-1}$ elde edilir. Buradan $n\ge 2$ için $K_n\subset\Omega_{n-1}\subset A_n$ kapsaması sağlanır. Böylece $\nabla f_n\ne 0$ ikili olarak ayrık olmak üzere rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi tanımından

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(K_1,\Omega)\le\int_\Omega|\nabla g(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx=\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n}\left|\sum_{n=1}^{m}a_n\nabla f_n(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n}\left|\sum_{n=1}^{m}a_n\nabla f_n(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx=\int_{\Omega_1}|a_1\nabla f_1(x)+...+a_m\nabla f_m(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx$$

$$+\int_{\Omega_2}|a_1\nabla f_1(x)+...+a_m\nabla f_m(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx+...+\int_{\Omega_m}|a_1\nabla f_1(x)+...+a_m\nabla f_m(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx$$

$$+\int_{\Omega_{m+1}}|a_1\nabla f_1(x)+...+a_m\nabla f_m(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx+...$$

$$= \int_{\Omega_1} \left|a_1 \nabla f_1(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx + \int_{\Omega_2} \left|a_2 \nabla f_2(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx + \dots + \int_{\Omega_m} \left|a_m \nabla f_m(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \int_{\Omega_n} \left|a_n \nabla f_n(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx \le \sum_{n=1}^{m} a_n^{p^-} \int_{\Omega_n} \left|\nabla f_n(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $\varepsilon^* = \varepsilon \sum_{n=1}^{m} a_n^{p^-}$ olmak üzere

$$\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K_1,\Omega) \le \sum_{n=1}^{m} a_n^{p^-} \left(\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K_n,\Omega_n) + \varepsilon \right)$$

$$= \left(a_1^{p^-} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K_1,\Omega_1) + \sum_{n=2}^{m} a_n^{p^-} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K_n,\Omega_n) \right) + \varepsilon^*$$

bulunur. Ayrıca $K_1 \subset U$ olduğundan rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi tanımından

$$\mathrm{cap}_{p(.)}(K_1,\Omega_1) \le \sup_{\substack{K_1 \subset U \\ K_1 \text{ kompakt}}} \mathrm{cap}_{p(.)}(K_1,\Omega_1) = \mathrm{cap}_{p(.)}(U,\Omega_1)$$

eşitsizliği sağlanır. Yine $\mathrm{cap}_{p(.)}(K_n,\Omega_n) \le \mathrm{cap}_{p(.)}(A_n,\Omega_n)$ olup

$\sum_{n=2}^{m} a_n^{p^-} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K_n,\Omega_n) \le \sum_{n=2}^{m} a_n^{p^-} \mathrm{cap}_{p(.)}(A_n,\Omega_n)$ elde edilir. Böylece

$$\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K_1,\Omega) \le a_1^{p^-} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(U,\Omega_1) + \sum_{n=2}^{m} a_n^{p^-} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega_n) + \varepsilon^* \tag{4.1.10.2}$$

olur. Eğer (4.1.10.1) eşitsizliği (4.1.10.2) eşitsizliğinde kullanılırsa $\varepsilon^{**} = \varepsilon a_1^{p^-} + \varepsilon^*$ olmak üzere

$$\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K_1,\Omega) \le \left(a_1^{p^-} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A_1,\Omega_1) + \sum_{n=2}^{m} a_n^{p^-} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega_n) + \varepsilon a_1^{p^-} \right) + \varepsilon^*$$

$$= \sum_{n=1}^{m} a_n^{p^-} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega_n) + \varepsilon^{**}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $\varepsilon^{**} \to 0$ için limit alınırsa

$$\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K_1,\Omega) \le \sum_{n=1}^{m} a_n^{p^-} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega_n)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A_1,\Omega) \le \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(U,\Omega) \le \sum_{n=1}^{m} a_n^{p^-} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega_n) \tag{4.1.10.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $a_n = \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega_n)^{\frac{1}{1-p^-}} \left(\sum_{k=1}^{m} \left[\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A_k,\Omega_k) \right]^{\frac{1}{1-p^-}} \right)^{-1}$ için

$$\sum_{n=1}^{m} a_n = \sum_{n=1}^{m}\left[\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega_n)\right]^{\frac{1}{1-p^-}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_k,\Omega_k)\right]^{\frac{1}{1-p^-}}\right)^{-1}\right]$$

$$= \frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_1,\Omega_1)^{\frac{1}{1-p^-}} + \ldots + \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_m,\Omega_m)^{\frac{1}{1-p^-}}}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_1,\Omega_1)^{\frac{1}{1-p^-}} + \ldots + \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_m,\Omega_m)^{\frac{1}{1-p^-}}} = 1$$

olduğu görülür. Eğer her $n = 1, 2, \ldots, m$ için $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega_n) > 0$ ise,

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_1,\Omega) \le \sum_{n=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega_n)\right]^{1+\frac{p^-}{1-p^-}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_k,\Omega_k)\right]^{\frac{1}{1-p^-}}\right)^{-p^-}$$

$$= \sum_{n=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega_n)\right]^{\frac{1}{1-p^-}}\left(\sum_{k=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_k,\Omega_k)\right]^{\frac{1}{1-p^-}}\right)^{-p^-}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{m}\left[\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega_n)\right]^{\frac{1}{1-p^-}}\right)^{1-p^-}$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer taraftan bazı n'ler için $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_n,\Omega_n) = 0$ olduğunda (4.1.10.3) eşitsizliğinden $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(A_1,\Omega) = 0$ olup ispatın açık olacağı görülür. Son eşitsizlikte $m \to \infty$ için limit hali için istenen elde edilir.

Tanım 4.1.11: $\mathbb{R}^d$ kümesindeki her $B(x_0,r)$ yuvarı için $\mu(B(x_0,2r)) \le c_d \mu(B(x_0,r))$ olacak şekilde $c_d \ge 1$ sabiti mevcut ise, μ ölçümüne katlayan (doubling) özelliğine sahiptir ve bu koşulu sağlayan μ ölçümüne katlayan ölçüm denir. Burada $c_d \ge 1$ katlayan sabiti olarak adlandırılır. Şimdi katlayan ölçü ile rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi arasındaki ilişki verilsin.

Teorem 4.1.12: μ_ϑ bir katlayan ölçüm ve $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(B(x_0,r), B(x_0,2r)) \ge 1$ olsun. Bu takdirde T_1 ve T_2 sabitleri p^-, p^+, Poincaré eşitsizliği sabitine, katlayan sabiti c_d'ye ve r yarıçapına bağlı olmak üzere

$$T_1\mu_\vartheta(B(x_0,r)) \le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(B(x_0,r), B(x_0,2r)) \le T_2\mu_\vartheta(B(x_0,r))$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Herhangi bir $f \in C_0^\infty(B(x_0,2r))$ fonksiyonu $|\nabla f| \le \frac{2}{r}$ ve $B(x_0,r)$ yuvarında $f = 1$ olacak şekilde alınsın. μ_ϑ bir katlayan ölçüm olduğundan

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,r\right),B\left(x_0,2r\right)\right) &\le \int_{B\left(x_0,2r\right)} \left|\nabla f\left(x\right)\right|^{p(x)} \vartheta\left(x\right)dx \\ &\le 2^{p^+}\operatorname{maks}\left\{r^{-p^-},r^{-p^+}\right\}\mu_\vartheta\left(B\left(x_0,2r\right)\right) \\ &\le 2^{p^+}c_d\operatorname{maks}\left\{r^{-p^-},r^{-p^+}\right\}\mu_\vartheta\left(B\left(x_0,r\right)\right)\end{aligned}$$

olup

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,r\right),B\left(x_0,2r\right)\right)\le 2^{p^+}c_d\operatorname{maks}\left\{r^{-p^-},r^{-p^+}\right\}\mu_\vartheta\left(B\left(x_0,r\right)\right) \tag{4.1.12.1}$$

elde edilir. Diğer taraftan $0<s<r$ ve $f\in R^*_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,s\right),B\left(x_0,2r\right)\right)$ verilsin. $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,r\right),B\left(x_0,2r\right)\right)\ge 1$ olduğundan $\rho_{L^{p(.)}_\vartheta\left(B\left(x_0,2r\right)\right)}\left(\left|\nabla f\right|\right)\ge 1$ sağlanır. Teorem 2.1.11'den $\left\|\nabla f\right\|_{L^{p(.)}_\vartheta\left(B\left(x_0,2r\right)\right)}<\rho_{L^{p(.)}_\vartheta\left(B\left(x_0,2r\right)\right)}\left(\left|\nabla f\right|\right)$ bulunur. Buradan, $L^1_\vartheta\left(B\left(x_0,2r\right)\right)$ uzayındaki Poincaré eşitsizliği ve $L^{p(.)}_\vartheta\left(B\left(x_0,2r\right)\right)\hookrightarrow L^1_\vartheta\left(B\left(x_0,2r\right)\right)$ olması da kullanılırsa (Liu, 2008),

$$\begin{aligned}\mu_\vartheta\left(B\left(x_0,s\right)\right) &= \int_{B\left(x_0,s\right)}\vartheta\left(x\right)dx \le \int_{B\left(x_0,s\right)}\left|f\left(x\right)\right|\vartheta\left(x\right)dx \le \int_{B\left(x_0,2r\right)}\left|f\left(x\right)\right|\vartheta\left(x\right)dx \\ &\le rc\int_{B\left(x_0,2r\right)}\left|\nabla f\left(x\right)\right|\vartheta\left(x\right)dx \\ &\le rc\left(1+\left|B\left(x_0,2r\right)\right|\right)\left\|\nabla f\right\|_{L^{p(.)}_\vartheta\left(B\left(x_0,2r\right)\right)} \\ &\le rc\left(1+\left|B\left(x_0,2r\right)\right|\right)\int_{B\left(x_0,2r\right)}\left|\nabla f\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx\end{aligned}$$

olup

$$\mu_\vartheta\left(B\left(x_0,s\right)\right)\le rc\left(1+\left|B\left(x_0,2r\right)\right|\right)\int_{B\left(x_0,2r\right)}\left|\nabla f\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx \tag{4.1.12.2}$$

elde edilir. Burada $\left|B\left(x_0,2r\right)\right|<\infty$ olduğundan $L^{p(.)}_\vartheta\left(B\left(x_0,2r\right)\right)\hookrightarrow L^1_\vartheta\left(B\left(x_0,2r\right)\right)$ gömülme normu $1+\left|B\left(x_0,2r\right)\right|$ ifadesini geçemez. Eğer (4.1.12.2) eşitsizliğinde $f\in R^*_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,s\right),B\left(x_0,2r\right)\right)$ üzerinden infimum ve $s\to r$ için limit alınırsa

$$\mu_\vartheta\left(B\left(x_0,r\right)\right)\le rc\left(1+\left|B\left(x_0,2r\right)\right|\right)\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,r\right),B\left(x_0,2r\right)\right) \tag{4.1.12.3}$$

elde edilir. (4.1.12.1) ve (4.1.12.3) eşitsizliklerinden $T_1=\left(rc\left(1+\left|B\left(x_0,2r\right)\right|\right)\right)^{-1}$ ve $T_2=2^{p^+}c_d\operatorname{maks}\left\{r^{-p^-},r^{-p^+}\right\}$ için ispatlanması gereken ifade bulunur.

Şimdi yuvarlar üzerinde tanımlı rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitelerin karşılaştırılması verilecektir. Ayrıca, birim kürenin $(d-1)$-boyutlu ölçümü olarak ifade edilen ω_{d-1} ile kapasite arasındaki ilişki verilecektir.

Teorem 4.1.13: Herhangi bir $A\subset B(x_0,r)$ verilsin. Ayrıca $\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,4r)\right)\geq 1$ ve $0<r\leq s\leq 2r$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{T}\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,2r)\right)\leq \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,2s)\right)\leq \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,2r)\right)$$

olacak şekilde bir $T>0$ sayısı vardır.

İspat: Hipotezden $2r\leq 2s$ olup $B(x_0,2r)\subset B(x_0,2s)$ kapsaması gerçeklenir. Rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesinin monotonluk özelliğinden

$$\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,2s)\right)\leq \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,2r)\right)$$

bulunur. İlk eşitsizliği ispatlamak için $s=2r$ durumu olan

$$\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,2r)\right)\leq T\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,4r)\right) \tag{4.1.13.1}$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir. Rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesi bir Choquet kapasite olduğundan, A kompakt bir küme olarak kabul edilebilir. Şimdi $0\leq g\leq 1$ olmak üzere bir $g\in C_0^\infty\left(B(x_0,2r)\right)$ fonksiyonu $|\nabla g|\leq \frac{2}{r}$ ve $B(x_0,r)$ yuvarında $g=1$ olacak şekilde seçilsin. Ayrıca $0\leq f\leq 1$ olmak üzere $f\in R^*_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,4r)\right)$ fonksiyonu alınsın. Eğer $R^*_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,4r)\right)$ kümesi ve g fonksiyonunun tanımları ve $C_0^\infty\left(B(x_0,2r)\right)$ uzayının $W_\vartheta^{1,p(.)}\left(B(x_0,2r)\right)$ uzayında yoğunluğu kullanılırsa, $gf\in W_\vartheta^{1,p(.)}\left(B(x_0,2r)\cap C_c\left(B(x_0,2r)\right)\right)$ ve A kümesi üzerinde $gf=1$ bulunur. Böylece $gf\in R_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,2r)\right)$ olur. O halde

$$\begin{aligned}
&\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,2r)\right)\\
&\leq \int_{B(x_0,2r)}\left|g(x)\nabla f(x)+f(x)\nabla g(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx\\
&\leq 2^{p^+}\int_{B(x_0,2r)}\left|g(x)\nabla f(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx+2^{p^+}\int_{B(x_0,2r)}\left|f(x)\nabla g(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx
\end{aligned}$$

$$\le 2^{p^+}\int_{B(x_0,2r)}|\nabla f(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx+2^{2p^+}\text{maks}\left\{r^{-p^-},r^{-p^+}\right\}\int_{B(x_0,2r)}|f(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx$$
$$\le 2^{p^+}\int_{B(x_0,4r)}|\nabla f(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx+2^{2p^+}\text{maks}\left\{r^{-p^-},r^{-p^+}\right\}\int_{B(x_0,4r)}|f(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, $\text{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,4r)\right)\ge 1$ olduğundan $\rho_{L_\vartheta^{p(.)}(B(x_0,4r))}\left(|\nabla f|\right)\ge 1$ sağlanır. Yine, Teorem 2.1.11'den $\|\nabla f\|_{L_\vartheta^{p(.)}(B(x_0,4r))}<\rho_{L_\vartheta^{p(.)}(B(x_0,4r))}\left(|\nabla f|\right)$ bulunur. Buradan, f fonksiyonunun tanımı, $L_\vartheta^1\left(B(x_0,4r)\right)$ uzayındaki Poincaré eşitsizliği ve $L_\vartheta^{p(.)}\left(B(x_0,4r)\right)\hookrightarrow L_\vartheta^1\left(B(x_0,4r)\right)$ gömülmesi kullanılırsa,

$$\int_{B(x_0,4r)}|f(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx\le\int_{B(x_0,4r)}|f(x)|\vartheta(x)dx\le 2rc\int_{B(x_0,4r)}|\nabla f(x)|\vartheta(x)dx$$
$$\le 2rc\left(1+|B(x_0,4r)|\right)\|\nabla f\|_{L_\vartheta^{p(.)}(B(x_0,4r))}$$
$$\le 2rc\left(1+|B(x_0,4r)|\right)\int_{B(x_0,4r)}|\nabla f(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $|B(x_0,4r)|<\infty$ olduğundan $L_\vartheta^{p(.)}\left(B(x_0,4r)\right)\hookrightarrow L_\vartheta^1\left(B(x_0,4r)\right)$ gömülme normu $1+|B(x_0,4r)|$ ifadesini geçemez. O halde $T=2^{p^+}+2^{2p^++1}rc\,\text{maks}\left\{r^{-p^-},r^{-p^+}\right\}\left(1+|B(x_0,4r)|\right)$ olmak üzere

$$\text{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,2r)\right)\le 2^{p^+}\int_{B(x_0,4r)}|\nabla f(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx$$
$$+2^{2p^+}\text{maks}\left\{r^{-p^-},r^{-p^+}\right\}2rc\left(1+|B(x_0,4r)|\right)\int_{B(x_0,4r)}|\nabla f(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx$$
$$\le T\int_{B(x_0,4r)}|\nabla f(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $f\in R^*_{p(.),\vartheta}\left(A,B(x_0,4r)\right)$ üzerinden infimum alınırsa (4.1.13.1) elde edilir. O halde ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.14: Herhangi $p(.)$ ve $q(.)$ değişken üsleri için $\frac{1}{p(.)}+\frac{1}{q(.)}=1$ olsun. Ayrıca ϑ ağırlık fonksiyonu her $x\in\mathbb{R}^d$ için $\vartheta(x)\ge 1$ koşulunu sağlasın ve $0<r_1<r_2<\infty$ olmak üzere $A(x_0;r_1,r_2)$ ile $B(x_0,r_2)-B(x_0,r_1)$ şeklindeki bir halka gösterilsin. Eğer $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A(x_0;r_1,r_2),B(x_0,r_2)\right)\geq 1$ ise,

$$\omega_{d-1}\leq T\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r_1),B(x_0,r_2)\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada c_h, değişken üslü Lebesgue uzayları için Hölder eşitsizliğinin sabiti olmak üzere

$$T=c_h\operatorname{maks}\left\{\left[\operatorname{maks}\left\{r_2^{(1-d)q^-},r_2^{(1-n)q^+}\right\}\left|A(x_0;r_1,r_2)\right|\right]^{\frac{1}{q^-}},\left[\operatorname{maks}\left\{r_2^{(1-d)q^-},r_2^{(1-d)q^+}\right\}\left|A(x_0;r_1,r_2)\right|\right]^{\frac{1}{q^+}}\right\}$$

şeklindedir.

İspat: Herhangi bir $f\in C_0^\infty\left(B(x_0,r_2)\right)$ fonksiyonu $|\nabla f|\leq\frac{2}{r}$ ve $B(x_0,r_1)$ yuvarında $f=1$ koşullarını sağlayacak şekilde seçilsin. Bu takdirde $f\in R^*_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r_1),B(x_0,r_2)\right)$ olur. Ayrıca her $y\in\mathbb{R}^d$ için standart temsil teoreminden

$$f(y)=\frac{1}{\omega_{d-1}}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\nabla f(x)(y-x)}{|x-y|^d}dx$$

olur (Gilbarg ve Trudinger, 1983). Yine $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A(x_0;r_1,r_2),B(x_0,r_2)\right)\geq 1$ olduğundan $\rho_{L_\vartheta^{p(.)}(A(x_0;r_1,r_2))}\left(|\nabla f|\right)\geq 1$ sağlanır. Eğer, Teorem 2.1.11 kullanılırsa

$$\|\nabla f\|_{L_\vartheta^{p(.)}(A(x_0;r_1,r_2))}<\rho_{L_\vartheta^{p(.)}(A(x_0;r_1,r_2))}\left(|\nabla f|\right)$$

bulunur. Ayrıca, f fonksiyonunun tanımından $\frac{1}{p(.)}+\frac{1}{q(.)}=1$ olmak üzere $c_h>0$ için

$$\begin{aligned}\omega_{d-1}=\omega_{d-1}f(x_0)&=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\nabla f(x)(x_0-x)}{|x-x_0|^d}dx\\&=\int_{A(x_0;r_1,r_2)}\frac{\nabla f(x)(x_0-x)}{|x-x_0|^d}\vartheta(x)^{\frac{1}{p(x)}}\vartheta(x)^{-\frac{1}{p(x)}}dx\\&\leq c_h\left\||\nabla f(x)|\vartheta(x)^{\frac{1}{p(.)}}\right\|_{L^{p(.)}(A(x_0;r_1,r_2))}\left\||x-x_0|^{1-d}\vartheta(x)^{-\frac{1}{p(.)}}\right\|_{L^{q(.)}(A(x_0;r_1,r_2))}\end{aligned}$$

$$\leq c_h \left\| \left|x-x_0\right|^{1-d} \vartheta(x)^{-\frac{1}{p(.)}} \right\|_{L^{q(.)}(A(x_0;r_1,r_2))} \int\limits_{B(x_0,r_2)} \left|\nabla f(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)dx$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 2.1.11'den $c_h > 0$ için

$$\omega_{d-1} \leq c_h \text{maks}\left\{ \left(\rho_{L^{q(.)}(A(x_0;r_1,r_2))}\left(\left|x-x_0\right|^{1-d} \vartheta(x)^{-\frac{1}{p(.)}} \right) \right)^{\frac{1}{q^-}}, \right.$$

$$\left. \left(\rho_{L^{q(.)}(A(x_0;r_1,r_2))}\left(\left|x-x_0\right|^{1-d} \vartheta(x)^{-\frac{1}{p(.)}} \right) \right)^{\frac{1}{q^+}} \right\} \int\limits_{B(x_0,r_2)} \left|\nabla f(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)dx$$

$$= c_h \text{maks}\left\{ \left(\int\limits_{A(x_0;r_1,r_2)} \left|x-x_0\right|^{(1-d)q(x)} \vartheta(x)^{-\frac{q(x)}{p(x)}} dx \right)^{\frac{1}{q^-}}, \right.$$

$$\left. \left(\int\limits_{A(x_0;r_1,r_2)} \left|x-x_0\right|^{(1-d)q(x)} \vartheta(x)^{-\frac{q(x)}{p(x)}} dx \right)^{\frac{1}{q^+}} \right\} \int\limits_{B(x_0,r_2)} \left|\nabla f(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)dx$$

$$\leq c_h \text{maks}\left\{ \left[\text{maks}\left\{ r_2^{(1-d)q^-}, r_2^{(1-d)q^+} \right\} \left|A(x_0;r_1,r_2)\right| \right]^{\frac{1}{q^-}}, \right.$$

$$\left. \left[\text{maks}\left\{ r_2^{(1-d)q^-}, r_2^{(1-d)q^+} \right\} \left|A(x_0;r_1,r_2)\right| \right]^{\frac{1}{q^+}} \right\} \int\limits_{B(x_0,r_2)} \left|\nabla f(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)dx$$

bulunur. Son eşitsizlikte $f \in R^*_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r_1), B(x_0,r_2)\right)$ üzerinden infimum alınırsa istenen elde edilir.

Bu bölümün kalan kısmında, tanıtılan Sobolev $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi ve rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Teorem 4.1.15: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı ve $K \subset \Omega$ kompakt bir küme olsun. Bu takdirde

$$C_{p(.),\vartheta}(K) \leq T\text{maks}\left\{ \text{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)^{\frac{1}{p^+}}, \text{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) \right\}$$

olacak şekilde bir $T > 0$ sayısı vardır.

İspat: Öncelikle $\text{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) < \infty$ olsun. Aksi halde ispat açıktır. Ayrıca

$$\rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|) \leq \text{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) + \varepsilon \qquad (4.1.15.1)$$

olacak şekilde $f \in R^{*}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$ alınsın. Şimdi f fonksiyonu Ω kümesinin dışında sıfır olacak şekilde genişletilsin, yani

$$f(x)=\begin{cases} f(x), & x\in\Omega \\ 0, & x\in\mathbb{R}^d-\Omega \end{cases}$$

olsun ve $g=\min\{1,f\}$ olarak tanımlansın. Sobolev $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi ve rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin tanımları göz önüne alınırsa $g\in S_{p(.),\vartheta}(K)$ olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned} C_{p(.),\vartheta}(K) &\le \int_{\mathbb{R}^d}\left(|g(x)|^{p(x)}+|\nabla g(x)|^{p(x)}\right)\vartheta(x)\,dx \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d}\left(|g(x)|^{p(x)}+|\nabla f(x)|^{p(x)}\right)\vartheta(x)\,dx \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $0\le g\le 1$ olduğundan

$$\int_{\Omega}|g(x)|^{p(x)}\,\vartheta(x)\,dx \le \int_{\Omega}|g(x)|\,\vartheta(x)\,dx \le \int_{\Omega}|f(x)|\,\vartheta(x)\,dx \qquad (4.1.15.2)$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $L^1_\vartheta(\Omega)$ uzayındaki Poincaré eşitsizliği ve $L^{p(.)}_\vartheta(\Omega)\hookrightarrow L^1_\vartheta(\Omega)$ gömülmesi kullanılırsa

$$\|f\vartheta\|_1=\|f\|_{1,\vartheta}\le c\,\mathrm{diam}(\Omega)\|\nabla f\|_{1,\vartheta}\le c\,\mathrm{diam}(\Omega)\left(1+|\Omega|\right)\|\nabla f\|_{p(.),\vartheta} \qquad (4.1.15.3)$$

bulunur. Teorem 2.1.11 ve (4.1.15.2), (4.1.15.3) eşitsizliklerinden $T^*=\max\{1,c\,\mathrm{diam}(\Omega)(1+|\Omega|)\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} C_{p(.),\vartheta}(K) &\le \int_{\Omega}|g(x)|^{p(x)}\,\vartheta(x)\,dx+\int_{\Omega}|\nabla f(x)|^{p(x)}\,\vartheta(x)\,dx \\ &\le \int_{\Omega}|f(x)|\,\vartheta(x)\,dx+\int_{\Omega}|\nabla f(x)|^{p(x)}\,\vartheta(x)\,dx \\ &\le T^*\left[\|\nabla f\|_{p(.),\vartheta}+\rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|)\right] \\ &\le T^*\left(\mathrm{maks}\left\{\rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|)^{\frac{1}{p^-}},\rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|)^{\frac{1}{p^+}}\right\}+\rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|)\right) \end{aligned} \qquad (4.1.15.4)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $1<p^-\le p^+<\infty$ olduğundan

$$\text{maks}\left\{\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^-}},\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}\right\}\le \text{maks}\left\{\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right),\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}\right\}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\text{maks}\left\{\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right),\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}\right\}+\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)\le 2\text{maks}\left\{\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right),\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}\right\}$$

ifadesi bulunur. Gerçekten, $\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}\le\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)$ olduğunda,

$$\text{maks}\left\{\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right),\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}\right\}+\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)=2\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)\tag{4.1.15.5}$$

eşitsizliği sağlanır. Diğer taraftan, $\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)\le\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}$ olduğunda,

$$\begin{aligned}\text{maks}\left\{\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right),\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}\right\}+\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)&=\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}+\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)\\&\le\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}+\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}\\&=2\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}\end{aligned}\tag{4.1.15.6}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde, (4.1.15.5) ve (4.1.15.6) ifadelerinden istenilen eşitsizlik elde edilir. Ayrıca, (4.1.15.1) eşitsizliği, (4.1.15.4) ifadesinde göz önüne alınırsa $T=2\max\left\{1,c\,\text{diam}(\Omega)\left(1+|\Omega|\right)\right\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}C_{p(.),\vartheta}(K)&\le T^*\left(\text{maks}\left\{\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right),\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}\right\}+\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)\right)\\&\le T\text{maks}\left\{\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right),\rho_{p(.),\vartheta}\left(|\nabla f|\right)^{\frac{1}{p^+}}\right\}\\&\le T\text{maks}\left\{\text{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)+\varepsilon,\left(\text{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)+\varepsilon\right)^{\frac{1}{p^+}}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon\to 0$ için limit alınırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.16: $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ sınırlı ve $A\subset\Omega$ olsun. Bu takdirde

$$C_{p(.),\vartheta}(A) \le T\text{maks}\left\{ cap_{p(.),\vartheta}(A,\Omega)^{\frac{1}{p^+}}, cap_{p(.),\vartheta}(A,\Omega) \right\}$$

olacak şekilde bir $T > 0$ sayısı vardır.

İspat: Öncelikle $cap_{p(.),\vartheta}(A,\Omega) < \infty$ olduğu kabul edilsin. Aksi halde ispat açıktır. Rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin tanımından $m \to \infty$ için $cap_{p(.),\vartheta}(U_m,\Omega) \to cap_{p(.),\vartheta}(A,\Omega)$ olacak şekilde $U_m \supset A$ açık kümeleri vardır. Şimdi $U = \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$ şeklinde tanımlansın. O halde, U bir Borel kümesidir. Ayrıca $A \subset U$ olduğundan

$$C_{p(.),\vartheta}(A) \le C_{p(.),\vartheta}(U) = \sup_{\substack{K \subset U \\ K \text{ kompakt}}} C_{p(.),\vartheta}(K)$$

bulunur. Teorem 4.1.15'ten

$$C_{p(.),\vartheta}(A) \le T \sup_{\substack{K \subset U \\ K \text{ kompakt}}} \left(\text{maks}\left\{ cap_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)^{\frac{1}{p^+}}, cap_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) \right\} \right)$$

$$\le T\text{maks}\left\{ \left(\sup_{\substack{K \subset U \\ K \text{ kompakt}}} \left(cap_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) \right) \right)^{\frac{1}{p^+}}, \sup_{\substack{K \subset U \\ K \text{ kompakt}}} \left(cap_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) \right) \right\}$$

$$= T\text{maks}\left\{ cap_{p(.),\vartheta}(U,\Omega)^{\frac{1}{p^+}}, cap_{p(.),\vartheta}(U,\Omega) \right\} \qquad (4.1.16.1)$$

eşitsizliği elde edilir. Rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin monotonluk özelliğinden

$$cap_{p(.),\vartheta}(A,\Omega) \le cap_{p(.),\vartheta}(U,\Omega) \qquad (4.1.16.2)$$

bulunur. Diğer taraftan, her bir $s = 1, 2, ...$ verildiğinde $\bigcap_{m=1}^{\infty} U_m \subset U_s$ için

$$cap_{p(.),\vartheta}(U,\Omega) = cap_{p(.),\vartheta}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} U_m, \Omega \right) \le \lim_{s\to\infty} cap_{p(.),\vartheta}(U_s,\Omega) = cap_{p(.),\vartheta}(A,\Omega) \qquad (4.1.16.3)$$

ifadesinde sağlanır. Ayrıca (4.1.16.2) ve (4.1.16.3) eşitsizliklerinden $cap_{p(.),\vartheta}(U,\Omega) = cap_{p(.),\vartheta}(A,\Omega)$ eşitliği elde edilir. O halde (4.1.16.1) eşitsizliğinden ispat tamamlanır.

Aşağıdaki sonuç, Teorem 4.1.16'dan kolaylıkla görülür.

Sonuç 4.1.17: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı bir küme ve $\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A,\Omega)=0$ olsun. Bu takdirde $C_{p(.),\vartheta}(A)=0$ sağlanır.

Sonuç 4.1.17'nin tersi her zaman doğru değildir. Tersinin doğruluğu için aşağıdaki teorem verilsin.

Teorem 4.1.18: Herhangi bir $A \subset \Omega$ kümesi verilsin. Ayrıca, $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$ uzayı $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayında yoğun olsun. Eğer $C_{p(.),\vartheta}(A)=0$ ise, $\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(A,\Omega)=0$ sağlanır.

İspat: Öncelikle, $C_{p(.),\vartheta}(K)=0$ olacak şekilde $K \subset \Omega$ kompakt kümesi alınsın. $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d) \cap C(\mathbb{R}^d)$ uzayı $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayında yoğun olduğundan ve $C^{\infty}(\mathbb{R}^d) \subset C(\mathbb{R}^d)$ kapsamasından tanımdaki kabul edilebilir fonksiyonların kümesi yerine $S^{*}_{p(.),\vartheta}(K)=S_{p(.),\vartheta}(K) \cap C(\mathbb{R}^d)$ alınabilir. Böylece $\|f_m\|_{1,p(.),\vartheta} \to 0$ olacak şekilde $(f_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset S^{*}_{p(.),\vartheta}(K)$ dizisi vardır. Yine K kümesinde $g=1$ olan $g \in C_0^{\infty}(\Omega)$ alınsın. O halde, $S_{p(.),\vartheta}(K)$ kümesinin tanımı ve $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayında yoğunluğu kullanılırsa $gf_m \in R_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)$ bulunur. Ayrıca, g fonksiyonunun tanımından ve $\|f_m\|_{1,p(.),\vartheta} \to 0$ yakınsamasından

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) &\le \int_{\Omega} \left|\nabla\left(g(x)f_m(x)\right)\right|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx \\
&= \int_{K} \left|\nabla\left(g(x)f_m(x)\right)\right|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx + \int_{\Omega-K} \left|\nabla\left(g(x)f_m(x)\right)\right|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx \\
&= \int_{K} \left|\nabla f_m(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx \\
&\le \int_{\mathbb{R}^d} \left|f_m(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} \left|\nabla f_m(x)\right|^{p(x)} \vartheta(x)\,dx \\
&= \rho_{1,p(.),\vartheta}(f_m)
\end{aligned}
$$

olup $\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega) \le \rho_{1,p(.),\vartheta}(f_m)$ elde edilir. Burada $m \to \infty$ için limit alınır ve $p^{+} < \infty$ olduğundan $\|f_m\|_{1,p(.),\vartheta} \to 0$ olması için gerek ve yeter koşulun $\rho_{1,p(.),\vartheta}(f_m) \to 0$ olduğu da göz önüne bulundurulursa $\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}(K,\Omega)=0$ elde edilir. Şimdi $C_{p(.),\vartheta}(A)=0$ olacak şekilde $A\subset\Omega$ kümesi alınsın. Sobolev $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesinin tanımından $m\to\infty$ için $C_{p(.),\vartheta}\left(U_m\right)\to 0$ olacak şekilde $U_m\supset A$ açık kümeleri mevcuttur. Ayrıca, $U=\bigcap_{m=1}^{\infty}U_m\cap\Omega$ olarak tanımlansın. O halde U, $A\subset U$ kapsamasını sağlayan bir Borel kümesidir. Ayrıca, her $s=1,2,...$ verildiğinde $\bigcap_{m=1}^{\infty}U_m\subset U_s$ için Sobolev $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesinin monotonluk özelliğinden

$$C_{p(.),\vartheta}\left(U\right)=C_{p(.),\vartheta}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}U_m\cap\Omega\right)\le\lim_{s\to\infty}C_{p(.),\vartheta}\left(U_s\right)=C_{p(.),\vartheta}\left(A\right)=0$$

olup $C_{p(.),\vartheta}\left(U\right)=0$ sağlanır. Yine, rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesinin özelliğinden

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,\Omega\right)\le\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(U,\Omega\right)=\sup_{\substack{K\subset U\\ K\text{ kompakt}}}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(K,\Omega\right)$$

elde edilir. Son eşitlikte, ispatın ilk kısmından $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(K,\Omega\right)=0$ olduğu göz önüne alındığında $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,\Omega\right)=0$ olarak elde edilir.

Teorem 4.1.19: $A\subset B\left(x_0,r\right)$ için $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B\left(x_0,2r\right)\right)\ge 1$ olsun. Bu takdirde,

$$\frac{1}{T_1}C_{p(.),\vartheta}\left(A\right)\le\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B\left(x_0,2r\right)\right)\le T_2C_{p(.),\vartheta}\left(A\right)$$

olacak şekilde $T_1,T_2>0$ sayıları vardır.

İspat: Öncelikle ispat, kompakt kümeler için gösterilsin. Bunun için $K\subset B\left(x_0,r\right)$ kompakt kümesi alınsın. Şimdi $g\in C_0^{\infty}\left(B\left(x_0,2r\right)\right)$, $0\le g\le 1$ fonksiyonu $\left|\nabla g\right|\le\frac{2}{r}$ ve $B\left(x_0,r\right)$ yuvarında $g=1$ olacak şekilde tanımlansın. Ayrıca $f\in S_{p(.),\vartheta}\left(K\right)$ alınsın. Eğer $S_{p(.),\vartheta}\left(K\right)$ kümesi ve g fonksiyonunun tanımları, $C_0^{\infty}\left(B\left(x_0,2r\right)\right)$ uzayının $W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(B\left(x_0,2r\right)\right)$ uzayında yoğunluğu kullanılırsa, $gf\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(B\left(x_0,2r\right)\cap C_c\left(B\left(x_0,2r\right)\right)\right)$ ve K kümesinde $gf\ge 1$ olarak bulunur. Böylece $gf\in R_{p(.),\vartheta}^{*}\left(K,B\left(x_0,2r\right)\right)$ olur. O halde

$$\begin{aligned}
\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B\left(x_0,2r\right)\right) &\le \int_{B(x_0,2r)} \left|g\left(x\right)\nabla f\left(x\right)+f\left(x\right)\nabla g\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx \\
&\le 2^{p^+}\int_{B(x_0,2r)} \left|g\left(x\right)\nabla f\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx \\
&\quad +2^{p^+}\int_{B(x_0,2r)} \left|f\left(x\right)\nabla g\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx \\
&\le 2^{p^+}\int_{B(x_0,2r)} \left|\nabla f\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx \\
&\quad +2^{2p^+}\operatorname{maks}\left\{r^{-p^-},r^{-p^+}\right\}\int_{B(x_0,2r)} \left|f\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx \\
&\le 2^{2p^+}\left(1+\operatorname{maks}\left\{r^{-p^-},r^{-p^+}\right\}\right)\int_{\mathbb{R}^d}\left(\left|f\left(x\right)\right|^{p(x)}+\left|\nabla f\left(x\right)\right|^{p(x)}\right)\vartheta\left(x\right)dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $f\in S_{p(.),\vartheta}\left(K\right)$ üzerinden infimum alınırsa $T_2=2^{2p^+}\left(1+\operatorname{maks}\left\{r^{-p^-},r^{-p^+}\right\}\right)$ olmak üzere

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(K,B\left(x_0,2r\right)\right)\le T_2C_{p(.),\vartheta}\left(K\right) \tag{4.1.19.1}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, $0\le f\le 1$ olmak üzere $f\in C_0^\infty\left(B\left(x_0,2r\right)\right)$ fonksiyonu K kümesini içeren bir açık kümede $f=1$ olacak şekilde tanımlansın. O halde $f\in R^*_{p(.),\vartheta}\left(K,B\left(x_0,2r\right)\right)$ olur. Hipotezden $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A,B\left(x_0,2r\right)\right)\ge 1$ olduğundan $\rho_{L_\vartheta^{p(.)}(B(x_0,2r))}\left(\left|\nabla f\right|\right)\ge 1$ bulunur. Ayrıca, Teorem 2.1.11 kullanılırsa $\left\|\nabla f\right\|_{L_\vartheta^{p(.)}(B(x_0,2r))}<\rho_{L_\vartheta^{p(.)}(B(x_0,2r))}\left(\left|\nabla f\right|\right)$ bulunur. O halde, $0\le f\le 1$, $L_\vartheta^1\left(B\left(x_0,2r\right)\right)$ uzayındaki Poincaré eşitsizliği, $L_\vartheta^{p(.)}\left(B\left(x_0,2r\right)\right)\hookrightarrow L_\vartheta^1\left(B\left(x_0,2r\right)\right)$ olması kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d}\left|f\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx &\le \int_{\mathbb{R}^d}\left|f\left(x\right)\right|\vartheta\left(x\right)dx \\
&= \int_{B(x_0,2r)}\left|f\left(x\right)\right|\vartheta\left(x\right)dx+\int_{\mathbb{R}^d-B(x_0,2r)}\left|f\left(x\right)\right|\vartheta\left(x\right)dx \\
&= \int_{B(x_0,2r)}\left|f\left(x\right)\right|\vartheta\left(x\right)dx \\
&\le cr\int_{B(x_0,2r)}\left|\nabla f\left(x\right)\right|\vartheta\left(x\right)dx \\
&\le cr\left(1+\left|B\left(x_0,2r\right)\right|\right)\left\|\nabla f\right\|_{L_\vartheta^{p(.)}(B(x_0,2r))} \\
&\le cr\left(1+\left|B\left(x_0,2r\right)\right|\right)\int_{B(x_0,2r)}\left|\nabla f\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $L_{\vartheta}^{p(.)}\left(B\left(x_0,2r\right)\right)\hookrightarrow L_{\vartheta}^{1}\left(B\left(x_0,2r\right)\right)$ gömülme normu $1+\left|B\left(x_0,2r\right)\right|$ ifadesini geçemez. Böylece $T_1=1+cr\left(1+\left|B\left(x_0,2r\right)\right|\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
C_{p(.),\vartheta}(K) &\leq \int_{\mathbb{R}^d}\left(\left|f(x)\right|^{p(x)}+\left|\nabla f(x)\right|^{p(x)}\right)\vartheta(x)\,dx \\
&\leq cr\left(1+\left|B\left(x_0,2r\right)\right|\right)\int_{B(x_0,2r)}\left|\nabla f(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)\,dx+\int_{B(x_0,2r)}\left|\nabla f(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)\,dx \\
&= T_1\int_{B(x_0,2r)}\left|\nabla f(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)\,dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $f\in R_{p(.),\vartheta}^{*}\left(K,B\left(x_0,2r\right)\right)$ üzerinden infimum alınırsa $T_1=1+cr\left(1+\left|B\left(x_0,2r\right)\right|\right)$ için

$$\frac{1}{T_1}C_{p(.),\vartheta}(K)\leq cap_{p(.),\vartheta}\left(K,B\left(x_0,2r\right)\right) \tag{4.1.19.2}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.1.19.1) ve (4.1.19.2) eşitsizliklerinden kompakt kümeler için ispat tamamlanır. Şimdi $A\subset B\left(x_0,r\right)$ kümesi alınsın. Sobolev $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesinin tanımından $m\to\infty$ için $C_{p(.),\vartheta}\left(E_m\right)\to C_{p(.),\vartheta}(A)$ olan $A\subset E_m\subset B\left(x_0,2r\right)$ şeklindeki $\left(E_m\right)_{m\in\mathbb{N}}$ açık kümeleri vardır. Ayrıca $E=\bigcap_{m=1}^{\infty}E_m$ olsun. O halde E, $A\subset E$ kapsamasını sağlayan bir Borel kümesidir. Buradan

$$C_{p(.),\vartheta}(A)\leq C_{p(.),\vartheta}(E) \tag{4.1.19.3}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. Böylece her $s=1,2,...$ verildiğinde $\bigcap_{m=1}^{\infty}U_m\subset U_s$ için Sobolev $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesinin özelliğinden

$$C_{p(.),\vartheta}(E)=C_{p(.),\vartheta}\left(\bigcap_{m=1}^{\infty}E_m\right)\leq \lim_{s\to\infty}C_{p(.),\vartheta}\left(E_s\right)=C_{p(.),\vartheta}(A) \tag{4.1.19.4}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde (4.1.19.3) ve (4.1.19.4) ifadelerinden $C_{p(.),\vartheta}(E)=C_{p(.),\vartheta}(A)$ elde edilir. Rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesinin Choquet kapasite olması kullanılırsa

$$\begin{aligned}
cap_{p(.),\vartheta}\left(A,B\left(x_0,2r\right)\right) &= \inf_{\substack{A\subset E\subset B(x_0,2r)\\ E\text{ açık}}} cap_{p(.),\vartheta}\left(E,B\left(x_0,2r\right)\right) \\
&\leq cap_{p(.),\vartheta}\left(E,B\left(x_0,2r\right)\right)=\sup_{\substack{K\subset E\\ K\text{ kompakt}}} cap_{p(.),\vartheta}\left(K,B\left(x_0,2r\right)\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca kompakt kümeler için ispatın ilk kısmı göz önüne alınırsa $T_2 = 2^{2p^+}\left(1+\max\left\{r^{-p^-}, r^{-p^+}\right\}\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A, B\left(x_0, 2r\right)\right) &\leq T_2 \sup_{\substack{K\subset E \\ K \text{ kompakt}}} C_{p(.),\vartheta}\left(K\right) \\ &= T_2 C_{p(.),\vartheta}\left(E\right) = T_2 C_{p(.),\vartheta}\left(A\right) \qquad (4.1.19.5)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan, benzer teknikle $T_1 = 1 + cr\left(1+\left|B\left(x_0, 2r\right)\right|\right)$ olmak üzere

$$\frac{1}{T_1} C_{p(.),\vartheta}\left(A\right) \leq \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A, B\left(x_0, 2r\right)\right) \qquad (4.1.19.6)$$

ifadesinin sağlandığı görülür. Böylece (4.1.19.5) ve (4.1.19.6) eşitsizliklerinden ispat tamamlanır.

4.2. Sıfır Sınır Değerli Ağırlıklı Değişken Üslü Sobolev Uzayları ve Bazı Özellikleri

Bu bölümde sıfır sınır değerli ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayları tanıtılacak ve bazı temel özellikleri incelenecektir. Ayrıca, bu uzaylar için Poincaré eşitsizliği ispatlanacaktır. Uzayın elemanlarından oluşan yeni bir kapasite tanımlanıp Sobolev $\left(p(.), \vartheta\right)$-kapasitesi ile arasındaki bazı eşitsizlikler verilecektir.

Aşağıdaki teorem 1998 yılında Kilpeläinen tarafından yapılan (Kilpeläinen, 1998) çalışması kullanılarak ispatlanabilir.

Teorem 4.2.1: $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı herhangi f ve g fonksiyonları $\left(p(.), \vartheta\right)$-q.c. olsun ve $U \subset \mathbb{R}^d$ açık kümesi alınsın. Bu takdirde

(i) U kümesinde h.h.h. $f = g$ ise, U kümesinde $f = g$ $\left(p(.), \vartheta\right)$-q.e. olur.

(ii) U kümesinde h.h.h. $f \leq g$ ise, U kümesinde $f \leq g$ $\left(p(.), \vartheta\right)$-q.e. olur.

Herhangi $A \subset \mathbb{R}^d$ için

$$S^*_{p(.),\vartheta}\left(A\right) = \left\{f \in W^{1,p(.)}_{\vartheta}\left(\mathbb{R}^d\right) : \ f \text{ fonksiyonu } \left(p(.), \vartheta\right)\text{- q.c. ve A kümesinde } \left(p(.), \vartheta\right)\text{- q.e.}\right\}$$

kümesi verilsin. Şimdi Sobolev $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi yerine düşünülebilecek olan

$$C^*_{p(.),\vartheta}(A)=\inf_{f\in S^*_{p(.),\vartheta}(A)}\rho_{1,p(.),\vartheta}(f)=\inf_{f\in S^*_{p(.),\vartheta}(A)}\int_{\mathbb{R}^d}\left(|f(x)|^{p(x)}+|\nabla f(x)|^{p(x)}\right)\vartheta(x)dx$$

tanımlansın.

Teorem 4.2.2: $A\subset\mathbb{R}^d$ olmak üzere her $x\in\mathbb{R}^d$ için $\vartheta(x)\geq 1$ eşitsizliği sağlansın. O halde $C_{p(.),\vartheta}(A)\leq C^*_{p(.),\vartheta}(A)$ olur.

İspat: Herhangi bir $0<\varepsilon<1$ sayısı ve $0\leq f\leq 1$ olacak şekilde herhangi $f\in S^*_{p(.),\vartheta}(A)$ fonksiyonu alınsın. Ayrıca, $A-V$ kümesinde $f=1$ ve $\mathbb{R}^d-V$ kümesinde f sürekli fonksiyon olmak üzere $C_{p(.),\vartheta}(V)<\varepsilon$ olan bir V açık kümesi seçilsin. Şimdi, $U=\{x\in\mathbb{R}^d-V: f(x)>1-\varepsilon\}\cup V$ tanımlansın. Buradan $A-V\subset U-V$ olur. Yine, $C_{p(.),\vartheta}(V)<\varepsilon$ olduğundan $\rho_{1,p(.),\vartheta}(g)<\varepsilon$ ve $0\leq g\leq 1$ olacak şekilde $g\in S_{p(.),\vartheta}(V)$ alınsın. Ayrıca $h=\frac{f}{1-\varepsilon}+g$ fonksiyonu tanımlansın. U kümesinin tanımından $V\subset U$ olup $(U-V)\cup V=U$ ifadesi bulunur. Ayrıca $\vartheta(x)\geq 1$ için $|V|\leq C_{p(.),\vartheta}(V)$ olduğunu biliniyor (Aydın, 2012b). O halde, $(U-V)\cup V=U$ kümesinde h.h.h. $h\geq 1$ olur. Ayrıca f fonksiyonu $\mathbb{R}^d-V$ kümesinde sürekli ve V kümesi açık olduğundan U açık olup $A\subset U$ kapsaması sağlanır. O halde, $h\in S_{p(.),\vartheta}(A)$ olur. Yine, $t\to t^{p(.)}$ dönüşümünün konveks olduğu biliniyor (Diening ve ark., 2011). Buradan Teorem 2.1.5'teki eşitsizlik, değişken üslü durumu için de sağlanır. O halde, her $\delta>0$ için

$$\begin{aligned}\rho_{p(.),\vartheta}(h)&\leq\int_{\mathbb{R}^d}\left[(1+\delta)^{p(x)-1}\left|\frac{f(x)}{1-\varepsilon}\right|^{p(x)}+\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^{p(x)-1}|g(x)|^{p(x)}\right]\vartheta(x)dx\\&\leq(1+\delta)^{p^+-1}\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{f(x)}{1-\varepsilon}\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx+\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^{p^+-1}\int_{\mathbb{R}^d}|g(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx\\&<\left(\frac{1+\delta}{1-\varepsilon}\right)^{p^+}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|^{p(x)}\vartheta(x)dx+\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^{p^+}\varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{2p^+}}$ olarak seçilirse $\varepsilon \to 0$ için $\left(\frac{1+\delta}{1-\varepsilon}\right)^{p^+} \to 1$ ve $\left(1+\frac{1}{\delta}\right)^{p^+} \varepsilon = \left(\varepsilon^{\frac{1}{2p^+}} + \varepsilon^{\frac{1}{p^+}}\right)^{p^+} \to 0$ ifadesi bulunur. O halde

$$\rho_{p(.),\vartheta}(h) \le \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^{p(x)} \vartheta(x)dx = \rho_{p(.),\vartheta}(f)$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde $\rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla h|) \le \rho_{p(.),\vartheta}(|\nabla f|)$ olup $\rho_{1,p(.),\vartheta}(h) \le \rho_{1,p(.),\vartheta}(f)$ eşitsizliği elde edilir. Eğer $h \in S_{p(.),\vartheta}(A)$ ve $f \in S^*_{p(.),\vartheta}(A)$ üzerinden infimum alınırsa $C_{p(.),\vartheta}(A) \le C^*_{p(.),\vartheta}(A)$ bulunur.

Uyarı 4.2.3: Bu bölümün kalan kısmında $C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap W^{1,p(.)}_\vartheta(\mathbb{R}^d)$ uzayının $W^{1,p(.)}_\vartheta(\mathbb{R}^d)$ uzayında yoğun olması durumunda $p(.)$ değişken üssüne yoğunluk koşulunu sağlar denilecektir. Aşağıdaki teorem (Harjulehto ve ark. 2003b) çalışmasındaki Teorem 5.2'deki ispat yöntemiyle kolaylıkla ispatlanır.

Teorem 4.2.4: $p(.)$ değişken üssü yoğunluk koşulunu sağlasın. Herhangi bir $f \in W^{1,p(.)}_\vartheta(\mathbb{R}^d)$ için $\mathbb{R}^d$ kümesinde h.h.h. $f = g$ olacak şekilde $g \in W^{1,p(.)}_\vartheta(\mathbb{R}^d)$ $(p(.),\vartheta)$-q.c. fonksiyonu vardır.

Teorem 4.2.5: $A \subset \mathbb{R}^d$ olsun ve $p(.)$ yoğunluk koşulunu sağlasın. Ayrıca, her $x \in \mathbb{R}^d$ için $\vartheta(x) \ge 1$ olsun. Bu takdirde, $C_{p(.),\vartheta}(A) = C^*_{p(.),\vartheta}(A)$ eşitliği vardır.

İspat: Burada ispatın tamamlanması için Teorem 4.2.2'den $C^*_{p(.),\vartheta}(A) \le C_{p(.),\vartheta}(A)$ eşitsizliğinin sağlanması yeterli olacaktır. Şimdi $f \in S_{p(.),\vartheta}(A)$ fonksiyonu ve B üzerinde $f \ge 1$ olacak şekilde bir $B \supset A$ açık kümesi verilsin. Teorem 4.2.4'ten B kümesinde h.h.h. $f \ge 1$ olacak şekilde $\mathbb{R}^d$ üzerinde tanımlı bir f^*, $(p(.),\vartheta)$-q.c. fonksiyonu vardır. Ayrıca, Teorem 4.2.1 (ii)'den ve $A \subset B$ ifadesinden A kümesinde $f^* \ge 1$ $(p(.),\vartheta)$-q.e. olur. Böylece $f^* \in S^*_{p(.),\vartheta}(A)$ bulunur. O halde, $f \in S_{p(.),\vartheta}(A)$ ve $f^* \in S^*_{p(.),\vartheta}(A)$ üzerinden infimum alınırsa istenen elde edilir.

Teorem 4.2.6: Her $x\in\mathbb{R}^d$ için $\vartheta(x)\geq 1$ eşitsizliği sağlansın. Ayrıca, her $i\in\mathbb{N}$ için $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayında $f_i\to f$ olacak şekilde $f_i\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ $(p(.),\vartheta)$-q.c. fonksiyonları alınsın. O halde f, $(p(.),\vartheta)$-q.c. fonksiyondur ve $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisinin f fonksiyonuna $\mathbb{R}^d$ kümesinde noktasal olarak $(p(.),\vartheta)$-q.e. yakınsayan bir alt dizisi vardır.

İspat: Normlu uzaylarda her yakınsak dizinin bir Cauchy dizisi olduğu biliniyor. O halde, (f_i) dizisinin yine (f_i) olarak gösterilen ve $\sum_{i=1}^{\infty}2^{ip^+}\|f_i-f_{i+1}\|_{1,p(.),\vartheta}<1$ eşitsizliğini sağlayan bir alt dizisi vardır. Şimdi $A_i=\left\{x\in\mathbb{R}^d:|f_i(x)-f_{i+1}(x)|>\frac{1}{2^i}\right\}$ ve $B_j=\bigcup_{i=j}^{\infty}A_i$ tanımlansın. $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$, bir vektör uzayı olduğundan her $i\in\mathbb{N}$ için $2^i|f_i-f_{i+1}|\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ olur. Ayrıca, her $i\in\mathbb{N}$ için $f_i\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonları $(p(.),\vartheta)$-q.c. olduğundan $2^i|f_i-f_{i+1}|$ fonksiyonu da $(p(.),\vartheta)$-q.c. olur. A_i kümesinin tanımından bu kümenin tamamında $2^i|f_i-f_{i+1}|>1$ olup A_i kümesinin sıfır kapasiteli bir kümesi üzerinde de $2^i|f_i-f_{i+1}|>1$ sağlanır. O halde $2^i|f_i-f_{i+1}|\in S^*_{p(.),\vartheta}(A_i)$ olarak bulunur. Teorem 4.2.2'den

$$C_{p(.),\vartheta}(A_i)\leq C^*_{p(.),\vartheta}(A_i)\leq\rho_{1,p(.),\vartheta}\left(2^i|f_i-f_{i+1}|\right)\leq 2^{ip^+}\rho_{1,p(.),\vartheta}(f_i-f_{i+1})$$

eşitsizliği elde edilir. Herhangi bir $h\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ için $\|h\|_{1,p(.),\vartheta}\leq 1$ ise, $\rho_{1,p(.),\vartheta}(h)\leq\|h\|_{1,p(.),\vartheta}$ olduğu biliniyor (Kováčik ve Rákosník, 1991). Ayrıca,

$$\|f_i-f_{i+1}\|_{1,p(.),\vartheta}\leq 2^{ip^+}\|f_i-f_{i+1}\|_{1,p(.),\vartheta}\leq\sum_{i=1}^{\infty}2^{ip^+}\|f_i-f_{i+1}\|_{1,p(.),\vartheta}<1$$

olup $\rho_{1,p(.),\vartheta}(f_i-f_{i+1})\leq\|f_i-f_{i+1}\|_{1,p(.),\vartheta}$ bulunur. Böylece

$$C_{p(.),\vartheta}(B_j)\leq\sum_{i=j}^{\infty}C_{p(.),\vartheta}(A_i)\leq\sum_{i=j}^{\infty}2^{ip^+}\rho_{1,p(.),\vartheta}(f_i-f_{i+1})\leq\sum_{i=j}^{\infty}2^{ip^+}\|f_i-f_{i+1}\|_{1,p(.),\vartheta}\to 0$$

elde edilir. Tanımından $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi azalan olup her $j\in\mathbb{N}$ için $\bigcap_{j=1}^{\infty}B_j\subset B_j$ yazılır. Sobolev $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin monotonluk özelliğinden $C_{p(.),\vartheta}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty}B_j\right)\leq C_{p(.),\vartheta}(B_j)$

olduğu görülür. Bu ise $\left(C_{p(.),\vartheta}\left(B_j\right)\right)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisinin sınırlı azalan bir aile olduğunu gösterir. Ayrıca, alttan sınırlı azalan bir reel sayı dizisinin infimumunun aynı zamanda limiti olduğu bilindiğinden

$$C_{p(.),\vartheta}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) \le \inf_{j\in\mathbb{N}} C_{p(.),\vartheta}\left(B_j\right) = \lim_{j\to\infty} C_{p(.),\vartheta}\left(B_j\right) = 0$$

elde edilir. Yine, $\mathbb{R}^d - \bigcap_{j=1}^{\infty} B_j$ kümesinde $f_i \to f$ olup $C_{p(.),\vartheta}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j\right) = 0$ için $\left(p(.),\vartheta\right)$-q.e. yakınsaması görülür. Şimdi f fonksiyonunun $\left(p(.),\vartheta\right)$-q.c. olduğu ispatlanacaktır. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. İspatın ilk kısmından $C_{p(.),\vartheta}\left(B_j\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\mathbb{R}^d - B_j$ kümesinde $f_i \to f$ olacak şekilde $B_j \subset \mathbb{R}^d$ kümesi vardır. Ayrıca, $\mathbb{R}^d$ kümesinde her f_i $\left(p(.),\vartheta\right)$-q.c. olduğundan $C_{p(.),\vartheta}\left(U_i\right) < \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$ ve f_i fonksiyonlarının $\mathbb{R}^d - U_i$ kümelerine kısıtlanışı sürekli olacak şekilde $U_i \subset \mathbb{R}^d$ açık kümeleri seçilebilir. Şimdi $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ şeklinde tanımlanmak üzere

$$C_{p(.),\vartheta}\left(U\right) = C_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} U_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} C_{p(.),\vartheta}\left(U_i\right) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{i+1}} = \frac{\varepsilon}{2}$$

olup $C_{p(.),\vartheta}\left(B_j \cup U\right) \le C_{p(.),\vartheta}\left(B_j\right) + C_{p(.),\vartheta}\left(U\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ sağlanır. Ayrıca, her $x \in \mathbb{R}^d - \left(B_i \cup U\right)$ ve $t > j > i$ için

$$\left|f_j\left(x\right) - f_t\left(x\right)\right| \le \sum_{i=j}^{t-1}\left|f_i\left(x\right) - f_{i+1}\left(x\right)\right| \le \sum_{i=j}^{t-1}\frac{1}{2^i} \le \sum_{i=j}^{\infty}\frac{1}{2^i} = 2^{1-j}$$

bulunur. Bu ise yakınsamanın $\mathbb{R}^d - \left(B_i \cup U\right)$ kümesinde düzgün sürekli, dolayısıyla sürekli olduğunu gösterir. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ için $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}\left(\Omega\right)$ uzayının tanımı verilsin.

Tanım 4.2.7 (Sıfır Sınır Değerli Ağırlıklı Değişken Üslü Sobolev Uzayı): $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ açık bir küme olsun. Ω üzerinde tanımlı, ölçülebilir f fonksiyonu için Ω kümesinde h.h.h. $f = f^*$ ve $\mathbb{R}^d - \Omega$ kümesinde $f^* = 0$ $(p(.), \vartheta)$-q.e. olan bir $f^* \in W_\vartheta^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ $(p(.), \vartheta)$-q.c. fonksiyonu olsun. Bu özelliği sağlayan f fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya sıfır sınır değerli ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayları denir ve $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ ile gösterilir. Burada, bu koşulları sağlayan f^* fonksiyonu f fonksiyonunun kanonik temsilcisi olarak adlandırılır. Herhangi bir $f \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ için

$$\|f\|_{W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)} = \|f^*\|_{W_\vartheta^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)} \tag{4.2.7.1}$$

şeklinde tanımlı $\|.\|_{W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)}$, $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ üzerinde bir normdur. Ayrıca tanımdan $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d) = W_\vartheta^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ olduğu görülür.

Çalışmanın bu bölümü boyunca $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ açık bir küme olarak kabul edilecektir.

Teorem 4.2.8: $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayı $\|.\|_{W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

İspat: $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayında herhangi bir (f_i) Cauchy dizisi alınsın. O halde her $i \in \mathbb{N}$ için f_i fonksiyonlarının f_i^* kanonik temsilcisi vardır. Böylece Ω kümesinde h.h.h. $f_i = f_i^*$ ve $\mathbb{R}^d - \Omega$ kümesinde $f_i^* = 0$ $(p(.), \vartheta)$-q.e. olacak şekilde $f_i^* \in W_\vartheta^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ $(p(.), \vartheta)$-q.c. fonksiyonu bulunur. (4.2.7.1) eşitliği kullanılırsa $(f_i^*)_{i\in\mathbb{N}}$, $W_\vartheta^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayında bir Cauchy dizisi olur. Yine ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayı Banach uzay olduğundan $W_\vartheta^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayında $f_i^* \to f$ olacak şekilde bir $f \in W_\vartheta^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ vardır. Ayrıca (4.2.7.1) eşitliğinden

$$\|f_i - f\|_{W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)} = \|f_i^* - f\|_{W_\vartheta^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)} \to 0$$

olup $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayında $f_i \to f$ olduğu görülür. O halde ispatın tamamlanması için $f \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Eğer Teorem 4.2.6 kullanırsa f fonksiyonunun $(p(.),\vartheta)$-q.c. olduğu ve (f_i^*) dizisinin de f fonksiyonuna $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayında (noktasal) $(p(.),\vartheta)$-q.e. yakınsayan bir $(f_{i_j}^*)$ alt dizisinin varlığı görülür. Şimdi

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R}^d - \Omega : f_{i_j}^*(x),\ f(x) \text{ fonksiyonuna yakınsamasın}\}$$

ve

$$A_2 = \{x \in \mathbb{R}^d - \Omega : f_{i_j}^*(x) \neq 0\}$$

kümeleri tanımlansın. $(f_{i_j}^*) \subset (f_i^*)$ dizisi f fonksiyonuna $\mathbb{R}^d$ kümesinde, dolayısıyla $\mathbb{R}^d - \Omega$ kümesinde (noktasal) $(p(.),\vartheta)$-q.e. yakınsadığından $C_{p(.),\vartheta}(A_1) = 0$ bulunur. Yine $\mathbb{R}^d - \Omega$ kümesinde $f_{i_j}^* = 0$ $(p(.),\vartheta)$-q.e. olduğundan $C_{p(.),\vartheta}(A_2) = 0$ sağlanır. Böylece $A = A_1 \cup A_2$ için herhangi bir $x \in \mathbb{R}^d - (A_1 \cup A_2)$ verildiğinde $x \in \mathbb{R}^d - A_1$ ve $x \in \mathbb{R}^d - A_2$ olup

$$|f(x)| \leq |f_{i_j}^*(x) - f(x)| + |f_{i_j}^*(x)|$$

ifadesinden $f(x) = 0$ bulunur. Ayrıca

$$C_{p(.),\vartheta}(A_1 \cup A_2) \leq C_{p(.),\vartheta}(A_1) + C_{p(.),\vartheta}(A_2) = 0$$

eşitsizliğinden sıfır Sobolev $(p(.),\vartheta)$-kapasiteli $A_1 \cup A_2$ kümesinin dışında $f = 0$ olup $\mathbb{R}^d - \Omega$ kümesinde $f = 0$ $(p(.),\vartheta)$-q.e. bulunur. O halde $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayının tanımında yer alan f fonksiyonu temsilcisi kendisi olarak alındığında $f \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ elde edilir.

Teorem 4.2.9: $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayı yansımalı bir uzaydır.

İspat: $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayının yansımalı bir Banach uzay olduğu biliniyor (Aydın, 2012b). Ayrıca, Teorem 4.2.8'den $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayı kapalıdır. Yansımalı bir uzayın kapalı bir alt uzayı da yansımalı olduğundan istenen elde edilir (Dunford ve Schwartz, 1958).

Şimdi, $H_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ olarak $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı gösterilsin. Böylece, $f \in H_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter koşul $\|f_i - f\|_{W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)} \to 0$ olacak şekilde $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayında bir $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayının bir Banach uzay olması ve $H_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega) \subset W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ sağlanması, $H_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayının da bir Banach uzay olduğu gösterir.

Sonuç 4.2.10: Herhangi $x \in \mathbb{R}^d$ için $\vartheta(x) \geq 1$ olsun. O halde, $H_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega) \subset W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega) \subset W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ kapsaması sağlanır.

İspat: $C_0^{\infty}(\Omega) \subset C^{\infty}(\Omega)$ olduğundan herhangi bir $f \in C_0^{\infty}(\Omega)$ için $f \in C^{\infty}(\Omega)$ olup f süreklidir, dolayısıyla, $(p(.),\vartheta)$-q.c. fonksiyondur. Ayrıca Ω kümesinde h.h.h. $f = f$ yazılabilir. Yine, f kompakt destekli olduğundan $\mathbb{R}^d - \Omega$ kümesindeki destekte $f = 0$ olup $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayının tanımında yer alan f^* kanonik temsilci f fonksiyonunun kendisidir. Bu ise $f \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ olduğunu gösterir. O halde $C_0^{\infty}(\Omega) \subset W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ sağlanır. Yine $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ Banach uzayı olup kapalı olduğundan $H_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega) \subset W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ elde edilir. İspatın kalan kısmı için herhangi bir $f \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ alınsın. O halde, Ω'da h.h.h. $f = f^*$ ve $\mathbb{R}^d - \Omega$ kümesinde $f^* = 0$ $(p(.),\vartheta)$-q.e. olacak şekilde $f^* \in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ $(p(.),\vartheta)$-q.c. fonksiyonu vardır. Ayrıca, $\vartheta(x) \geq 1$ için herhangi bir $A \subset \mathbb{R}^d$ verildiğinde $|A| \leq C_{p(.),\vartheta}(A)$ olduğu biliniyor (Aydın, 2012b). O halde

$$\begin{aligned}
\rho_{W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)}(f) &= \int_{\Omega} \left(|f(x)| + |\nabla f(x)|\right)^{p(x)} \vartheta(x)\,dx \\
&\leq \int_{\Omega} \left(|f^*(x)| + |\nabla f^*(x)|\right)^{p(x)} \vartheta(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^d - \Omega} \left(|f^*(x)| + |\nabla f^*(x)|\right)^{p(x)} \vartheta(x)\,dx \\
&= \rho_{W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)}(f^*) < \infty
\end{aligned}$$

olup $f \in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ bulunur. Böylece $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega) \subset W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ kapsaması elde edilir.

Teorem 4.2.11: Herhangi $x \in \mathbb{R}^d$ için $\vartheta(x) \geq 1$ olsun. Eğer $C^{\infty}(\Omega) \cap W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayı $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayında yoğun ise, $H_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega) = W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ olur.

İspat: Sonuç 4.2.10'dan ispatı bitirmek için $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega) \subset H_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ kapsamasının sağlanması yeterlidir. O halde herhangi bir $f \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ verilsin. İspatın tamamlanması için $\|f^* - \varphi_i\|_{1,p(.),\vartheta} \to 0$ olacak şekilde $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının bir $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisi bulunmalıdır. Şimdi $f_+^* = \text{maks}\{f^*, 0\}$ ve $f_-^* = \min\{f^*, 0\}$ olsun. Bu takdirde $f^* = f_+^* + f_-^*$ olur. O halde, f^* pozitiftir. Ayrıca, f^* fonksiyonuna $f_j^* = \min\{f^*, j\}$ ile yaklaşılabildiğinden f^*, sınırlı bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Benzer şekilde, f^* fonksiyonunun kompakt desteğe sahip olduğu varsayılabilir.

Şimdi $\delta > 0$ olsun ve f^*, $\mathbb{R}^d - A$ kümesinde sürekli ve $C_{p(.),\vartheta}(A) < \delta$ olacak şekilde bir A açık kümesi alınsın. Ayrıca, $0 \le \omega_\delta \le 1$, $\|\omega_\delta\|_{1,p(.),\vartheta} < \delta$ ve A kümesinde $\omega_\delta = 1$ olacak şekilde $\omega_\delta \in W_\vartheta^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ alınsın. O halde f^* fonksiyonu, $\mathbb{R}^d - A$ kümesinde sürekli ve $\mathbb{R}^d - \Omega$'da h.h.h. sıfıra eşit olduğundan, her $x \in \mathbb{R}^d - (\Omega \cup A)$ için $f^*(x) = 0$ olacaktır. Şimdi $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere $f_\varepsilon^* = \max\{f^* - \varepsilon, 0\}$ tanımlansın. Böylece f_ε^*, $\mathbb{R}^d - (A \cup B)$ kümesinde sıfıra eşit olacak şekilde $\mathbb{R}^d - A$ kümesinde (dolayısıyla $\mathbb{R}^d$ kümesinde) kapalı olan bir $B \subset \Omega - A$ sınırlı kümesi bulunabilir. Buradan $\mathbb{R}^d - B$ kümesinde $(1-\omega_\delta) f_\varepsilon^* = 0$ sağlanır ve B kapalı olduğundan $(1-\omega_\delta) f_\varepsilon^*$ fonksiyonunun desteği B kümesini içerir, bu yüzden de Ω kümesinde kompakt desteklidir. Ayrıca,

$$\|f^* - (1-\omega_\delta) f_\varepsilon^*\|_{1,p(.),\vartheta} \le \|f^* - f_\varepsilon^*\|_{1,p(.),\vartheta} + \|\omega_\delta f_\varepsilon^*\|_{1,p(.),\vartheta}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi, $T = \{x \in \Omega : f^*(x) < \varepsilon\}$ olarak tanımlansın. O halde f^* ve f_ε^* fonksiyonlarının tanımlarından

$$\begin{aligned} \|f^* - f_\varepsilon^*\|_{p(.),\vartheta} &= \|f^* - f_\varepsilon^*\|_{L_\vartheta^{p(.)}(T)} + \|f^* - f_\varepsilon^*\|_{L_\vartheta^{p(.)}(\Omega - T)} \\ &< \varepsilon\left[\|\chi_T\|_{p(.),\vartheta} + \|\chi_{\Omega-T}\|_{p(.),\vartheta}\right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \|\nabla f^* - \nabla f_\varepsilon^*\|_{p(.),\vartheta} &= \|\nabla f^* - \nabla f_\varepsilon^*\|_{L_\vartheta^{p(.)}(T)} + \|\nabla f^* - \nabla f_\varepsilon^*\|_{L_\vartheta^{p(.)}(\Omega - T)} \\ &< \|\chi_T \nabla f^*\|_{p(.),\vartheta} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan $\varepsilon\to 0$ için $\left\|f^*-f_\varepsilon^*\right\|_{1,p(.),\vartheta}\to 0$ bulunur. Ayrıca

$$\rho_{1,p(.),\vartheta}\left(\omega_\delta f^*\right)\le\int_{\mathbb{R}^d}\left|\omega_\delta\left(x\right)f^*\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx+2^{p^+-1}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\omega_\delta\left(x\right)\right)^{p(x)}\left|\nabla f^*\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx$$
$$+2^{p^+-1}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\nabla\omega_\delta\left(x\right)\right)^{p(x)}\left|f^*\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx$$

eşitsizliği sağlanır. Burada f^*, sınırlı ve kompakt destekli olduğundan $K=\sup pf$ için

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left|\omega_\delta\left(x\right)f^*\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx+2^{p^+-1}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\nabla\omega_\delta\left(x\right)\right)^{p(x)}\left|f^*\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx$$
$$\le\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left(f^*\left(x\right)\right)^{p(x)}\left(\int_K\left|\omega_\delta\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx+2^{p^+-1}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\nabla\omega_\delta\left(x\right)\right)^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx\right)$$

olur. Böylece

$$\rho_{1,p(.),\vartheta}\left(\omega_\delta f^*\right)\le\left(2^{p^+-1}+1\right)\delta\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left(f^*\left(x\right)\right)^{p(x)}+2^{p^+-1}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\omega_\delta\left(x\right)\right)^{p(x)}\left|\nabla f^*\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx$$

elde edilir. Ayrıca, $\delta\to 0$ için $L_\vartheta^{p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında $\omega_\delta\to 0$ olduğundan h.h.h. (noktasal olarak) sıfıra yakınsayan bir $\left(\omega_i\right)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoreminden $i\to\infty$ için $\int_{\mathbb{R}^d}\left(\omega_i\left(x\right)\right)^{p(x)}\left|\nabla f^*\left(x\right)\right|^{p(x)}\vartheta\left(x\right)dx\to 0$ olur. Ayrıca $p^+<\infty$ olduğundan $\delta\to 0$ için $\left\|\omega_\delta f^*\right\|_{1,p(.),\vartheta}\to 0$ elde edilir (Kováčik ve Rákosník, 1991). Böylece $\varepsilon,\delta\to 0$ için $\left(1-\omega_\delta\right)f_\varepsilon^*\to f^*$ olur. O halde, $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}\left(\Omega\right)$'daki her fonksiyona $W_\vartheta^{1,p(.)}\left(\Omega\right)$ uzayında kompakt destekli fonksiyonlarıyla yaklaşılabildiği ispatlanmış olur.

Şimdi $\omega=\left(1-\omega_\delta\right)f_\varepsilon^*$ fonksiyonu tanımlansın. Ayrıca, $W_\vartheta^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında her $i\in\mathbb{N}$ için ω fonksiyonuna yakınsayan $\varphi_i\in C^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $\operatorname{supp}\omega$ kümesinde 1'e eşit olan $\psi\in C_0^\infty\left(\Omega\right)$ fonksiyonları alınsın. O halde

$$\rho_{1,p(.),\vartheta}\left(\omega-\psi\varphi_i\right)=\int_{\operatorname{supp}\omega}\left[\left|\omega\left(x\right)-\varphi_i\left(x\right)\right|^{p(x)}+\left|\nabla\left(\omega\left(x\right)-\varphi_i\left(x\right)\right)\right|^{p(x)}\right]\vartheta\left(x\right)dx$$
$$+\int_{\mathbb{R}^d-\operatorname{supp}\omega}\left[\left|\psi\left(x\right)\varphi_i\left(x\right)\right|^{p(x)}+\left|\nabla\left(\psi\left(x\right)\varphi_i\left(x\right)\right)\right|^{p(x)}\right]\vartheta\left(x\right)dx$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer $i\to\infty$ için $\varphi_i\to\omega$ olduğundan

$$\int\limits_{\mathrm{supp}\omega}\left[\left|\omega(x)-\varphi_i(x)\right|^{p(x)}+\left|\nabla\left(\omega(x)-\varphi_i(x)\right)\right|^{p(x)}\right]\vartheta(x)dx\to 0$$

bulunur. Ayrıca c sabiti ψ fonksiyonuna bağlı olmak üzere

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d-\mathrm{supp}\omega}\left[\left|\psi(x)\varphi_i(x)\right|^{p(x)}+\left|\nabla\left(\psi(x)\varphi_i(x)\right)\right|^{p(x)}\right]\vartheta(x)dx$$
$$\le c\int\limits_{\mathbb{R}^d-\mathrm{supp}\omega}\left[\left|\varphi_i(x)\right|^{p(x)}+\left|\nabla\varphi_i(x)\right|^{p(x)}\right]\vartheta(x)dx$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $i\to\infty$ için $\varphi_i\to\omega$ ve $\mathbb{R}^d-\mathrm{supp}\omega$ kümesinde $\omega=0$ olması kullanılırsa,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d-\mathrm{supp}\omega}\left[\left|\psi(x)\varphi_i(x)\right|^{p(x)}+\left|\nabla\left(\psi(x)\varphi_i(x)\right)\right|^{p(x)}\right]\vartheta(x)dx\to 0$$

elde edilir. O halde $i\to\infty$ için $\rho_{1,p(.),\vartheta}\left(\omega-\psi\varphi_i\right)\to 0$ bulunur. $p^+<\infty$ olduğundan $\left\|\omega-\psi\varphi_i\right\|_{1,p(.),\vartheta}\to 0$ sağlanır. Böylece

$$\left\|f^*-\psi\varphi_i\right\|_{1,p(.),\vartheta}\le\left\|f^*-\omega\right\|_{1,p(.),\vartheta}+\left\|\omega-\psi\varphi_i\right\|_{1,p(.),\vartheta}\to 0$$

elde edilir. O halde ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.12: $1<q^-,p^+<\infty$ ve h.h.h. $x\in\mathbb{R}^d$ için $q(x)\le p(x)$ olmak üzere $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ sınırlı bir küme olsun. O halde, $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)\hookrightarrow W_{0,\vartheta}^{1,q(.)}(\Omega)$ gömülmesi sağlanır.

İspat: Herhangi bir $f\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ fonksiyonu alınsın. $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)\subset W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)\subset L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)$ olduğundan $f\in L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)$ ve $\nabla f\in L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)$ bulunur. Ayrıca hipotezdeki koşullar altında $L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)\hookrightarrow L_{\vartheta}^{q(.)}(\Omega)$ olduğu biliniyor (Liu, 2008). O halde $f\in L_{\vartheta}^{q(.)}(\Omega)$ ve $\nabla f\in L_{\vartheta}^{q(.)}(\Omega)$ olup $f\in W_{\vartheta}^{1,q(.)}(\Omega)$, dolayısıyla, kanonik temsilci tanımından $f^*\in W_{\vartheta}^{1,q(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ elde edilir. Buradan

$$\left\|f^*\right\|_{W_{\vartheta}^{1,q(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)}\le c\left\|f\right\|_{W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)}$$

olacak şekilde c sabiti vardır. Burada $\|f^*\|_{W^{1,q(.)}_{\vartheta}(\mathbb{R}^d)}$ normunun yerine $\|f\|_{W^{1,q(.)}_{0,\vartheta}(\Omega)}$ normunun yazılamaz. Çünkü $f \in W^{1,q(.)}_{0,\vartheta}(\Omega)$ ifadesi bilinmemektedir. Bu yüzden Ω kümesinde h.h.h. $f = f^*$ ve $\mathbb{R}^d - \Omega$ kümesinde $f^* = 0$ $(q(.),\vartheta)$-q.e. olacak şekilde $f^* \in W^{1,q(.)}_{\vartheta}(\mathbb{R}^d)$ $(q(.),\vartheta)$-q.c. olduğu gösterilecektir. Şimdi $K = \{x \in \mathbb{R}^d - \Omega : f^*(x) \neq 0\}$ tanımlansın. Ayrıca $\bigcup_{r=1}^{\infty} K \cap B(0,r) = K \cap \bigcup_{r=1}^{\infty} B(0,r) = K$ olduğundan

$$0 \le C_{q(.),\vartheta}(K) \le \sum_{r=1}^{\infty} C_{q(.),\vartheta}(K \cap B(0,r))$$

eşitsizliği bulunur. Eğer $C_{q(.),\vartheta}(K \cap B(0,r)) = 0$ sağlanırsa $\mathbb{R}^d - \Omega$ kümesinde $f^* = 0$ $(q(.),\vartheta)$-q.e. olduğu gösterilmiş olur. Hipotezden $\mathbb{R}^d - \Omega$ kümesinde $f^* = 0$ $(p(.),\vartheta)$-q.e. olduğundan $C_{p(.),\vartheta}(K) = 0$ sağlanır. Sobolev $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin monotonluk özelliğinden $C_{p(.),\vartheta}(K \cap B(0,r)) = 0$ bulunur. O halde infimum özelliğinden

$$\rho_{1,p(.),\vartheta}(g_i) \le C_{p(.),\vartheta}(K \cap B(0,r)) + \varepsilon$$

veya buna denk olarak

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left[|g_i(x)|^{p(x)} + |\nabla g_i(x)|^{p(x)} \right] \vartheta(x)\,dx \to 0 \tag{4.2.12.1}$$

olacak şekilde $g_i \in S_{p(.),\vartheta}(K \cap B(0,r))$ alınabilir. Şimdi h_r fonksiyonu, $B(0,2r)$ yuvarında $h_r = 1$ ve $B(0,3r)$ yuvarının dışında $h_r = 0$ olarak tanımlansın. O halde, $h_r g_i \in S_{q(.),\vartheta}(K \cap B(0,r))$ olur. Gerçekten

$$\begin{aligned}
\rho_{q(.),\vartheta}(h_r g_i) &= \int_{B(0,3r)} |h_r(x) g_i(x)|^{q(x)} \vartheta(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^d - B(0,3r)} |h_r(x) g_i(x)|^{q(x)} \vartheta(x)\,dx \\
&= \int_{B(0,2r)} |h_r(x) g_i(x)|^{q(x)} \vartheta(x)\,dx + \int_{B(0,3r) - B(0,2r)} |h_r(x) g_i(x)|^{q(x)} \vartheta(x)\,dx \\
&< \int_{B(0,2r)} |g_i(x)|^{q(x)} \vartheta(x)\,dx + \int_{B(0,3r) - B(0,2r)} |g_i(x)|^{q(x)} \vartheta(x)\,dx \\
&= \int_{B(0,3r)} |g_i(x)|^{q(x)} \vartheta(x)\,dx < \infty
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde, $\rho_{q(.),\vartheta}\left(\nabla\left(h_r g_i\right)\right)<\infty$ olduğu görülür. O halde $h_r g_i \in W_{\vartheta}^{1,q(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ elde edilir. Diğer taraftan, $B(0,2r)$ yuvarında $h_r=1$ ve $g_i \in S_{p(.),\vartheta}\left(K\cap B(0,r)\right)$ olduğundan $B(0,2r)$ yuvarında $h_r g_i \geq 1$ sağlanır. Buradan $h_r g_i \in S_{q(.),\vartheta}\left(K\cap B(0,r)\right)$ olup $\left\|h_r g_i\right\|_{W_{\vartheta}^{1,q(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)} \leq C(r)\left\|g_i\right\|_{W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)}$ eşitsizliği sağlanır. (4.2.12.1) yakınsamasından $p^+<\infty$ için $\left\|g_i\right\|_{W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)} \to 0$ olur. O halde $\left\|h_r g_i\right\|_{W_{\vartheta}^{1,q(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)} \to 0$ olup $p^+<\infty$ iken $q^+<\infty$ olacağından $\rho_{1,q(.),\vartheta}\left(h_r g_i\right)\to 0$ bulunur. Eğer $h_r g_i \in S_{q(.),\vartheta}\left(K\cap B(0,r)\right)$ üzerinden infimum alınırsa $C_{q(.),\vartheta}\left(K\cap B(0,r)\right)=0$ elde edilir. Buradan $\mathbb{R}^d-\Omega$ kümesinde $f^*=0$ $\left(q(.),\vartheta\right)$-q.e. olarak bulunur. İspatı tamamlamak için f^* $\left(p(.),\vartheta\right)$-q.c. fonksiyonunun $\left(q(.),\vartheta\right)$-q.c. olduğu gösterilmelidir. Bunun için $B\subset\mathbb{R}^d$ yuvarında sağlanması yeterlidir. f^* $\left(p(.),\vartheta\right)$-q.c. olduğundan f^* fonksiyonunun $B-K_i$ kümesine kısıtlanışı süreklidir ve $C_{p(.),\vartheta}\left(K_i\right)<\frac{1}{i}$ olacak şekilde $K_i\subset B$ verilsin. Yine

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left[\left|g_i(x)\right|^{p(x)}+\left|\nabla g_i(x)\right|^{p(x)}\right]\vartheta(x)dx<\frac{1}{i} \tag{4.2.12.2}$$

olacak şekilde $g_i \in S_{p(.),\vartheta}\left(K_i\right)$ alınsın. Şimdi, h fonksiyonu $B(0,2r)$ yuvarında $h=1$ ve $B(0,3r)$ yuvarının dışında $h=0$ olarak tanımlansın. İspatın ilk kısmındaki teknikle $hg_i \in S_{p(.),\vartheta}\left(K_i\right)$ olduğu görülür. O halde (4.2.12.2) ifadesinde, sırasıyla, $i\to\infty$ için limit ve $hg_i \in S_{p(.),\vartheta}\left(K_i\right)$ üzerinden infimum alınırsa $C_{q(.),\vartheta}\left(K_i\right)\to 0$ olur. Buradan f^* $\left(q(.),\vartheta\right)$ -q.c. olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.13: $f\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ ve $g\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ sınırlı fonksiyonlar olsun. Eğer g fonksiyonu $\left(p(.),\vartheta\right)$-q.c. ise, $fg\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ olur.

İspat: $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)\subset W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ kapsamasından $fg\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ sağlanır. O halde f^*g fonksiyonu $\mathbb{R}^d$ kümesinde $\left(p(.),\vartheta\right)$-q.c. fonksiyondur. Gerçekten, f^* ve g fonksiyonları $\left(p(.),\vartheta\right)$-q.c. olduğundan f^*, fonksiyonu $\mathbb{R}^d-U$ kümesinde süreklidir ve $C_{p(.),\vartheta}(U)<\varepsilon$ olacak şekilde bir U açık kümesi vardır ve g fonksiyonu $\mathbb{R}^d-V$ kümesinde sürekli ve

$C_{p(.),\vartheta}(V)<\varepsilon$ olacak şekilde bir V açık kümesi bulunur. O halde, $\mathbb{R}^d-(U\cup V)=(\mathbb{R}^d-U)\cap(\mathbb{R}^d-V)$ ifadesinden f^*g sürekli ve kapasitesinin alt toplamsallık özelliğinden $C_{p(.),\vartheta}(U\cup V)\le C_{p(.),\vartheta}(U)+C_{p(.),\vartheta}(V)<2\varepsilon$ olup f^*g $(p(.),\vartheta)$-q.c. olur. Şimdi $A=\{x\in\mathbb{R}^d-\Omega : f^*(x)\neq 0\}$ ve $B=\{x\in\mathbb{R}^d-\Omega : g(x)=\infty\}$ kümeleri tanımlansın. Buradan, f^*g, Ω kümesinin dışında sadece $A\cup B$ kümesinde sıfırdan farklı olur. Ayrıca $C_{p(.),\vartheta}(A)=0$ ve $C_{p(.),\vartheta}(B)=0$ sağlanır. Çünkü, $g\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ sınırlı olduğundan her $x\in\mathbb{R}^d-\Omega$ için $g(x)<\infty$ olup $B=\varnothing$ olarak bulunur. O halde $C_{p(.),\vartheta}(B)=0$ elde edilir. Öte yandan $f^*\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ olduğundan $\mathbb{R}^d-\Omega$ kümesinde sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesinin kapasitesi sıfır olup $C_{p(.),\vartheta}(A)=0$ sağlanır. Sobolev $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin alt toplamsallık özelliğinden $C_{p(.),\vartheta}(A\cup B)=0$ olur. Sonuç olarak $\mathbb{R}^d-\Omega$ üzerinde $f^*g=0$ $(p(.),\vartheta)$-q.e. fonksiyondur. Yine $f^*\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ için Ω kümesinde h.h.h. $f^*=f$ olup g fonksiyonunun sınırlı olduğu da dikkate alınırsa Ω kümesinde h.h.h. $f^*g=fg$ olur. O halde $fg\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ elde edilir.

Teorem 4.2.14: $A\subset\mathbb{R}^d$ olsun ve ϑ ağırlık fonksiyonu her $x\in\mathbb{R}^d$ için $\vartheta(x)\ge 1$ koşulunu sağlasın. $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)=W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega-A)$ olması için gerek ve yeter koşul $C_{p(.),\vartheta}(A\cap\Omega)=0$ olmasıdır.

İspat: Öncelikle $C_{p(.),\vartheta}(A\cap\Omega)=0$ olsun. ϑ ağırlık fonksiyonu $\vartheta(x)\ge 1$ koşulunu sağladığından $|A\cap\Omega|\le C_{p(.),\vartheta}(A\cap\Omega)=0$ olup $|A\cap\Omega|=0$ elde edilir. Tanımdan $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega-A)\subset W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ vardır. Şimdi $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)\subset W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega-A)$ kapsaması gösterilsin. O halde, herhangi bir $f\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ alınsın. $C_{p(.),\vartheta}(A\cap\Omega)=0$ olduğundan $\mathbb{R}^d-(\Omega-A)$ kümesinde $f^*=0$ $(p(.),\vartheta)$-q.e. elde edilir. Böylece $f\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ için $\Omega-A$ kümesinde h.h.h. $f=f^*$ olur. Gerçekten $M=\{x\in\Omega : f(x)\neq f^*(x)\}$ için $|M|=0$ olduğu biliniyor. Şimdi $N=\{x\in\Omega-A : f(x)\neq f^*(x)\}$ tanımlansın. Yine $\Omega-A\subset\Omega$ olduğundan $N\subset M$ sağlanır. O halde, $\Omega-A$'da h.h.h. $f=f^*$ olarak bulunur. Buradan $f|_{\Omega-A}\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega-A)$ olur. Ayrıca $\|f|_{\Omega-A}\|_{W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega-A)}=\|f\|_{W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)}$ elde edilir. Bu ise

$f \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega - A)$ olduğunu, dolayısıyla, $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega) \subset W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega - A)$ kapsamasını gösterir. Diğer taraftan, $A \subset \Omega$ olduğu varsayılsın. Yine $x_0 \in \Omega$ ve $i \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega_i = B(x_0, i) \cap \left\{ x \in \Omega : \operatorname{dist}\left(x, \mathbb{R}^d - \Omega\right) > \frac{1}{i} \right\}$$

kümesi tanımlansın. Ayrıca $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f_i(x) = \operatorname{maks}\left(0, 1 - \operatorname{dist}(x, A \cap \Omega_i)\right)$ şeklinde tanımlansın. Tanımdan f_i fonksiyonu noktaya bağımlı olmayıp 0 ile 1 arasında değer aldığından $f_i \in W_{\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ süreklidir, $0 \le f_i \le 1$ ve $A \cap \Omega_i$ kümesinde $f_i = 1$ olur. Şimdi $g_i : \Omega_i \to \mathbb{R}$ olmak üzere $i \in \mathbb{N}$ için $g_i(x) = \operatorname{dist}\left(x, \mathbb{R}^d - \Omega_i\right)$ tanımlansın. O halde, her $i \in \mathbb{N}$ için g_i fonksiyonları sürekli, dolayısıyla, $(p(.), \vartheta)$-q.c. fonksiyondur. $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayının tanımındaki kanonik temsilci olarak g_i fonksiyonunun kendisi alındığında $g_i \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega_i)$ olarak bulunur. Yine her $i \in \mathbb{N}$ için $\Omega_i \subset \Omega$ olduğundan $g_i \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ elde edilir. Teorem 4.2.13'ten $i \in \mathbb{N}$ için $f_i g_i \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ olup hipotezden $f_i g_i \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega - A)$ yazılır. Şimdi i tam sayısı sabitlensin. Eğer h fonksiyonu $\Omega - A$ kümesinde h.h.h. $h = f_i g_i$ olacak şekilde bir $(p(.), \vartheta)$-q.c. fonksiyonu ise, $|A| = 0$ olduğundan Ω kümesinde h.h.h. $h = f_i g_i$ olacaktır. Teorem 4.2.1 (i)'den Ω kümesinde $h = f_i g_i$ $(p(.), \vartheta)$-q.e. sağlanır. Yine $A \subset \Omega$ ve $\Omega_i \subset \Omega$ olduğundan $A \cap \Omega_i \subset \Omega$ için $h = f_i g_i$ özel olarak $A \cap \Omega_i$ kümesinde de $(p(.), \vartheta)$-q.e. olacaktır. Ayrıca, $f_i g_i \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega - A)$ olduğundan tanım gereği $\mathbb{R}^d - (\Omega - A)$ kümesinde $h = 0$ $(p(.), \vartheta)$-q.e. tanımlanabilir. Benzer şekilde $A - \Omega_i$ kümesinde de $h = 0$ $(p(.), \vartheta)$-q.e. olacağı görülür. Bu ise her $i \in \mathbb{N}$ için $C_{p(.),\vartheta}(A - \Omega_i) = 0$ olması ile mümkündür. Ayrıca $\bigcup_{i=1}^{\infty} A \cap \Omega_i = A \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i = A \cap \Omega = A$ olup Sobolev $(p(.), \vartheta)$-kapasitesinin alt toplamsallık özelliğinden

$$C_{p(.),\vartheta}(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} C_{p(.),\vartheta}(A \cap \Omega_i) = 0$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 4.2.15: (X,τ) topolojik uzayın (Y,τ') alt uzayı verilsin. (Y,τ') topolojik uzayının kapalı (sırasıyla, açık) alt kümeleri Y kümesinde göreceli (relatively) kapalıdır (sırasıyla, açıktır) veya kısaca göreceli kapalıdır (sırasıyla, açıktır) denir. Diğer bir deyişle göreceli kapalı (sırasıyla, açık) alt kümeler, X uzayının kapalı (sırasıyla, açık) alt kümelerinin Y uzayına kısıtlanışlarıdır. Örneğin; herhangi $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ için $a<b<c<d$ koşulunu sağlanmak üzere $Y=[a,b]\cup(c,d)$ tanımlansın. O halde $[a,b]$ kapalı aralığı hem göreceli açık hem de göreceli kapalıdır (Mendelson, 1962).

Teorem 4.2.16: (Y,τ'), (X,τ) topolojik uzayının bir alt uzayı olsun. $F'\subset Y$ alt kümesinin Y uzayında göreceli kapalı olması için gerek ve yeter koşul X uzayının kapalı bazı F kümeleri için $F'=F\cap Y$ şeklinde yazılmasıdır (Mendelson, 1962).

Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 4.2.14'teki ispat yöntemiyle kolaylıkla görülür.

Teorem 4.2.17: ϑ ağırlık fonksiyonu her $x\in\mathbb{R}^d$ için $\vartheta(x)\geq 1$ koşulunu sağlasın ve $A\subset\Omega$ göreceli kapalı bir küme olsun. Bu takdirde $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)=W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega-A)$ olması için gerek ve yeter koşul $C_{p(.),\vartheta}(A)=0$ olmasıdır.

Aşağıdaki teoremin ispatı (Diening ve ark., 2011) çalışmasındaki Teorem 11.3.2'nin ispatına benzer olarak gösterilebilir.

Teorem 4.2.18: $A\subset\Omega$ göreceli kapalı bir küme olsun. Eğer $C_{p(.),\vartheta}(A)=0$ ise, $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)=W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega-A)$ eşitliği bulunur.

Teorem 4.2.19: ϑ ağırlık fonksiyonu her $x\in\mathbb{R}^d$ için $\vartheta(x)\geq 1$ koşulunu sağlasın. Bu takdirde $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)=W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter koşul $C_{p(.),\vartheta}(\mathbb{R}^d-\Omega)=0$ olmasıdır.

İspat: Öncelikle, $W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)=W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ olsun. Ayrıca $r>0$ ve her $x\in\Omega$ için $f(x)=\text{maks}\{0,2r-|x|\}$ fonksiyonu tanımlansın. O halde, $f\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ olur. Gerçekten, $\text{maks}\{0,2r-|x|\}=2r-|x|$ olduğu varsayılsın, aksi halde ifade açıktır. Bu durumda

$$\rho_{L_\vartheta^{p(.)}(\Omega)}(f)=\int_\Omega \left|2r-|x|\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx\le\int_\Omega\left(|2r|+|x|\right)^{p(x)}\vartheta(x)dx$$
$$\le\int_\Omega (4r)^{p(x)}\vartheta(x)dx\le \text{maks}\left((4r)^{p^-},(4r)^{p^+}\right)\int_\Omega\vartheta(x)dx<\infty$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde, $\rho_{L_\vartheta^{p(.)}(\Omega)}(\nabla f)<\infty$ olduğu görülür. O halde $f\in W_\vartheta^{1,p(.)}(\Omega)=W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ elde edilir. Ayrıca $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W_\vartheta^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayında yoğun olduğu biliniyor (Aydın, 2012b). O halde, $W_\vartheta^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayında $f_i\to f$ olan ve Ω'da kompakt destekli $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ dizisi alınsın. Buradan her $i\in\mathbb{N}$ için $f-f_i\in S_{p(.),\vartheta}\left(\left(\mathbb{R}^d-\Omega\right)\cap B(0,r)\right)$ olur. Ayrıca $p^+<\infty$ olduğundan $\rho_{1,p(.),\vartheta}(f_i-f)\to 0$ bulunur. Eğer $f-f_i\in S_{p(.),\vartheta}\left(\left(\mathbb{R}^d-\Omega\right)\cap B(0,r)\right)$ üzerinden infimum alınırsa $C_{p(.),\vartheta}\left(\left(\mathbb{R}^d-\Omega\right)\cap B(0,r)\right)=0$ elde edilir. Yine

$$\bigcup_{r=1}^{\infty}\left(\left(\mathbb{R}^d-\Omega\right)\cap B(0,r)\right)=\left(\mathbb{R}^d-\Omega\right)\cap\bigcup_{r=1}^{\infty}B(0,r)=\mathbb{R}^d-\Omega$$

sağlanır. Sobolev $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin alt toplamsallık özelliğinden

$$0\le C_{p(.),\vartheta}\left(\left(\mathbb{R}^d-\Omega\right)\right)\le\sum_{r=1}^{\infty}C_{p(.),\vartheta}\left(\left(\mathbb{R}^d-\Omega\right)\cap B(0,r)\right)=0$$

olup ispatın ilk kısmı tamamlanır.

Şimdi $C_{p(.),\vartheta}\left(\mathbb{R}^d-\Omega\right)=0$ olsun. Yine $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayının tanımından $W_\vartheta^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)=W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olduğu biliniyor. Ayrıca, $\mathbb{R}^d-\Omega$ göreceli kapalı kümedir. Gerçekten, $\mathbb{R}^d-\Omega\subset\mathbb{R}^d-\Omega$ ve $\mathbb{R}^d-\Omega=\mathbb{R}^d\cap\left(\mathbb{R}^d-\Omega\right)$ olup burada $\mathbb{R}^d$ hem açık hem de kapalıdır. Dolayısıyla $\mathbb{R}^d-\Omega$ göreceli kapalıdır. O halde, Teorem 4.2.18 ve Teorem 4.2.17 kullanılırsa

$$W_\vartheta^{1,p(.)}(\Omega)=W_\vartheta^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d-\left(\mathbb{R}^d-\Omega\right)\right)=W_\vartheta^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$$
$$=W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)=W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d-\left(\mathbb{R}^d-\Omega\right)\right)=W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$$

olup istenen elde edilir.

Şimdi $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayında Poincaré eşitsizliği ispatlanacaktır. $A \subset \mathbb{R}^d$ olsun. Ayrıca $p(.) \in P(\mathbb{R}^d)$ olmak üzere

$$p_A^- = \operatorname*{essinf}_{x \in A \cap \Omega} p(x) \text{ ve } p_A^+ = \operatorname*{esssup}_{x \in A \cap \Omega} p(x)$$

fonksiyonları tanımlansın ve $p_\Omega^+ < \infty$ olsun. Eğer $x \in \Omega$ için $p_{B(x,r)}^- \geq d$ veya $p_{B(x,r)}^+ \leq \dfrac{dp_{B(x,r)}^-}{d - p_{B(x,r)}^-}$ eşitsizlikleri sağlanıyorsa, $p(.)$ değişken üssü Ω kümesinde r sabitiyle sıçrama (jump) koşulunu sağlar denir. Ayrıca,

$$p_{B(x,r)}^* = \begin{cases} \dfrac{dp_{B(x,r)}^-}{d - p_{B(x,r)}^-}, & p_{B(x,r)}^- < d \\ p_{B(x,r)}^+, & p_{B(x,r)}^- \geq d \end{cases}$$

fonksiyonu tanımlansın (Liu, 2008).

Not 4.2.20: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı bir küme olsun. $p(.) = 1$ koşulu altında Teorem 2.1.16 sağlanır. Böylece $L_\vartheta^{p(.)}(\Omega) \hookrightarrow L_\vartheta^1(\Omega)$ bulunur.

Teorem 4.2.21: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı bir küme olmak üzere $p(.)$ değişken üssü Ω kümesinde r sabitiyle sıçrama koşulunu sağlasın. O halde herhangi bir $f \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ için C sabiti $p(.)$ değişken üssü, $|\Omega|$, $\operatorname{diam}(\Omega)$, r ve d ifadelerine bağlı olmak üzere $\|f\|_{L_\vartheta^{p(.)}(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L_\vartheta^{p(.)}(\Omega)}$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Hipotezden $\overline{\Omega}$ kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan $\overline{\Omega}$ kompakt olarak bulunur. O halde, kendisini örten sonlu bir alt açık örteni vardır. Buradan $\Omega \subset \overline{\Omega}$ için $\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{j} B(x_i, r)$ olacak şekilde $x_1, ..., x_j$ bulunur. Ayrıca Teorem 2.1.16 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{p(.)}_{\vartheta}(\Omega)} &= \|f^*\|_{L^{p(.)}_{\vartheta}(\mathbb{R}^d)} \le \left\|f^*\left[\chi_{B(x_1,r)}+\ldots+\chi_{B(x_j,r)}\right]\right\|_{L^{p(.)}_{\vartheta}(\mathbb{R}^d)} \\ &\le \sum_{i=1}^{j}\|f^*\|_{L^{p(.)}_{\vartheta}(B(x_i,r))} \le c\sum_{i=1}^{j}\|f^*\|_{L^{p^*_{B(x_i,r)}}_{\vartheta}(B(x_i,r))} \\ &\le c\sum_{i=1}^{j}\left(\left\|f^*-f^*_{B(x_i,r)}\right\|_{L^{p^*_{B(x_i,r)}}_{\vartheta}(B(x_i,r))}+\left|f^*_{B(x_i,r)}\right|\|1\|_{L^{p^*_{B(x_i,r)}}_{\vartheta}(B(x_i,r))}\right)\end{aligned} \tag{4.2.21.1}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $f^*_{B(x_i,r)} = \frac{1}{|B(x_i,r)|}\int_{B(x_i,r)} f^*(y)dy$ şeklinde tanımlanan ifade f^* kanonik temsilcisinin her $i\in\mathbb{N}$ için $B(x_i,r)$ üzerindeki ortalaması gösterilmiştir (Heinonen ve ark., 1993). Ayrıca, her $i\in\mathbb{N}$ için $p^-_{B(x_i,r)} \le p(.)$ eşitsizliği sağlanır. Eğer yuvarlar üzerindeki Poincaré eşitsizliği ve Teorem 2.1.16'dan $L^{p(.)}_{\vartheta}(B(x_i,r)) \hookrightarrow L^{p^-_{B(x_i,r)}}_{\vartheta}(B(x_i,r))$ olması kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\left\|f^*-f^*_{B(x_i,r)}\right\|_{L^{p^*_{B(x_i,r)}}_{\vartheta}(B(x_i,r))} &\le cr\|\nabla f^*\|_{L^{p^-_{B(x_i,r)}}_{\vartheta}(B(x_i,r))} \le cr\|\nabla f^*\|_{L^{p(.)}_{\vartheta}(B(x_i,r))} \\ &\le cr\|\nabla f^*\|_{L^{p(.)}_{\vartheta}(\mathbb{R}^d)} = cr\|\nabla f\|_{L^{p(.)}_{\vartheta}(\Omega)}\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca, kanonik temsilci tanımından $B(x_i,r)\subset\Omega$ için $B(x_i,r)$ yuvarlarında h.h.h. $f=f^*$ olacaktır. O halde, $L^1_{\vartheta}(\Omega)$ uzayındaki Poincaré eşitsizliği ve Not 4.2.20'den

$$\begin{aligned}\left|f^*_{B(x_i,r)}\right| &\le \frac{1}{|B(x_i,r)|}\int_{B(x_i,r)}|f(x)|\vartheta(x)dx \le \frac{C}{r^d}\int_{\Omega}|f(x)|\vartheta(x)dx \\ &\le \frac{C}{r^d}\operatorname{diam}(\Omega)\int_{\Omega}|\nabla f(x)|\vartheta(x)dx \le \frac{C}{r^d}\operatorname{diam}(\Omega)c\|\nabla f\|_{L^{p(.)}_{\vartheta}(\Omega)}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $\vartheta\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ olduğundan

$$\rho_{p^*_{B(x_i,r)},\vartheta}\left(\chi_{B(x_i,r)}\right) = \int_{B(x_i,r)}\vartheta(x)dx < \infty$$

olup (4.2.21.1) eşitsizliğinden istenen elde edilir.

Sonuç 4.2.22: Teorem 4.2.21'den $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayında $\|\nabla f\|_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}$ ve $\|f\|_{W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)}$ normlarının denk oldukları görülür. O halde herhangi bir $f \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ verildiğinde $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayının üzerindeki norm olarak $\|f\|_{W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)} = \|\nabla f\|_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}$ kullanılabilir.

Çalışmanın bu bölümünün kalan kısmında Dirichlet enerji integrali ele alınacaktır. Şimdi $h \in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ alınsın. $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ üzerinde h sınır değer fonksiyonuna bağlı enerji operatörü

$$E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}(f) = \int_{\Omega} |\nabla f(x) + \nabla h(x)|^{p(x)} \vartheta(x) dx$$

şeklinde tanımlansın.

X kümesi $\mathbb{R}^d$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Her $\alpha \in [0,1]$ ve herhangi $f, g \in X$ için $E(\alpha f + (1-\alpha)g) \leq \alpha E(f) + (1-\alpha)E(g)$ eşitsizliği sağlanırsa, E operatörüne X üzerinde konvekstir denir. Yine, $i \to \infty$ için X uzayında $f_i \to f$ olmak üzere $E(f) \leq \liminf_{i\to\infty} E(f_i)$ gerçeklenirse, E operatörüne alttan yarı süreklidir denir. Ayrıca, $\|f_i\|_X \to \infty$ için $E(f_i) \to \infty$ elde ediliyorsa E operatörüne coercive denir (Kinderlehrer ve Stampacchia, 1980), (Maso, 1993). Aşağıdaki teoremin ispatı (Kinderlehrer ve Stampacchia, 1980) çalışmasındaki Teorem 2.1'de verilmiştir.

Teorem 4.2.23: X yansımalı bir Banach uzayı olsun. $E : X \to \mathbb{R}$ konveks, alttan yarı-sürekli ve coercive ise, X uzayında E operatörünü minimize eden bir eleman vardır.

Şimdi, $E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}$ enerji operatörünü $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayında minimize eden elemanların varlığı ele alınacaktır.

Teorem 4.2.24: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı bir küme olsun. Eğer $p(.)$ değişken üssü Ω kümesinde sıçrama koşulunu sağlar ise,

$$E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}(f) = \inf_{g \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)} E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}(g) \qquad (4.2.24.1)$$

olacak şekilde bir $f \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ vardır.

İspat: $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayının yansımalı Banach uzayı olduğu biliniyor. Ayrıca, $t\to t^{p(.)}$ dönüşümü konveks olduğundan (Diening ve ark., 2011), her $f,g\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ için $\alpha\in(0,1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}\left(\alpha f+(1-\alpha)g\right)&=\int_{\Omega}\left|\alpha\left(\nabla f(x)+\nabla h(x)\right)+(1-\alpha)\left(\nabla g(x)+\nabla h(x)\right)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx\\&\leq\alpha E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}(f)+(1-\alpha)E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}(g)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde $E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}$ enerji operatörü konvekstir.

Şimdi $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayında $f\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ fonksiyonuna yakınsayan fonksiyonların dizisi $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$ olsun. Sonuç 4.2.22'den $i\to\infty$ için

$$\left\|\nabla(f_i+h)-\nabla(f+h)\right\|_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}=\left\|f_i-f\right\|_{W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)}\to 0$$

bulunur. Ayrıca, $p^{+}<\infty$ olduğundan $\rho_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}\left(\nabla(f_i+h)-\nabla(f+h)\right)\to 0$ olup $\rho_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}\left(\nabla(f_i+h)\right)\to\rho_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}\left(\nabla(f+h)\right)$ yakınsaması elde edilir (Kováčik ve Rákosník, 1991). Böylece $\rho_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}\left(\nabla(f+h)\right)\leq\liminf_{i\to\infty}\rho_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}\left(\nabla(f_i+h)\right)$ eşitsizliği sağlanır. O halde, $E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}$ enerji operatörü alttan yarı-süreklidir.

Sonuç 4.2.22'den $\left\|f_i\right\|_{W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)}\to\infty$ için $\left\|\nabla f_i\right\|_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}\to\infty$ olur. Yine $\left\|\nabla f_i\right\|_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}\leq\left\|\nabla f_i+\nabla h\right\|_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}+\left\|\nabla h\right\|_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}$ ifadesinden $i\to\infty$ için $\left\|\nabla f_i+\nabla h\right\|_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}\to\infty$ bulunur. Ayrıca, $p^{+}<\infty$ olduğundan $i\to\infty$ için $\rho_{L_{\vartheta}^{p(.)}(\Omega)}\left(\nabla(f_i+h)\right)\to\infty$ sağlanır. Buradan $E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}$ enerji operatörü coercive olup Teorem 4.2.23'ten ispat tamamlanır.

Şimdi, $E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}$ operatörünü minimize eden elemanların tekliği ispatlanacaktır.

Teorem 4.2.25: $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ sınırlı bir küme olsun ve $p(.)$ değişken üssü Ω kümesinde sıçrama koşulunu sağlasın. Bu takdirde (4.2.24.1) eşitliğindeki f minimize eden fonksiyonunun f^{*} $(p(.),\vartheta)$-q.c. temsilcisi sıfır Sobolev $(p(.),\vartheta)$-kapasiteli kümeye bağlı olarak tektir.

İspat: $\left|\left\{x\in\Omega:\nabla f_1(x)\neq\nabla f_2(x)\right\}\right|>0$ olmak üzere (4.2.24.1) ifadesinin iki minimize edici fonksiyonu olarak f_1 ve f_2 alınsın. O halde, $\nabla f_1(x)\neq\nabla f_2(x)$ olacak şekilde en az bir $x\in\Omega$ vardır. $E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}$ enerji operatörü konveks olduğundan

$$E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}\left(\frac{1}{2}(f_1+f_2)\right)\leq\frac{1}{2}E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}(f_1)+\frac{1}{2}E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}(f_2)=\inf_{f\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)}E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}(f)$$

elde edilir. Bu ise minimize edilme tanımıyla çelişir. O halde $\left|\left\{x\in\Omega:\nabla f_1(x)\neq\nabla f_2(x)\right\}\right|=0$ olarak bulunur. Teorem 4.2.21'den

$$\|f_1-f_2\|_{L_\vartheta^{p(.)}(\Omega)}\leq C\|\nabla f_1+\nabla f_2\|_{L_\vartheta^{p(.)}(\Omega)}=0$$

sağlanır. Bu ise h.h.h. $x\in\Omega$ için $f_1(x)=f_2(x)$ olduğunu gösterir. Ayrıca, $f_1,f_2\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ olduğundan Ω kümesinde h.h.h. $f_1=f_1^*$ ve $f_2=f_2^*$ olacak şekilde $f_1^*,f_2^*\in W_\vartheta^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ $(p(.),\vartheta)$-q.c. fonksiyonları sağlandığından h.h.h $x\in\Omega$ için $f_1^*(x)=f_2^*(x)$ eşitliği de sağlanır. Böylece Ω kümesinde $f_1^*=f_2^*$ $(p(.),\vartheta)$-q.e. olur. Bu ise istenendir.

Tanım 4.2.26: $(X,\|\cdot\|_X)$ ve $(Y,\|\cdot\|_Y)$ iki Banach uzay ve $x\in X$ olsun. $f:X\to Y$ olmak üzere her $y\in X$ için

$$\lim_{h\to0}\frac{\|f(x+hy)-f(x)\|_Y}{h}=T_x(y) \qquad (4.2.26.1)$$

olacak şekilde bir $T\in L(X,Y)$ varsa f fonksiyonuna $x\in X$ noktasında ve y yönünde Gâteaux türevlenebilirdir denir. T operatörüne ise f fonksiyonunun $x\in X$ noktasında Gâteaux türevi denir. Eğer (4.2.26.1) eşitliği her $x\in X$ için sağlanırsa f Gâteaux türevlenebilirdir denir (Berger, 1977).

Teorem 4.2.27: Herhangi bir $f\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ verilsin. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir;

(i) f fonksiyonu $E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}$ operatörünü minimize eder.

(ii) f fonksiyonu, $g\in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\left[p(x)\left|\nabla f(x)+\nabla h(x)\right|^{p(x)-2}\left(\nabla f(x)+\nabla h(x)\right)\left(\nabla g(x)-\nabla f(x)\right)\right]\vartheta(x)dx \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Öncelikle (i)'nin (ii)'yi gerektirdiği ispatlanacaktır. Bunun için $g \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ sabitlensin ve $\phi = g - f$ ve $t = f + h$ fonksiyonları tanımlansın. Ayrıca $0 < \varepsilon \leq 1$ verilsin. $W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ uzayı bir vektör uzayı olduğundan $f + \varepsilon\phi \in W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega)$ olur. (i) koşulundan $E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}(f) \leq E_{\Omega,h}^{p(.),\vartheta}(f + \varepsilon\phi)$ elde edilir. Buradan,

$$\int_{\Omega}\left[\left|\varepsilon\nabla\phi(x)+\nabla t(x)\right|^{p(x)}-\left|\nabla t(x)\right|^{p(x)}\right]\vartheta(x)dx \geq 0$$

yazılır. Bu ise

$$\int_{\Omega}\left[\frac{\left|\varepsilon\nabla\phi(x)+\nabla t(x)\right|^{p(x)}-\left|\nabla t(x)\right|^{p(x)}}{\varepsilon}\right]\vartheta(x)dx \geq 0 \qquad (4.2.27.1)$$

olduğunu gösterir. Şimdi $F: W_{0,\vartheta}^{1,p(.)}(\Omega) \to \mathbb{R}$, $F(f) = \left|\nabla f\right|^{p(.)}$ şeklinde tanımlansın. Gâteaux türevi tanımından

$$dF(t;\phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{F(t+\varepsilon\phi)-F(t)}{\varepsilon} = \frac{d}{d\varepsilon}F(t+\varepsilon\phi)\big|_{\varepsilon=0}$$

bulunur (Berger, 1977). Ayrıca, h.h.h. $x \in \Omega$ için

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\varepsilon}F(t+\varepsilon\phi) &= \frac{d}{d\varepsilon}\left(\left(\frac{\partial t(x)}{\partial x_1}+\varepsilon\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial t(x)}{\partial x_n}+\varepsilon\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_n}\right)^2\right)^{\frac{p(x)}{2}} \\ &= p(x)\left[\left(\left(\frac{\partial t(x)}{\partial x_1}+\varepsilon\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_1}\right)^2+\ldots+\left(\frac{\partial t(x)}{\partial x_n}+\varepsilon\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_n}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{p(x)-2} \\ &\quad .\left[\left(\frac{\partial t(x)}{\partial x_1}+\varepsilon\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_1}\right)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_1}+\ldots+\left(\frac{\partial t(x)}{\partial x_n}+\varepsilon\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_n}\right)\frac{\partial\phi(x)}{\partial x_n}\right]\end{aligned}$$

olup

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left|\varepsilon\nabla\phi(x)+\nabla t(x)\right|^{p(x)}-\left|\nabla t(x)\right|^{p(x)}}{\varepsilon}=p(x)\left|\nabla t(x)\right|^{p(x)-2}\nabla t(x)\nabla\phi(x) \tag{4.2.27.2}$$

elde edilir. Ortalama değer teoreminden

$$\frac{F(t+\varepsilon\phi)-F(t)}{\varepsilon\phi}=\frac{d}{d\varepsilon}F\left(t+\varepsilon^{*}\phi\right)$$

olacak şekilde $\varepsilon^{*}\in(0,\varepsilon)$ sayısı vardır. Benzer şekilde

$$\frac{d}{d\varepsilon}F\left(t+\varepsilon^{*}\phi\right)=p(x)\left|\varepsilon^{*}\nabla\phi(x)+\nabla t(x)\right|^{p(x)-2}\left(\varepsilon^{*}\nabla\phi(x)+\nabla t(x)\right)\nabla\phi(x)$$

sağlandığından

$$\frac{\left|\varepsilon\nabla\phi(x)+\nabla t(x)\right|^{p(x)}-\left|\nabla t(x)\right|^{p(x)}}{\varepsilon}=p(x)\left|\varepsilon^{*}\nabla\phi(x)+\nabla t(x)\right|^{p(x)-2}\left(\varepsilon^{*}\nabla\phi(x)+\nabla t(x)\right)\nabla\phi(x)$$

olacak şekilde $\varepsilon^{*}\in(0,\varepsilon)$ bulunur. O halde

$$\begin{aligned}\left|\frac{\left|\varepsilon\nabla\phi(x)+\nabla t(x)\right|^{p(x)}-\left|\nabla t(x)\right|^{p(x)}}{\varepsilon}\right| &= \left|p(x)\right|\left|\varepsilon^{*}\nabla\phi(x)+\nabla t(x)\right|^{p(x)-1}\left|\nabla\phi(x)\right| \\ &\le p^{+}2^{p^{+}}\left(\left|\nabla t(x)\right|^{p(x)-1}+\left|\nabla\phi(x)\right|^{p(x)-1}\right)\left|\nabla\phi(x)\right| \\ &= p^{+}2^{p^{+}}\left(\left|\nabla t(x)\right|^{p(x)-1}\left|\nabla\phi(x)\right|+\left|\nabla\phi(x)\right|^{p(x)}\right):=z(x)\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, $z\in L^{1}_{\vartheta}(\Omega)$ olduğu gösterilsin. $W^{1,p(.)}_{0,\vartheta}(\Omega)\subset W^{1,p(.)}_{\vartheta}(\Omega)$ olduğundan $f,g,h\in W^{1,p(.)}_{\vartheta}(\Omega)$ bulunur. Ayrıca, $\phi\in W^{1,p(.)}_{\vartheta}(\Omega)$ olup $\rho_{L^{p(.)}_{\vartheta}(\Omega)}(\nabla\phi)<\infty$ sağlanır. Diğer taraftan $\frac{1}{p(.)}+\frac{1}{q(.)}=1$ için

$$\rho_{L^{q(.)}_{\vartheta}(\Omega)}\left(\left|\nabla t\right|^{p(.)-1}\right)=\int_{\Omega}\left|\nabla t(x)\right|^{(p(x)-1)q(x)}\vartheta(x)dx=\int_{\Omega}\left|\nabla t(x)\right|^{p(x)}\vartheta(x)dx<\infty$$

olup ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzaylarında Hölder eşitsizliği uygulanabilir. O halde, $\frac{1}{p(.)}+\frac{1}{q(.)}=1$ için

$$\left\| |\nabla t|^{p(.)-1} |\nabla\phi| \right\|_{L^1_\vartheta(\Omega)} \leq c_h \|\nabla\phi\|_{L^{p(.)}_\vartheta(\Omega)} \left\| |\nabla t|^{p(.)-1} \right\|_{L^{q(.)}_\vartheta(\Omega)}$$

sağlanır. Böylece

$$\int_\Omega z(x)\vartheta(x)dx = p^+ 2^{p^+} \int_\Omega |\nabla t(x)|^{p(x)-1} |\nabla\phi(x)| \vartheta(x)dx + p^+ 2^{p^+} \int_\Omega |\nabla\phi(x)|^{p(x)} \vartheta(x)dx$$
$$\leq p^+ 2^{p^+} c_h \|\nabla\phi\|_{L^{p(.)}_\vartheta(\Omega)} \left\| |\nabla t|^{p(.)-1} \right\|_{L^{q(.)}_\vartheta(\Omega)} + p^+ 2^{p^+} \rho_{L^{p(.)}_\vartheta(\Omega)}(\nabla\phi) < \infty$$

elde edilir. O halde $z \in L^1_\vartheta(\Omega)$ olur. Sonuç olarak, (4.2.27.1) eşitsizliğinde Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoremi kullanılırsa (ii) elde edilir.

Şimdi ispatın kalan kısmı verilsin. Konvekslik tanımından $0 < \alpha < 1$ için

$|\eta_2 + \alpha(\eta_1 - \eta_2)|^{p(.)} \leq \alpha|\eta_1|^{p(.)} + (1-\alpha)|\eta_2|^{p(.)}$ sağlanır. Burada $\eta_1 = \nabla\phi + \nabla t$ ve $\eta_2 = \nabla t$ için

$$|\alpha\nabla\phi + \nabla t|^{p(.)} - |\nabla t|^{p(.)} \leq \alpha\left[|\nabla\phi + \nabla t|^{p(.)} - |\nabla t|^{p(.)}\right]$$

olup $\dfrac{|\alpha\nabla\phi + \nabla t|^{p(.)} - |\nabla t|^{p(.)}}{\alpha} \leq |\nabla g + \nabla h|^{p(.)} - |\nabla f + \nabla h|^{p(.)}$ sağlanır. Burada $\alpha \to 0$ için limit alınır ve (4.2.27.2) kullanılırsa

$$p(x)|\nabla t(x)|^{p(x)-2} \nabla t(x)\nabla\phi(x) \leq |\nabla g(x) + \nabla h(x)|^{p(x)} - |\nabla f(x) + \nabla h(x)|^{p(x)}$$

bulunur. O halde

$$|\nabla f(x) + \nabla h(x)|^{p(x)} \vartheta(x) \leq |\nabla g(x) + \nabla h(x)|^{p(x)} \vartheta(x)$$

olup $g \in W^{1,p(.)}_{0,\vartheta}(\Omega)$ için $E^{p(.),\vartheta}_{\Omega,h}(f) \leq E^{p(.),\vartheta}_{\Omega,h}(g)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.3. Ağırlıklı Değişken Üslü Sobolev Uzaylarında İyi Topoloji ve Bazı Özellikleri

Bu bölümde ağırlıklı değişken üslü Sobolev uzayları için iyi topoloji kavramından bahsedilip bazı özellikleri incelenecektir. Bunun için öncelikle ince küme tanımı verilecektir.

Tanım 4.3.1: Herhangi $A \subset \mathbb{R}^d$ kümesi

$$\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A \cap B(x_0,r), B(x_0,2r)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r), B(x_0,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}} \frac{dr}{r} < \infty \tag{4.3.1.1}$$

koşulunu sağlıyorsa $x_0 \in \mathbb{R}^d$ kümesinde $(p(.),\vartheta)$-incedir denir. Ayrıca, herhangi bir küme $(p(.),\vartheta)$-ince değilse, $(p(.),\vartheta)$-ince olmayan kümedir denir. Literatürde (4.3.1.1) tipindeki integral Wiener tipi integral olarak adlandırılır (Heinonen ve ark., 1993). Bu çalışmada, Wiener tipi integral

$$W_{p(.),\vartheta}(A, x_0) = \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A \cap B(x_0,r), B(x_0,2r)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r), B(x_0,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}} \frac{dr}{r}$$

olarak gösterilecektir. Yine Wiener toplamı da

$$W^{sum}_{p(.),\vartheta}(A, x_0) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A \cap B(x_0,2^{-i}), B(x_0,2^{1-i})\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,2^{-i}), B(x_0,2^{1-i})\right)} \right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}}$$

olarak tanımlanır. Uygunluk bakımından $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r), B(x_0,2r)\right) = 0$ olması durumunda (4.3.1.1) ifadesindeki integral 1 alınabilir (Björn ve Björn, 2011). Şimdi, Wiener integrali ve Wiener toplamı arasındaki ilişki verilecektir.

Teorem 4.3.2: Teorem 4.1.12 ve Teorem 4.1.13'teki hipotezler sağlansın. Bu takdirde herhangi bir $A \subset \mathbb{R}^d$ ve $x_0 \notin A$ için

$$C_1 W_{p(.),\vartheta}(A, x_0) \le W^{sum}_{p(.),\vartheta}(A, x_0) \le C_2 W_{p(.),\vartheta}(A, x_0)$$

olacak şekilde C_1, C_2 pozitif sabitleri vardır.

İspat: Teorem 4.1.12 ve Teorem 4.1.13'ten $r \le s \le 2r$ için denklik sabiti r, p^-, p^+, katlayan ölçüm sabiti ve Poincaré eşitsizliği sabitine bağlı olmak üzere

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A \cap B(x_0,r), B(x_0,2r)\right) \approx \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A \cap B(x_0,r), B(x_0,2s)\right) \tag{4.3.2.1}$$

ve

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r),B(x_0,2r)\right)\approx \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,s),B(x_0,2s)\right) \tag{4.3.2.2}$$

bulunur. Gerçekten, $A\subset B(x_0,r)$ için $A\cap B(x_0,r)\subset B(x_0,r)$ olduğundan Teorem 4.1.13'ten (4.3.2.1) elde edilir. Diğer taraftan, Teorem 4.1.12'den

$$T_1\mu_\vartheta\left(B(x_0,r)\right)\le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r),B(x_0,2r)\right)\le T_2\mu_\vartheta\left(B(x_0,r)\right) \tag{4.3.2.3}$$

ve

$$T_3\mu_\vartheta\left(B(x_0,s)\right)\le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,s),B(x_0,2s)\right)\le T_4\mu_\vartheta\left(B(x_0,s)\right) \tag{4.3.2.4}$$

olacak şekilde T_1, T_2, T_3 ve T_4 sabitleri vardır. Ayrıca, $r\le s$ için $\mu_\vartheta\left(B(x_0,r)\right)\le\mu_\vartheta\left(B(x_0,s)\right)$ olduğundan (4.3.2.3) ve (4.3.2.4) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r),B(x_0,2r)\right)&\le T_2\mu_\vartheta\left(B(x_0,r)\right)\le T_2\mu_\vartheta\left(B(x_0,s)\right)\\&\le \frac{T_2}{T_3}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,s),B(x_0,2s)\right)\\&= T^*\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,s),B(x_0,2s)\right)\end{aligned} \tag{4.3.2.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Yine, $r\le s\le 2r$ için $\mu_\vartheta\left(B(x_0,s)\right)\le\mu_\vartheta\left(B(x_0,2r)\right)$ olup (4.3.2.4) ve (4.3.2.3) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,s),B(x_0,2s)\right)&\le T_4\mu_\vartheta\left(B(x_0,s)\right)\le T_4\mu_\vartheta\left(B(x_0,2r)\right)\\&\le T_4c_d\mu_\vartheta\left(B(x_0,r)\right)\le \frac{T_4c_d}{T_1}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r),B(x_0,2r)\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $T^{**}=\dfrac{T_4c_d}{T_1}$ olmak üzere

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,s),B(x_0,2s)\right)\le T^{**}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r),B(x_0,2r)\right) \tag{4.3.2.6}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.3.2.5) ve (4.3.2.6) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}\frac{1}{T^{**}}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,s),B(x_0,2s)\right)&\le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r),B(x_0,2r)\right)\\&\le T^*\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,s),B(x_0,2s)\right)\end{aligned}$$

olacak şekilde T^* ve T^{**} sabitleri bulunduğundan (4.3.2.2) denkliği sağlanır. Ayrıca $2^{-1-i} \le r \le 2^{-i}$ için $2^{-i} \le 2r \le 2^{1-i}$ olup (4.3.2.1) ifadesinden ve rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesinin monotonluk özelliğinden

$$\begin{aligned} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B\left(x_0,r\right),B\left(x_0,2r\right)\right) &\le C_1\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B\left(x_0,r\right),B\left(x_0,2^{1-i}\right)\right) \\ &\le C_1\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B\left(x_0,2^{-i}\right),B\left(x_0,2^{1-i}\right)\right) \end{aligned}$$

olacak şekilde $C_1 > 0$ sabiti elde edilir. Yine $2^{-1-i} \le r \le 2^{-i}$ için $2^{-1-i} \le r \le 2^{-i} \le 2r \le 2^{1-i}$ olacağından (4.3.2.2) denkliğinden

$$\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,r\right),B\left(x_0,2r\right)\right) \approx \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,2^{-i}\right),B\left(x_0,2^{1-i}\right)\right)$$

bulunur. O halde

$$\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,r\right),B\left(x_0,2r\right)\right) \ge \frac{1}{C_2}\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,2^{-i}\right),B\left(x_0,2^{1-i}\right)\right)$$

olacak şekilde $C_2 > 0$ sabiti vardır. Buradan $T = C_1C_2 > 0$ olmak üzere

$$\frac{\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B\left(x_0,r\right),B\left(x_0,2r\right)\right)}{\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,r\right),B\left(x_0,2r\right)\right)} \le T\frac{\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B\left(x_0,2^{-i}\right),B\left(x_0,2^{1-i}\right)\right)}{\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,2^{-i}\right),B\left(x_0,2^{1-i}\right)\right)} \tag{4.3.2.7}$$

eşitsizliği sağlanır. Yine, $2^{-1-i} \le r \le 2^{-i} \le 2r \le 2^{1-i} \le 4r$ eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B\left(x_0,2^{-i}\right),B\left(x_0,2^{1-i}\right)\right) &\le C_1\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B\left(x_0,2^{-i}\right),B\left(x_0,4r\right)\right) \\ &\le C_1\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B\left(x_0,2r\right),B\left(x_0,4r\right)\right) \end{aligned}$$

ve

$$C_2\mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,2r\right),B\left(x_0,4r\right)\right) \le \mathrm{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x_0,2^{-i}\right),B\left(x_0,2^{1-i}\right)\right)$$

olacak şekilde $C_1, C_2 > 0$ sabitleri vardır. Böylece $T = C_1C_2 > 0$ olmak üzere (4.3.2.7) eşitsizliğinden

$$\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B(x_0,r),B(x_0,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r),B(x_0,2r)\right)}\leq T\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B(x_0,2^{-i}),B(x_0,2^{1-i})\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,2^{-i}),B(x_0,2^{1-i})\right)}$$

$$\leq T\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B(x_0,2r),B(x_0,4r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,2r),B(x_0,4r)\right)}$$

elde edilir. Ayrıca

$$W_{p(.),\vartheta}(A,x_0)=\sum_{i=0}^{\infty}\int_{2^{-1-i}}^{2^{-i}}\left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B(x_0,r),B(x_0,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r),B(x_0,2r)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}}\frac{dr}{r}$$

$$\leq T\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B(x_0,2^{-i}),B(x_0,2^{1-i})\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,2^{-i}),B(x_0,2^{1-i})\right)}\right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}}\int_{2^{-1-i}}^{2^{-i}}\frac{dr}{r}$$

$$=T\ln 2W^{sum}_{p(.),\vartheta}(A,x_0)$$

olacak şekilde $T^{*}=T\ln 2>0$ sabiti bulunur. Diğer taraftan

$$W^{sum}_{p(.),\vartheta}(A,x_0)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B(x_0,2^{-i}),B(x_0,2^{1-i})\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,2^{-i}),B(x_0,2^{1-i})\right)}\right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}}$$

$$\leq\sum_{i=0}^{\infty}\int_{2^{-1-i}}^{2^{-i}}\left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B(x_0,2^{-i}),B(x_0,2^{1-i})\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,2^{-i}),B(x_0,2^{1-i})\right)}\right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}}\frac{dr}{r}$$

$$\leq T\sum_{i=0}^{\infty}\int_{2^{-1-i}}^{2^{-i}}\left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B(x_0,2r),B(x_0,4r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,2r),B(x_0,4r)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}}\frac{dr}{r}$$

$$=T\int_0^1\left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B(x_0,2r),B(x_0,4r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,2r),B(x_0,4r)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}}\frac{dr}{r}$$

$$=2T\int_0^1\left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B(x_0,2r),B(x_0,4r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,2r),B(x_0,4r)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}}\frac{dr}{2r}\leq 2TW_{p(.),\vartheta}(A,x_0)$$

olacak şekilde $T>0$ sabiti bulunur. O halde ispat için istenen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.3.3: Herhangi bir $A\subset\mathbb{R}^d$ verilsin ve $x_0\notin A$ olsun.

(a) A kümesi x_0 noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince ise, A kümesinin x_0 noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olan bir U açık komşuluğu vardır.

(b) A bir Borel kümesi ve x_0 noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olmayan bir küme ise, x_0 noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olmayan bir $K \subset A \cup \{x_0\}$ kompağı vardır.

İspat: **(a)** Kolaylık olması bakımından $B_i = B(x_0, 2^{1-i})$ olarak gösterilsin. Ayrıca, V_1 ve V_2'nin x_0 noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olduğu kabul edilsin. Böylece, tanımdan

$$\int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(V_1 \cap B(x_0,r), B(x_0,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r), B(x_0,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}} \frac{dr}{r} < \infty$$

ve

$$\int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(V_2 \cap B(x_0,r), B(x_0,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r), B(x_0,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}} \frac{dr}{r} < \infty$$

sağlanır. Rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin alt toplamsallık özelliğinden

$$\begin{aligned} cap_{p(.),\vartheta}\left((V_1 \cup V_2) \cap B(x_0,r), B(x_0,2r)\right) \le\ & cap_{p(.),\vartheta}\left(V_1 \cap B(x_0,r), B(x_0,2r)\right) \\ & + cap_{p(.),\vartheta}\left(V_2 \cap B(x_0,r), B(x_0,2r)\right) \end{aligned}$$

olup,

$$\int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left((V_1 \cup V_2) \cap B(x_0,r), B(x_0,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x_0,r), B(x_0,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}} \frac{dr}{r} < \infty$$

elde edilir. Böylece, $V_1 \cup V_2$ kümesi x_0 noktasında $(p(.),\vartheta)$-incedir. Ayrıca, x_0 noktası, her $i \in \mathbb{N}$ için B_i yuvarlarının merkezi olduğundan, $A \cap \partial B_i = \varnothing$ olur. Şimdi $U_0 = \mathbb{R}^d$ olarak alınsın. Rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin tanımından $i = 1,2,3,...$ için $A_i = A \cap B_i \subset U_i$ ve

$$\left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}(U_i, B_{i-1})}{cap_{p(.),\vartheta}(B_i, B_{i-1})} \right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}} \le \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}(A_i, B_{i-1})}{cap_{p(.),\vartheta}(B_i, B_{i-1})} \right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}} + 2^{-i-1}$$

olacak şekilde $U_i \subset B_i \cap U_{i-1}$ açık kümeler verilsin. Yine, $U = \bigcup_{i=0}^{\infty}\left(U_i - \overline{B_{i+1}}\right)$ tanımlansın. Bu takdirde U açık bir küme ve $A \subset U$ olur. Gerçekten, her $i = 1, 2, 3, ...$ için

$$A_i = A \cap B_i \subset U_i \subset B_i \cap U_{i-1}$$

sağlanıyorsa $A \subset U_{i-1}$ kapsaması bulunur. Ayrıca, $A \cap \partial B_i = \varnothing$ ve U kümesinin tanımından, her $x \in A$ için $x \in U_{i-1}$ ve $x \notin \partial B_i$ olup $x \in \left(U_{i_0} - \overline{B_{i_0+1}}\right)$ olacak şekilde en az bir $i_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunur. O halde $x \in U$ olup $A \subset U$ sağlanır. Böylece

$$W_{p(.),\vartheta}^{sum}\left(U, x_0\right) \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(U_i, B_{i-1}\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B_i, B_{i-1}\right)}\right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}} \leq \sum_{i=0}^{\infty}\left(\left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A_i, B_{i-1}\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B_i, B_{i-1}\right)}\right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}} + \frac{1}{2^{i+1}}\right)$$

$$= W_{p(.),\vartheta}^{sum}\left(A, x_0\right) + \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{2^{i+1}} = W_{p(.),\vartheta}^{sum}\left(A, x_0\right) + 1 < \infty$$

olup U kümesinin x_0 noktasında $\left(p(.), \vartheta\right)$-ince olduğu görülür. $A \subset U$ ve U açık olduğundan komşuluk tanımndan U kümesi, A kümesinin ispat için istenilen komşuluğu olur.

(b) $B_i = B\left(x_0, 2^{1-i}\right)$ olsun. Her $i \in \mathbb{N}$ için $A \cap B_i$ kümeleri Borel kümesi olduklarından rölatif $\left(p(.), \vartheta\right)$-kapasitesinin tanımı ve Sonuç 4.1.8'den

$$cap_{p(.),\vartheta}\left(A \cap B_i, B_{i-1}\right) = \sup_{\substack{K \subset A \cap B_i \\ K \text{ kompakt}}} cap_{p(.),\vartheta}\left(K, B_{i-1}\right)$$

olur. Yine rölatif $\left(p(.), \vartheta\right)$-kapasitesinin tanımından her $i \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A_i, B_{i-1}\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B_i, B_{i-1}\right)}\right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}} \leq \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(K_i, B_{i-1}\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B_i, B_{i-1}\right)}\right)^{\frac{1}{p(x_0)-1}} + 2^{-i}$$

olacak şekilde $K_i \subset A \cap B_i$ kompağı alınsın. Buradan $K = \bigcup_{i=0}^{\infty} K_i \cup \left\{x_0\right\}$ kümesi istenilen kompakt kümedir.

Tanım 4.3.4: Herhangi bir $x \in A$ noktasında $\mathbb{R}^d - A$ kümesi $(p(.), \vartheta)$-ince ise A kümesi $(p(.), \vartheta)$-fine (iyi) açık olarak adlandırılır. Buna denk olarak, $(p(.), \vartheta)$-ince olmayan tüm noktaları içeren kümeye $(p(.), \vartheta)$-iyi kapalı denir. Ayrıca, $A \subset \mathbb{R}^d$ için A tarafından kapsanan en büyük $(p(.), \vartheta)$-iyi açık küme A kümesinin iyi içi olarak adlandırılır ve $(A^{\circ})^{p}$ olarak gösterilir. Benzer şekilde A kümesini içeren en küçük $(p(.), \vartheta)$-iyi kapalı kümeye A kümesinin iyi kapanışı denir ve $(\overline{A})^{p}$ ile gösterilir (Harjulehto ve Latvala, 2008), (Heinonen ve ark., 1993), (Maly ve Ziemer, 1997).

Teorem 4.3.5: $\mathbb{R}^d$ üzerindeki iyi topoloji, iyi açık kümeler tarafından üretilir.

İspat: İspat için $\tau_F = \left\{A \subset \mathbb{R}^d : \text{Her } x \in A \text{ için } \mathbb{R}^d - A \ (p(.), \vartheta)\text{- ince}\right\} \cup \{\varnothing\}$ ailesinin $\mathbb{R}^d$ üzerinde bir topoloji olduğu gösterilecektir. Tanımdan,

$$\begin{aligned}
\tau_F &= \left\{ A \subset \mathbb{R}^n : \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left((\mathbb{R}^n - A) \cap B(x,r), B(x,2r) \right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r) \right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} < \infty \right\} \cup \{\varnothing\} \\
&= \left\{ A \subset \mathbb{R}^n : \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r) - A, B(x,2r) \right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r) \right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} < \infty \right\} \cup \{\varnothing\}
\end{aligned} \tag{4.3.5.1}$$

bulunur.

(i) Rölatif $(p(.), \vartheta)$-kapasitesinin tanımından $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(\varnothing, B(x,2r)) = 0$ olduğu biliniyor. Böylece

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r) - \mathbb{R}^d, B(x,2r) \right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r) \right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\varnothing, B(x,2r) \right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r) \right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} = 0 < \infty
\end{aligned}$$

olup $\mathbb{R}^d \in \tau_F$ bulunur. Ayrıca, τ_F kümesinin tanımından $\varnothing \in \tau_F$ olur.

(ii) $i = 1, 2, 3, ..., n$ için $A_i \in \tau_F$ olsun. O halde, τ_F kümesinin tanımından $i = 1, 2, 3, ..., n$ için

$$\int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r)-A_i, B(x,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} < \infty$$

olur. Bu takdirde rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin alt toplamsallık özelliğinden

$$\int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r)-\bigcap_{i=1}^{n} A_i, B(x,2r) \right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \left(B(x,r)-A_i\right), B(x,2r) \right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r}$$

$$\le \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r)-A_i, B(x,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r}$$

$$\le C \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r)-A_i, B(x,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} < \infty$$

olacak şekilde n, p^- ve p^+ ifadelerine bağlı $C>0$ sabiti vardır. Burada C sabiti, $1<p(.)\le 2$ için $\frac{1}{p(.)-1}\ge 1$ ve $p(.)>2$ için $\frac{1}{p(.)-1}<1$ olduğu göz önüne alınırsa $C=n^{\text{maks}\left\{\frac{1}{p^- -1},\frac{1}{p^+ -1}\right\}}>0$ bulunur. Böylece, $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau_F$ elde edilir.

(iii) I indis kümesi olmak üzere her $i\in I$ için $A_i\in\tau_F$ olsun. O halde her $i\in I$ için

$$\int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r)-A_i, B(x,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} < \infty \qquad (4.3.5.2)$$

bulunur. Ayrıca, özel olarak, $j\in I$ için $A_j\subset\bigcup_{i\in I} A_i$ olup $B(x,r)-\bigcup_{i\in I} A_i\subset B(x,r)-A_j$ kapsaması sağlanır. Bu takdirde, $\bigcap_{i\in I}\left(B(x,r)-A_i\right)\subset B(x,r)-A_j$ olup rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin monotonluk özelliği ve (4.3.5.2) kullanılırsa

$$\int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r) - \bigcup_{i\in I} A_i, B(x,2r) \right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r) \right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(\bigcap_{i\in I} \left(B(x,r) - A_i \right), B(x,2r) \right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r) \right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r}$$

$$\leq \int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r) - A_j, B(x,2r) \right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r) \right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} < \infty$$

elde edilir. Buradan $\bigcup_{i\in I} A_i \in \tau_F$ olur. Böylece tanımlanan τ_F kümesinin $\mathbb{R}^d$ kümesinde bir topoloji olduğu görülür.

Sonuç 4.3.6: $\mathbb{R}^d$ kümesinde her açık küme, τ_F topolojisine göre açık bir kümedir.

İspat: Herhangi bir $A \subset \mathbb{R}^d$ açık kümesi verilsin. O halde, her $x \in A$ için $B(x,t) \subset A$ olacak şekilde en az bir $t > 0$ sayısı vardır. Yeterince küçük r'ler için $r \leq t$ olup $B(x,r) \subset B(x,t) \subset A$ elde edilir. Böylece, τ_F topolojisine göre açık küme tanımındaki integral sıfıra eşit olup A kümesinin τ_F topolojisine göre açık görülür.

Sonuç 4.3.7: τ_F topolojisine göre açık kümelerin oluşturduğu iyi topoloji, Öklid topolojiden daha incedir.

Sonuç 4.3.6'nın tersi genel olarak doğru değildir.

Örnek 4.3.8: $E = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : t > 0 \text{ ve } |x| < e^{-\frac{1}{t}} \right\}$ şeklinde tanımlanan küme orijinde τ_F topolojisine göre açık olup açık bir küme değildir (Björn, 2008), (Björn ve Björn, 2011).

Teorem 4.3.9: $A \subset \mathbb{R}^d$ açık veya τ_F topolojisine göre açık küme olmak üzere rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesi sıfır olan herhangi bir $E \subset \mathbb{R}^d$ verilsin. Bu takdirde $A - E$ kümesi τ_F topolojisine göre açık kümedir.

İspat: Sonuç 4.3.6'dan açık bir kümenin τ_F topolojisine göre açık olduğu bilindiğinden $A \subset \mathbb{R}^d$ kümesi açık olarak seçilebilir. Böylece, herhangi bir $y \in A$ için

$$\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(y,r) - A, B(y,2r)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(y,r), B(y,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(y)-1}} \frac{dr}{r} < \infty \tag{4.3.9.1}$$

olur. Ayrıca rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin özelliğinden herhangi bir $x \in A - E$ ve $r > 0$ için

$$\begin{aligned} &\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r) - (A - E), B(x,2r)\right) \\ &= \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\left(B(x,r) - A\right) \cup \left(B(x,r) \cap E\right), B(x,2r)\right) \\ &\leq \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\left(B(x,r) - A\right), B(x,2r)\right) + \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\left(B(x,r) \cap E\right), B(x,2r)\right) \end{aligned} \tag{4.3.9.2}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca (4.3.9.1) ve (4.3.9.2) ifadelerinden

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r) - (A - E), B(x,2r)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} \\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\left(B(x,r) - A\right), B(x,2r)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} \\ &+ \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\left(B(x,r) \cap E\right), B(x,2r)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} \\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\left(B(x,r) - A\right), B(x,2r)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} \\ &+ \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E, B(x,2r)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $A - E$ kümesi τ_F topolojisine göre açık küme olarak bulunur.

Teorem 4.3.10: $A \subset \mathbb{R}^d$ verilsin. A kümesinin $x \in \mathbb{R}^d$ noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olması için gerek ve yeter koşul her $\delta > 0$ için $A \cap B(x,\delta)$ kümesinin $x \in \mathbb{R}^d$ noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olmasıdır.

İspat: $A \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ ve A kümesinin $x \in \mathbb{R}^d$ noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olsun. Bu takdirde

$$\int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A \cap B(x,r), B(x,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} < \infty$$

eşitsizliği sağlanır. Her $\delta > 0$ için $A \cap B(x,\delta) \subset A$ olduğundan rölatif $(p(.),\vartheta)$-kapasitesinin monotonluk özelliğinden

$$\int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A \cap B(x,\delta) \cap B(x,r), B(x,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r}$$

$$\leq \int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A \cap B(x,r), B(x,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} < \infty$$

elde edilir. Böylece $A \cap B(x,\delta)$ kümesi $x \in \mathbb{R}^d$ noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olur. Diğer taraftan her $\delta > 0$ için $A \cap B(x,\delta)$ kümesi $x \in \mathbb{R}^d$ noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olsun. Bu takdirde

$$\int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A \cap B(x,\delta) \cap B(x,r), B(x,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} < \infty \qquad (4.3.10.1)$$

olur. Şimdi, A kümesi $x \in \mathbb{R}^d$ noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olmadığı kabul edilsin. Buradan

$$\int_0^1 \left(\frac{cap_{p(.),\vartheta}\left(A \cap B(x,r), B(x,2r)\right)}{cap_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} = \infty$$

elde edilir. (4.3.10.1) eşitsizliği her $\delta > 0$ için sağlandığından özel olarak $0 < r \leq \delta \leq 1$ için de sağlanır. Bu takdirde

$$\int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B(x,\delta)\cap B(x,r), B(x,2r)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(A\cap B(x,r), B(x,2r)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,r), B(x,2r)\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \frac{dr}{r} = \infty$$

olur. Bu ise $A\cap B(x,\delta)$ kümesinin $x\in\mathbb{R}^d$ noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olması ile çelişir. O halde kabul yanlış olup A kümesi $x\in\mathbb{R}^d$ noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olarak bulunur.

Teorem 4.3.11: Teorem 4.3.2'nin ifadesindeki hipotezler sağlansın ve $E\subset\mathbb{R}^d$ olsun. Eğer $\mathbb{R}^d - E$ kümesi $(p(.),\vartheta)$-ince olacak şekilde bir $x\in E$ varsa,

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,s)-E, B(x,2s)\right) < \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,s), B(x,2s)\right)$$

koşulunu sağlayan $s>0$ bulunur.

İspat: $\mathbb{R}^d - E$ kümesi $x\in E$ noktasında $(p(.),\vartheta)$-ince olsun. Teorem 4.3.2'den

$$W^{sum}_{p(.),\vartheta}(E,x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(\left(\mathbb{R}^d - E\right)\cap B(x,2^{-i}), B(x,2^{1-i})\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,2^{-i}), B(x,2^{1-i})\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,2^{-i})-E, B(x,2^{1-i})\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,2^{-i}), B(x,2^{1-i})\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} < \infty$$

bulunur. Yakınsak bir serinin genel teriminin limitinin, dolayısıyla alt ve üst limitlerinin, sıfıra eşit olduğu biliniyor. O halde,

$$\liminf_{i\to\infty} \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,2^{-i})-E, B(x,2^{1-i})\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,2^{-i}), B(x,2^{1-i})\right)} \right)^{\frac{1}{p(x)-1}} = 0$$

olup $\liminf\limits_{i\to\infty} \dfrac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,2^{-i})-E, B(x,2^{1-i})\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,2^{-i}), B(x,2^{1-i})\right)} = 0$ bulunur. Limit tanımından

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,2^{-i})-E, B(x,2^{1-i})\right) < \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B(x,2^{-i}), B(x,2^{1-i})\right)$$

elde edilir.

Tanım 4.3.12: f, τ_F topolojisine göre açık bir küme olan U kümesinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $\{x \in U : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$ kümesi x_0 noktasında $(p(.), \vartheta)$-ince ise f fonksiyonu $x_0 \in U$ noktasında $(p(.), \vartheta)$-fine (iyi) süreklidir denir (Harjulehto ve Latvala, 2008).

Not 4.3.13: Herhangi bir $f : U \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $x_0 \in U$ noktasında $(p(.), \vartheta)$-iyi sürekli ise, τ_F topolojisine göre süreklidir. Gerçekten, iyi süreklilik tanımından her $\varepsilon > 0$ için $x_0 \in U$ noktasında $\{x \in U : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$ kümesinin $(p(.), \vartheta)$-ince olduğu biliniyor. Bu takdirde $\{x \in U : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ kümesi τ_F topolojisine göre açık olarak bulunur. Böylece f fonksiyonu U kümesinde τ_F topolojisine göre de süreklidir. Bu ifadenin tersinin doğruluğu hala açık bir problemdir (Harjulehto ve Latvala, 2008). Ancak sabit üsler için bu durumun denkliği (Maly ve Ziemer, 1997) çalışmasındaki Teorem 2.136'da incelenmiştir.

Teorem 4.3.14: $E \subset \mathbb{R}^d$ ve $\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(E, B(x_0, 4r)) \geq 1$, $0 < r \leq s \leq 2r$ olmak üzere E kümesinin $x \in \overline{E} - E$ noktasında $(p(.), \vartheta)$-ince olsun. Bu takdirde $x \notin G$ ve G kümesi x noktasında $(p(.), \vartheta)$-ince olmak üzere E kümesinin bir G açık komşuluğu vardır.

İspat: Teorem 4.1.12 ve Teorem 4.1.13'ten $0 < r \leq s \leq 2r$ için

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(E \cap B(x,r), B(x,2r)) \approx \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(E \cap B(x,r), B(x,2s)) \tag{4.3.14.1}$$

ve

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(B(x,r), B(x,2r)) \approx \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}(B(x,s), B(x,2s)) \tag{4.3.14.2}$$

olduğu biliniyor. Ayrıca, her $j \in \mathbb{N}$ için $E \cap \overline{B(x, 2^{-j})} \subset E \cap B(x, 2^{1-j})$ sağlanır. Böylece,

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E \cap \overline{B(x, 2^{-j})}, B(x, 2^{1-j})\right) &\leq T\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E \cap \overline{B(x, 2^{-j})}, B(x, 2^{2-j})\right) \\ &\leq T\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E \cap B(x, 2^{1-j}), B(x, 2^{2-j})\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Rölatif $(p(.), \vartheta)$-kapasitesinin tanımından

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(G_j, B\left(x,2^{1-j}\right)\right) \le \operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E\cap\overline{B\left(x,2^{-j}\right)}, B\left(x,2^{1-j}\right)\right)+2^{-j}$$

veya buna denk olarak,

$$\left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(G_j, B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{-j}\right), B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x)-1}} \le \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E\cap\overline{B\left(x,2^{-j}\right)}, B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{-j}\right), B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x)-1}}+2^{-j} \tag{4.3.14.3}$$

olacak şekilde $E\cap\overline{B\left(x,2^{-j}\right)}\subset G_j$ açık kümeleri alınabilir. Şimdi $B_j=B\left(x,2^{-j}\right)$ için

$$G=\left(\mathbb{R}^d-\overline{B_1}\right)\cup\left(G_1-\overline{B_2}\right)\cup\left(\left(G_1\cap G_2\right)-\overline{B_3}\right)\cup\left(\left(G_1\cap G_2\cap G_3\right)-\overline{B_4}\right)\cup\ldots$$

tanımlansın. Sonlu tane açık kümenin arakesitinin ve herhangi sayıdaki açık kümenin birleşiminin de açık olduğundan G açık bir kümedir. Ayrıca $E\subset G$ sağlanır. Yine $x\in B_j$ olduğundan G kümesinin tanımı gereği $x\notin G$ olur. Diğer taraftan, $G\cap B_j\subset G_j$ sağlanır. Gerçekten, herhangi bir $y\in G\cap B_j$ için $B_j\subset\overline{B_j}$ olduğundan $y\in\overline{B_j}$ bulunur. G kümesinin tanımından $y\in G_j$ bulunur. Ayrıca, her $j\in\mathbb{N}$ için $B\left(x,2^{-j}\right)\subset\overline{B\left(x,2^{-j}\right)}$ olduğundan $G\cap B\left(x,2^{-j}\right)\subset G_j$ kapsaması sağlanır. (4.3.14.3) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(G\cap B\left(x,2^{-j}\right), B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{-j}\right), B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x)-1}} &\le \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(G_j, B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{-j}\right), B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x)-1}}\\ &\le \left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E\cap\overline{B\left(x,2^{-j}\right)}, B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{-j}\right), B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x)-1}}+2^{-j}\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (4.3.14.1)'den

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E\cap\overline{B\left(x,2^{-j}\right)}, B\left(x,2^{1-j}\right)\right) &\le C_1\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E\cap\overline{B\left(x,2^{-j}\right)}, B\left(x,2^{2-j}\right)\right)\\ &\le C_1\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E\cap B\left(x,2^{1-j}\right), B\left(x,2^{2-j}\right)\right)\end{aligned} \tag{4.3.14.4}$$

olacak şekilde bir $C_1>0$ vardır. Yine (4.3.14.2)'den

$$\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{-j}\right),B\left(x,2^{1-j}\right)\right)\geq\frac{1}{C_2}\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{1-j}\right),B\left(x,2^{2-j}\right)\right) \qquad (4.3.14.5)$$

olacak şekilde bir $C_2>0$ elde edilir. (4.3.14.4) ve (4.3.14.5) göz önüne alınırsa

$$\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E\cap\overline{B\left(x,2^{-j}\right)},B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{-j}\right),B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}\leq C\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E\cap B\left(x,2^{1-j}\right),B\left(x,2^{2-j}\right)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{1-j}\right),B\left(x,2^{2-j}\right)\right)}$$

olacak şekilde $C=C_1C_2>0$ bulunur. Yine, E kümesi x noktasında $\left(p(.),\vartheta\right)$-ince olduğundan

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(G\cap B\left(x,2^{-j}\right),B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{-j}\right),B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x)-1}}$$

$$\leq C\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(E\cap\overline{B\left(x,2^{-j}\right)},B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{-j}\right),B\left(x,2^{1-j}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x)-1}}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j}<\infty$$

elde edilir. Böylece

$$W^{sum}_{p(.),\vartheta}\left(G,x\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(G\cap B\left(x,2^{-i}\right),B\left(x,2^{1-i}\right)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{-i}\right),B\left(x,2^{1-i}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x)-1}}$$

$$=\left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(G\cap B\left(x,1\right),B\left(x,2\right)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,1\right),B\left(x,2\right)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x)-1}}$$

$$+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(G\cap B\left(x,2^{-i}\right),B\left(x,2^{1-i}\right)\right)}{\operatorname{cap}_{p(.),\vartheta}\left(B\left(x,2^{-i}\right),B\left(x,2^{1-i}\right)\right)}\right)^{\frac{1}{p(x)-1}}<\infty$$

olup G kümesi x noktasında $\left(p(.),\vartheta\right)$-ince olarak bulunur. Böylece ispat için istenen elde edilir.

4.4. $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ Uzayının Bazı Özellikleri ve Gömülme Teoremleri

Bu bölümde $L^r_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ile $W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayının arakesiti olarak tanımlanan

$$A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)=L^r_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)\cap W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$$

vektör uzayını uygun bir normla donatılarak bazı özellikleri incelenecektir.

Teorem 4.4.1: $K=\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayı, K cismi üzerinde bir vektör uzayıdır.

İspat: Keyfi $f,g\in A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ fonksiyonları verilsin. Buradan $f,g\in L^r_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $f,g\in W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olup $L^r_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ birer vektör uzayı olduklarından $f+g\in L^r_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $f+g\in W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ yazılır. O halde $f+g\in A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ elde edilir. Herhangi bir $f\in A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $\lambda\in K$ verilsin. Yine, $L^r_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ birer vektör uzayı olduklarından $\lambda f\in L^r_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $\lambda f\in W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olup, $\lambda f\in A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ yazılır.

Yukarıda tanımlanan toplama ve skaler ile çarpma işlemleri kullanılarak vektör uzayı olma koşullarının sağlandığı gösterilebilir.

Herhangi bir $f\in A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ için $\|.\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}$ fonksiyonu $\|f\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}=\|f\|_{r,\vartheta_1}+\|f\|_{k,p(.),\vartheta_2}$

biçiminde tanımlansın. Bu fonksiyon, iki normun toplamı olduğundan $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ vektör uzayı üzerinde bir normdur. Böylece $\left(A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right),\|.\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\right)$ uzayı bir normlu uzaydır.

Teorem 4.4.2: ϑ_1,ϑ_2 ağırlık fonksiyonları her $x\in\mathbb{R}^d$ için $\vartheta_1(x)\geq c_1>0$ ve $\vartheta_2(x)\geq c_2>0$ koşullarını sağlasın. O halde $\left(A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right),\|.\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\right)$ normlu uzayı bir Banach uzayıdır.

İspat: $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında bir $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi alınsın. Böylece verilen her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $n,m\geq n_1$ için

$$\left\|f_n - f_m\right\|_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)} = \left\|f_n - f_m\right\|_{r,\vartheta_1} + \left\|f_n - f_m\right\|_{k,p(.),\vartheta_2} < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_1 \in \mathbb{N}$ vardır. O halde, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi hem $\left(L^r_{\vartheta_1}(\mathbb{R}^d), \|.\|_{r,\vartheta_1}\right)$ hem de $\left(W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d), \|.\|_{k,p(.),\vartheta_2}\right)$ uzaylarında birer Cauchy dizisi olur. Öte yandan, $\left(L^r_{\vartheta_1}(\mathbb{R}^d), \|.\|_{r,\vartheta_1}\right)$ ve $\left(W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d), \|.\|_{k,p(.),\vartheta_2}\right)$ uzayları birer Banach uzayı olduğundan $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\left(L^r_{\vartheta_1}(\mathbb{R}^d), \|.\|_{r,\vartheta_1}\right)$ uzayında bir $f \in L^r_{\vartheta_1}(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonuna, $\left(W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d), \|.\|_{k,p(.),\vartheta_2}\right)$ uzayında da bir $g \in W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonuna yakınsar. Böylece verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_2$ için

$$\left\|f_n - f\right\|_{r,\vartheta_1} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.2.1}$$

ve her $n \geq n_3$ için

$$\left\|f_n - g\right\|_{k,p(.),\vartheta_2} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.2.2}$$

olacak şekilde $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ vardır. Ayrıca, her $x \in \mathbb{R}^d$ için $\vartheta_1(x) \geq c_1 > 0$ için $L^r_{\vartheta_1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^d)$ olduğundan $\left\|f_n - f\right\|_r \leq \left\|f_n - f\right\|_{r,\vartheta_1}$ eşitsizliği sağlanır. O halde, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $L^r(\mathbb{R}^d)$ uzayında f fonksiyonuna yakınsar. Buradan f fonksiyonuna h.h.h. yakınsayan bir $\{f_{n_k}\}$ alt dizisi vardır. Ayrıca herhangi bir $h \in W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ için

$$\|h\|_{p(.),\vartheta_2} \leq \sum_{0\leq|\alpha|\leq k} \left\|D^\alpha h\right\|_{p(.),\vartheta_2}$$

eşitsizliği sağlandığından $W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ bulunur. Öte yandan, her $x \in \mathbb{R}^d$ için $\vartheta_2(x) \geq c_2 > 0$ olduğundan $L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ sağlanır (Aydın, 2012b). O halde (4.4.2.2) ifadesinden $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ uzayında dolayısıyla $L^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayında $g \in L^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonuna yakınsar. Ayrıca $p^+ < \infty$ olduğundan $L^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayındaki yakınsamanın ölçüm içinde yakınsamayı gerektirdiği biliniyor (Kováčik ve Rákosník, 1991). Dolayısıyla, (f_{n_k}) dizisinin g fonksiyonuna h.h.h. yakınsayan bir $(f_{n_{k_\ell}})$ alt dizisi vardır (Royden, 1968). Öte yandan $\left(f_{n_{k_\ell}}\right)$ dizisinin f fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesi K_1 ile gösterilirse, $|K_1| = 0$ olur. Böylece her $x \in \mathbb{R}^d - K_1$ için $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n_{k_\ell} \geq n_4$ için

$$\left|f_{n_{k_\ell}}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.2.3}$$

olacak şekilde bir $n_4 \in \mathbb{N}$ vardır. Yine $\left(f_{n_{k_\ell}}\right)$, $\left(f_{n_k}\right)$ dizisinin alt dizisi olduğundan her $n_{k_\ell} \geq n_4$ için

$$\left|f_{n_{k_\ell}}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.2.4}$$

elde edilir. Eğer $\left(f_{n_{k_\ell}}\right)$ alt dizisinin g fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesi K_2 ile gösterilirse $|K_2| = 0$ olur. Böylece verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $x \in \mathbb{R}^d - K_2$ olmak üzere her $n_{k_\ell} \geq n_5$ için

$$\left|f_{n_{k_\ell}}(x) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.2.5}$$

olacak şekilde bir $n_5 \in \mathbb{N}$ vardır. Eğer $n_0 = \text{maks}\{n_4, n_5\}$ olarak seçilirse her $x \in \mathbb{R}^d - (K_1 \cup K_2)$ için $x \notin K_1$ ve $x \notin K_2$ olduğundan $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $n_{k_\ell} \geq n_0$ için (4.4.2.4) ve (4.4.2.5) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|f(x) - g(x)| &= \left|f(x) - f_{n_{k_\ell}}(x) + f_{n_{k_\ell}}(x) - g(x)\right| \\
&\leq \left|f_{n_{k_\ell}}(x) - f(x)\right| + \left|f_{n_{k_\ell}}(x) - g(x)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Yine $|K_1| = |K_2| = 0$ için $|K_1 \cup K_2| \leq |K_1| + |K_2| = 0$ olup $|K_1 \cup K_2| = 0$ bulunur. Böylece h.h.h. $f = g$ elde edilir. $L^r_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzaylarının elemanları denklik sınıflarından oluştuğundan $f = g$ olur. Buradan $f \in L^r_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $f \in W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olup,

$f \in A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ elde edilir. Eğer $k_0 = \text{maks}\{n_2, n_3\}$ denirse ve (4.4.2.1), (4.4.2.2) eşitsizlikleri kullanılırsa her $n \geq k_0$ için

$$\|f_n - f\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2} = \|f_n - f\|_{r,\vartheta_1} + \|f_n - f\|_{k,p(.),\vartheta_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Böylece $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\|.\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}$ normuna göre $f \in A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ fonksiyonuna yakınsadığından $\left(A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\mathbb{R}^d), \|.\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\right)$ bir Banach uzayı olur.

Teorem 4.4.3: ϑ_2 ağırlık fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}^d$ için $\vartheta_2(x) \geq c > 0$ koşulunu sağlasın. Bu takdirde $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ uzayı bir BF-uzayıdır.

İspat: Normlarının tanımından $W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ olduğu görülür. Ayrıca $\vartheta_2 \geq c > 0$ için $L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ sürekli gömülmesi ve $L^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayının bir BF-uzay olduğu biliniyor (Aydın, 2012a). O halde

$$W^{k,p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^{p(.)}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$$

ifadesinden, herhangi bir $f \in A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ için

$$\|f\|_{L^1_{loc}} \leq c_1 \|f\|_{p(.)} \leq c_1 c_2 \|f\|_{p(.),\vartheta_2} \leq c_1 c_2 c_3 \|f\|_{k,p(.),\vartheta_2}$$

olacak şekilde $c_1, c_2, c_3 > 0$ sayıları vardır. O halde $C = c_1 c_2 c_3$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^1_{loc}} \leq C\left(\|f\|_{r,\vartheta_1} + \|f\|_{k,p(.),\vartheta_2}\right) = C\|f\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}$$

elde edilir. Böylece $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ elde edilir.

Tanım 4.4.4: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ olsun. Eğer $p(.)$ fonksiyonu, $|x-y| \leq \frac{1}{2}$ olacak şekilde her $x, y \in \Omega$ için

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{C}{-\ln|x-y|}$$

eşitsizliğini sağlıyor ise, yerel log-Hölder süreklidir denir (Diening, 2004a). Bu tez çalışması boyunca tüm yerel log-Hölder sürekli fonksiyonların kümesi $P^{\log}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olarak gösterilecektir.

Tanım 4.4.5: Herhangi bir $f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $x \in \mathbb{R}^d$ için

$$Mf\left(x\right) = \sup_{r>0} \frac{1}{\left|B\left(x,r\right)\right|} \int_{B(x,r)} \left|f\left(y\right)\right| dy$$

olarak tanımlanan $Mf : \mathbb{R}^d \to \left[0,\infty\right]$ fonksiyonuna f fonksiyonunun maksimal fonksiyonu adı verilir. Burada M, Hardy-Littlewood maksimal operatörü olarak adlandırılır (Lu ve ark., 2007), (Rudin, 1966).

Tanım 4.4.6: $1 \le r < \infty$ olsun. Herhangi bir $B \subset \mathbb{R}^d$ yuvarı için

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \vartheta dx\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \vartheta^{-\frac{1}{r-1}} dx\right)^{r-1} \le C_1, \quad 1<r<\infty$$

veya

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \vartheta dx\right) \operatorname{ess\,sup}_B \frac{1}{\vartheta} \le C_2, \quad r = 1$$

olacak şekilde pozitif C_1 ve C_2 sabitleri varsa, ϑ ağırlığı Muckenhoupt koşulunu sağlar denir ve $\vartheta \in A_r$ şeklinde gösterilir. Ayrıca $1 < r < \infty$ olmak üzere $\vartheta \in A_r$ olması için gerek ve yeter koşul Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $L^r_\vartheta\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında sınırlı olmasıdır (Muckenhoupt, 1972).

Tanım 4.4.7: $p_B = \left(\frac{1}{|B|}\int_B \frac{1}{p\left(x\right)} dx\right)^{-1}$, $\frac{1}{p(.)} + \frac{1}{q(.)} = 1$ ve ψ kümesi $\mathbb{R}^d$ kümesindeki tüm yuvarların kümesi olsun. Bu durumda

$$\left\|\vartheta\right\|_{A_{p(.)}} = \sup_{B\in\psi} |B|^{-p_B} \left\|\vartheta\right\|_{L^1(B)} \left\|\frac{1}{\vartheta}\right\|_{L^{\frac{q(.)}{p(.)}}(B)} < \infty$$

koşulunu sağlayan ϑ ağırlıklarının kümesi $A_{p(.)}$ ile gösterilir. Ayrıca, $p(.)\in P^{\log}(\mathbb{R}^d)$ için Hardy-Littlewood maksimal operatörünün $L_{\vartheta}^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayında sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $\vartheta \in A_{p(.)}$ olmasıdır (Aydın, 2012b).

Teorem 4.4.8: $p(.)\in P^{\log}(\mathbb{R}^d), \vartheta_1 \in A_r$ ve $\vartheta_2 \in A_{p(.)}$ olsun. Bu takdirde, Hardy-Littlewood maksimal operatörü $M: A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,p(.)}(\mathbb{R}^d) \to A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ sınırlıdır.

İspat: Herhangi bir $f \in A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ verilsin. O halde, $f \in L_{\vartheta_1}^{r}(\mathbb{R}^d)$ ve $f \in W_{\vartheta_2}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ olur. Ayrıca $\vartheta^{-\frac{1}{p(.)-1}} \in L_{loc}^{1}(\mathbb{R}^d)$ için $L_{\vartheta_2}^{p(.)}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_{loc}^{p(.),\vartheta_2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow L_{loc}^{1}(\mathbb{R}^d)$ ve $W_{\vartheta_2}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W_{loc}^{1,p(.),\vartheta_2}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ sağlanır (Aydın, 2012b). Böylece, $f \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ için h.h.h. $x \in \mathbb{R}^d$ verildiğinde $|\nabla Mf(x)| \le M|\nabla f(x)|$ eşitsizliği sağlanır (Hajłasz ve Onninen, 2004). Ayrıca tanımdan $f, |\nabla f| \in L_{\vartheta_2}^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ olup $\vartheta_2 \in A_{p(.)}$ için $L_{\vartheta_2}^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ uzayında maksimal operatör sınırlı olduğundan

$$\|Mf\|_{p(.),\vartheta_2} \le c_1 \|f\|_{p(.),\vartheta_2} \text{ ve } \|M\nabla f\|_{p(.),\vartheta_2} \le c_2 \|\nabla f\|_{p(.),\vartheta_2}$$

bulunur. Bu ise, $Mf, |\nabla Mf| \in L_{\vartheta_2}^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ olduğunu gösterir. Böylece $Mf \in W_{\vartheta_2}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ olur. O halde $\vartheta_1 \in A_r$ ve $\vartheta_2 \in A_{p(.)}$ için

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,p(.)} &= \|Mf\|_{r,\vartheta_1} + \|Mf\|_{1,p(.),\vartheta_2} \le c_3 \|f\|_{r,\vartheta_1} + c_4 \|f\|_{1,p(.),\vartheta_2} \\ &\le \text{maks}\{c_3, c_4\}\left(\|f\|_{r,\vartheta_1} + \|f\|_{1,p(.),\vartheta_2}\right) = \text{maks}\{c_3, c_4\}\|f\|_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,p(.)}\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, $M: A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,p(.)}(\mathbb{R}^d) \to A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ maksimal operatörü sınırlıdır.

Sonuç 4.4.9: $p(.)\in P^{\log}(\mathbb{R}^d)$, $\vartheta_1 \in A_r$, $\vartheta_2 \in A_{p(.)}$ ve $1 \le s < \infty$ olsun. Bu takdirde $M: A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,sp(.)}(\mathbb{R}^d) \to A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,sp(.)}(\mathbb{R}^d)$ maksimal operatörü sınırlıdır.

İspat: Herhangi bir $f \in A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,sp(.)}(\mathbb{R}^d)$ verilsin. O halde, $f \in L_{\vartheta_1}^{r}(\mathbb{R}^d)$ ve $f \in W_{\vartheta_2}^{1,sp(.)}(\mathbb{R}^d)$ olur. Ayrıca, $W_{\vartheta_2}^{1,sp(.)}(\mathbb{R}^d) \subset L_{\vartheta_2}^{sp(.)}(\mathbb{R}^d)$ olduğundan $f \in L_{\vartheta_2}^{sp(.)}(\mathbb{R}^d)$ bulunur. Yine ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayının normunun tanımından

$$\|f\|_{sp(.),\vartheta_2}=\left\||f|^s\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}$$

olup $|f|^s\in L^{p(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ bulunur. Buradan $\vartheta_2\in A_{p(.)}$ için maksimal operatörün $L^{p(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayındaki sınırlılığından

$$\|Mf\|_{sp(.),\vartheta_2}=\left\|(Mf)^s\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}\le\left\|M(|f|)^s\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}\le c\left\||f|^s\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}=c\|f\|_{sp(.),\vartheta_2} \tag{4.4.9.1}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $f\in W^{1,sp(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olduğundan $f,|\nabla f|\in L^{sp(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ bulunur. (4.4.9.1) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\|Mf\|_{1,sp(.),\vartheta_2}&=\left\|(Mf)^s\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}+\left\||\nabla Mf|^s\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}\le\left\|(Mf)^s\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}+\left\|M(|\nabla f|)^s\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}\\&\le\left\|M\left(|f|^s\right)\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}+\left\|M\left(|\nabla f|^s\right)\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}\le c_1\left\||f|^s\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}+c_2\left\||\nabla f|^s\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}\\&\le\text{maks}\{c_1,c_2\}\left(\left\||f|^s\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}+\left\||\nabla f|^s\right\|_{p(.),\vartheta_2}^{\frac{1}{s}}\right)=\text{maks}\{c_1,c_2\}\|f\|_{1,sp(.),\vartheta_2}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. O halde

$$\begin{aligned}\|Mf\|^{r,1,sp(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}&=\|Mf\|_{r,\vartheta_1}+\|Mf\|_{1,sp(.),\vartheta_2}\le c_3\|f\|_{r,\vartheta_1}+c_4\|f\|_{1,sp(.),\vartheta_2}\\&\le\text{maks}\{c_3,c_4\}\left(\|f\|_{r,\vartheta_1}+\|f\|_{1,sp(.),\vartheta_2}\right)=\text{maks}\{c_3,c_4\}\|f\|^{r,1,sp(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\end{aligned}$$

olacak şekilde $C=\text{maks}\{c_3,c_4\}>0$ bulunur. Böylece, $M:A^{r,1,sp(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)\to A^{r,1,sp(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ sınırlıdır.

Tanım 4.4.10: $\varphi:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ negatif olmayan, radyal, azalan, $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayına ait ve

(i) $|x|\ge 1$ için $\varphi(x)=0$

(ii) $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\,dx=1$

koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Şimdi $\varepsilon>0$ alınsın. Negatif olmayan, $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayına ait ve

(i) $|x| \geq \varepsilon$ için $\varphi_\varepsilon(x) = 0$

(ii) $\int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x)\,dx = 1$

koşullarını sağlayan $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-d}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ fonksiyonuna mollifier denir ve girişim işlemi

$$(\varphi_\varepsilon * f)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi_\varepsilon(x-y) f(y)\,dy$$

şeklinde gösterilir (Adams ve Fournier, 2003), (Aydın, 2012b).

Teorem 4.4.11: $\vartheta \in A_{p(.)}$ olsun ve herhangi bir $f \in L_\vartheta^{p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde $\varepsilon \to 0^+$ için $L_\vartheta^{p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında $\varphi_\varepsilon * f \to f$ yakınsaması vardır (Aydın, 2012b).

Sonuç 4.4.12: $p(.) \in P^{\log}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $\vartheta \in A_{p(.)}$ olsun. Bu takdirde $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayı $W_\vartheta^{k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında yoğundur (Aydın, 2012b).

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.4.11 ve Sonuç 4.4.12 yardımıyla kolayca ispatlanır.

Teorem 4.4.13: Eğer $\vartheta_1 \in A_r$ ve $\vartheta_2 \in A_{p(.)}$ ise, herhangi bir $f \in A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ verildiğinde $\varepsilon \to 0^+$ için $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında $\varphi_\varepsilon * f \to f$ yakınsaması vardır.

İspat: Herhangi bir $f \in A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ fonksiyonu ve $\varepsilon > 0$ alınsın. $\vartheta_1 \in A_r$ ve $\vartheta_2 \in A_{p(.)}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|f - \varphi_\varepsilon * f\|_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)} &= \|f - \varphi_\varepsilon * f\|_{r,\vartheta_1} + \|f - \varphi_\varepsilon * f\|_{k,p(.),\vartheta_2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenendir.

Sonuç 4.4.14: $\vartheta_1 \in A_r$ ve $\vartheta_2 \in A_{p(.)}$ olsun. Bu takdirde $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayı $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında yoğundur.

Ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzayları için Hölder eşitsizliği biliniyor. Şimdi $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayı için bu eşitsizlik ispatlanacaktır.

Teorem 4.4.15: $p(.)$, $q(.)$ ve $r(.)$ fonksiyonları $\frac{1}{r(.)}=\frac{1}{p(.)}+\frac{1}{q(.)}$ koşulunu sağlayan değişken üsler olsun. Bu takdirde herhangi $f\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ ve $g\in W_{\vartheta}^{1,q(.)}(\mathbb{R}^d)$ için

$$\|fg\|_{1,r(.),\vartheta}\le C_h\|f\|_{1,p(.),\vartheta}\|g\|_{1,q(.),\vartheta}$$

olacak şekilde f ve g fonksiyonlarından bağımsız bir $C_h>0$ vardır.

İspat: $\frac{1}{r(.)}=\frac{1}{p(.)}+\frac{1}{q(.)}$ olmak üzere herhangi $f\in W_{\vartheta}^{1,p(.)}(\mathbb{R}^d)$ ve $g\in W_{\vartheta}^{1,q(.)}(\mathbb{R}^d)$ verilsin. O halde $f,|\nabla f|\in L_{\vartheta}^{p(.)}(\mathbb{R}^d)$ ve $g,|\nabla g|\in L_{\vartheta}^{q(.)}(\mathbb{R}^d)$ sağlanır. Değişken üslü Lebesgue uzayları için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|fg\|_{r(.),\vartheta}&=\left\|fg\vartheta^{\frac{1}{r(.)}}\right\|_{r(.)}=\left\|fg\vartheta^{\frac{1}{p(.)}+\frac{1}{q(.)}}\right\|_{r(.)}=\left\|f\vartheta^{\frac{1}{p(.)}}g\vartheta^{\frac{1}{q(.)}}\right\|_{r(.)}\\&\le c_1\left\|f\vartheta^{\frac{1}{p(.)}}\right\|_{p(.)}\left\|g\vartheta^{\frac{1}{q(.)}}\right\|_{q(.)}=c_1\|f\|_{p(.),\vartheta}\|g\|_{q(.),\vartheta}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|\nabla(fg)\|_{r(.),\vartheta}&=\|f\nabla g+g\nabla f\|_{r(.),\vartheta}\le\|f\nabla g\|_{r(.),\vartheta}+\|g\nabla f\|_{r(.),\vartheta}\\&\le c_2\|f\|_{p(.),\vartheta}\|\nabla g\|_{q(.),\vartheta}+c_3\|\nabla f\|_{p(.),\vartheta}\|g\|_{q(.),\vartheta}\\&\le c_2\|f\|_{p(.),\vartheta}\|\nabla g\|_{q(.),\vartheta}+c_3\|\nabla f\|_{p(.),\vartheta}\|g\|_{q(.),\vartheta}+\|\nabla f\|_{p(.),\vartheta}\|\nabla g\|_{q(.),\vartheta}\\&\le \text{maks}\{1,c_2,c_3\}\left[\|f\|_{p(.),\vartheta}\|\nabla g\|_{q(.),\vartheta}+\|\nabla f\|_{p(.),\vartheta}\|g\|_{q(.),\vartheta}+\|\nabla f\|_{p(.),\vartheta}\|\nabla g\|_{q(.),\vartheta}\right]\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $C_h=\text{maks}\{1,c_1,c_2,c_3\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\|fg\|_{1,r(.),\vartheta}&=\|fg\|_{r(.),\vartheta}+\|\nabla(fg)\|_{r(.),\vartheta}\\&\le c_1\|f\|_{p(.),\vartheta}\|g\|_{q(.),\vartheta}\\&\quad+\text{maks}\{1,c_2,c_3\}\left[\|f\|_{p(.),\vartheta}\|\nabla g\|_{q(.),\vartheta}+\|\nabla f\|_{p(.),\vartheta}\|g\|_{q(.),\vartheta}+\|\nabla f\|_{p(.),\vartheta}\|\nabla g\|_{q(.),\vartheta}\right]\\&\le C_h\left(\|f\|_{p(.),\vartheta}\|g\|_{q(.),\vartheta}+\|f\|_{p(.),\vartheta}\|\nabla g\|_{q(.),\vartheta}+\|\nabla f\|_{p(.),\vartheta}\|g\|_{q(.),\vartheta}+\|\nabla f\|_{p(.),\vartheta}\|\nabla g\|_{q(.),\vartheta}\right)\\&=C_h\left(\|f\|_{p(.),\vartheta}+\|\nabla f\|_{p(.),\vartheta}\right)\left(\|g\|_{q(.),\vartheta}+\|\nabla g\|_{q(.),\vartheta}\right)=C_h\|f\|_{1,p(.),\vartheta}\|g\|_{1,q(.),\vartheta}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.4.16: $p(.)$, $q(.)$, $r(.)$ fonksiyonları $\frac{1}{r(.)}=\frac{1}{p(.)}+\frac{1}{q(.)}$ koşulunu sağlayan değişken üsler ve $\frac{1}{t}=\frac{1}{r}+\frac{1}{s}$ için $1<r,s,t<\infty$ olsun. Bu takdirde herhangi $f\in A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $g\in A^{s,1,q(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ için

$$\|fg\|^{t,1,r(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\leq C_h^*\,\|f\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\,\|g\|^{s,1,q(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}$$

olacak şekilde f ve g fonksiyonlarından bağımsız bir $C_h^*>0$ vardır.

İspat: $\frac{1}{r(.)}=\frac{1}{p(.)}+\frac{1}{q(.)}$ olmak üzere herhangi $f\in A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $g\in A^{s,1,q(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ alınsın. Buradan $f\in L^r_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $f\in W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $g\in L^s_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$, $g\in W^{1,q(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olur. Hölder eşitsizliği ve Teorem 4.4.15 kullanılırsa $C_h^*=\text{maks}\{1,c_h,C_H\}>0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\|fg\|^{t,1,r(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}&\leq c_h\|f\|_{r,\vartheta_1}\|g\|_{s,\vartheta_1}+C_H\|f\|_{1,p(.),\vartheta_2}\|g\|_{1,q(.),\vartheta_2}\\&\leq c_h\|f\|_{r,\vartheta_1}\|g\|_{s,\vartheta_1}+\|f\|_{r,\vartheta_1}\|g\|_{1,q(.),\vartheta_2}+\|f\|_{1,p(.),\vartheta_2}\|g\|_{s,\vartheta_1}+C_H\|f\|_{1,p(.),\vartheta_2}\|g\|_{1,q(.),\vartheta_2}\\&\leq C_h^*\left(\|f\|_{r,\vartheta_1}+\|f\|_{1,p(.),\vartheta_2}\right)\left(\|g\|_{s,\vartheta_1}+\|g\|_{1,q(.),\vartheta_2}\right)=C_h^*\|f\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\|g\|^{s,1,q(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.17: $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)\subset A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olması için gerek ve yeter koşul $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)\hookrightarrow A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}\left(\mathbb{R}^d\right)$ kapsamasının sağlanmasıdır.

İspat: Gömülme tanımından $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)\hookrightarrow A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}\left(\mathbb{R}^d\right)$ için $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)\subset A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}\left(\mathbb{R}^d\right)$ sağlanır. Şimdi $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)\subset A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olsun. Ayrıca $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayı için $|||.|||=\|.\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}+\|.\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}$ normu tanımlansın. $\left(A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right),|||.|||\right)$, bir Banach uzayıdır. Gerçekten, $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında herhangi bir $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisi alınsın. O halde her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $n,m\geq N$ için $|||f_n-f_m|||<\varepsilon$ olacak şekilde bir $N\in\mathbb{N}$ sayısı vardır. Buradan $|||f_n-f_m|||=\|f_n-f_m\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}+\|f_n-f_m\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}<\varepsilon$ olup, $\|f_n-f_m\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}<\varepsilon$ ve $\|f_n-f_m\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}<\varepsilon$ elde edilir. Böylece $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\left(A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right),\|.\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\right)$ ve

$\left(A_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right),\|.\|_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,k,p(.)}\right)$ uzaylarında bir Cauchy dizisidir. Yine $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $A_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayları Banach uzayı olduklarından $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında bir $f\in A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ fonksiyonuna ve $A_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında da bir $g\in A_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ fonksiyonuna yakınsar. Böylece $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $n\geq n_1$ için

$$\|f_n-f\|_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.17.1}$$

olacak şekilde bir $n_1\in\mathbb{N}$ vardır. Öte yandan $\|.\|_r\leq\|.\|_{r,\vartheta_1}\leq\|.\|_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}$ olduğundan $n_1\in\mathbb{N}$ için her $n\geq n_1$ olduğunda $\|f_n-f\|_r<\frac{\varepsilon}{2}$ bulunur. Böylece f fonksiyonuna h.h.h. yakınsayan bir $\left(f_{n_k}\right)$ alt dizisi vardır. Eğer $\left(f_{n_k}\right)$ alt dizisinin f fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesini K_1 ile gösterilirse, $|K_1|=0$ olur. Böylece her $x\in\mathbb{R}^d-K_1$ için $\varepsilon>0$ için her $n_k\geq n_2$ olduğunda

$$\left|f_{n_k}(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.17.2}$$

olacak şekilde bir $n_2\in\mathbb{N}$ vardır. Yine, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $A_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayında $g\in A_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ fonksiyonuna yakınsadığından, $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $n\geq n_3$ için

$$\|f_n-g\|_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,k,p(.)}<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.17.3}$$

olacak şekilde bir $n_3\in\mathbb{N}$ vardır. Ayrıca, $\left(f_{n_k}\right)$ alt dizisi de g fonksiyonuna $\|.\|_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,k,p(.)}$ normuna göre yakınsar. Böylece, aynı $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $n_k\geq n_4$ için

$$\left\|f_{n_k}-g\right\|_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,k,p(.)}<\frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_4\in\mathbb{N}$ vardır. Eğer $\|.\|_r\leq\|.\|_{r,\vartheta_3}\leq\|.\|_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,k,p(.)}$ eşitsizliği kullanılırsa aynı $n_4\in\mathbb{N}$ sayısı için her $n\geq n_4$ olduğunda $\left\|f_{n_k}-g\right\|_r<\frac{\varepsilon}{2}$ bulunur. Böylece $\left(f_{n_k}\right)$ dizisinin g fonksiyonuna h.h.h yakınsayan bir $\left(f_{n_{k_t}}\right)$ alt dizisi vardır. Eğer $\left(f_{n_{k_t}}\right)$ alt dizisinin g fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesini K_2 ile gösterilirse $|K_2|=0$ olur. Böylece, her $x\in\mathbb{R}^d-K_2$ ve $n_{k_t}\geq n_5$ için

$$\left|f_{n_{k_t}}(x)-g(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.17.4}$$

olacak şekilde bir $n_5\in\mathbb{N}$ vardır. Yine (4.4.17.2) eşitsizliğinden $\left(f_{n_{k_t}}\right)$ alt dizisi de h.h.h. f fonksiyonuna yakınsar. Böylece her $x\in\mathbb{R}^d-K_1$ için $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $n_{k_t}\geq n_2$ için

$$\left|f_{n_{k_t}}(x)-f(x)\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.4.17.5}$$

yazılır. Eğer $k_0=\text{maks}\{n_2,n_5\}$ denirse her $x\in\mathbb{R}^d-(K_1\cup K_2)$ için $x\notin K_1$ ve $x\notin K_2$ olup, (4.4.17.4) ve (4.4.17.5) kullanılırsa her $n_{k_\ell}\geq k_0$ için

$$\begin{aligned}|f(x)-g(x)|&=\left|f(x)-f_{n_{k_t}}(x)+f_{n_{k_t}}(x)-g(x)\right|\\&\leq\left|f_{n_{k_t}}(x)-f(x)\right|+\left|f_{n_{k_t}}(x)-g(x)\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

bulunur. Yine $|K_1|=|K_2|=0$ için $|K_1\cup K_2|\leq|K_1|+|K_2|=0$ olup, $|K_1\cup K_2|=0$ bulunur. Böylece h.h.h. $f=g$ elde edilir. Ayrıca, $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzyaının elemanlarının denklik sınıfı olduğu düşünülürse $f=g$ olur. Şimdi, $n_0=\text{maks}\{n_1,n_3\}$ olarak tanımlanır ve (4.4.17.1), (4.4.17.3) de kullanılırsa her $n\geq n_0$ için

$$|||f_n-f|||=\|f_n-f\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}+\|f_n-f\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

elde edilir. O halde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $|||.|||$ normuna göre $f\in A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ fonksiyonuna yakınsadığından $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ bir Banach uzayı olur. Şimdi

$$I:\left(A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right),|||.|||\right)\to\left(A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right),\|.\|^{1,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\right)$$

birim fonksiyonu tanımlansın. I birim fonksiyonu doğrusal, birebir ve örtendir. Ayrıca herhangi bir $f \in A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ için

$$\|I(f)\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2} = \|f\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2} \le |||f|||$$

sağlandığından I fonksiyonu sürekli olup, Banach Teoreminden bir homeomorfizmdir. Bu ise $|||.|||$ ve $\|.\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}$ normlarının birbirine denk olduklarını gösterir. Buradan, herhangi bir $f \in A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ için

$$|||f||| \le k\|f\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2} \tag{4.4.17.6}$$

olacak şekilde bir $k>0$ vardır. Böylece (4.4.17.6) ve $|||.|||$ normunun tanımından

$$\|f\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4} \le |||f||| \le k\|f\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.18: Eğer $\vartheta_2 \prec \vartheta_1$ ise, $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_2,\vartheta}(\mathbb{R}^d)$ gömülmesi sağlanır.

İspat: $\vartheta_2 \prec \vartheta_1$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}^d$ için $\vartheta_2(x) \le c\vartheta_1(x)$ olacak şekilde bir $c>0$ vardır. Herhangi bir $f \in A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta}(\mathbb{R}^d)$ için

$$\begin{aligned}\|f\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_2,\vartheta} &= \|f\|_{r,\vartheta_2} + \|f\|_{k,p(.),\vartheta} \le c^{\frac{1}{r}}\|f\|_{r,\vartheta_1} + \|f\|_{k,p(.),\vartheta} \\ &\le \text{maks}\left\{1, c^{\frac{1}{r}}\right\}\left(\|f\|_{r,\vartheta_1} + \|f\|_{k,p(.),\vartheta}\right) = \text{maks}\left\{1, c^{\frac{1}{r}}\right\}\|f\|^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta}\end{aligned}$$

olduğundan $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_2,\vartheta}(\mathbb{R}^d)$ elde edilir.

Teorem 4.4.19: Eğer $\vartheta_2 \prec \vartheta_1$ ise, $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta,\vartheta_1}(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow A^{r,k,p(.)}_{\vartheta,\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ gömülmesi sağlanır.

İspat: $\vartheta_2 \prec \vartheta_1$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}^d$ için $\vartheta_2(x) \le c\vartheta_1(x)$ olacak şekilde bir $c>0$ vardır. Buradan $0 \le |\alpha| \le k$ için

$$\left|D^\alpha f(x)\vartheta_2(x)\right| \le c\left|D^\alpha f(x)\vartheta_1(x)\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Değişken üslü Lebesgue uzayının normunun tanımından herhangi bir $f \in W^{k,p(.)}_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ için

$$\|f\|_{k,p(.),\vartheta_2} = \sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|_{p(.),\vartheta_2} \le c \sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|_{p(.),\vartheta_1} = c\|f\|_{k,p(.),\vartheta_1}$$

eşitsizliği elde edilir. $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta,\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzaylarının norm tanımlarından ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.20: Eğer $p_1(.) \preceq p_2(.)$ ise, $A^{r,k,p_2(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow A^{r,k,p_1(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ gömülmesi sağlanır.

İspat: $p_1(.) \preceq p_2(.)$ için $L^{p_2(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow L^{p_1(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olduğu biliniyor (Aydın, 2012b). Benzer şekilde, $p_1(.) \preceq p_2(.)$ için $W^{k,p_2(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow W^{k,p_1(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ sağlanır. O halde $A^{r,k,p_2(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $A^{r,k,p_1(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzaylarının normlarının tanımından herhangi bir $f \in A^{r,k,p_2(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ için

$$\begin{aligned}\|f\|^{r,k,p_1(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2} &= \|f\|_{r,\vartheta_1} + \|f\|_{k,p_1(.),\vartheta_2} \le \|f\|_{r,\vartheta_1} + c\|f\|_{k,p_2(.),\vartheta_2} \\ &\le \text{maks}\{1,c\}\left(\|f\|_{r,\vartheta_1} + \|f\|_{k,p_2(.),\vartheta_2}\right) = \text{maks}\{1,c\}\|f\|^{r,k,p_2(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise istenendir.

Teorem 4.4.21: $1 < p_2^- \le p_2(.) \le p_1(.) \le p_1^+ < \infty$ ve $\left\|\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right\|_{\frac{p_1(.)}{p_1(.)-p_2(.)},\vartheta_1} < \infty$ olsun. Bu takdirde, $A^{r,k,p_1(.)}_{\vartheta,\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow A^{r,k,p_2(.)}_{\vartheta,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ gömülmesi sağlanır.

İspat: Herhangi bir $f \in A^{r,k,p_1(.)}_{\vartheta,\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ verilsin. Buradan $f \in L^r_\vartheta\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $f \in W^{k,p_1(.)}_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olur. Ayrıca (Edmunds ve ark., 2006) çalışmasındaki Teorem 5.1'den $\left\|\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right\|_{\frac{p_1(.)}{p_1(.)-p_2(.)},\vartheta_1} < \infty$ koşulu için $L^{p_1(.)}_{\vartheta_1}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow L^{p_2(.)}_{\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right)$ sağlanır. O halde,

$$\|f\|_{k,p_2(.),\vartheta_2} = \sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|_{p_2(.),\vartheta_2} \le c \sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|_{p_1(.),\vartheta_1} = c\|f\|_{k,p_1(.),\vartheta_1}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ vardır. Buradan

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\vartheta,\vartheta_2}^{r,k,p_2(.)} &= \|f\|_{r,\vartheta} + \|f\|_{k,p_2(.),\vartheta_2} \le \|f\|_{r,\vartheta} + c\|f\|_{k,p_1(.),\vartheta_1} \\
&\le \text{maks}\{1,c\}\left(\|f\|_{r,\vartheta} + \|f\|_{k,p_1(.),\vartheta_1}\right) = \text{maks}\{1,c\}\|f\|_{\vartheta,\vartheta_1}^{r,k,p_1(.)}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise $A_{\vartheta,\vartheta_1}^{r,k,p_1(.)}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow A_{\vartheta,\vartheta_2}^{r,k,p_2(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.4.22: $\vartheta_3 \prec \vartheta_1$ ve $\vartheta_4 \prec \vartheta_2$ olsun. Bu takdirde $k > t$ olacak şekilde herhangi $k,t \in \mathbb{Z}^+$ için $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow A_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,t,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ gömülmesi sağlanır.

İspat: Herhangi bir $f \in A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda $f \in L_{\vartheta_1}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ ve $f \in W_{\vartheta_2}^{k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olur. Ayrıca, $\vartheta_3 \prec \vartheta_1$ için $L_{\vartheta_1}^r\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow L_{\vartheta_3}^r\left(\mathbb{R}^d\right)$ sağlandığı görülür. O halde

$$
\|f\|_{r,\vartheta_3} \le c_1\|f\|_{r,\vartheta_1} \tag{4.4.22.1}
$$

olacak şekilde bir $c_1 > 0$ vardır. Yine $\vartheta_4 \prec \vartheta_2$ ve $k > t$ için

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{t,p(.),\vartheta_4} &= \sum_{0\le|\alpha|\le t}\left\|D^\alpha f\right\|_{p(.),\vartheta_4} \\
&\le \sum_{0\le|\alpha|\le t}\left\|D^\alpha f\right\|_{p(.),\vartheta_4} + \sum_{t+1\le|\alpha|\le k}\left\|D^\alpha f\right\|_{p(.),\vartheta_4} = \sum_{0\le|\alpha|\le k}\left\|D^\alpha f\right\|_{p(.),\vartheta_4} \\
&\le c_2\sum_{0\le|\alpha|\le k}\left\|D^\alpha f\right\|_{p(.),\vartheta_2} = c_2\|f\|_{k,p(.),\vartheta_2}
\end{aligned} \tag{4.4.22.2}
$$

olacak şekilde bir $c_2 > 0$ bulunur. Şimdi $C = \text{maks}\{c_1,c_2\}$ olsun. O halde, (4.4.22.1) ve (4.4.22.2) ifadelerinden $f \in A_{\vartheta,\vartheta_1}^{r,k,p_1(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ fonksiyonu için

$$
\begin{aligned}
\|f\|_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,t,p(.)} &= \|f\|_{r,\vartheta_3} + \|f\|_{t,p(.),\vartheta_4} \le c_1\|f\|_{r,\vartheta_1} + c_2\|f\|_{k,p(.),\vartheta_2} \\
&\le C\left(\|f\|_{r,\vartheta_1} + \|f\|_{k,p(.),\vartheta_2}\right) = C\|f\|_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}
\end{aligned}
$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow A_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r,t,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ gömülmesi bulunur.

Teorem 4.4.23: $\vartheta_3 \prec \vartheta_1$, $\vartheta_4 \prec \vartheta_2$, $r_2 < r_1$, $p_2(.) \le p_1(.)$ ve $k,t \in \mathbb{Z}^+$ için $k > t$ olsun. Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ için $|\Omega| < \infty$ ise, $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r_1,k,p_1(.)}(\Omega) \hookrightarrow A_{\vartheta_3,\vartheta_4}^{r_2,t,p_2(.)}(\Omega)$ vardır.

İspat: Herhangi bir $f \in A^{r_1,k,p_1(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega)$ fonksiyonu verilsin. O halde $f \in L^{r_1}_{\vartheta_1}(\Omega)$ ve $f \in W^{k,p_1(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$ olur. Şimdi $r_2 < r_1$ olmak üzere $\alpha = \frac{r_1}{r_2}$ olarak tanımlansın. O halde, Hölder eşitsizliğinden $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ için

$$\|f\|^{r_2}_{r_2,\vartheta_1} = \int_\Omega |f(x)|^{r_2} \vartheta_1(x)\,dx \le \left\{\int_\Omega \left(|f(x)|^{r_2} \vartheta_1^{\frac{r_2}{r_1}}(x)\right)^{\frac{r_1}{r_2}} dx\right\}^{\frac{r_2}{r_1}} \left\{\int_\Omega (\chi_\Omega)^\beta\,dx\right\}^{\frac{1}{\beta}}$$

$$= \left(\int_\Omega |f(x)|^{r_1} \vartheta_1(x)\,dx\right)^{\frac{r_2}{r_1}} |\Omega|^{\frac{1}{\beta}} = \|f\|^{r_2}_{r_1,\vartheta_1} |\Omega|^{\frac{1}{\beta}}$$

bulunur. O halde, $|\Omega| < \infty$ ve $f \in L^{r_1}_{\vartheta_1}(\Omega)$ olduğundan, $f \in L^{r_2}_{\vartheta_1}(\Omega)$ bulunur. Ayrıca $\vartheta_3 \prec \vartheta_1$ için $f \in L^{r_2}_{\vartheta_3}(\Omega)$ olur. $W^{k,p_1(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \subset L^{p_1(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$ ifadesinden $f \in L^{p_1(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$ elde edilir. Yine $|\Omega| < \infty$ ve $p_2(.) \le p_1(.)$ için $L^{p_1(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_2(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$ olduğundan

$$\|f\|_{k,p_2(.),\vartheta_2} = \sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|_{p_2(.),\vartheta_2}$$

$$\le C \sum_{0\le|\alpha|\le k} \|D^\alpha f\|_{p_1(.),\vartheta_2} = \|f\|_{k,p_1(.),\vartheta_2}$$

sağlanacak şekilde bir $C > 0$ bulunur. Buradan $W^{k,p_1(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p_2(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$ elde edilir. Ayrıca, $\vartheta_4 \prec \vartheta_2$ ve $k > t$ olduğundan, $W^{k,p_2(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow W^{t,p_2(.)}_{\vartheta_4}(\Omega)$ sağlanır. Böylece $W^{k,p_1(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,p_2(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow W^{t,p_2(.)}_{\vartheta_4}(\Omega)$ olup $W^{k,p_1(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow W^{t,p_2(.)}_{\vartheta_4}(\Omega)$ elde edilir. O halde, $f \in W^{k,p_1(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$ için $f \in W^{t,p_2(.)}_{\vartheta_4}(\Omega)$ sağlanır. Böylece $f \in L^{r_2}_{\vartheta_3}(\Omega) \cap W^{t,p_2(.)}_{\vartheta_4}(\Omega) = A^{r_2,t,p_2(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}(\Omega)$ olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

Aşağıdaki sonuç, Teorem 4.4.17, Teorem 4.4.18, Teorem 4.4.19, Teorem 4.4.20, Teorem 4.4.21 ve Teorem 4.4.22 kullanılarak kolayca ispatlanır.

Sonuç 4.4.24 (i) Eğer $\vartheta_1 \approx \vartheta_2$ ise, $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta}(\mathbb{R}^d) = A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_2,\vartheta}(\mathbb{R}^d)$ eşitliği elde edilir.

(ii) Eğer $\vartheta_1 \approx \vartheta_2$ ise, $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta,\vartheta_1}(\mathbb{R}^d) = A^{r,k,p(.)}_{\vartheta,\vartheta_2}(\mathbb{R}^d)$ eşitliği sağlanır.

(iii) $\vartheta_3 \prec \vartheta_1$ ve $\vartheta_4 \prec \vartheta_2$ olsun. Bu takdirde, $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}\left(\mathbb{R}^d\right)$ gömülmesi sağlanır.

(iv) Eğer $\vartheta_1 \approx \vartheta_3$, $\vartheta_2 \approx \vartheta_4$ ise, $A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right) = A^{r,k,p(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}\left(\mathbb{R}^d\right)$ eşitliği bulunur.

(v) $\vartheta_3 \prec \vartheta_1$, $\vartheta_4 \prec \vartheta_2$ ve $p_2(.) \preceq p_1(.)$ olsun. Bu takdirde, $A^{r,k,p_1(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow A^{r,k,p_2(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}\left(\mathbb{R}^d\right)$ gömülmesi sağlanır.

(vi) Eğer $\vartheta_3 \prec \vartheta_1$, $\vartheta_4 \prec \vartheta_2$ ve $\left\|\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right\|_{\frac{p_1(.)}{p_1(.)-p_2(.)},\vartheta_1} < \infty$ ise, $A^{r,k,p_1(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow A^{r,k,p_2(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}\left(\mathbb{R}^d\right)$ gömülmesi elde edilir.

(vii) Eğer $\vartheta_3 \prec \vartheta_1$, $\vartheta_4 \prec \vartheta_2$, $p_2(.) \preceq p_1(.)$ ve $k > t$ ise, $A^{r,k,p_1(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow A^{r,t,p_2(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}\left(\mathbb{R}^d\right)$ olarak bulunur.

(viii) $1 < p_2^- \le p_2(.) \le p_1(.) \le p_1^+ < \infty$, $\left\|\frac{\vartheta_2}{\vartheta_1}\right\|_{\frac{p_1(.)}{p_1(.)-p_2(.)},\vartheta_1} < \infty$, $\vartheta_3 \prec \vartheta_1$, $\vartheta_4 \prec \vartheta_2$ ve $k > t$ olsun.

O halde, $A^{r,k,p_1(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\left(\mathbb{R}^d\right) \hookrightarrow A^{r,t,p_2(.)}_{\vartheta_3,\vartheta_4}\left(\mathbb{R}^d\right)$ gömülmesi elde edilir.

Aşağıdaki teoremde, (Kim ve ark., 2010) çalışmasındaki Teorem 2.11'deki ispat tekniği kullanılmıştır.

Teorem 4.4.25: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı bir küme olsun. Eğer,

(i) $q(.) > \dfrac{1}{p(.)-1}$ olmak üzere $\vartheta_2^{-q(.)} \in L^1(\Omega)$,

(ii) Her $x \in \Omega$ için $\vartheta_2(x) \ge c > 0$,

koşulları sağlanıyorsa $p_q(.) = \dfrac{p(.)q(.)}{q(.)+1}$ olmak üzere $A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p_q(.)}(\Omega)$ gömülmesi sağlanır.

İspat: Herhangi bir $f \in A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega)$ verilsin. O halde, $f \in L^r_{\vartheta_1}(\Omega)$ ve $f \in W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$ olur. Buradan

$$\rho_{L^{\frac{q(.)+1}{q(.)}}(\Omega)}\left(|\nabla f|^{\frac{p(.)q(.)}{q(.)+1}}\vartheta_2^{\frac{q(.)}{q(.)+1}}\right)=\int_\Omega|\nabla f(x)|^{p(x)}\vartheta_2(x)dx<\infty$$

yazılır. Ayrıca (i) koşulundan

$$\rho_{L^{q(.)+1}(\Omega)}\left(\vartheta_2^{-\frac{q(.)}{q(.)+1}}\right)=\int_\Omega(\vartheta_2(x))^{-q(x)}dx<\infty$$

sağlanır. Değişken üslü Lebesgue uzayları için Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_\Omega|\nabla f(x)|^{p_q(x)}dx=\int_\Omega|\nabla f(x)|^{\frac{p(x)q(x)}{q(x)+1}}dx=\int_\Omega|\nabla f(x)|^{\frac{p(x)q(x)}{q(x)+1}}(\vartheta_2(x))^{\frac{q(x)}{q(x)+1}}(\vartheta_2(x))^{-\frac{q(x)}{q(x)+1}}dx$$
$$\le c_h\left\||\nabla f|^{\frac{p(.)q(.)}{q(.)+1}}\vartheta_2^{\frac{q(.)}{q(.)+1}}\right\|_{L^{\frac{q(.)+1}{q(.)}}(\Omega)}\left\|\vartheta_2^{-\frac{q(.)}{q(.)+1}}\right\|_{L^{q(.)+1}(\Omega)}$$

elde edilir. Teorem 2.1.11 kullanılırsa

$$\left\|\vartheta_2^{-\frac{q(.)}{q(.)+1}}\right\|_{L^{q(.)+1}(\Omega)}\le \text{maks}\left\{\left(\rho_{L^{q(.)+1}}\left(\vartheta_2^{-\frac{q(.)}{q(.)+1}}\right)\right)^{\frac{1}{q^-+1}},\left(\rho_{L^{q(.)+1}}\left(\vartheta_2^{-\frac{q(.)}{q(.)+1}}\right)\right)^{\frac{1}{q^++1}}\right\}\le c_1$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\int_\Omega|\nabla f(x)|^{p_q(x)}dx\le c_hc_1\left\||\nabla f|^{\frac{p(.)q(.)}{q(.)+1}}\vartheta_2^{\frac{q(.)}{q(.)+1}}\right\|_{L^{\frac{q(.)+1}{q(.)}}(\Omega)} \tag{4.4.25.1}$$

olur. Genelliği bozmadan $\int_\Omega|\nabla f(x)|^{p_q(x)}dx>1$ olduğu kabul edilebilir. Aksi halde, $\int_\Omega|\nabla f(x)|^{p_q(x)}dx\le 1$ için $\nabla f\in L^{p_q(.)}(\Omega)$ olacaktır. Ayrıca $p_q(.)\le p(.)$ olduğundan, $|\Omega|<\infty$ ve (ii)'den $L_{\vartheta_2}^{p(.)}(\Omega)\hookrightarrow L_{\vartheta_2}^{p_q(.)}(\Omega)\hookrightarrow L^{p_q(.)}(\Omega)$ sağlanır. Buradan $f\in W_{\vartheta_2}^{1,p(.)}(\Omega)$ için $f\in L_{\vartheta_2}^{p(.)}(\Omega)$, dolayısıyla, $f\in L^{p_q(.)}(\Omega)$ olur. Bu ise $f\in W^{1,p_q(.)}(\Omega)$ olduğunu gösterir. Bu ise ispatı bitirecektir. O halde, $\int_\Omega|\nabla f(x)|^{p_q(x)}dx>1$ alınabilir. Ayrıca, $\int_\Omega|\nabla f(x)|^{p(x)}\vartheta_2(x)dx\le 1$ ise, Teorem 2.1.11'den

$$\rho_{L^{p_q(\cdot)}(\Omega)}(\nabla f)^{\frac{1}{p_q^+}} \le \|\nabla f\|_{L^{p_q(\cdot)}(\Omega)} \le \rho_{L^{p_q(\cdot)}(\Omega)}(\nabla f)^{\frac{1}{p_q^-}}$$

olup (4.4.25.1) eşitsizliğinden,

$$\|\nabla f\|_{L^{p_q(\cdot)}(\Omega)}^{\frac{p^-q^-}{q^++1}} \le \int_\Omega |\nabla f(x)|^{p_q(x)}\,dx \le c_h c_1 \left\| |\nabla f|^{\frac{p(\cdot)q(\cdot)}{q(\cdot)+1}} \vartheta_2^{\frac{q(\cdot)}{q(\cdot)+1}} \right\|_{L^{\frac{q(\cdot)+1}{q(\cdot)}}(\Omega)}$$

$$\le c_h c_1 \text{maks}\left\{ \left(\rho_{L^{\frac{q(\cdot)+1}{q(\cdot)}}}\left(|\nabla f|^{\frac{p(\cdot)q(\cdot)}{q(\cdot)+1}} \vartheta_2^{\frac{q(\cdot)}{q(\cdot)+1}} \right)\right)^{\frac{q^+}{q^++1}}, \left(\rho_{L^{\frac{q(\cdot)+1}{q(\cdot)}}}\left(|\nabla f|^{\frac{p(\cdot)q(\cdot)}{q(\cdot)+1}} \vartheta_2^{\frac{q(\cdot)}{q(\cdot)+1}} \right)\right)^{\frac{q^-}{q^-+1}} \right\}$$

$$= c_h c_1 \text{maks}\left\{ \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)} \vartheta_2(x)\,dx \right)^{\frac{q^+}{q^++1}}, \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)} \vartheta_2(x)\,dx \right)^{\frac{q^-}{q^-+1}} \right\}$$

$$= c_h c_1 \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)} \vartheta_2(x)\,dx \right)^{\frac{q^-}{q^-+1}}$$

$$\le c_h c_1 \|\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}_{\vartheta_2}(\Omega)}^{\frac{p^-q^-}{q^-+1}}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, $C = (c_h c_1)^{\frac{q^++1}{p^-q^-}} > 0$ ve $\beta_1 = \dfrac{q^+ +1}{q^- +1}$ olmak üzere

$$\|\nabla f\|_{L^{p_q(\cdot)}(\Omega)} \le C \|\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}_{\vartheta_2}(\Omega)}^{\beta_1}$$

bulunur. Ayrıca $p^+ < \infty$ ve $\rho_{L^{p(\cdot)}_{\vartheta_2}(\Omega)}(|\nabla f|) \le 1$ olduğundan $\|\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}_{\vartheta_2}(\Omega)} \le 1$ sağlanır. Bu takdirde $\beta_1 = \dfrac{q^+ +1}{q^- +1} > 1$ için $\|\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}_{\vartheta_2}(\Omega)}^{\beta_1} \le \|\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}_{\vartheta_2}(\Omega)}$ olur. O halde, $C = (c_h c_1)^{\frac{q^++1}{p^-q^-}} > 0$ olmak üzere

$$\|\nabla f\|_{L^{p_q(\cdot)}(\Omega)} \le C \|\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}_{\vartheta_2}(\Omega)} \tag{4.4.25.2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan $\int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)} \vartheta_2(x)\,dx > 1$ olduğu kabul edilsin. Böylece

$$\|\nabla f\|_{L^{p_q(.)}(\Omega)}^{\frac{p^-q^-}{q^++1}} \le \int_\Omega |\nabla f(x)|^{p_q(x)}dx \le c_h c_1 \left\| |\nabla f|^{\frac{p(.)q(.)}{q(.)+1}} \vartheta_2^{\frac{q(.)}{q(.)+1}} \right\|_{L^{\frac{q(.)+1}{q(.)}}(\Omega)}$$

$$\le c_h c_1 \operatorname{maks}\left\{ \left(\rho_{L^{\frac{q(.)+1}{q(.)}}}\left(|\nabla f|^{\frac{p(.)q(.)}{q(.)+1}} \vartheta_2^{\frac{q(.)}{q(.)+1}} \right) \right)^{\frac{q^+}{q^++1}}, \left(\rho_{L^{\frac{q(.)+1}{q(.)}}}\left(|\nabla f|^{\frac{p(.)q(.)}{q(.)+1}} \vartheta_2^{\frac{q(.)}{q(.)+1}} \right) \right)^{\frac{q^-}{q^-+1}} \right\}$$

$$= c_h c_1 \left(\rho_{L^{\frac{q(.)+1}{q(.)}}}\left(|\nabla f|^{\frac{p(.)q(.)}{q(.)+1}} \vartheta_2^{\frac{q(.)}{q(.)+1}} \right) \right)^{\frac{q^+}{q^++1}}$$

$$\le c_h c_1 \|\nabla f\|_{L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)}^{\frac{p^+q^+}{q^++1}}$$

bulunur. Böylece, $C = (c_h c_1)^{\frac{q^++1}{p^-q^-}} > 0$ ve $\beta_2 = \frac{p^+q^+}{p^-q^-}$ olmak üzere

$$\|\nabla f\|_{L^{p_q(.)}(\Omega)} \le C \|\nabla f\|_{L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)}^{\beta_2} \tag{4.4.25.3}$$

sağlanır. O halde (4.4.25.2) ve (4.4.25.3) ifadelerinden $\nabla f \in L^{p_q(.)}(\Omega)$ olur. Ayrıca $p_q(.) \le p(.)$ ve $|\Omega| < \infty$ için (ii)'den $L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_q(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_q(.)}(\Omega)$ sağlanır. Buradan $f \in W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$ için $f \in L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$, dolayısıyla, $f \in L^{p_q(.)}(\Omega)$ olur. Bu ise $f \in W^{1,p_q(.)}(\Omega)$ olduğunu gösterir. Böylece $W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \subset W^{1,p_q(.)}(\Omega)$ sağlanır. Banach teoreminden $W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p_q(.)}(\Omega)$ sürekli gömülmesi bulunur. O halde $f \in A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega)$ için

$$\|f\|_{1,p_q(.)} \le C\|f\|_{1,p(.),\vartheta_2} \le \|f\|_{r,\vartheta_1} + C\|f\|_{1,p(.),\vartheta_2}$$
$$\le \operatorname{maks}\{1,C\}\left(\|f\|_{r,\vartheta_1} + \|f\|_{1,p(.),\vartheta_2} \right) = \operatorname{maks}\{1,C\} \|f\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}$$

elde edilir. Bu ise ispatı bitirir.

Çalışma boyunca, d uzayın boyutu olmak üzere herhangi $p(.)$ değişken üssü için

$$p^*(.) = \begin{cases} \dfrac{dp(.)}{d - p(.)}, & p(.) < d \\ \infty, & p(.) \ge d \end{cases}$$

ifadesi kullanılacaktır.

Teorem 4.4.26: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ açık sınırlı kümesi verilsin ve $1 < p^- \leq p^+ < d$ olmak üzere $p(.) \in C^+(\overline{\Omega})$ ve $p(.) \in P^{\log}(\Omega)$ olsun. $r^- > 1$ olmak üzere $r(.) \in L^{\infty}(\Omega)$ fonksiyonu her $x \in \Omega$ için $r(x) \leq p^*(x)$ koşulunu sağlıyorsa, $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$ vardır. Ayrıca, eğer $\inf_{x\in\Omega}(p^*(x) - r(x)) > 0$ koşulu da sağlanıyorsa $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$ kompakt gömülmesi sağlanır (Diening, 2004b), (Fan ve ark., 2005), (Kim ve ark., 2010).

Teorem 4.4.25 ve Teorem 4.4.26 yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.27: $p(.) \in C^+(\overline{\Omega})$ için Teorem 4.4.25'teki koşullar sağlansın. Ayrıca Teorem 4.4.26'daki koşullar $p(.)$ yerine $p_q(.)$ olacak şekilde gerçeklensin. Bu takdirde $r(.) \in C^+(\overline{\Omega})$ ve her $x \in \Omega$ verildiğinde $1 < r^- < p_q^*(x)$ için $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{r(.)}(\Omega)$ sağlanır.

Teorem 4.4.28: $p(.) \in C(\overline{\Omega})$ ve her $x \in \overline{\Omega}$ için $1 < p(x)$ olsun. Ayrıca

(i) $1 < \alpha(x) \in C(\overline{\Omega})$ için $0 < \vartheta \in L^{\alpha(x)}(\Omega)$,

(ii) Her $x \in \overline{\Omega}$ için $\beta(x) = \dfrac{\alpha(x)}{\alpha(x)-1}$ olmak üzere $1 < s(x) < \dfrac{p^*(x)}{\beta(x)}$,

koşulları sağlanıyorsa, $W^{1,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_{\vartheta}^{s(.)}(\Omega)$ bulunur (Mashiyev ve ark., 2010).

Sonuç 4.4.29: Teorem 4.4.25'teki koşulların sağlandığı kabul edilsin. Ayrıca Teorem 4.4.28'de $p(.)$ yerine $p_q(.)$ alınarak koşullar sağlansın. Bu takdirde her $x \in \overline{\Omega}$ için $1 < s(x) < \dfrac{p_q^*(x)}{\beta(x)}$ olmak üzere $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_{\vartheta}^{s(.)}(\Omega)$ gömülmesi vardır.

İspat: Teorem 4.4.25'ten $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p_q(.)}(\Omega)$ ve Teorem 4.4.28'den $W^{1,p_q(.)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_{\vartheta}^{s(.)}(\Omega)$ bulunur. O halde, $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,1,p(.)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_{\vartheta}^{s(.)}(\Omega)$ kompakt gömülmesi elde edilir.

Teorem 4.4.30: $p(.) \in C(\overline{\Omega})$, her $x \in \overline{\Omega}$ için $1 < p(x)$ olsun ve

(i) Her $x \in \Omega$ için $\vartheta_2(x) \geq c > 0$,

(ii) $1 < \alpha(.) \in C(\overline{\Omega})$ için $0 < \vartheta_3 \in L^{\alpha(.)}(\Omega)$,

(iii) $t(.) \in C(\overline{\Omega})$ ve $1 < t(.) < p(.)$ olmak üzere $\vartheta_2^{-\frac{t(.)}{p(.)-t(.)}} \in L^1(\Omega)$,

koşulları sağlansın. Bu takdirde, her $q(.) \in C(\overline{\Omega})$ ve $1 < q(.) < \frac{t^*(.)}{\beta(.)}$ için $\frac{1}{\alpha(.)} + \frac{1}{\beta(.)} = 1$ olmak üzere $A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(.)}_{\vartheta_3}(\Omega)$ sağlanır.

İspat: Öncelikle, $A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,t(.)}(\Omega)$ ifadesi gösterilsin. Herhangi bir $f \in A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega)$ fonksiyonu alınsın. O halde, $f \in L^r_{\vartheta_1}(\Omega)$ ve $f \in W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$ olur. Buradan

$$\rho_{L^{\frac{p(.)}{t(.)}}(\Omega)}\left(|\nabla f|^{t(.)}\,\vartheta_2^{\frac{t(.)}{p(.)}}\right) = \int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)}\,\vartheta_2(x)\,dx < \infty$$

olduğu görülür. Ayrıca (iii)'den

$$\rho_{L^{\frac{p(.)}{p(.)-t(.)}}(\Omega)}\left(\vartheta_2^{-\frac{t(.)}{p(.)}}\right) = \int_\Omega (\vartheta_2(x))^{-\frac{t(x)}{p(x)-t(x)}}\,dx < \infty$$

sağlanır. O halde değişken üslü Lebesgue uzayları için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla f(x)|^{t(x)}\,dx &= \int_\Omega |\nabla f(x)|^{t(x)}\,(\vartheta_2(x))^{\frac{t(x)}{p(x)}}\,(\vartheta_2(x))^{-\frac{t(x)}{p(x)}}\,dx \\ &\leq c_h \left\| |\nabla f|^{t(.)}\,\vartheta_2^{\frac{t(.)}{p(.)}} \right\|_{L^{\frac{p(.)}{t(.)}}(\Omega)} \left\| \vartheta_2^{-\frac{t(.)}{p(.)}} \right\|_{L^{\frac{p(.)}{p(.)-t(.)}}(\Omega)}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Teorem 2.1.11 ve (iii) göz önüne alınırsa

$$\left\| \vartheta_2^{-\frac{t(.)}{p(.)}} \right\|_{L^{\frac{p(.)}{p(.)-t(.)}}(\Omega)}^{\frac{p^-}{p^+-t^-}} \leq \rho_{L^{\frac{p(.)}{p(.)-t(.)}}(\Omega)}\left(\vartheta_2^{-\frac{t(.)}{p(.)}}\right) = \int_\Omega (\vartheta_2(x))^{-\frac{t(x)}{p(x)-t(x)}}\,dx < \infty$$

ve

$$\left\|\vartheta_2^{-\frac{t(.)}{p(.)}}\right\|_{L^{\frac{p(.)}{p(.)-t(.)}}(\Omega)}^{\frac{p^+}{p^- - t^+}} \leq \rho_{L^{\frac{p(.)}{p(.)-t(.)}}(\Omega)}\left(\vartheta_2^{-\frac{t(.)}{p(.)}}\right) = \int_\Omega \left(\vartheta_2(x)\right)^{-\frac{t(x)}{p(x)-t(x)}} dx < \infty$$

bulunur. Buradan

$$\left\|\vartheta_2^{-\frac{t(.)}{p(.)}}\right\|_{L^{\frac{p(.)}{p(.)-t(.)}}(\Omega)} \leq \text{maks}\left\{\left(\int_\Omega \left(\vartheta_2(x)\right)^{-\frac{t(x)}{p(x)-t(x)}} dx\right)^{\frac{p^+ - t^-}{p^-}}, \left(\int_\Omega \left(\vartheta_2(x)\right)^{-\frac{t(x)}{p(x)-t(x)}} dx\right)^{\frac{p^- - t^+}{p^+}}\right\}$$

$$\leq \text{maks}\left\{\left(\int_\Omega \left(\vartheta_2(x)\right)^{-\frac{t(x)}{p(x)-t(x)}} dx + 1\right)^{\frac{p^+ - t^-}{p^-}}, \left(\int_\Omega \left(\vartheta_2(x)\right)^{-\frac{t(x)}{p(x)-t(x)}} dx + 1\right)^{\frac{p^- - t^+}{p^+}}\right\}$$

$$= \left(\int_\Omega \left(\vartheta_2(x)\right)^{-\frac{t(x)}{p(x)-t(x)}} dx + 1\right)^{\frac{p^+ - t^-}{p^-}} \leq c_1$$

eşitsizliği elde edilir. O halde

$$\int_\Omega \left|\nabla f(x)\right|^{t(x)} dx \leq c_h c_1 \left\|\left|\nabla f\right|^{t(.)} \vartheta_2^{\frac{t(.)}{p(.)}}\right\|_{L^{\frac{p(.)}{t(.)}}(\Omega)} \tag{4.4.30.1}$$

olur. Genelliği bozmadan $\int_\Omega \left|\nabla f(x)\right|^{t(x)} dx > 1$ olduğu kabul edilebilir. Aksi halde, $\int_\Omega \left|\nabla f(x)\right|^{t(x)} dx \leq 1$ için $\nabla f \in L^{t(.)}(\Omega)$ olacaktır. Ayrıca $t(.) < p(.)$ ve $|\Omega| < \infty$ olduğundan $L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{t(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{t(.)}(\Omega)$ sağlanır. Buradan $f \in W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$ için $f \in L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$, dolayısıyla, $f \in L^{t(.)}(\Omega)$ olur. Bu ise $f \in W^{1,t(.)}(\Omega)$ olduğunu gösterir. Bu ise ispatı bitirecektir. O halde $\int_\Omega \left|\nabla f(x)\right|^{t(x)} dx > 1$ alınabilir. Yine, $\int_\Omega \left|\nabla f(x)\right|^{p(x)} \vartheta_2(x) dx \leq 1$ ise, $\int_\Omega \left|\nabla f(x)\right|^{t(x)} dx > 1$ için Teorem 2.1.11 ve (4.4.30.1) eşitsizliğinden

$$
\begin{aligned}
\|\nabla f\|_{L^{t(\cdot)}(\Omega)}^{t^-} &\leq \int_\Omega |\nabla f(x)|^{t(x)}\,dx \leq c_h c_1 \left\| |\nabla f|^{t(\cdot)} \vartheta_2^{\frac{t(\cdot)}{p(\cdot)}} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{t(\cdot)}}(\Omega)} \\
&\leq c_h c_1 \text{maks}\left\{ \left(\rho_{L^{\frac{p(\cdot)}{t(\cdot)}}}\left(|\nabla f|^{t(\cdot)} \vartheta_2^{\frac{t(\cdot)}{p(\cdot)}} \right) \right)^{\frac{t^+}{p^-}}, \left(\rho_{L^{\frac{p(\cdot)}{t(\cdot)}}}\left(|\nabla f|^{t(\cdot)} \vartheta_2^{\frac{t(\cdot)}{p(\cdot)}} \right) \right)^{\frac{t^-}{p^+}} \right\} \\
&= c_h c_1 \text{maks}\left\{ \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)} \vartheta_2(x)\,dx \right)^{\frac{t^+}{p^-}}, \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)} \vartheta_2(x)\,dx \right)^{\frac{t^-}{p^+}} \right\} \\
&= c_h c_1 \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)} \vartheta_2(x)\,dx \right)^{\frac{t^-}{p^+}} \\
&\leq c_h c_1 \|\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}_{\vartheta_2}(\Omega)}^{\frac{p^- t^-}{p^+}}
\end{aligned}
$$

olup $C = (c_h c_1)^{\frac{1}{t^-}} > 0$ için

$$
\|\nabla f\|_{L^{t(\cdot)}(\Omega)} \leq C \|\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}_{\vartheta_2}(\Omega)}^{\frac{p^-}{p^+}} \tag{4.4.30.2}
$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan, $\int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)} \vartheta_2(x)\,dx > 1$ olduğu kabul edilsin. Böylece

$$
\begin{aligned}
\|\nabla f\|_{L^{t(\cdot)}(\Omega)}^{t^-} &\leq \int_\Omega |\nabla f(x)|^{t(x)}\,dx \leq c_h c_1 \left\| |\nabla f|^{t(\cdot)} \vartheta_2^{\frac{t(\cdot)}{p(\cdot)}} \right\|_{L^{\frac{p(\cdot)}{t(\cdot)}}(\Omega)} \\
&\leq c_h c_1 \text{maks}\left\{ \left(\rho_{L^{\frac{p(\cdot)}{t(\cdot)}}}\left(|\nabla f|^{t(\cdot)} \vartheta_2^{\frac{t(\cdot)}{p(\cdot)}} \right) \right)^{\frac{t^+}{p^-}}, \left(\rho_{L^{\frac{p(\cdot)}{t(\cdot)}}}\left(|\nabla f|^{t(\cdot)} \vartheta_2^{\frac{t(\cdot)}{p(\cdot)}} \right) \right)^{\frac{t^-}{p^+}} \right\} \\
&= c_h c_1 \text{maks}\left\{ \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)} \vartheta_2(x)\,dx \right)^{\frac{t^+}{p^-}}, \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)} \vartheta_2(x)\,dx \right)^{\frac{t^-}{p^+}} \right\} \\
&= c_h c_1 \left(\int_\Omega |\nabla f(x)|^{p(x)} \vartheta_2(x)\,dx \right)^{\frac{t^+}{p^-}} \\
&\leq c_h c_1 \|\nabla f\|_{L^{p(\cdot)}_{\vartheta_2}(\Omega)}^{\frac{p^+ t^+}{p^-}}
\end{aligned}
$$

olup $C=(c_h c_1)^{\frac{1}{t^-}}>0$ ve $\beta=\dfrac{p^+t^+}{p^-t^-}$ için

$$\|\nabla f\|_{L^{t(.)}(\Omega)}\leq C\|\nabla f\|^{\beta}_{L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)} \tag{4.4.30.3}$$

bulunur. O halde (4.4.30.2) ve (4.4.30.3) eşitsizliklerinden $\nabla f\in L^{t(.)}(\Omega)$ olduğu görülür. Ayrıca, $t(.)<p(.)$ ve $|\Omega|<\infty$ olduğundan $L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)\hookrightarrow L^{t(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)\hookrightarrow L^{t(.)}(\Omega)$ sağlanır. Buradan $f\in W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$ için $f\in L^{p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$, dolayısıyla, $f\in L^{t(.)}(\Omega)$ olur. Bu ise, $f\in W^{1,t(.)}(\Omega)$ olduğunu gösterir. Böylece $W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)\subset W^{1,t(.)}(\Omega)$ kapsaması elde edilir. Banach teoreminden $W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)\hookrightarrow W^{1,t(.)}(\Omega)$ olduğu görülür. O halde $f\in A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega)$ için

$$\begin{aligned}\|f\|_{1,t(.)}&\leq C\|f\|_{1,p(.),\vartheta_2}\leq\|f\|_{r,\vartheta_1}+C\|f\|_{1,p(.),\vartheta_2}\\&\leq \text{maks}\{1,C\}\left(\|f\|_{r,\vartheta_1}+\|f\|_{1,p(.),\vartheta_2}\right)=\text{maks}\{1,C\}\|f\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega)\hookrightarrow W^{1,t(.)}(\Omega) \tag{4.4.30.4}$$

gömülmesi elde edilir.

Şimdi Ω, $\mathbb{R}^d$'nin sınırlı bir bölgesi olmak üzere $t(.)\in C(\overline{\Omega})$ alınsın. $t^-\geq 1$ ve $\underset{x\in\Omega}{\text{es sinf}}\,(t^*(x)-s(x))\geq 0$ olan her $s(.)\in L^{\infty}(\Omega)$ için $W^{1,t(.)}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^{s(.)}(\Omega)$ olduğu biliniyor (Diening, 2004b), (Saiedinezhad ve Ghaemi, 2015). Buradan $s(.)<t^*(.)$ için

$$W^{1,t(.)}(\Omega)\hookrightarrow\hookrightarrow L^{s(.)}(\Omega) \tag{4.4.30.5}$$

elde edilir. Şimdi $s(.)=q(.)\beta(.)$ olsun. O halde, $f\in W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega)$ için $\dfrac{1}{\alpha(.)}+\dfrac{1}{\beta(.)}=1$ olmak üzere değişken üslü Lebesgue uzaylarında Hölder eşitsizliğinden

$$\int_{\Omega}|f(x)|^{q(x)}\vartheta_3(x)dx\leq c_h\left\||f|^{q(.)}\right\|_{L^{\beta(.)}(\Omega)}\|\vartheta_3\|_{L^{\alpha(.)}(\Omega)}<\infty$$

sağlanır. O halde $f \in L^{q(.)}_{\vartheta_3}(\Omega)$ olur. Buradan $W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \subset L^{q(.)}_{\vartheta_3}(\Omega)$ elde edilir. Banach teoreminden $W^{1,p(.)}_{\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(.)}_{\vartheta_3}(\Omega)$ sağlandığı görülür. O halde $f \in A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega)$ için

$$\begin{aligned}\|f\|_{q(.),\vartheta_3} &\le C\|f\|_{1,p(.),\vartheta_2} \le \|f\|_{r,\vartheta_1} + C\|f\|_{1,p(.),\vartheta_2} \\ &\le \text{maks}\{1,C\}\left(\|f\|_{r,\vartheta_1} + \|f\|_{1,p(.),\vartheta_2}\right) = \text{maks}\{1,C\}\|f\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. O halde

$$A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(.)}_{\vartheta_3}(\Omega)$$

gömülmesi elde edilir. Şimdi $A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega)$ uzayında $f_n \rightharpoonup 0$ olacak şekilde $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega)$ dizisi alınsın. (4.4.30.4) gömülmesinden $W^{1,t(.)}(\Omega)$ uzayında $f_n \rightharpoonup 0$ yakınsaması ve (4.4.30.5) kompakt gömülmesinden $L^{s(.)}(\Omega)$ uzayında $f_n \to 0$ olduğu görülür. Buradan

$$\int_\Omega |f_n(x)|^{q(x)} \vartheta_3(x)\,dx \le c_h \|\vartheta_3\|_{L^{\alpha(.)}(\Omega)} \left\||f_n|^{q(.)}\right\|_{L^{\beta(.)}(\Omega)} \to 0$$

olup, $L^{q(.)}_{\vartheta_3}(\Omega)$ uzayında $f_n \to 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(.)}_{\vartheta_3}(\Omega)$ sağlanır.

Sonuç 4.4.31: Teorem 4.4.30'daki hipotezlerin sağlandığı kabul edilsin. Bu takdirde herhangi bir $f \in A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega |f(x)|^{q(x)} \vartheta_3(x)\,dx \le \begin{cases} C_1\left(\|f\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\right)^{q^+}, & \|f\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2} > 1 \\ C_2\left(\|f\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\right)^{q^-}, & \|f\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2} < 1 \end{cases}$$

olacak şekilde $C_1, C_2 > 0$ sayıları vardır.

İspat: Teorem 4.4.30'dan $1 < q^- \le q(.) \le q^+ < \dfrac{t^*(.)}{\beta(.)}$ için

$$A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q^+}_{\vartheta_3}(\Omega) \text{ ve } A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q^-}_{\vartheta_3}(\Omega)$$

bulunur. O halde, herhangi bir $f \in A^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}(\Omega)$ için

$$\left\|f\right\|_{L^{q^+}_{\vartheta_3}(\Omega)}=\left(\int_\Omega \left|f(x)\right|^{q^+}\vartheta_3(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q^+}}\leq c_1\left\|f\right\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}$$

ve

$$\left\|f\right\|_{L^{q^-}_{\vartheta_3}(\Omega)}=\left(\int_\Omega \left|f(x)\right|^{q^-}\vartheta_3(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q^-}}\leq c_2\left\|f\right\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}$$

olacak şekilde $c_1,c_2>0$ sayıları vardır. Buradan

$$\int_\Omega \left|f(x)\right|^{q(x)}\vartheta_3(x)\,dx\leq\int_\Omega\left(\left|f(x)\right|^{q^+}+\left|f(x)\right|^{q^-}\right)\vartheta_3(x)\,dx\leq c_1^{q^+}\left(\left\|f\right\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\right)^{q^+}+c_2^{q^-}\left(\left\|f\right\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\right)^{q^-}$$

$$\leq\begin{cases}C_1\left(\left\|f\right\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\right)^{q^+}, & \left\|f\right\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}>1\\ C_2\left(\left\|f\right\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}\right)^{q^-}, & \left\|f\right\|^{r,1,p(.)}_{\vartheta_1,\vartheta_2}<1\end{cases}$$

eşitsizliği elde edilir.

5. TARTIŞMA

Potansiyel teoride önemli bir kavram olan kapasite ifadesi bu doktora çalışmasının bulgular bölümünün birinci kısmında incelenmiştir. Ayrıca, sıfır sınır değerli değişken üslü Sobolev uzayları, ağırlıklı olarak çalışılmıştır ve üzerinde diğer kapasitelerle ilişkili bir başka kapasite bulgular bölümünün ikinci kısmında tanımlanmıştır. Üçüncü kısımda ise çalışmanın ilk kısmında tanıtılan rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasite yardımıyla oluşturulan fine (iyi) topolojinin temel özellikleri çalışılmıştır. Çalışmanın son kısmında ise bir arakesit uzayının üsler ve ağırlıklarına göre uygun koşullar altında sürekli ve kompakt gömülmeleri incelenmiştir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının büyük bir kısmını oluşturan $W_{\vartheta}^{k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayının bazı koşullar altında sürekli ve kompakt gömülmeleri incelenebilir. Ayrıca, rölatif $\left(p(.),\vartheta\right)$-kapasitesi yardımıyla elliptik ve parabolik sınır-değer problemlerinin çözümleri araştırılabilir. Öklid topolojisinden daha ince olan fine (iyi) topoloji daha geniş kapsamlı ele alınıp Öklid topolojisi ile arasındaki benzerlik ve farklılıklar gösterilebilir. Yine, tanımlanan $A_{\vartheta_1,\vartheta_2}^{r,k,p(.)}\left(\mathbb{R}^d\right)$ uzayının ağırlıklı değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarıyla uygun koşular altında kompakt gömülmeleri incelenip bu gömülmeler yardımıyla bazı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Acerbi, E., Mingione, G. 2001. Regularity results for a class of functionals with non-standard growth. Arch. Ration. Mech. and Anal. 156: 121-140.

Adams, R. A., Fournier, J. J. F. 2003. Sobolev Spaces (2 nd Ed.). Academic Press, 305.

Aydın, İ. 2012a. On variable exponent amalgam spaces. An. Şt. Univ. Ovidius Constanta, 20(3): 5-20.

Aydın, İ. 2012b. Weighted variable Sobolev spaces and capacity. J. Funct. Space Appl., Vol. 2012, Article ID 132690, 17 pages, doi: 10.1155/2012/132690.

Berger, M. S. 1977. Nonlinearity and Functional Analysis: Lectures on Nonlinear Problems in Mathematical Analysis, Academic Press.

Björn, A. 2008. Fine continuity on metric spaces. Manuscripta Math. 125: 369-381.

Björn, A., Björn, J. 2011. Nonlinear Potential Theory on Metric Spaces. Zurich: European Mathematical Society (EMS).

Burenkov, V. I. 1998. Sobolev Spaces on Domains. Vieweg+Teubner Verlag.

Cartan, H. 1946. Theorie general du balayage en potential newtonien. Ann. Univ. Grenoble Math. Phys. 22: 221-280.

Cartan, H. 1971. Differential Calculus, Herman, Paris-France.

Choquet, G. 1954. Theory of capacities. Ann. I. Fourier 5: 131-295.

Ciarlet, P. G. 2013. Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications, SIAM.

Constantinescu, C., Cornea, A. 1972. Potential Theory on Harmonic Spaces. Springer-Verlag, Berlin.

Conway, J. B. 1985. A Course in Functional Analysis (Graduate Texts in Mathematics), Springer, New York.

Coscia, A., Mingione, G. 1999. Hölder continuity of the gradient of $p(x)$-harmonic mappings. C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. 1 Math. 328(4): 363-368.

Diening, L. 2004a. Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$. Math. Inequal. Appl. 7(2): 245-253.

Diening, L. 2004b. Riesz potential and Sobolev embeddings on generalized Lebesgue and Sobolev spaces $L^{p(.)}$ and $W^{k,p(.)}$. Math. Nachr. 268: 31-43.

Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P., Růžička, M. 2011. Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Springer-Verlag, Berlin, 509.

Doob, J. L. 1984. Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart. Springer-Verlag, New-York.

Dunford, N., Schwartz, J. T. 1958. Linear Operators, Part I: General Theory, Interscience, New York.

Edmunds, E., Fiorenza, A., Meskhi, A. 2006. On a measure of non-compactness for some classical operators. Acta Math. Sin. 22(6): 1847-1862.

Evans, L. C., Gariepy, R. F. 1992. Measure Theory and Fine Properties of Functions, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca, Raton, Fla, USA.

Fan, X., Zhang, Q., Zhao, D. 2005. Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem. J. Math. Anal. Appl. 302: 306-317.

Feichtinger, H. G., Gürkanlı, A. T. 1990. On a family of weighted convolution algebras. Internat. J. Math. Sci. 13(3): 517-526.

Fischer, R. H., Gürkanlı, A. T., Liu, T. S. 1996. On a family of weighted spaces, Math. Slovaca 46(1): 71-82.

Fuglede, B. 1988. Fine Potential Theory, In Potential Theory-Surveys and Problems. pp. 82-97, Lecture Notes in Mathematics 1344, Springer-Verlag, Berlin.

Gilbarg, D., Trudinger, N. S. 1983. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order (2nd Edition). Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 224, Springer-Verlag, Berlin.

Hajłasz, P., Onninen, J. 2004. On boundedness of maximal functions in Sobolev spaces. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 29(1): 167-176.

Harjulehto, P., Latvala, V. 2008. Fine topology of variable exponent energy superminimizers. Ann. Acad. Sci. Fenn.-M. 33: 491-510.

Harjulehto, P., Hästö, P., Koskenoja, M. 2003a. The Dirichlet energy integral on intervals in variable exponent Sobolev spaces. Z. Anal. Anwend. 22(4): 911-923.

Harjulehto, P., Hästö, P., Koskenoja, M. 2007. Properties of capacities in variable exponent Sobolev spaces. J. Anal. Appl. 5(2): 71-92.

Harjulehto, P., Hästö, P., Koskenoja, M., Varonen, S. 2003b. Sobolev capacity on the space $W^{1,p(.)}\left(\mathbb{R}^n\right)$, J. Funct. Space Appl. 1(1): 17-33.

Heinonen, J., Kilpeläinen, T., Martio, O. 1993. Nonlinear Potential Theory of Elliptic Equations. Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press.

Helms, L. L. 1969. Introduction to Potential Theory, Pure and Applied Mathematics, Vol. XXII, Wiley-Interscience, New-York.

Hudzik, H. 1976. On generalized Orlicz-Sobolev space. Funct. Approximatio Comment. Math. 4: 35-51.

Hudzik, H. 1983. Uniform convexity of Musielak-Orlicz spaces with Luxemburg norm. Comment. Math. Parce Mat. 23: 21-32.

Kellogg, O. D. 1929. Foundations of Potential Theory. Springer, Berlin.

Kilpeläinen, T. 1994. Weighted Sobolev spaces and capacity. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 19(1): 95-113.

Kilpeläinen, T. 1998. A remark on the uniqueness of quasi continuous functions. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 23: 261-262.

Kim, Y., Wang, L., Zhang, C. 2010. Global bifurcation for a class of degenerate elliptic equations with variable exponents. J. Math. Anal. Appl. 371: 624-637.

Kinderlehrer, D. , Stampacchia, G. 1980. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications. Academic, London.

Kokilashvili, V., Samko, S. 2003. Singular integrals in weighted Lebesgue spaces with variable exponent. Georgian Math. J. 10(1): 145-156.

Kováčik, O., Rákosník, J. 1991. On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. Czech Math. J. 41(4): 592-618.

Kufner, A., John, O., Fucik, S. 1977. Function Spaces. Noordhoff International Publishing, Leyden, pp. 145-146.

Liu, Q. 2008. Compact trace in weighted variable exponent Sobolev spaces $W^{1,p(x)}(\Omega;\nu_0,\nu_1)$. Math. Anal. Appl. 348: 760-774.

Lu, S., Ding, Y., Yan, D. 2007. Singular Integrals and Related Topics. World Scientific Publishing Company.

Maly, J., Ziemer, W. P. 1997. Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equation. Mathematical Surveys and Monographs 51, AMS, Providense, Rhode Island.

Mashiyev, R. A., Oğraş, S., Yucedag, Z., Avci, M. 2010. The Nehari manifold approach for Dirichlet problem involving the $p(x)$-Laplacian equation. J. Korean Math. Soc. 47(4): 845-860.

Maso, G. D. 1993. An Introduction to Γ-Convergence. Birkhäuser, Boston.

Maz´ja, V. G. 1985. Sobolev Spaces. Springer, Berlin, Germany.

Mendelson, B. 1962. Introduction to Topology. Allyn and Bacon, Inc., Boston.

Meyers, N. G. 1975. Continuity properties of potentials. Duke Math. J. 42, 157-166.

Muckenhoupt, B. 1972. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function. Trans. Amer. Math. Soc. 165: 207-226.

Musielak, J. 1983. Orlicz spaces and modular spaces. Lecture Notes in Math. 1034. Springer-Verlag.

Nakano, H. 1950. Modulared Semi-Ordered Linear Spaces. Maruzen Co., Ltd. Tokyo.

Nakano, H. 1951. Topology and Topological Linear Spaces. Maruzen Co., Ltd. Tokyo.

Orlicz, W. 1931. Über konjugierte exponentenfolgen. Studia Math. 3, 200-212.

Royden, H. L. 1968. Real Analysis, Mac Millan Publishing Co. INC., New York.

Rudin, W. 1966. Real and Complex Analysis. Mc. Graw-Hill, New York.

Rudin, W. 1973. Functional Analysis. Mc. Graw-Hill, Inc.

Růžička, M. 2000. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.

Saiedinezhad, S., Ghaemi, M. B. 2015. The fibering map approach to a quasilinear degenerate $p(x)$-laplacian equation. Bull. Iranian Math. Soc. 41(6): 1477-1492.

Samko, S. G. 1998. Convolution and potential type operators in the space $L^{p(x)}(\mathbb{R}^n)$, Integral Transforms and Special Functions 7(3-4): 261-284.

Samko, S. G. 2005. On a progress in the theory of Lebesgue spaces with variable exponent: maximal and singular operators. Integr. Transf. Spec. F. 16(5-6): 461-482.

Shanmugalingam, N. 2001. Harmonic functions on metric spaces. Illinois J. Math. 45(3): 1021-1050.

Sharapudinov, I. I. 1979. On a topology of the space $L^{p(t)}([0,1])$. Matem. Zametki 26(4): 613-632.

Sobolev, S. L. 1938. On a theorem of functional analysis. Mat. Sb. 46: 471-497 (Russian), English Translation: Amer. Math. Soc. Translations 2(34): 39-68.

Treves, F. 1967. Topological Vector Space, Distributions and Kernels. Academic Press, 565.

Winslow, W. M. 1949. Induced fibration of suspensions. J. Appl. Physics 20: 1137-1140.

Zhikov, V. V., Surnachev, M. D. 2016. On density of smooth functions in weighted Sobolev spaces with variable exponents. St. Petersburg Math. J. 27(3): 415-436.

ÖZGEÇMİŞ

KişiselBilgiler

Ad Soyad	Cihan ÜNAL
Doğum Tarihi	21.05.1988
Doğum Yeri	İSTANBUL
E-posta Adresi	cihanunal88@gmail.com

Eğitim Bilgileri

Lisans	Kocaeli Üniversitesi, KOCAELİ (2006-2010)
Yüksek Lisans	Sinop Üniversitesi, SİNOP (2010-2013)
Doktora	Sinop Üniversitesi, SİNOP (2013-...)

İş Deneyimi

Şubat 2011-Eylül 2019	Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, SİNOP

Yayınlar, Çalışmalar

Makaleler

1. Aydın, İ., Ünal, C. 2019. The Kolmogorov-Riesz theorem and some compactness criterions of bounded subsets in weighted variable exponent amalgam and Sobolev spaces. Collect. Math. (Kabul Edildi) https://doi.org/10.1007/s13348-019-00262-5

2. Ünal, C., Aydın, İ. 2019. On some properties of relative capacity and thinness in weighted variable exponent Sobolev spaces. Anal. Math. (Kabul Edildi)

3. Aydın, İ., Ünal, C. 2019. Weighted stochastic field exponent Sobolev spaces and nonlinear degenerated elliptic problem with nonstandard growth. Hacet. J. Math. Stat. (Kabul Edildi)

4. Ünal, C., Aydın, İ. 2019. On some compact embeddings of a weighted space. Tbilisi Math. J. 12(2): 29-45

5. Ünal, C., Aydın, İ. 2019. Compact embeddings on a subspace of weighted variable exponent Sobolev spaces.

Adv. Oper. Theory 4(2): 388-405

6. Aydın, İ., Ünal, C. 2019. Birkhoff's Ergodic theorem for weighted variable exponent amalgam spaces. AAM: Intern. J. Special Issue No 3, 1-10

7. Ünal, C., Aydın, İ. 2018. Weighted variable exponent Sobolev spaces with zero boundary values and capacity estimates. Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences 36(2): 373-388

8. Ünal, C., Aydın, İ. 2018. The Banach algebra of functions with Fourier transforms in wighted amalgam spaces. MATH: Modelling&Application&Theory 3(1): 51-64

9. Ünal, C., Aydın, İ. 2017. The Riesz Capacity in Variable Exponent Lebesgue Spaces. Int. J. Appl. Math. 30(2): 163-176

10. Aydın, İ., Ünal, C. 2017. On Some Multipliers of Vector-Valued Amalgam Spaces. International Journal of Pure and Applied Mathematics 116(2): 547-557

11. Ünal, C., Aydın, İ. 2017. On Some Properties of the Space $L_w^p\left(\mathbb{R}^n\right)\cap L_\vartheta^{q(.)}\left(\mathbb{R}^n\right)$. Cankaya University Journal of Science and Engineering 13(2): 1-10

12. Ünal, C., Aydın, İ. 2017. Some Results of a Weighted Convolution Algebra. Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society 18(1): 109-127

Bildiriler

1. Aydın, İ., Ünal, C. 2019. On Some Properties of a Normed Intersection Space. 6th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2019)

2. Ünal, C., Aydın, İ. 2019. On Some Properties of Grand Lorentz Spaces. International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA 2019)

3. Aydın, İ., Ünal, C. 2019. Amalgam Spaces with Variable Exponent. International Conference on Mathematical Advances and Applications (ICOMAA 2019)

4. Aydın, İ., Ünal, C. 2018. Weighted Stochastic Field Exponent Lebesgue and Sobolev Spaces. International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA 2018)

5. Ünal, C., Aydın, İ. 2018. Some Compactness Criterions in Weighted Variable Exponent Amalgam Spaces. International

Conference on Analysis and Its Applications (ICAA 2018)

6. Ünal, C., Aydın, İ. 2018. Thinness and Fine Topology With Relative Capacity. International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA 2018)

7. Ünal, C., Aydın, İ. 2018. On Some Continuous Embeddings of a Banach Space. International Conference on Mathematics (ICOMATH 2018)

8. Ünal, C., Aydın, İ. 2018. On Some Embeddings Properties of an Intersection Space. International Conference on Mathematics (ICOMATH 2018)

9. Ünal, C., Aydın, İ. 2018. On a Weighted Convolution Banach Subalgebra of the Weighted Space $L^1(G)$. International Conference on Mathematics (ICOMATH 2018)

10. Aydın, İ., Ünal, C. 2018. Ergodic Theorem in Weighted Variable Exponent Lebesgue and Amalgam Spaces. International Conference on Mathematics (ICOMATH 2018)

11. Aydın, İ., Ünal, C. 2017. On Some Properties of a Banach Algebra. International Conference on Operators in Morrey-Type Spaces and Applications (OMTSA 2017)

12. Ünal, C., Aydın, İ. 2017. Thin Sets in Weighted Variable Exponent Sobolev Spaces. International Conference on Operators in Morrey-Type Spaces and Applications (OMTSA 2017)

13. Ünal, C., Aydın, İ. 2017. Some Properties of Fine Topology with an Alternative Capacity in Weighted Variable Exponent Case. International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME-2017)

14. Ünal, C., Aydın, İ. 2017. Weighted Variable Exponent Sobolev Spaces With Zero boundary Values. International Conference on Mathematics and Engineering (ICOME-2017)

15. Ünal, C., Aydın, İ. 2016. On an Approach to Two Capacities in Weighted Variable Exponent SobolevSpaces. Function Spaces, Differential Operators and Nonlinear Analysis (FSDONA-9)

16. Ünal, C., Aydın, İ. 2016. Riesz Capacity in Variable Exponent Lebesgue Spaces. International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA-2016)

17. Ünal, C., Aydın, İ. 2015. On Some Properties of a Weighted Space. International Workshop on OperatorTheory and Applications (IWOTA 2015)

18. Ünal, C., Aydın, İ. 2013. Some Results of a Weighted Banach Convolution Algebra. 9Th International ISAAC Congress

Bu Tezden Elde Edilen Makaleler

1. Ünal, C., Aydın, İ. 2019. On some properties of relative capacity and thinness in weighted variable exponent Sobolev spaces. Anal. Math. (Kabul Edildi)

2. Ünal, C., Aydın, İ. 2019. Compact embeddings on a subspace of weighted variable exponent Sobolev spaces. Adv. Oper. Theory 4(2): 388-405

3. Ünal, C., Aydın, İ. 2018. Weighted variable exponent Sobolev spaces with zero boundary values and capacity estimates. Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences 36(2): 373-388

4. Ünal, C., Aydın, İ. Some properties of thinness and fine topology with relative capacity. (Dergiye Sunuldu)