



**IL³ LORENTZ UZAYINDA BERTRAND
REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ**

EMİN KASAP

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

IL³ LORENTZ UZAYINDA BERTRAND
REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ

EMİN KASAP

96864

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN: Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

SAMSUN-2000

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM BAKANLIĞI
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma jürimiz tarafından 04/03/2000 tarihinde yapılan sınav ile Matematik Anabilim Dalı'nda **DOKTORA** tezi olarak kabul edilmiştir.

BAŞKAN : Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU

Üye : Prof. Dr. Ziya YAPAR

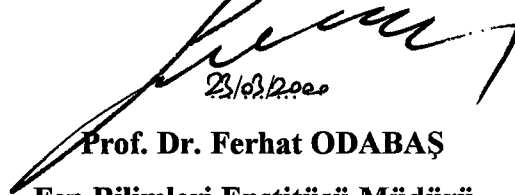
Üye : Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ

Üye : Doç. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Üye : Doç. Dr. Nezihe ÇALIŞKAN

ONAY :

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.


23/03/2000
Prof. Dr. Ferhat ODABAŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

IL³ LORENTZ UZAYINDA BERTRAND REGLE YÜZEY ÇİFTLERİ

ÖZET

Bu çalışma, temelde beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde konunun ele alınma nedeni tartışıldı. Literatür özeti bölümünde konuya temel olan çalışmalara ve genel bilgiler bölümünde ise Lorentz uzayı ile ilgili temel kavramlara yer verildi.

Materyal ve Metot bölümünde, E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında regle yüzeyler ve Bertrand regle yüzey çiftleri tanıtıldı.

Bulgular bölümü, çalışmamızın orijinal kısmını meydana getirmektedir. Bu bölümde, IL^3 Lorentz uzayında bir regle yüzey için Frenet vektörleri elde edilerek bu vektörler yardımı ile IL^3 de time-like Bertrand regle yüzey çiftleri tanımlandı ve time-like Bertrand regle yüzey çiftleri ile ilgili teoremlere yer verildi. Time-like Bertrand regle yüzey çiftlerinin Frenet vektörlerinin striksiyon eğrileri boyunca hareketleri sonucunda oluşan regle yüzeylerin dralleri arasındaki bağıntılar hesaplanarak yüzeylerin açılabilirliği ile ilgili sonuçlar ifade edildi. Ayrıca Frenet vektörlerinin H_0^2 yarı-hiperbolik uzayı ve S_1^2 birim Lorentz küresi üzerindeki gösterge eğrilerinin yay-uzunlukları arasındaki bağıntılar hesaplandı. Son olarak, time-like Bertrand regle yüzey çiftini oluşturan regle yüzeylerin açılabilir olması durumunda striksiyon eğrilerinin karşılıklı noktalarındaki Frenet ani dönme vektörleri incelendi.

Anahtar Kelimeler : Lorentz uzayı, regle yüzey, Bertrand regle yüzey çifti

**THE PAIRS OF BERTRAND RULED SURFACES IN
LORENTZ SPACE \mathbb{L}^3**

ABSTRACT

This study consist of five fundamental chapters. In introduction, It is discussed why this study is taken into consideration. In literature abstract part, studies which is main into subject has been presented. In general informations part, fundamental concepts about Lorentz space has been examined.

In material and method part, ruled surfaces and the pairs of Bertrand ruled surfaces has been presented in three dimensional Euclid space E^3 .

Results part is the original part of this study. In this chapter; By obtaining Frenet vectors for a ruled surface in Lorentz space \mathbb{L}^3 , the pairs of time-like Bertrand ruled surfaces has been presented and also theorems related to the pairs of time-like Bertrand ruled surfaces were expressed. By calculating to equations between the dralls of ruled surfaces which obtained as a result of the motions along the striction curves of Frenet vectors of the pairs of time-like Bertrand ruled surfaces, the results related to the developability of surfaces were expressed. Moreover; relations between arc-lengths of indicatrices of Frenet vectors on pseudo-hyperbolic space H_0^2 and Lorentz sphere S_1^2 has been calculated. Lastly, Frenet rotation vectors in corresponding points of striction curves were investigated when the ruled surfaces which formed the pairs of time-like Bertrand ruled surfaces has been developable

Key words : Lorentz space, ruled surface, the pairs of Bertrand ruled surface

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca, beni her aşamada yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen Saygıdeğer Hocam Sayın **Prof. Dr. Nuri KURUOĞLU**'na en derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Emin KASAP



İÇİNDEKİLER

1. Giriş.....	1
2. Literatür Özeti.....	2
3. Genel Bilgiler.....	3
3.1. Lorentz Uzayı.....	3
3.2. Yarı-Riemann Manifoldları.....	7
3.3. \mathbb{R}^3 de Vektörel Çarpım.....	10
4. Materyal ve Metot.....	12
4.1. \mathbb{R}^3 Öklid Uzayında Regle Yüzeyleer.....	12
4.2. \mathbb{R}^3 Öklid Uzayında Bertrand Regle Yüzey Çiftleri.....	19
5. Bulgular.....	24
5.1. \mathbb{R}^3 Lorentz Uzayında Regle Yüzeyleer için Frenet 3-ayaklıları ve H_0^2 Yarı-Hiperbolik Uzayına Göre Frenet Denklemleri.....	24
5.2. \mathbb{R}^3 Lorentz Uzayında Time-Like Bertrand Regle Yüzey Çiftleri.....	40
5.3. \mathbb{R}^3 Lorentz Uzayında Time-Like Bertrand Regle Yüzey Çiftlerinin Frenet Vektörlerinin Çizdikleri Regle Yüzeyleer Dralleri.....	49
5.4. \mathbb{R}^3 Lorentz Uzayında Time-Like Bertrand Regle Yüzey Çiftlerinin Frenet Vektörlerinin Gösterge Eğrilerinin Yay-Uzunlukları	54
5.5. \mathbb{R}^3 Lorentz Uzayında Time-Like Bertrand Regle Yüzey Çiftlerinin Frenet Ani Dönme Vektörleri.....	57
6. Tartışma.....	62
7. Sonuç ve Öneriler.....	63
8. Kaynaklar.....	64
9. Özgeçmiş.....	65

SİMGELER VE KISALTMALAR

\mathbb{L}^n : n-boyutlu Lorentz uzayı

\mathbb{R}^n_{ν} : Yarı-Öklidyen uzay

\mathbb{R}^n_1 : Minkowski n-uzay

D : Levi-Civita konneksiyonu

S_1^{n-1} : n-boyutlu Lorentz hiperküresi

S_1^2 : Birim Lorentz küresi

H_0^2 : Yarı-hiperbolik uzay

E^3 : 3-boyutlu Öklid uzayı

φ : Regle yüzey

(φ, φ^*) : Bertrand regle yüzey çifti

e : Gösterge vektörü

t : Merkez normal

g : Asimptotik normal

W : Frenet ani dönme vektörü

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın temelini, Materyal ve Metot başlıklı bölümde kısaca özetlenen “Bertrand Offsets of Ruled and Developable Surfaces” adlı çalışma,[9], oluşturmaktadır.

Bu çalışmada ise; E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında, tanımlı olan bir regle yüzeyin geodezik Frenet vektörlerinin IL^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayındaki karşılıkları araştırılmış ve bunun neticesinde IL^3 de gösterge vektörü space-like olan bir Frenet 3-ayaklısının bulunamayacağı ancak gösterge vektörü space-like olan bir Frenet 3-ayaklısının IR^3_2 yarı-Öklidyen uzayında tanımlanabileceği sonucuna varılmıştır.

Gösterge vektörünün time-like kabul edilmesi halinde bir Frenet 3-ayaklısı bulunabileceği, bu halde elde edilen regle yüzeyin time-like regle yüzey olacağı gösterilerek, IL^3 de time-like regle yüzey için H_0^2 yarı-hiperbolik uzayına göre Frenet formülleri elde edilmiştir. Bu formüller yardımı ile IL^3 de time-like Bertrand regle yüzey çiftleri tanımlanarak bu regle yüzey çiftleri ile ilgili özellikler incelenmiştir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Literatürde, [9], E^3 ; 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlı bir regle yüzey için geodezik Frenet vektörleri tanımlanarak bu vektörler yardımı ile E^3 Öklid uzayında Bertrand regle yüzey çiftleri tanımlanmıştır. E^3 de tanımlı Bertrand regle yüzey çiftlerinin karşılıklı striksiyon noktaları arasındaki uzaklığın ve karşılıklı doğrultmanları arasındaki açının sabit olduğu ifade edilerek, Bertrand regle yüzey çiftlerinden biri açılabilir iken diğerinin açılabilir olma koşulu araştırılmıştır.

[10] numaralı kaynak olarak verilen çalışmada ise, E^3 ; 3-boyutlu Öklid uzayında tanımlı Bertrand regle yüzey çiftlerinin asimptotik ve merkez normallerinin meydana getirdikleri regle yüzeylerin E^3 de birer Bertrand regle yüzey çifti oluşturduğu ifade edilmiştir. Bertrand regle yüzey çiftini oluşturan regle yüzeylerin açılabilir olması durumunda striksiyon eğrilerinin eğrilik ve burulmaları arasında bir bağıntı elde edilerek yüzeylerden birinin striksiyon eğrisinin bir eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şartın, diğerinin striksiyon eğrisinin eğilim çizgisi olmasıdır sonucu ifade edilmiştir. Ayrıca bu çalışmada E^3 de tanımlı Bertrand regle yüzey çiftlerinin geodezik Frenet vektörlerinin çizdikleri regle yüzeylerin dralleri arasında bağıntılar elde edilerek, yüzeylerden biri açılabilir iken diğerinin açılabilir olması koşulları verilmiştir.

3. GENEL BİLGİLER

3.1. Lorentz Uzayı

Tanım 3.1.1.

V bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu bilinear ve simetrik ise \langle , \rangle fonksiyonuna V üzerinde bir **simetrik bilinear form** denir, [1].

Tanım 3.1.2.

V bir reel vektör uzayı ve \langle , \rangle da V üzerinde simetrik bilinear form olsun. Bu takdirde,

- i) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle > 0$ ise \langle , \rangle bilinear formuna **pozitif definit**,
- ii) $\forall v \in V, v \neq 0$ için $\langle v, v \rangle < 0$ ise \langle , \rangle bilinear formuna **negatif definit**,
- iii) $\forall v \in V$ için $\langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow w = 0$ oluyorsa \langle , \rangle bilinear formuna **non-dejeneredir**

denir, [1].

Tanım 3.1.3.

V bir reel vektör uzayı olsun. V üzerinde,

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

dönüşümü bilinear, simetrik ve non-dejenerer ise \langle , \rangle ya V üzerinde **skalar çarpım**, V ye de **skalar çarpım uzayı** denir, [1].

Tanım 3.1.4.

V bir skalar çarpım uzayı ve $W \subset V$ altuzay olsun. Eğer W altuzayı,

$$\langle , \rangle|_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

kısıtlanmış simetrik bilinear formu negatif tanımlı olacak şekilde V nin en büyük boyutlu altuzayı ise W nin boyutuna \langle , \rangle skalar çarpımının indeksi denir ve ν ile gösterilir.

ν , \langle , \rangle nın indeksi olmak üzere $0 \leq \nu \leq \text{boy}V$ dir. Ayrıca, V skalar çarpım uzayının indeksi, üzerinde tanımlı \langle , \rangle skalar çarpımının indeksi olarak tanımlanır, [1].

Teorem 3.1.1.

V , n -boyutlu skalar çarpım uzayı bir ortonormal baza sahiptir, [1].

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ V nin ortonormal bazı olmak üzere

$$\langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$$

yazılabilir. Burada;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

ve

$$\varepsilon_i = \langle e_i, e_i \rangle = \begin{cases} 1, & \langle e_i, e_i \rangle > 0 \\ -1, & \langle e_i, e_i \rangle < 0 \end{cases}$$

dır.

Teorem 3.1.2.

V , n -boyutlu skalar çarpım uzayı ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ de V nin ortonormal bazı olsun.

Bu takdirde, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ işaretindeki negatif terimlerin sayısı V nin indeksine eşittir, [1].

Tanım 3.1.5.

V bir skalar çarpım uzayı ve ν da V nin indeksi olsun. Eğer $\nu=1$ ve $\text{boy } V \geq 2$ ise V ye bir **Lorentz uzayı** denir, [1].

Tanım 3.1.6.

\mathbb{R}^n ; n -boyutlu, standart, reel vektör uzayı olsun. \mathbb{R}^n üzerinde $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$ ve $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ olmak üzere,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(X, Y) \rightarrow \langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n$$

fonksiyonu bir skalar çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona \mathbb{R}^n üzerinde **Lorentz metriği** denir, [1].

\mathbb{R}^n , üzerinde tanımlı Lorentz metriği ile birlikte bir Lorentz uzayıdır. Bu uzay \mathbb{L}^n ile gösterilir.

Tanım 3.1.7.

\mathbb{L}^n , n-boyutlu Lorentz uzayı ve $X \in \mathbb{L}^n$ olsun.

- i) $\langle X, X \rangle < 0$ ise X e **time-like** vektör,
- ii) $\langle X, X \rangle > 0$ veya $X = 0$ ise X e **space-like** vektör,
- iii) $\langle X, X \rangle = 0$ ve $X \neq 0$ ise X e **null (lightlike)** vektör denir, [1].

Tanım 3.1.8.

\mathbb{L}^n , n-boyutlu Lorentz uzayı olsun. Bir $X \in \mathbb{L}^n$ vektörünün normu $\|X\|$ ile gösterilir ve

$$\|X\| = \sqrt{|\langle X, X \rangle|}$$

ile tanımlanır, [1].

Teorem 3.1.3.

\mathbb{L}^n , n-boyutlu Lorentz uzayı ve $X \in \mathbb{L}^n$ olsun. Bu takdirde,

- i) $\|X\| > 0$,
- ii) $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X$ bir null vektördür,
- iii) X time-like vektör ise $\|X\|^2 = -\langle X, X \rangle$ dir.
- iv) X space-like vektör ise $\|X\|^2 = \langle X, X \rangle$ dir, [1].

Tanım 3.1.9.

\mathbb{L}^n , n-boyutlu Lorentz uzayı, $M \subset \mathbb{L}^n$ bir eğri ve T de M eğrisinin teğet vektör alanı olsun.

- i) $\langle T, T \rangle < 0$ ise α ya **time-like eğri**,
- ii) $\langle T, T \rangle > 0$ ise α ya **space-like eğri**,
- iii) $\langle T, T \rangle = 0$ ise α ya **null-eğri** denir, [1].

Tanım 3.1.10.

\mathbb{L}^n , n-boyutlu Lorentz uzayı ve $M \subset \mathbb{L}^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. $a, b \in I$ olmak üzere M eğrisinin $\alpha(a)$ ve $\alpha(b)$ noktaları arasındaki yay-uzunluğu,

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$$

dir, [1].

Teorem 3.1.4.

\mathbb{L}^3 ; 3-boyutlu Lorentz uzayı, $M \subset \mathbb{L}^3$, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir time-like eğri ve $s \in I$ da M eğrisinin yay-parametresi olsun. M nin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki eğriliği κ , burulması τ ve Frenet 3-ayaklısı da $\{T(s), N(s), B(s)\}$ olmak üzere,

$$(3.1) \quad \begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

dir, [2].

(3.1) den elde edilen

$$(3.2) \quad \begin{cases} T' = \kappa N \\ N' = \kappa T + \tau B \\ B' = -\tau N \end{cases}$$

formüllerine $M \subset \mathbb{L}^3$ time-like eğrisi için **Frenet Formülleri** adı verilir.

Tanım 3.1.11.

\mathbb{L}^n , n-boyutlu Lorentz uzayı $M, N \subset \mathbb{L}^n$ de, sırası ile, (I, α) ve (I, β) koordinat komşulukları ile verilen iki eğri olsun. M ve N nin $s \in I$ ya karşılık gelen $\alpha(s) \in M$ ve $\beta(s) \in N$ noktalarındaki Frenet r-ayaklıları,

$$\{V_1(s), V_2(s), \dots, V_r(s)\} \text{ ve } \{V_1^*(s), V_2^*(s), \dots, V_r^*(s)\}$$

olmak üzere $\forall s \in I$ için

$$\{V_2(s), V_2^*(s)\}$$

lineer bağımlı ise (M, N) eğri 2-lisine \mathbb{L}^n de bir **Bertrand eğri çifti** denir, [3].

Tanım 3.1.12.

\mathbb{L}^n , n-boyutlu Lorentz uzayı ve $M \subset \mathbb{L}^n$ de (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri olsun. M eğrisinin birim teğet vektör alanı T ve U da sabit bir birim vektör olmak üzere, $\forall s \in I$ için T ile U arasındaki açı sabit ise $M \subset \mathbb{L}^n$ eğrisine bir **eğilim çizgisi (helis)** denir, [2].

Teorem 3.1.5.

\mathbb{L}^3 , 3-boyutlu Lorent uzayı, $M \subset \mathbb{L}^3$, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir eğri ve M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki eğriliği κ , burulması da τ olsun.

$$M \text{ eğrisi eğilim çizgisidir} \Leftrightarrow \forall s \in I \text{ için } \frac{\kappa}{\tau} = \text{sabit}$$

dir, [2].

Tanım 3.1.13.

\mathbb{L}^2 , 2-boyutlu Lorentz uzayı, $u, v \in \mathbb{L}^2$ ve $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$ olsun. u dan v ye olan açının Lorentz anlamındaki ölçüsü θ ise,

$$(3.3) \quad \begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

dir, [4].

$$\begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \text{ matrisine } \mathbb{L}^2 \text{ de } \mathbf{dönme matrisi} \text{ denir, [4].}$$

Tanım 3.1.14.

\mathbb{L}^3 , 3-boyutlu Lorent uzayı, $M \subset \mathbb{L}^3$, (I, α) koordinat komşuluğu ile verilen bir time-like eğri ve M eğrisinin $\alpha(s) \in M$ noktasındaki eğriliği κ , burulması da τ olsun. M eğrisinin Frenet ani dönme vektörü W ise,

$$W = -\tau T - \kappa B$$

dir, [13].

3.2. Yarı-Riemann Manifoldları**Tanım 3.2.1.**

M bir diferensiyellenebilir manifold ve M nin vektör alanları uzayı da $\chi(M)$ olsun. $\chi(M)$ üzerinde,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

fonksiyonu bilineer, simetrik, non-dejenere ve sabit indeksli ise $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ya M üzerinde bir **metrik tensör** denir, [1].

Tanım 3.2.2.

\mathbb{R}^n , n -boyutlu, standart, reel vektör uzayı ve \mathbb{R}^n nin $P \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki tanjant uzayı da $T_{\mathbb{R}^n}(P)$ olsun.

$$\forall X_p, Y_p \in T_{\mathbb{R}^n}(P), X_p = (x_1, x_2, \dots, x_n)|_p, Y_p = (y_1, y_2, \dots, y_n)|_p$$

olmak üzere,

$$\langle X_p, Y_p \rangle = \sum_{i=1}^{n-\nu} x_i y_i - \sum_{i=n-\nu+1}^n x_i y_i$$

eşitliği ile verilen metrik tensör ile birlikte elde edilen uzaya indeksi ν olan **yarı-Öklidyen uzay** denir ve $\mathbb{R}^{n,\nu}$ ile gösterilir, [1].

Tanım 3.2.3.

$\mathbb{R}^{n,\nu}$ yarı-Öklidyen uzayında $\nu = 1$ ve $n \geq 2$ ise $\mathbb{R}^{n,1}$ yarı-Öklidyen uzayına **Minkowski n-uzay** denir, [1].

Tanım 3.2.4.

M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ da M üzerinde sabit indeksli bir metrik tensör olsun. $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ikilisine bir **yarı-Riemann manifoldu** denir. $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ yarı-Riemann manifoldu kısaca M ile gösterilir, [1].

Tanım 3.2.5.

M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ da M üzerinde metrik tensör olsun. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nin sabit indeksine M yarı-Riemann manifoldunun **indeksi** denir, [1].

Tanım 3.2.6.

M bir yarı-Riemann manifoldu olsun. $\text{Boy}M \geq 2$ ve M nin indeksi 1 ise M ye bir **Lorentz manifoldu** denir, [1].

Tanım 3.2.7.

\mathbb{L}^n , n -boyutlu Lorentz uzayı ve M de \mathbb{L}^n de bir Lorentz altmanifoldu olsun. Eğer, $\text{Boy}M = n-1$ ise M ye \mathbb{L}^n de bir **hiperyüzey** denir, [1].

Tanım 3.2.8.

\mathbb{L}^n , n -boyutlu Lorentz uzayı, M , \mathbb{L}^n de bir hiperyüzey, $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ bir eğri ve α eğrisinin teğet vektör alanı T olsun. D ve \bar{D} sırası ile \mathbb{L}^n ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonları olmak üzere,

$$\bar{D}_T T = 0$$

ise α eğrisine M üzerinde **geodezik eğri**,

$$D_T T = 0$$

ise α eğrisine \mathbb{I}^n üzerinde **geodezik eğri** denir.

Tanım 3.2.9.

\mathbb{I}^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayı ve M de \mathbb{I}^3 de bir yüzey olsun. Eğer M üzerine indirgenmiş metrik pozitif tanımlı ise M ye \mathbb{I}^3 de bir **space-like** yüzey denir, [5].

Teorem 3.2.1.

\mathbb{I}^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayı, M , \mathbb{I}^3 de bir yüzey ve N de M nin birim normal vektör alanı olsun. Bu takdirde, M nin bir space-like yüzey olması için gerek ve yeter şart,

$$\langle N, N \rangle < 0$$

olmasıdır, [5].

Tanım 3.2.10.

\mathbb{I}^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayı ve M de \mathbb{I}^3 de bir yüzey olsun. Eğer M yüzeyi üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise M ye \mathbb{I}^3 de bir **time-like** yüzey denir, [5].

Teorem 3.2.2.

\mathbb{I}^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayı, M , \mathbb{I}^3 de bir yüzey ve N de M nin birim normal vektör alanı olsun. Bu takdirde, M nin bir time-like yüzey olması için gerek ve yeter şart,

$$\langle N, N \rangle > 0$$

olmasıdır, [5].

Tanım 3.2.11.

\mathbb{I}^n_1 , Minkowski n -uzayında,

$$S_1^{n-1}(r) = \{X \in \mathbb{I}^n_1 \mid \langle X, X \rangle = r^2, r \in \mathbb{R}, r = \text{sabit}\}$$

ile tanımlı hiperkuadratiğe **(n-1)-boyutlu Lorentz hiperküresi** veya kısaca **(n-1)Lorentz hiperküresi** denir.

$n=3$ için

$$S_1^2(r) = \{X \in \mathbb{I}^3_1 \mid \langle X, X \rangle = r^2, r \in \mathbb{R}, r = \text{sabit}\}$$

nokta kümesine **r-yarıçaplı Lorentz küresi** denir.

Lorentz küresi parametrik olarak,

$S_1^2(r) = \{\varphi(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(u, v) = (r \cosh u \cos v, r \cosh u \sin v, r \sinh u), 0 \leq v \leq 2\pi, u \in \mathbb{R}\}$
şeklindedir, [6].

Tanım 3.2.12.

\mathbb{R}^{n-1} , Minkowski n-uzayında,

$$H_0^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \langle X, X \rangle = -r^2, r > 0\}$$

ile tanımlı hiperkuadratiğe (n-1)-boyutlu yarı-hiperbolik uzay denir, [1]

\mathbb{L}^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında H_0^2 yarı-hiperbolik uzayı parametrik olarak,

$$H_0^2 = \{\eta(u, v) \in \mathbb{R}^3 \mid \eta(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, \cosh u), u \neq 0\}$$

şeklindedir, [11].

3.3. \mathbb{L}^3 de Vektörel Çarpım

Tanım 3.3.1.

\mathbb{L}^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayı, $X, Y \in \mathbb{L}^3$ ve $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$ olsun.

X ile Y nin vektörel çarpımı $X \times Y$ ile gösterilir ve

$$X \times Y = (x_3 y_2 - x_2 y_3, x_1 y_3 - x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

şeklinde tanımlanır, [7].

Bu tanıma göre $e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$, $1 \leq i \leq 3$, olmak üzere \mathbb{L}^3 ün $\{e_1, e_2, e_3\}$

standart bazı için,

$$(3.4) \quad X \times Y = \det \begin{bmatrix} -e_1 & -e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

dır.

O halde; e_1, e_2 ve e_3 standart baz vektörleri için (3.6) dan ,

$$e_1 \times e_2 = e_3, e_2 \times e_3 = -e_1 \text{ ve } e_3 \times e_1 = -e_2$$

yazılabilir.

Teorem 3.3.1.

\mathbb{L}^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayı, $X, Y, Z \in \mathbb{L}^3$ ve $X = (x_1, x_2, x_3)$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$,

$Z = (z_1, z_2, z_3)$ olsun. Bu durumda,

$$i) \langle X \times Y, Z \rangle = -\det(X, Y, Z),$$

$$ii) (X \times Y) \times Z = -\langle X, Z \rangle Y + \langle Y, Z \rangle X,$$

$$\text{ii) } (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \times \mathbf{Z} = -\langle \mathbf{X}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{Y} + \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Z} \rangle \mathbf{X},$$

$$\text{iii) } \langle \mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle = 0 \text{ ve } \langle \mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle = 0,$$

$$\text{iv) } \langle \mathbf{X} \times \mathbf{Y}, \mathbf{X} \times \mathbf{Y} \rangle = -\langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{Y} \rangle + (\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle)^2$$

dir, [8].

Teorem 3.3.2.

\mathbb{L}^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayı ve $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathbb{L}^3$ olsun. Bu takdirde,

i) \mathbf{X} ve \mathbf{Y} space-like vektör ise $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ bir time-like vektördür.

ii) \mathbf{X} ve \mathbf{Y} time-like vektör ise $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ bir space-like vektördür.

iii) \mathbf{X} space-like ve \mathbf{Y} time-like vektör ise $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ space-like vektördür.

iv) \mathbf{X} ve \mathbf{Y} null vektör ise $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ space-like vektördür.

v) \mathbf{X} time-like ve \mathbf{Y} null vektör ise $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ space-like vektördür.

vi) \mathbf{X} space-like ve \mathbf{Y} null vektör olmak üzere $\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle = 0$ ise $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ null vektör,

$\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y} \rangle \neq 0$ ise $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ space-like vektördür, [8].

4. MATERYAL VE METOT

4.1. E^3 Öklid Uzayında Regle Yüzeyler

Tanım 4.1.1.

E^3 , 3-boyutlu Öklid uzayında doğruların 1-parametrel bir ailesine E^3 de bir **regle yüzey**, bu ailedeki her bir doğruya da regle yüzeyin **doğrultmanı** veya **anadoğrusu** denir.

E^3 de bir regle yüzey φ ile gösterilirse φ regle yüzeyinin parametrik denklemi

$$(4.1) \quad \varphi(s, v) = \alpha(s) + v e(s)$$

dir. Burada; e , regle yüzeyin doğrultmanı doğrultusundaki birim vektör ve $\alpha : I \rightarrow E^3$ eğrisi de yüzeyin doğrultmanı regle yüzeyi oluştururken doğrultman üzerinde alınan herhangi bir noktanın çizmiş olduğu eğridir. α eğrisine regle yüzeyin **dayanak eğrisi** denir.

Tanım 4.1.2.

φ , E^3 de bir regle yüzey ve e de φ nin doğrultmanı doğrultusundaki birim vektör olsun. e nin birim küre yüzeyi üzerinde çizmiş olduğu eğriye φ regle yüzeyinin **küresel gösterge eğrisi**, e vektörüne de **küresel gösterge vektörü** denir. Küresel gösterge eğrisi (e) ile gösterilir, [9].

φ , E^3 de bir regle yüzey olsun. φ yüzeyi üzerindeki s ve v -parametre eğrilerinin hız vektörleri (4.1) den

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \frac{d\alpha}{ds} + v \frac{de}{ds} \\ \varphi_v &= e \end{aligned}$$

olmak üzere φ nin birim normal vektörü,

$$(4.2) \quad \begin{aligned} U(s, v) &= \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|}, \\ U(s, v) &= \frac{\left(\frac{d\alpha}{ds} + v \frac{de}{ds} \right) \times e}{\left[\left\| \frac{d\alpha}{ds} + v \frac{de}{ds} \right\|^2 - \left(\left\langle \frac{d\alpha}{ds}, e \right\rangle \right)^2 \right]^{1/2}} \end{aligned}$$

dir, [9].

Tanım 4.1.3.

φ , E^3 de bir regle yüzey ve $l = \varphi(s_0, v)$ de φ nin herhangi bir doğrultmanı olsun. l üzerindeki bir Q noktasının hareketi esnasında bu noktadaki normal doğrultu l etrafında döner. Q noktası l üzerinde sonsuza yaklaştığında v de sonsuza yaklaşır. Bu durumda $v \rightarrow -\infty$ iken regle yüzeyin elde edilen birim normal doğrultusuna **asimptotik normal doğrultu** denir ve $g(s)|_{s=s_0}$ ile gösterilir, [9].

Bu tanıma göre,

$$(4.3) \quad \begin{aligned} g(s)|_{s=s_0} &= \lim_{v \rightarrow -\infty} U(s, v)|_{s=s_0}, \\ g(s)|_{s=s_0} &= \frac{e \times e_s}{\|e_s\|} \Big|_{s=s_0}, \quad e_s = \frac{de}{ds} \end{aligned}$$

dir, [9].

Tanım 4.1.4.

φ , E^3 de bir regle yüzey ve U da φ nin birim normal vektörü olsun. U nun l doğrultmanı üzerinde g asimptotik normaline dik olduğu noktaya l üzerinde **striksiyon (merkez) noktası**, bu noktada U nun doğrultusuna da φ regle yüzeyinin **merkez normali** denir ve t ile gösterilir.

Bu tanıma göre, φ regle yüzeyinin bir $\varphi(s, v_0)$ striksiyon noktasındaki merkez normali,

$$(4.4) \quad t = \frac{e_s}{\|e_s\|}$$

dir, [9].

Tanım 4.1.5.

φ , E^3 de bir regle yüzey olsun. φ regle yüzeyinin doğrultmanı dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken striksiyon noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin **striksiyon eğrisi** denir. Bu tanıma göre striksiyon eğrisinin denklemi,

$$(4.5) \quad c(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha_s, e_s \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle} e(s)$$

dir, [9].

Tanım 4.1.6.

φ , E^3 de bir regle yüzey olsun. φ regle yüzeyinin küresel gösterge vektörü e , merkez normali t ve asimptotik normali g olmak üzere $\{e, t, g\}$ ortonormal sistemine φ regle yüzeyinin **geodezik Frenet 3-ayaklısı** ve sistemin her bir vektörüne de **geodezik Frenet vektörü** denir, [9].

Teorem 4.1.1.

φ , E^3 de bir regle yüzey ve φ nin geodezik Frenet vektörleri de e , t ve g olsun. (e) küresel gösterge eğrisinin yay-uzunluğu q olmak üzere,

$$(4.6) \quad \begin{aligned} t &= e_q \\ g &= e \times e_q \end{aligned}$$

dir.

İspat:

(e) nin yay-uzunluğu q ise,

$$q = \int \|e_s\| ds$$

dir. Buradan,

$$\frac{dq}{ds} = \|e_s\|$$

veya

$$(4.7) \quad s_q = \frac{ds}{dq} = \frac{1}{\|e_s\|}$$

bulunur.

$$e_q = \frac{de}{dq} = \frac{de}{ds} \cdot \frac{ds}{dq}$$

eşitliği ve (4.7) bağıntısından,

$$e_q = \frac{e_s}{\|e_s\|}$$

elde edilir. Son eşitlik ve (4.4) den,

$$e_q = t$$

dir.

$e \times e_q$ hesaplanırsa,

$$\mathbf{e} \times \mathbf{e}_q = \mathbf{e} \times \frac{\mathbf{e}_s}{\|\mathbf{e}_s\|}$$

bulunur. Son eşitlik ve (4.3) den,

$$\mathbf{g} = \mathbf{e} \times \mathbf{e}_q$$

elde edilir.

Tanım 4.1.7.

φ , E^3 de bir regle yüzey ve α da φ üzerinde bir eğri olsun. φ nin birim normal vektörü N_0 ve α eğrisinin birim teğet vektörü T_0 olmak üzere, α nın φ ye göre geodezik eğriliği,

$$k_g = \left\langle N_0 \times T_0, \frac{dT_0}{ds} \right\rangle$$

dir,[12].

Teorem 4.1.2.

φ , E^3 de bir regle yüzey olsun. φ nin (e) küresel gösterge eğrisinin S^2 birim küresine göre geodezik eğriliği γ ise,

$$\gamma = \langle t_q, \mathbf{g} \rangle$$

dir.

İspat:

φ nin α dayanak eğrisinin yay-parametresi s ve (e) küresel gösterge eğrisinin yay-parametresi de q olmak üzere (e) nin denklemi,

$$\alpha_e(q) = e(s)$$

dir. Burada q parametresine göre türev alınırsa,

$$(4.8) \quad \frac{d\alpha_e}{dq} = \frac{de}{ds} \cdot \frac{ds}{dq}$$

bulunur.

(e) küresel gösterge eğrisinin birim teğet vektörü T_0 olmak üzere (4.7) ve (4.8)

bağıntılarından,

$$T_0 = \frac{d\alpha_e}{dq} ,$$

$$T_0 = \frac{\mathbf{e}_s}{\|\mathbf{e}_s\|}$$

elde edilir.

(4.4) bağıntısından,

$$(4.9) \quad T^* = t$$

dir.

O halde, (e) eğrisinin S^2 birim küresine göre geodezik eğriliği γ ise Tanım 4.1.7 den,

$$\gamma = \langle e \times t, t_q \rangle,$$

$$\gamma = \langle t_q, g \rangle$$

bulunur.

Teorem 4.1.3

ϕ , E^3 de bir regle yüzey olsun. ϕ nin küresel gösterge vektörü ve merkez normalı, sırası ile, e ve t olmak üzere,

$$\langle t_q, e \rangle = -1$$

ve

$$\langle t_q, t \rangle = 0$$

dır.

İspat:

(4.4) bağıntısından,

$$t = \frac{e_s}{\|e_s\|}$$

dir. Burada s -parametresine göre türev alınırsa,

$$t_s = \frac{\langle e_s, e_s \rangle e_{ss} - \langle e_s, e_{ss} \rangle e_s}{\|e_s\|^3}$$

elde edilir. Bu son ifade ve (4.7) bağıntısı

$$t_q = \frac{dt}{dq} = \frac{dt}{ds} \cdot \frac{ds}{dq} = t_s s_q$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$(4.10) \quad t_q = \frac{\langle e_s, e_s \rangle e_{ss} - \langle e_s, e_{ss} \rangle e_s}{\|e_s\|^4}$$

bulunur. $\langle e, e \rangle = 1$ olduğundan $\langle e_s, e_s \rangle = -\langle e, e_{ss} \rangle$ dir. Bu son eşitlik (4.10) da yerine yazılırsa,

$$\langle t_q, e \rangle = -1$$

elde edilir.

Benzer şekilde (4.4) ve (4.10) bağıntılarından

$$\langle t_q, t \rangle = 0$$

bulunur.

Teorem 4.1.1, Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.1.1.

$$(4.11) \quad \begin{cases} e_q = t \\ t_q = \gamma g - e \\ g_q = -\gamma t \end{cases}$$

dir.

Tanım 4.1.8.

φ, E^3 de bir regle yüzey olsun. (4.11) denklemlerine φ regle yüzeyinin **geodezik**

Frenet denklemleri denir. Bu denklemler matris formunda,

$$\begin{bmatrix} e_q \\ t_q \\ g_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ t \\ g \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

Geodezik Frenet denklemlerinin ikincisinden,

$$\gamma = \frac{\langle e, e_s \times e_{ss} \rangle}{\|e_s\|^3}$$

bulunur, [9].

Tanım 4.1.9.

φ, E^3 de bir regle yüzey olsun. Eğer φ nin komşu iki doğrultmanı kesişiyorsa φ ye **açılabilir** denir, [9].

Teorem 4.1.4.

φ, E^3 de açılabilir bir regle yüzey, e, φ nin küresel gösterge vektörü ve α da dayanak eğrisi olsun. Bu takdirde,

$$\det(\alpha_s, e, e_s) = 0$$

dır, [9].

Teorem 4.1.5.

φ, E^3 de açılabilir bir regle yüzey olsun. Eğer φ nin dayanak eğrisi striksiyon eğrisi olarak alınrsa, φ nin küresel gösterge vektörü striksiyon eğrisinin teğetidir.

İspat:

φ nin dayanak eğrisi striksiyon eğrisi olarak alınrsa (4.5) den,

$$(4.12) \quad \langle c_s, e_s \rangle = 0$$

yazılabilir.

Eğer φ açılabilir ise Teorem 4.1.4 den,

$$(4.13) \quad \langle c_s, e \times e_s \rangle = 0$$

dir.

(4.12) ve (4.13) bağıntılarından,

$$c_s // e$$

elde edilir.

Çalışmamız boyunca φ regle yüzeyinin dayanak eğrisini striksiyon eğrisi olarak alacağız. Bu durumda φ nin denklemi

$$\varphi(s, v) = c(s) + ve(s)$$

dir.

Teorem 4.1.6.

φ, E^3 de bir regle yüzey olsun. Eğer φ açılabilir ise φ nin striksiyon noktasındaki geodezik Frenet 3-ayaklısı ile striksiyon eğrisinin bu noktadaki Frenet 3-ayaklısı aynıdır.

İspat:

φ nin (c) striksiyon eğrisinin teğeti T olsun. φ açılabilir olduğundan Teorem 4.1.5 den,

$$(4.14) \quad e = c_s = T$$

yazılabilir. Burada s , φ nin (c) striksiyon eğrisinin yay-parametresidir.

(4.6) bağıntısından,

$$\begin{aligned} t &= e_q, \\ t &= e_s s_q, \\ t &= T_s s_q \end{aligned}$$

bulunur. Frenet formülleri son eşitlikte kullanılarak,

$$(4.15) \quad t = \kappa s_q N$$

elde edilir.

(4.7) bağıntısından,

$$\begin{aligned} s_q &= \frac{1}{\|e_s\|}, \\ s_q &= \frac{1}{\|T_s\|}, \\ s_q &= \frac{1}{\kappa} \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son bağıntı (4.15) de yerine yazılırsa,

$$(4.16) \quad t = N$$

bulunur. Burada N , (c) striksiyon eğrisinin $c(s)$ striksiyon noktasındaki asli normalidir.

φ nin g asimptotik normali için (4.6) dan,

$$\begin{aligned} g &= e \times e_q, \\ g &= e \times t, \\ g &= T \times N, \end{aligned}$$

$$(4.17) \quad g = B$$

elde edilir. Burada B , (c) striksiyon eğrisinin $c(s)$ noktasındaki binormalidir.

(4.14), (4.16) ve (4.17) bağıntılarından,

$$e = T, t = N \text{ ve } g = B$$

dir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.2. E^3 Öklid Uzayında Bertrand Regle Yüzey Çiftleri

Tanım 4.2.1.

φ ve φ^* , E^3 de iki regle yüzey olsun. Eğer φ ve φ^* ın doğrultmanları arasında, karşılıklı doğrultmanların striksiyon noktalarındaki merkez normalleri ortak olacak

şekilde bir birebir eşleşme varsa (φ, φ^*) ikilisine E^3 de bir **Bertrand regle yüzey çifti** denir, [9].

Bu tanıma göre φ ve φ^* in striksiyon eğrilerinin, sırası ile, $c(s)$ ve $c^*(s)$ noktalarındaki geodezik Frenet 3-ayaklıları,

$$\{e, t, g\}$$

ve

$$\{e^*, t^*, g^*\}$$

olmak üzere,

$$\{t, t^*\}$$

lineer bağımlıdır. O halde φ ve φ^* in karşılıklı doğrultmanları arasındaki açı θ olmak üzere karşılıklı doğrultmanların striksiyon noktalarındaki geodezik Frenet 3-ayaklıları arasında,

$$(4.18) \quad \begin{bmatrix} e^* \\ t^* \\ g^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ t \\ g \end{bmatrix}$$

bağıntısı vardır. Böylece φ^* regle yüzeyi φ ye bağlı olarak,

$$\varphi^*(s, v) = c^*(s) + v e^*(s)$$

$$(4.19) \quad \varphi^*(s, v) = [c(s) + Rt(s)] + v[\cos\theta e(s) + \sin\theta g(s)]$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada R , φ ve φ^* regle yüzeylerinin karşılıklı doğrultmanlarının striksiyon noktaları arasındaki doğrusal uzaklıktır, [9].

Eğer $\theta = 0$ ise (φ, φ^*) ikilisine E^3 de **yönlendirilmiş (oriented) Bertrand regle yüzey çifti** denir. Bu durumda φ^* in denklemi,

$$\varphi^*(s, v) = c(s) + Rt(s) + v e(s)$$

dir.

Eğer $\theta = 90^\circ$ ise (φ, φ^*) ikilisine E^3 de **dik açılı Bertrand regle yüzey çifti** denir. Bu durumda da φ^* in denklemi,

$$\varphi^*(s, v) = c(s) + Rt(s) + v g(s)$$

şeklindedir, [9].

Teorem 4.2.1.

(φ, φ^*) , E^3 de bir Bertrand regle yüzey çifti olsun. φ ve φ^* arasındaki uzaklık R ve karşılıklı doğrultmanlar arasındaki açı θ olmak üzere,

$$\theta = \text{sbt.} \quad \text{ve} \quad R = \text{sbt.}$$

dir.

İspat:

φ ve φ^* in, sırası ile, $c(s)$ ve $c^*(s)$ striksiyon noktalarındaki geodezik Frenet 3-ayaklıları,

$$\{e, t, g\}$$

ve

$$\{e^*, t^*, g^*\}$$

olsun.

(φ, φ^*) Bertrand regle yüzey çifti olduğundan,

$$t = t^*$$

alınabilir. Buna göre t^* in tanımından

$$t^* = \frac{e_s^*}{\|e_s^*\|},$$

$$e_s^* = \|e_s^*\| t^*,$$

$$(4.20) \quad e_s^* = \lambda t, \quad \lambda = \|e_s^*\|$$

yazılabilir.

q , (e) küresel gösterge eğrisinin yay-uzunluğu olmak üzere (4.18) bağıntısı ve türevle ilgili zincir kuralı kullanılarak,

$$e_s^* = -\sin\theta e + \cos\theta e_q q_s + \cos\theta g + \sin\theta g_q q_s$$

elde edilir.

(4.11) geodezik Frenet denklemleri ve (4.20) bağıntısı son eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$\theta_s (-\sin\theta e + \cos\theta g) = 0$$

bulunur. Buradan,

$$\theta_s = 0$$

$$\theta = s + b.$$

dir.

φ^* in striksiyon eğrisi dayanak eğrisi olduğundan (4.5) bağıntısından,

$$\langle c_s^*, e_s^* \rangle = 0 ,$$

$$\langle c_s^*, \lambda t \rangle = 0 ,$$

$$\langle (c + Rt)_s, t \rangle = 0 ,$$

$$\langle c_s + R_s t + R t_s, t \rangle = 0 ,$$

$$R_s = 0 ,$$

$$R = s + b.$$

bulunur.

Teorem 4.2.2.

(φ, φ^*) , E^3 de bir Bertrand regle yüzey çifti ve φ açılabilir olsun. φ^* in açılabilir olması için gerek ve yeter şart, φ nin striksiyon eğrisinin eğriliği, κ , ve burulması, τ , arasında

$$(1 - \kappa R) \sin \theta - \tau R \cos \theta = 0$$

bağıntısının olmasıdır.

İspat:

(\Rightarrow) φ açılabilir olduğundan Teorem 4.1.6 gereğince φ nin striksiyon noktasındaki geodezik Frenet 3-ayaklısı ile striksiyon eğrisinin bu noktadaki Frenet 3-ayaklısı aynıdır. Yani,

$$e = T, t = N \text{ ve } g = B$$

dir. Bu halde φ ve φ^* regle yüzeylerinin parametrik denklemleri,

$$\varphi(s, v) = c(s) + vT(s)$$

ve

$$(4.21) \quad \varphi^*(s, v) = c(s) + RN(s) + v[\cos \theta T(s) + \sin \theta B(s)]$$

şeklinde olur.

Kabul edelim ki φ^* açılabilir olsun. O halde Teorem 4.1.5 ve (4.21) bağıntısından,

$$\frac{d}{ds}(c + RN) = \lambda(\cos\theta T + \sin\theta B), \lambda \in \mathbb{R}$$

yazılabilir. Burada s , φ nin (c) striksiyon eğrisinin yay-parametresidir. Son eşitlikte Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\frac{1 - \kappa R}{\cos\theta} = \frac{\tau R}{\sin\theta},$$

$$(1 - \kappa R)\sin\theta - \tau R\cos\theta = 0$$

bulunur.

(\Leftarrow) φ nin striksiyon eğrisinin eğrilik ve burulması arasında,

$$(1 - \kappa R)\sin\theta - \tau R\cos\theta = 0$$

bağıntısı sağlansın. $c + RN$ ifadesinin s ye göre türevi alınır ve Frenet formülleri kullanılırsa,

$$\frac{d}{ds}(c + RN) = (1 - \kappa R)T + \tau RB$$

bulunur. Burada hipotez kullanılırsa,

$$\frac{d}{ds}(c + RN) = \frac{\tau R}{\sin\theta}(\cos\theta T + \sin\theta B)$$

elde edilir. Eğer,

$$\frac{\tau R}{\sin\theta} = \lambda$$

alınırsa,

$$c_s^* = \lambda e^*$$

bulunur. O halde φ^* açılabilir.

5. BULGULAR

5.1. \mathbb{L}^3 Lorentz Uzayında Regle Yüzeyler İçin Frenet 3-ayaklıları ve \mathbb{H}_0^2 Yarı-Hiperbolik Uzayına Göre Frenet Denklemleri

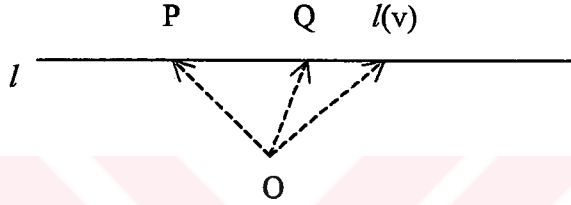
Tanım 5.1.1.

\mathbb{L}^3 Lorentz uzayında doğruların 1-parametrel bir ailesine \mathbb{L}^3 de bir **regle yüzey**, bu ailedeki her bir doğruya da regle yüzeyin **doğrultmanı** veya **anadoğrusu** denir.

\mathbb{L}^3 de P ve Q noktalarından geçen bir doğru l ise l nin parametrik denklemi,

$$l(v) = P + v(Q - P)$$

şeklindedir. (Şekil 5.1)



Şekil 5.1

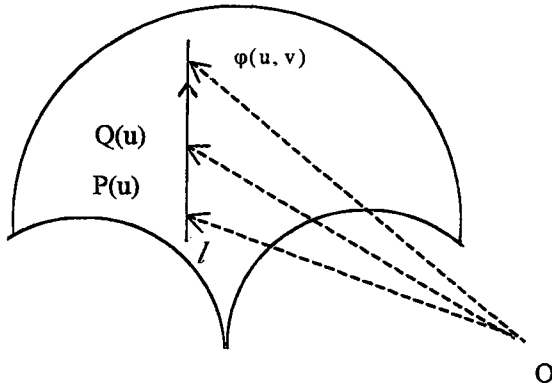
l doğrusu tarafından çizilen regle yüzey ϕ ile gösterilirse, ϕ nin parametrik denklemi için,

$$\phi(u, v) = P(u) + v[Q(u) - P(u)]$$

veya

$$\phi(u, v) = P(u) + ve(u) \quad , \quad e(u) = Q(u) - P(u)$$

yazılabilir. (Şekil 5.2)



Şekil 5.2

Çalışmamız boyunca $\|e\| = 1$ olarak alacağız.

Tanım 5.1.2.

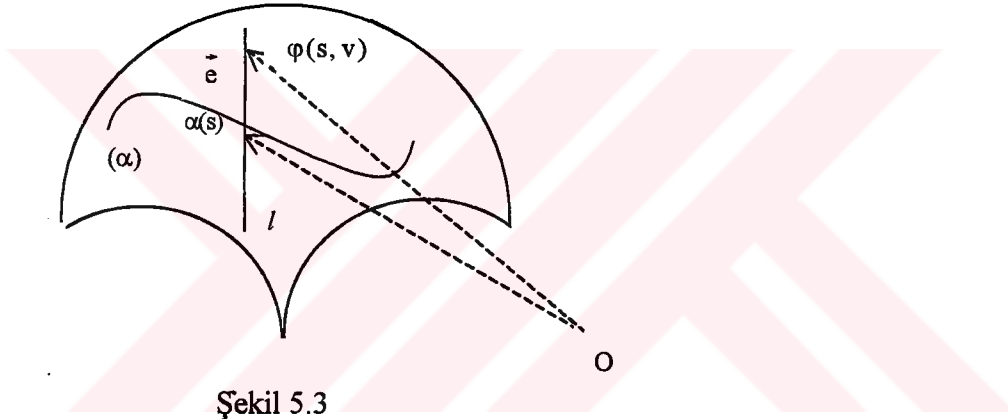
φ , \mathbb{R}^3 de $\varphi(u, v) = P(u) + ve(u)$ parametrik denklemi ile verilen bir regle yüzey olsun. φ regle yüzeyi oluşturken doğrultman üzerinde alınan bir P noktası u değişkenli bir eğri çizer. Bu eğriye φ nin **dayanak eğrisi** denir. Bu tanıma göre, \mathbb{R}^3 de bir φ regle yüzeyinin dayanak eğrisi tek değildir. Dayanak eğrisi olarak doğrultmanların hepsini kesen ve yüzey üzerinde yatan herhangi bir

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

eğrisi alınabilir. Bu durumda regle yüzeyin denklemi,

$$(5.1) \quad \varphi(s, v) = \alpha(s) + ve(s)$$

şeklindedir. (Şekil 5.3)



Şekil 5.3

φ regle yüzeyi üzerindeki s ve v-parametre eğrilerinin hız vektörleri (5.1) den,

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \varphi_s &= \frac{d\alpha}{ds} + v \frac{de}{ds} \\ \varphi_v &= e(s) \end{aligned}$$

olmak üzere yüzeyin birim normal vektörü U ile gösterilirse

$$(5.3) \quad U(s, v) = \frac{\varphi_s \times \varphi_v}{\|\varphi_s \times \varphi_v\|}$$

dir.

Tanım 5.1.3.

φ , \mathbb{R}^3 de bir regle yüzey olsun. φ yüzeyinin herhangi bir $l = \varphi(s_0, v)$ doğrultmanı üzerinde alınan bir Q noktasının hareketi esnasında yüzeyin bu noktadaki normal

doğrultusu doğrultman etrafında dönme hareketi yapar. Q yu doğrultman üzerinde sonsuza taşıdığımızda v de sonsuza taşınır. $v \rightarrow -\infty$ iken $l = \varphi(s_0, v)$ doğrultmanı boyunca birim normal vektörün limit doğrultusuna **asimptotik normal doğrultu** denir ve $g(s)|_{s=s_0}$ ile gösterilir. Bu tanıma göre,

$$g(s)|_{s=s_0} = \lim_{v \rightarrow -\infty} U(s, v)$$

dir.

Tanım 5.1.4.

φ , \mathbb{I}^3 de bir regle yüzey ve U da φ nin birim normal vektörü olsun. U nun doğrultman üzerinde g asimptotik normaline dik olduğu noktaya **striksiyon(merkez) noktası**, bu noktada U nun doğrultusuna da φ nin **merkez normali** denir ve t ile gösterilir.

Tanım 5.1.5.

φ , \mathbb{I}^3 de bir regle yüzey olsun. $\{e, t, g\}$ ortonormal sistemine φ regle yüzeyinin **Frenet 3-ayaklısı** ve sistemin her bir vektörüne de φ yüzeyi için **Frenet vektörü** denir.

Teorem 5.1.1.

φ , \mathbb{I}^3 de bir regle yüzey olsun. Bu takdirde,

i) Eğer e space-like ise φ üzerinde bir $\{e, t, g\}$ Frenet 3-ayaklısı kurulamaz. Bu şekildeki bir 3-ayaklı $\mathbb{I}R^3_2$ yarı-Öklidyen uzayında mevcuttur.

ii) Eğer e time-like ise φ regle yüzeyi $\mathbb{I}L^3$ de bir time-like regle yüzeydir.

İspat:

i) e space-like olsun. $\{e, t, g\}$, $\mathbb{I}L^3$ için ortonormal baz ve $\mathbb{I}L^3$ ün indeksi 1 olduğundan Teorem 3.1.2 den t ve g vektörlerinden bir tanesi time-like vektör olmalıdır.

Tanım 5.1.3 ve Tanım 5.1.4 den, U vektörü time-like (space-like) ise t ve g vektörleri de time-like (space-like) olmalıdır. Bu ise t ve g den bir tanesinin time-like olması ile çelişir. O halde e nin space-like olması durumunda φ üzerinde bir $\{e, t, g\}$ Frenet 3-ayaklısı tanımlanamaz.

e nin space-like, t ve g nin time-like vektörler olması durumu indeksi 2 olan uzayda yani \mathbb{R}^3_2 yarı-Öklidyen uzayında geçerli olacağından e nin space-like olması durumunda $\{e, t, g\}$ Frenet 3-ayaklısı \mathbb{R}^3_2 yarı-Öklidyen uzayında kurulabilir.

ii) e time-like ise φ nin birim normal vektörü U olmak üzere (5.2), (5.3) bağıntıları ve Teorem 3.3.2 den U space-likedir. O halde Teorem 3.2.2 den φ bir time-like regle yüzeydir.

e vektörünün space-like olması durumunda φ üzerinde bir $\{e, t, g\}$ Frenet 3-ayaklısı kurulamayacağından çalışmamız boyunca e vektörünü time-like olarak alacağız. Bu durumda Teorem 5.1.1 gereğince φ bir time-like regle yüzeydir.

e vektörü time-like olduğundan, H_0^2 yarı-hiperbolik uzayı üzerinde bir eğri çezecektir. Bu eğriye φ nin H_0^2 yarı-hiperbolik uzayına göre gösterge eğrisi, e vektörüne de **gösterge vektörü** denir. Gösterge eğrisi (e) ile gösterilir.

φ , \mathbb{L}^3 de bir regle yüzey ve (e) de φ nin gösterge eğrisi olsun. Eğer (e) nin yay-uzunluğu q ise Tanım 3.1.10 dan,

$$(5.4) \quad q = \int \left\| \frac{de}{ds} \right\| ds$$

dir.

Teorem 5.1.2.

φ , \mathbb{L}^3 de $\varphi(s, v) = \alpha(s) + v e(s)$ parametrik denklemi ile verilen bir time-like regle yüzey ve U da φ nin birim normal vektörü olsun Bu takdirde,

$$(5.5) \quad U(s, v) = \frac{\left(\frac{d\alpha}{ds} + v \frac{de}{ds} \right) \times e}{\left[\left(\left\langle \frac{d\alpha}{ds}, e \right\rangle \right)^2 + \left\| \frac{d\alpha}{ds} + v \frac{de}{ds} \right\|^2 \right]^{1/2}}$$

dir.

İspat:

φ time-like regle yüzey olduğundan Teorem 3.2.2 gereğince U space-likedir.

O halde, φ üzerindeki parametre eğrilerinin hız vektörleri φ_s ve φ_v olmak üzere,

(5.3) den $\varphi_s \times \varphi_v$ vektörü space-likedir.

Teorem 3.1.3 den,

$$\|\varphi_s \times \varphi_v\|^2 = \langle \varphi_s \times \varphi_v, \varphi_s \times \varphi_v \rangle$$

dir.

Teorem 3.3.1 ve (5.2) den,

$$(5.6) \quad \|\varphi_s \times \varphi_v\|^2 = \left(\left\langle \frac{d\alpha}{ds}, e \right\rangle \right)^2 + \left\| \frac{d\alpha}{ds} + v \frac{de}{ds} \right\|^2$$

elde edilir.

(5.2) ve (5.6) bağıntıları (5.3) de yerlerine yazılırsa,

$$U(s, v) = \frac{\left(\frac{d\alpha}{ds} + v \frac{de}{ds} \right) \times e}{\left[\left(\left\langle \frac{d\alpha}{ds}, e \right\rangle \right)^2 + \left\| \frac{d\alpha}{ds} + v \frac{de}{ds} \right\|^2 \right]^{1/2}}$$

bulunur.

Teorem 5.1.3.

φ , \mathbb{R}^3 de bir time-like regle yüzey olsun. φ nin bir $l = \varphi(s_0, v)$ doğrultmanına ait asimptotik normal doğrultu $g(s)|_{s=s_0}$ ise,

$$g(s)|_{s=s_0} = \frac{e \times e_s}{\|e_s\|} \Big|_{s=s_0}, \quad e_s = \frac{de}{ds}$$

dir.

İspat:

φ nin birim normal vektörü U olmak üzere Tanım 5.1.3 den,

$$g(s)|_{s=s_0} = \lim_{v \rightarrow \infty} U(s, v)$$

yazılabilir.

(5.5) bağıntısı bu son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$g(s)|_{s=s_0} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{d\alpha}{ds} + v \frac{de}{ds} \right) \times e}{\left[\left(\left\langle \frac{d\alpha}{ds}, e \right\rangle \right)^2 + \left\| \frac{d\alpha}{ds} + v \frac{de}{ds} \right\|^2 \right]^{1/2}}$$

bulunur. Buradan limit hesaplanırsa,

$$\begin{aligned}
g(s)|_{s=s_0} &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v \left[\left(\frac{1}{v} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{de}{ds} \right) \times e \right]}{\left[\left(\left\langle \frac{d\alpha}{ds}, e \right\rangle \right)^2 + v^2 \left\| \frac{1}{v} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{de}{ds} \right\|^2 \right]^{1/2}} \\
&= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{v \left[\left(\frac{1}{v} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{de}{ds} \right) \times e \right]}{v \left[\frac{1}{v^2} \left(\left\langle \frac{d\alpha}{ds}, e \right\rangle \right)^2 + \left\| \frac{1}{v} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{de}{ds} \right\|^2 \right]^{1/2}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$v \rightarrow -\infty$ için $\frac{1}{v} \rightarrow 0$ ve $|v| = -v$ olduğundan,

$$g(s)|_{s=s_0} = \frac{e \times \frac{de}{ds}}{\left\| \frac{de}{ds} \right\|} \Big|_{s=s_0}$$

bulunur. Eğer,

$$\frac{de}{ds} = e_s$$

olarak alınırsa,

$$g(s)|_{s=s_0} = \frac{e \times e_s}{\|e_s\|} \Big|_{s=s_0}$$

dir.

Teorem 5.1.4.

φ , \mathbb{R}^3 de bir time-like regle yüzey olsun. φ nin bir $\varphi(s, v_0)$ striksiyon noktasındaki merkez normali t ise,

$$(5.7) \quad t = -\frac{e_s}{\|e_s\|}$$

dir.

İspat:

φ nin $\varphi(s, v_0)$ striksiyon noktasındaki normal vektörünü n ile göstereyim. O halde

Tanım 5.1.4 den,

$$\langle n, e \rangle = 0$$

ve

$$\langle \mathbf{n}, \mathbf{e} \times \mathbf{e}_s \rangle = 0$$

dır. O halde bu son iki bağıntıdan,

$$\mathbf{n} // \mathbf{e}_s$$

bulunur..

Striksiyon noktasındaki birim normal vektör \mathbf{t} olduğundan,

$$\mathbf{t} = \pm \frac{\mathbf{e}_s}{\|\mathbf{e}_s\|}$$

dir.

Tanım 3.3.1 den,

$$\mathbf{e} \times \mathbf{t} = -\mathbf{g}$$

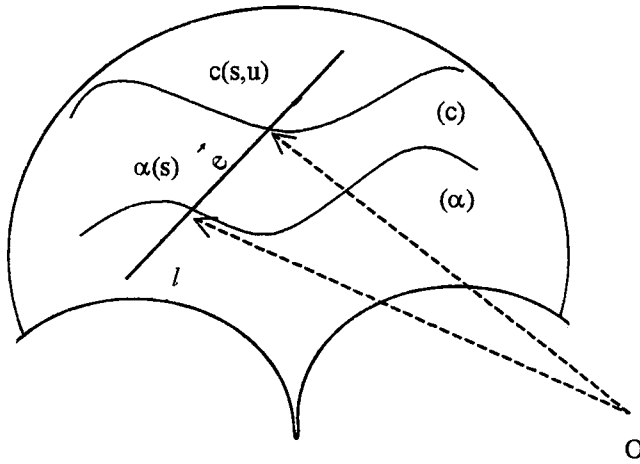
yazılabilir. O halde,

$$\mathbf{t} = -\frac{\mathbf{e}_s}{\|\mathbf{e}_s\|}$$

dir.

Tanım 5.1.6.

φ , \mathbb{L}^3 de bir time-like regle yüzey olsun. φ nin doğrultmanı dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken striksiyon noktalarının geometrik yerine, regle yüzeyin **striksiyon eğrisi** denir ve (c) ile gösterilir.



Şekil 5.4

φ time-like regle yüzeyinin striksiyon eğrisinin yer vektörü için Şekil 5.4 den,

$$(5.8) \quad c(s, u) = \alpha(s) + ue(s)$$

yazılabilir.

Striksiyon noktasında asimptotik normal, yüzeyin normaline dik olduğundan,

$$\langle \varphi_s \times \varphi_u, e \times e_s \rangle = 0$$

dır.

Teorem 3.3.1 deki vektörel çarpım özellikleri kullanılarak,

$$u = -\frac{\langle \alpha_s, e_s \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle}$$

bulunur. Böylece striksiyon eğrisinin yer vektörü için (5.8) den,

$$(5.9) \quad c(s) = \alpha(s) - \frac{\langle \alpha_s, e_s \rangle}{\langle e_s, e_s \rangle} e(s)$$

elde edilir.

Tanım 5.1.7.

φ, \mathbb{R}^3 de bir time-like regle yüzey olsun.

$$(5.10) \quad P_e = -\frac{\det(\alpha_s, e, e_s)}{\langle e_s, e_s \rangle}$$

değerine φ nin e vektörü için **drali (dağılma parametresi)** denir, [8].

Teorem 5.1.5.

φ, \mathbb{R}^3 de bir time-like regle yüzey ve $\{e, t, g\}$ de φ nin Frenet 3-ayaklısı olsun. φ nin (e) gösterge eğrisinin yay-uzunluğu q olmak üzere,

$$(5.11) \quad \begin{aligned} t &= -e_q \\ g &= e \times e_q \end{aligned}$$

dır.

İspat:

(5.4) bağıntısından,

$$q = \int \|e_s\| ds$$

veya

$$(5.12) \quad dq = \|e_s\| ds$$

elde edilir. Ayrıca,

$$e_q = \frac{de}{dq} = \frac{de ds}{ds dq}$$

yazılabilir.

(5.12) bağıntısı burada yerine yazılırsa,

$$e_q = \frac{e_s}{\|e_s\|}$$

bulunur. O halde (5.7) den,

$$(5.13) \quad e_q = -t$$

dir.

(5.13) den,

$$e \times e_q = e \times (-t)$$

yazılabilir.

Bu bağıntı ve Tanım 3.3.1 den,

$$(5.14) \quad e \times e_q = g$$

bulunur.

Teorem 5.1.6.

φ , \mathbb{R}^3 de bir time-like regle yüzey olsun. φ nin gösterge vektörü ve merkez normali, sırası ile, e ve t olmak üzere,

$$\langle t_q, e \rangle = 1$$

ve

$$\langle t_q, t \rangle = 0$$

dir.

İspat:

Teorem 5.1.4 den,

$$t = -\frac{e_s}{\|e_s\|}$$

dir. Buradan s-parametresine göre türev alınırsa,

$$t_s = \frac{-\langle e_s, e_s \rangle e_{ss} + \langle e_s, e_{ss} \rangle e_s}{\|e_s\|^3}$$

elde edilir. Bu son ifade ve (5.12) bağıntısı

$$t_q = \frac{dt}{dq} = \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dq}$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$(5.15) \quad t_q = \frac{-\langle e_s, e_s \rangle e_{ss} + \langle e_s, e_{ss} \rangle e_s}{\|e_s\|^4}$$

bulunur.

$\langle e, e \rangle = 1$ olduğundan $\langle e_s, e_s \rangle = -\langle e, e_{ss} \rangle$ dir. O halde (5.15) bağıntısından,

$$\langle t_q, e \rangle = 1$$

elde edilir. Ayrıca (5.7) ve (5.15) bağıntılarından,

$$\langle t_q, t \rangle = 0$$

bulunur.

φ time-like regle yüzeyinin (e) gösterge eğrisinin birim teğet vektörü T_0 ve H_0^2 yarı-hiperbolik uzayının birim normal vektörü de N_0 olsun.

$$\left\langle N_0 \times T_0, \frac{dT_0}{dq} \right\rangle = \gamma \text{ diyelim.}$$

φ nin α dayanak eğrisinin yay-parametresi s olmak üzere, (e) nin denklemini,

$$\alpha_e(q) = e(s)$$

dir. Burada q -parametresine göre türev alınırsa,

$$\frac{d\alpha_e}{dq} = \frac{de}{ds} \frac{ds}{dq}$$

elde edilir.

O halde, (5.7) ve (5.12) bağıntılarından,

$$(5.16) \quad \frac{d\alpha_e}{dq} = -t$$

bulunur.

(e) eğrisinin birim teğet vektörü T_0 ise (5.16) dan,

$$(5.17) \quad T_0 = -t$$

dir. O halde,

$$N_0 \in \text{Sp}\{e, g\}$$

yazılabilir.

N_0 ile e arasındaki hiperbolik açı ψ_0 ise,

$$(5.18) \quad N_0 = \cosh \psi_0 e + \sinh \psi_0 g$$

dir.

(5.17) ve (5.18) eşitlikleri,

$$\gamma = \left\langle N_0 \times T_0, \frac{dT_0}{dq} \right\rangle$$

ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$$\gamma = -(\cosh \psi_0 \langle t_q, g \rangle + \sinh \psi_0 \langle t_q, e \rangle)$$

bulunur.

Teorem 5.1.6 dan,

$$\gamma = -(\cosh \psi_0 \langle t_q, g \rangle + \sinh \psi_0)$$

veya

$$(5.19) \quad \langle t_q, g \rangle = -\frac{1}{\cosh \psi_0} (\gamma + \sinh \psi_0)$$

elde edilir.

$$\langle t_q, g \rangle = \bar{\gamma}$$

ile gösterilirse,

$$(5.20) \quad \bar{\gamma} = -\frac{1}{\cosh \psi_0} (\gamma + \sinh \psi_0)$$

bulunur.

Teorem 5.1.5, Teorem 5.1.6 ve (5.20) bağıntısından aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 5.1.1.

φ , Π^3 de bir time-like regle yüzey, $\{e, t, g\}$, φ nin Frenet 3-ayaklısı ve q da φ nin

(e) gösterge eğrisinin yay-uzunluğu olsun. Bu takdirde,

$$(5.21) \quad \begin{cases} e_q = -t \\ t_q = \bar{\gamma}g - e \\ g_q = -\bar{\gamma}t \end{cases}$$

dir.

Tanım 5.1.8.

(5.21) ile verilen denklemlere φ time-like regle yüzeyinin H_0^2 yarı-hiperbolik uzayına göre Frenet denklemleri denir. Bu denklemler matris formunda,

$$(5.22) \quad \begin{bmatrix} e_q \\ t_q \\ g_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \bar{\gamma} \\ 0 & -\bar{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ t \\ g \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir.

φ nin Frenet denklemlerinin üçüncüsünden,

$$\bar{\gamma} = -\langle g_q, t \rangle$$

dir. Teorem 5.1.3 ve (5.12) bağıntısından,

$$(5.23) \quad g_q = \frac{\langle e_s, e_s \rangle (e \times e_{ss}) - \langle e_s, e_{ss} \rangle (e \times e_{ss})}{\|e_s\|^4}$$

bulunur. O halde, (5.7) ve (5.23) den,

$$(5.24) \quad \bar{\gamma} = -\frac{\langle e, e_s \times e_{ss} \rangle}{\|e_s\|^3}$$

elde edilir.

Tanım 5.1.9.

φ , \mathbb{L}^3 de bir time-like regle yüzey olsun. Eğer φ nin komşu iki doğrultmanı kesişiyorsa φ ye **açılabilir** denir.

Teorem 5.1.7.

φ , \mathbb{L}^3 de açılabilir time-like regle yüzey, e , φ nin gösterge vektörü ve α da dayanak eğrisi olsun. Bu takdirde,

$$\det(\alpha_s, e, \dot{e}_s) = 0$$

dır.

İspat:

φ nin komşu iki doğrultmanı $l = e$ ve $l^* = e + e_s ds$ olsun. φ açılabilir olduğundan normal,

$$e \times (e + e_s ds) = e \times e_s ds$$

doğrultusundadır. O halde φ nin α dayanak eğrisinin teğet vektörü α_s olmak üzere,

$$\langle \alpha_s, e \times e_s ds \rangle = 0$$

dır.

Teorem 3.3.1 den,

$$\det(\alpha_s, e, e_s) = 0$$

bulunur.

Teorem 5.1.7 ve Tanım 5.1.7 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 5.1.2.

φ , \mathbb{R}^3 de bir time-like regle yüzey olsun. φ nin açılabilir olması için gerek ve yeter şart, dralinin sıfır olmasıdır.

Teorem 5.1.8.

φ , \mathbb{R}^3 de bir time-like regle yüzey olsun. Eğer φ nin dayanak eğrisi striksiyon eğrisi olarak alınır, φ nin açılabilir olması için gerek ve yeter şart, e gösterge vektörünün yüzeyin striksiyon eğrisinin teğeti olmasıdır.

İspat:

φ nin dayanak eğrisi striksiyon eğrisi olarak alınır (5.9) dan,

$$(5.25) \quad \langle c_s, e_s \rangle = 0$$

dır.

(\Rightarrow) φ açılabilir olsun. O halde Teorem 5.1.7 den,

$$(5.26) \quad \langle c_s, e \times e_s \rangle = 0$$

dır. (5.25) ve (5.26) bağıntılarından,

$$c_s // e$$

bulunur.

(\Leftarrow) $c_s // e$ olsun. O halde,

$$\langle c_s, e \times e_s \rangle = 0$$

elde edilir. Buradan, φ nin normali,

$$e \times e_s = e \times (e + e_s ds)$$

doğrultusundadır.

φ nin komşu iki doğrultmanı $l = e$ ve $l^* = e + e_s ds$ alınır. Tanım 5.1.9 den φ açılabilir.

Çalışmamız boyunca φ time-like regle yüzeyinin dayanak eğrisini striksiyon eğrisi olarak alacağız. Bu durumda φ nin parametrik denklemi,

$$(5.27) \quad \varphi(s, v) = c(s) + ve(s)$$

dir.

Teorem 5.1.9.

φ , \mathbb{R}^3 de bir time-like regle yüzey olsun. Eğer φ açılabilir ise φ nin striksiyon noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{e, t, g\}$ ve striksiyon eğrisinin bu noktadaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere,

$$e = T, \quad t = -N \quad \text{ve} \quad g = -B$$

dir.

İspat:

φ açılabilir olduğundan striksiyon eğrisinin teğeti T olmak üzere Teorem 5.1.8 den,

$$e = c_s = T$$

alınabilir. Burada s , φ nin (c) striksiyon eğrisinin yay-parametresidir. Ayrıca (5.11) bağıntısından,

$$t = -e_q,$$

$$t = -e_s s_q,$$

$$t = -T_s s_q$$

bulunur. Son eşitlikte (3.2) Frenet formülleri kullanılarak,

$$(5.28) \quad t = -\kappa s_q N$$

elde edilir.

(5.12) bağıntısından,

$$s_q = \frac{1}{\|e_s\|},$$

$$(5.29) \quad s_q = \frac{1}{\kappa}$$

bulunur.

(5.28) ve (5.29) dan,

$$t = -N$$

dir. Burada N , (c) striksiyon eğrisinin $c(s)$ noktasındaki asli normalidir.

φ nin g asimptotik normali için (5.11) den,

$$\begin{aligned} g &= e \times e_q, \\ g &= e \times (-t), \\ g &= -(e \times t), \\ g &= -[T \times (-N)], \\ g &= T \times N \end{aligned}$$

elde edilir. O halde Tanım 3.3.1 den,

$$g = -B$$

dir.

Teorem 5.1.10.

φ , Π^3 de bir time-like regle yüzey ve φ açılabilir olsun. φ nin striksiyon eğrisi (c) olmak üzere $\bar{\gamma}$ nin sabit olması için gerek ve yeter şart, (c) nin bir eğilim çizgisi olmasıdır.

İspat:

φ açılabilir olduğundan Teorem 5.1.9 gereğince φ nin striksiyon noktasındaki Frenet 3-ayaklısı $\{e, t, g\}$ ve striksiyon eğrisinin bu noktadaki Frenet 3-ayaklısı $\{T, N, B\}$ olmak üzere,

$$(5.30) \quad e = T, \quad t = -N \text{ ve } g = -B$$

dir.

(\Rightarrow) Kabul edelim ki, $\bar{\gamma}$ sabit olsun. O zaman (3.2), (5.24) ve (5.30) bağıntılarından,

$$(5.31) \quad \bar{\gamma} = \frac{\tau}{\kappa}$$

yazılabilir. O halde, Teorem 3.1.5 den (c) bir eğilim çizgisidir.

(\Leftarrow) Kabul edelim ki, (c) bir eğilim çizgisi olsun. O halde Teorem 3.1.5 den,

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$$

dir. Ayrıca φ açılabilir olduğundan (5.31) bağıntısından,

$$\bar{\gamma} = \frac{\tau}{\kappa}$$

yazılabilir. Buradan,

$$\bar{\gamma} = \text{sabit}$$

bulunur.



5.2. \mathbb{I}^3 Lorentz Uzayında Time-Like Bertrand Regle Yüzey Çiftleri

Tanım 5.2.1.

φ ve φ^* , \mathbb{I}^3 de iki time-like regle yüzey olsun. φ ile φ^* in striksiyon eğrilerinin, sırası ile, $c(s)$ ve $c^*(s)$ striksiyon noktalarındaki Frenet-3 ayaklıları,

$$\{e, t, g\}$$

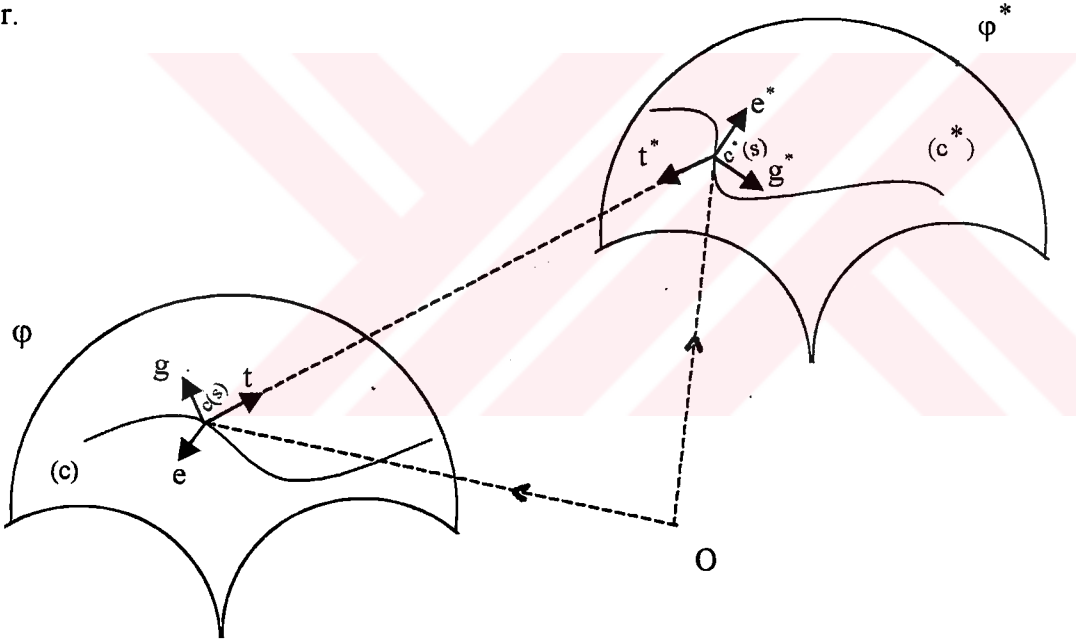
ve

$$\{e^*, t^*, g^*\}$$

olmak üzere,

$$\{t, t^*\}$$

lineer bağımlı ise (φ, φ^*) ikilisine, \mathbb{I}^3 de bir **time-like Bertrand regle yüzey çifti** denir.



Şekil 5.5

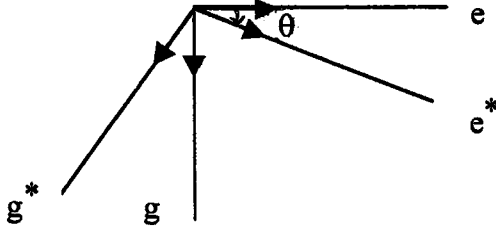
(φ, φ^*) , \mathbb{I}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti olsun. φ ve φ^* time-like regle yüzeyler olduğundan e ve e^* gösterge vektörleri time-like vektörlerdir. O halde $S_p\{e, g\}$ düzlemi bir Lorentz düzlemidir. Eğer e vektöründen e^* vektörüne olan hiperbolik açının ölçüsü θ ise Tanım 3.1.13 den,

$$\begin{bmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^* \\ g^* \end{bmatrix}$$

veya

$$(5.32) \quad \begin{aligned} e^* &= \cosh\theta e + \sinh\theta g \\ g^* &= \sinh\theta e + \cosh\theta g \end{aligned}$$

yazılabilir. (Şekil 5.6)



Şekil 5.6

(φ, φ^*) time-like Bertrand regle yüzey çifti olduğundan,

$$\{t, t^*\}$$

lineer bağımlıdır. O halde,

$$(5.33) \quad t = t^*$$

alınabilir. Buradan φ ve φ^* in, sırası ile, $c(s)$ ve $c^*(s)$ striksiyon noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları arasında (5.32) ve (5.33) bağıntılarından,

$$(5.34) \quad \begin{cases} e^* = \cosh\theta e + \sinh\theta g \\ t^* = t \\ g^* = \sinh\theta e + \cosh\theta g \end{cases}$$

bağıntısı vardır. Bu son bağıntı matris formunda,

$$\begin{bmatrix} e^* \\ t^* \\ g^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\theta & 0 & \sinh\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh\theta & 0 & \cosh\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ t \\ g \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilir. O halde Şekil 5.5 ve (5.34) den φ^* time-like regle yüzeyi φ ye bağlı olarak,

$$\varphi^*(s, v) = c^*(s) + v e^*(s),$$

$$\varphi^*(s, v) = [c(s) + Rt(s)] + v[\cosh\theta e(s) + \sinh\theta g(s)]$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada R , φ ve φ^* regle yüzeylerinin karşılıklı striksiyon noktaları arasındaki doğrusal uzaklık, θ da karşılıklı doğrultmanlar arasındaki açıdır.

Eğer $\theta = 0$ ise, (φ, φ^*) ikilisine \mathbb{R}^3 de **yönlendirilmiş (oriented) Bertrand regle yüzey çifti** denir. Bu durumda φ^* in denklemi,

$$\varphi^*(s, v) = c(s) + Rt(s) + ve(s)$$

dir.

Tanım 5.2.1 ve Teorem 5.1.1 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 5.2.1.

(φ, φ^*) , \mathbb{R}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti olsun. φ ve φ^* in karşılıklı striksiyon noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırası ile, $\{e, t, g\}$ ve $\{e^*, t^*, g^*\}$ olmak üzere, t ile t^* ve g ile g^* vektörleri space-like vektörler olduğundan e ve e^* vektörleri striksiyon eğrileri boyunca φ ve φ^* yüzeylerini oluştururken bu hareket esnasında t ile t^* ve g ile g^* vektörlerinin çizdikleri regle yüzeyler için \mathbb{R}^3 de Frenet 3-ayaklıları tanımlanamaz. O halde φ ve φ^* yüzeyleri oluşurken, t ile t^* ve g ile g^* vektörlerinin çizdikleri regle yüzeyler \mathbb{R}^3 de Bertrand regle yüzey çifti meydana getirmezler.

Teorem 5.2.1.

(φ, φ^*) , \mathbb{R}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti olsun. φ ve φ^* in karşılıklı striksiyon noktaları arasındaki uzaklık R ve karşılıklı doğrultmanları arasındaki açı θ olmak üzere,

$$R = s \cdot t \cdot \theta \text{ ve } \theta = s \cdot t \cdot R.$$

dır.

İspat:

φ ve φ^* in, sırası ile, $c(s)$ ve $c^*(s)$ striksiyon noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları,

$$\{e, t, g\}$$

ve

$$\{e^*, t^*, g^*\}$$

olsun.

(φ, φ^*) time-like Bertrand regle yüzey çifti olduğundan,

$$t = t^*$$

dır.

Teorem 5.1.4 ve yukarıdaki son eşitlikten,

$$t^* = -\frac{e_s^*}{\|e_s^*\|},$$

$$(5.35) \quad e_s^* = \lambda t, \quad \lambda = -\|e_s^*\|$$

elde edilir.

(5.34) bağıntısında e^* in s -parametresine göre türevi alınır,

$$(5.36) \quad e_s^* = \sinh\theta\theta_s e + \cosh\theta\theta_s g + \cosh\theta e_s + \sinh\theta g_s$$

bulunur.

q , φ nin (e) gösterge eğrisinin yay-parametresi olmak üzere (5.36) dan,

$$e_s^* = \sinh\theta\theta_s e + \cosh\theta\theta_s g + \cosh\theta e_q q_s + \sinh\theta g_q q_s$$

elde edilir.

(5.21) H_0^2 yarı hiperbolik uzayına göre Frenet denklemleri burada kullanılarak,

$$(5.37) \quad e_s^* = \sinh\theta\theta_s e + \cosh\theta\theta_s g - (\cosh\theta + \bar{\gamma} \sinh\theta) q_s t$$

bulunur.

(5.35) ve (5.37) bağıntılarından,

$$\theta_s (\sinh\theta e + \cosh\theta g) = 0$$

olmalıdır. Buradan,

$$\theta_s = 0,$$

$$\theta = \text{sabit}$$

dir.

φ^* in dayanak eğrisi striksiyon eğrisi olduğundan (5.9) bağıntısı gereğince,

$$\langle c_s^*, e_s^* \rangle = 0$$

yazılabilir.

Şekil 5.5 ve (5.35) den,

$$\langle (c + Rt)_s, t \rangle = 0$$

dır. Burada s -parametresine göre türev alınır,

$$(5.38) \quad \langle c_s + R_s t + R t_s, t \rangle = 0$$

bulunur.

t birim vektör olduğundan,

$$(5.39) \quad \langle t, t_s \rangle = 0$$

dir.

φ nin dayanak eğrisi striksiyon eğrisi olduğundan (5.9) bağıntısı gereğince,

$$\langle c_s, e_s \rangle = 0,$$

$$(5.40) \quad \langle c_s, t \rangle = 0$$

elde edilir.

(5.39) ve (5.40) bağıntıları (5.38) de yerlerine yazılırsa,

$$R_s = 0$$

$$R = \text{sabit}$$

bulunur.

Teorem 5.2.2.

(φ, φ^*) , $\mathbb{I}L^3$ de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti ve φ açılabilir olsun φ^* in açılabilir olması için gerek ve yeter şart, φ nin striksiyon eğrisinin eğriliği, κ , ve burulması, τ , arasında,

$$(1 - \kappa R) \sinh \theta - \tau R \cosh \theta = 0$$

bağıntısının olmasıdır.

İspat:

φ ve φ^* in, sırası ile, $c(s)$ ve $c^*(s)$ striksiyon noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları $\{e, t, g\}$ ve $\{e^*, t^*, g^*\}$, striksiyon eğrilerinin bu noktalardaki Frenet 3-ayaklıları da, sırası ile, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun.

φ açılabilir olduğundan Teorem 5.1.9 gereğince,

$$(5.41) \quad e = T, \quad t = -N, \quad g = -B$$

dir.

(\Rightarrow) Kabul edelim ki φ^* açılabilir olsun. O halde Teorem 5.1.9 dan,

$$(5.42) \quad e^* = T^*, \quad t^* = -N^* \quad \text{ve} \quad g^* = -B^*$$

dir.

(φ, φ^*) , time-like Bertrand regle yüzey çifti olduğundan (5.41) ve (5.42) bağıntıları (5.34) de yerlerine yazılırsa,

$$(5.43) \quad T^* = \cosh\theta T - \sinh\theta B$$

elde edilir.

φ ve φ^* in karşılıklı striksiyon noktaları arasındaki sabit uzaklık R olmak üzere Şekil 5.5 ve (5.41) den,

$$c^* = c + Rt,$$

$$(5.44) \quad c^* = c - RN$$

dir.

φ^* açılabilir olduğundan Teorem 5.1.8 gereğince,

$$c_s^* = \lambda e^*$$

yazılabilir.

(5.42), (5.43) ve (5.44) bağıntıları bu son eşitlikte yerlerine yazılırsa,

$$c_s - RN_s = \lambda (\cosh\theta T - \sinh\theta B)$$

bulunur.

s , φ nin (c) striksiyon eğrisinin yay-parametresi olmak üzere (3.2) Frenet formülleri burada kullanılarak,

$$(1 - \kappa R)T - \tau RB = \lambda \cosh\theta T - \lambda \sinh\theta B,$$

$$\frac{1 - \kappa R}{\cosh\theta} = \frac{\tau R}{\sinh\theta},$$

$$(1 - \kappa R)\sinh\theta - \tau R\cosh\theta = 0$$

elde edilir.

(\Leftarrow) φ nin striksiyon eğrisinin eğrilik ve burulması arasında,

$$(1 - \kappa R)\sinh\theta - \tau R\cosh\theta = 0$$

bağıntısı sağlansın.

(5.44) bağıntısında s -parametresine göre türev alınır ve (3.2) Frenet formülleri kullanılırsa,

$$c_s^* = (1 - \kappa R)T - \tau RB$$

bulunur.

Son iki eşitlikten,

$$(5.45) \quad c_s^* = \frac{\tau R}{\sinh \theta} (\cosh \theta T - \sinh \theta B)$$

elde edilir.

φ açılabilir olduğundan (5.41) ve (5.34) bağıntılarından,

$$e^* = \cosh \theta T - \sinh \theta B$$

bulunur. Bu son eşitlik (5.45) de yerine yazılırsa,

$$c_s^* // e^*$$

elde edilir. O halde Teorem 5.1.8 den φ^* açılabiliridir.

Teorem 5.1.9, Teorem 5.2.2 ve Tanım 3.1.11 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 5.2.2.

(φ, φ^*) , \mathbb{L}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti ve (c) ile (c^*) da, sırası ile, φ ve φ^* in striksiyon eğrileri olsun. Eğer φ açılabilir ve φ nin (c) striksiyon eğrisinin eğriliği, κ , ve burulması, τ , arasında

$$(1 - \kappa R) \sinh \theta - \tau R \cosh \theta = 0$$

bağıntısı varsa, (c, c^*) ikilisi, \mathbb{L}^3 de bir time-like Bertrand eğri çiftidir. Ayrıca bu durumda (c) ve (c^*) in karşılıklı noktalarındaki teğet vektörleri arasındaki açı $-\theta$ dır.

Teorem 5.2.3.

(φ, φ^*) , \mathbb{L}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti ve φ ile φ^* in striksiyon eğrilerinin eğrilikleri sırası ile κ ve κ^* , burulmaları da sırası ile τ ve τ^* olsun. Eğer φ ve φ^* açılabilir ise,

$$\frac{\tau^*}{\kappa^*} = \frac{\kappa \sinh \theta + \tau \cosh \theta}{\kappa \cosh \theta + \tau \sinh \theta}$$

dır. Burada s ve s^* , sırası ile, φ ve φ^* in striksiyon eğrilerinin yay-parametreleridir.

İspat:

φ ve φ^* in striksiyon noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırası ile, $\{e, t, g\}$ ve $\{e^*, t^*, g^*\}$, striksiyon eğrilerinin bu noktalardaki Frenet 3-ayaklıları da, sırası ile, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun.

φ ve φ^* açılabilir olduğundan Teorem 5.1.9 gereğince,

$$e = T, t = -N, g = -B$$

ve

$$e^* = T^*, t^* = -N^* \text{ ve } g^* = -B^*$$

yazılabilir.

Bu bağıntılar (5.34) de yerlerine yazılırsa,

$$(5.46) \quad \begin{cases} T^* = \cosh\theta T - \sinh\theta B \\ N^* = N \\ B^* = -\sinh\theta T + \cosh\theta B \end{cases}$$

bulunur.

φ^* in striksiyon eğrisinin eğriliği için (3.2) Frenet formüllerinden,

$$(5.47) \quad T_s^* = \kappa^* N^*$$

yazılabilir.

(5.46) bağıntısından T^* in s^* -parametresine göre türevi alınır ve (3.2) Frenet formülleri kullanılırsa,

$$(5.48) \quad T_s^* = \frac{ds}{ds^*} (\kappa \cosh\theta + \tau \sinh\theta) N$$

elde edilir.

(5.47) ve (5.48) bağıntılarından,

$$(5.49) \quad \kappa^* = \frac{ds}{ds^*} (\kappa \cosh\theta + \tau \sinh\theta)$$

dır.

Benzer şekilde φ^* in striksiyon eğrisinin burulması için (3.2) Frenet formüllerinden,

$$B_s^* = -\tau^* N^*$$

yazılabilir.

(5.46) bağıntısı ve Frenet formülleri burada kullanılarak,

$$(5.50) \quad \tau^* = \frac{ds}{ds^*} (\kappa \sinh\theta + \tau \cosh\theta)$$

bulunur.

(5.49) ve (5.50) bağıntılarından,

$$(5.51) \quad \frac{\tau^*}{\kappa^*} = \frac{\kappa \sinh\theta + \tau \cosh\theta}{\kappa \cosh\theta + \tau \sinh\theta}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.5 ve Teorem 5.2.3 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 5.2.3.

(φ, φ^*) , \mathbb{R}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti ve φ ile φ^* açılabilir olsun.

Bu takdirde, φ nin striksiyon eğrisinin eğilim çizgisi olması için gerek ve yeter şart,

φ^* ın striksiyon eğrisinin eğilim çizgisi olmasıdır.

5.3. \mathbb{L}^3 Lorentz Uzayında Time-Like Bertrand Regle Yüzey Çiftlerinin Frenet Vektörlerinin Çizdikleri Regle yüzeylerin Dralleri

Teorem 5.3.1.

(φ, φ^*) , \mathbb{L}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti olsun. φ nin striksiyon eğrisi boyunca e, t ve g Frenet vektörlerinin çizdikleri regle yüzeylerin dralleri sırası ile P_e, P_t ve P_g , φ^* in striksiyon eğrisi boyunca e^*, t^* ve g^* Frenet vektörlerinin çizdikleri regle yüzeylerin dralleri de sırası ile P_{e^*}, P_{t^*} ve P_{g^*} olmak üzere,

$$i) P_{e^*} = \frac{\cosh \theta}{\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta} P_e + \frac{\bar{\gamma} \sinh \theta}{\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta} P_g + \frac{R(\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta)}{\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta}$$

Eğer, g_s^* vektörü null vektör değil ise,

$$P_{g^*} = \frac{\sinh \theta}{\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta} P_e + \frac{\bar{\gamma} \cosh \theta}{\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta} P_g + \frac{R(\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta)}{\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta}$$

$$ii) \text{ Eğer } \psi_0 \neq \begin{cases} \ln(-\gamma) & , \gamma < 0 \\ \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right) & , \gamma > 0 \end{cases} \text{ ise,}$$

$$P_{t^*} = P_t = -\frac{1}{\gamma^2 - 1} P_e + \frac{\gamma^{-2}}{\gamma^2 - 1} P_g$$

dir.

İspat:

i) φ nin e gösterge vektörü için drali (5.10) bağıntısından,

$$P_e = -\frac{\det(c_s, e, e_s)}{\langle e_s, e_s \rangle}$$

dir.

$$e_s = e_q q_s$$

olduğundan (5.21) H_0^2 yarı-hiperbolik uzayına göre Frenet denklemlerinden,

$$e_s = -q_s t$$

bulunur. Bu son eşitlik yukarıda yerine yazılırsa,

$$(5.52) \quad P_e = \frac{\det(c_s, e, t)}{q_s}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, φ^* in e^* gösterge vektörü için drali (5.10) bağıntısından,

$$(5.53) \quad P_{e^*} = -\frac{\det(c_s^*, e^*, e_s^*)}{\langle e_s^*, e_s^* \rangle}$$

dir.

(φ, φ^*) , time-like Bertrand regle yüzey çifti olduğundan φ ile φ^* in karşılıklı striksiyon noktaları arasındaki uzaklık R olmak üzere Şekil 5.5 den,

$$c^* = c + Rt$$

dir. Ayrıca (5.34) den,

$$e^* = \cosh \theta e + \sinh \theta g$$

yazılabilir. Son iki eşitlikten türev alınıp (5.21) H_0^2 yarı-hiperbolik uzayına göre Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$(5.54) \quad c_s^* = c_s - Rq_s e + R\bar{\gamma}q_s g$$

ve

$$e_s^* = -(\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta)q_s t$$

bulunur. Bu bağıntılar (5.53) de yerlerine yazılırsa,

$$(5.55) \quad P_{e^*} = \frac{\cosh \theta}{\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta} \frac{\det(c_s, e, t)}{q_s} - \frac{\sinh \theta}{\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta} \frac{\det(c_s, t, g)}{q_s} + \frac{R(\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta)}{\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta}$$

elde edilir.

(φ, φ^*) , time-like Bertrand regle yüzey çifti olduğundan,

$$\langle t, t^* \rangle = 1 > 0,$$

$$\langle t, -e_s^* \rangle > 0,$$

$$\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta > 0$$

dır.

φ nin g asimptotik normalinin çizdiği regle yüzeyin drali için (5.10) bağıntısından,

$$P_g = -\frac{\det(c_s, g, g_s)}{\langle g_s, g_s \rangle}$$

yazılabilir.

$$g_s = g_q q_s$$

olduğundan (5.21) H_0^2 yarı-hiperbolik uzayına göre Frenet denklemlerinden,

$$g_s = -\bar{\gamma}q_s t$$

bulunur. Bu son eşitlik yukarıda yerine yazılırsa,

$$(5.56) \quad \bar{\gamma}P_g = -\frac{\det(c_s, t, g)}{q_s}$$

elde edilir.

(5.52) ve (5.56) bağıntıları (5.55) de yerlerine yazılırsa,

$$P_e = \frac{\cosh \theta}{\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta} P_e + \frac{\bar{\gamma} \sinh \theta}{\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta} P_g + \frac{R(\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta)}{\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta}$$

bulunur.

Benzer şekilde φ^* in g^* asimptotik normalinin çizdiği regle yüzeyin drali (5.10) bağıntısından,

$$(5.57) \quad P_{g^*} = -\frac{\det(c_s^*, g^*, g_s^*)}{\langle g_s^*, g_s^* \rangle}$$

dir.

(φ, φ^*) , time-like Bertrand regle yüzey çifti olduğundan, (5.34) bağıntısından,

$$g^* = \sinh \theta e + \cosh \theta g$$

yazılabilir. Burada s-parametresine göre türev alınıp (5.21) H_0^2 yarı-hiperbolik uzayına göre Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$g_s^* = -(\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta)q_s t$$

bulunur. Bu bağıntılar ve (5.54) bağıntısı (5.57) de yerlerine yazılırsa,

$$(5.58) \quad P_{g^*} = \frac{\sinh \theta}{\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta} \frac{\det(c_s, e, t)}{q_s} - \frac{\cosh \theta}{\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta} \frac{\det(c_s, t, g)}{q_s} + \frac{R(\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta)}{\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta}$$

elde edilir. Ayrıca, g_s^* vektörü null vektör olmadığından,

$$\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta \neq 0$$

dır.

(5.52) ve (5.56) bağıntıları (5.58) de yerlerine yazılırsa,

$$P_g = \frac{\sinh \theta}{\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta} P_e + \frac{\bar{\gamma} \cosh \theta}{\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta} P_g + \frac{R(\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta)}{\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta}$$

bulunur.

ii) φ nin t merkez normalinin çizdiği regle yüzeyin drali için (5.10) bağıntısından,

$$P_t = -\frac{\det(c_s, t, t_s)}{\langle t_s, t_s \rangle}$$

yazılabilir.

$$t_s = t_q q_s$$

olduğundan (5.21) H_0^2 yarı-hiperbolik uzayına göre Frenet denklemlerinden,

$$t_s = -q_s e + \bar{\gamma} q_s g$$

bulunur. Bu son eşitlik yukarıda yerine yazılırsa,

$$(5.59) \quad P_t = -\frac{1}{\bar{\gamma}^2 - 1} \frac{\det(c_s, e, t)}{q_s} - \frac{\bar{\gamma}^2}{\bar{\gamma}^2 - 1} \frac{\det(c_s, t, g)}{q_s}$$

elde edilir.

(5.52) ve (5.56) bağıntıları (5.59) da yerlerine yazılırsa,

$$P_t = -\frac{1}{\bar{\gamma}^2 - 1} P_e + \frac{\bar{\gamma}^2}{\bar{\gamma}^2 - 1} P_g$$

bulunur.

(φ, φ^*) time-like Bertrand regle yüzey çifti olduğundan

$$t = t^*$$

dır. O halde,

$$P_{t^*} = P_t = -\frac{1}{\bar{\gamma}^2 - 1} P_e + \frac{\bar{\gamma}^2}{\bar{\gamma}^2 - 1} P_g$$

dir.

$\gamma < 0$ için $\psi_0 \neq \ln(-\gamma)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \gamma &\neq -e^{\psi_0}, \\ \bar{\gamma} &\neq 1 \end{aligned}$$

ve

$\gamma > 0$ için $\psi_0 \neq \ln\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}\gamma &\neq e^{-\psi_0}, \\ \bar{\gamma} &\neq -1\end{aligned}$$

dir.

Teorem 5.3.1 ve Sonuç 5.1.2 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 5.3.1.

(φ, φ^*) , \mathbb{L}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti olsun. Bu takdirde,

i) φ açılabilir olsun. φ^* in açılabilir olması için gerek ve yeter şart,

$$\bar{\gamma} \sinh \theta P_g = -R(\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta)$$

olmasıdır.

ii) φ nin t merkez normalinin çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart, φ^* in t^* merkez normalinin çizdiği regle yüzeyin açılabilir olmasıdır.

iii) φ nin g asimptotik normalinin çizdiği regle yüzey açılabilir olsun. Eğer, g_s^* vektörü null vektör değil ise, φ^* in g^* asimptotik normalinin çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart,

$$\sinh \theta P_g = -R(\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta)$$

olmasıdır.

(φ, φ^*) , \mathbb{L}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti ve φ açılabilir olsun. O halde, Teorem 5.1.9 gereğince,

$$e = c_s = T, \quad t = -N \quad \text{ve} \quad g = -B$$

dir. Bu eşitlikler (5.24) ve (5.12) bağıntılarında yerine yazılır ve (3.2) Frenet formülleri kullanılırsa,

$$(5.60) \quad \begin{aligned}\bar{\gamma} &= \frac{\tau}{\kappa} \\ q_s &= \kappa\end{aligned}$$

elde edilir.

(5.60) bağıntıları (5.55) de yerlerine yazılırsa,

$$P_g = -\frac{(1 - \kappa R) \sinh \theta - \tau R \cosh \theta}{\kappa \cosh \theta + \tau \sinh \theta}$$

bulunur. O halde aşağıdaki sonuç ispatsız olarak verilebilir.

Sonuç 5.3.2.

(φ, φ^*) , \mathbb{L}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti ve φ açılabilir olsun φ^* ın açılabilir olması için gerek ve yeter şart, φ nin striksiyon eğriliği, κ , ve burulması, τ , arasında,

$$(1 - \kappa R) \sinh \theta - \tau R \cosh \theta = 0$$

bağıntısının sağlanmasıdır.

5.4. \mathbb{L}^3 Lorentz Uzayında Time-Like Bertrand Regle Yüzey Çiftlerinin Frenet Vektörlerinin Gösterge Eğrilerinin Yay-Uzunlukları

(φ, φ^*) , \mathbb{L}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti ve φ ile φ^* in gösterge vektörlerinin H_0^2 yarı-hiperbolik uzayı üzerindeki gösterge eğrilerinin yay-uzunlukları, sırası ile, S_e ve S_{e^*} olsun. φ ve φ^* in asimptotik ve merkez normalleri space-like vektörler olduğundan, bu vektörlerin gösterge eğrileri S_1^2 birim Lorentz küresi üzerinde olacaktır. Bu eğrilerin yay-uzunlukları da S_g, S_{g^*} ve S_t, S_{t^*} ile gösterilsin.

Teorem 5.4.1.

(φ, φ^*) , \mathbb{L}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti olsun. φ ile φ^* in Frenet vektörlerinin H_0^2 yarı-hiperbolik uzayı ve S_1^2 birim Lorentz küresi üzerindeki gösterge eğrilerinin yay-uzunlukları arasında,

$$i) S_{e^*} = \cosh\theta S_e + \operatorname{sgn}(\bar{\gamma}) \sinh\theta S_g, \quad \operatorname{sgn}(\bar{\gamma}) = \begin{cases} 1 & , \gamma < -\sinh\psi_0 \\ -1 & , \gamma > -\sinh\psi_0 \end{cases}$$

ii) Eğer, $\gamma < \tanh\theta \cosh\psi_0 - \sinh\psi_0$ ise,

$$S_{g^*} = (\sinh\theta S_e + \operatorname{sgn}(\bar{\gamma}) \cosh\theta S_g),$$

Eğer, $\gamma > \tanh\theta \cosh\psi_0 - \sinh\psi_0$ ise,

$$S_{g^*} = -(\sinh\theta S_e + \operatorname{sgn}(\bar{\gamma}) \cosh\theta S_g)$$

dir. Burada,

$$\operatorname{sgn}(\bar{\gamma}) = \begin{cases} 1 & , \gamma < -\sinh\psi_0 \\ -1 & , \gamma > -\sinh\psi_0 \end{cases}$$

dir.

$$ii) S_{t^*} = S_t = \int q_s |\gamma^2 - 1|^{1/2} ds$$

bağıntıları vardır.

İspat:

i) Tanım 3.1.10 dan,

$$S_e = \int \|e_s\| ds \text{ ve } S_g = \int \|g_s\| ds$$

yazılabilir.

$$e_s = e_q q_s \text{ ve } g_s = g_q q_s$$

eşitliklerinde (5.21) H_0^2 yarı-hiperbolik uzayına göre Frenet denklemleri kullanılarak,

$$e_s = -q_s t \text{ ve } g_s = -\bar{\gamma} q_s t$$

elde edilir. Bu son eşitlikler yukarıda yerlerine yazılırsa,

$$(5.61) \quad S_e = q \text{ ve } S_g = \int |\bar{\gamma}| q_s ds$$

bulunur.

Benzer şekilde Tanım 3.1.10, (5.34) ve (5.21) den,

$$(5.62) \quad \begin{aligned} S_{e^*} &= \int q_s |\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta| ds \\ S_{g^*} &= \int q_s |\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta| ds \end{aligned}$$

elde edilir.

i) (φ, φ^*) , time-like Bertrand regle yüzey çifti olduğundan,

$$(5.63) \quad \begin{aligned} \langle t, t^* \rangle &= 1 > 0, \\ \langle t, -e_s^* \rangle &> 0, \\ \cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta &> 0 \end{aligned}$$

dır.

O halde (5.62) bağıntısından,

$$(5.64) \quad S_{e^*} = \int q_s (\cosh \theta + \bar{\gamma} \sinh \theta) ds$$

elde edilir.

(5.61) ve (5.64) bağıntılarından,

$$S_{e^*} = \cosh \theta S_e + \text{sgn}(\bar{\gamma}) \sinh \theta S_g,$$

$$\gamma < -\sinh \theta \text{ ise } \bar{\gamma} > 0 \text{ olduğundan, } \text{sgn}(\bar{\gamma}) = 1$$

ve

$$\gamma > -\sinh \theta \text{ ise } \bar{\gamma} < 0 \text{ olduğundan, } \text{sgn}(\bar{\gamma}) = -1$$

dir.

ii) $\gamma < \tanh \theta \cosh \psi_0 - \sinh \psi_0$ ise $\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta > 0$ olduğundan, (5.62) den,

$$(5.65) \quad \begin{aligned} S_{g^*} &= \int q (\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta) ds \\ S_{g^*} &= \sinh \theta S_e + \text{sgn}(\bar{\gamma}) \cosh \theta S_g, \end{aligned}$$

dir.

$\gamma > \tanh \theta \cosh \psi_0 - \sinh \psi_0$ ise $\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta < 0$ olduğundan, (5.62) den,

$$S_g = - \int q (\sinh \theta + \bar{\gamma} \cosh \theta) ds$$

$$S_g = -(\sinh \theta S_e + \operatorname{sgn}(\bar{\gamma}) \cosh \theta S_g)$$

dir.

ii) Tanım 3.1.10 dan,

$$S_t = \iint \|t_s\| ds$$

yazılabilir.

$$t_s = t_q q_s$$

eşitliğinde (5.21) H_0^2 yarı-hiperbolik uzayına göre Frenet denklemleri kullanılarak,

$$t_s = -q_s e + \bar{\gamma} q_s g$$

elde edilir. Bu son eşitlik yukarıda yerine yazılırsa,

$$S_t = \int q_s |\bar{\gamma}^2 - 1|^{1/2} ds$$

bulunur.

(φ, φ^*) time-like Bertrand regle yüzey çifti olduğundan,

$$t = t^*$$

dir. O halde,

$$S_{t^*} = S_t = \int q_s |\bar{\gamma}^2 - 1|^{1/2} ds$$

dir.

5.5. \mathbb{L}^3 Lorentz Uzayında Time-Like Bertrand Regle Yüzey Çiftlerinin Frenet Ani Dönme Vektörleri

Teorem 5.5.1.

(φ, φ^*) , \mathbb{L}^3 de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti ve φ ile φ^* açılabilir olsun. φ ile φ^* in striksiyon eğrilerinin karşılıklı noktalarındaki Frenet ani dönme vektörleri, sırası ile, W ve W^* ise,

$$W^* = \frac{ds}{ds^*} W$$

dir. Burada s ve s^* , sırası ile, φ ve φ^* in striksiyon eğrilerinin yay-parametreleridir.

İspat:

φ ve φ^* in striksiyon noktalarındaki Frenet 3-ayaklıları, sırası ile, $\{e, t, g\}$ ve $\{e^*, t^*, g^*\}$, striksiyon eğrilerinin bu noktadaki Frenet 3-ayaklıları da, sırası ile, $\{T, N, B\}$ ve $\{T^*, N^*, B^*\}$ olsun.

φ ve φ^* açılabilir olduğundan Teorem 5.1.9 gereğince,

$$e = T, \quad t = -N, \quad g = -B$$

ve

$$e^* = T^*, \quad t^* = -N^* \quad \text{ve} \quad g^* = -B^*$$

yazılabilir.

Bu bağıntılar (5.34) de yerlerine yazılırsa,

$$(5.66) \quad \begin{cases} T^* = \cosh\theta T - \sinh\theta B \\ N^* = N \\ B^* = -\sinh\theta T + \cosh\theta B \end{cases}$$

bulunur.

φ nin (c) striksiyon eğrisinin $c(s)$ noktasındaki Frenet ani dönme vektörü W ise

Tanım 3.1.14 den,

$$(5.67) \quad W = -\tau T - \kappa B$$

yazılabilir.

Burada, κ ve τ , sırası ile, (c) eğrisinin $c(s)$ noktasındaki eğrilik ve burulmasıdır..

Benzer şekilde φ^* in (c^*) striksiyon eğrisinin $c^*(s)$ noktasındaki Frenet ani dönme vektörü W^* ise,

$$(5.68) \quad W^* = -\tau^* T^* - \kappa^* B^*$$

dır. Burada κ^* ve τ^* , sırası ile, (c^*) in $c^*(s)$ noktasındaki eğrilik ve burulmasıdır.

Teorem 5.2.3 den φ ve φ^* in (c) ve (c^*) striksiyon eğrilerinin eğrilik ve burulmaları için,

$$(5.69) \quad \begin{aligned} \kappa^* &= \frac{ds}{ds^*} (\kappa \cosh\theta + \tau \sinh\theta) \\ \tau^* &= \frac{ds}{ds^*} (\kappa \sinh\theta + \tau \cosh\theta) \end{aligned}$$

yazılabilir.

(5.66) ve (5.69) bağıntıları (5.68) de yerlerine yazılırsa,

$$W^* = \frac{ds}{ds^*} W$$

elde edilir.

Sonuç 5.5.1.

φ ve φ^* in striksiyon eğrilerinin striksiyon noktalarındaki W ve W^* Frenet ani dönme vektörleri yönündeki birim vektörler, sırası ile, ω_0 ve ω_0^* ise,

$$(5.70) \quad \omega_0^* = \omega_0$$

dir.

φ nin striksiyon eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere, T ile W arasındaki açı ψ ise,

$$(5.71) \quad \omega_0 = \cosh\psi T + \sinh\psi B$$

dir.

Sonuç 5.5.2.

ω_0 ve ω_0^* vektörlerinin H_0^2 yarı-hiperbolik uzayı üzerinde çizmiş oldukları küresel eğriler, sırası ile, (ω_0) ve (ω_0^*) olmak üzere, (ω_0) ve (ω_0^*) eğrileri space-like eğrilerdir.

Sonuç 5.5.3.

e ve e^* gösterge vektörleri φ ve φ^* regle yüzeylerini oluştururken ω_0 ve ω_0^* vektörlerinin φ ve φ^* in striksiyon eğrileri boyunca hareketleri ile elde edilen regle yüzeyler φ_{ω_0} ve $\varphi_{\omega_0^*}$ olmak üzere, $(\varphi_{\omega_0}, \varphi_{\omega_0^*})$ $\mathbb{I}L^3$ de bir time-like Bertrand regle yüzey çiftidir.

Teorem 5.5.2.

(φ, φ^*) , $\mathbb{I}L^3$ de bir time-like Bertrand regle yüzey çifti ve φ ile φ^* açılabilir olsun φ ve φ^* in striksiyon eğrileri boyunca ω_0 ve ω_0^* vektörlerinin çizdikleri regle yüzeylerin dralleri, sırası ile, P_{ω_0} ve $P_{\omega_0^*}$ olmak üzere, $\frac{d\omega_0}{ds}$ vektörü null vektör değil ise,

$$P_{\omega_0^*} = P_{\omega_0} + \frac{R(\kappa \cosh \psi - \tau \sinh \psi)(\tau \cosh \psi - \kappa \sinh \psi)}{\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 + (\kappa \cosh \psi - \tau \sinh \psi)^2}$$

dir. Burada s , φ nin (c) striksiyon eğrisinin yay-parametresidir.

İspat:

φ nin ω_0 vektörü için drali (5.10) bağıntısından,

$$(5.72) \quad P_{\omega_0} = -\frac{\det(c_s, \omega_0, \frac{d\omega_0}{ds})}{\left\langle \frac{d\omega_0}{ds}, \frac{d\omega_0}{ds} \right\rangle}$$

dir.

φ nin (c) striksiyon eğrisinin birim teğet vektörü T olmak üzere,

$$(5.73) \quad c_s = T$$

yazılabilir.

(5.71) bağıntısında s parametresine göre türev alınırsa,

$$(5.74) \quad \frac{d\omega_0}{ds} = \sinh \psi \frac{d\psi}{ds} T + (\kappa \cosh \psi - \tau \sinh \psi) N + \cosh \psi \frac{d\psi}{ds} B$$

elde edilir.

(5.71), (5.73) ve (5.74) bağıntıları (5.72) de yerlerine yazılırsa,

$$(5.75) \quad P_{\omega_0} = \frac{\sinh \psi (\kappa \cosh \psi - \tau \sinh \psi)}{\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 + (\kappa \cosh \psi - \tau \sinh \psi)^2}$$

bulunur.

Benzer şekilde, φ^* in ω_0^* vektörü için drali (5.10) bağıntısından,

$$(5.76) \quad P_{\omega_0^*} = - \frac{\det(c_s^*, \omega_0^*, \left(\frac{d\omega_0^*}{ds}\right)^2)}{\left\langle \frac{d\omega_0^*}{ds}, \frac{d\omega_0^*}{ds} \right\rangle}$$

dir.

(φ, φ^*) time-like Bertrand regle yüzey çifti olduğundan φ ile φ^* in striksiyon noktaları arasındaki uzaklık R olmak üzere Şekil 5.5 den,

$$c^* = c + Rt$$

yazılabilir.

Teorem 5.1.9 dan φ nin (c) striksiyon eğrisinin asli normal N olmak üzere,

$$t = -N$$

dir. O halde,

$$c^* = c - RN$$

bulunur.

Son eşitlikte s parametresine göre türev alınır ve (3.2) Frenet formülleri kullanılırsa,

$$(5.77) \quad c_s^* = c_s - \kappa RT - \tau RB$$

bulunur.

(5.70), (5.74) ve (5.77) bağıntıları (5.76) de yerlerine yazılırsa,

$$P_{\omega_0^*} = P_{\omega_0} + \frac{R(\kappa \cosh \psi - \tau \sinh \psi)(\tau \cosh \psi - \kappa \sinh \psi)}{\left(\frac{d\psi}{ds}\right)^2 + (\kappa \cosh \psi - \tau \sinh \psi)^2}$$

elde edilir. Ayrıca, $\frac{d\omega_0}{ds}$ vektörü null vektör olmadığından,

$$\left\langle \frac{d\omega_0}{ds}, \frac{d\omega_0}{ds} \right\rangle \neq 0$$

dir. O halde,

$$\frac{d\psi}{ds} \neq 0 \vee \kappa \cosh \psi - \tau \sinh \psi \neq 0$$

dır.

Sonuç 5.5.4.

$\kappa \cosh \psi - \tau \sinh \psi \neq 0$ ve φ nin ω_0 vektörünün çizdiği regle yüzey açılabilir olsun. φ^* in ω_0^* vektörünün çizdiği regle yüzeyin açılabilir olması için gerek ve yeter şart,

$$\tau R = 0$$

olmasıdır.



6. TARTIŞMA

1991 yılında yayınlanan makalede,[9], E^3 ; 3-boyutlu Öklid uzayında Bertrand regle yüzey çiftleri tanımlanmış ve Bertrand regle yüzey çiftlerinin karşılıklı striksiyon noktaları arasındaki uzaklığın ve karşılıklı doğrultmanları arasındaki açının sabit olduğu ifade edilmiştir.

Bu çalışmada; \mathbb{L}^3 , 3-boyutlu Lorentz uzayında sadece, gösterge vektörü time-like olan bir regle yüzey için Frenet 3-ayaklısının tanımlanabileceği gösterilmiştir. \mathbb{L}^3 de time-like Bertrand regle yüzey çiftleri tanımlanarak, time-like Bertrand regle yüzey çiftlerinin de karşılıklı striksiyon noktaları arasındaki uzaklık ve karşılıklı doğrultmanları arasındaki açı sabit olarak bulunmuştur. Ayrıca Lorentz uzayında hiperbolik açı kavramı geçerli olduğundan, E^3 de tanımlı Bertrand regle yüzey çiftlerinde açı ile ilgili ifadeler, \mathbb{L}^3 Lorentz uzayında tanımlı time-like Bertrand regle yüzey çiftlerinde hiperbolik açı olarak değişmiştir.

1996 yılında yapılan çalışmada,[10], E^3 de tanımlı Bertrand regle yüzey çiftlerinin asimptotik ve merkez normallerinin meydana getirdikleri regle yüzeylerin E^3 de birer Bertrand regle yüzey çifti oluşturduğu ifade edilmiştir. \mathbb{L}^3 de tanımlı time-like Bertrand regle yüzey çiftlerinin asimptotik ve merkez normallerinin çizdikleri regle yüzeylerin ise \mathbb{L}^3 de birer time-like Bertrand regle yüzey çifti oluşturmadığı görülmüştür.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

\mathbb{L}^3 Lorentz uzayının indeksi 1 olduğundan \mathbb{L}^3 de tanımlı bir regle yüzey için gösterge vektörü space-like olan bir Frenet 3-ayaklısı kurulamaz. Bu durumda \mathbb{L}^3 de sadece time-like Bertrand regle yüzey çifti tanımlıdır. Gösterge vektörünün space-like olması durumunda Frenet 3-ayaklısı indeksi 2 olan uzayda yani \mathbb{R}^3_2 yarı-Öklidyen uzayında mevcuttur.



8. KAYNAKLAR

- [1] O'NEILL, B., 1983. Semi Riemann Geometry, Accedemic Press, New York, London
- [2] EKMEKÇİ, N., Lorentz Manifolrları Üzerinde Eğilim Çizgileri, Doktora Tezi, Ankara Üniv., Fen Bilimleri Ens., 1991
- [3] DOLU, F., IL^n Lorentz Uzayında Bertrand Eğri Çifti ve Bazı Karakteristik Özellikleri, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniv., Fen Bilimleri Ens., 1995
- [4] BIRMAN, G.S. and NOMIZU, K. 1984. Trigonometry in Lorentzian Geometry, Am. Math., Mont.91 (9), 543-549
- [5] BEEM, J.K. and EHRLICH, P. E., 1981. Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker, Inc., New York.
- [6] UĞURLU, H. H., IR^3_1 Minkowski 3-Uzayında Lie Grup Yapıları ve C^∞ - Etkileri, Gazi Üniv., Fen Bilimleri Ens., 1991
- [7] AKUTAGAWA, K. and NISHIKAWA, S. 1990. The Gauss Map and Space-like Surfaces with Prescribed Mean Curvature in Minkowski 3-Space Töhoku Math., J.42, 67-82
- [8] TURGUT, A., IR^3_1 Minkowski Uzayında Regle Yüzeyler, Doktora Tezi, Gazi Üniv., Fen Bilimleri Ens.
- [9] RAVANI, B. and KU, T.S., Bertrand Offsets of Ruled and Developable Surfaces, Vol 23, No.2 (1991), PP 145-152
- [10] KASAP, E., Bertrand Regle Yüzey Çiftleri İle İlgili Yeni Karakteristik Özellikler, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniv., Fen Bilimleri Ens., 1996
- [11] HACISALİHOĞLU, H.H., 2 ve 3-Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri, Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak. Yayınları, No:18, 1990
- [12] ILGAZ, Z. A., 3-Boyutlu Diferensiyel Geometri, Karadeniz Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fak. Yayınları, No:5, 1984
- [13] UĞURLU, H.H., Commun. Fac. Sci Univ. Ank. Series A1 V.46.pp. 211-223(1997)

9. ÖZGEÇMİŞ

1973 yılında Samsun'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Samsun'da tamamladıktan sonra 1990 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü'nde yüksek öğrenimine başladı ve 1994 yılında mezun oldu. Aynı yıl Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Bölümü'nde Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 1995 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladı. 16.02.1998 tarihinden itibaren Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görevine devam etmektedir. Evlidir.

Emin KASAP

