

YÜKSEK ÇÖZÜNÜRLÜK İÇİN
TAYF KESTİRİM YÖNTEMLERİ

GAYE YEŞİM TAFLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ELEKTRİK-ELEKTRONİK
MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK ÇÖZÜNÜRLÜK İÇİN TAYF KESTİRİM YÖNTEMLERİ

GAYE YEŞİM TAFLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Hülya GÖKALP

SAMSUN – 2006

YÜKSEK ÇÖZÜNÜRLÜK İÇİN TAYF KESTİRİM YÖNTEMLERİ

ÖZET

Sürekli dalga frekans modülasyonunu kullanan kanal sonda cihazı ile elde edilen sinyalin güç tayfı radyo kanalının yankı profilini verir. Güç tayfındaki her bir frekans bileşeni bir yankı gecikmesine karşılık gelir. Bu çalışmada yüksek çözünürlük sağlayan tayf kestirim yöntemleri ile Hızlı Fourier dönüşümü ile elde edilen çözünürlüğe göre iyileşme sağlanıp sağlanamadığı incelendi. Tayf çözünürlüğünde iyileşme sağlayan yöntemler birbirine yakın yankıların ayırt edilmesini, dolayısı ile radyo kanalı hakkında daha iyi bilgi edinilmesini sağlayacaktır.

Önce ayrık Fourier dönüşümüne dayanan klasik yöntemler irdelendi ve bunlardan çözünürlük ve tayfsal sızıntı özelliklerine bakılarak Hamming penceresinin kullanıldığı değiştirilmiş periodogram seçildi. Sonra çözünürlükte iyileşme sağlayan ve sinyal modelleme sürecini kullanan parametrik yöntemlerden Burg, öz ilinti, Yule-Walker, kovaryans ve Prony yöntemleri incelendi. Bunlardan daha tutarlı sonuç veren ve çözünürlükte iyileşme sağlayan Prony yöntemi, yüksek çözünürlük yöntemi olarak seçildi.

Yapılan incelemelerde, işaretin Prony modellemesinden önce önsüzgeçleme uygulanmasının elde edilen tayfı iyileştirdiği görüldü. Hamming pencerelemeli değiştirilmiş periodogram ve Prony yöntemlerinin başarımları farklı kanal verileri için karşılaştırıldı. Bu incelemelerde, Prony modellemenin Fourier dönüşümü tabanlı yöneme göre 1.5-2 kat arasında değişen bir iyileşme sağladığı görüldü. Ayrıca band içi girişim olması durumunda, Prony yönteminin çok daha iyi tayf kestirimi verdiği gözlemlendi.

Anahtar Kelimeler: Prony, FFT, tayf, çözünürlük, MATLAB

HIGH RESOLUTION SPECTRUM ESTIMATION TECHNIQUES

ABSTRACT

Power spectrum of radio channel propagation data obtained with a FMCW (Frequency Modulated Continuous Wave) channel sounder provides multipath profile of the channel. Each frequency in this power spectrum corresponds to a multipath delay. In this work, an investigation was carried out to see whether an improvement in resolution can be obtained through the use of high resolution spectrum estimation techniques. An improvement in spectrum estimation will improve multipath resolution, hence will provide better estimation for radio channel characteristics.

First, the techniques based on discrete Fourier transform were investigated. Among these modified periodogram with Hamming windowing provided the best performance when both resolution and spectral leakage is considered. Then, high resolution techniques based on signal modelling were investigated. Among these were Burg algorithm, autocorrelation, Yule-Walker, covariance and Prony techniques. Prony technique which gave stable spectrum estimation and provided resolution improvement was selected as the high resolution spectrum estimation technique for this work.

Work carried out showed that pre-filtering improved Prony spectral estimation. Performances of DFT based technique and Prony technique were compared for channel data with different multipath characteristics. These investigations showed that Prony technique provided 1.5-2 times spectral resolution improvements. Moreover, Prony spectrum estimation outperformed modified periodogram with Hamming window in the presence of in-band interference.

Key Words: Prony, FFT, spectrum, resolution, MATLAB

TEŐEKKÜR

Bu alıőmam boyunca, değerli katkılarından dolayı danışman hocam Yrd. Do. Dr. Hlyla GÖKALP'e teőekkr ederim.

alıőmam sresince bana destek olan tm hocalarıma, arkadaőlarıma ve aileme teőekkr ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	3
3. METARYAL VE METOT	4
3.1. Tayf Analizi	4
3.2. Tayf Kestirim Yöntemleri	4
3.2.1. Fourier Dönüşümü	5
3.2.1.1. Sürekli Zamanlı İşaretlerin Fourier Dönüşümü	5
3.2.1.2. Ayrık Fourier Dönüşümü (Discrete Fourier Transform - DFT)	6
3.2.1.3. Ayrık Fourier Dönüşümünün Özellikleri	7
3.2.1.4. Zamanda Örnek Azaltma	8
3.2.1.5. Frekansta Örnek Azaltma	9
3.2.1.6. Pencereleme Fonksiyonu	10
3.2.2. Klasik Yöntemler	13
3.2.2.1. Periodogram	13
3.2.2.2. Değiştirilmiş Periodogram	15
3.2.2.3. Bartlett Yöntemi	17
3.2.2.4. Welch Yöntemi	18
3.2.2.5. Blackman-Tukey Yöntemi	19
3.2.2.6. Klasik Yöntemlerin Karşılaştırılması	21
3.2.3. Parametrik Yöntemler	28
3.2.3.1. AR (özbağlısımlı) Tayf Kestirimi	30
3.2.3.2. MA (Yürüyen Ortalamalı) Tayf Kestirimi	32
3.2.3.3. ARMA (Özbağlısımlı Yürüyen Ortalamalı) Tayf Kestirimi	33
3.4. Radyo Kanalı Yayınım Verileri	36
3.5. Tayf Kestirim Yöntemlerinin Seçimi	40
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	47
4.1. Giriş	47
4.2. Az Yankılı Kanal - Kanal 1	50
4.3. Önsüzgeçleme İle Prony Yöntemi	56
4.4. Çok Yankılı Kanal - Kanal 2	60
4.5. Çok Yankılı Başka Kanal – Kanal 3	66

4.6. Kanal 4 Verisi	73
4.7. Band İçi Girişim ve Prony-FFT Yöntemlerinin Karşılaştırılması	76
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	80
6. KAYNAKLAR	81
7. EKLER	83
EK A. MATLAB programında yazılmış Prony yöntemi ile FFT'nin sonuçlarını veren program	83
EK B. MATLAB programında yazılmış derece belirleme programı	88
ÖZGEÇMİŞ	90

KISALTMALAR

- AR: Özbağlımlı
ARMA: Özbağlımlı Yürüyen Ortalamalı
DFT: Ayrık Fourier Dönüşümü
ECG: Elektrokardiografi
EEG : Elektroensefalografi
FFT: Hızlı Fourier Dönüşümü
LPC: Doğrusal tahmin kodlama
LTI: Doğrusal Zamanla Değişmeyen
MA: Yürüyen ortalamalı
STMCB: Steiglitz ve McBride yöntemi

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil Numarası

Şekil 3.1. Pencere fonksiyonları	13
Şekil 3.2. $f_1=100\text{Hz}$ ve $f_2=101\text{Hz}$ frekanslarından oluşan işaretin tayfı	22
Şekil 3.3. Genlik değişiminin etkisi	23
Şekil 3.4. Genlik değişiminin etkisi	24
Şekil 3.5. İşaret gücü / gürültü gücü oranının etkisi	25
Şekil 3.6. Örnek aralığının değişiminin etkisi	25
Şekil 3.7. Pencere fonksiyonlarının etkisi	26
Şekil 3.8. Şekil 3.7'nin yakınlaştırılmış hali	27
Şekil 3.9. LTI sistemin gösterilimi	29
Şekil 3.10. FMCW işareti için zaman-frekans eğrisi	37
Şekil 3.11. İletilen işaret (bütün çizgi) ile farklı gecikmelerle alıcıdaki alınan yankıların (kesikli çizgiler) zaman-frekans eğrisi	37
Şekil 3.12. Alıcıya gelen işarettten zaman gecikme bilgisinin elde edilmesi	38
Şekil 3.13. Dedektör çıkışında bir yankı için zaman-frekans eğrisi	39
Şekil 3.14. a) Zaman düzleminde bir tarama b) 60MHz band genişliğindeki verinin tayfı c) 20MHz band genişliğindeki verinin tayfı d) 5MHz band genişliğindeki verinin tayfı	41
Şekil 3.15. Değiştirilmiş periodogram yönteminin tayfa etkisi	42
Şekil 3.16. Ön süzgeçleme kullanılan Prony yöntemi	42
Şekil 3.17. Ön süzgeçlemeli Yule-walker yöntemi ile tayf hesabı (derece=175)	43
Şekil 3.18. Değişik dereceler için Yule-Walker yöntemi	43
Şekil 3.19. Değişik dereceler için Burg yöntemi	44
Şekil 3.20. Öz vektör yöntemi ile tayf tahmini	45
Şekil 3.21. Süzgeçleme kullanılarak öz vektör yöntemi ile tayf tahmini	45
Şekil 4.1. Derece Belirleme Programının Akış Diyagramı	48
Şekil 4.2. Ana Programın Akış diyagramı	49
Şekil 4.3. a) Zaman düzleminde bir tarama, b)FFT analizinde kullanılan 666 örnek, c) Prony yöntemi ile tayf analizinde kullanılacak 333 örnek	50

Şekil 4.4. Şekil 4.3'ün yakınlaştırılmış hali	51
Şekil 4.5.a. Ardışıl 10 tarama için Prony-FFT ortalamaları	52
Şekil 4.5.b. Şekil 4.5.a'nın yakınlaştırılmış hali	52
Şekil 4.6. Farklı taramalar için FFT ortalamaları	53
Şekil 4.7. Farklı taramalar için Prony ortalamaları	54
Şekil 4.8.a. Prony yöntemi kullanılarak ilk altı taramanın güç-frekans grafikleri	55
Şekil 4.8.b. Prony yöntemi kullanılarak son dört taramanın güç-frekans grafikleri	56
Şekil 4.9. Ön süzgeçleme kullanılmadan kutup ve sıfırların dağılımı	58
Şekil 4.10. Ön süzgeçleme kullanıldığında kutup ve sıfırların dağılımı	58
Şekil 4.11. Ön süzgeçlemenin Prony yöntemine etkisi	59
Şekil 4.12. Ön süzgeçleme ile Prony yöntemi ile FFT'nin karşılaştırılması	59
Şekil 4.13. Kanal 2 verisi için işlem yapılan örnek aralıkları	60
Şekil 4.14.a. Ön süzgeçlemeli ve ön süzgeçlemesiz Prony yöntemi	61
Şekil 4.14.b. Şekil 4.14.a'nın yakınlaştırılmış hali	61
Şekil 4.15.a. FFT yöntemi ile ön süzgeçlemeli Prony yönteminin grafikleri	62
Şekil 4.15.b. Şekil 4.15.a'nın yakınlaştırılmış hali	62
Şekil 4.16. Ön süzgeçlemesiz Prony yönteminin kutup sıfır gösterilimi	63
Şekil 4.17. Ön süzgeçlemeli Prony yönteminin kutup-sıfır gösterilimi	64
Şekil 4.18. 10 tarama için FFT yöntemi ile ön süzgeçlemeli Prony yönteminin ortalaması	64
Şekil 4.19.a. Farklı taramalar için FFT ve ön süzgeçlemeli Prony yöntemi grafikleri	65
Şekil 4.19.b. Farklı taramalar için FFT ve ön süzgeçlemeli Prony yöntemi grafikleri	66
Şekil 4.20. Kanal 3 verisi için işlem yapılan örnek aralıkları	67
Şekil 4.21.a. FFT ve ön süzgeçleme ile Prony yönteminde 10 taramanın ortalaması	68
Şekil 4.21.b. Şekil 4.21.a'nın yakınlaştırılmış hali	68
Şekil 4.22. FFT ile sadece Prony yönteminin (ön süzgeçlemesiz) uygulanması	69
Şekil 4.23.a. FFT yöntemi ile Prony yöntemine ön süzgeçleme uygulanması	70
Şekil 4.23.b. Şekil 4.23.a'nın 70-170kHz frekans aralığına yakınlaştırılmış hali	70
Şekil 4.24. Ön süzgeçlemenin Prony yöntemine etkisi	71

Şekil 4.25. Ön süzgeçleme yapılmadan Prony yönteminde kullanılan kutup ve sıfırlar	72
Şekil 4.26. Ön süzgeçleme ile Prony yönteminde kullanılan kutup ve sıfırlar	72
Şekil 4.27. 3. tarama için FFT yöntemi ile Prony yöntemine ön süzgeçleme uygulanması	73
Şekil 4.28. a) Zaman düzleminde bir tarama, b) FFT analizinde kullanılan 666 örnek, c) Prony yöntemi ile tayf analizinde kullanılacak 333 örnek	74
Şekil 4.29. Ardışıl 10 tarama için ön süzgeçlemeli Prony ile FFT ortalamalarının tayfları	75
Şekil 4.30.a. 2. tarama için ön süzgeçlemeli Prony ve FFT grafikleri	75
Şekil 4.30.b. Şekil 4.30.a'nın yakınlaştırılmış hali	76
Şekil 4.31. İşaretten gürültüsüz ve gürültülü 250'şer örnekli iki kısım	77
Şekil 4.32.a. Band içi gürültünün olduğu örnek aralığında FFT ve ön süzgeçlemeli Prony yöntemi tayf grafikleri	78
Şekil 4.32.b. Şekil 4.32.a'nın yakınlaştırılmış hali	79

TABLULARIN LİSTESİ

Tablo 3.1: Periodogram yönteminin özellikleri	15
Tablo 3.2: Değiştirilmiş periodogram yönteminin özellikleri	16
Tablo 3.3: En çok kullanılan pencere fonksiyonlarının özellikleri	16
Tablo 3.4: Bartlett yönteminin özellikleri	18
Tablo 3.5: Welch yönteminin özellikleri	19
Tablo 3.6: Blackman-Tukey yönteminin özellikleri	20
Tablo 3.7: Parametrik olmayan yöntemlerin özellikleri	21

1.GİRİŞ

Bu çalışmanın konusu, ‘Yüksek Çözünürlük için Tayf Kestirim Yöntemleri’dir. Tayf analizi, bir işaretin frekans düzleminde gösterilimidir, diğer bir deyişle işaretin gücünün frekans düzleminde nasıl dağıldığını hesaplama işidir. Çözünürlük ise, işaretin frekans düzleminde ayırt edilebilmesinin ölçüsüdür.

Genel olarak, tayf kestirim yöntemleri, iki başlık altında toplanabilir. Bunlar, parametrik olmayan yöntemler ve parametrik yöntemlerdir. Parametrik olmayan yöntemler doğrudan işareti kullanarak tayf analizi yapar. Bu yöntemin temelini FFT oluşturur. Parametrik yöntemler ise, modeli esas alarak tayfı hesaplar, yani işaretin geçiş işlevinin biçimi biliniyordur ve buna göre değişkenler hesaplanır.

Bu çalışmada, sürekli dalga frekans modülasyonlu işaretin kullanıldığı kanal sonda cihazı ile elde edilen veriler kullanılarak, Prony yöntemi ve FFT uygulamalarının (periodogram yönteminin) nasıl sonuç verdiği incelenecektir. Kanal sonda cihazında 60 MHz lik iletim band genişliği her 4 milisaniyede bir taramıştır; bu taramada frekans zamanda doğrusal olarak artırılmıştır. Alıcıda yerel olarak üretilen FMCW işaretinin frekansları alıcıya gecikmeli olarak gelen frekans bileşenleri ile çarpıldığında toplam ve fark frekansları elde edilir. Alçak geçiren süzgeç kullanılarak sadece fark frekansları tutulur ve küçük örnekleme frekansı kullanılarak veriler sayısallaştırılıp daha sonra işlenmek üzere kaydedilir. Bu örneklenmiş işaret Fourier dönüşümü ile frekans düzlemine aktarıldığında elde edilen tayf aslında kanalın yankı profilidir. Bu tayftaki her bir frekans bileşeni ayrı bir yankı gecikmesine karşılık gelir; başka deyimle frekans değerleri doğrudan yankı gecikmesi ile ilgilidir. Frekans bileşenlerinin bağıl gücü ise yankı gücünü verir.

Bu çalışmanın amacı yüksek çözünürlüklü tayf kestirim yöntemleri kullanarak FFT ile belirlenenden daha fazla yankı belirleyebilmektir. Bu amaçla MUSIC, Burg vb. yüksek çözünürlüklü tayf kestirim algoritmaları kullanıldı. Bu yöntemlerden, daha tutarlı sonuçlar veren Prony yöntemi ile elde edilen tayflar incelendi. Çoğu çalışmada ileri sürüldüğü gibi Prony'nin gerçekten 1.5-2 kat daha iyi çözünürlük sağlayıp sağlamadığını görmek için Prony ile elde edilen tayf, FFT de iki kat örnek sayısı (iki kat daha uzun zaman dilimine karşılık gelir) kullanılarak elde edilen tayf ile karşılaştırıldı. Eğer Prony ile 1.5-2 kat daha iyi çözünürlük sağlanabilirse o günün teknolojik imkanları ile yapılan 60 MHz'lik kanal yayını ölçümleri sanki 120 MHz

iletim band genişliğinde yapılmış gibi kanal yankı profilleri elde edilecektir ve radyo kanalındaki yayınıma ilişkin daha detaylı bilgi elde edilebilecektir.

2.LİTERATÜR ÖZETİ

Bugüne kadar ‘Yüksek Çözünürlük İçin Tayf Kestirim Yöntemleri’ üzerine birçok araştırma ve inceleme yapılmıştır.

Bu incelemelerin temelini 1981’de S.L. Marple ve S. M. Kay tarafından yazılan makale oluşturmaktadır, [1]. Bu makalenin içeriğinde tayf kestirim yöntemleri anlatılmış ve şekiller üzerinde çözünürlük incelemesi yapılmıştır. Bunun yanı sıra tayf kestirim yöntemlerini ayrı ayrı inceleyen makaleler de bulunmaktadır [2-9]. Örneğin 2004 yılında, Prony yönteminin, STMCB (Steiglitz ve McBride yöntemi) ve LPC yöntemi ile karşılaştırıldığı bir makale yazılmıştır[10]. Ayrıca tayf kestirim yöntemlerini içeren kitaplar da bulunmaktadır [11-14].

Yapılan incelemelerde parametrik olmayan yöntemler kendi içinde değerlendirildiğinde, periodogram yönteminden daha kötü sonuçlar elde edildiği bilinmektedir.

Parametrik yöntemlerde ise, işaretin model biçiminin uygunluğuna bağlı olarak tayf tahmini değişmektedir. Aynı zamanda modelin uygunluğunun yanında, derece belirlenmesi de önemli bir faktördür.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Tayf Analizi

Sonlu bir veri aralığı için, toplam gücün frekans düzleminde nasıl dağıldığını hesaplama işlemi tayf analizi olarak adlandırılır.

Tayf analizi birçok uygulamada kullanılmaktadır: Ses analizi, radar sistemleri, kontrol sistemleri, ekonomi, meteoroloji, astronomi, tıp, sismoloji vb. Ses analizlerinde, ses işaretinin tayf modeli ses üretim sürecinin anlaşılmasında faydalıdır ve buna ek olarak ses sentezi ve ses tanımda da kullanılır. Radar ve sonar sisteminde, alınan işaretin tayf bileşenleri, bakış alanı içine yerleştirilen kaynak ya da hedefin yeri hakkında bilgi sağlar. Tıpta, hastadan alınan verilerin, örneğin elektrokardiografi (ECG) veya elektroensefalografi (EEG) gibi, tayf analizi tanı için faydalı metaryaller sağlayabilir. Sismolojide, zelzele olayı süresince (örneğin volkanik patlama ya da deprem) ve öncesinde kaydedilen işaretin tayf analizi yerin hareketi hakkında bilgiler verir ve yerin hareketi hakkında tahminde bulunulmasına yardımcı olur. Sismik tayf hesaplama, petrol ve benzin incelemelerinde, yeraltı jeolojik yapının tahmininde de kullanılır. Kontrol sistemlerinde, verilen sistemin dinamik davranışının karakterize edilmesinde tayf analizi yöntemleri kullanılır.

3.2. Tayf Kestirim Yöntemleri

Tayf kestirim yöntemleri, iki ana gruba ayrılabilir. Bunlardan ilki klasik veya parametrik olmayan yöntem olarak bilinir. Bu yöntem, öncelikle $r_x(k)$ verinin öz ilinti dizisini hesaplar. Güç tayfı ise, hesaplanan öz ilinti dizisinin Fourier dönüşümü alınarak bulunur. Diğer grup ise, klasik olmayan veya parametrik yöntemler olarak bilinir. Bu yöntemler ise, güç tayfının hesaplanmasında, modelleme sürecini kullanır.

Klasik tayf kestirim yöntemleri, periodogram, değiştirilmiş periodogram, Bartlett yöntemi, Welch yöntemi ve Blackman-Tukey yöntemidir.

Klasik olmayan veya parametrik tayf kestirim yöntemleri ise MA (yürüyen ortalamalı), AR (özbağlısımlı) ve ARMA (özbağlısımlı yürüyen ortalamalı) yöntemleridir.

Bu yöntemlerin dışında frekans hesaplama algoritmaları da vardır. Bunlar harmonik ayırıştırma, MUSIC, özvektör yöntemi ve minimum norm yöntemidir.

İşaretin veri uzunluğu kısa olduğunda, parametrik yöntemler, klasik yöntemlere göre daha iyi sonuçlar verirler,[14].

Parametrik yöntemler, verinin gerçekten modeli sağladığı durumlarda, parametrik olmayan yöntemlere göre çok daha doğru tayf tahmininde bulunurlar. Bununla birlikte, birçok durumda veri varsayılan modeli sağlamadığından, klasik yöntemler daha üstündür.

Birçok gerçek zaman işaretleri, rastsal işaretlerdir. Kısaca söylemek gerekirse, gözlenen aralığın dışında işaretin değişimi tam olarak belirlenemez ve ortalama varyans gibi istatistiksel terimler ile belirtilebilir.

Bu bölümde ilk olarak klasik yöntemlerin ana unsuru olan Fourier dönüşümü incelenecektir. Ayrık Fourier dönüşümü ve özellikleri, zamanda örnek azaltma, frekansta örnek azaltma ele alındıktan sonra pencere fonksiyonları incelenecektir. Pencerelemenin tayf kestirimine etkileri irdelendikten sonra klasik yöntemler ve ardından parametrik yöntemler incelenecektir.

3.2.1. Fourier Dönüşümü

Fourier dönüşümü ve Fourier serileri, doğrusal, zamanla değişmeyen (LTI-linear time invariant) sistemlerin tasarımı ve analizinde kullanılır.

Zaman düzleminde $x(t)$ biçiminde ifade edilen bir işaretin Fourier dönüşümü, $X(f)$ veya $X(w)$ ise, $x(t)$ ve $X(w)$ farklı düzlemlerde aynı bilgiyi taşır.

3.2.1.1. Sürekli Zamanlı İşaretlerin Fourier Dönüşümü

T periyotlu sürekli zamanlı $x(t)$ işareti, Fourier serisi ile

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad (3.1)$$

biçiminde ifade edilir. Burada, a_k Fourier serisi katsayılarıdır. O halde $x(t)$ biliniyorsa a_k katsayıları

$$a_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.2)$$

bağıntısı ile bulunabilir.

Bu bağıntıların kullanılabilmesi için Dirichlet koşullarının sağlanması gerekir. Bu koşullar aşağıda verilmiştir:

- $x(t)$ bir periyotta sonlu sayıda süreksizlik noktasına sahip olmalı
- $x(t)$ bir periyotta sonlu sayıda minimum ve maksimum noktasına sahip olmalı
- $x(t)$ integrali alınabiliyor olmalı yani $\int_T |x(t)| dt < \infty$ olmalı.

Sürekli zamanlı periyodik olmayan bir $x(t)$ işaretinin Fourier Dönüşümü

$$X(w) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \quad (3.3)$$

biçiminde tanımlanır. Benzer şekilde $X(w)$ nın ters Fourier dönüşümü alınarak

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(w)e^{j\omega t} dw \quad (3.4)$$

bağıntısı ile $x(t)$ elde edilebilir. Burada, $x(t)$ işaretinin bulunabilmesi için

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(w)| dw < \infty \text{ olmalıdır.}$$

3.2.1.2. Ayırık Fourier Dönüşümü (Discrete Fourier Transform - DFT)

Ayrık Fourier Dönüşümü ile, ayrık zamanlı işaretler frekans düzleminde gösterilir. DFT hem zaman hem de frekans bölgesinde ayrık ve sonludur. Bu nedenle DFT, sayısal işaret işleme, tayf analizi, süzgeç tasarımı gibi birçok uygulamada kullanılmaktadır.

Ayrık zamanlı bir $x(n)$ işaretinin Fourier dönüşümü $X(k)$ ile gösterilir ve

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad k = 0, \dots, N-1 \quad (3.5)$$

şeklinde tanımlanır. Ters ayrık Fourier dönüşümü ise, $X(k)$ dan $x(n)$ yi elde etmede kullanılır ve

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (3.6)$$

biçiminde ifade edilir.

Sürekli zamanlı işaretler, frekans düzleminde periyodik olmayan tayfa sahipken ayrık zamanlı işaretler periyodik tayfa sahiptir. Benzer şekilde zaman düzleminde periyodik olan işaretler, frekans düzleminde ayrık tayfa, zaman düzleminde periyodik olmayan sonlu enerjili işaretler sürekli tayfa sahiptir, [15].

3.2.1.3. Ayırık Fourier Dönüşümünün Özellikleri

$x(n)$, ayırık zamanlı işareti ve $X(k)$ da $x(n)$ nin Fourier dönüşümünü göstermek üzere, ayırık Fourier dönüşümünün temel özellikleri aşağıda verilmektedir:

- Periyodiklik özelliği

$x(n)$ periyodu N olan ayırık bir işaret ise, $x(n) = x(n + N)$ dir. O halde, $X(k) = X(k + N)$ olmalıdır.

$$x(n) = x(n + N) \leftrightarrow X(k) = X(k + N)$$

- Doğrusallık özelliği

Ayırık Fourier Dönüşümü her zaman doğrusaldır.

- Zamanda dairesel öteleme özelliği

$$x(n - m)_N \leftrightarrow X(k)e^{-j2\pi km/N}$$

- Frekansta dairesel öteleme özelliği

$$x(n)e^{j2\pi mn/N} \leftrightarrow X(k - m)_N$$

- Karmaşık eşlenik özelliği

$$x^*(n) \leftrightarrow X^*(-k)$$

Burada x^* , x işaretinin karmaşık eşleniğini göstermektedir.

- Dairesel katlama özelliği

$$x_1(n) \otimes x_2(n) \leftrightarrow X_1(k).X_2(k),$$

\otimes dairesel katlamayı göstermektedir. Burada, $X_1(k)$ ve $X_2(k)$ dizileri N noktalı diziler olup, zaman düzlemindeki işaretlerin N noktalı dairesel katlamaları alınmaktadır.

- İki işaretin çarpımı özelliği

$$x_1(n).x_2(n) \leftrightarrow \frac{1}{N} X_1(k) \otimes X_2(k)$$

Burada, $x_1(n)$, $x_2(n)$, $X_1(k)$ ve $X_2(k)$ N noktalı dizilerdir.

- Parseval teoremi

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) \leftrightarrow \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

Eğer $y(n) = x(n)$ ise $\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$ ile ifade edilir. Burada eşitliğin ikinci tarafındaki terim ile frekans düzleminde işaretin enerji dağılımı hesaplanır [16,17].

DFT'yi az sayıda çarpma işlemi ile ve daha hızlı hesaplamak için iki yaklaşım kullanılmaktadır. Bunlardan ilki, N örnekten oluşan ayrık bir işaretin DFT'sini hesaplamak yerine, bu işareti daha az örnekten oluşan işaretlere ayırıp, bu işaretlerin DFT'sini hesaplamaktır. Diğer bir yaklaşım ise, hızlı Fourier dönüşümüdür (Fast Fourier Transform - FFT). Hızlı Fourier dönüşümü, işaretin örnek sayısını ikinin kuvveti biçiminde seçerek işlemlerin hızlı olarak yapılmasını sağlayan bir yöntemdir.

3.2.1.4. Zamanda Örnek Azaltma

N noktalı bir işaretin ayrık Fourier Dönüşümünün $k = 0, \dots, N-1$ için

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \text{ olduğu biliniyor. Burada } e^{-j(2\pi/N)} = W_N \text{ yazılırsa}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn} \quad (3.7)$$

biçimini alır. Eğer $x(n)$ işareti, $x(2n)$ çift sayılı ve $x(2n+1)$ tek sayılı örneklerine ayrıştırılırsa DFT bağıntısı iki adet $N/2$ noktalı DFT'nin toplamı olarak yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{k(2n)} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{k(2n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_N^{k(2n)} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_N^{k(2n)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

olur ve $W_N^{k(2n)} = e^{-j(2\pi/N)k2n} = e^{-j(2\pi/(N/2))kn} = W_{N/2}^{kn}$ biçiminde yazılırsa,

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n) W_{N/2}^{kn} + W_N^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x(2n+1) W_{N/2}^{kn} \quad (3.9)$$

elde edilir. Böylece iki adet $N/2$ noktalı DFT bağıntısına dönüşür. Burada, $x_1(n)=x(2n)$ ve $x_2(n)=x(2n+1)$ biçiminde yazılırsa ve bunların ayrık Fourier dönüşümleri $X_1(k)$ ve $X_2(k)$ ile gösterilirse (3.9) bağıntısı

$$X(k) = X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad (3.10)$$

biçimini alır. DFT'nin periyodiklik özelliğinden $X_1(k)$ ve $X_2(k)$ için, $X_1(k + N/2) = X_1(k)$ ve $X_2(k + N/2) = X_2(k)$ ve simetri özelliğinden $W_N^{k+N/2} = -W_N^k$ bağıntıları elde edilir. Böylece, $X(k)$ nin ilk $N/2$ değeri ve son $N/2$ değeri

$$\begin{aligned} X(k) &= X_1(k) + W_N^k X_2(k) \quad k = 0, \dots, N/2 - 1 \\ X(k + N/2) &= X_1(k) - W_N^k X_2(k) \quad k = 0, \dots, N/2 - 1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

olur.

Sonuç olarak $x(n)$ işaretinin ayrık Fourier dönüşümü, $x(n)$ işaretinin tek ve çift sayılı örneklerinin $N/2$ noktalı ayrık Fourier dönüşümü alınarak elde edilebilir ve bu işlem en alt seviyeye (iki örnek kalana kadar) kadar devam ettirilebilir, [18]. O halde, Ayrık Fourier dönüşümü alınmış olan k değeri için, $X(k)$ hesaplanmasında N karmaşık çarpma ve $N-1$ karmaşık toplama gerektiğinden, bu işlem sayısı N örnek için N^2 karmaşık çarpma ve $N(N-1)$ toplama işlemine eşittir. FFT uygulandığında ise çarpma sayısı $N \log_2 N$ 'e eşittir. Bu da FFT'de, DFT'ye göre çok daha az çarpma işlemi yapıldığını ve işlem yükünün azaldığını gösterir.

3.2.1.5. Frekansta örnek azaltma

Hesap yükünün azaltılması için giriş işaret örneklerinin azaltılması yerine ayrık Fourier dönüşümü çıkışı $X(k)$, çift ve tek sayılı frekans örneklerine ayrıştırılır. Ayrık Fourier dönüşümü $X(k)$ 'nin, sırasıyla, çift sayılı frekans örnekleri ve tek sayılı frekans örnekleri

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(2k)n} \quad k = 0, \dots, N/2 - 1 \quad (3.12)$$

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{(2k+1)n} \quad k = 0, \dots, N/2 - 1 \quad (3.13)$$

biçiminde bulunur. Burada $W_N = e^{-j(2\pi/N)}$ dir. Çift sayılı frekans örnekleri

$$\begin{aligned} X(2k) &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{n(2k)} + \sum_{n=N/2}^{N-1} x(n) W_N^{n(2k)} \quad k = 0, \dots, N/2 - 1 \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n) W_N^{n(2k)} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x(n + N/2) W_N^{(2k)(n+N/2)} \quad k = 0, \dots, N/2 - 1 \end{aligned} \quad (3.14)$$

şeklinde ifade edilir. Periyodiklik özelliği kullanılarak $W_N^{(2k)(n+N/2)} = W_N^{(2k)n} W_N^{kN} = W_N^{(2k)n} = W_{N/2}^{kn}$ biçiminde yazıldığında

$$X(2k) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) + x(n + N/2)] W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, \dots, N/2 - 1 \quad (3.15)$$

elde edilir. Bu ifade, giriş işaretinin ilk ve son $N/2$ örnek değerlerinin toplamı olarak elde edilen $N/2$ uzunluğundaki işaretin ayrık Fourier dönüşümünü gösterir. Tek sayılı frekans örnekleri ise benzer yaklaşımla,

$$X(2k+1) = \sum_{n=0}^{N/2-1} [x(n) - x(n + N/2)] W_N^n W_{N/2}^{kn} \quad k = 0, \dots, N/2 - 1 \quad (3.16)$$

olarak bulunur. Bu ifade, giriş işaretinin ilk ve son $N/2$ örnek değerlerinin farkı olarak elde edilen $N/2$ uzunluğundaki işaretin $W_N^n = e^{-j(2\pi/N)}$ ile çarpımının ayrık Fourier dönüşümüdür.

Çift ve tek frekans örneklerini kapsayan dizilerin tekrar kendi tek ve çift frekanslarına ayrılmasına devam edilebilir. En alt seviyede sadece 2-noktalı bir DFT hesabı ile işaretin hızlı Fourier dönüşümü (FFT) elde edilebilir.

Sonuç olarak, FFT zamanda ve frekansta örnek azaltma yöntemleri ile ayrık Fourier dönüşümünün hızlı bir şekilde hesaplanmasını sağlar. FFT ile hesap yükü N^2 mertebesinden $N \log_2 N$ mertebesine düşürülür. Bu nedenle hesaplama için pratikte her zaman FFT kullanılır. FFT için $x(n)$ deki örnek sayısı ikinin kuvveti olmalı ya da bu sayıyı ikinin kuvveti yapacak kadar $x(n)$ dizisine sıfır eklenmelidir.

3.2.1.6. Pencereleme Fonksiyonu

Tayf incelemesi için bir işaretten sonlu sayıda örnek alındığında işaret dikdörtgen pencere fonksiyonu ile çarpılmış olur. Bu ise işaretten sonlu bir zaman diliminin alınıp kullanılması demektir. Bunun frekans düzlemindeki etkisi ise şöyledir; artık enerji sadece işaretteki frekans bileşenlerinde yoğunlaşmayacak yakındaki frekanslara da dağılacaktır. Bu durum '*tayfta sızma etkisi*' (spectral leakage) olarak bilinir. Sonsuz süreli işaret için ayrık değişimler gösteren tayf; sonlu süreli işaretler için sürekli değişim gösteren bir biçim alır. Sızma etkisi tayf incelemesinde istenmeyen sonuçlar doğurur. Böylece büyük enerjili bir frekans bileşeninin yakınındaki düşük güçte enerjisi olan bir frekans bileşeni ayırt edilemeyebilir. Tek frekans bileşenli bir sinüs işaretinden

sonlu süre örnek alınıp tayf incelendiğinde, sinüsün frekansında yüksek enerjili bir ana yuvarlak ve bunun yakınında daha düşük seviyede enerjisi olan ve ilgili frekanstan uzaklaştıkça enerjisi azalan yan yuvarlaklar vardır. Tayf incelemesi için kullanılan zaman dilimi uzatıldığında ana yuvarlak daralır. Bu ise birbirine yakın frekans bileşenlerinin daha iyi ayırt edilebilmesi yani çözünürlüğün artması demektir. Yan yuvarlakların düşük güçte olması yan yuvarlaklar civarında olan düşük enerjili frekans bileşenlerinin belirlenmesini sağlayacaktır.

DFT hesabı sırasında spektral sızmayı azaltmak amacıyla pencereleme kullanılır. Aynı zamanda düşük seviyedeki yan yuvarlaklar süzgeç tasarımında görülen Gibbs dalgalanmasının küçülmesini sağlar. Pencereleme yönteminde işaret DFT hesabı öncesinde, genliği kenarlara doğru yavaşça sifıra yaklaşan bir pencere fonksiyonu ile çarpılır. Bir işaretin pencere fonksiyonu ile çarpılması için uzunluğu işaretin uzunluğuna eşit bir pencere işareti oluşturulur.

Pencere fonksiyonu tasarımında frekans tepkesinin en dar ana yuvarlağa ve en düşük seviyede yan yuvarlağa sahip olması amaçlanır.

Değişik pencere fonksiyonları geliştirilmiştir. En çok kullanılan pencere fonksiyonları:

- Dikdörtgen Pencere

Dikdörtgen pencere fonksiyonu

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases} \quad (3.17)$$

ile ifade edilir. Yan yuvarlağın genliği ana yuvarlağın genliğinin 13dB altındadır, yan yuvarlağın genliğinin büyük olmasından dolayı, bu çoğu uygulamada yetersizdir. Aynı zamanda, dikdörtgen pencere fonksiyonu zaman düzleminde aniden sona erdiğinden, gibbs dalgalanmalarının oluşmasına neden olur.

- Üçgen Pencere

Üçgen pencere fonksiyonu,

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N-1}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 2 - \frac{2n}{N-1}, & \frac{N-1}{2} \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases} \quad (3.18)$$

ile ifade edilir. Yan yuvarlağın genliği ana yuvarlağın genliğinin 27dB altındadır.

- Hamming Penceresi

Hamming pencere fonksiyonu

$$w(n) = \begin{cases} 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases} \quad (3.19)$$

ile ifade edilir. Yan yuvarlağın genliği ana yuvarlağın genliğinin 43dB altındadır.

- Hanning Penceresi

Hanning pencere fonksiyonu

$$w(n) = \begin{cases} 0.5 \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \right], & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases} \quad (3.20)$$

ile ifade edilir. Yan yuvarlağın genliği ana yuvarlağın genliğinin 32dB altındadır.

- Blackman Penceresi

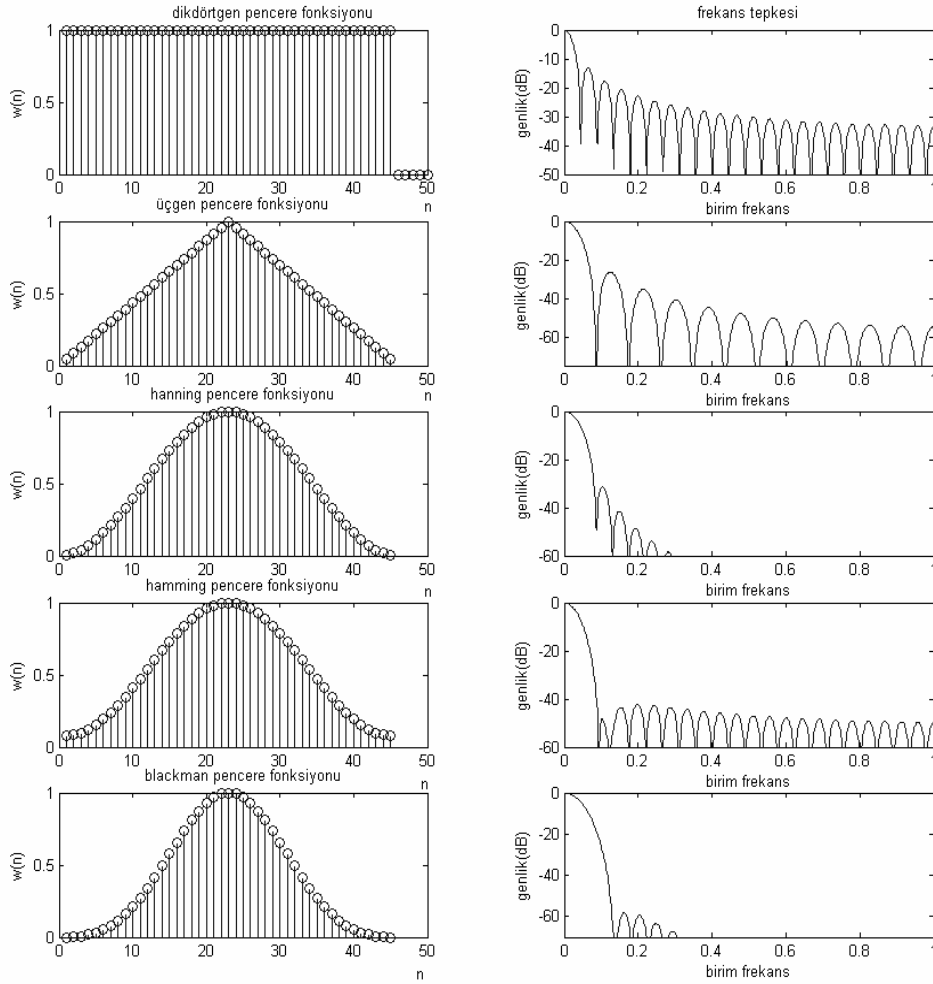
Blackman pencere fonksiyonu

$$w(n) = \begin{cases} 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right), & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & n \geq N \end{cases} \quad (3.21)$$

ile ifade edilir. Yan yuvarlağın genliği ana yuvarlağın genliğinin 58dB altındadır.

Şekil 3.1’de pencere fonksiyonları ve frekans tepkeleri bulunmaktadır ve çözünürlüğün en iyi olduğu (ana yuvarlağın en dar olduğu) dikdörtgen pencere fonksiyonudur. Ancak bu pencere fonksiyonu en yüksek yan yuvarlak seviyesine sahiptir. Bu nedenle birbirine yakın birden fazla frekans bileşeni olan işaretlerin tayf incelemesi için dikdörtgen pencere fonksiyonu uygun değildir. Bunun nedeni işarettaki en yüksek enerjili frekans bileşeninin etrafındaki daha düşük güçteki frekans bileşenleri yan yuvarlak seviyelerinin altında kalıp belirlenemeyebilir. Blackman penceresi yan yuvarlakları bayağı zayıflatırken ana yuvarlağı genişletmiştir. Yüksek güçteki frekans bileşenine uzakta olan zayıf frekans bileşenleri belirlenebilecekken yakın olanlar ayırt edilemeyecektir. Çünkü ana yuvarlağın genişlemesi çözünürlüğü azaltmıştır. Yüksek enerjili frekans bileşenine yakın bileşenlerin ayırt edilebilmesi (yüksek çözünürlük) ve

de uzaktakilerin belirlenmesi isteniyorsa hamming penceresi en uygun çözüm olarak görünmektedir.



Şekil 3.1. Pencere fonksiyonları

3.2.2. Klasik Yöntemler

Parametrik olmayan yöntemlerde güç tayfı, verinin öz ilinti dizisinin Fourier dönüşümü alınarak hesaplanır, yani güç tayfı, doğrudan işaret kullanılarak hesaplanır.

3.2.2.1. Periodogram

Durağan rastsal sürecin güç tayfı, sonsuz uzunluktaki veri için öz ilinti dizisi

$$r_x(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x(n+k)x^*(n) \quad (3.22)$$

olmak üzere, bu öz ilinti dizisinin Fourier dönüşümü

$$P_x(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_x(k) e^{-jk\omega} \quad (3.23)$$

biçiminde yazılır. Burada $x(n)$ işaretinin karmaşık eşleniği $x^*(n)$ ile temsil eder. Eğer $x(n)$ verisi, $n = 0, 1, \dots, N-1$ noktalarında yani sonlu uzunlukta tanımlı ise, öz ilinti dizisi $r_x(k)$ dan farklı olur ve

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n+k)x^*(n) \quad (3.24)$$

biçimini alır. $x(n)$ işaretinin $[0, N-1]$ aralığının dışında olan örnekleri, toplamın dışında tutulur ve öz ilinti dizisi

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n+k)x^*(n) \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.25)$$

biçiminde yazılır. $\hat{r}_x(k)$ öz ilinti dizisinin ayrık zaman Fourier dönüşümü alınarak, güç tayfı hesaplanır. Bu yöntem periodogram denir ve

$$P_{per}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-N+1}^{N-1} \hat{r}_x(k) e^{-jk\omega} \quad (3.26)$$

ile ifade edilir. Periodogram yönteminde, $\hat{r}_x(k)$ öz ilinti dizisi kullanılsa da, güç tayfı hesabında $x(n)$ dizisi ile doğrudan işlem yapılabilir. Burada $x_N(n)$ verisi, $x(n)$ verisinin $0 < n < N-1$ aralığındaki verileri olup, $x_N(n)$, $x(n)$ verisinin pencere fonksiyonu ile çarpılmış halidir yani $w_R(n)$, dikdörtgen pencere fonksiyonunu göstermek üzere

$$x_N(n) = w_R(n)x(n) \quad (3.27)$$

biçiminde yazılabilir. Öz ilinti dizisi, $x_N(n)$ terimleri cinsinden, * katlama işlemini ve * karmaşık eşleniği temsil etmek üzere,

$$\hat{r}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N(n+k)x_N^*(n) = \frac{1}{N} x_N(k) * x_N^*(-k) \quad (3.28)$$

şeklinde yazılır. $x_N(n)$ işaretinin ayrık zaman Fourier dönüşümü (DTFT) $x_N(e^{j\omega})$ ile gösterilir ve bağıntısı

$$x_N(e^{jw}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_N(n)e^{-jnw} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jnw} \quad (3.29)$$

bağıntısı ile verilir. Fourier dönüşümü ve katlama teoremi kullanılarak tayf,

$$\hat{P}_{per}(e^{jw}) = \frac{1}{N} X_N(e^{jw})X_N^*(e^{jw}) = \frac{1}{N} |X_N(e^{jw})|^2 \quad (3.30)$$

biçimini alır. Böylece, periodogram $x_N(n)$ dizisinin ayrık Fourier dönüşümünün karesi ile orantılıdır ve ayrık Fourier dönüşümü kullanılarak,

$$x_N(n) \xrightarrow{DFT} X_N(k) \Rightarrow \frac{1}{N} |X_N(k)|^2 = \hat{P}_{per}(e^{j2\pi k/N}) \quad (3.31)$$

biçiminde bulunur. Periodogramın özellikleri tablo 3.1'de verilmiştir,[12].

Tablo 3.1: Periodogram yönteminin özellikleri

$\hat{P}_{per}(e^{jw}) = \frac{1}{N} \left \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-jnw} \right ^2$	
Çözünürlük	$\Delta w = 0.89 \frac{2\pi}{N}$
Varyans	$Var\left\{\hat{P}_{per}(e^{jw})\right\} \approx P_x^2(e^{jw})$

3.2.2.2. Değiştirilmiş Periodogram

Periodogram, pencerelenmiş işaretin ($x_N(n) = w_R(n)x(n)$) Fourier dönüşümünün genliğinin karesi ile orantılıdır ve güç tayfı

$$\hat{P}_{per}(e^{jw}) = \frac{1}{N} |X_N(e^{jw})|^2 = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w_R(n)e^{-jnw} \right|^2 \quad (3.32)$$

ile ifade edilir. Periodogram yönteminde $x(n)$ işaretine, dikdörtgen pencere fonksiyonu uygulanır. $x(n)$ işaretine, $w_R(n)$ dikdörtgen pencere fonksiyonu uygulamak yerine genel bir $w(n)$ pencere fonksiyonu uygulanan periodogram yöntemine değiştirilmiş periodogram adı verilir ve güç tayfı

$$\hat{P}_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{NU} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w(n)e^{-jn\omega} \right|^2 \quad (3.33)$$

olarak ifade edilir. Burada, N pencere veri uzunluğu, U sabiti

$$U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |w(n)|^2 \quad (3.34)$$

şeklinindedir. Kısaca, değiştirilmiş periodogram, pencere fonksiyonu uygulanmış verinin periodogramıdır. Değiştirilmiş periodogramın özellikleri tablo 3.2’de verilmiştir,[12].

Tablo 3.2: Değiştirilmiş periodogram yönteminin özellikleri

$P_M(e^{j\omega}) = \frac{1}{NU} \left \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)w(n)e^{-jn\omega} \right ^2$	
$U = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w(n) ^2$	
Çözünürlük	Pencere fonksiyonuna bağlıdır
Varyans	$Var\{P_{per}(e^{j\omega})\} \approx P_x^2(e^{j\omega})$

Varyans değeri, periodogram yöntemi ile elde edilen varyans değeri ile aynıdır. O halde veriyi pencere fonksiyonu ile çarpmanın varyans değerini azaltmakta bir yararı bulunmamaktadır. Pencere fonksiyonunun yararı, yan bileşenlerin (sidelobe) genlik ya da güç seviyesini azaltmasıdır, bu durumda tayf çözünürlüğü kötüleşir. Tablo 3.3’te pencere fonksiyonlarının, 3dB değerindeki band genişliği (çözünürlük) değerleri verilmiştir.

Tablo 3.3: En çok kullanılan pencere fonksiyonlarının özellikleri

Pencere çeşidi	3dB band genişliği $(\Delta\omega)_{3dB}$
Dikdörtgen	$0.89(2\pi / N)$
Bartlett	$1.28(2\pi / N)$
Hanning	$1.44(2\pi / N)$
Hamming	$1.30(2\pi / N)$
Blackman	$1.68(2\pi / N)$

3.2.2.3. Bartlett Yöntemi

Bartlett yöntemi, güç tayfı hesaplamada tutarlı sonuçlar üretir. Bu özelliği ile ne periodogram yöntemine ne de değiştirilmiş periodogram yöntemine benzemektedir, [12]. Bu yöntemin incelenmesi veri uzunluğu N 'nin sonsuz olduğu durumda, periodogramın beklenen değerinin, $P_x(e^{j\omega})$ 'ya eşit olmasından kaynaklanır. Yani

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left\{ \hat{P}(e^{j\omega}) \right\} = P_x(e^{j\omega}) \quad (3.35)$$

biçimindedir. Bu yöntem, rastsal sürecin güç tayfının hesaplanmasında, periodogramın ortalamasının alınmasını önerir. $x_i(n)$ değerleri, $i = 1, 2, \dots, K$ ve $0 \leq n < L$ aralığında tanımlı ise $\hat{P}_{per}^{(i)}(e^{j\omega})$, $x_i(n)$ nin periodogramı olmak üzere

$$\hat{P}_{per}^{(i)}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x_i(n) e^{-jn\omega} \right|^2 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, K \quad (3.36)$$

ile ifade edilir. Bu periodogramın ortalaması

$$\hat{P}_x(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \hat{P}_{per}^{(i)}(e^{j\omega}) \quad (3.37)$$

biçimindedir. Bartlett yöntemi, $x(n)$ verisini, (aynı örneğin sadece birinde bulunması koşulu ile) L uzunluğunda K tane veriye böler, yani $N=KL$ 'dir. Bu durumda,

$$x_i(n) = x(n + iL) \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, L-1 \quad i = 0, 1, \dots, K-1 \quad (3.38)$$

olduğundan Bartlett güç tayfı,

$$\hat{P}_B(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} x(n + iL) e^{-jn\omega} \right|^2 \quad (3.39)$$

ile belirlenir. Bartlett yönteminin özellikleri tablo 3.4'te verilmektedir, [12].

Kullanılan örnek sayısı $L=N/K$ olduğundan, çözünürlük, periodogram yönteminde elde edilenden K kat daha kötüdür. Varyans değeri, K sonsuza giderken sifıra gider (tablo 3.4'e bakınız). Bu bakımdan, K ve L değerlerinin sonsuza gitme koşulu sağlandığında $\hat{P}_x(e^{j\omega})$, kararlı güç tayfı bulunur. Bunun yanı sıra, Bartlett yönteminde,

K ve L değerlerinin değişimine bağlı olarak, varyans değerinin azalması için, çözünürlüğün kötüleşmesi gerekir.

Tablo 3.4: Bartlett yönteminin özellikleri

$\hat{P}_B(e^{jw}) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{K-1} \left \sum_{n=0}^{L-1} x(n+iL)e^{-jnw} \right ^2$	
Çözünürlük	$\Delta w = 0.89K \frac{2\pi}{N}$
Varyans	$\text{Var}\left\{\hat{P}_B(e^{jw})\right\} \approx \frac{1}{K} P_x^2(e^{jw})$

3.2.2.4. Welch Yöntemi

Welch yöntemi, Bartlett yöntemine iki değişiklik önerir. Bunlardan ilki, $x_i(n)$ dizilerinde verinin (örnek) tekrar kullanılabilmesi yani aynı verinin iki farklı dizide olabilmesidir. Diğeri ise, her diziye pencere fonksiyonu uygulanmasıdır. Yani değiştirilmiş periodogramın ortalamasının alınmasıdır. Ardışık diziler, L uzunluğunda ve D ofset noktasına sahip iseler, i. dizi

$$x_i(n) = x(n+iD) \quad ; \quad n = 0,1,\dots,L-1 \quad (3.40)$$

biçiminde gösterilir. Bu durumda, $x_i(n)$ ile $x_i(n+1)$ dizisinde tekrar kullanılan örnek sayısı L-D olur, tüm N veriyi K dizi içeriyorsa,

$$N = L + D(K-1) \quad (3.41)$$

olur. Bartlett yönteminde olduğu gibi, tekrar kullanılan örnek yoksa (D=L), K=N/L'dir. Dizilerdeki örnekler tekrar kullanıldığında, ortalaması alınacak dizinin uzunluğu veya sayısı artar. Böylece varyanstaki azalmaya karşılık çözünürlük kötüleşir. Welch yönteminde güç tayfı,

$$\hat{P}_w(e^{jw}) = \frac{1}{KLU} \sum_{i=0}^{K-1} \left| \sum_{n=0}^{L-1} w(n)x(n+iD)e^{-jnw} \right|^2 \quad (3.42)$$

ile hesaplanır ve değiştirilmiş periodogram güç terimi cinsinden yazıldığında,

$$\hat{P}_w(e^{j\omega}) = \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} P_M^{(i)}(e^{j\omega}) \quad (3.43)$$

elde edilir. Welch yönteminin özellikleri tablo 3.5'te verilmektedir, [12]. Varyans değeri, verinin %50 tekrar kullanımı ve Bartlett pencereleme ile

$$\text{Var}\left\{\hat{P}_w(e^{j\omega})\right\} \approx \frac{9}{8K} P_x^2(e^{j\omega}) \quad (3.44)$$

şeklinde hesaplanır. Bartlett yöntemindeki varyans ile karşılaştırıldığında 9/8 kat daha büyüktür. İkinci kez %50 tekrar kullanımı ile, Welch yöntemindeki birçok bölümün ortalaması alınabilir.

Tablo 3.5: Welch yönteminin özellikleri

$\hat{P}_w(e^{j\omega}) = \frac{1}{KLU} \sum_{i=0}^{K-1} \left \sum_{n=0}^{L-1} w(n)x(n+iD)e^{-jn\omega} \right ^2$	
$U = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1} w(n) ^2$	
Çözünürlük	Pencere fonksiyonuna bağlı olarak değişir.
Varyans	$\text{Var}\left\{\hat{P}_w(e^{j\omega})\right\} \approx \frac{9}{16} \frac{L}{N} P_x^2(e^{j\omega})$

3.2.2.5. Blackman-Tukey Yöntemi

Bartlett ve Welch yöntemi, sırasıyla periodogramın ve değiştirilmiş periodogramın ortalamasını alarak varyans değerini azaltmak amacıyla tasarlanmıştır. Varyans değerini azaltan diğer bir yöntem ise, Blackman-Tukey yöntemidir.

Blackman-Tukey yönteminin periodogramın varyansını azalttığını görmek için, periodogramın öz ilinti dizisinin Fourier dönüşümü olduğu hatırlanmalıdır. N uzunluğundaki veri için, $\hat{r}_x(k)$ öz ilinti dizisinin varyansı, N değerine yakın k değerleri için büyüktür. Örneğin, k=N-1 değerindeki $\hat{r}_x(k)$ değeri

$$\hat{r}_x(N-1) = \frac{1}{N} x(N-1)x(0) \quad (3.45)$$

biçiminde yazılır. Burada $|k| \approx N$ için $r_x(k)$ değerinin hesaplanmasında küçük bir ortalama olduğunda, N 'nin değeri ne kadar büyük olursa olsun, bu hesaplama güvenilir değildir. Periodogramın varyansını azaltmak için tek yol, bu hesaplamaların varyansını azaltmaktır ya da periodogram üzerinde yaptığı dağılımı azaltmaktır. Bartlett ve Welch yönteminde, periodogramın varyansının azaltılması ortalama alınarak öz ilintinin varyansı azaltılarak sağlanır. Blackman-Tukey yönteminde, güvenilir olmayan hesaplamaların periodograma olan katkısını azaltmak amacıyla, $\hat{r}_x(k)$ öz ilinti dizisine pencere fonksiyonu uygulanarak periodogramın varyansı azaltılır. Blackman-Tukey güç tayfı, $w(k)$ öz ilinti hesaplamada uygulanan pencere olmak üzere

$$\hat{P}_{BT}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-M}^M \hat{r}_x(k)w(k)e^{-jk\omega} \quad (3.46)$$

bağıntısı ile hesaplanır. Öz ilinti hesabındaki küçük sayılar, güç tayfı hesabında da kullanıldığından, varyanstaki azalma, çözünürlükteki azalmaya neden olur.

Katlama teoremi [12] kullanılarak, Blackman-Tukey güç tayfı

$$\hat{P}_{BT}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \hat{P}_{per}(e^{j\omega}) * W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{P}_{per}(e^{j\omega})W(e^{j(\omega-u)})du \quad (3.47)$$

biçiminde yazılır. Böylece, Blackman-Tukey güç hesabı, periodogramı öz ilinti penceresinin Fourier dönüşümü ile katlayarak düzleştirir. Pencere seçiminde bir esneklik olsa da, $w(k)$ simetrik eşlenik olduğundan $W(e^{j\omega})$ gerçel değerlidir ve pencerenin pozitif Fourier dönüşümü vardır. $W(e^{j\omega}) \geq 0$ olduğundan $\hat{P}_{BT}(e^{j\omega})$ değerinin pozitif olması kesindir. Blackman-Tukey yönteminin özellikleri tablo 3.6'da verilmektedir, [12].

Tablo 3.6: Blackman-Tukey yönteminin özellikleri

$\hat{P}_{BT}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-M}^M \hat{r}_x(k)w(k)e^{-jk\omega}$	
Çözünürlük	Pencere fonksiyonuna bağlı olarak değişir
Varyans	$\text{Var}\left\{\hat{P}_{BT}(e^{j\omega})\right\} \approx P_x^2(e^{j\omega}) \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^M w^2(k)$

3.2.2.6. Klasik Yöntemlerin Karşılaştırılması

Parametrik olmayan yöntemlerde çözünürlük ve varyansdan biri iyileşirken diğeri kötüleşir. Klasik yöntemlerin başarımları iki ölçüt ile belirlenebilir:

1. E beklenen değeri göstermek üzere normalize edilmiş varyans

$$v = \frac{\text{Var}\left\{\hat{P}_x(e^{jw})\right\}}{E^2\left\{\hat{P}_x(e^{jw})\right\}} \quad (3.48)$$

2. Verim

$$M = v\Delta w \quad (3.49)$$

ile ifade edilir.

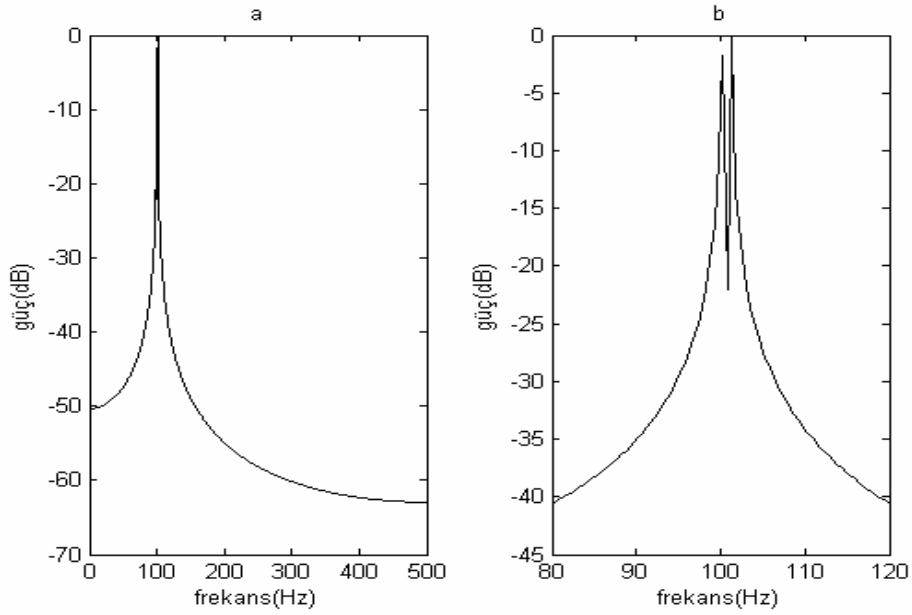
Tablo 3.7’de parametrik olmayan yöntemlerin özellikleri bulunmaktadır. Bu yöntemler karşılaştırıldığında, Blackman-Tukey yönteminin daha iyi sonuç verdiği görülmektedir, çünkü verimin olabildiğince küçük olması istenir. Verimin küçük olması, normalize edilmiş varyansın ve çözünürlüğün çarpımının küçük değer alması ile sağlanır ki bu da iki bileşenden en azından birinin küçük olmasını gerektirir.

Tablo 3.7: Parametrik olmayan yöntemlerin özellikleri

	Normalize edilmiş varyans (v)	Çözünürlük (Δw)	Verim (M)
Periodogram	1	$0.89 \frac{2\pi}{N}$	$0.89 \frac{2\pi}{N}$
Bartlett	$\frac{1}{K}$	$0.89K \frac{2\pi}{N}$	$0.89 \frac{2\pi}{N}$
Welch	$\frac{9}{8} \frac{1}{K}$	$1.28 \frac{2\pi}{L}$	$0.72 \frac{2\pi}{N}$
Blackman-Tukey	$\frac{2}{3} \frac{M}{N}$	$0.64 \frac{2\pi}{M}$	$0.43 \frac{2\pi}{N}$

Bu bölümde, FFT tabanlı tayf kestirim yöntemlerinin başarımları bilinen işaretler kullanılarak karşılaştırıldı. Pencereleme fonksiyonlarının, işarete sıfır eklemenin, gürültünün ve işaretin genlik değişiminin elde edilen tayfa etkileri incelendi.

Bu amaçla $f_1=100\text{Hz}$ ve $f_2=101\text{Hz}$ frekanslarında ve genlikleri eşit olan iki sinüs bileşeninden oluşan ve örnekleme frekansı 1000Hz olan bir işaret oluşturuldu. İşarete sadece FFT uygulandığında elde edilen $f_1=100\text{Hz}$ ve $f_2=101\text{Hz}$ frekans bileşenleri Şekil 3.2'de görülmektedir. Şekil 3.2.b, şekil 3.2.a'nın yakınlaştırılmış biçimidir. Tüm grafikler, genlik değerlerinin maksimum değerleri sıfıra ötelenerek çizdirilmiştir.

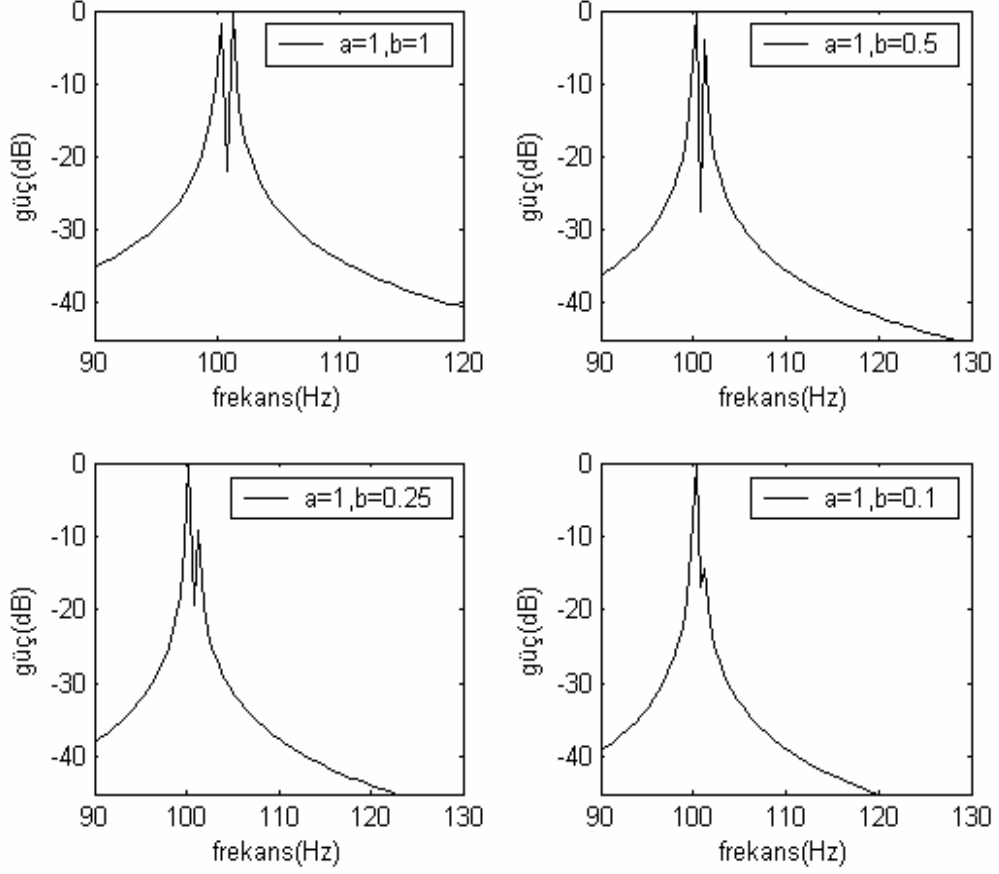


Şekil 3.2. $f_1=100\text{Hz}$ ve $f_2=101\text{Hz}$ frekanslarından oluşan işaretin tayfı

İlk olarak, aynı frekans değerlerinde bileşene sahip işaret kullanılarak ve genlik değerleri değiştirilerek tayf incelemeleri yapılmaktadır. Bu işaret zaman düzleminde yazılırsa, a ve b genlik katsayıları olmak üzere, $x(n) = a \sin(2\pi 100n) + b \sin(2\pi 101n)$ biçimindedir ve burada n değeri $[0, 1.999]$ aralığında 0.001 adımlarla değişmektedir. Böylece 2000 örnek elde edilmektedir.

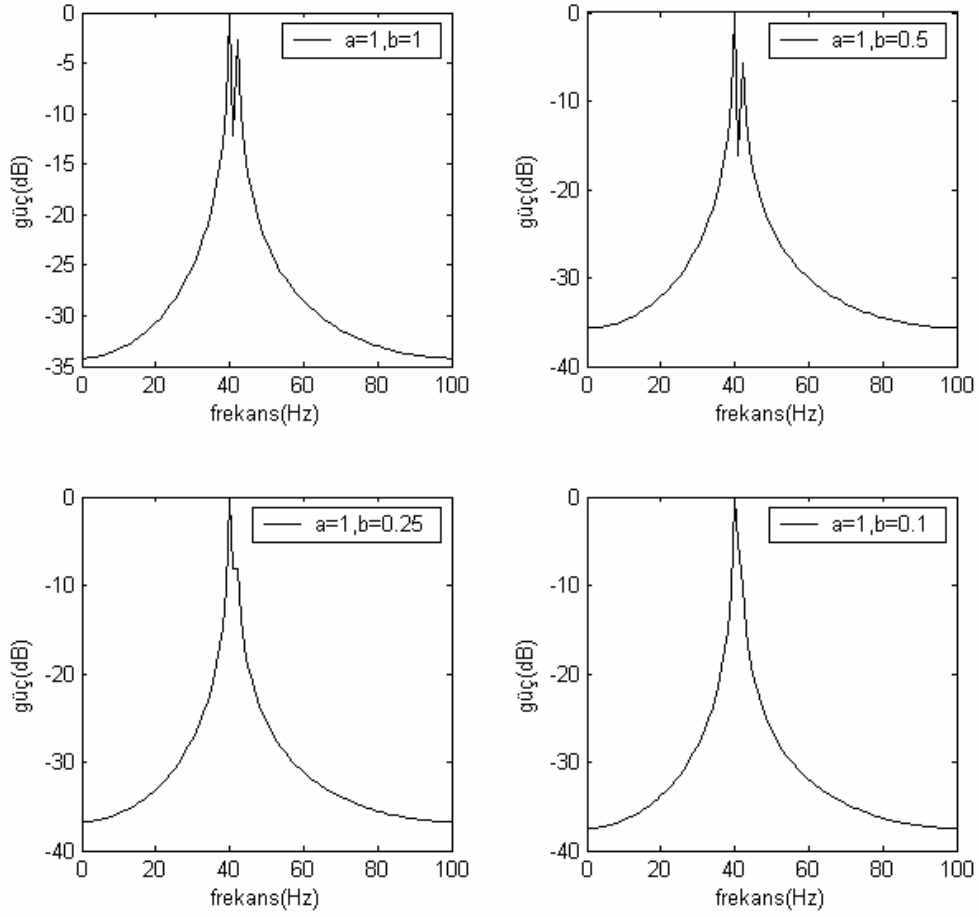
Şekil 3.3'ten görüldüğü gibi tüm genlik değerlerinde işaretler ayırt edilmektedir, yani işaretin genliğinin azaltılması işaretin frekans bileşenlerinin ayrıştırılmasını etkilememiştir. Örnekleme frekansı küçültülerek genlik değişiminin etkisini incelemek amacıyla şekil 3.4 çizdirilmiştir. Şekil 3.3'te örnekleme frekansı 1000Hz iken, şekil

3.4'te 200Hz olarak seçilmiştir ve kullanılan örnek sayısı 202'dir. Kullanılan işaret ise, $x(n) = a \sin(2\pi 40n) + b \sin(2\pi 41n)$ biçimindedir.



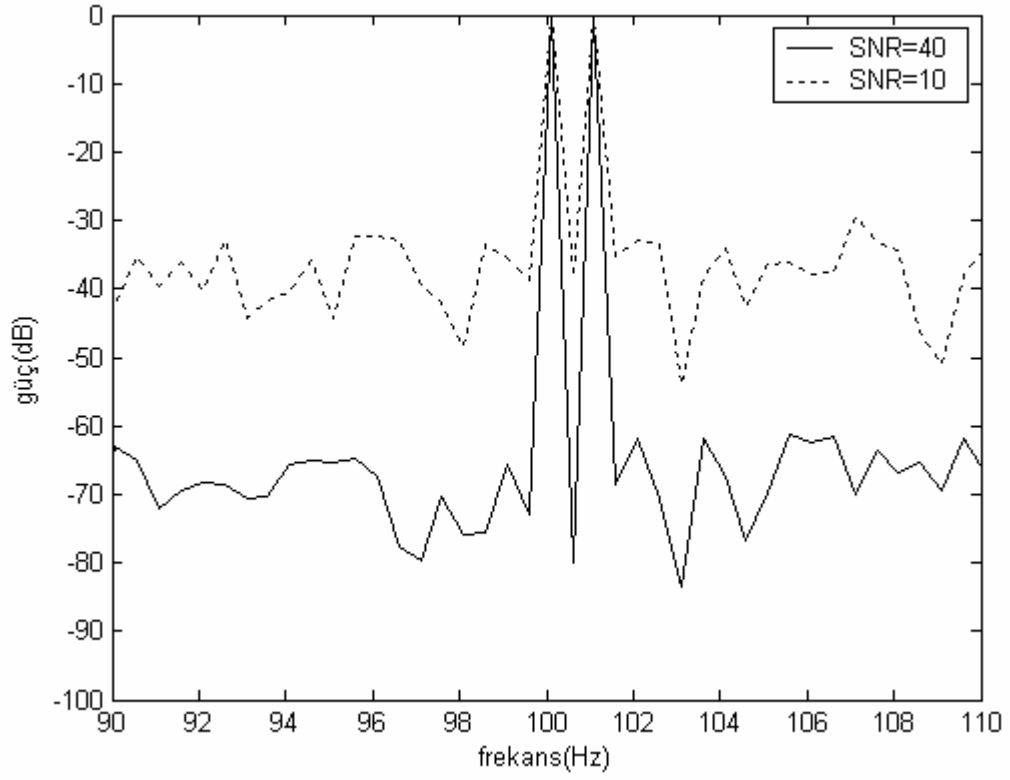
Şekil 3.3. Genlik değişiminin etkisi

Şekil 3.4'te görüldüğü gibi işaretin genliğinin değişmesi, örnek sayısının az olduğu durumlarda çözünürlüğü etkilemektedir ve 41Hz'deki frekans bileşeni b genlik katsayısı 0.25 iken ayırt edilirken, 0.1 olduğunda 40Hz ve 41Hz'deki frekans bileşenleri ayırt edilememiştir ve işaret tek bir sinüs işaretiymiş gibi algılanmıştır.

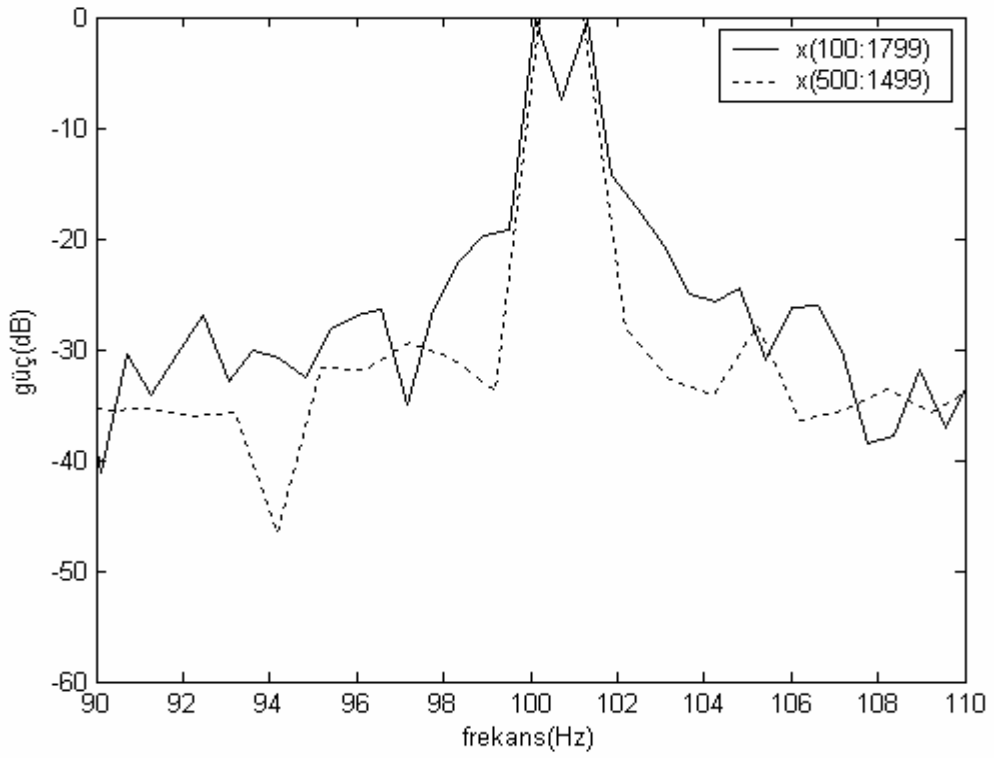


Şekil 3.4. Genlik değişiminin etkisi

Şekil 3.5'te 100 ve 101Hz frekans değerine sahip iki sinüsün toplamından oluşan işarete, gürültü eklenmesi durumunda işaretin FFT ile elde edilen tayfının nasıl değiştiği görülmektedir. İşaret gürültü oranı (Signal-to-noise ratio, SNR) ne kadar büyük değere sahip olursa, elde edilen işaret gerçeğe o kadar yakın olduğundan SNR değerinin artırılması elde edilen işareti iyileştirir. SNR değeri düştükçe işaretin çözünürlüğü azalır ve en alt gürültü seviyesi yükselir.



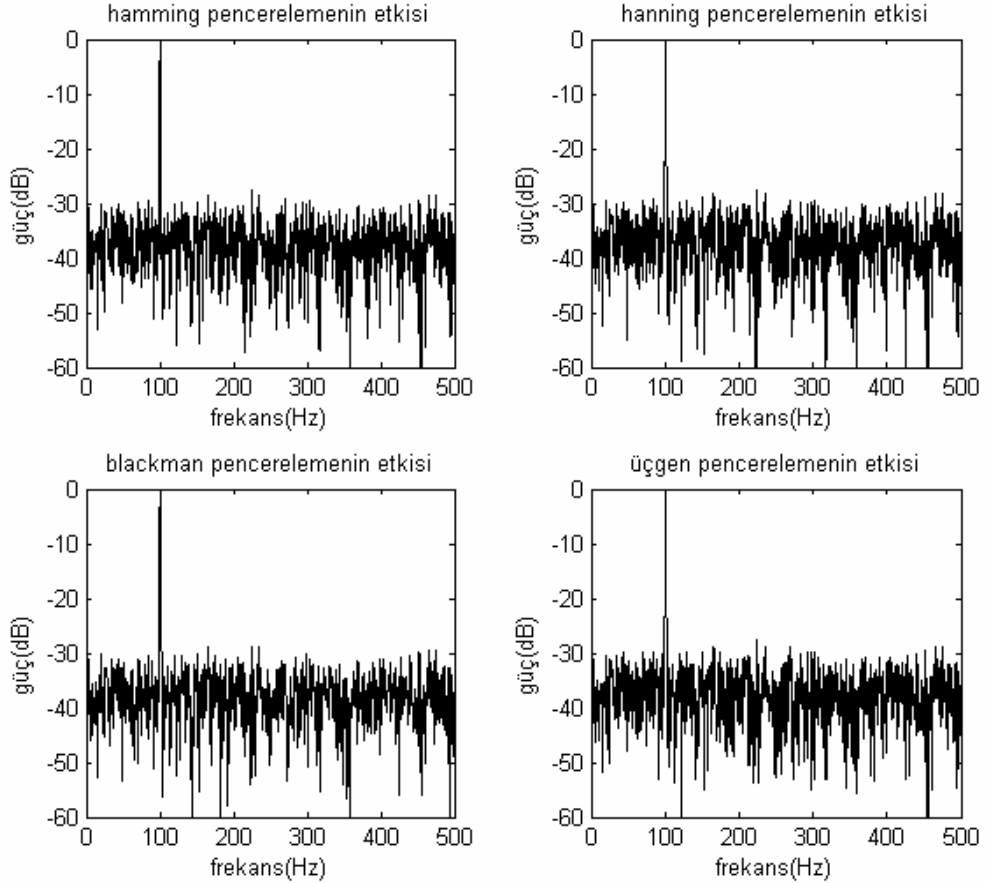
Şekil 3.5. İşaret gücü / gürültü gücü oranının etkisi



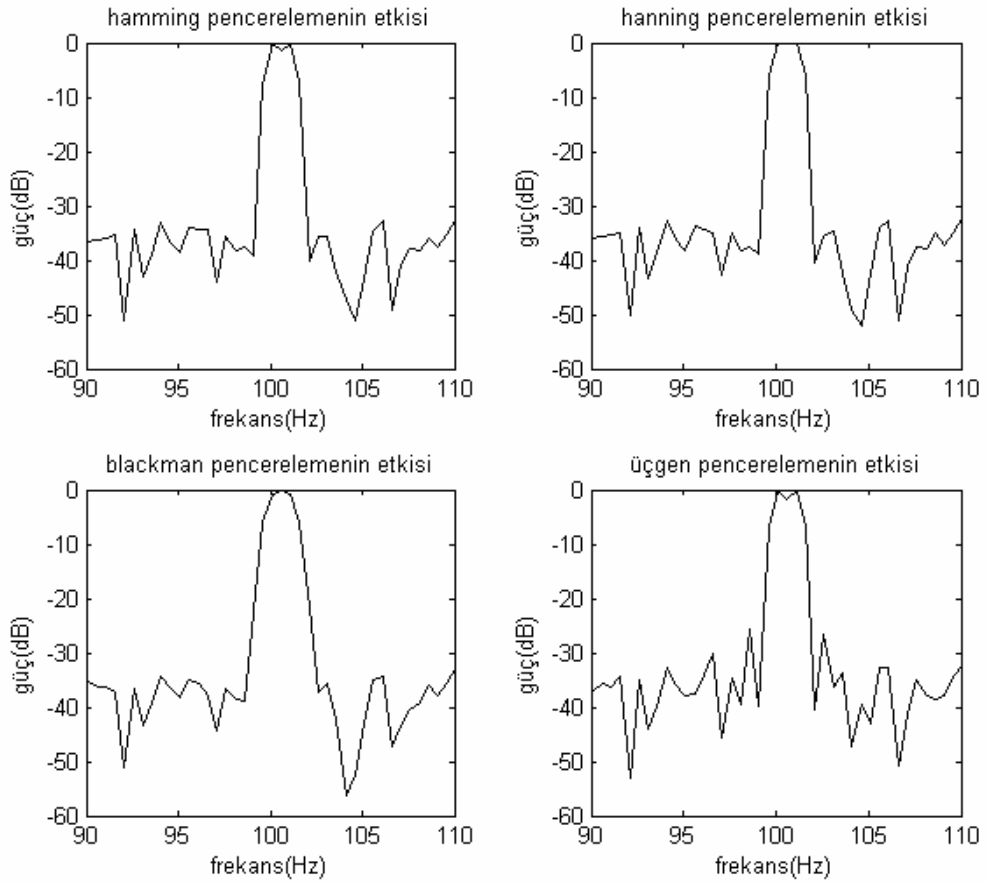
Şekil 3.6. Örnek aralığının değişiminin etkisi

Kullanılan örnek aralığına bağlı olarak işaretin FFT uygulamasının sonuçları şekil 3.6’da görülmektedir. Kullanılan işaret, 100 ve 101Hz frekans bileşenine sahip, SNR=10dB olan bir işarettir. Bu grafikte örnek sayısı 1000 alındığında (yani $x(500:1499)$ örnek aralığı seçildiğinde) frekans değerlerinin ayrıştırılmadığı, 1700 alındığında ($x(100:1799)$ örnek aralığı seçildiğinde) ise ayrıştırıldığı görülmektedir.

Pencereleme fonksiyonlarının FFT uygulamasını nasıl değiştirdiğini incelemek amacıyla SNR değerinin düşük olduğu durum (SNR=10dB) tercih edilerek güç tayfları çizdirildi. En çok kullanılan pencere fonksiyonlarından hamming pencere, hanning pencere, blackman pencere ve üçgen pencere kullanılarak elde edilen tayflar şekil 3.7’de sunuldu. Bu tayfların yakınlaştırılmış biçimi Şekil 3.8’de verildi.



Şekil 3.7. Pencere fonksiyonlarının etkisi



Şekil 3.8. Şekil 3.7'nin yakınlaştırılmış hali

Şekil 3.8 incelendiğinde, gerçekte frekans düzleminde iki frekans ile gösterilen işaretin, blackman ve hanning pencereleme uygulamaları sonucunda tek bir frekans ile temsil edildiği görülmektedir. Bu ise işaretin sanki tek frekansa sahip bir sinüs işareti gibi algılanmasına ve bilgi kaybına neden olur. O halde pencereleme seçimi yapılırken, blackman ve hanning pencereleme tercih edilmemelidir. Üçgen ve hamming pencerelemenin her ikisinde de işaretin iki frekansı ayırılmıştır, bu durumda yan yuvarlakların güç seviyelerini dikkate almakta yarar vardır. Hamming penceresinin yan yuvarlak güç değeri, üçgen penceresine göre daha düşük olduğundan, hamming pencereleme uygulanmalıdır.

3.2.3. Parametrik Yöntemler

Parametrik veya işaretli modellemeye dayanan yöntemlerde, işaret geçiş işlevi bilinen bir şekilde modellenir ve varsayılan modelin değişkenleri hesaplanır.

İşaret modelleme, işaretli matematiksel bir bağıntı ile ifade etmektir. Bu nedenle işaret modelleme birçok uygulamada kullanılmaktadır. N değişkenli $x(n)$ işaretini iletmek veya saklamak için, her ayrık işaret verisi iletmeli veya saklanmalıdır. Bu verileri kaydetmek yerine, veriyi daha az sayıda değişkenle ($k \ll N$) ifade edip bu değişkenler de kaydedilebilir. Önemli olan işaretin model değişkenlerinden tekrar elde edilmesidir.

Örneğin $x(n) = \alpha \cos(nw_0 + \phi_k)$ işareti için α genlik, w_0 frekans, ve ϕ faz değerlerinin kaydedilmesi yeterlidir, $x(n)$ işareti bu değişkenlerden daha sonra elde edilebilir. Birden fazla frekans bileşeni olan bir işaret L tane sinüsün toplamı olarak modellenebilir ve

$$x(n) \approx \sum_{k=1}^L \alpha_k \cos(nw_k + \phi_k) \quad (3.50)$$

olarak ifade edilebilir. Bu durumda, $x(n)$ işareti olduğu gibi kaydedilirse daha fazla bellek gerekirken doğruluk oldukça yüksektir. Model katsayıları kaydedildiğinde daha az bellek gerekir, bu kez de modellemeyen doğabilecek hatalar olacaktır.

İşaret modellemede, uzantı değer bulma ve ara değer bulma kullanılır. Her ikisinde de, bilinen $x(n)$ işareti kullanılarak diğer aralıklar için işaret tahmin edilir. Uzantı değer bulmada amaç, $x(N)$ değerini tahmin etmektir. Ara değer bulmada, bilinmeyen $x(n)$ değerleri aralığın dışındaki veriler kullanılarak hesaplanır. Eğer $x(n)$ nin tam bir gösterimini sağlayan bir model bulunabilirse, bu model, bilinmeyen $x(n)$ uzantı veya ara değerlerini hesaplamak için kullanılabilir. Örneğin $x(n)$ işareti, geri dönümlü (bir örneğin kendinden önceki örneklerden belirlenmesi) olarak modellenirse,

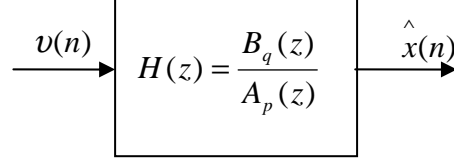
$$x(n) \approx \sum_{k=1}^p a_p(k)x(n-k) \quad (3.51)$$

x dizisinde n . elemanın değeri kendinden önceki p adet eleman kullanılarak bulunur.

İşaret modelleme süreci iki adımdan oluşur. İlk adım modelin en uygun temel işaret biçimini belirlemek, ikinci adım ise model değişkenlerini belirlemektir. İşaret sinüslerin toplamı şeklinde ya da sönümlü sinüslerin toplamı olarak modellenebilir ve

$$x(n) \approx \sum_{k=1}^L \alpha_k \lambda_k^n \cos(nw_k + \phi_k) \quad (3.52)$$

ile ifade edilir. Burada $\lambda_k = 1$ ise, sönümlemesiz sinüslerin toplamı biçimini alır.



Şekil 3.9. LTI sistemin gösterilimi

Ayrıca işaret, girişine bilinen bir $v(n)$ dizisi beslendiğinde geçiş işlevi $H(z)$ olan bir süzgeç çıkışı olarak modellenebilir. Burada doğrusal zamanla değişmeyen süzgeç için geçiş işlevi

$$H(z) = \frac{B_q(z)}{A_p(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_q(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_p(k)z^{-k}} \quad (3.53)$$

olur. Bu durumda, işaret modeli $a_p(k)$ ve $b_q(k)$ süzgeç katsayılarını içerir. Eğer $v(n) = \delta(n)$ seçilirse çıkıştaki $\hat{x}(n)$ dizisi süzgecin $h(n)$ geçiş işlevine eşit olur, $a_p(k)$ ve $b_q(k)$ süzgeç katsayılarından $h(n)$ bulunabilir. $H(z)$ geçiş işlevi bağıntısında payın kökleri sıfırlar, paydanın kökleri ise kutuplar olarak bilinir.

Tayf kestiriminde kullanılan işaret modellemelerde işaret girişine $\delta(n)$ beslenen bir FIR (sonlu süreli birim vuruş tepkeli) veya IIR (sonsuz süreli birim vuruş tepkeli) süzgeç çıkışı olarak modellenir. FIR süzgecinin geçiş işlevinde paydanın derecesi sıfırdır. Bu, işaret modellemede MA (moving average) işaret modellemesi olarak bilinir. IIR süzgeçte ise paydanın derecesi sıfırdan farklıdır. Bu süzgeç için payın derecesi sıfır ise, işaret modellemede AR (autoregressive) işaret modellemesi olarak ifade edilirken, payın derecesi sıfırdan farklı ise ARMA (autoregressive moving average) işaret modellemesi olarak ifade edilir. AR modeli *hep-kutup* modeli, MA modeli *hep-sıfır* modeli olarak da bilinir. Yaygın olarak bu modellerde işaret hep-kutuplu süzgeçlerin çıkışı olarak modellenir. Burg, Kovaryans, değiştirilmiş kovaryans, Yule-Walker ve doğrusal tahminli kodlama (linear predictive coding-LPC) bunlara örnek olarak verilebilir. Prony ve STMCB (Steiglitz ve McBride yöntemi) yöntemi ise

işareti bir IIR süzgeç çıkışı olarak modeller. Bu yöntemlerde payın derecesi sıfırdan farklı olabilir.

3.2.3.1. AR (özbağlımlı) Tayf Kestirimi

AR sürecinde, $x(n)$, girişine beyaz gürültü beslenen hep-kutup süzgecinin çıkışı olarak ifade edilir. $a_p(k)$, süzgecin payda katsayıları ve $b_q(k)$ pay katsayıları olmak üzere, p. dereceden güç tayfı

$$P_x(e^{j\omega}) = \frac{|b(0)|^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^p a_p(k)e^{-jk\omega}\right|^2} \quad (3.54)$$

ile ifade edilir. AR tayf kestiriminde $b(0)$ hariç tüm pay katsayıları sıfır olduğundan, $b(0)$ ve $a_p(k)$ katsayıları hesaplandığında, güç tayfı

$$\hat{P}_{AR}(e^{j\omega}) = \frac{|\hat{b}(0)|^2}{\left|1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p(k)e^{-jk\omega}\right|^2} \quad (3.55)$$

biçiminde yazılır. $\hat{P}_{AR}(e^{j\omega})$ 'nin doğruluğu, model değişkenlerinin ne kadar doğru hesaplandığına ve AR modelinin verinin oluşturma yöntemi ile tutarlı olmasına bağlıdır. Örneğin (3.55) bağıntısı, MA sürecinde kullanılırsa, hesaplamaların iyi sonuç vermeyeceği bilinmelidir. AR tayf kestirimi, hep-kutup modelinin bulunmasını ister. Hep-kutup modelinin değişkenlerinin hesaplanabileceği birçok teknik vardır. Bununla birlikte, ilk olarak hep-kutup model değişkenleri hesaplanır.

Hep-kutup modellerinden *öz ilinti yönteminde*,

$$r_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x(n+k)x^*(n) \quad ; \quad k = 0,1,\dots,p \quad (3.56)$$

ifadesi kullanılarak hesaplanan $r_x(k)$ öz ilinti değerleri ile $a_p(k)$ katsayıları arasındaki bağıntı,

$$R_x \cdot a_p = \epsilon_p [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]^T \quad (3.57)$$

ile tanımlanır. Burada

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_x(0) & \hat{r}_x^*(1) & \hat{r}_x^*(2) & \cdots & \hat{r}_x^*(p) \\ \hat{r}_x(1) & \hat{r}_x^*(0) & \hat{r}_x^*(1) & \cdots & \hat{r}_x^*(p-1) \\ \hat{r}_x(2) & \hat{r}_x(1) & \hat{r}_x^*(0) & \cdots & \hat{r}_x^*(p-2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{r}_x(p) & \hat{r}_x(p-1) & \hat{r}_x(p-2) & & \hat{r}_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{a}_p(1) \\ \hat{a}_p(2) \\ \vdots \\ \hat{a}_p(p) \end{bmatrix} = \in_p \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

çözülerek bulunur. Burada \in_p minimum hep-kutup modelleme hatasıdır. (3.58)

bağıntısı $a_p(k)$ katsayıları için çözülür ve bu katsayılar (3.55) bağıntısında kullanılarak

$$|b(0)|^2 = \in_p = r_x(0) + \sum_{k=1}^p a_p(k)r_x^*(k) \quad (3.59)$$

yerleştirilerek ve değişkenler dahil edilerek güç tayfı hesaplanır. Bu yöntem, *Yule-Walker* yöntemi olarak bilinir. R_x öz ilinti matrisi, Toeplitz matris olduğundan $a_p(k)$ katsayılarını bulmak için Levinson-Durbin yöntemi kullanılabilir, [12]. Öz ilinti yönteminde, dikdörtgen pencere kullanıldığından, pencereleme olmayan yöntemlere göre, örneğin kovaryans ve Burg yöntemi, daha kötü çözünürlük oluşturur. Sonuç olarak, öz ilinti yöntemi, kısa veriler için genellikle kullanılmaz.

Diğer bir AR değişken hesaplamada yöntemi *kovaryans yöntemidir*. Kovaryans yönteminde

$$r_x(k,l) = \sum_{n=p}^{N-1} x(n-l)x^*(n-k) \quad (3.60)$$

ifadesi kullanılarak hesaplanan $r_x(k,l)$ öz ilinti değerleri ile $a_p(k)$ katsayıları,

$$\begin{bmatrix} \hat{r}_x(1,1) & \hat{r}_x(2,1) & \cdots & \hat{r}_x(p,1) \\ \hat{r}_x(1,2) & \hat{r}_x(2,2) & \cdots & \hat{r}_x(p,2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hat{r}_x(1,p) & \hat{r}_x(2,p) & \cdots & \hat{r}_x(p,p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_p(1) \\ \hat{a}_p(2) \\ \vdots \\ \hat{a}_p(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_x(0,1) \\ \hat{r}_x(0,2) \\ \vdots \\ \hat{r}_x(0,p) \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

bağıntısı ile hesaplanır. Öz ilinti yöntemindeki doğrusal eşitliklerden farklı olarak, bu eşitliklerdeki öz ilinti matrisi, Toeplitz matrisi değildir. Kovaryans yönteminin, öz ilinti yöntemine göre üstünlüğü, $r_x(k,l)$ öz ilinti hesaplamada, veri pencereleme

gerekmemektedir. Bu bakımdan kısa veri kayıtları için, kovaryans yöntemi öz ilinti yöntemine göre genellikle daha iyi çözünürlük oluşturur. Veri uzunluğu arttığında ve model derecesine göre çok uzun olduğunda ($N \gg p$ için) veri pencereleme etkisi küçülür ve her iki yaklaşım arasındaki fark ihmal edilebilir. Kovaryans yönteminde AR modelindeki değişkenleri (katsayıları) ileri tahmin hatalarının karelerinin toplamını en aza indirecek biçimde belirlenir.

Değiştirilmiş kovaryans yönteminde ise, model değişkenleri geri ve ileri tahmin hatalarının karelerinin toplamını en aza indirgeyecek biçimde belirler, [12]. Değiştirilmiş kovaryans yönteminde, AR değişkenleri (3.61) bağıntısında verilen doğrusal eşitliklerin çözümü ile bulunur ve

$$r_x(k,l) = \sum_{n=p}^{N-1} [x(n-l)x^*(n-k) + x(n-p+l)x^*(n-p+k)] \quad (3.62)$$

kullanılır. Öz ilinti matrisi, Toeplitz matrisi değildir. Diğer AR tayf kestirim yöntemlerine göre, değiştirilmiş kovaryans yöntemi yüksek çözünürlük ve istatistiksel olarak kararlı tayf hesabı verir. Bunun yanında gürültülü sinüslerin tayf incelemesinde her AR yönteminde görülen gerçek frekans değerlerine göre olan kayma değiştirilmiş kovaryans yönteminde daha azdır, [12].

AR modeli değişken hesaplama yöntemlerinden biri de *Burg algoritmasıdır*. Bu yöntemde model değişkenleri, ileri ve geri tahmin hatalarının karelerinin toplamını en aza indirgeyecek biçimde belirlenir. Değiştirilmiş kovaryans yönteminden farklı olarak bu yöntemde model değişkenlerinin Levinson-Durbin geri dönüşümünü sağlaması istenir,[12]. Her ne kadar değiştirilmiş kovaryans yöntemine göre az doğru olsa da, burg algoritmasında pencere fonksiyonu uygulanmadığından, AR değişkenleri öz ilinti yöntemi ile elde edilenden daha doğrudur.

3.2.3.2. MA (Yürüyen Ortalamalı) Tayf Kestirimi

Bu tayf kestirim yönteminde $H(z)$ geçiş işlevinde paydanın derecesi sıfırdır. Dolayısı ile işaret, girişine $\delta(n)$ birim vuruş işareti beslenen FIR (Finite Impulse Response) süzgeci çıkışı olarak modellenir ve MA sürecinde güç tayfı $b_q(k)$ katsayıları ile

$$P_x(e^{jw}) = \left| \sum_{k=0}^q b_q(k) e^{-jkw} \right|^2 \quad (3.63)$$

bağıntısı ile ifade edilir, aynı zamanda güç tayfı, $r_x(k)$ öz ilinti dizisinin terimleri cinsinden de ifade edilebilir ve $r_x(k)$ değerleri süzgeç katsayılarına bağlı olarak

$$r_x(k) = \sum_{l=0}^{q-k} b_q(l+k) b_q^*(l) ; k = 0, 1, \dots, q \quad (3.64)$$

biçiminde yazılır ve $r_x(-k) = r_x^*(k)$ ve $|k| > q$ için $r_x(k) = 0$ dır. Bu durumda, güç tayfı

$$P_x(e^{jw}) = \sum_{k=-q}^q r_x(k) e^{-jkw} \quad (3.65)$$

ile ifade edilir. MA modeli ile tayf iki yolla hesaplanabilir. İlk yaklaşım, MA sürecinde öz ilinti dizisinin sonlu olmasından faydalanılır. Burada $|k| > q$ için $r_x(k) = 0$ olduğundan, güç tayfı

$$\hat{P}_{MA}(e^{jw}) = \sum_{k=-q}^q \hat{r}_x(k) e^{-jkw} \quad (3.66)$$

biçimini alır. $\hat{P}_{MA}(e^{jw})$, dikdörtgen pencere kullanılan Blackman-Tukey yöntemine eşdeğer olsada, bu iki yaklaşım arasında fark vardır. Blackman-Tukey yönteminde $x(n)$ üzerinde hiçbir varsayım yapılmaz. İkinci yaklaşım ise, $b_q(k)$ MA değişkenlerini, $x(n)$ dizisinden hesaplamak ve bu hesaplanan değerleri (3.63) bağıntısında yerine yazmaktır. Durbin tarafından geliştirilen iki aşamalı yöntem ile $b_q(k)$ katsayıları hesaplanabilir.

3.2.3.3. ARMA (Özbağlaşımlı Yürüyen Ortalamalı) Tayf Kestirimi

AR işaret modellemede $H(z)$ geçiş işlevinin sadece kutupları, MA işaret modellemede geçiş işlevinin sadece sıfırları varken, ARMA işaret modellemede geçiş işlevinin hem sıfırları hem de kutupları vardır ve geçiş işlevi

$$H(z) = \frac{B_q(z)}{A_p(z)} = \frac{\sum_{k=0}^q b_q(k)z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^p a_p(k)z^{-k}} \quad (3.67)$$

ile ifade edilir. ARMA tayf kestirim yönteminde işaret, girişine $\delta(n)$ birim vuruş işareti beslenen IIR (Infinite Impulse Response) süzgecinin çıkışı olarak modellenir ve güç tayfi

$$P_x(e^{jw}) = \frac{\left| \sum_{k=0}^q b_q(k)e^{-jkw} \right|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_p(k)e^{-jkw} \right|^2} \quad (3.68)$$

ile ifade edilir. Burada, derecesi p olan AR modeli, AR(p) ve derecesi q olan MA modeli, MA(q) ile gösterilirse, ARMA(p,q), p kutba ve q sifıra sahip ARMA modelini simgeler. ARMA(p,q) güç tayfi modelin $a_p(k)$ ve $b_q(k)$ katsayıları kullanılarak

$$\hat{P}_{ARMA}(e^{jw}) = \frac{\left| \sum_{k=0}^q \hat{b}_q(k)e^{-jkw} \right|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_p(k)e^{-jkw} \right|^2} \quad (3.69)$$

bağıntısı ile hesaplanır. AR modeli değişkenleri, değiştirilmiş Yule-Walker eşitliği veya en az kareler yaklaşımı ile bulunabilir. İlk olarak $\hat{a}_p(k)$ katsayıları hesaplandıktan sonra, Durbin yöntemi gibi MA model değişken hesaplama yöntemleri ile $\hat{b}_q(k)$ katsayıları bulunur.

Yaygın olarak bilinen ARMA modeli, *Prony yöntemi*dir. Prony analizi, işaretleri karmaşık değerli eksponansiyellerin toplamı biçiminde modeller. Prony analizi, Gaspard Riche, Baran de Prony tarafından 1795'te çeşitli gazların dağılımını açıklamak için geliştirilmiştir.

Prony analizi, sadece işaret analiz tekniği değildir, aynı zamanda bir dizge tanıma yöntemidir. Prony yöntemi, güç sistemleri elektromekanik osilasyon, biomedikal görüntüleme, radyoaktif gecikme, radar, ses işleme, jeofizik ve sonarda kullanılır.

Prony yöntemi, işareti belirli sayıda kutup ve sıfır kullanarak modeller. Bu yöntem, a_i payda katsayılarını bulmak için AR modellemenin kovaryans yönteminin benzerini kullanır ve sonuç süzgecinin birim vuruş tepkisi, veri dizisinin ilk $(n+1)$ örneğiyle tamamıyla eşleştiğinden b_i pay katsayıları bulunur. Eğer veri dizisi, doğru dereceden ARMA süreci ise, bu yöntem katsayılarının tümünü bulur.

IIR süzgecinin $H(z)$ geçiş işlevi, (3.67) bağıntısı kullanılarak

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (3.70)$$

biçiminde yazılır. $H(z)$, $h[n]$ birim vuruş tepkesinin z dönüşümüdür ve

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n] z^{-n} \text{ biçiminde ifade edilir. O halde, (3.70) bağıntısı}$$

$H(z)(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}$ olur ve $\delta(n)$ birim vuruş işareti olmak üzere, ters z dönüşümü ile

$$h(n) + a_1 h(n-1) + \dots + a_N h(n-N) = b_0 \delta(n) + b_1 \delta(n-1) + \dots + b_M \delta(n-M) \quad (3.71)$$

biçiminde yazılır. (3.71) bağıntısı $n \in [0, k]$, $k > M$ için matris çarpımı olarak da yazılabilir.

$$\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h(1) & h(0) & & & \\ h(2) & h(1) & h(0) & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ h(M) & & & & \\ \vdots & & & & \\ h(K) & & & & h(K-N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Burada, a_i ve b_i katsayılarını hesaplamak amacıyla, matrisi parçalara ayırırsak,

$$\begin{bmatrix} b \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & H_1 & & \\ \dots & \dots & \dots & \\ h_3 & \vdots & H_2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \dots \\ a \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

biçimini alır. Burada

$$b = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix}, \quad h_3 = \begin{bmatrix} h(M+1) \\ h(M+2) \\ \vdots \\ h(K) \end{bmatrix}, \quad H_1 = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \dots & 0 \\ h(1) & h(0) & & \\ \vdots & \vdots & & \\ h(M) & h(M-1) & & \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{bmatrix} \text{ ve } H_2 = \begin{bmatrix} h(M) & h(M-1) & \dots & h(M+1-N) \\ h(M+1) & h(M) & \dots & h(M+2-N) \\ \vdots & & & \vdots \\ h(K) & & & h(K-N) \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

ile gösterilmiştir. (3.72) bağıntısının alt K-M eşitliğinde, $h_3 + H_2 a = 0$ olduğundan a katsayıları

$$a = H_2^{-1} h_3 \quad (3.75)$$

bağıntısı ile bulunur. (3.72) bağıntısında verilen denklem takımındaki ilk M+1 denklemde bulunan a katsayıları kullanılarak b katsayıları

$$b = H_1 a \quad (3.76)$$

bulunur. Eğer $K = M + N$ ise, H_2 matrisi, kare matristir. Eğer H_2 tekil değilse (3.75) bağıntısı ve (3.76) bağıntısı, sırasıyla a vektörü ve b vektörü için çözülebilir. Eğer H_2 tekil ise (3.75) bağıntısının birçok çözümü vardır. Bu durumda, $h[n]$ düşük derecelerle oluşturulur. Bu nedenle, varsayılan model derecesi, Prony sonucunda önemli etkiye sahiptir.

Matlab'ın Prony komutu, $H(z)$ geçiş işlevinin pay derecesi M ve payda derecesi N'nin bilinmesini ister. Prony fonksiyonunda kullanıcıya bağlı N ve M model dereceleri kullanılır.

3.4. Radyo Kanalı Yayınım Verileri

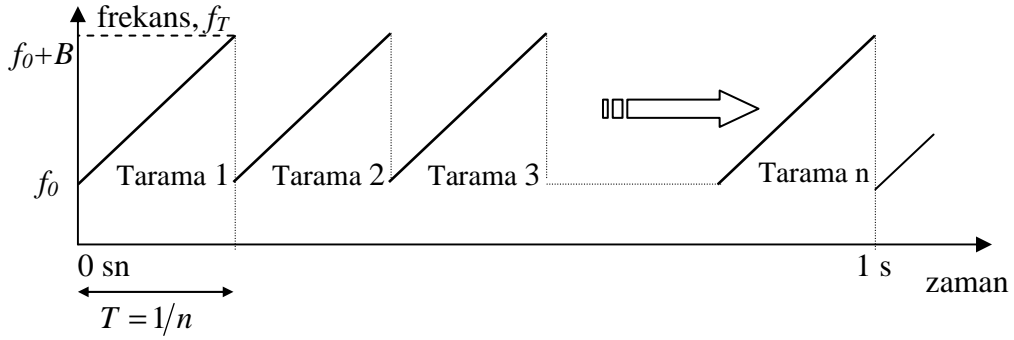
Radyo kanalı yayınım verileri, sürekli dalga frekans modülasyonu (FMCW) ile elde edilmiştir. Bu kanal sondalama yönteminde verici, frekans bandını doğrusal olarak tarar yani doğrusal bir artış vardır. Verici tarafından iletilen dalganın matematiksel bağıntısı

$$v_T(t) = A_T \cos[\phi_T(t)] = A_T \cos\left(2\pi f_c t + \pi \frac{B}{T} t^2\right) \quad (3.77)$$

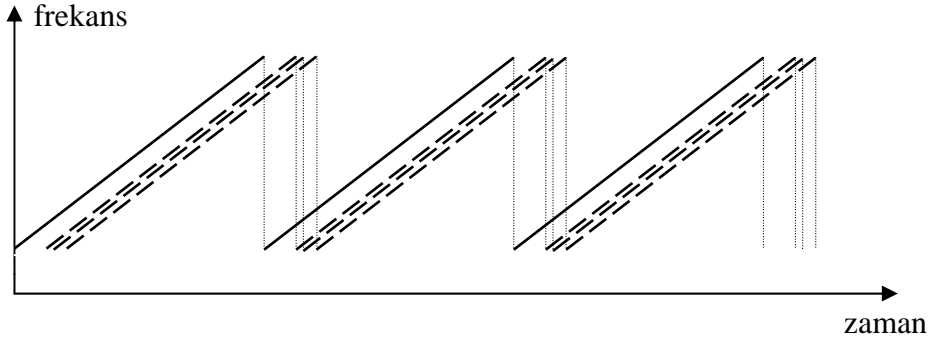
ile ifade edilir ve burada f_c taşıyıcı frekans, A_T iletilen işaretin genliği, B taranan band genişliği ve T tarama süresidir. Tüm frekans değerleri için genlik değeri aynıdır. Şekil 3.10, FMCW işareti için zamana karşı taranan frekansları göstermektedir. Yani zaman arttıkça frekans da onunla doğrusal olarak artmaktadır. Anlık frekans değeri

$$f_T(t) = f_0 + \frac{B}{T}t \quad (3.78)$$

ile tanımlanır. f_0 , banddaki en küçük frekans değerini, t tek tarama içindeki zamanı göstermektedir.

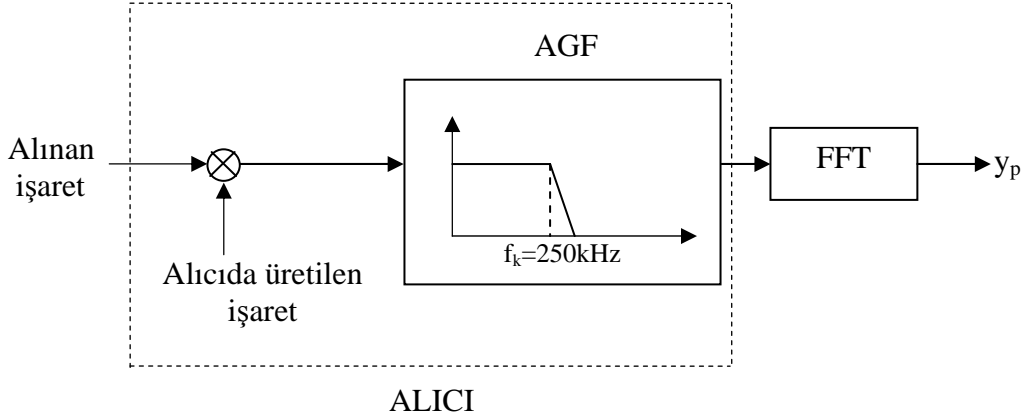


Şekil 3.10. FMCW işareti için zaman-frekans eğrisi



Şekil 3.11. İletilen işaret (bütün çizgi) ile farklı gecikmelerle alıcıdaki alınan yankıların (kesikli çizgiler) zaman-frekans eğrisi

Tarama tekrar frekansı (n), tarama süresinin tersidir. ($n=1/T$)



Şekil 3.12. Alıcıya gelen işarettten zaman gecikme bilgisinin elde edilmesi

Alınan işaret, alıcıya gelen yankıların aldıkları yolların farklı olmasından dolayı iletilen işaretin gecikmiş, zayıflamış ve Doppler kaymasına uğramış biçimlerinin toplamından oluşur. Alıcı ve verici anten arasında L bağımsız yankının olduğu kabul edilirse, alıcı antene gelen işaret

$$\begin{aligned}
 v_R(t) &= \sum_{i=1}^L A_{Ri} \cos[\phi_T(t - \tau_i)] \\
 &= \sum_{i=1}^L A_{Ri} \cos\left[2\pi f_0(t - \tau_i) + \pi \frac{B}{T}(t - \tau_i)^2\right]
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

ile ifade edilir. Burada, A_{Ri} ,i. yol için alınan işaretin genliğidir. Alıcı ve verici arasındaki L bağımsız yankı Şekil 3.11’de görülmektedir. Alıcıda, alınan işaret iletilen işaretin aynısıyla çarpılır. Dedektör çıkışında

$$v(t) = \sum_{i=1}^L A_T A_{Ri} \cos\left(\omega_0 t + \pi \frac{B}{T} t^2\right) \cos\left(\omega_0(t - \tau_i) + \pi \frac{B}{T}(t - \tau_i)^2\right) \tag{3.80}$$

işareti elde edilir. $\cos a \cdot \cos b = (\cos(a - b) + \cos(a + b))/2$ trigonometrik bağıntısı kullanılarak ve $A_T A_{Ri}$ yerine A yazılarak

$$\begin{aligned}
 v(t) &= \sum_{i=1}^L \frac{A}{2} \cos\left(w_0(t - \tau_i) - w_0 t + \pi \frac{B}{T}(t - \tau_i)^2 - \pi \frac{B}{T} t^2\right) \\
 &\quad + \sum_{i=1}^L \frac{A}{2} \cos\left(w_0(t - \tau_i) + w_0 t + \pi \frac{B}{T}(t - \tau_i)^2 + \pi \frac{B}{T} t^2\right)
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

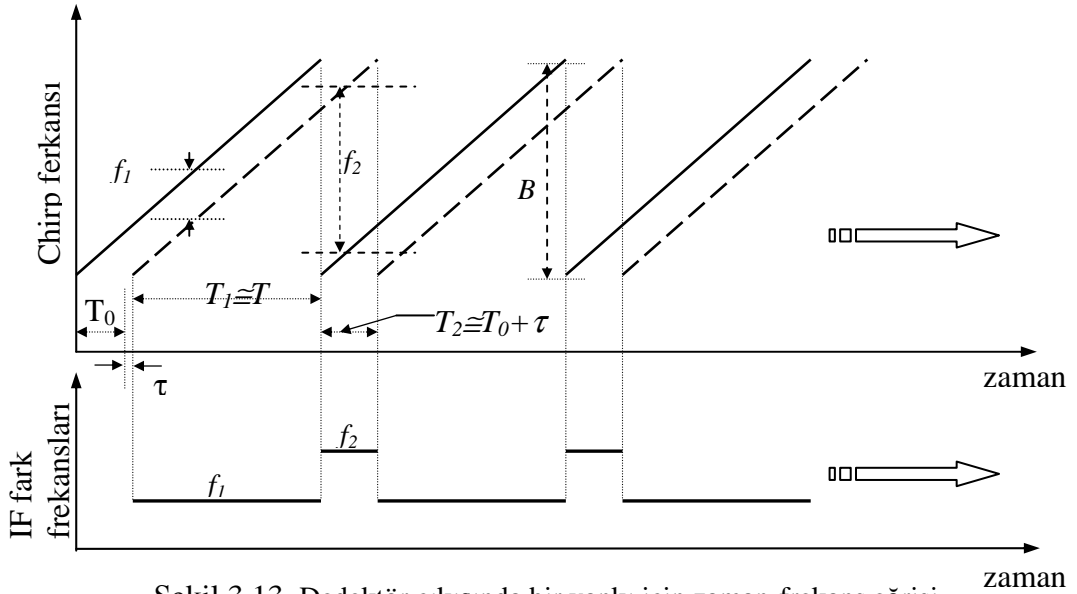
elde edilir. İkinci terim $\phi_T(t) + \phi_T(t - \tau_i)$ faz değerine ve yaklaşık $2\omega_0$ frekans değerine sahiptir ve alçak geçiren süzgeçle bastırılır. İlk terim, yankı bileşenlerinin zaman gecikme bilgisini içeren tayftır. Bununla birlikte, her yankı bileşeni için iki fark frekansı vardır, bu frekans bileşenleri

$$f_{1i} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\phi_T(t - \tau_i) - \phi_T(t)] \quad (3.82)$$

$$f_{2i} = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} [\phi_T(t - \tau_i) - \phi_T(t - T)]$$

ile gösterilir. Alıcıya gelen işaretten zaman gecikme bilgisinin elde edilmesi için yapılan işlemler şekil 3.12’de gösterilmiştir.

Şekil 3.13, τ zaman gecikmeli tek bir yankı için zaman-frekans eğrisini ve zaman-IF frekans eğrisini göstermektedir. Şekil iki dalga dizisi olduğunu gösterir: Bunlardan ilki f_1 frekanslı, diğeri f_2 frekanslı bir işarettir. Şekilden $f_1 + f_2 = B$, B band genişliğidir.



Şekil 3.13. Dedektör çıkışında bir yankı için zaman-frekans eğrisi

Fourier analizi ile elde edilen tayftaki her bir frekans ayrı bir yankı gecikmesine karşılık gelir. Fourier analizi ile elde edilen bir frekans f_i ile gösterildiğinde, bu frekansın karşılık geldiği yankı gecikmesi doğrusal orantı kurularak bulunabilir. Eğer B Hz genişliğindeki band T saniye süreye karşılık geliyorsa, elde edilen f_i frekansının karşılık geldiği zaman gecikmesi

$$\tau_i = \frac{f_i T}{B} \quad (3.83)$$

olarak bulunur. Alıcıya ulaşan yankıların zaman gecikmeleri hakkında bilgi edinmek için, işaretin tayfını incelemek yeterlidir.

3.5. Tayf Kestirim Yöntemlerinin Seçimi

Bu bölümde radyo kanalı yayılım verilerinde ayırt edilebilecek frekans bileşenleri (yankı bileşenleri, bölüm 3.4'e bakınız) Fourier dönüşümünü temel alan bir yöntem ve bu yöntem ile karşılaştırıldığında, çözünürlükte iyileşme sağlayacak yöntemlerin başarımı incelenecektir. Çözünürlükte iyileşme sağlayan yöntemlerden biri seçilerek, bu yöntemin sağladığı iyileşme ise 4. bölümde detaylı biçimde incelenecektir.

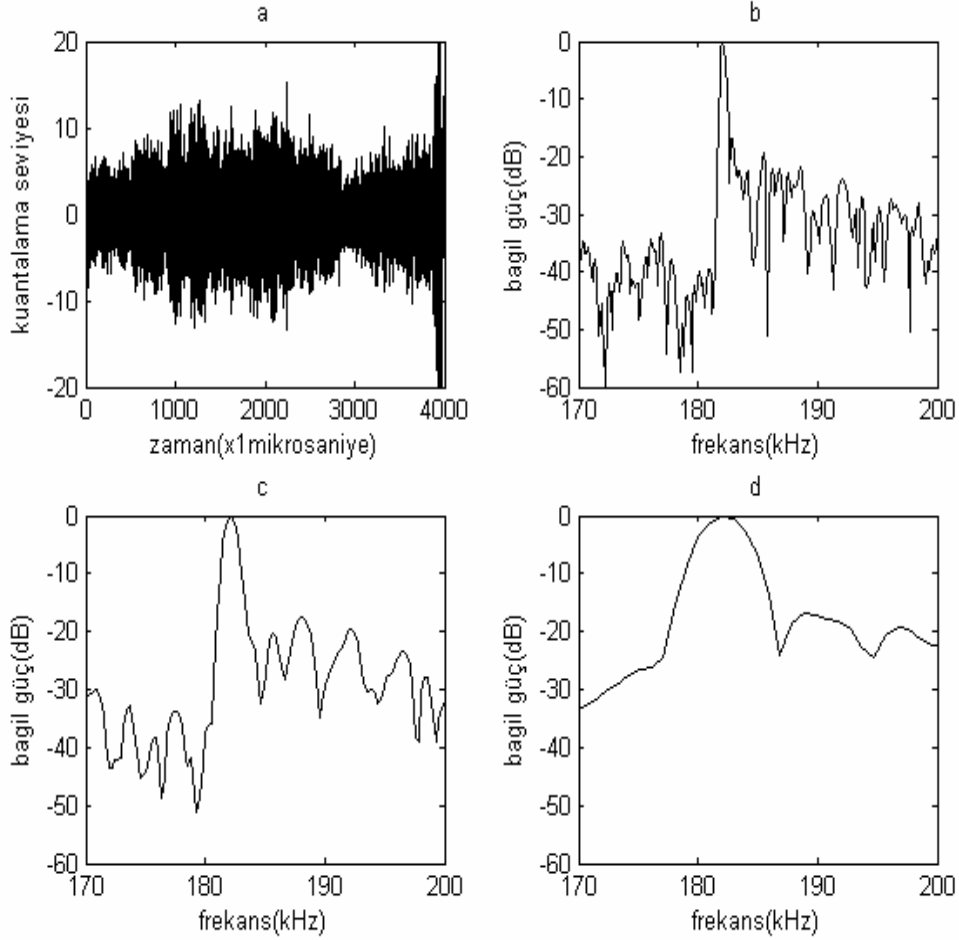
Radyo kanalı yayılım verileri kullanılarak önce DFT ile elde edilen tayf incelenecektir. Veriler sönmelenmeyen sinüslerden oluştuğu için Fourier analizi kullanılabilir. 3.2. bölümde de ele alındığı gibi tayfsal sızıntının etkisini azaltmak amacıyla işaret önce hamming penceresi ile pencerelenecek ve sonra gürültü seviyesindeki değişimleri azaltmak amacıyla ardışıl birkaç tarama için elde edilen tayfın ortalamaları alınacaktır. Dolayısı ile burada ve sonraki bölümlerde kullanılan Fourier dönüşümü tabanlı yöntem, değiştirilmiş periodogramdır.

Bu ve sonraki bölümlerde kullanılan kanal 1, kanal2... verilerinin her biri farklı alıcı ve verici konumları için toplanan radyo kanalı yayılım verileridir. Veriler seçilirken kanalın gürültü seviyesine, yankı gecikme aralığına (frekans bandı genişliğine karşılık gelir), band içi girişimin olup olmadığına ve yankıların bağlı güçlerine dikkat edilmiştir.

Tayf kestirim yöntemlerinin seçiminde kullanılan kanal 1 verisinde güçlü tek yankı vardır ve şekil 3.14'te görülmektedir. Şekil 3.14.a'da işaret zaman düzleminde çizdirilmiştir. Zaman düzleminde analog-sayısal çevirici (ADC) kuantalama seviyesi aralığı (-128,128) iken bu işaretin kuantalama seviyesi sadece (-15,15) aralığında değişmektedir. Dolayısı ile işaret zayıftır ve işaret gücü gürültü gücü oranı (SNR) düşüktür. Değişen band genişlikleri için elde edilen tayflar şekil 3.14.b, c ve d'de görülmektedir. Band genişliklerinin değişimi kullanılan örnek sayısının değişimi ile sağlanmaktadır ve band genişliği arttıkça tayf hakkında daha çok bilgi elde

edinilmektedir. Bu işaret için güçlü frekans bileşenin 60MHz band genişliği için dahi tek bir frekanstan oluştuğu görülür.

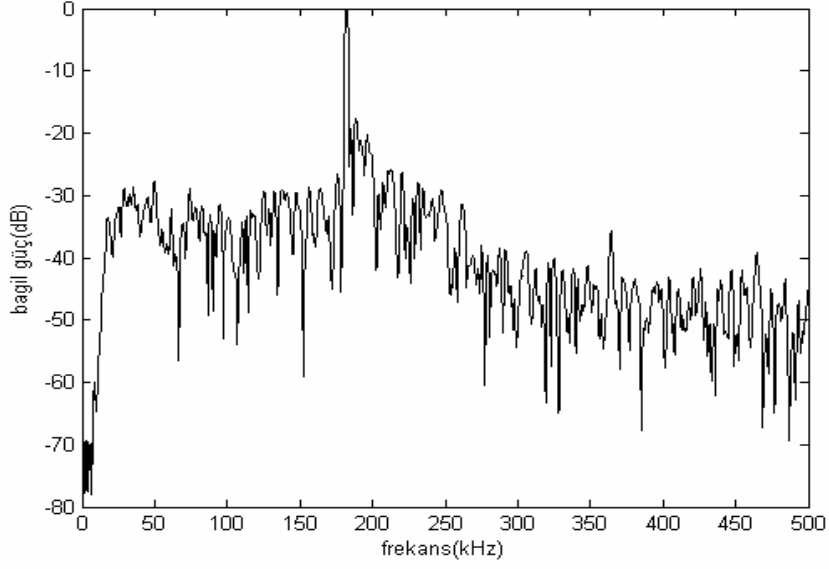
Kanal 1 verisi için farklı kestirim yöntemleri ile elde edilen tayflar, Matlab araç kutusundaki hazır komutlar kullanılarak çizdirilmiştir. Bu tayflar, 5MHz band genişliğinde yani 333 örnek ile çizdirilmiştir. Değiştirilmiş periodogram kullanılarak elde edilen tayf, şekil 3.15'te görülmektedir.



Şekil 3.14. a) zaman düzleminde bir tarama b) 60MHz band genişliğindeki verinin tayfı

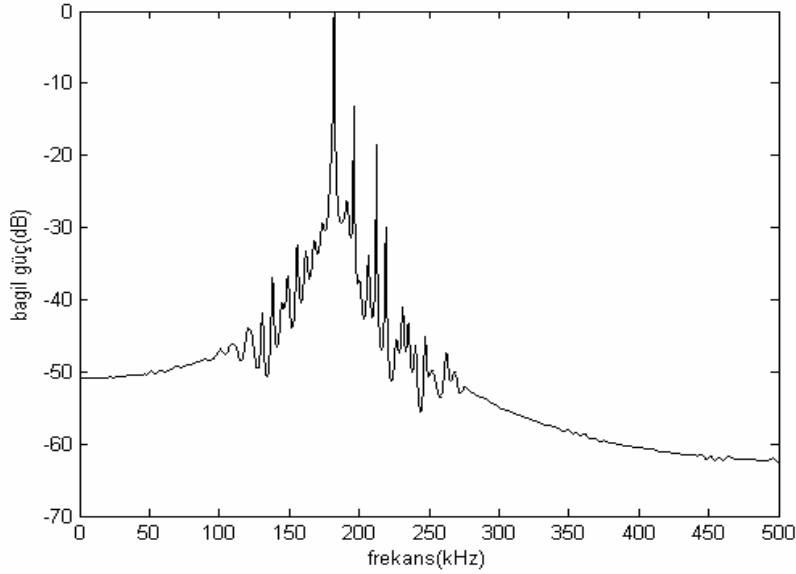
c) 20MHz band genişliğindeki verinin tayfı

d) 5MHz band genişliğindeki verinin tayfı

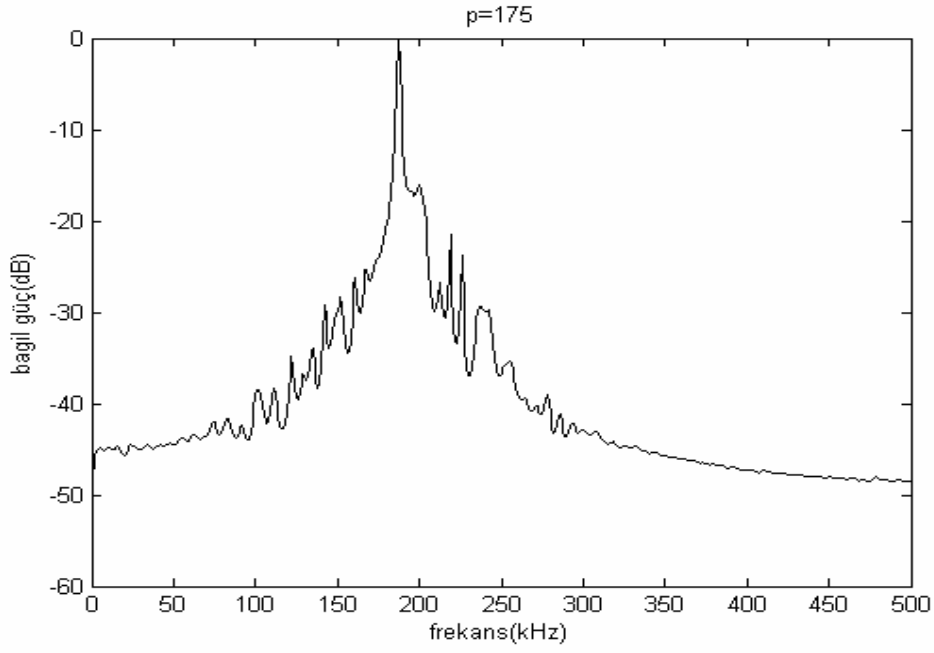


Şekil 3.15. Değiştirilmiş periodogram yönteminin tayfa etkisi

Şekil 3.16'da ön süzgeçlemeli Prony yöntemi kullanılarak elde edilen tayf görülmektedir. Bu yöntem ayrıntılı olarak 4. bölümde anlatılacaktır. Kullanılan dereceler kutup için 175, sıfır için 30'dur ve işarete ön süzgeçleme yapılmıştır. Şekil 3.17 de ise, Prony yöntemindeki derece değeri kullanılarak ön süzgeçlemeli Yule-Walker yöntemi ile elde edilen tayf görülmektedir. Bu yöntemde AR modeli kullanılır.

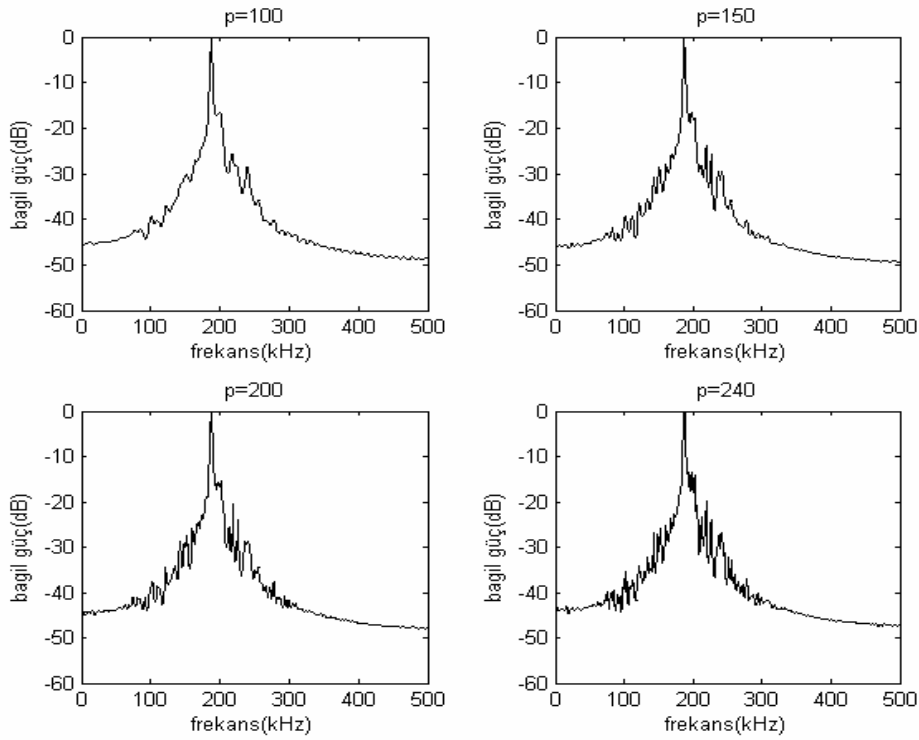


Şekil 3.16. Ön süzgeçleme kullanılan Prony yöntemi



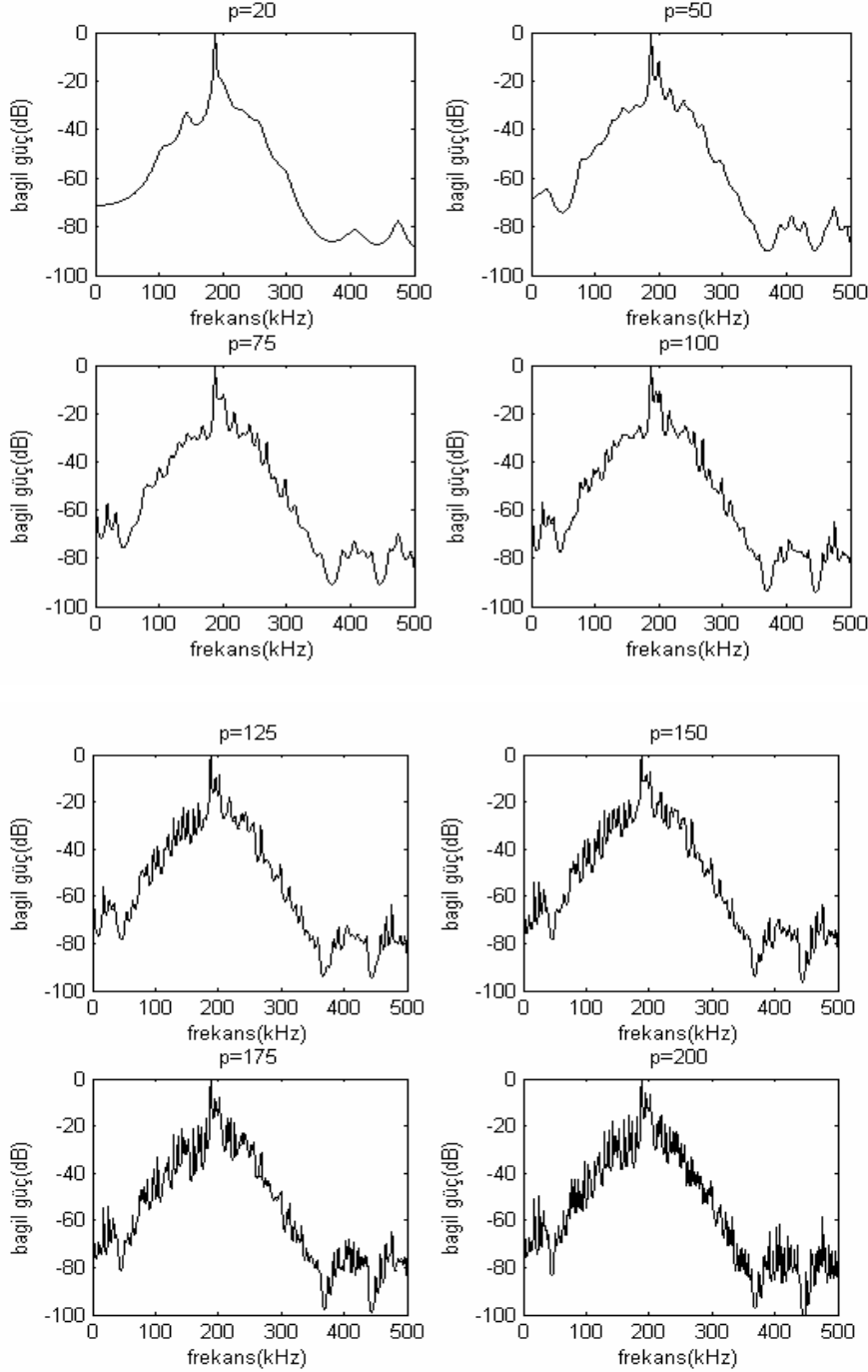
Şekil 3.17. Ön süzgeçlemeli Yule-walker yöntemi ile tayf hesabı (derece=175)

Değişik derece seçimlerine bağlı olarak Yule-Walker yöntemi grafikleri şekil 3.18’de bulunmaktadır. Bunun gösterilme nedeni yöntemler değişikçe derecenin değişiminin işareti farklı olarak etkileyebileceğini göstermektir.

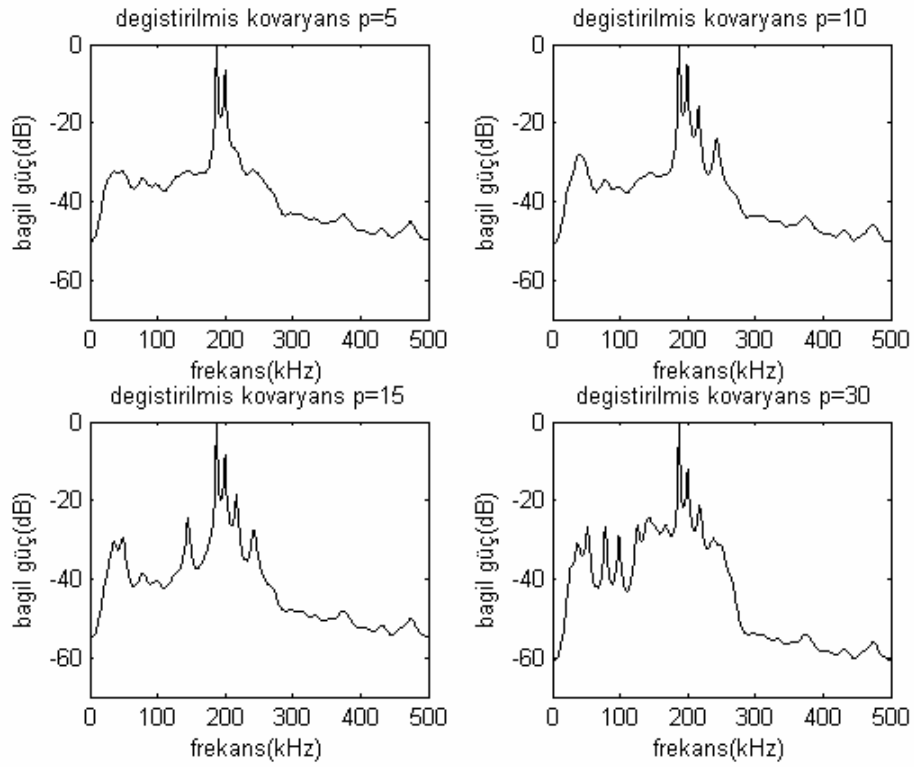


Şekil 3.18. Değişik dereceler için Yule-Walker yöntemi

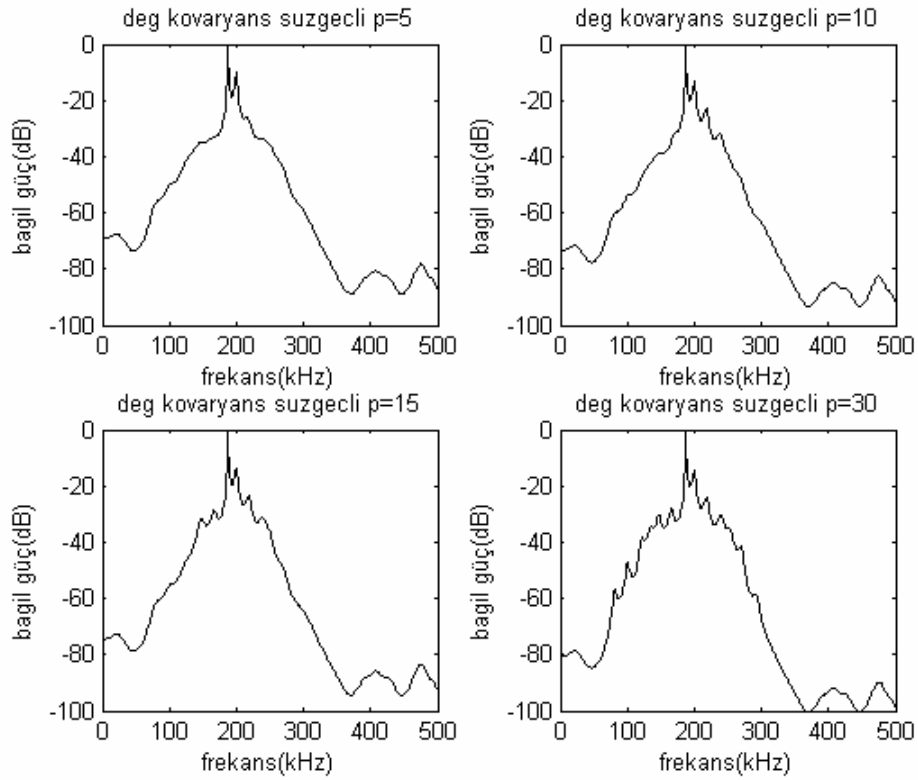
Benzer şekilde Burg yöntemi kullanılarak elde edilen grafikler, şekil 3.19’da görülmektedir. Burada da derece belirlemede AR modeli kullanılmıştır. Burg yöntemi ile Yule-Walker Yönteminin tayfları incelendiğinde, aynı dereceler için Burg yönteminde daha çok salınımların olduğu görülmektedir.



Şekil 3.19. Değişik dereceler için Burg yöntemi



Şekil 3.20. Öz vektör yöntemi ile tayf tahmini



3.21. Süzgeçleme kullanılarak öz vektör yöntemi ile tayf tahmini

Şekil 3.20’de öz vektör yöntemi kullanılarak tayf tahmini yapılmaktadır, [12]. Burada ilinti matrisi değiştirilmiş kovaryans yöntemi ile sağlanmıştır. Şekil 3.21’de ise ön süzgeçleme yapılarak öz vektör yöntemi ile şekiller çizdirilmiştir. Böylece işaretin band aralığı seçilmiş olur.

Sonuç olarak çok sayıda tayf kestirim yöntemi bulunmaktadır ve bu kestirim yöntemleri için farklı değerlendirmeler yapılabilir. Burada kullanılan Burg, Yule-Walker gibi yöntemler AR modellemeyi kullanırlar. AR modellemede işaretin sadece kutuplardan oluştuğu bilinmektedir. Burg ve öz vektör yöntemi ile elde edilen tayfların gerçek tayftan oldukça uzak olduğu görülmüştür. Yule-Walker yöntemi ile elde edilen tayf gerçeğe yakın olmasına rağmen bu kez de çözünürlükte iyileşme sağlanamamıştır. Prony yönteminin farkı ise modelde sıfırları da içermesidir, böylelikle işareti daha iyi temsil edebilecek bir modelle sonuçlanmıştır. Bu nedenle yüksek çözünürlük yöntemleri arasından Prony yöntemi seçilmiştir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Giriş

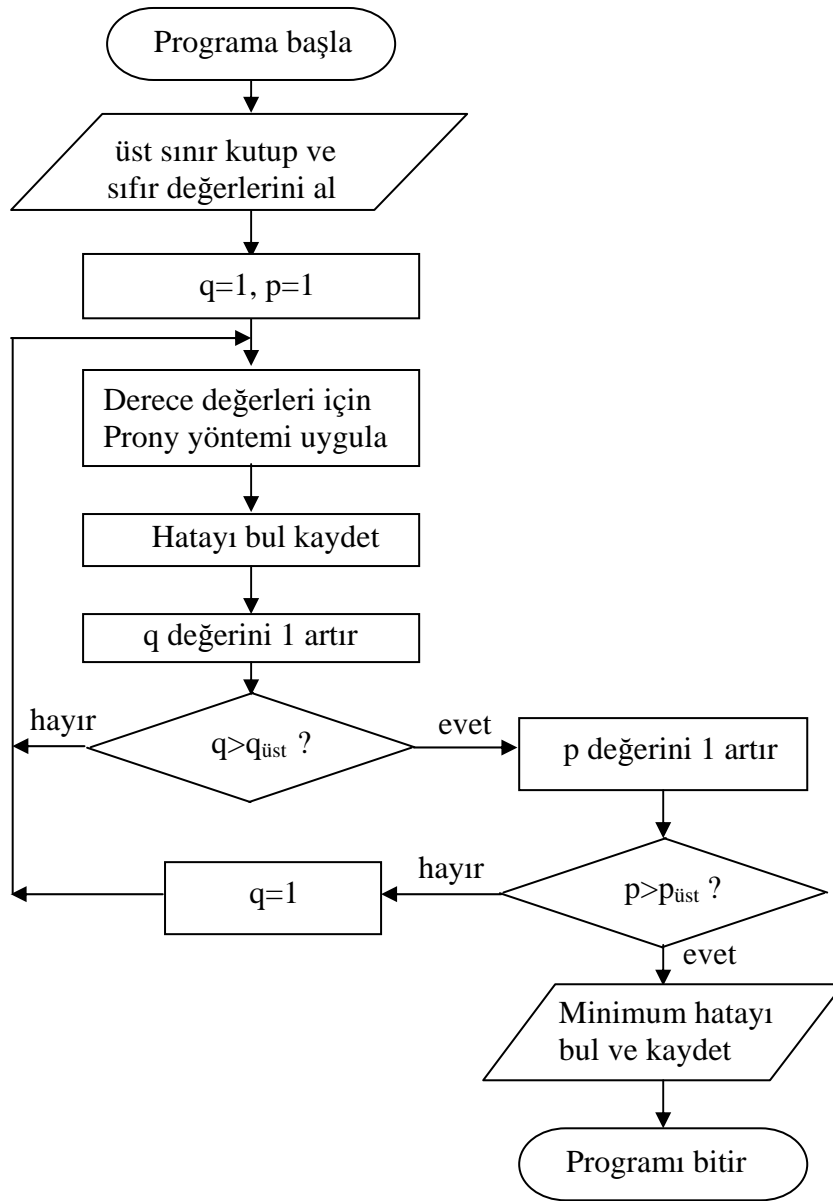
Bu çalışmanın amacı yüksek çözünürlüklü tayf kestirim yöntemleri kullanarak Fourier dönüşümü ile belirlenenden daha fazla yankı belirleyebilmektir. Bu amaçla Yule-Walker, Burg vb. yüksek çözünürlüklü tayf kestirim algoritmaları kullanıldı. İçlerinden en tutarlı sonuç veren Prony yöntemi ile elde edilen tayflar incelendi. Çoğu çalışmada ileri sürüldüğü gibi Prony yönteminin gerçekten 1.5 – 2 kat daha iyi çözünürlük sağlayıp sağlamadığını görmek için Prony yöntemi ile elde edilen tayf, Fourier dönüşümünde iki kat örnek sayısı (iki kat daha uzun zaman dilimine karşılık gelir) kullanılarak elde edilen tayf ile karşılaştırıldı.

Bu bölümde sürekli dalga frekans modülasyonlu (Frequency modulated continuous wave FMCW) işaretin kullanıldığı kanal sonda cihazı ile elde edilen veriler [19] kullanılarak, Prony ve FFT uygulamalarının nasıl sonuç verdiği incelenecektir. Bölüm 3'te de belirtildiği gibi kanal sonda cihazında 60 MHz lik iletim band genişliği her 4 mili saniyede bir taranmıştır; bu tarama 1910 MHz – 1970 MHz aralığında zamanda doğrusal olarak frekans artırılmıştır. Alıcıda yerel olarak üretilen FMCW işaretinin frekansları alıcıya gecikmeli olarak gelen frekans bileşenleri ile çarpıldığında toplam ve fark frekansları elde edilir. Alçak geçiren süzgeç kullanılarak sadece fark frekansları tutulur. Bu fark frekans değerleri genellikle 0-250 kHz aralığındadır ve küçük örnekleme frekansı kullanılarak veriler sayısallaştırılıp daha sonra işlenmek üzere kaydedilir. Bu örneklenmiş işaret Fourier dönüşümü ile frekans düzlemine aktarıldığında elde edilen tayf aslında kanalın yankı profilidir. Bu tayfdaki her bir frekans bileşeni ayrı bir yankı gecikmesine karşılık gelir; diğer bir ifadeyle frekans değerleri doğrudan yankı gecikmesi ile ilgilidir. Frekans bileşenlerinin bağıl gücü ise yankı gücünü verir.

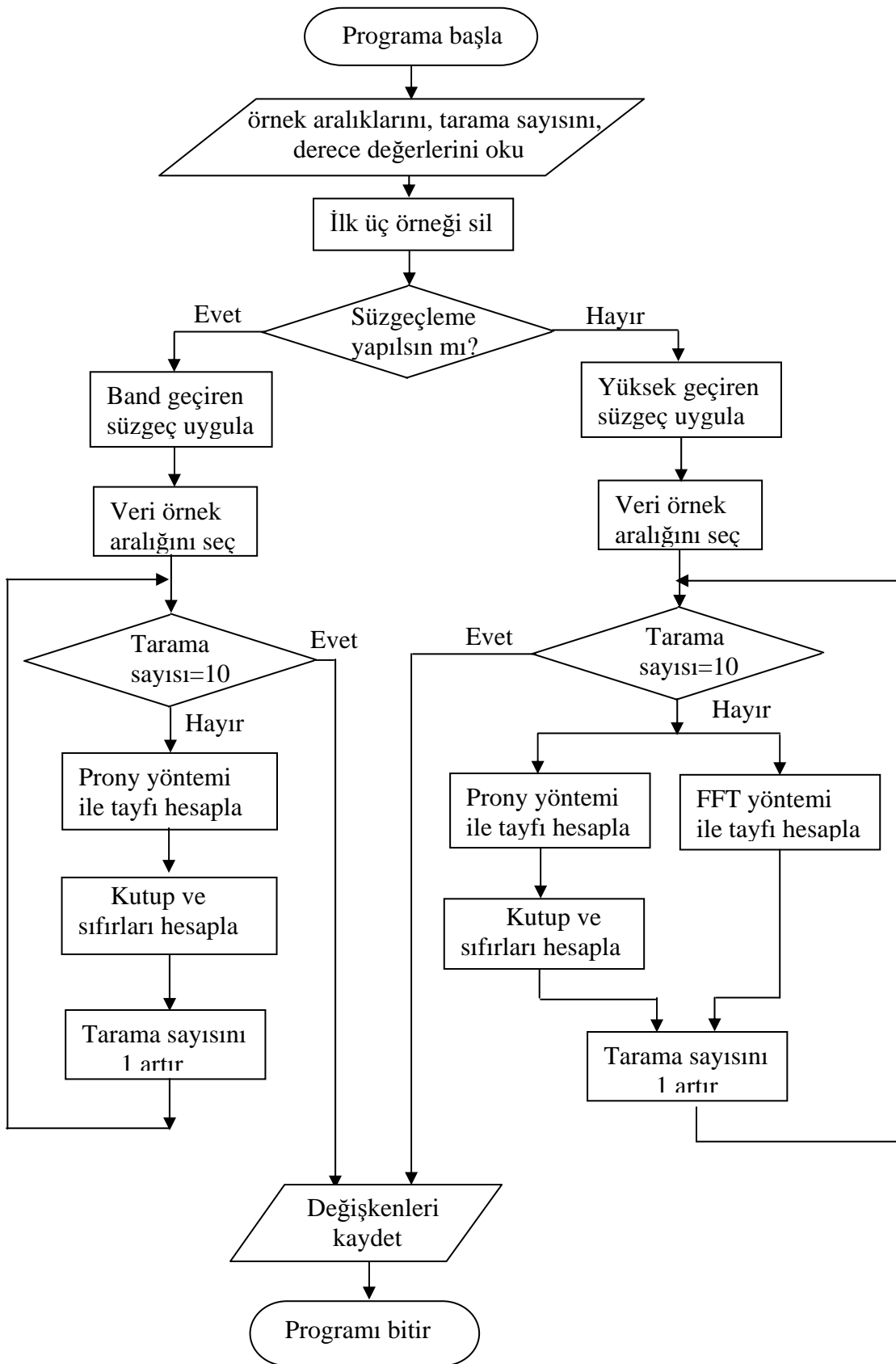
Buradaki veriler 1 MHz örnekleme frekansında toplandığı için belirlenebilecek en yüksek frekans değeri 500 kHz dir. İstenilen işlemlerin yapılabilmesi için bir program yeni.m ve şekil çizdirmek için değişik programlar yazılmıştır. Bu programda, öncelikle veriler istenilen formata çevrilip daha sonra işlenir. Veri dosyalarının her biri 1000253x1 boyutundadır. İlk üç veri ise veri toplama ünitesine ait ayar değerleri olduğundan atılır ve her bir işlem için 250 tarama yapıldığından bu veri 4001x250 boyutunda bir matrise dönüştürülür. Bu 4001 örnekli veriler kullanılarak Prony ve FFT

uygulamaları karşılaştırılacaktır. Prony uygulaması için MATLAB'ın '*prony*' komutu kullanıldı [20-22]. Bilindiği gibi *prony* komutunun kullanılması için pay ve payda derecelerinin bilinmesi gereklidir (3.2 bölümüne bakınız). Bu çalışmada Pay ve payda derecelerini belirlemek amacıyla da bir program yazılmıştır ve bu program çalıştırıldığında minimum hatanın elde edildiği derece değerleri sonuç olarak alınır (Şekil 4.1). FFT uygulamasında işarete hamming pencereleme uygulanarak işaretin yan loblarının genliğinin azaltılması (tayfsal sızıntıyı önlemek için) sağlanır.

Veriler seçilirken kanalın gürültü seviyesine, yankı gecikme aralığına, band içi girişimin olup olmadığına ve yankıların bağlı güçlerine dikkat edilmiştir.



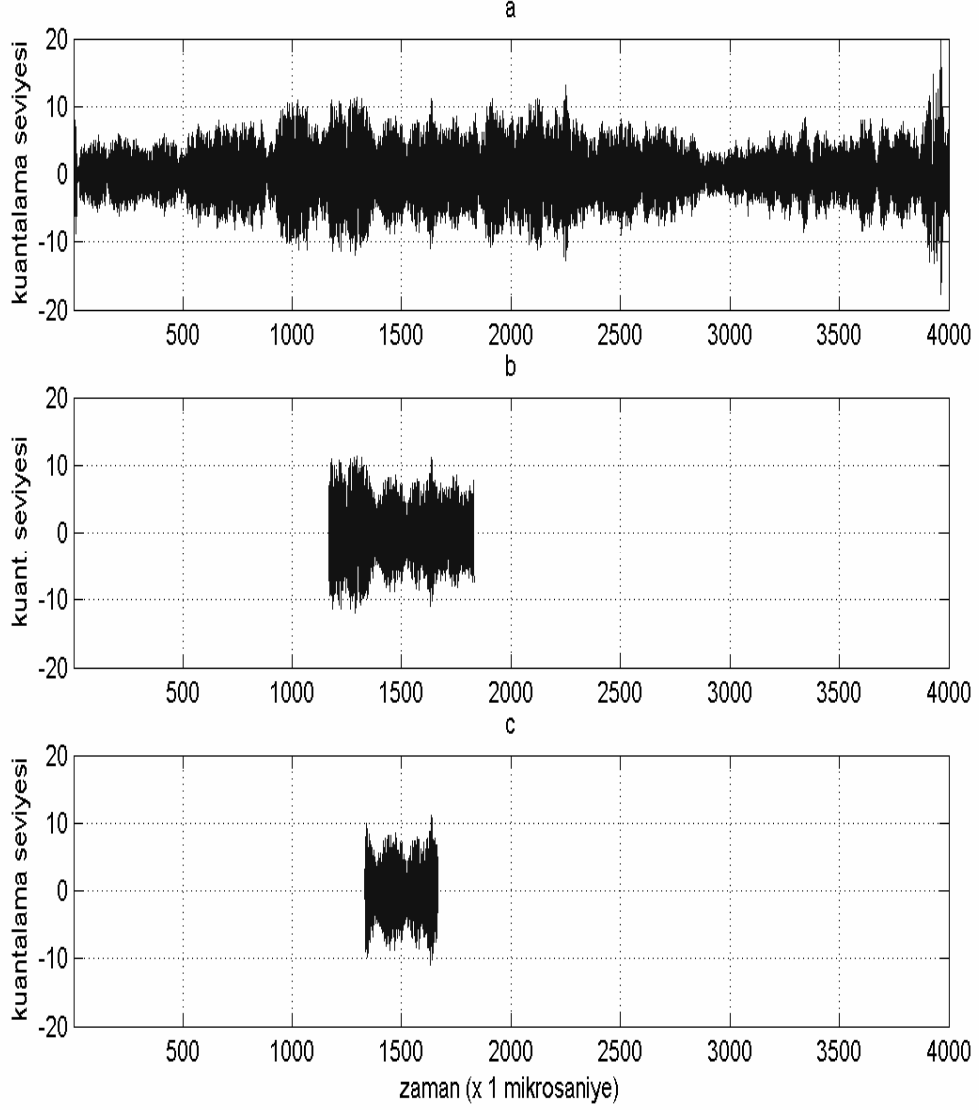
Şekil 4.1. Derece Belirleme Programının Akış Diyagramı



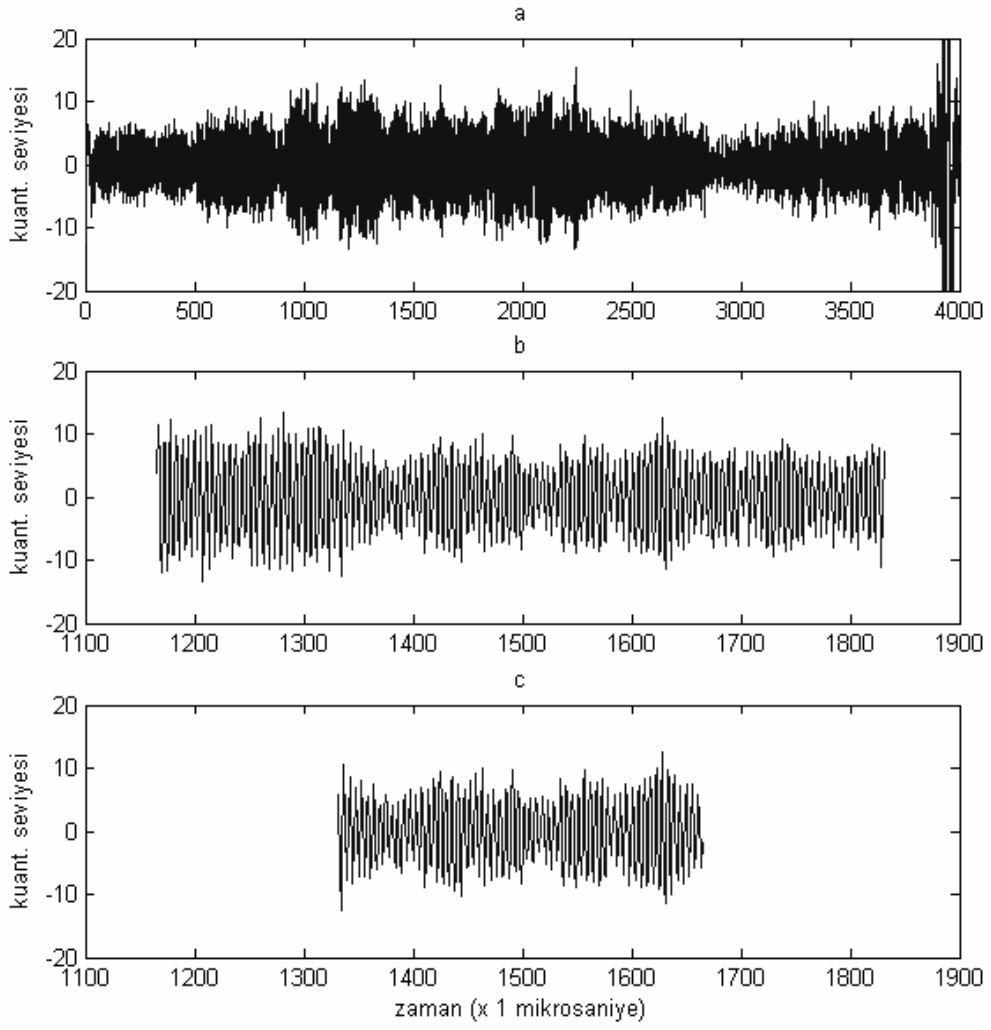
Şekil 4.2. Ana Programın Akış Diyagramı

4.2. Az Yankılı Kanal - Kanal 1

İlk olarak kanal 1 verisi üzerinde işlemler yapılacak ve çözünürlüğe etkileri incelenecektir. Kullanılan veri aralığı şekil 4.3'te verilmiştir. Şekil 4.4 ise bu şeklin yakınlaştırılmış halidir.

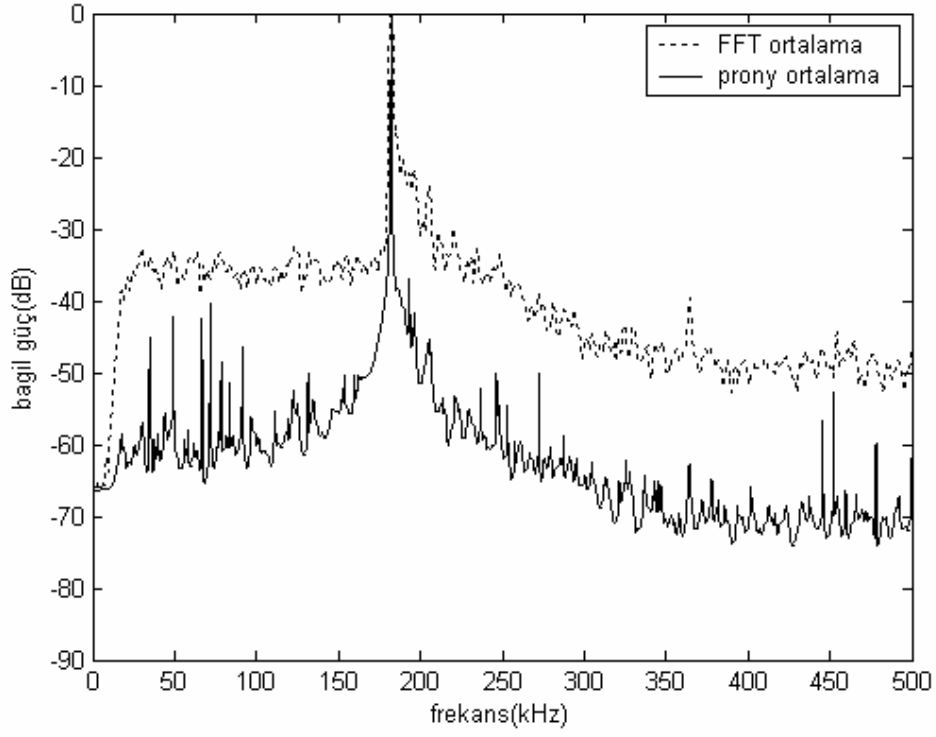


Şekil 4.3. a) Zaman düzleminde bir tarama, b)FFT analizinde kullanılan 666 örnek, c) Prony yöntemi ile tayf analizinde kullanılacak 333 örnek

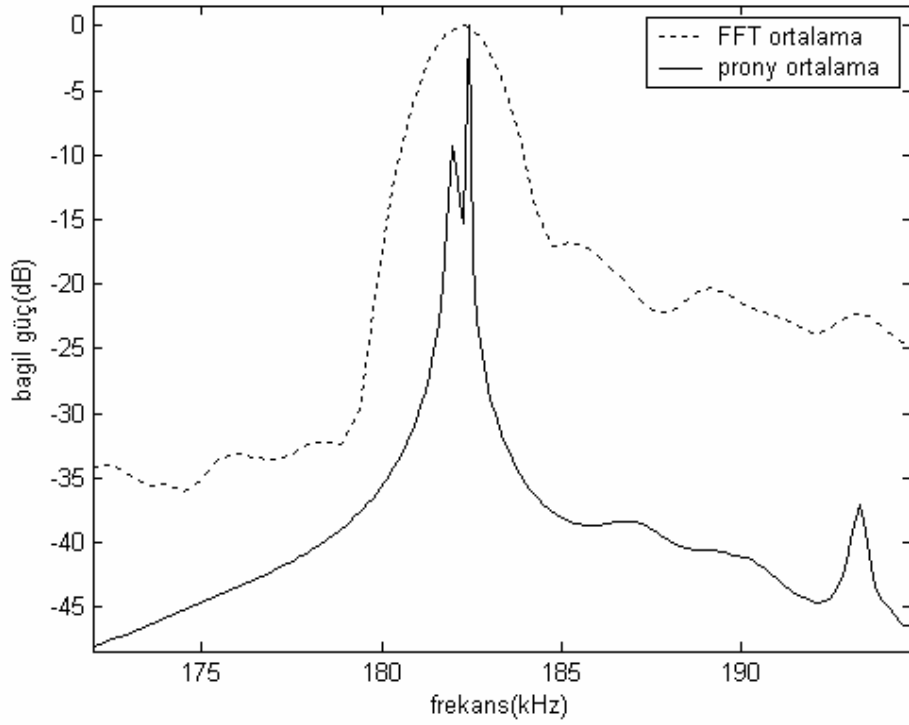


Şekil 4.4. Şekil 4.3'ün yakınlaştırılmış hali

FFT analizinde kullanılan örnek sayısı Prony analizinde kullanılan örnek sayısının iki katı seçildi. Böylelikle her iki yöntem ile benzer tayf çözünürlüğü elde edilirse Prony yöntemi ile FFT yöntemine göre iki kat daha iyi çözünürlük elde edilir yargısına varılacaktır.

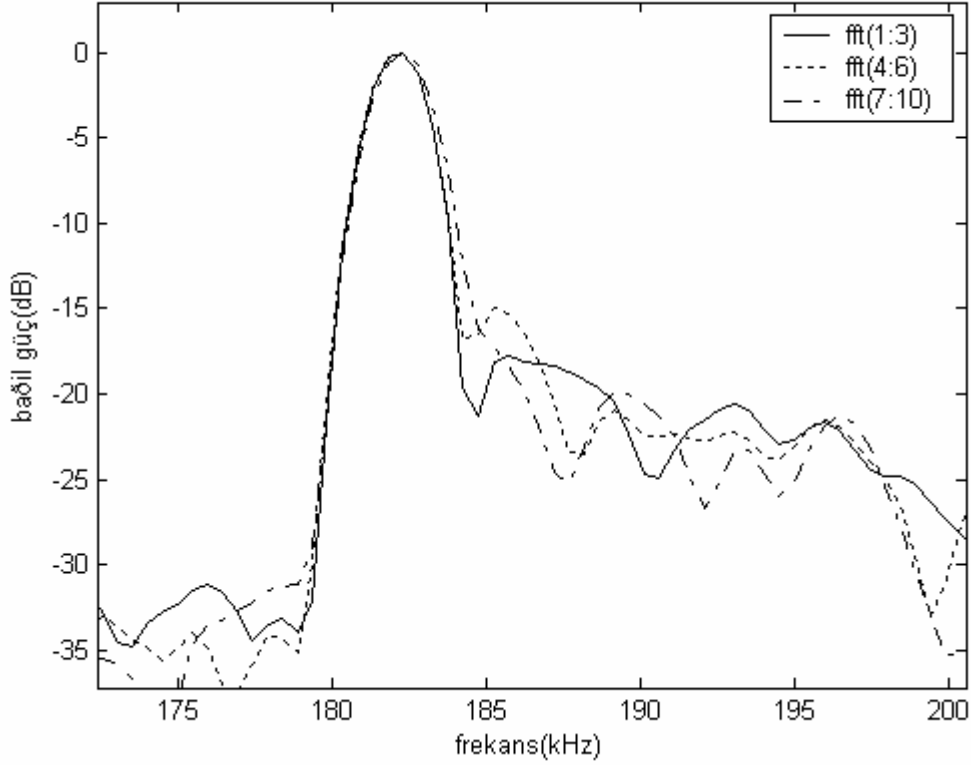


Şekil 4.5.a. Ardışıl 10 tarama için Prony-FFT ortalamaları

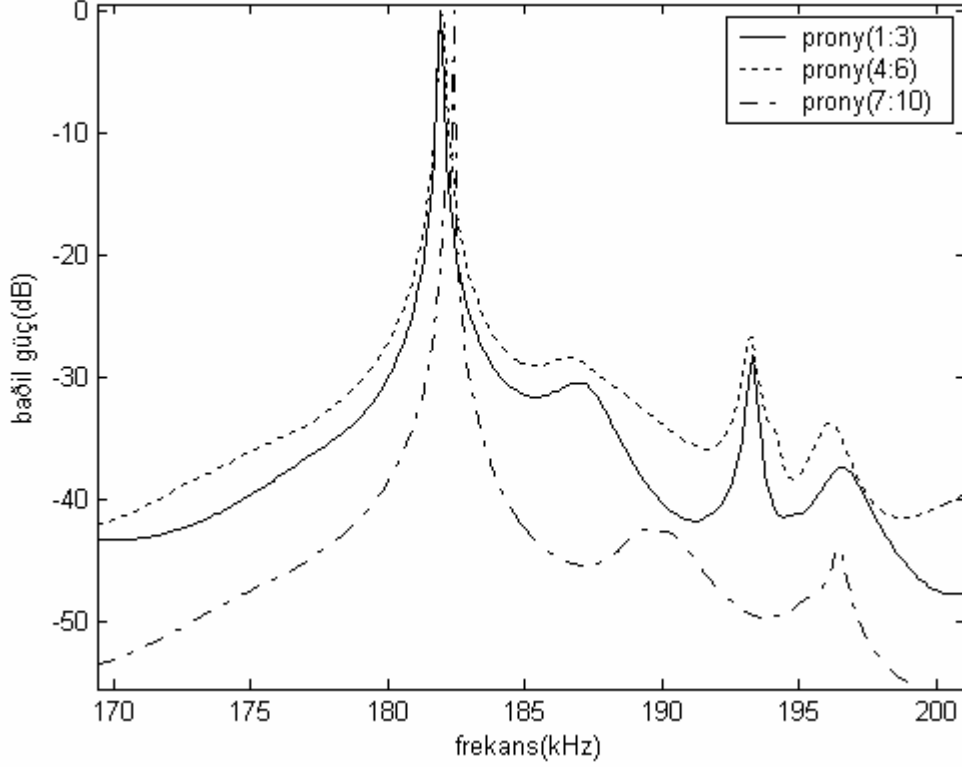


Şekil 4.5.b. Şekil 4.5.a'nın yakınlaştırılmış hali

Şekil 4.5.a ve b incelendiğinde FFT yöntemi için işaretin tek bir yankıdan oluştuğu görülmektedir çünkü işaretin sadece $f=182\text{kHz}$ 'de maksimum güç değerine sahip bir frekansı vardır, diğer frekans bileşenlerinde güç değerleri -30dB ve aşağısındadır. Bu da gelen yankıların çok zayıfladığının bir göstergesidir. Ancak Prony yöntemi ile ardışıl 10 taramadan elde edilen tayfların ortalaması alındığında ana yankı bileşeni için iki tepe görülmektedir. Bu ise Prony yönteminde kullanılan derece sayısının fazla olmasından dolayı ortaya çıkan bir yalancı (sahte) yankı gibi yorumlanabilir veya Prony iyi bir tayf kestirim yöntemi değildir kanısına varılabilir. Ancak bu söylenenlerin doğru olmadığını, şekil 4.6 ve şekil 4.7 incelendiğinde anlaşılacaktır, çünkü yankı ile ilgili frekans bileşeninin taramadan taramaya geçmiş olmasının buna yol açtığını görülmektedir.



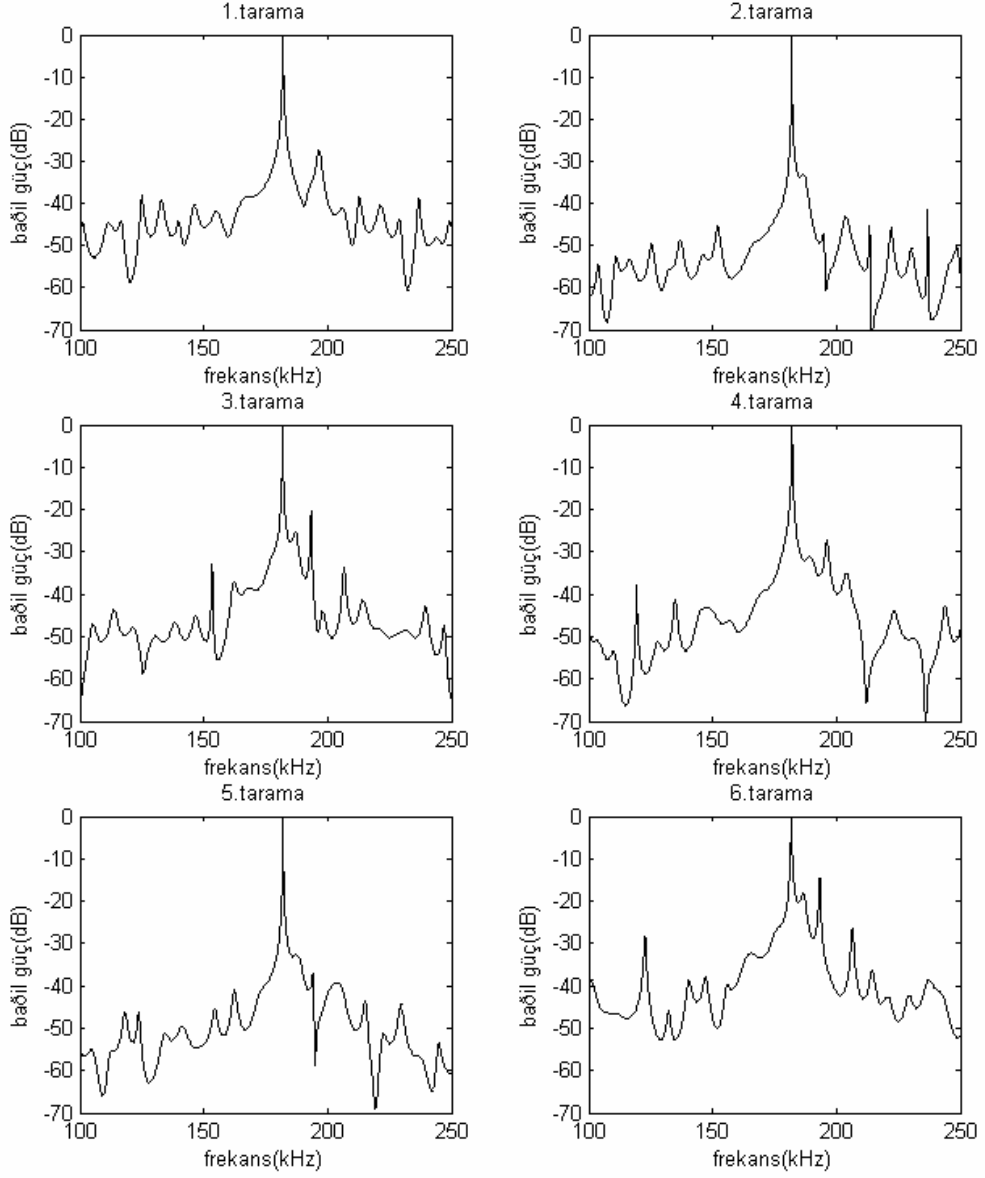
Şekil 4.6. Farklı taramalar için FFT ortalamaları



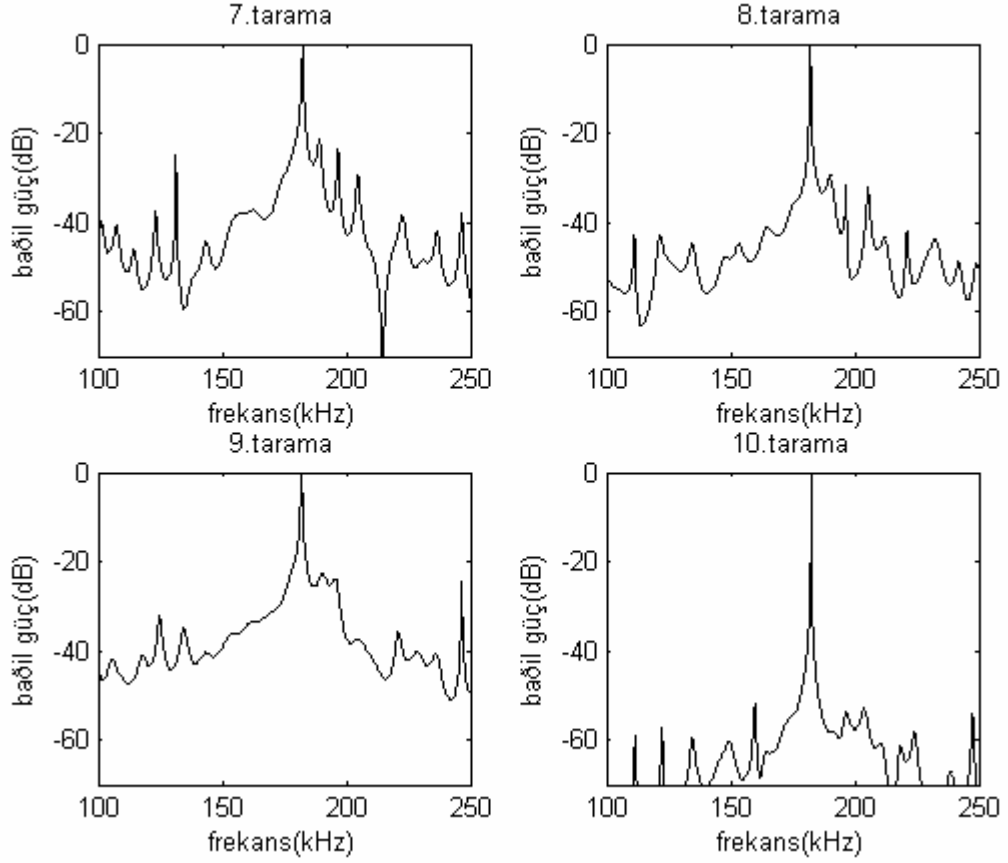
Şekil 4.7. Farklı taramalar için Prony ortalamaları

Şekil 4.6, aynı tarama değerlerini içeren işaretlerin ortalamasının FFT sonuçlarını, ve şekil 4.7 Prony sonuçlarını göstermektedir. Şekil 4.7'de elde edilen grafikte işaretlerde hızlı yükseliş ve düşüşler var iken, şekil 4.6'da pencereleme ve FFT uygulamasından dolayı bu tarz bir değişim yoktur. Her iki grafikte de, farklı taramaların ortalamaları birbirinden farklı tayf eğrilerinin oluşmasına neden olmuştur. Bir ile üçüncü taramaların kullanıldığı verilerde (p(1:3)), ana frekans bileşeninin yanında 186 kHz'de bir frekans bileşeni var iken, 7 ve 10. taramaların ortalamalarının (p(7:10)) alındığı şekilde 190 kHz'de bir frekans bileşeni vardır. Bu grafiklerde frekansın değişmesi, gelen yankının gecikme zamanı ile ilişkilidir. Prony yöntemi ile taramadan taramaya (zamanla) ana yankının frekansının, dolayısı ile de karşılık geldiği yankı gecikmesinin, değiştiği görülebilmektedir. Oysa bu durum şekil 4.6'da yani FFT ile yapılan incelemede görülmemiştir. Bu Prony ile elde edilen tayfda çözünürlüğün daha iyi olmasının, başka deyimle tayfta ana yankıya ait bileşenin daha dar olmasının ve daha keskin bir tepe vermesinin bir sonucudur. Kanal sonda (channel sounder) sistemindeki alıcının hareket etmesi sonucu alıcıya ilk gelen en güçlü yankının da alıcıya geliş

zamanının (gecikmesi ya da tayfta karşılık geldiği frekansı) değişmesi beklenen bir durumdur. Bu değişim çözünürlük açısından daha kötü başarımla sergileyen FFT ile 10 tarama süresinde (40 milisaniyelik zaman diliminde) gözlenmemiştir.



Şekil 4.8.a. Prony yöntemi kullanılarak ilk altı taramanın güç-frekans grafikleri



Şekil 4.8.b. Prony yöntemi kullanılarak son dört taramanın güç-frekans grafikleri

Şekil 4.8.a ve 4.8.b her bir tarama için Prony yönteminin uygulanmasının sonuçlarını ayrı ayrı vermektedir. Buradan da görüldüğü gibi 180kHz civarında olması gereken işaret enerjisinin dışında farklı frekanslar içinde enerjisi ana frekans bileşenin güç değerinden küçük olan gürültü bileşenleri (yalancı tepeler) vardır. Kimi taramada bunların seviyesi oldukça düşük iken (örneğin 10.tarama) kimi taramada (örneğin 3.tarama) oldukça yüksektir. Ayrıca gürültü tabanı seviyesi de bir taramadan diğerine değişmektedir.

4.3. Önsüzgeçleme İle Prony Yöntemi

Şekil 4.8.a'da Prony yöntemi ile elde edilen tayfda 40kHz-100kHz, 440kHz-475kHz aralıklarındaki tepelerin güçleri, en yüksek güç değerine sahip frekans bileşeninden en az 40dB aşağıdadır. Şekil 4.8.b'de, 7. taramanın tayfında yaklaşık 130kHz civarındaki frekans bileşeninin gücü, en yüksek güç değerine sahip frekans

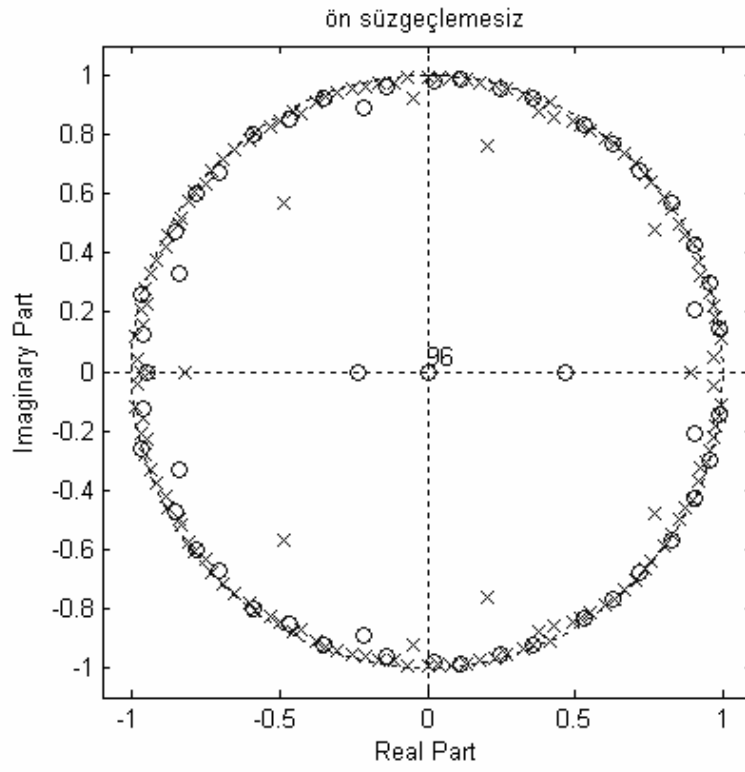
bileşeninden sadece 25dB kadar küçüktür. Bu son durum için 130kHz civarında var olabilecek düşük güçteki frekans bileşenlerinin, Prony yöntemindeki modelleme hataları nedeniyle güçleri kat kat yüksek bulunmuştur.

Literatürde yayınlanan bir çalışmada [9], bu amaç için sonlu süreli geçiş işlevli süzgeçler (Finite Impulse Response-FIR) kullanılarak Prony tayf kestiriminin iyileştirilebileceği gösterilmiştir. Prony yöntemi ile elde edilen tayfta, Prony modellemesi kullanılmadan önce işaretin bandı bir band geçiren süzgeç ile sınırlandırılarak işaretin frekans bileşenlerinin olduğu aralık vurgulanmış olur. Bunun için işarete hangi frekans bileşenlerinin olduğu bilinmeli ve uygulanacak band geçiren süzgecin geçirme bandı ona göre seçilmelidir.

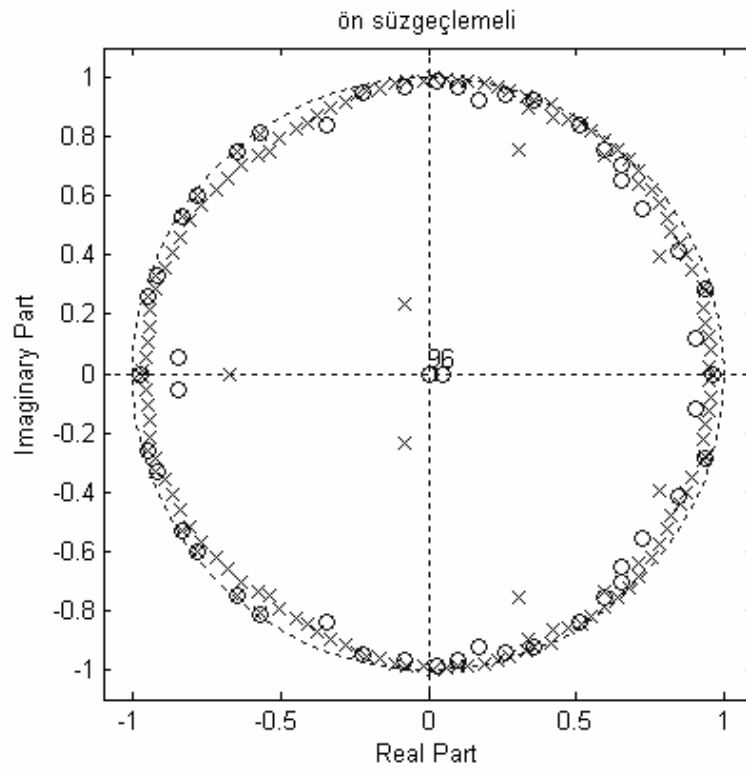
Önsüzgeçlemeli Prony yöntemi şu aşamalardan oluşur;

1. FFT ile süzgeçleme için gereken geçirme bandına ilişkin önbilgiyi elde edilmesi
2. (1) de elde edilen tayftan işarettaki frekans bileşenlerinin aralığını belirlenmesi. Yazılan programda, $w_nFIR=[wk1 \ wk2]$ değişkeni, $wk1$ kesme frekansı 1, $wk2$ kesme frekansı 2'yi göstermektedir.
3. derecesi q olan ve adım (2) de belirlenen geçirme bandına sahip FIR süzgeç için polinom katsayılarının belirlenmesi ve işaretin süzülmesi
4. Süzgeçlenmiş işarete Prony modelleme uygulanması
5. Elde edilen modelden tayfın çizdirilmesi.

Şekil 4.9'da Prony yönteminde ön süzgeçleme kullanılmadığında, şekil 4.10 ise ön süzgeçlemenin kullanıldığı durumda kutup sıfır dağılımları görülmektedir. Bu grafiklerde o sıfırları, \times ise kutupları göstermektedir. Bu işaretin $(0.35\pi, 0.42\pi)$ aralığında enerjisi vardır ve diğer aralıklarda $(0, 0.35\pi)$ ve $(0.42\pi, \pi)$ aralıklarında ise enerjisi yoktur. Dolayısı ile bunlara karşılık gelen negatif frekanslar için de aynı şeyler söylenir. Süzgeçleme ile frekans bileşenlerinin bulunmadığı bölgelerdeki kutupların birim çemberden uzaklaştırıldığı görülür. Bu ise elde edilen tayfa kendisini düşük güçte bileşenler olarak gösterir.

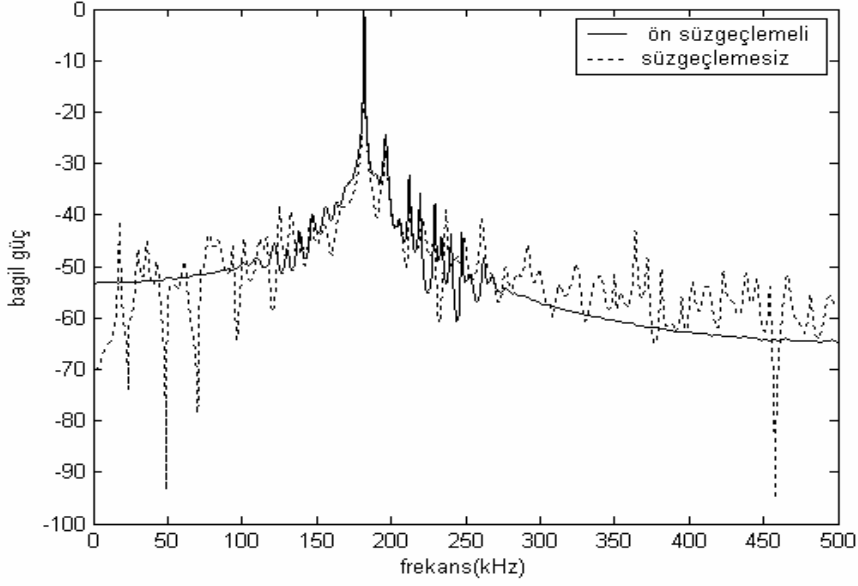


Şekil 4.9. Ön süzgeçleme kullanılmadan kutup ve sıfırların dağılımı

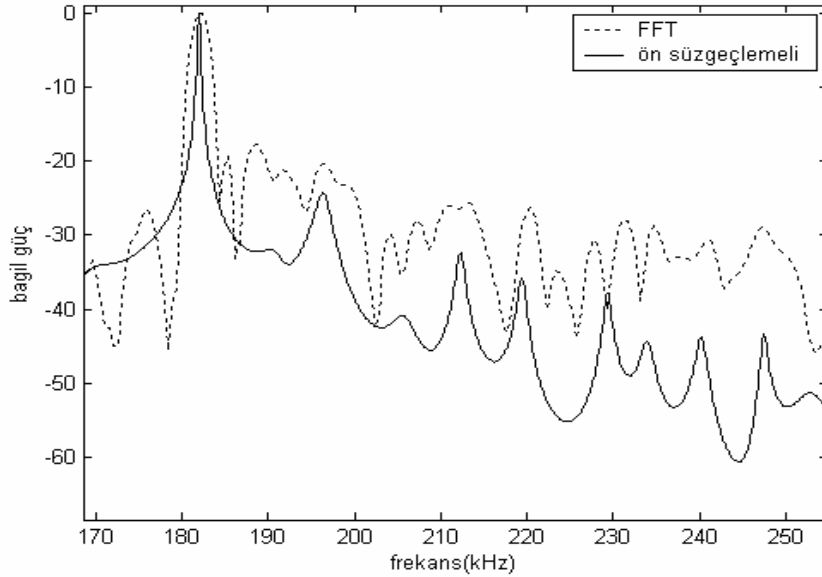


Şekil 4.10. Ön süzgeçleme kullanıldığında kutup ve sıfırların dağılımı

Ön süzgeçleme kullanımının sonuçları Şekil 4.11’de görülmektedir. Süzgeçleme sonucunda düşük güç değerlerine sahip frekans bileşenleri ve sahte frekans bileşenleri ortadan kalkmıştır. Şekil 4.12’de ise ön süzgeçleme uygulanan Prony yöntemi ile FFT uygulanması sonucunda elde edilen grafik bulunmaktadır ve ayırt edilen frekans bileşenleri için çözünürlüğün (maksimum güç değerinden 3dB aşağıda olan band aralığının genişliğinin dar olması) daha iyi olduğunun göstergesidir.



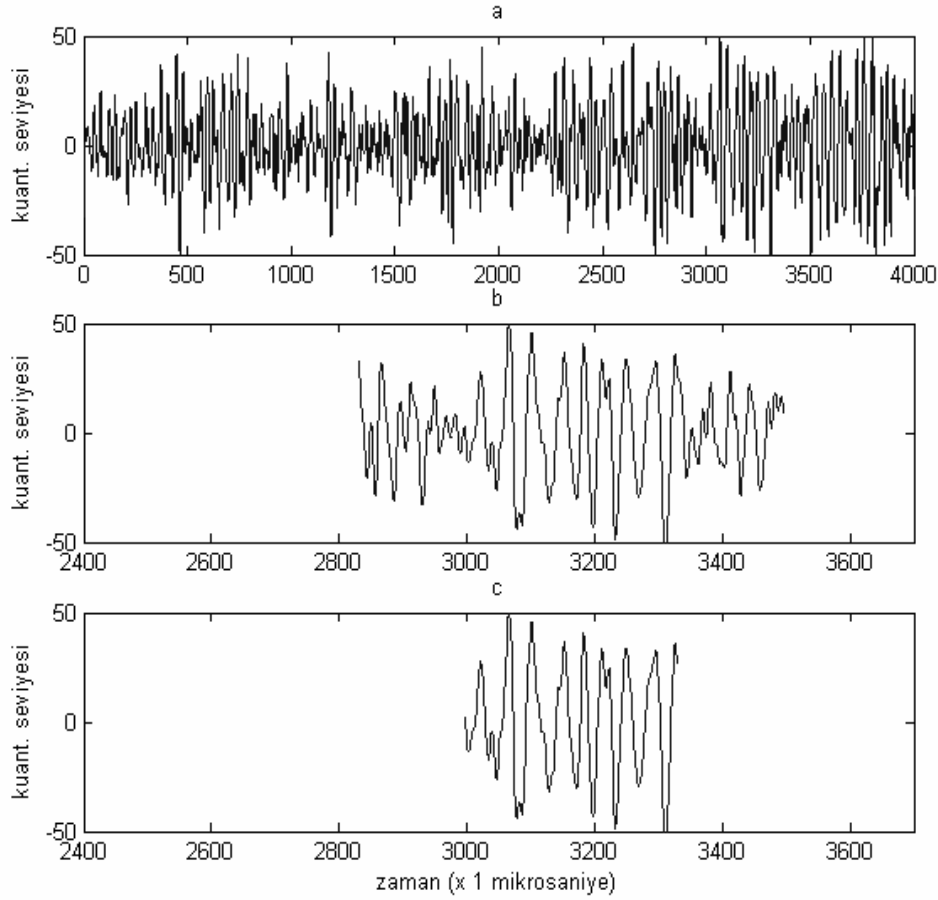
Şekil 4.11. Ön süzgeçlemenin Prony yöntemine etkisi



Şekil 4.12. Ön süzgeçleme ile prony yöntemi ile FFT'nin karşılaştırılması

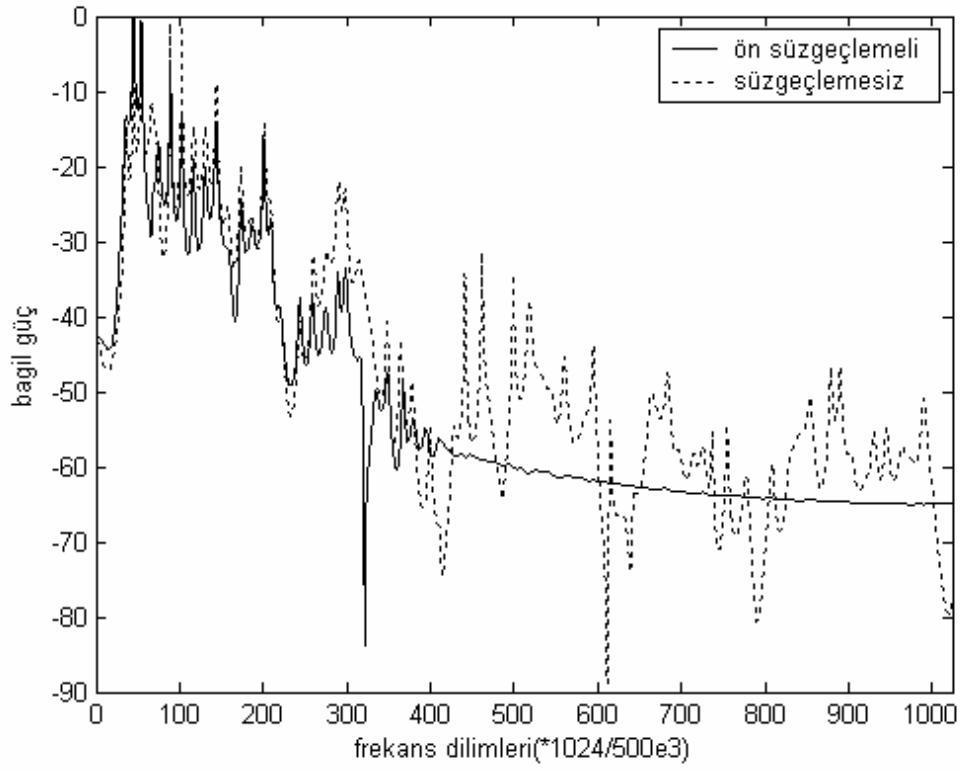
4.4. Çok Yankılı Kanal - Kanal 2

Bölüm 4.3'te dar bantlı işaret (az yankılı kanal) için Prony yönteminin getirdiği çözünürlük iyileşmesinin geniş bantlı işaretler (çok yankılı kanallar) için de geçerli olup olmadığını görmek için çok yankılı bir kanal verisi seçildi. Bu kanal verisi, kanal 2 verisi olarak adlandırıldı. Kanal 1 verisinde sadece bir güçlü yankı varken, kanal 2 verisinde birbirine yakın güçte 3-4 yankı vardır. Bu veri için kullanılan örnek aralığı şekil 4.13'te verilmiştir. Periodogram için 666 örnek, Prony yöntemi için 333 örnek kullanılmıştır.

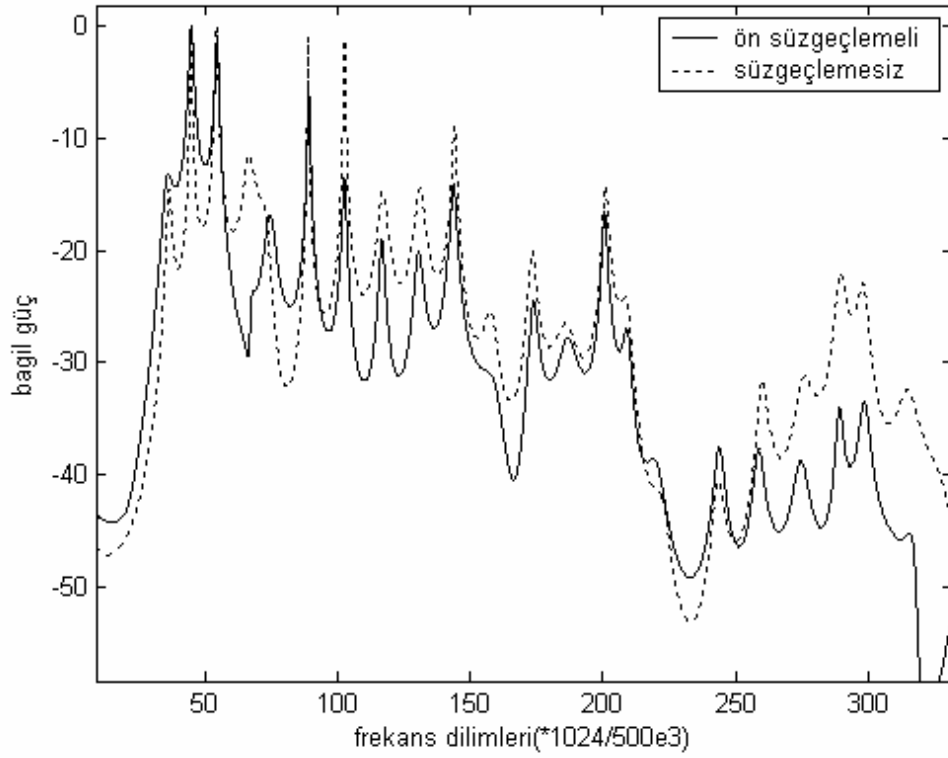


Şekil 4.13. Kanal 2 verisi için işlem yapılan örnek aralıkları

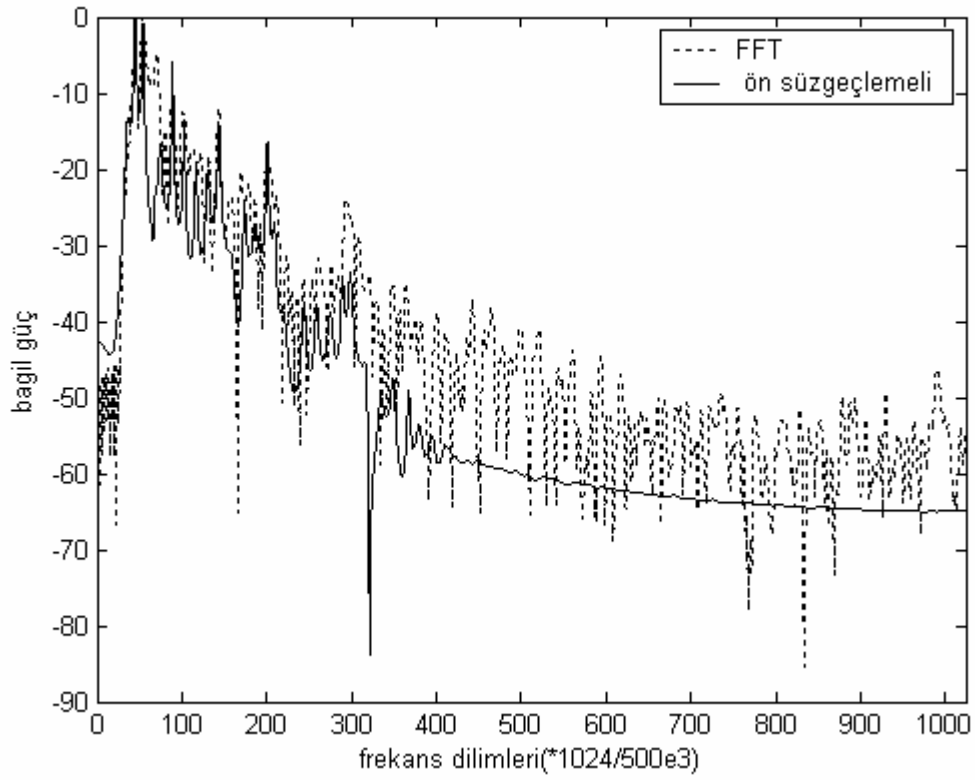
Sadece süzgeçlemenin etkisini gözlemek amacıyla Prony yöntemine ön süzgeçleme uygulandığı ve uygulanmadığı durum şekil 4.14.a ve b'de sunulmaktadır. Ön süzgeçleme ile var olan frekansların daha iyi ayırt edildiği ve olmayan frekansların ise bastırıldığı görülmektedir.



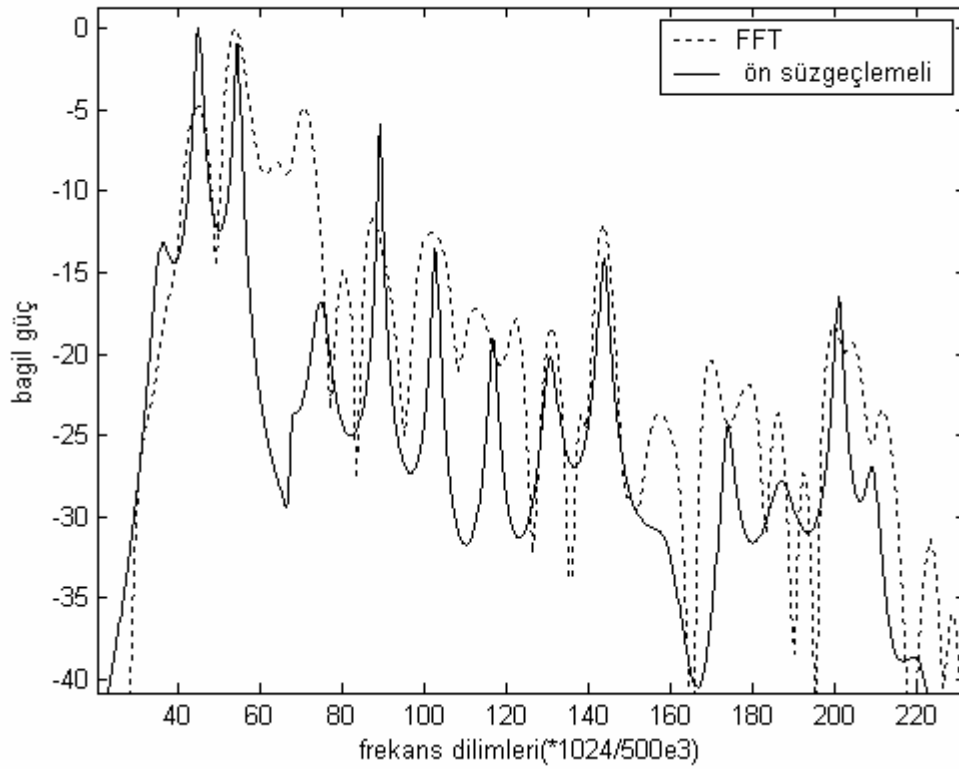
Şekil 4.14.a. Ön süzgeçlemeli ve ön süzgeçlemesiz Prony yöntemi



Şekil 4.14.b. Şekil 4.14.a'nın yakınlaştırılmış hali



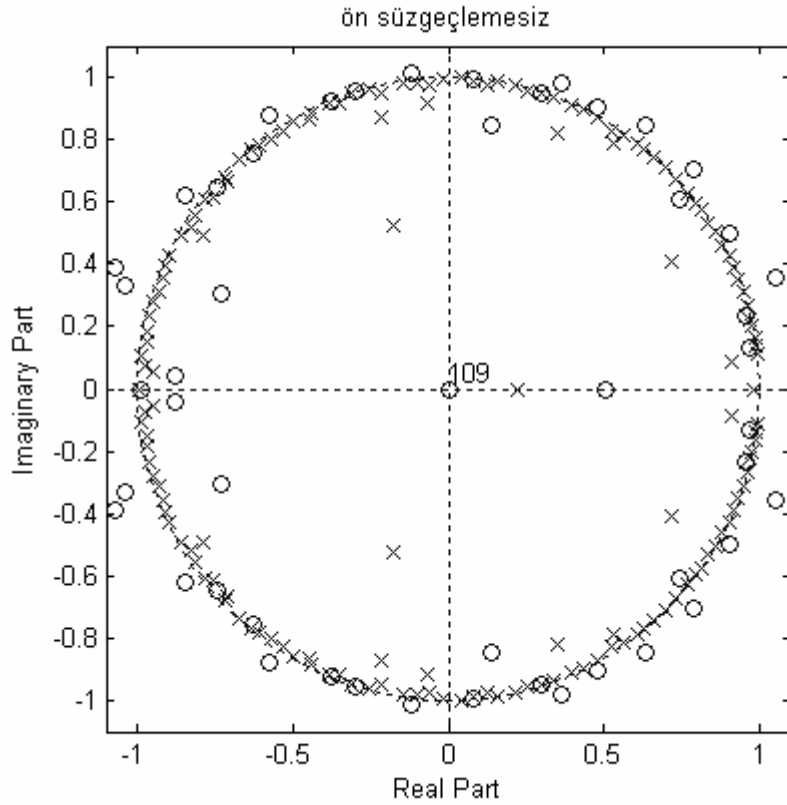
Şekil 4.15.a. FFT yöntemi ile ön süzgeçlemeli Prony yönteminin grafikleri



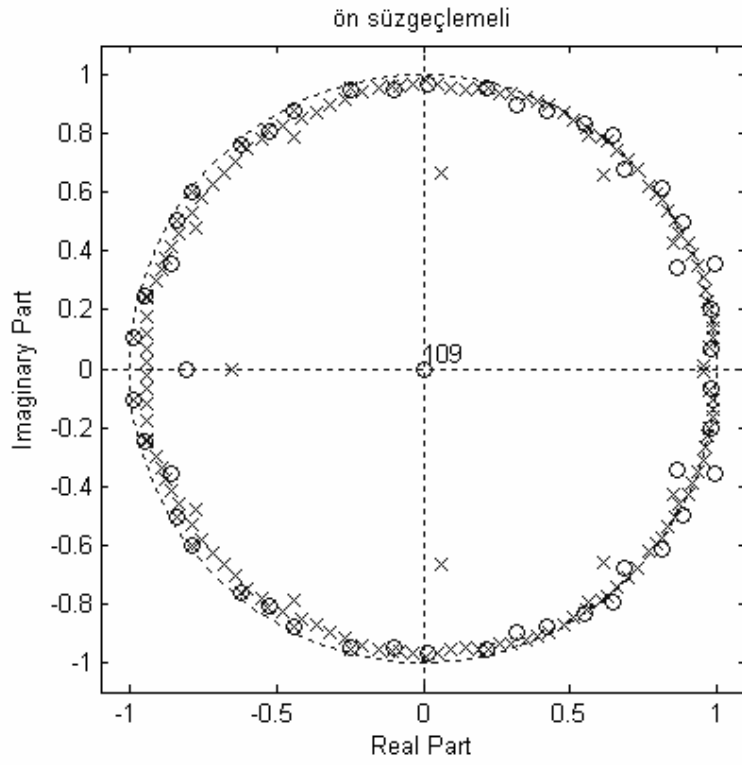
Şekil 4.15.b. Şekil 4.15.a'nın yakınlaştırılmış hali

Şekil 4.15.a ve b, FFT yöntemi ile ön süzgeçlemeli Prony yöntemini karşılaştırmak amacıyla çizdirilmiştir. Görüldüğü gibi, ön süzgeçleme yapılması durumunda, ortalama -50 dB civarında var olan salınımlar yok edilmiştir. Aynı zamanda ön süzgeçlemeli Prony yönteminin çözünürlüğü incelendiğinde iki kat veriye sahip olan FFT uygulaması ile aynı frekans bileşenlerini ayırt edebildiği görülmektedir. Sadece frekans dilimleri içinde, FFT ile (160-180) aralığında iki tepe görülüyorken Prony yönteminde tek tepe görülmektedir.

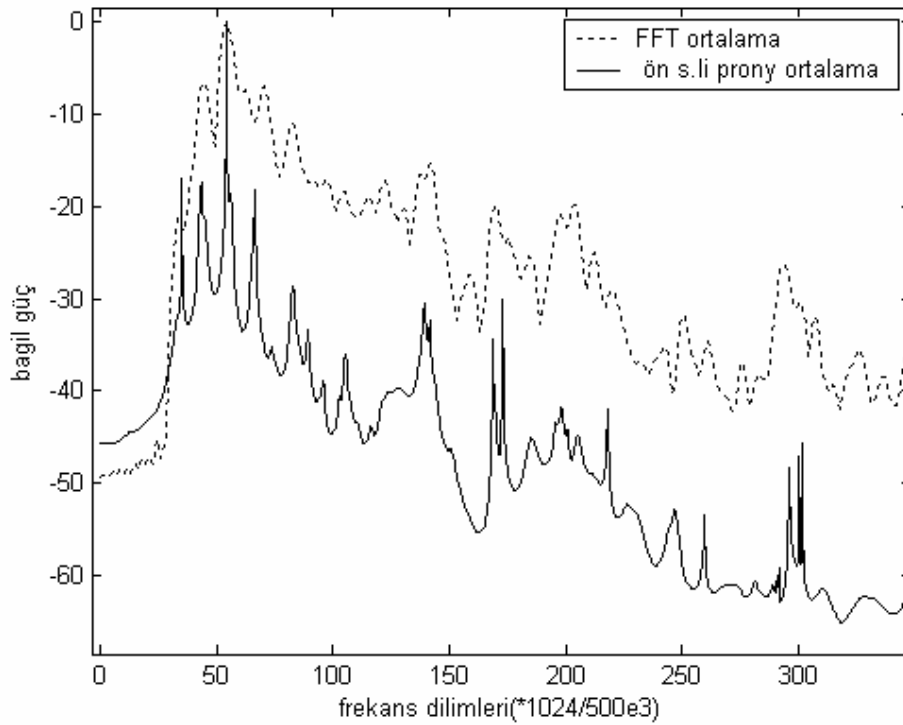
Şekil 4.16 Ön süzgeçlemesiz Prony yönteminin kutup sıfır gösterilimi, şekil 4.17 ise, ön süzgeçlemeli Prony yönteminin kutup-sıfır gösterilimidir. Sonuç olarak süzgeçleme yapılması durumunda, $(0,0.22\pi)$ ve karşılık gelen negatif frekans aralığında işaretin bileşenlerinin var olduğunu, bu aralıkların dışında ise bileşenin olmadığı görülür. Bastırılan frekans aralıkları için kutuplar birim çemberden uzaklaşır.



Şekil 4.16. Ön süzgeçlemesiz Prony yönteminin kutup sıfır gösterilimi

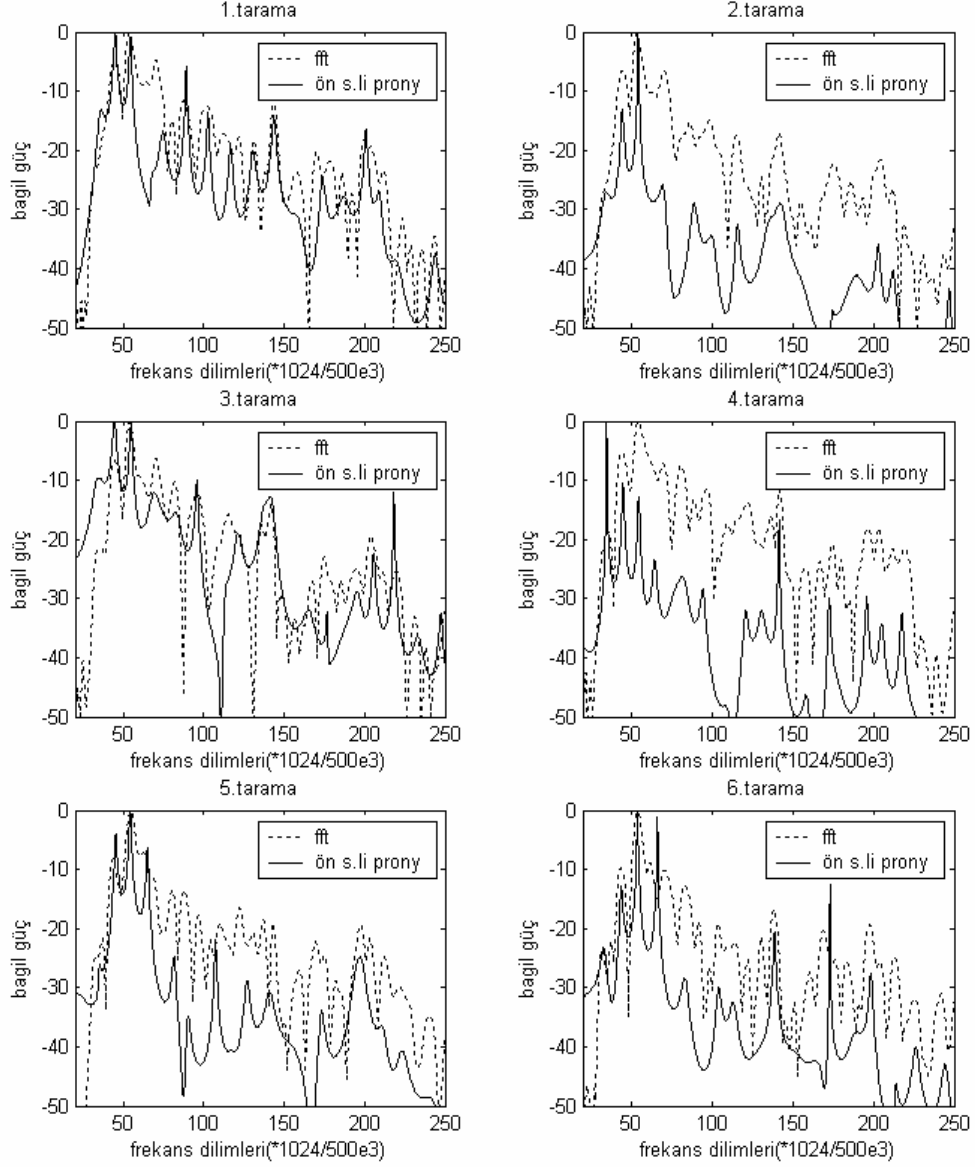


Şekil 4.17. Ön süzgeçlemeli Prony yönteminin kutup-sıfır gösterilimi

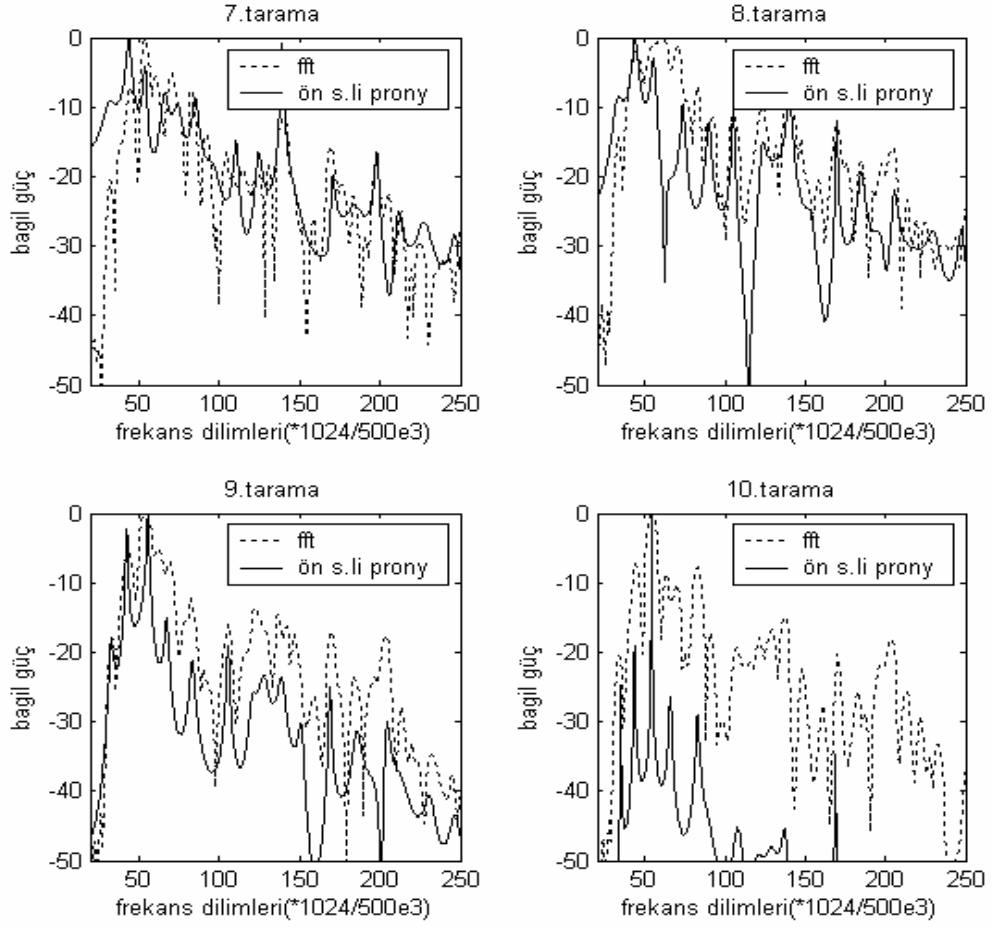


Şekil 4.18. 10 tarama için FFT yöntemi ile ön süzgeçlemeli Prony yönteminin ortalaması

Şekil 4.18’de on taramanın ortalaması alınarak Prony yöntemi ile FFT yöntemi karşılaştırılmak istenmiştir. Her iki yöntemde de aynı frekans bileşenleri gözlenmiştir. Gözlenen frekans değerleri ortalama alınarak elde edildiğinden her tarama için de frekans değerlerini görmek amacıyla şekil 4.19.a ve b çizdirilmiştir.



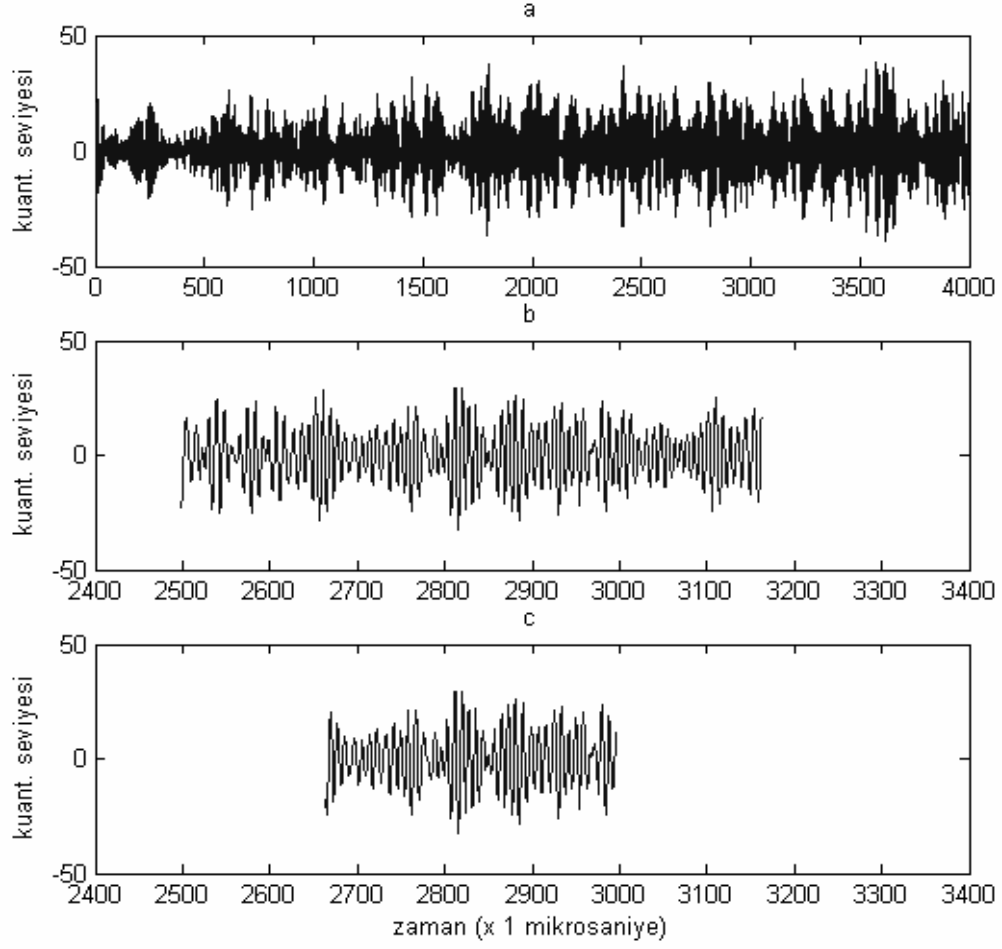
Şekil 4.19.a. Farklı taramalar için FFT ve ön süzgeçlemeli Prony yöntemi grafikleri



Şekil 4.19.b. Farklı taramalar için FFT ve ön süzgeçlemeli Prony yöntemi grafikleri

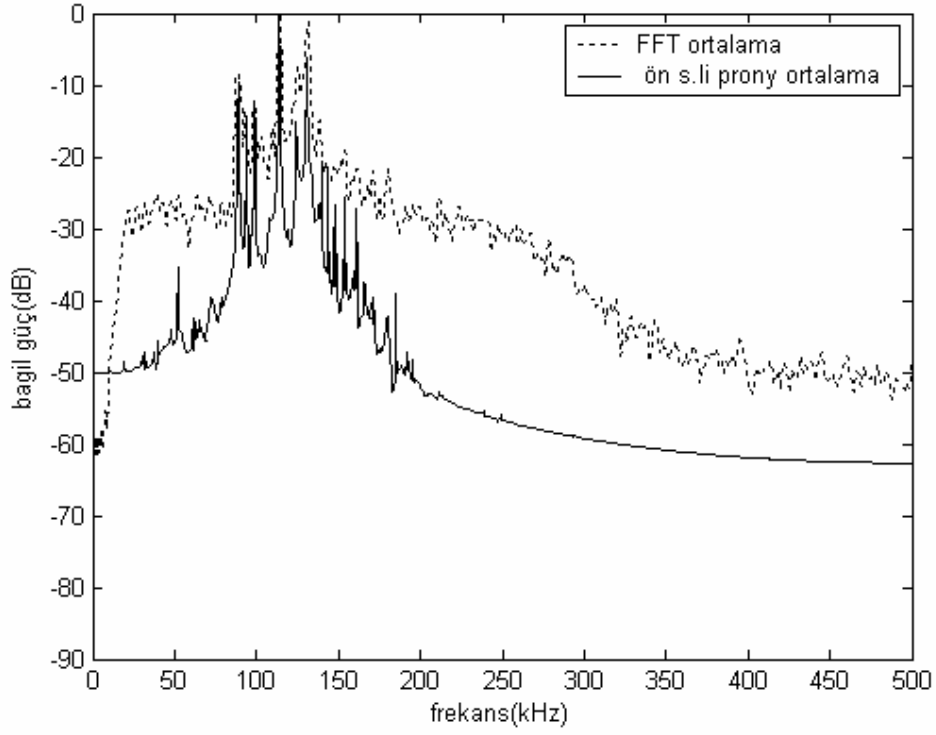
4.5. Çok Yankılı Başka Kanal – Kanal 3

Kanal 3 verisinde 2-3 kayda değer güçte yankı vardır. Bu verinin band genişliğinin değeri kanal 1 ve kanal 2 verisi band genişliklerinin arasındadır. Periodogram için 666 örnek, Prony yöntemi için 333 örnek kullanılmıştır ve örnek aralıkları şekil 4.20’de görülmektedir.

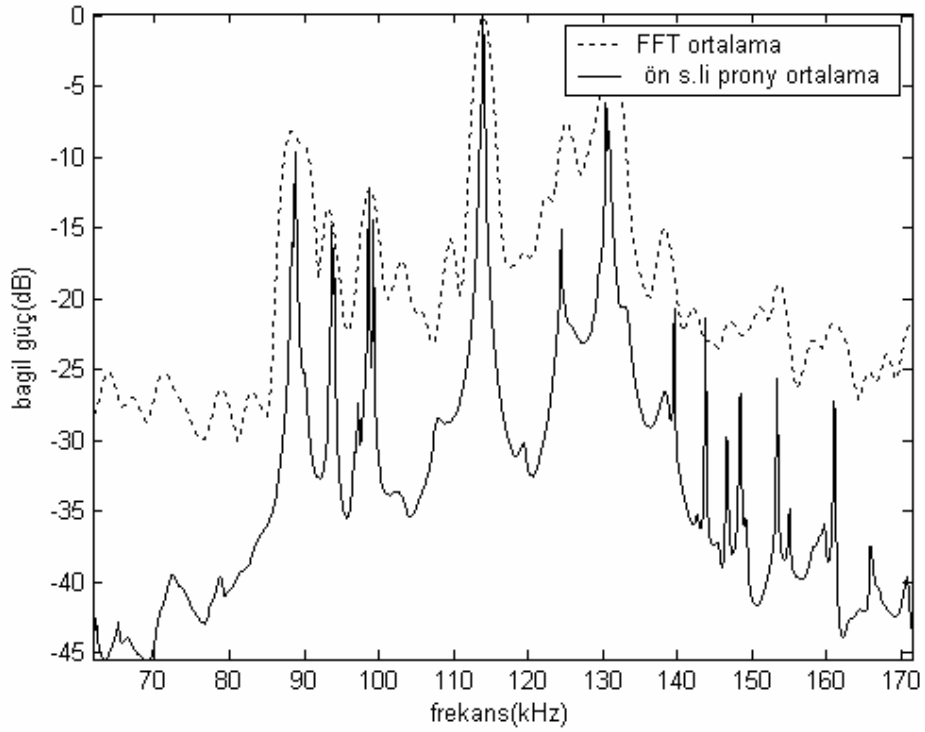


Şekil 4.20. Kanal 3 verisi için işlem yapılan örnek aralıkları

Kullanılan örnek aralıkları için her iki yöntemle 10'ar tarama için elde edilen tayfların ortalaması Şekil 4.21.a ve b'de gösterilmektedir. Burada, ortalama alınması sonucunda Prony ile farklı taramalarda var olan eko gecikmelerini temsil eden işaretler görüldüğünden, FFT ile var olmayan bileşenler de görülmektedir.

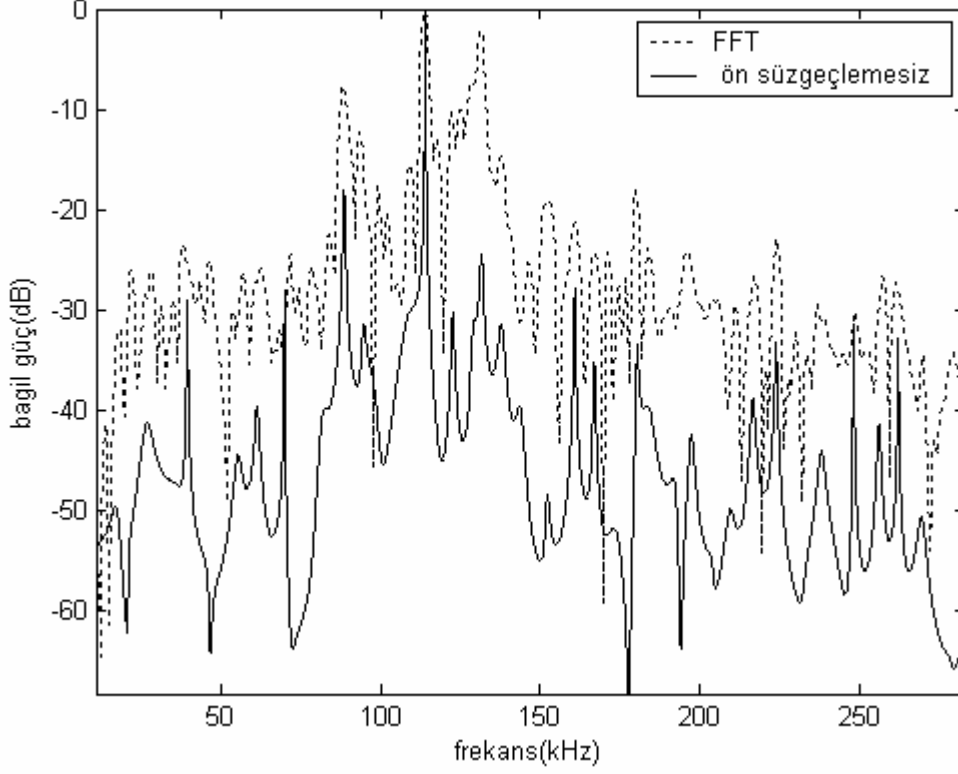


Şekil 4.21.a. FFT ve ön süzgeçleme ile Prony yönteminde 10 taramanın ortalaması



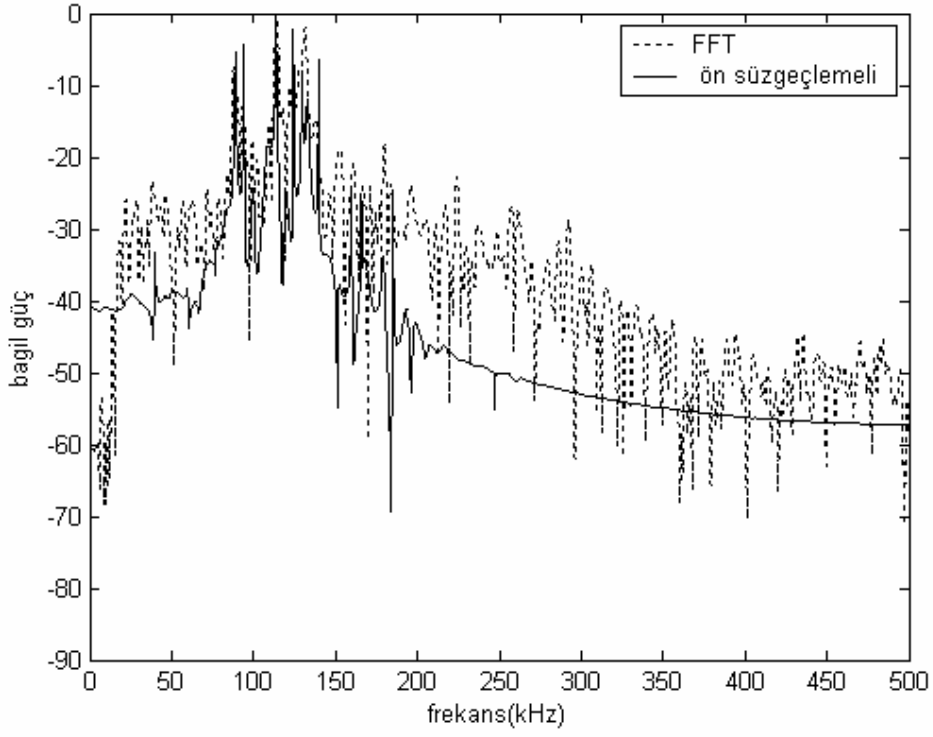
Şekil 4.21.b. Şekil 4.21.a'nın yakınlaştırılmış hali

Şekil 4.22’de FFT ile sadece Prony yönteminin (ön süzgeçleme yapılmadan) uygulandığı grafik görülmektedir. Bu grafik işaretin 0-300kHz aralığının yakınlaştırılmış halidir. Gürültü olarak nitelendirdiğimiz frekans bileşenleri de görülmektedir.

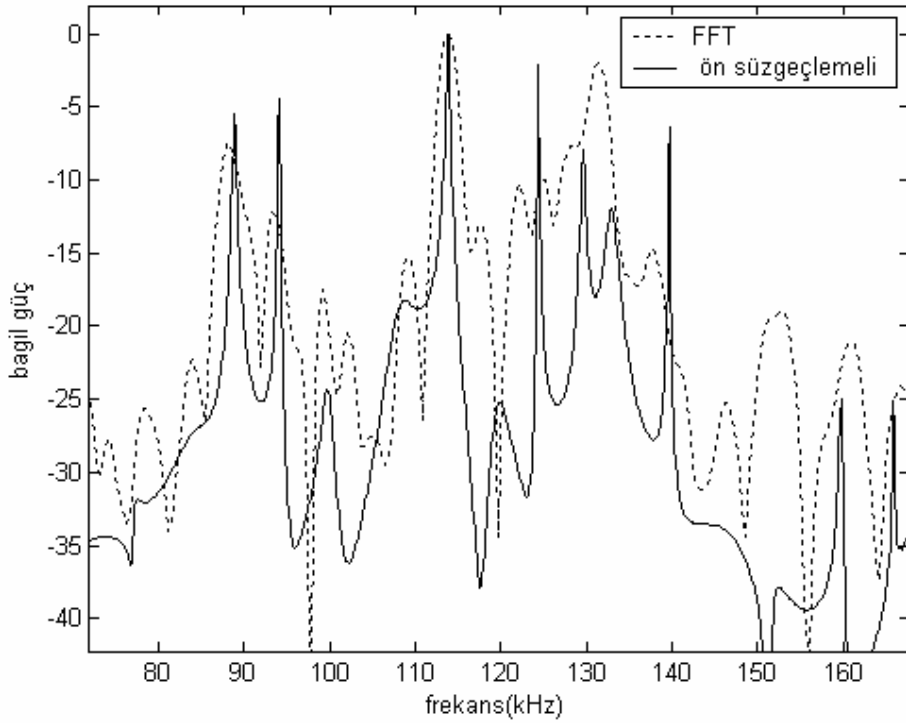


Şekil 4.22. FFT ile sadece Prony yönteminin (ön süzgeçlemesiz) uygulanması

Şekil 4.23’de FFT ile Prony yöntemine ön süzgeçleme uygulanması durumunda elde edilen grafik görülmektedir ve burada düşük güç değerlerine sahip değerler bastırılmıştır.

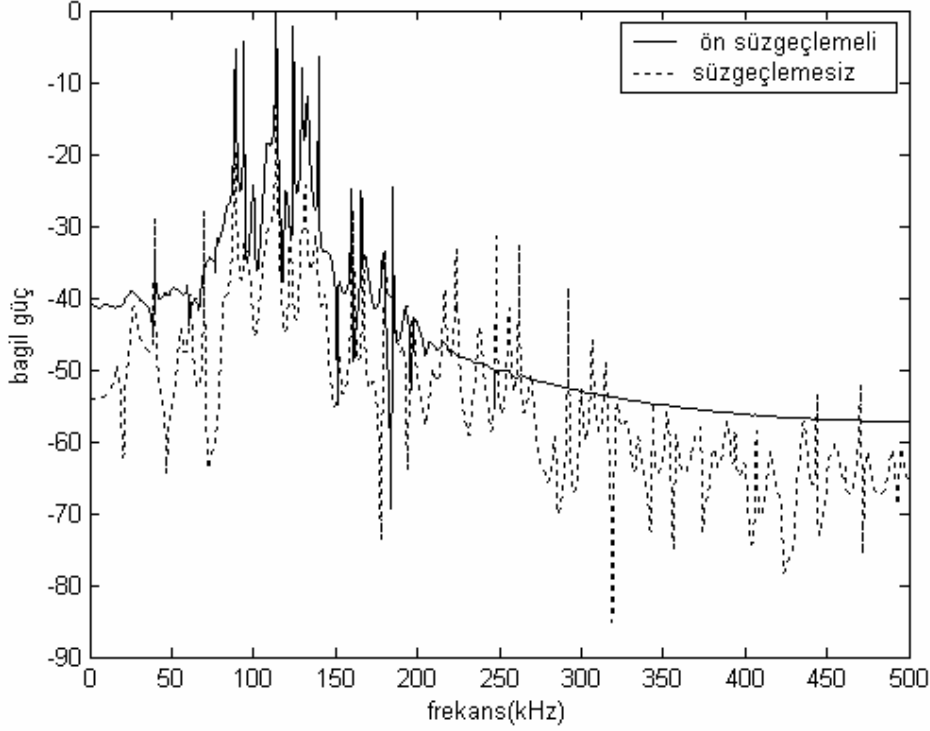


Şekil 4.23.a. FFT yöntemi ile Prony yöntemine ön süzgeçleme uygulanması



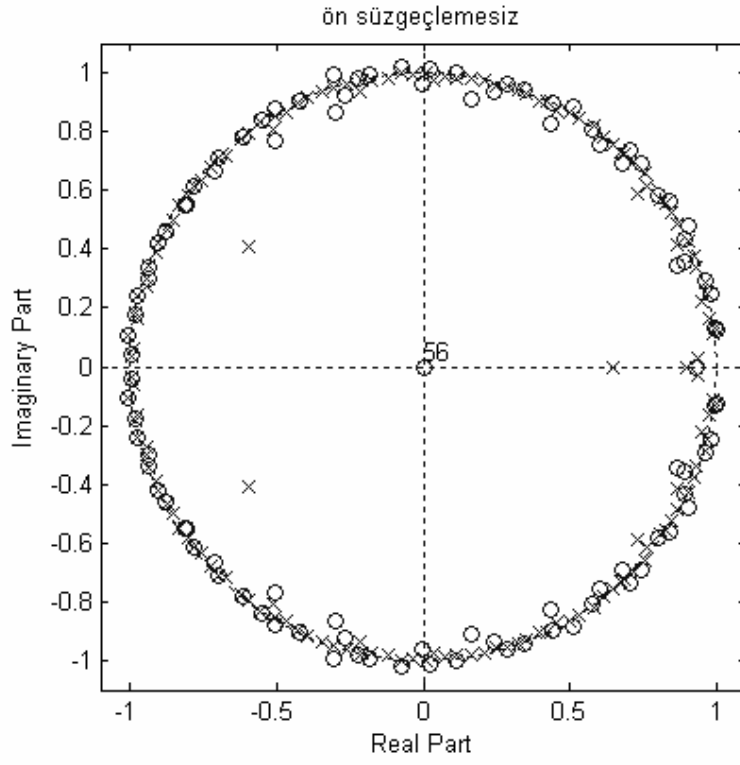
Şekil 4.23.b. Şekil 4.23.a'nın 70-170kHz frekans aralığına yakınlaştırılmış hali

Sadece süzgeçlemenin etkisini gözlemek amacıyla Prony yöntemine ön süzgeçleme uygulandığı ve uygulanmadığı durumun incelendiği şekil 4.24'tür. Ön süzgeçleme var olan frekansların daha iyi ayırt edilmesini sağlamıştır. Ayrıca var olan bazı frekansların güç değerlerinin ön süzgeçleme ile arttığı görülebilir. Bunun nedeni olarak süzgeç ile bastırılan frekans bileşenleri için modelleme sürecinde ayrılan enerji, var olan frekans bileşenler arasında dağılmış olması gösterilebilir.

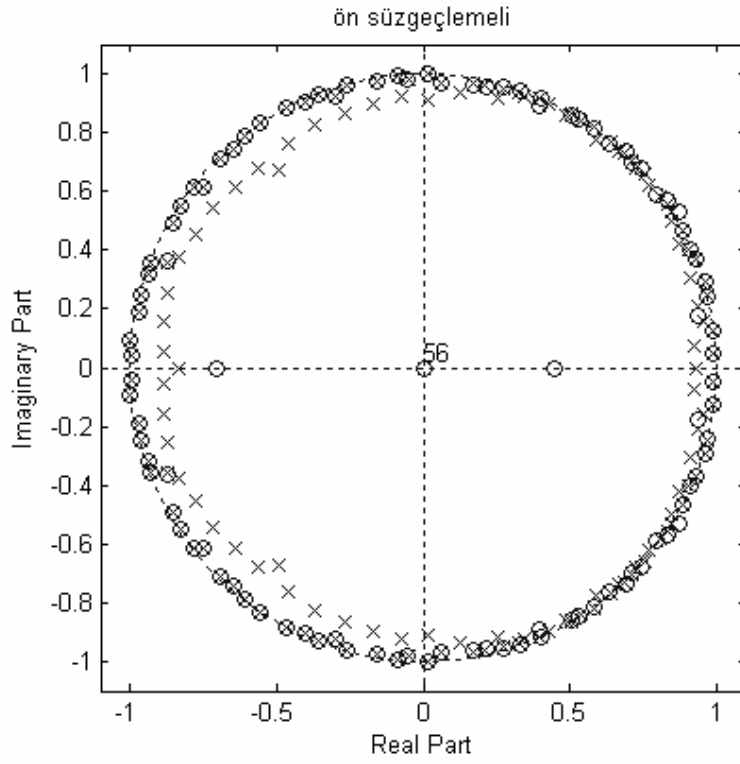


Şekil 4.24. Ön süzgeçlemenin Prony yöntemine etkisi

Şekil 4.25'te ön süzgeçleme yapılmadan, şekil 4.26'da ise ön süzgeçleme yapılması durumunda Prony yönteminde kullanılan kutup ve sıfırlar görülmektedir. Sonuç olarak süzgeçleme yapılması durumunda, $(0.16\pi, 0.3\pi)$ ve bunun negatif frekans karşılığı $(-0.16\pi, -0.3\pi)$ aralığında işaretin bileşenlerinin var olduğunu, bu aralıkların dışında ise bileşeninin olmadığı görülür. Süzgeçleme ile bileşen olan kısımlardaki enerji vurgulanır ve diğerleri bastırılır. Bastırılan frekans aralıkları için yine kutupların birim çemberden uzaklaştığı görülmektedir.

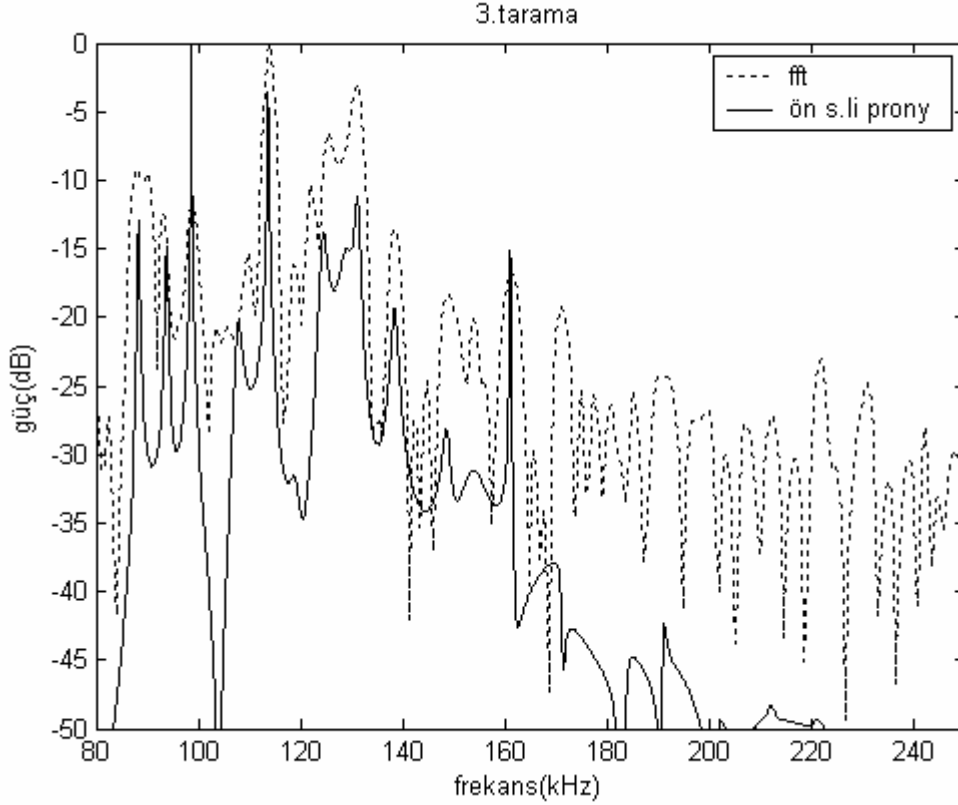


Şekil 4.25. Ön süzgeçleme yapılmadan Prony yönteminde kullanılan kutup ve sıfırlar



Şekil 4.26. Ön süzgeçleme ile Prony yönteminde kullanılan kutup ve sıfırlar

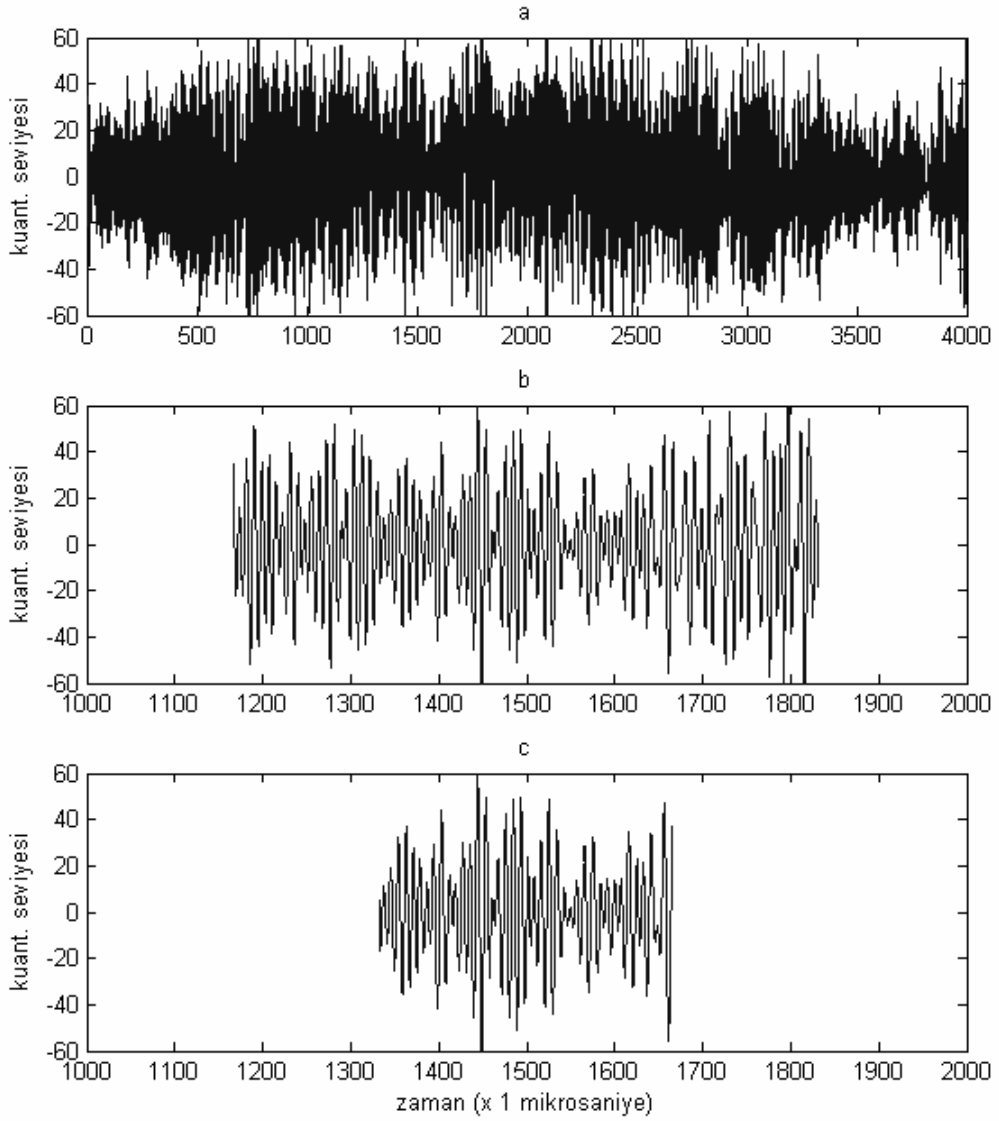
Prony yöntemi ile çözünürlükte sağlanan iyileşme şekil 4.27’de verilen tayf eğrilerinde görülmektedir. FFT yöntemi ile kullanılan örnek sayısının yarısı kadar örnek sayısı kullanılmasına karşılık Prony yönteminin frekans ayırt etme yeteneğinin yani çözünürlüğünün FFT ile elde edilen çözünürlüğe yakın olduğu görülür. Özellikle yüksek güç değerine sahip frekans bileşenleri için (99,115,125 kHz gibi) Prony yöntemi ile daha keskin tepeler elde edilmiştir.



Şekil 4.27. 3. tarama için FFT yöntemi ile Prony yöntemine ön süzgeçleme uygulanması

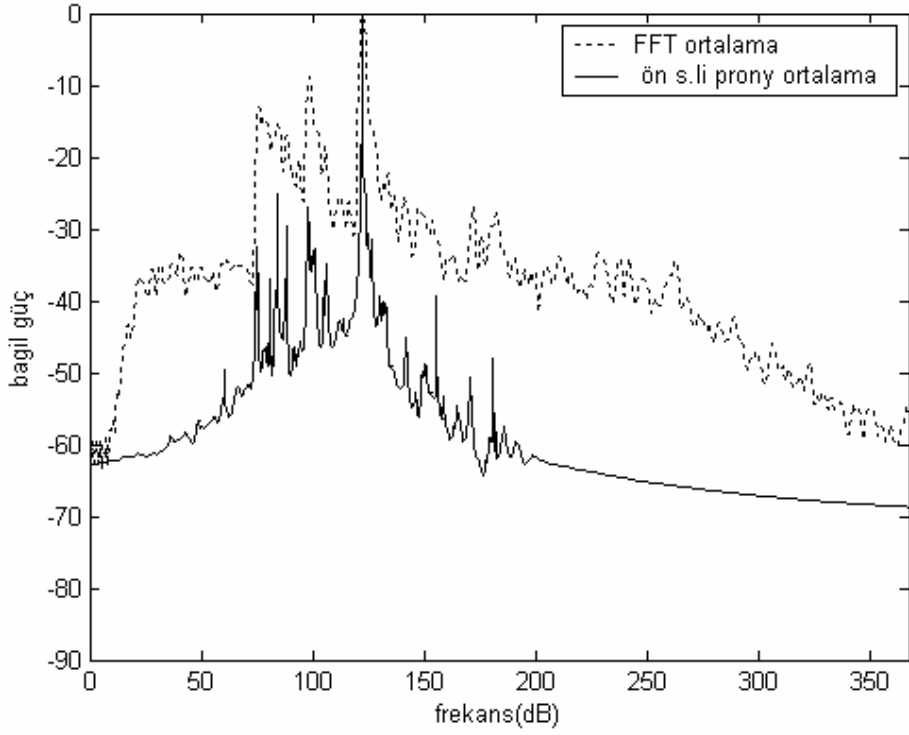
4.6. Kanal 4 Verisi

Bir diğer alıcı-verici konumunda toplanan kanal verisinde, 2 yankı olduğu söylenebilir. Bunlardan 2. yankı ilkinden yaklaşık 9dB aşağıdadır. Kanal 4 verisi için kullanılan örnek aralığı şekil 4.28’de görülmektedir.

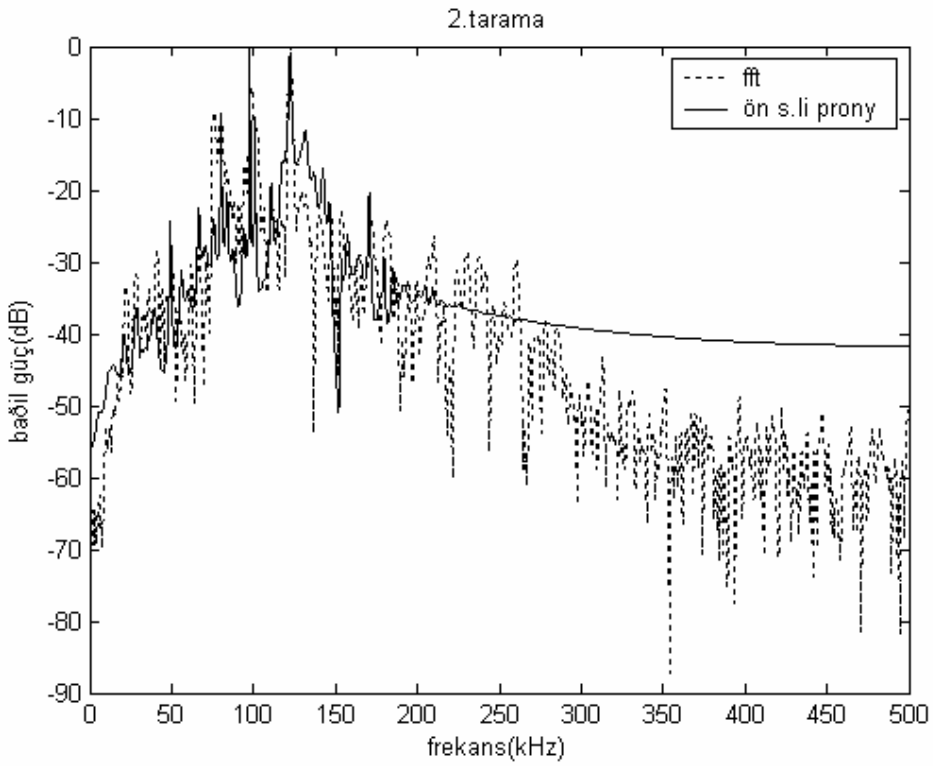


Şekil 4.28. a) Zaman düzleminde bir tarama, b)FFT analizinde kullanılan 666 örnek, c) Prony yöntemi ile tayf analizinde kullanılacak 333 örnek

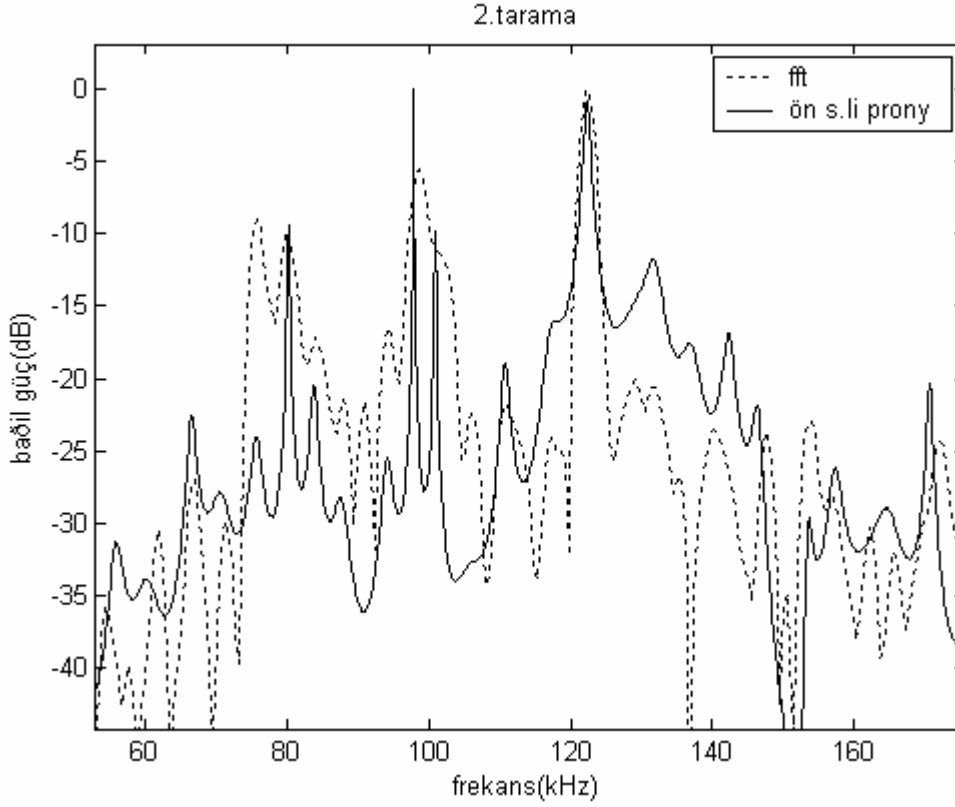
Şekil 4.29'da ardışıl 10 tarama için ön süzgeçleme yapılmış Prony yöntemi ile FFT yöntemi görülmektedir. Şekil 4.30.a ve b'de ise tek tarama için yine ön süzgeçlemeli Prony yöntemi ve FFT yöntemi görülmektedir.



Şekil 4.29. Ardışıl 10 tarama için ön süzgeçlemeli Prony ile FFT ortalamalarının tayfları



Şekil 4.30.a. 2. tarama için ön süzgeçlemeli Prony ve FFT tayfları

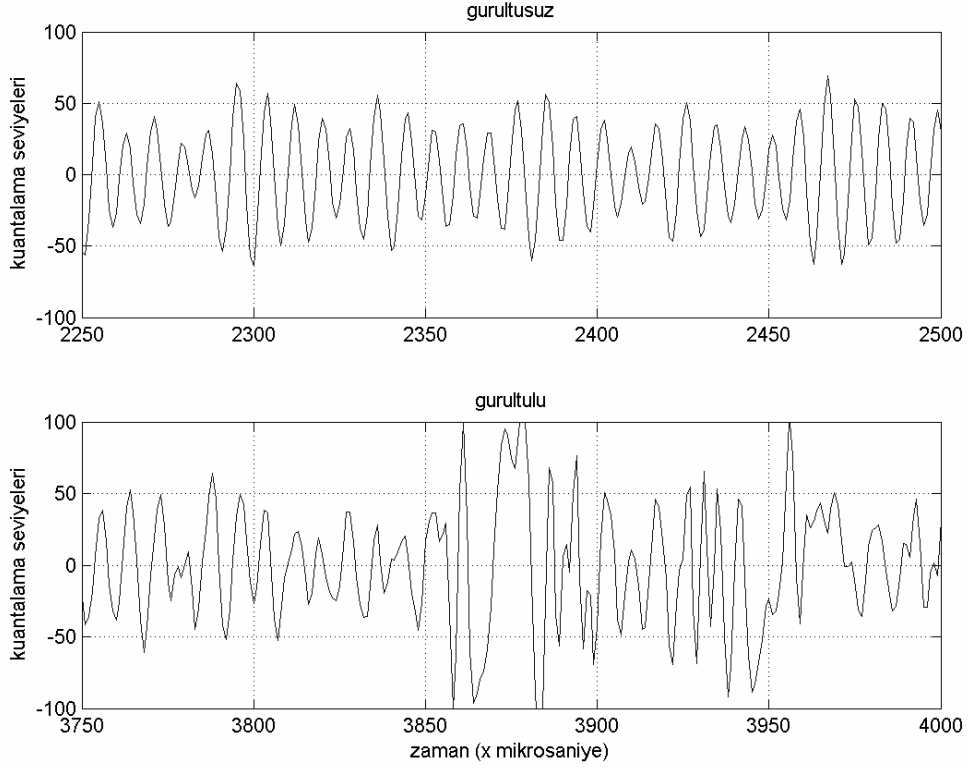


Şekil 4.30.b. Şekil 4.30.a'nın yakınlaştırmış hali

Şekil 4.30'dan da görüldüğü gibi ön süzgeçlemeli Prony yöntemi ile işaretin gürültü seviyesindeki salınımlar bastırılmıştır. Aynı zamanda çözünürlük değerlendirilmek istenirse çözünürlüğünün çok iyi olduğu söylenebilir çünkü tüm frekans bileşenlerinin ayırt edilmiştir. Bu verinin asıl özelliği, (3800:4000) aralığında band içi girişimin olmasıdır.

4.7. Band İçi Girişim ve Prony-FFT Yöntemlerinin Karşılaştırılması

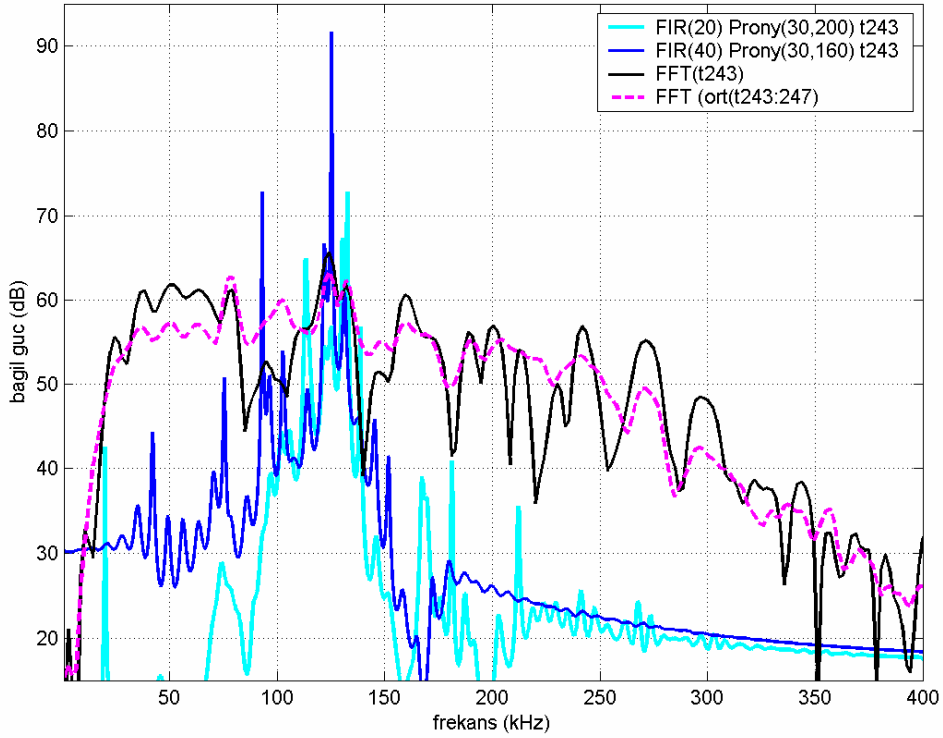
Şekil 4.31'de gürültüsüz örnek aralığı (2250:2500) ve gürültülü örnek aralığı (band içi girişimin olduğu) (3750:4000) aralığı görülmektedir. Gürültü özellikle 3850-3960 aralığında daha baskın durumdadır. Gürültü olduğu durumda işarettaki değişimler sinüs biçimli değildir.



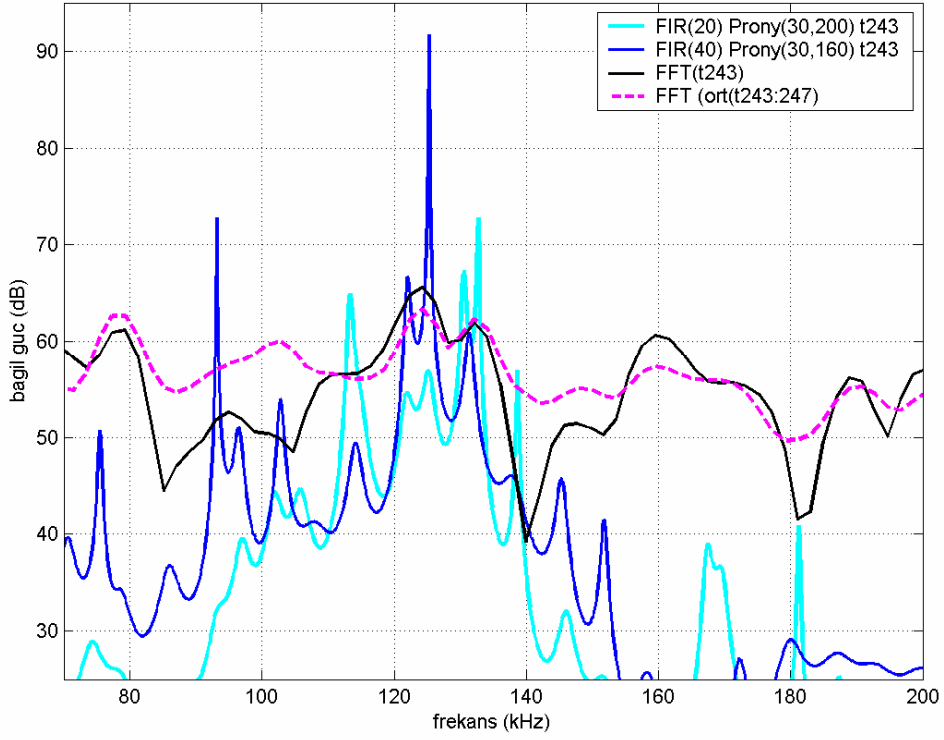
Şekil 4.31. İşaretten gürültüsüz ve gürültülü 250'şer örneklı iki kısım

Gürültünün FFT ve Prony modelleme ile elde edilen tayfa etkilerini görmek için kanal 4 verisinin şekil 4.36'da verilen gürültülü zaman dilimine ilişkin tayfı iki yöntem ile ayrı ayrı elde edildi. Prony modellemeyen önce derecesi 20 olan FIR süzgeçleme kullanıldı ve 30 sıfırlı ve 200 kutuplu bir model seçildi. Şekil 4.32'de tek bir taramaya ait FFT ve Prony yöntemi ile elde edilen tayf sonuçları gösterilmektedir. FFT yönteminde ortalama almanın elde edilen tayfda gürültü seviyesini azalttığı bilinmektedir, [1]. Benzer gürültüye sahip ardışıl 5 taramanın ortalaması alınarak elde edilen tayf da şekil 4.32'de çizdirilmiştir. Görüldüğü gibi örneklerin 2/3 ünün yoğun gürültülü olduğu bu durumda ortalama alma dahi FFT için bir başarıyı iyileşmesi getirmemiştir. Ayrıca Prony yöntemi ile elde edilen tayfda işaretin frekans aralığı belirlenebilmekte iken FFT ile elde edilen tayflarda bu aralığı belirlemek zordur. Bu arada akla şu soru gelebilir eğer frekans aralığı başlangıçta bilinmiyorsa Prony de iyileşme sağlayan süzgeçleme aralığını da belirlenemez. Dolayısı ile Prony ile bu tayf da elde edilemezdi diye düşünülebilir. Ancak alıcı verici arasındaki uzaklık biliniyorsa ve gecikmeli gelen ve kayda değer enerjisi olan yankıların gecikme zaman istatistiği kullanılarak da band geçiren süzgeç için gereken geçirme band aralığı kabaca

belirlenebilir. Prony yöntemi ile elde edilen tayfta 120 kHz den önceki frekans bileşenlerinin olduğundan daha zayıftır. Buna band dışındaki terimlerin iyi bastırılmamış olması ve de modelleme sırasında bu istenmeyen bileşenlerde enerji dağılmasına neden olmuştur. Bu nedenle aynı band aralığı için daha yüksek dereceden (20 yerine 40) bir FIR süzgeç kullanıldığında sonuç değişecektir. Derecenin artmış olması z düzleminde işaret bileşeninin beklenmediği bölgelerdeki kutuplarının birim çemberden daha da uzaklaşmasına yol açacaktır. Elde edilen tayf, FIR(40) ile gösterilmiştir. Süzgeç dereceleri karşılaştırılırsa, yüksek dereceden FIR süzgeç kullanmanın Prony yönteminin başarımını daha da artırdığı görülür.



Şekil 4.32.a. Band içi gürültünün olduğu örnek aralığında FFT ve ön süzgeçlemeli Prony yöntemi tayf grafikleri



Şekil 4.32.b. Şekil 4.32.a'nın yakınlaştırılmış hali

Sonuç olarak, şu ana kadar elde edilen grafiklere bakıldığında Prony yöntemi, uygun kutup ve sıfır sayısı seçimine bağlı olarak iyi çözünürlük sağlamıştır. Ayrıca Prony yönteminin başarımı, band içi gürültüden FFT yöntemine göre daha az etkilenmiştir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, FMCW işaretinin kullanıldığı kanal sonda cihazı ile elde edilen veriler kullanılarak Prony yöntemi ile FFT'nin tayf analizleri incelenmiştir.

Tayfta, her bir frekans bileşeni bir yankı gecikmesi hakkında bilgi vermektedir ve her frekans değerinin bağıl gücü, yankı gecikmesinin gücünü vermektedir. Bu çalışmada amaç, ardarda gelen yankıları en iyi şekilde ayırt edebilmek ve Prony yönteminin, FFT yöntemine göre 1,5-2 kat daha iyi çözünürlük sağlayıp sağlamadığını görmektir.

Çözünürlüğü iyileştirmek amacıyla, hem Prony yöntemi üzerinde hem de FFT'de çeşitli işlemler yapıldı. Sonuç olarak, Prony yönteminde, FFT'de kullanılan örnek sayısının yarısı kadar örnek kullanılarak Prony yönteminin daha iyi çözünürlük sağladığı görüldü. Böylece, kullanılan band genişliğinde elde edilen kanal yayılım ölçümleri ile, sanki ölçümlerde kullanılan band genişliğinin iki katı genişlikte ölçüm yapılmış gibi kanal yankı profilleri elde edilebilir. Bu ise radyo kanalındaki yayınıma ilişkin daha detaylı bilgi elde edilmesi anlamına gelir.

Bu çalışmanın ortaya çıkardığı bir diğer sonuç ise band içi girişim durumunda girişen işaretin band genişliğine bağlı olarak FFT yöntemi başarıyı iyice kötüleştirirken, ön süzgeçlemeli Prony yöntemi başarımının band içi girişimden daha az etkilenmesidir.

6. KAYNAKLAR

1. **Kay S. M. and Marple S. L. Jr, 1981.** Spectrum Analysis- A Modern Perspective, Proceedings of the IEEE, Vol. 69, No. 3, 1380-1415.
2. **Sayidmarie K.H. and Shanshal S.K.M., 2004.** Prony Technique for Prediction of Ray Parametres in LOS links due to Tropospheric Multipath, Electronic Letters, Vol. 40, No. 15.
3. **Barone P., 1988.** Some Practical Remarks on the Extended Prony's Method of Spectrum Analysis, Proceedings of the IEEE, Vol. 76, No. 3, 284-285.
4. **Tummala M. and Parker S. R. and Rokn K. P., 1988.** On the Use of A Linear Phase Lattice Structure in Prony's Method for Spectral Line Estimation, IEEE International Symposium, 309-312.
5. **Lobos T. and Rezmer J. and Schegner P., 2003.** Parameter Estimation of Distorted Signals Using Prony method, IEEE Bologna PowerTech Conference, Vol. 4, 28-32.
6. **Mansour M. M. and Metrotra A., 2003.** Model-Order Reduction Based on Prony's Method, Design Automation and Test in Europe Conference and Exhibition, 530-535.
7. **Marple S. L. Jr, 1983.** A Fast Computational Algorithm For And Performance of The Kumaresan-Prony Method of Spectrum Analysis, IEEE International Conference on ICASSP, Vol. 8, 1419-1421.
8. **Lobos T. and Leonowics Z. and Rezmer J. and Koglin H-J., 2001.** Advanced Signal Processing Methods for Harmonics and Interharmonics Estimation, Developments In Power System Protection, Conference Publication, No. 479, 315-318.
9. **Kumaresan R., Feng Y., 1991.** FIR Prefiltering Improves Prony's Method, IEEE Tras. On Signal Processing, Vol. 39, No. 3, 736-741.
10. **Hossen A. and Heute U., 2004.** Parametric Modelling of Decomposed Subbands: Resolution Improvement and Aplications for Narrow-Band Signals, Signal Processing 84, 2195-2206.
11. **Marple S. L., Jr, 1987.** Digital Spectral Analysis With Application, Prentice-Hall, Inc, 512 p.

12. **Hayes M. H., 1996.** Statistical Digital Signal Processing And Modelling, John Wiley&Sons,Inc, 608 p.
13. **Vaseghi S. V., 1997.**Advanced Signal Processing And Digital Noise Reduction, Wiley&Teubner,Inc, 397 p.
14. **Stoica P. and Moses R., 1997.** Introduction To Spectral Analysis, Prentice-Hall,Inc, 319 p.
15. **Proakis J. G. And Manolakis D. G., 1996.** Digital Signal Processing Principles, Algorithms, And Applications, Prentice-Hall,Inc, 968 p.
16. **Haykin S. And Veen B. V., 2003.** Signal And Systems, John Wiley&Sons,Inc, 802 p.
17. **Ambardar A., 1995.** Analog And Digital Signal Processing, PWS Publishing Company, 700 p.
18. **Ertürk S., 2002.** Sayısal İşaret İşleme, Birsen Yayınevi, 293 s.
19. **Gökalp H. , 2001.** Characterisation of UMTS FDD Channels, University of Manchester Institute of Science and Technology for the degree of Doctor of Philosophy.
20. **1998.** Signal Processing Toolbox For Use With Matlab,The MathWorks,Inc.
21. **2002.** MATLAB Signal Toolbox.
22. **Burrus C. D. And McClellan J. H. and Oppenheim A.V. and Parks T.W. and ScHafer R.W., 1994.** Computer-Based Exercises For Signal Processing Using MATLAB, Prentice-Hall,Inc, 319 p.

EKLER

EK A. MATLAB programında yazılmış Prony yöntemi ile FFT'nin sonuçlarını veren program

```
Function[genpry,genpry2,genlikfft,aa,bb,aa2,bb2]=yeni(x,tara,fft1,fft2,fft3,fft4,p1,p2,p,
q,n) % n=tarama sayısı
% function[genlikprony,genlikfft,aa,bb]=yen(x,tara,fft1,fft2,fft3,fft4,p1,p2,p,q,n)
% n=tarama sayısı
% x tayf incelemesi yapılacak kanal verisi; tara: hangi taramadan itibaren işaret
% işlemeye başlanacağını gösterir.
% fft1-fft2: FFT için ilk örnek aralığı; fft3-fft4 ikinci örnek aralığı
% p1-p2: prony için örnek aralığı; p:prony için sıfır sayısı ve q: kutup sayısı
% n: tara nolu tarama verisinden sonra kaç adet taramanın işleneceği gösterir.
% ÇIKTILAR: genlikprony nx4096 lik matris; satırları her tarama için prony ile
% bulunan güç değerleri
% genlikfft: nxnfft/2 lik matris;satırları her tarama için FFT ile bulunan güç değerleri
% Frekans eksenini: işlenen 1 MHz lik örnekleme sıklığında alındığı için pozitif
% frekanslar için [0,pi] rad/Hz olan frekans aralığı [0,500kHz] lik aralığa karşılık gelir.
% Bu aralıkta homojen dağılan frekans dilimleri için karşılık gelen mutlak frekans
% değeri doğrusal orantı ile bulunur.
% Yankı gecikme eksenini: FMCW kanal sonda yönteminde ölçülen kanal dönüşüm
% fonksiyonunun Fourier dönüşümü (ya da tayfı) alındığında gecikmelerine göre yankı
% güç dağılımını elde edilir ve her bir frekans bileşeni farklı bir yankı gecikmesine
% karşılık gelir; td=fr./(60e6*250); fr frekans eksenini değerleri
% td: frekans eksenindeki değerlere karşılık gelen zaman gecikmesi;
% 60MHz iletim band genişliği ve 250Hz tarama sıklığı için kanal sondasına ait tarama
% hızı=60e6*250;
% dolayısı ile x eksenini zaman gecikmesi olarak etiketlendirilecekse şu komut
% kullanılabilir
%td=linspace(0,500e3/(60e6*250),N); burada N örnek sayısı
%plot(td, P), P tayf güç değerleri
```

x(1:3)=[]; % veri toplama ünitesi parametrelerine ait ilk üç örnek silinir.

% Ön süzgeçlemeli Prony yöntemi için band geçiren süzgeç (BGS) uygulanır.
 % BPS, DC bileşeni yok edeceğinden, DC bileşen için ayrıca süzgeçleme işlemine
 % gerek yoktur.

% Prony modellemeden önce kullanılacak BGS b katsayıları

wnBGF=[360 420]/1024;%[0.33 0.486]; % geçirme bandı aralığı her veri dosyası için
 % farklı olur. % er12

% wnBGF=[25 400]/1024;% er16

% wnBGF=[25 300]/1024;%er16

bBP=fir1(20,wnBGF,'bandpass'); % 20. dereceden FIR süzgeç

% Prony modelleme için ön süzgeçleme yapılır ve veriler uygun matris biçimine
 % dönüştürülür.

x2=x-mean(x); %

x2=filter(bBP,1,x2);

x2=reshape(x2,4001,250);

x2=x2';

% Analog sayısal çevirici çıkışındaki DC bileşeni yok etmek için Butterworth yüksek
 % geçiren süzgeç kullanılır. Bu işlem veriye c deki sıfırları ve d deki kutupları ekler.

wn=[.04];

[c,d]=butter(4,wn,'high');

x=filter(c,d,x);

% Veriler her tarama ayrı bir satır olacak biçimde yeniden düzenlenir.

x=reshape(x,4001,250);

x=x';

% FFT incelemesinde kullanılacak 2 nin kuvveti nfft=2*(2.^nf)

nf=nextpow2(fft2-fft1+1);nfft=2*(2.^nf);


```
nf2=nextpow2(fft4-fft3+1);nfft2=2*(2.^nf2);%nfft=2.^(nf+1);
```

```
% Frekans (fr) ve yankı zaman gecikme (td) eksenleri
```

```
% frprony=linspace(1,5e3,4096); % prony tayfı için frekans eksenini
```

```
% tdprony=linspace(0,500e3/(60e6*250),4096); prony yankı profili için yankı gecikme  
% eksenini
```

```
% frFT=linspace(1,5e3,nfft/2); % prony tayfı için frekans eksenini
```

```
% tdFT=linspace(0,500e3/(60e6*250),nfft/2); prony yankı profili için yankı gecikme  
% eksenini
```

```
pronyort(1:4096)=0; % z düzleminde birim çember etrafında eşit aralıkta 4096 noktada  
% H(f) hesaplanır.
```

```
ffort(1:nfft/2)=0; % ortalama tayf vektörleri için başlangıç değerleri
```

```
fft2ort(1:nfft2/2)=0; % ortalama tayf vektörleri için başlangıç değerleri
```

```
for i=1:n
```

```
g2=x2(tara+(i-1),:); % Prony yöntemi için
```

```
g=x(tara+(i-1),:); % FFT için döngü içinde kullanılmak üzere bir taramanın tutulduğu  
vektör
```

```
% g(p1:p2) verisi için Prony yöntemi ile model belirlenir.
```

```
% Bulunan IIR süzgeç modelinde pay katsayılarını b ve payda katsayılarını ise a
```

```
% vektöründe tutulur ve bu süzgeç modeli için olan frekans dönüşüm fonksiyonu birim
```

```
% çember etrafında 4098 örnek alarak hesaplanır.
```

```
% Ön Süzgeçlemesiz Prony Yöntemi
```

```
% Prony yöntemi ile  $H(z)=B(z)/A(z)$  rasyonel dönüşüm fonksiyonu bulunur; b de
```

```
% B(z) nin, a da ise A(z) nin katsayıları vardır
```

```
[b,a]=prony(g(p1:p2),p,q);% p adet sıfır ve q adet kutup
```

```
% [a,b,err]=pronymodel(g(p1:p2),p,q);
```

```
[h,w]=freqz(b,a,4096); % 1024*2
```

```
genpry(i,:)=(abs(h).^2)'; % genlikprony=genlikprony'
```

```

% H(z) nin kutup ve sıfırlarını z düzleminde görmek için
% zplane(b,a)
aa(i,:)=a;
bb(i,:)=b;

    % plot((20*log10(abs(h))-max(20*log10(abs(h)))),'k');
    % stem((20*log10(abs(h))-max(20*log10(abs(h)))),'k');

```

```

% Ön Süzgeçlenmiş Sinyal için Prony modelleme
[b,a]=prony(g2(p1:p2),p,q);% p adet sıfır ve q adet kutup
% [a,b,err]=pronymodel(g(p1:p2),p,q);
[h,w]=freqz(b,a,4096);% 1024*2
genpry2(i,:)=(abs(h).^2); %genlikprony=genlikprony'

```

```

% H(z) nin kutup ve sıfırlarını z düzleminde görmek için
% zplane(b,a)
aa2(i,:)=a;
bb2(i,:)=b;

    % plot((20*log10(abs(h))-max(20*log10(abs(h)))),'k');
    % stem((20*log10(abs(h))-max(20*log10(abs(h)))),'k');

```

```

% FFT ile tayf;
% Veri sayısını 2-3 kat artıracak sıfır ekleme ile daha düzgün bir tayf elde edilir.
% Hamming pencere fonksiyonu uygulanır, fft alınır, genlik ve karesi hesaplanır.
genfft=((abs(fft(g(fft1:fft2)).*hamming(length(fft1:fft2))',nfft))).^2);% nfft yi değiştir
genfft(nfft/2+1:nfft)=[];
genlikfft(i,:)=genfft;

```

```

% x3FT=(abs(fft(g(fft3:fft4)).*hamming(length(fft3:fft4))',nfft2))).^2;
% x3FT(nfft2/2+1:nfft2)=[];
% genlikfft2(i,:)=x3FT;
% pronyort=pronyort+genlikprony(i,:);

```

```
% fftort=genfft+fftort;  
% fft2ort=x3FT+fft2ort;  
end  
% pronyort=mean(genpry);% pronyort=pronyort/n;  
% fftort=mean(genlikfft);% fftort=fftort/n;  
% fft2ort=fft2ort/n;
```

EK B. MATLAB programında yazılmış derece belirleme programı

```

format long
clear hata me ys u uu h1 j k md
% x(1:3)=[];
% x=reshape(x,4001,250);
% x=x';
j=0:1:p; % 1:1:p
k=0:1:q; % 1:5:q

for uu=1:1:length(j)
for u=1:1:length(k)

[b,a]=prony(x,j(uu),k(u));
[h1,t1]=impz(b,a,length(x));

% if length(h1)<length(x)
% h1=[h1 zeros(length(x)-length(h1))];
% end
h1=h1';

% hata(j)=0;

hata(uu,u)=sum((x(:)-h1(:)).^2);
% hata(1:10,:)=[];
% hsatır=hata;
% hata(j,k)=sum((x(:)-h1(:)).^2);
% hata(:,1:10)=[];
% hsutun=hata;

% for i=1:1:length(x)
% err(i)=(x(i)-h1(i)).^2;

```

```
% hata(j)=hata(j)+err(i);
% end
% if hata(uu,u)>=100
% hata(uu,u)=NaN;
% end
end
end
[y,ys]=min(min(hata));%y minimum değerini, ys ise hangi sutunda minimum olduğunu
% gösterir.
hata;
[md,me]=min(hata(:,ys)');% transpozu alınarak, me hangi satırda minimum olduğunu
% gösterir.
minhata=hata(me,ys)
p1=(j(me))
q1=(k(ys))
```

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında B. Almanya’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Samsun’da tamamladı. 1999 yılında lisans öğrenimine Ondokuz Mayıs Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümünde başladı. 2003 yılında mezun oldu. Aynı yıl yüksek lisans sınavını kazanarak yüksek lisans öğrenimine başladı. Şu anda Elektrik-Elektronik Mühendisliği bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.