

**KAPALI BİR BÖLGEDE DOĞAL TAŞINIMLI
ISI VE KÜTLE TRANSFERİNİN
KARARLILIK ANALİZİ**

HATİCE MUTİ

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KAPALI BİR BÖLGEDE DOĞAL TAŞINIMLI ISI VE KÜTLE
TRANSFERİNİN KARARLILIK ANALİZİ**

HATİCE MUTİ

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**DANIŞMAN
Prof. Dr. HÜSEYİN DEMİR**

SAMSUN 2011

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bu çalışma jürimiz tarafından 10/ 02 / 2011 tarihinde yapılan sınav ile MATEMATİK
Anabilim Dalı'nda DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Üye: Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Üye: Prof. Dr. A. Turan GÜRKANLI

Üye: Prof. Dr. Muharrem DİNÇER

Üye: Doç. Dr. Aydın DURMUŞ

ONAY:

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylım.

/03/2011

Prof. Dr. Hasan GÜMÜŞ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

KAPALI BİR BÖLGEDE DOĞAL TAŞINIMLI ISI VE KÜTLE TRANSFERİNİN KARARLILIK ANALİZİ

ÖZ

Bu çalışmada, alttan ısıtılan ve alt tabakası tuzlanmış doğal taşınım probleminin kararlılık analizi incelenmiştir. Akımın olduğu ortam gözenekli ve gözeneksiz olarak alınmaktadır. Kararlılık analizi, lineer kararlılık ve global kararlılık analizi şeklinde ele alınan probleme bağlı olarak iki farklı türde yapılmıştır.

Bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır.

Doğal taşınım probleminin kararlılık analizi için geniş bilgiler giriş ve literatür özeti bölümünde verilmiştir. Genel bilgiler bölümünde; önemli tanım ve kavramlar yer almaktadır. Materyal ve metot bölümünde; tezde ele alınan probleme ilişkin uygulanan yöntemler hakkında bilgi verilmektedir.

Bulgular bölümü tezin orijinal kısmıdır. Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, Newtoniyen akışın kararlılık analizi, normal mod analizi kullanılarak araştırılmıştır. İkinci bölümde, gözenekli ortamda doğal taşınım ile oluşan hareketin global kararlılık analizi, Darcy kanunu kullanılarak, yine S. Lombardo ve ark. (2001) çalışmasında ki yöntem ile ε ve Le parametrelerine göre incelenmiştir.

Tartışma bölümünde, bu çalışmada elde edilen sonuçlar grafiksel olarak verildi ve bunlar yayınlanan diğer çalışmalarıyla karşılaştırılmıştır. Bu bölümde, Newtoniyen akışın kararlılığı boyutsuz parametrelere göre yorumlanmıştır. Ortamın kararlılığını etkileyen kritik $Ra = \mathfrak{R}$ değerleri Le ve ε boyutsuz parametrelerine göre tanımlanmıştır.

Son olarak, kararlılık analizi konusunda gelecek çalışmalar için yeni öneriler sonuç ve öneriler bölümünde verildi.

Anahtar Kelimeler: Doğal Taşınım, Newtoniyen Akışkan, Doğrusal Kararlılık, Global Kararlılık, Isı ve Kütle Taşınımı, Darcy Kanunu, Geçirgenlik, Gözeneklilik

STABILITY ANALYSIS OF A NATURAL CONVECTION HEAT AND MASS TRANSFER PROBLEM WITHIN A CAVITY

ABSTRACT

In this study, consideration was given to the stability analysis of a natural convection problem with salted bottom wall and heated from below. Flow regime which is occurred to flow is taken as porous or non porous. Stability analysis was studied as linear stability and global stability, depending on the problem considered.

This work had six main sections:

Brief information on the stability analysis of the natural convection problem is given in the Literature Summary and Introduction section.

Some basic definitions, concepts and information are given in the general information section. The Materials and Methods section provides information related to the problem and methods used in this study.

The findings section is the original part of this thesis. This section consists of two subsections. In the first part, the stability analysis of Newtonian fluid was examined by using linear stability with normal mode analysis. In the second part, the global stability analysis of the resulting natural convection in the porous media was examined by using Darcy's law according to Lombardo et al. (2001), with respect to the parameters Le and ϵ .

In the Discussion section, the results are given graphically and are discussed with other published work. In this section, the stability of Newtonian flow is interpreted with respect to the dimensionless parameters. The critical Rayleigh's values affecting the stability are determined from Le and ϵ .

In the Conclusions and Suggestions sections, suggestions are presented for future studies on stability analysis.

Key words: Natural Convection, Newtonian Fluid, Linear Stability, Global Stability, Heat and Mass Transfer, Darcy's law, Permeability, Porosity

TEŐEKKÜR

Tez konumu belirleyen, çalıőmalarım boyunca yardım ve desteklerini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Hüseyn DEMİR' e saygı ve teőekkürlerimi sunarım.

Çalıőmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen baőta tez savunma jürisinde bulunan hocalarım olmak üzere, bölümümüz de bulunan tüm hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma saygı ve teőekkürlerimi sunarım.

Canım aileme ve bana destek olan tüm dostlarıma teőekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
1. Giriş ve Literatür Özeti	1
2. Genel Bilgiler	6
3. Materyal ve Yöntemler	19
4. Bulgular	20
4.1. Kapalı Bir Bölgede Alttan Isıtılan Doğal Taşınımli Newtoniyen Akışkanın Doğrusal Kararlılık Analizi	20
4.2. Gözenekli Ortam da Alttan Isıtılan Kapalı Bir Bölgedeki Newtoniyen Akışkanın Global Kararlılık Analizi	31
4.2.1. $Le = \varepsilon = 1$ Olması Durumunda	36
4.2.2. $Le \neq 1$ ve $\varepsilon = 1$ Olması Durumunda	39
4.2.3. Herhangi ε ve Le Sayısı için Kararlılık Analizi	47
5. Tartışma	52
6. Sonuç ve Öneriler	59
7. Kaynaklar	60

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\frac{D}{Dt}$: Maddesel Türev Operatörü
Δ	: Fark operatörü
∇^2	: Laplace Operatörü
∇	: Gradyent Operatörü
IR^n	: n- boyutlu Öklid uzayı
ρ	: Yoğunluk
ω	: Girdap Fonksiyonu
Ψ	: Akım fonksiyonu
C	: Derişiklik
T	: Sıcaklık
P	: Basınç
t	: Zaman
Ra_T, \mathfrak{R}	: Rayleigh sayısı
Ra_C, \wp	: Çözünen madde Rayleigh sayısı
Le	: Lewis Sayısı
Pr	: Prantdl Sayısı
Da	: Darcy Sayısı
μ	: Dinamik Yapışkanlık (viskozite)
ν	: Kinematik Yapışkanlık (Viskozite)
κ	: Geçirgenlilik
ϵ	: Gözeneklilik
g	: Yerçekimi ivmesi

ŞEKİLLER LİSTESİ

<u>Sekiller</u>	<u>Sayfa No</u>
Şekil 2. 1. Gözenekli malzemelere örnekler; üst: Doğal gözenekli malzemeler (A) Plaj Kumunu, (B) Kumtaşı, (C) Kireçtaşı, (D) Çavdar ekmeği, (E) Odun, (F) İnsan Akciğeri. Alt: Yapı malzemelerinde kullanılan taneli gözenekli malzemeler. Çapı 0,5 cm (Liapor) küreler(sol) ve 1 cm boyutunda parçalanmış kireçtaşı (sağ) (Nield ve Bejan,1999)	14
Şekil 2. 2. Çeşitli akışkanların kayma gerilmesi (τ)- Hız Gradyenti (dv/dy) değişimi	16
Şekil 4.1.1. Problemin fiziksel modeli	19
Şekil 4.1.2. $\varphi = 150$, $Pr = 0.85$, $\pi \cong 3.14$ ve $Le = 0.3$, $Le = 0.5$, $Le = 0.7$, $Le = 3$, $Le = 7$ için $\mathfrak{R} - a$ değişim grafiği	52
Şekil 4.1.3. $\varphi = 150$, $Pr = 7$, $\pi \cong 3.14$ ve $Le = 0.3$, $Le = 0.5$, $Le = 0.7$, $Le = 3$, $Le = 7$ için $\mathfrak{R} - a$ değişim grafiği	53
Şekil 4.1. 4. $Le = 0.7$, $Pr = 1$, $\pi \cong 3.14$ ve $\varphi = 20$, $\varphi = 50$, $\varphi = 100$, $\varphi = 150$, $\varphi = 200$ için φ nin $\mathfrak{R} - a$ değişimi üzerindeki etkisinin grafiği	54
Şekil 4.1.5. $Le = 0.7$, $Pr = 1$, $\pi \cong 3.14$ ve $\varphi = 100$, $\varphi = 500$, $\varphi = 1000$, $\varphi = 1500$, $\varphi = 2000$ için φ nin $\mathfrak{R} - a$ değişimi üzerindeki etkisinin grafiği	54
Şekil 4.1.6. S. Lombardo ve ark. (2001) çalışmasında $\mathfrak{R} = \frac{\varphi}{\varepsilon} + 4\pi^2 \frac{1 + \varepsilon Le}{\varepsilon Le}$ ifadesinde $Le = 0.7$, $\pi \cong 3.14$, $\varepsilon = 0.5$ ve $\varphi = 100$, $\varphi = 500$, $\varphi = 1000$, $\varphi = 1500$, $\varphi = 2000$ için $\mathfrak{R} - a$ değişim grafiği	55
Şekil 4.1.7. Şekil 4.1.5 ile Şekil 4.1.5 nın bir arada gösterimi	56
Şekil 4.2.1. Gözenekli ortamın fiziksel modeli	34

Şekil. 4.2.2. $Le = 3$, $\delta = 0.1$, $Da = 0.001$, $\pi = 3$ için 4.2.85 eşitsizliğinin çözünen madde Rayleigh sayısı ile ısı Rayleigh sayısı grafiği	57
--	----

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Kapalı ortamlar, duvarlarla sınırlanmış ve akışkan ile dolu boşluklardır. Bu ortamlar içinde oluşan doğal taşınım ise, akışkan içerisinde meydana gelen derişiklik (konsantrasyon) farkları ile birlikte yerçekimi gibi cisim kuvvetinin neden olduğu kaldırma kuvvetinden kaynaklanmaktadır. Söz konusu derişiklik değişimleri, ortamı sınırlayan yüzeyler boyunca dıştan ısıtma veya soğutma, ortam içerisinde ısı kaynaklarının bulunması, kütle geçişinin bir sonucu olarak akışkan içerisinde oluşan derişiklik değişimleri veya bu durumların herhangi bir birleşimi sonucu oluşabilir (Yang, 1987).

Kapalı ortamlarda ki doğal taşınımın birçok uygulama alanı vardır. Özellikle bilim ve teknolojinin, meteoroloji, jeofizik, astrofizik, nükleer reaktör sistemleri, malzeme işleme, güneş enerji sistemleri, enerji depolama ve korunumu, yangın kontrolü ve kimya, gıda ve metalürji endüstrisi gibi çeşitli alanlarda çok sıkça kullanılmaktadır. Ayrıca pratik olarak en önemli uygulama alanlarından biri, binaların ısıtılması ve soğutulmasıdır.

Bu tür uygulamalar, birçok ısı geçişi uzmanını kapalı ortamlar içindeki doğal taşınım konusunu çalışmaya yöneltmiştir. Giderek artan bu ilgi için bir başka sebep, doğrusal olmayan eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için sayısal yöntemlerin geliştirilmesi kadar, türbülans, yanma ve radyasyonlu ısı geçişi gibi karmaşık fiziksel işlemlerin anlaşılmasında son zamanlarda yapılan ilerlemelerdir. Bunun sonucu olarak, önemli kapalı ortam doğal taşınım problemleri uygun bir şekilde denklemlerle ifade edilebilmekte ve başarılı bir şekilde sayısal olarak çözülebilmektedir (Yang, 1987).

Kapalı ortamlar içinde oluşan doğal taşınım ile ilgili ilk çalışmalar, Lewis (1950), Ostrach (1952) ve Batchelor (1954) tarafından yapılmıştır.

Lewis, sınır tabaka yapısının karşılaşılmadığı, birden küçük Rayleigh sayılarında ki durumu ele almıştır.

Ostrach, sonlu düşey oyuk içerisindeki akışta sürtünme yontulmasının etkisini incelemiş ve bu etkinin önemli olduğunu bulmuştur.

Batchelor, (1954) H/d oranının 5'den sonsuza değişen değerleri için ayrıntılı bir analiz yapmıştır. Ra Rayleigh sayısının küçük değerleri için bir bozunum şekli kullanmış ve H/d büyükse, $Ra < 1000$ için sadece iletim rejiminin olması nedeniyle

ısı geçişinde çok az bir artışın olduğu sonucuna varmıştır. Ayrıca, herhangi bir Ra sayısında, H/d değeri sonsuza giderken ısı geçişinin tek mekanizmasının iletim olduğunu göstermiştir.

Yine Batchelor (1956), oyuk (cavity) bölgedeki akım problemi ile ilgili daha önceki çalışmalardan yola çıkarak büyük Reynold sayıları için kararlı Newtoniyen akışkan akımının tekil girdap verdiğini göstermiştir. Kartezyen koordinatlarda çukur bölgede ki akıma ait ilk sayısal çalışma Kawaguti (1961) tarafından yapılmıştır ve Reynolds sayısının 64 e kadar olan değerleri için sayısal çözümler elde edilmiştir. Çukur bölgedeki akım problemi, Burgraff (1966) tarafından detaylı olarak ele alınan kararlı ve kararsız akımlara ait test problemlerinin büyük bir bölümünü teşkil etmiştir ve çukurun daha alt köşelerindeki ikinci girdap hareketini incelemiştir.

Çukur bölgede ki viskoelastik akışkan Demir (1996), tarafından zamandan bağımsız ve zamana bağlı olarak çalışılmıştır. Bu çalışmada sonlu farklar metodu kullanılarak iki boyutlu akımlara ait sonuçlar alınarak doğal taşınım ile ısı ve kütle transferi sayısal olarak incelenmiştir.

Gözenekli ortam, katı bir iskelet içerisinde birbiri ile irtibatlı boşlukların bulunduğu bir malzeme olarak tanımlanmaktadır. Gözenekli ortamlar, günlük hayatımızda her sahada karşımıza çıkmaktadır. Doğal gözenekli ortam olarak, deniz kumu, kireç taşı, odun, çavdar ekmeği, akciğer ve dokuları örnek verebiliriz. Petrolün yer altından çıkarılması, jeotermal enerji, kimyasal ve nükleer artıkların depolanması, yalıtım malzemelerinde, çakıl yataklı nükleer reaktörlerin tasarımında, doku içinde kanın akışı ve ısı geçişi problemlerinde kullanılır. Ayrıca hava ve uzay araçlarında aerodinamik ısınmanın önüne geçmek için kullanılan ısı kalkan problemleri gibi çok sayıda bilimsel ve teknik alanda gözenekli ortam modellenmesi kullanılmaktadır.

Gözenekli ortamlarda akış ile ilgili ilk rastlanan çalışma Henry Philibert Gaspard Darcy tarafından 1856 yılında Fransa'nın Dijon kentinde temiz su getirme projesi kapsamında yapılan bir deneysel çalışmadır. Bu ilginç deneysel çalışmanın sonuçları daha sonraları gözenekli ortamlarda akış problemlerine uygulanabilecek güncel bir matematik model haline getirilmiş ve halen kullanılmaktadır (Baytaş, 2006).

Gözenekli ortamlarda akışkan akışı ve taşınım ile ısı geçişi konusunda son yıllarda çok sayıda kitap ve bilimsel çalışma yayınlanmıştır. Bunlardan bazıları Nield ve Bejan (1999) Ingham ve Pop (1998;2002; 2005) vb. dir. Bütün bu gelişmelere rağmen,

gözenekli ortamlar için yine de çok sayıda yeni matematiksel modellere ve tanımlamalara ihtiyaç duyulmaktadır.

Gözenekli ortamlarda doğal, zorlanmış ve birleşik taşınım ile ısı geçişi ve akış için sınır tabaka problemleri Pop (2004) tarafından incelenmiş ve değişik problemler için matematik modelleri tanıtmıştır.

Singh ve ark. (1999) sıvı ve gözenekli tabaka içeren bir ortamda sıcaklık ve derişiklik değişimlerinin hareket ettirdiği doğal taşınım ile ısı ve kütle geçişini sayısal olarak incelemişlerdir. Çalışmalarında akışkanın gözenekli ortama nüfus etme derecesini, Darcy sayısına, ısıl Rayleigh sayısına, derişiklik Rayleigh sayısına ve yüzdürme oranına bağlı olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca Lewis sayısının ısıtılmış duvarlarda ki kütle geçişinde ki etkisinin de Darcy sayısına bağlı olduğunu göstermişlerdir.

Kala ve ark. (2001), gözenekli kap içindeki doğal taşınım ile ısı ve kütle geçişini Boussinesq yaklaşımı Darcy modeli kullanarak sayısal ve analitik yöntemle incelemişlerdir. Kabın alt duvarında ısı akısı ve derişiklik akısı uygulanırken, yatay yönde düşey duvarlara sabit bir ısı akısı uygulanmaktadır. Yan duvarların geçirgen olmadığı kabul edilmiştir. Matematik modellemelerde çözümler ısıl ve derişiklik Rayleigh sayıları, Lewis sayısı, boyut oranı ve farklı ısı akıları için elde edilmiştir. Akışlarda ki çatallaşmaların ısıl Rayleigh sayısına bağlı olduğu, bunun da derişiklik Rayleigh sayısına, Lewis sayısına ve ısı akısına bağlı olarak değiştiğini göstermişlerdir.

Bourich ve ark. (2004) derişikliği sağ duvarda büyük sol duvarda küçük olacak şekilde alttan ısıtılan üstten soğutulan kare gözenekli ortamda ısı ve kütle geçişini sayısal yöntemle incelemişlerdir. Akışın yapısını, ısı ve kütle geçişi ısıl Rayleigh sayısı, Lewis sayısı ve Nuselt sayısına bağlı olarak incelemişlerdir. Ve sonuçlar, yüzdürme oranının, akışın dinamik davranışının ve ısı ve kütle geçişinin belirlenmesinde temel parametrelerden biri olduğunu göstermiştir.

Bahloul ve ark. (2004) alttan ısıtılan ve yan duvarları farklı derişikliklere sahip olan dikdörtgen bir gözenekli kaptaki ısı ve kütle geçişini Rayleigh ve Lewis sayıları ile yüzdürme oranının geniş bir aralığında incelemişlerdir. Yüzdürme oranı sıfıra yaklaşırken, akışın Lewis sayısından fazla etkilenmediğini buna karşılık yüzdürme oranı arttıkça akışın Lewis sayısına bağlı olarak değiştiğini göstermişlerdir.

Mohamad ve Bennacer (2001) akışkana doymuş gözenekli kabın sol düşey duvarının ısıtıldığı, sağ düşey duvarı soğutulduğu ve kabın alt duvarına ve üst duvarına

farklı derişikliğin uygulandığı matematiksel modeli sayısal yöntemle incelemişlerdir. Darcy-Brinkman modeli kullanılarak gözenekli ortamdaki doğal taşınım ile ısı ve kütle geçişini ve akış yapısını Grashof sayısı, yüzdürme oranı ve Darcy sayısına bağlı olarak incelemişlerdir.

Derişiklik ve sıcaklık değişiminin farklı eksenlerde uygulanması çapraz değişim olarak ifade edilir. Mohamad ve Bennacer (2002) çapraz değişimlere maruz doğgun gözenekli ortamda ısı-çözünen madde taşınımını iki ve üç boyutlu model için sayısal olarak incelemişlerdir. Kabın düşey duvarlarına farklı sıcaklık uygulanırken yatay duvarlara da farklı derişiklik uygulanıyor. Yüzdürme oranına bağlı olarak akışın yapısı değişmektedir. Yüzdürme oranı >0.8 ve Lewis sayısı $=100$ ise kararsız akış oluşmaktadır. Sonuçlar, iki boyutlu bir modelin ısı ve kütle geçiş oranlarını uygun bir şekilde modelleyebilmek için yeterli olduğunu göstermiştir.

Trevisan ve Bejan (1985) yatay yönde ısı ve derişiklik değişimine maruz kare gözenekli ortamda kaldırma kuvvetine bağlı doğal taşınım ile ısı ve kütle geçişini sayısal yöntemle ve ölçek analizi ile incelemişlerdir. Bu incelemelerinde temel korunum denklemlerinin kullanılması ile elde edilen boyutsuz parametrelerden Rayleigh sayısı, Lewis sayısı ve kaldırma oranı farklı değer aralıklarında kullanılmıştır. Sonuç olarak, iki farklı metottan elde edilmiş verileri karşılaştırarak gözenekli bir tabakada doğal taşınımına etki eden büyüklükleri sınırları ile birlikte göstermişlerdir.

Gözeneklilik, gözenekli ortamın içinden geçen taşıma süreçlerini modellemede önemli bir faktördür. Ortamın gözeneklilik değişiminin doğası, ısı taşınımını ve akışını önemli derecede etkiler. Değişken gözenekliliğin, küresel yapıda ki gözenekli ortamda doğal taşınım üzerinde ki etkisi David ve ark. (1991) tarafından sayısal olarak incelenmiştir. Taşınım olayında gözeneklilik değişiminin doğrusal olmayan sıcaklık dağlılımlarına yol açtığını göstermişlerdir. Çalışmalarını deneysel sonuçlarla da karşılaştırıp sonuçların uyumlu olduğunu belirlemişlerdir.

Gözenekli ortamda çift ısı-yayılım taşınımı olayları üzerinde ki ilk çalışmalar, alttan ısıtılan ve tuzlanan yatay tabakalardaki taşınım kararsızlığı problemleri ile ilgilidir. Bu gözenekli ortamda çift yayılımlı taşınım çalışmaları ilk olarak 1968 yılında Nield tarafından başlatılmıştır. Taunton ve ark. (1972) Nield'in analizini bir gözenekli tabakada tuz-parmaklık yayılımlı durumu düşünerek genişlettiler. Rudraiah ve ark. (1982) doğrusal ve doğrusal olmayan analiz uyguladılar ve alt kritik kararsızlıkların iki bileşenli akışkan durumunda mümkün olduklarını buldular.

Lombardo ve ark. (2001) bir gözenekli ortamda çift-yayımlı karışımının Benard problemi için doğrusal olmayan kararlılığını, gözeneklilik (ϵ) ve Lewis sayısına (Le) göre incelemiştir. Yine Lombardo ve Straughan (2006), Lyapunov direkt metodunu kullanarak alttan tuzlanan ve ısıtılan ve dönen bir gözenekli ortam içinde çift akışkan karışımının yatay düzlemde doğrusal olmayan kararlılığını çalışmıştır.

Bu çalışmalardan yararlanılarak biz bu tez çalışmasında ilk bölümde iki boyutlu, kapalı bir ortamda alttan tuzlanan ve ısıtılan bir çukur (cavity) bölgede oluşan doğal taşınım probleminin kararlılık analizini normal mod analizi kullanarak araştırdık. Aynı problemin doğrusal olmayan global kararlılık analizi farklı sınır koşullarında üç boyutlu uzayda ve gözenekli ortamda Lombardo ve Mulone (2001) tarafından çalışılmıştır. Lombardo ve ark. (2001) çalışmalarındaki metot kullanılarak kritik Rayleigh sayısı bulunmuş ve salınım başlangıcı için Rayleigh sayısı elde edilmiştir. Pr, Le parametrelerinin çeşitli değerleri için grafikler incelenip yorumlanmıştır.

Bulgular bölümünün ikinci kısmında ise yine 2 boyutlu, kapalı bir ortamda alttan tuzlanan ve ısıtılan gözenekli bir ortamdaki doğal taşınım probleminin kararlılık analizi Lombardo ve Mulone (2001) ve Lombardo ve ark. (2001) çalışmalarından yararlanılarak gözeneklilik (ϵ) ve Lewis sayısına (Le) göre incelenmiştir. Sonuçlar grafiklerle desteklenip daha önceki çalışmalarla karşılaştırılmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde hazırlanan tezin içeriğinde kullanılacak önemli tanımlar ve boyutsuz parametreler tanıtılacaktır.

2.1. Temel Tanımlar ve Boyutsuz Parametreler

2.1.1. X reel vektör uzayı üzerinde tanımlı reel değerli $\|\cdot\|$ fonksiyonu

- a) Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- b) Her $x \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
- c) $x \neq 0$ için $\|x\| > 0$
- d) Her $x \in X$ için $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

koşullarını sağlarsa bu fonksiyona X üzerinde bir norm denir (Minklavcic, 2001).

2.1.2. $\Omega; \mathbb{R}^n$ uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. $L^2(\Omega)$ uzayı

$L^2(\Omega) = \{f \mid f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ölçülebilir ve } \|f\|_2 < \infty\}$ şeklinde tanımlıdır. Burada ki

$$L^2(\Omega) \text{ üzerinde ki } \|\cdot\|_2 \text{ normu } \|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

olarak tanımlıdır (Miklavcic, 2001).

Bu çalışmada kullandığımız tüm norm ve iç çarpım fonksiyonları $L^2(\Omega)$ uzayı üzerinde tanımlı norm ve iç çarpım fonksiyonlarıdır.

2.1.3. X vektör uzayı üzerinde tanımlanan her iç çarpım fonksiyonunun aynı zamanda X üzerinde bir norm tanımladığı bilinmektedir. Eğer bu norma göre X bir tam uzay ise X uzayına Hilbert uzayı denir.

$$\text{Özel olarak } L^2(\Omega) \text{ uzayı } \forall u, v \in L^2(\Omega) \text{ için } (u, v) = \int_{\Omega} uv dx$$

şeklinde tanımlı iç çarpım fonksiyonuna göre bir Hilbert uzayıdır (Miklavcic, 2001).

Ayrıca $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlarının sınıfı $C^2([a, b])$ ile gösterilir.

Yine Ω üzerinde tanımlı ikinci mertebeden türevlenebilir ve sonsuzda sıfır olan tüm fonksiyonların uzayı $C_0^2(\Omega)$ ile gösterilir (Macrowen,1995).

2.1.4. Poincare' eşitsizliği: Ω , \mathbb{R}^n uzayının sınırlı alt kümesi olsun. Her $u \in C_0^1(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx$$

koşulunu sağlayan $C = C(\Omega)$ sabiti vardır (Macrowen,1995).

2.1.5. Cauchy – Schwarz Eşitsizliği: H vektör uzayı, üzerindeki $\langle . \rangle$ iç çarpım fonksiyonu ve $\|.\|$ normuna göre bir normlu uzay olmak üzere her $x, y \in H$ için $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ eşitsizliği vardır (Nield,1968).

2.1.6. Darcy kanunu: Henry Darcy genellikle gözenekli cisimlerdeki sıvının hareket denklemlerini oluşturmuştur. Gözenekli cisimlerde akışkanın hareketinin denklemi tek boyutlu durum için sıvının hızının, akım yönündeki basınç gradyenti ile orantılı olduğu sonucuna varmıştır. Yani $u \propto \frac{dp}{dx}$. Ayrıca μ dinamik yapışkanlık (viskozite) ve κ gözenekli ortamın geçirgenliği olmak üzere $\mu u = -\kappa \frac{dp}{dx}$ bağıntısını elde etti. Bu bağıntı üç boyuta genişletilirse, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ olmak üzere $\mu \mathbf{v} = -\kappa \nabla p$ denklemi bulunur. Bu denklem Darcy kanunu olarak bilinir (Straughan, 1992).

2.1.7. Oberbeck-Boussinesq Yaklaşımı: Doğal taşınım çalışmalarında $\nabla P = -\frac{\mu}{\kappa} \mathbf{v}$

Darcy denkleminin sağ tarafına ρg yerçekimi terimi veya onun yaklaşık açılımı eklenir. Isı yayılımı oluşturmak için sıvının yoğunluğu sıcaklığın bir fonksiyonu olmalıdır. Ayrıca kütle, momentum ve enerjinin denklemlerini tamamlamak için bir durum denklemine ihtiyacımız vardır. Çift ısı yayılımı için en basit derişiklik değişim

fonksiyonu $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0) + \beta'(C - C_0)]$ şeklindedir. Buradaki ρ_0 , T_0 başlangıç sıcaklığındaki sıvı yoğunluğudur. C_0 başlangıçtaki derişikliği gösterir. β ve β' ısı ve çözünen madde yayılım katsayılarıdır. Analizi basitleştirmek için β ve β' sabitleri hariç diğer tüm materyal fonksiyonları sabit kabul edilir. Bu durumda Boussinesq yaklaşımı geçerlidir denir (Nield ve Bejan, 1992).

2.1.8. Varyasyonel Hesaplar ve Euler – Lagrange Denklemleri:

Birçok fiziksel sistem, verilen tanım kümesinde fiziksel niceliklerin ekstremum özellikleri ile karakterize edilir. Bu fiziksel nicelik verilen bölgedeki integral olarak görülür.

Klasik Euler-Lagrange varyasyonel problemi

$$I(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx, \quad u' = \frac{du}{dx}$$

$$u(a) = \alpha, \quad \text{ve} \quad u(b) = \beta$$

fonksiyonelinin ekstremum değerini tanımlamaktır. Burada α ve β verilen sayılar, $u(x)$ özel olarak $C^2([a, b])$ sınıfından olsun. Ayrıca F integrantı tüm değişkenlerine göre ikinci mertebeden sürekli türevlere sahiptir.

$u \in C^2([a, b])$ alalım. Kabul edelim ki $I(u)$ bir ekstremuma sahip olsun. Bu takdirde $v(a) = 0 = v(b)$ koşullarını sağlayan $C^2([a, b])$ sınıfına ait keyfi v elemanı ve sonlu u elemanı için tüm $u + \varepsilon v$ değişimlerinin kümesini düşünelim. $I(u)$ fonksiyonelinin δI değişimini alırsak

$$\delta I = I(u + \varepsilon v) - I(u)$$

$$= \int_a^b [F(x, u + \varepsilon v, u' + \varepsilon v') - F(x, u, u')] dx$$

bulunur. İntegralın içindeki ilk fonksiyon $\varepsilon = 0$ civarında Taylor serisine açılırsa

$$\delta I = I(u + \varepsilon v) - I(u)$$

$$= \int_a^b \left[F(x, u, u') + \varepsilon \left(v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \left(v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} \right)^2 + \dots - F(x, u, u') \right] dx$$

$$= \int_a^b \varepsilon \left(v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx + O(\varepsilon^2)$$

elde edilir. Böylece $I(u)$ fonksiyonelinin ekstremuma sahip olması için gerekli koşul, bir keyfi ε için

$$0 = \delta I = \int_a^b \left(v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx$$

olarak bulunur. Buradan bu integralin ikinci terimine kısmi integral uygulanırsa

$$\begin{aligned} 0 = \delta I &= \int_a^b \left(v \frac{\partial F}{\partial u} + v' \frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx \\ &= \int_a^b v \left[\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) \right] dx + \left[v \frac{\partial F}{\partial u'} \right]_a^b \end{aligned}$$

olur. $v(a) = 0 = v(b)$ olduğundan son terim sıfır olur. O halde v keyfi olduğundan integralin içi sıfır olmalı. Yani buradan

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$$

koşulu elde edilir. Bu son denkleme tek değişkenli varyasyon problemleri için Euler-Lagrange denklemi denir. Burada

$$d \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) dx + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) du + \frac{\partial}{\partial u'} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) du'$$

eşitliği kullanılırsa

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$$

Euler-Lagrange denklemleri

$$F_u - F_{xu'} - u' F_{uu'} - u'' F_{u'u'} = 0$$

formunda yazılabilir. F , x , u , veya u' değişkenlerinden birine açık olarak bağlı değil ise o zaman Euler-Lagrange denklemleri basitleştirilebilir. Açık olarak üç durum vardır.

1. Eğer $F = F(x, u)$ ise o zaman $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$ denklemi $F_u(x, u) = 0$

denklemine dönüşür.

2. Eğer $F = F(x, u')$ ise bu takdirde $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$ denklemi $\frac{\partial F}{\partial u'} = \text{sabit}$

denklemine dönüşür.

3. Eğer $F = F(u, u')$ formunda ise yine $\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial u'} \right) = 0$ denklemi $F - u'F_{u'} = \text{sabit}$

denklemine dönüşür (Debnath, 2004).

2.1.9. Enerji Özdeşlikleri: Kararlılık analizi için Enerji metodu en iyi metotlardan biridir. Enerji metodu, $t \rightarrow \infty$ iken bozulmuş akımın başlangıç durumunda ki akıma asimptotik olarak yaklaştığının ispatı için kullanılır. Bir problem ele alındığında bozulmuş hareketin kinematik enerjisi

$$\tilde{K} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 d\Omega$$

$$\text{ve } \tilde{\Theta} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} T^2 d\Omega \quad , \quad \tilde{\Gamma} = \int_{\Omega} \frac{1}{2} C^2 d\Omega$$

şeklinde sıcaklık ve derişiklik değerleri alınır. Burada T ve C sırasıyla bozulmuş hareketin sıcaklık ve derişikliğidir. Eğer $t \rightarrow \infty$ olduğunda \tilde{K} , $\tilde{\Theta}$ ve $\tilde{\Gamma}$ sıfıra yakınsarsa başlangıç durumunda ki akımın kararlı olduğu söylenir. \tilde{K} , $\tilde{\Theta}$ ve $\tilde{\Gamma}$ 'nın değışimleri araştırılan sistemin denklemlerinden elde edilir (Joseph ve Shir, 1968).

2.1.10. Lewis sayısı: Termal yayılmanın çözünen madde yayılmasına oranı olarak tanımlanan boyutsuz bir sayıdır. $Le = \frac{k_T}{k_C}$ şeklinde tanımlıdır ve sıvının akışını karakterize etmek için kullanılır (Nield ve Bejan, 1992). Taşınım ile ısı ve kütle geçişinin bir arada gerçekleştiği durumlarla ilgilidir.

2.1.11. Yapışkanlık (Viskozite): Akışkanın akışa karşı gösterdiği direncin bir ölçümüdür. Sıvıların yapışkanlığı sıcaklıkla azalır, gazların yapışkanlığı ise sıcaklıkla artar. Birim uzunluğa karşı gelen kütle akış hızı dinamik yapışkanlık olarak adlandırılır ve μ ile gösterilir. Birimi Ns/m^2 veya kg/ms . Kinematik yapışkanlık, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ şeklinde verilir. Birimi m^2/s dir (Altınışik, 2003).

2.1.12. Prandtl sayısı: ν kinematik yapışkanlığın α ısı yayılımına oranı olarak tanımlanır. Prandtl sayısı, hız ve ısı sınır tabakalar içinde yayılımla momentum ve enerji aktarımının birbirine oranını gösterir (Frank ve David, 2001).

2.1.13. Grashof sayısı: Hız tabakasındaki kaldırma kuvvetlerinin, sürtünme kuvvetlerine oranının bir ölçüsüdür. Grashof sayısının serbest taşınımdaki rolü Reynolds sayısının zorlanmış taşınımdaki rolü ile hemen hemen aynıdır (Soğukoğlu, 2000).

2.1.14. Bir doğal taşınım sınır tabakasında geçiş bölgesi, akışkan içindeki kaldırma ve sürtünme kuvvetlerinin göreceli büyüklüğüne bağlıdır. Bu genellikle boyutsuz parametre olan **Rayleigh sayısı** ile ifade edilir. Rayleigh sayısı gerçekte Grashof ve Prandtl sayılarının çarpımına eşittir (Soğukoğlu, 2000). Akışkanlar mekaniğinde bir akım için Rayleigh sayısı, akım içinde ki ısı transferi ile ilgili boyutsuz bir sayıdır.

2.1.15. Reynolds sayısı: Atalet kuvvetlerinin sürtünme kuvvetlerine oranı olarak da yorumlanabilen Reynolds sayısı $Re = \frac{\mathbf{v}d}{\nu}$ olarak tanımlanır. Burada ν kinematik yapışkanlık, \mathbf{v} akışkanın hızı ve d yüksekliktir. Bu sınır tabaka içindeki diferansiyel kontrol hacmi için atalet kuvvetleri, akışkan kontrol hacimden geçerken momentum akısındaki değişim ile ilişkilidir. Reynolds sayısı, akışın laminer (düzenli) veya türbülanslı (düzensiz) olduğunu belirtir. Ele alınan sistemde Re sayısı 2300 den küçük ise düzenli akış, büyük ise düzensiz akış olarak alınır. Herhangi bir akışta küçük çalkantılar büyüyerek düzensiz koşullar oluşturabilir. Ama Re' nin küçük değerlerinde sürtünme kuvvetleri, atalet kuvvetlerine göre yeterince büyüktür ve düzenli akış korunur. Ancak, Re sayısının artan değerleri ile sürtünme kuvvetleri atalet kuvvetleri yanında küçük kalır ve küçük çalkantılar büyüyerek düzensiz akışa geçiş sağlar. Bunun yanı sıra Reynolds sayısının büyüklüğünün, hız sınır tabakasının kalınlığını etkilediği vurgulanmalıdır.

Gözenekli ortamda diğer bir boyutsuz parametre Darcy sayısıdır. **Darcy sayısı** ortamın gözenekliliği ile ilgilidir. Ve $Da = \frac{d^2}{\kappa}$ ile tanımlıdır.

2.1.16. Akım fonksiyonu: Ψ akım fonksiyonunu fiziksel olarak şöyle ifade edebiliriz. Akım fonksiyonu bir akım çizgisi ile herhangi bir taban (baz) akım çizgi arasında ve şekil düzlemine dikey birim derinlik içinde yer alan ve birim zaman içinde hacim olarak akım miktarını ifade eden bir fonksiyondur. Akım çizgileri boyunca bütün noktalarda hız vektörleri akım çizgilerine teğettir ve bundan dolayı hız bileşenleri akım fonksiyonunun türevleri cinsinden ifade edilebilir. Ve bunlar $\nabla \mathbf{v} = 0$ denklemini sağlar.

2.1.17. Girdap Vektörü: ω girdap vektörü, bileşenleri akışkan elemanın rotasyonunun birim zaman içindeki değeri (açısal hız) olarak tanımlanır. Yani $\omega = \text{rot } \mathbf{v}$. Girdap vektörü akım fonksiyonu cinsinden $\omega = \nabla^2 \Psi$ şeklinde ifade edilebilir.

2.2. Isı ve Kütle Geçişinin Temel Tanımları

Katı veya akışkan bir durgun ortam içinde, bir sıcaklık farkı olması durumunda, ortam içinde gerçekleşen ısı geçişi için **iletim** terimi kullanılır. Isı geçişinin bu türü, atomik ve moleküler düzeyde hareketle ilişkilidir. İletim, bir madenin daha yüksek enerjili parçacıklardan daha düşük enerjili parçacıklarına, bu parçacıklar arasındaki etkileşimler sonucunda enerjinin aktarılması olarak düşünülebilir. Rastgele moleküler hareket ile net enerji aktarımı, enerjinin **yayılmı** olarak ifade edilebilir.

Buna karşın, bir yüzey ile hareket halinde ki bir akışkan farklı sıcaklıkta ise, aralarında gerçekleşen ısı geçişi, **taşınım** terimi ile anılır. Taşınım ile ısı geçişi, iki mekanizmadan oluşmaktadır. Rastgele moleküler hareket (yayılmı) sonucunda enerji aktarımının yanı sıra, akışkanın kitle veya makroskopik hareketi ile de enerji aktarımı olur. Bu akışkan hareketi herhangi bir anda, çok sayıda molekülün, topluca veya kümelenmiş olarak hareket etmesi ile ilgilidir. Bir sıcaklık gradyenti olması durumunda, böylesi bir hareket, ısı geçişine katkıda bulunur.

Taşınım ile ısı geçişi, akışımın türüne göre sınıflandırılabilir. Akış, bir fan, bir pompa veya atmosferik rüzgârlar gibi bir dış etki ile oluyorsa, **zorlanmış taşınım** söz konusudur. Örnek olarak, elektronik devre elemanlarının bir fanın oluşturduğu veya zorladığı akış sonucu taşınım ile soğutulması gösterilebilir. Buna karşı, **doğal (veya serbest) taşınım**da akış, akışkan içindeki sıcaklık değişimlerinin neden olduğu derişiklik farkından kaynaklanan kaldırma kuvveti ile ilişkilidir. Zorlanmış taşınım ve salt doğal taşınımın yanı sıra, zorlanmış ve doğal taşınımın birlikte yer aldığı durumlar da oluşabilir.

2.2.1. Sıkıştırılmaz akışkan: Hareket boyunca akışkanın özgül kütlesi değişmiyorsa bu akışkanlara sıkıştırılmaz akışkan denir (Soğukoğlu, 2000).

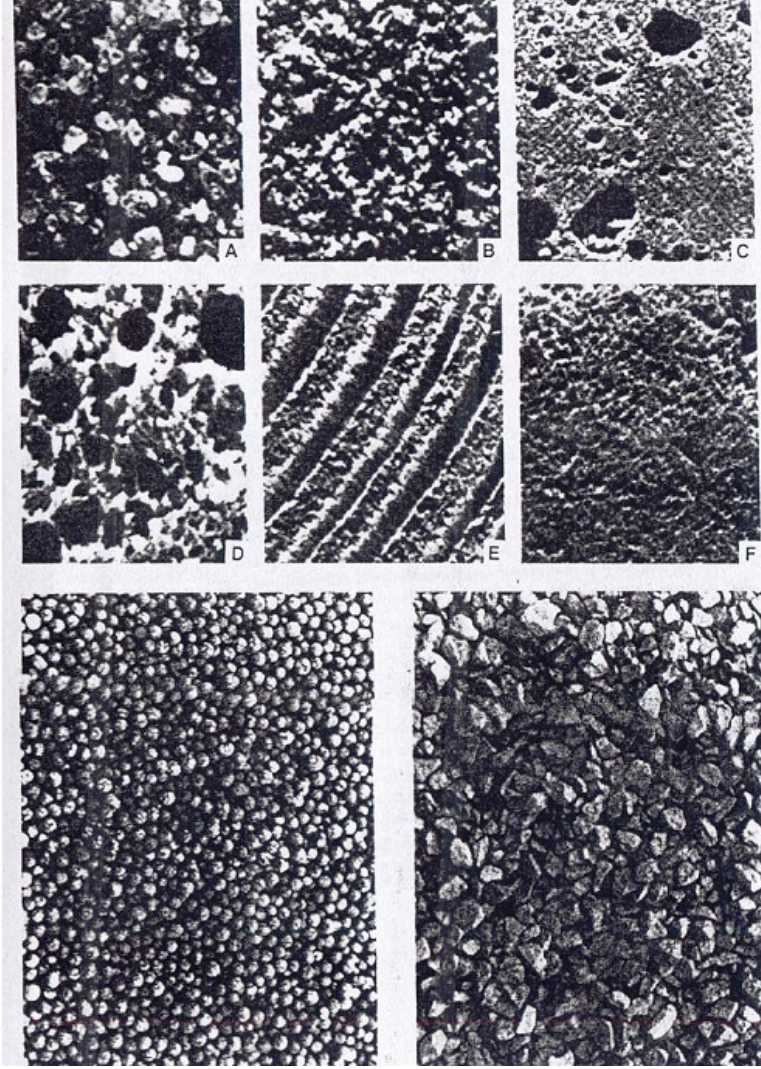
2.2.2. Gözenekli ortamın temel özellikleri:

a) Malzeme kendi boyutları ile karşılaştırıldığında içerisinde çok küçük ve birbiri ile irtibatlı boşluklar içerir. Bir katı matris içinde oluşan bu boşluklar; hava, su vb gibi akışkanlar veya farklı akışkanlardan oluşan karışımlar bulundurulur.

b) Akışkan katı maddenin bir ucundan girip diğer ucundan çıkabilmelidir. Doğal bir gözenekli ortam içinde bulunan boşlukların büyüklüğü ve şekli düzensizdir. Gözenekli

ortamın bütün makroskopik özellikleri bu düzensizlik ve rastgelelikten etkilenir. Bu durumda, makroskopik gözeneklilik yapısı değişkenleri gözenekli malzemenin ortalama özelliklerini temsil eder. En önemli gözenek yapısı değişkenleri; gözeneklilik, geçirgenlik ve akış yatağı olarak bilinir. Gözeneklilik ve akış yatağı yapısı gözenekli ortama has özelliklerdir, fakat geçirgenlik gözenekli ortamın kütle geçiş özelliğini temsil eder. Gözeneklilik, ε , malzeme içindeki toplam boşluk hacminin malzemenin toplam hacmine oranı şeklinde tanımlanır ve gözeneklilik sıfıra yakın veya hemen hemen 1 e yakın bir değer alabilir. Gözeneklilik, gözenekli bir malzemenin en önemli özelliğidir. Çünkü malzemenin tüm fiziksel özellikleri gözeneklilikten etkilenir. Türdeş bir gözenekli ortamda, gözeneklilik sabit olabilir fakat genelde yere bağlı olarak değişir

2.2.3. Geçirgenlik: Geçirgenlik, κ , gözenekli ortamın akış iletkenliğinin bir ölçüsüdür veya malzeme içinden akışkanın geçme kolaylığının bir ölçüsüdür



Şekil 2.1. Gözenekli malzemelere örnekler; üst: Doğal gözenekli malzemeler (A) Plaj Kumu, (B) Kumtaşı, (C) Kireçtaşı, (D) Çavdar ekmeği, (E) Odun, (F) İnsan akciğeri. Alt: Yapı malzemelerinde kullanılan taneli gözenekli malzemeler. Çapı 0,5 cm (Liapor) küreler(sol) ve 1 cm boyutunda parçalanmış kireçtaşı (sağ) (Nield ve Bejan, 1999)

2.3. HAREKET DENKLEMLERİ

Bir sıvının hareketini ifade eden genel denklemler kütle ve momentumun korunumu denklemleridir. Belirli bir t anında ki tanım kümesi Ω olmak üzere kütle korunumu denklemi Ω üzerinde

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.3.1)$$

şeklindedir. Benzer olarak momentum denklemi Ω üzerinde

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = f_i + \sigma_{ij,j} \quad (2.3.2)$$

şeklindedir. Newtoniyen akışkan için $\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} - p \delta_{ij}$ olduğunu biliyoruz.

Burada p basınç, $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(v) = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i})$, δ_{ij} Kronecker deltası, σ_{ij} gerilme

kuvvetidir. Buradan $\sigma_{ij} = \mu(v_{i,j} + v_{j,i}) + \lambda(\text{div } v)\delta_{ij} - p\delta_{ij}$ olur. Türeve geçerek

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= \mu(v_{i,jj} + v_{j,ji}) + \lambda(\text{div } v)_{,i} - p_{,i} \\ &= \mu \Delta v_i + (\lambda + \mu)(\text{div } v)_{,i} - p_{,i} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece momentum korunum denklemi

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + p_{,i} - \mu \Delta v_i - (\lambda + \mu)(\text{div } v)_{,i} = f_i \quad (2.3.3)$$

olarak yazılır. Bu eşitliği vektörel formda yazarsak

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) + \text{grad } p - \mu \Delta \mathbf{v} - (\lambda + \mu) \text{grad}(\text{div } \mathbf{v}) = \mathbf{f} \quad (2.3.4)$$

şeklinde elde edilmiş olur. (2.3.1) ve (2.3.4) denklemlerine Navier–Stokes denklemleri denir. Sıkıştırılmaz akışkanlar için yoğunluk (ρ) sabit olduğundan süreklilik denklemi

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.3.5)$$

olur. Ayrıca başlangıç durumunu homojen kabul edersek $\rho(x,0) = \rho_0 = \text{sabit}$ olur. Sıvı

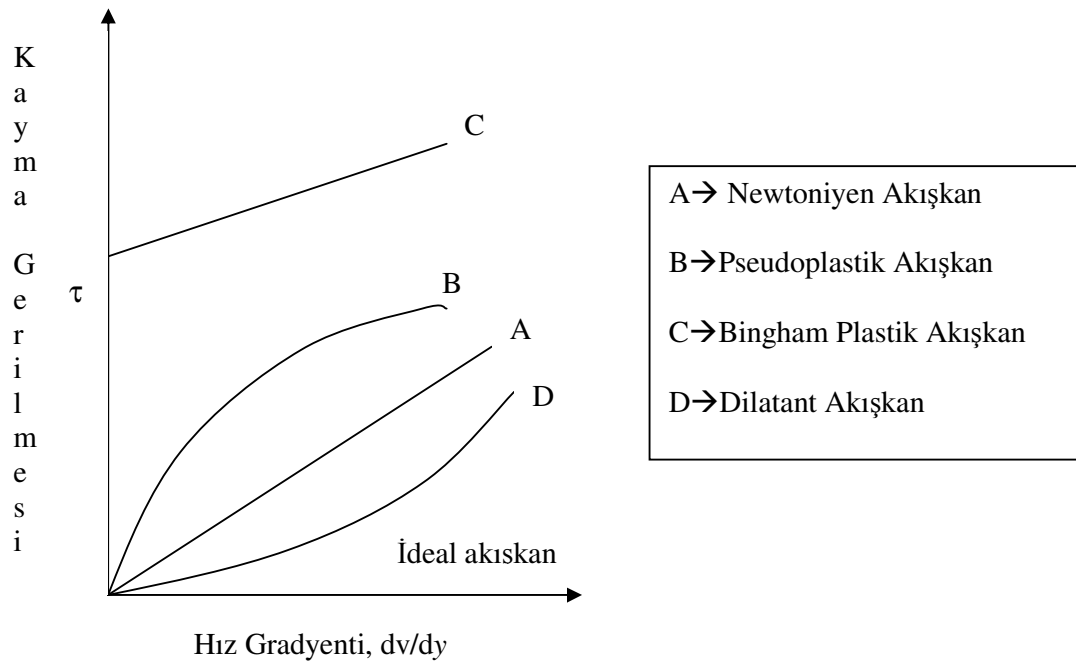
sıkıştırılmaz ve homojen olduğunda yukarıda ki (2.3.4) denklemi

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f}' \quad (2.3.6)$$

şeklinde olur. Bura da $f' = f / \rho$ ve $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ kinematik yapışkanlıdır. (2.3.5) ve (2.3.6) denklemleri sıkıştırılmaz homojen akışkanlar için Navier-Stokes denklemleridir (Temam ve Miranville, 2005)

2.3.1. Newtoniyen Akışkan:

Akışkan ortam hareketsiz halde iken veya ideal akışkanlar hareket halinde olsalar dahi, sıfır kayma gerilmesine maruz kalırlar. Buna göre sonsuz küçük bir zorlama etkisinde dahi hiç direnç göstermeden akış eylemine geçen akışkan ortamlara ideal akışkan denir. Bu akışkanlarda akışa karşı direnci temsil eden yapışkanlık yok kabul edilmiştir. Bu akışkanlara yapışkansız akışkanlar da denir.



Şekil 2.2. Çeşitli akışkanların kayma gerilmesi (τ)- Hız Gradyenti (dv/dy) değişimi

Yukarda ki şekilde A eğrisi Newton'un deneysel yöntemlerle elde ettiği bir eğri olup, matematiksel yapısı $\tau = \mu \frac{dv}{dy}$ şeklinde ifade edilmiştir. Burada τ kayma gerilmesi, μ mutlak yapışkanlık, $\frac{dv}{dy}$ ise deformasyon hızını ifade etmektedir. μ katsayısı sabit

olup, A eğrisinin eğimini verir. Newton tarafından tanımlanan bu karaktere en yakın olarak doğa da su ve havayı göstermek mümkündür. Bu özelliğinden dolayı bu akışkanlara Newtoniyen akışkan denir. Doğada bunlar dışında daha birçok akışkan mevcut olup, davranışı bu karaktere uymaktadır. Davranışı bu karaktere uymayan akışkanlara ise Newtoniyen olmayan akışkanlar denir. Bunlardan bir kısmı Şekil 2.2. de B, C, D eğrileridir (Soğukoğlu, 2000).

3. METERYAL VE YÖNTEMLER

Bu çalışmanın bulgular bölümün de Wang ve Tan (2008) ve Lombardo ve ark. (2001) çalışmalarından yararlanılarak, bulgular bölümünün birinci kısmında oluşturulan ortamda ki akışkanın doğrusal kararlılığı normal mod analizi kullanılarak araştırılmıştır. İkinci kısmında ise gözenekli ortamda oluşturulan akışkanın global kararlılık özellikleri Euler-Lagrange formülleri yardımıyla incelenmiştir. Ayrıca burada ki hesaplamaların uzun ve karmaşık olmasından dolayı Maple paket programından yararlanılmıştır.

Bulgular bölümüne geçmeden önce bu çalışmanın amacını oluşturan kararlılık ve kararlılık değişimi kavramlarını kısaca tanıtalım.

Kararlılık: Otonom denklem sistemlerinin çözümlerinin kararlılığı:

$\mathbf{x} = \phi(t)$, $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ diferansiyel denkleminin bir çözümü olsun. $\phi(t)$ çözümünün kararlılığını belirlemek demek $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ denkleminin bütün $\phi(t)$ çözümleri $t = 0$ dan $\phi(t)$ çözümüne yeterince yakın ise bütün $t > 0$ zaman aralığında $\phi(t)$ çözümüne yeterince yakın kalmalıdır. Bu ifadeyi matematiksel olarak yazarsak

$\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı bulabilmeliyiz ki $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ denkleminin her $\phi(t)$ çözümü için $|\phi_j(0) - \phi_j(0)| < \delta(\varepsilon)$ olduğunda $|\phi_j(t) - \phi_j(t)| < \varepsilon$ sağlanmalıdır ($j = 1, 2, \dots, n$) (Boyce ve Diprima, 1986).

Kararlılık Değişimi: Normal mod analizinde ki $W = W_1 + iW_2$ karmaşık zaman sabiti için; eğer $W_2 \neq 0$ için $W_1 < 0$ ise o zaman kararlılığın değişim prensibi sağlanır denir.

Eğer $W_2 = 0$ ise yani $W \in \mathbb{R}$ ise kararlılık değişiminin daima sağlandığı açıktır.

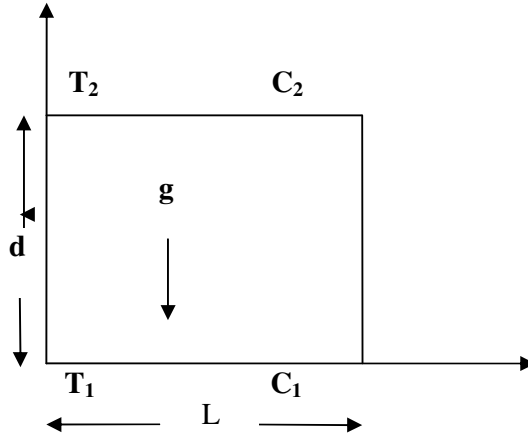
Eğer $W_2 \neq 0$ ve kararlılık değişimi sağlanmaz ise o zaman herhangi bir kararsızlık durumuna overstabile salınımı ya da salınım kararsızlığı denir (Straughan, 1992).

4. BULGULAR

4.1. Kapalı Bir Bölgede Alttan Isıtılan Doğal Taşınım Newtoniyen Akışkanın Doğrusal Kararlılık Analizi

Bu bölümde kapalı bir bölgede, alt yüzeyi tuzlanan ve ısıtılan, dikey yüzeyleri izole edilmiş doğal taşınım problemi ele alınmıştır. Bu problemde taşınım daha iyi formüle edilip sayısal olarak çözebilmek için birçok önemli boyutsuz parametreler kullanılmıştır.

Bu problemi şematik ve matematiksel olarak aşağıdaki şekilde modelleyebiliriz.



Şekil 4.1.1. Problemin fiziksel modeli

2 - boyutlu, d yüksekliğinde L uzunluğunda tuzlanmış olan alt tabakasından ısıtılan kapalı bir bölgenin sıkıştırılmaz Newtoniyen akışkan ile doldurulduğunu varsayalım. Burada, dikey duvarlar geçirgen değildir yani izole edilmiştir. Yatay duvarlar ise homojen olup farklı ısı ve derişiklik değerlerine sahiptir. Şekilde görüldüğü gibi alt tabaka T_1 ısı değerine ve C_1 derişiklik değerine, üst tabaka ise T_2 ısı değerine ve C_2 derişiklik değerine sahiptir. Burada $T_1 > T_2$ ve $C_1 > C_2$ sağlanır. Alt tabakanın sıcaklığı üst tabakanın sıcaklığından yüksek olduğundan akışkan tabakası içinde yukarıya yönlü bir ısı geçişi olacak ve yukarıya doğru azalan bir sıcaklık profili oluşacaktır. $T_1 - T_2$ sıcaklık farkının yeterince küçük değerleri için, sürtünme kuvvetleri

kaldırma kuvvetlerinin üstesinden gelecek ve akışkan hareketsiz kalacaktır. Bunun sonucu olarak akışkan tabakası boyunca ısı geçişi iletimle olacaktır. $T_1 - T_2$ sıcaklık farkı, kaldırma kuvvetlerinin, sürtünme kuvvetlerinin üstesinden gelebilecek bir değeri aştıktan sonra; akışkan içerisinde taşınımsal hareket başlayacaktır. Yatay bir akışkan tabakasının alttan ısıtılması, üç farklı ısı geçişi rejimi ile ilgilidir. Bunlar iletim, hücresel taşınım ve düzensiz(türbülanslı) taşınım rejimleridir.

Bu çalışmada akışkan için Boussinesq yaklaşımı göz önüne alınmış olup, bu yaklaşıma göre, akışkan özellikleri ρ yoğunluğunun dışında sabit olarak kabul edilmiştir. ρ ise ısı ve derişiklik değerlerine doğrusal olarak bağlı olup

$$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_1) + \beta'(C - C_1)]$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada ρ_0, T_1, C_1 sırasıyla başlangıç (referans) yoğunluğu, sıcaklığı ve derişikliğidir. Ayrıca β ve β' sırasıyla ısı ve derişiklik hacimsel açılım katsayılarıdır. Diğer taraftan her bir parçacığa sadece kaldırma kuvvetinin etkidiği diğer kuvvetlerin ise ihmal edildiği kabul edilmiştir. Bu şekilde tanımlanan iki boyutlu problemin matematiksel ifadesi, $\mathbf{v} = (u, v)$ olmak üzere

Momentum denklemi

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla \cdot P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (4.1.1)$$

Enerji denklemi

$$\frac{DT}{Dt} = k_T \nabla^2 T \quad (4.1.2)$$

Derişiklik denklemi

$$\frac{DC}{Dt} = k_C \nabla^2 C \quad (4.1.3)$$

Süreklilik denklemi

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.1.4)$$

Girdap denklemi

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

ile verilir. Burada k_T ısı yayılabilirliğini ve k_C tuz yayılabilirliğini göstermektedir.

Problemdeki başlangıç koşulu

$$t = 0 \text{ için } \mathbf{v} = 0, T = T_1, C = C_1$$

ve sınır koşulları $t > 0$: için;

$$x = 0, 0 \leq y \leq d, \text{ için } u = v = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \omega = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$x = L, 0 \leq y \leq d, \text{ için } u = v = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \omega = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$y = 0, 0 < x < L, \text{ için } u = v = 0, T = T_1, C = C_1, \omega = \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$y = d, 0 < x < L, \text{ için } u = v = 0, T = T_2, C = C_2, \omega = \frac{\partial u}{\partial y}$$

olarak ifade edilir.

Şimdi bu şekilde tanımlanan hareketin doğrusal kararlılık analizini inceleyelim. İlk olarak sıvının hareketsiz olması durumunu göz önüne alalım. Bu durumda sadece y doğrultusunda hareket olacağından $T_b = T_b(y)$, $C_b = C_b(y)$ şeklindedir. Diğer elemanlar, başlangıç durumunda \mathbf{v}_b , P_b , ρ_b şeklinde olsun. O halde (4.1.1)-(4.1.4) denklemleri

$$-\nabla \cdot P_b + g \rho_b = 0 \quad (4.1.5)$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial t} = k_T \nabla^2 T_b \quad (4.1.6)$$

$$\frac{\partial C_b}{\partial t} = k_C \nabla^2 C_b \quad (4.1.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}_b = 0 \quad (4.1.8)$$

olarak elde edilir. Sıvı hareketsiz yani $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ olduğundan yukarıda ki denklemlerden ve

sınır koşullarından $T_b = T_b(y)$ ve $C_b = C_b(y)$ ifadeleri

$$T_b = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{d} y, \quad C_b = C_1 - \frac{(C_1 - C_2)}{d} y \quad (4.1.9)$$

şeklinde bulunur. Şimdi sıvıya $(\mathbf{u}, \vartheta, \gamma, p_2)$ şeklinde küçük yavaş akımlar uygulayalım.

Burada yoğunluk, hız, basınç, sıcaklık ve derişiklik nicelikleri

$$\begin{cases} \rho = \rho_b + \rho', & \mathbf{v} = \mathbf{v}_b + \mathbf{u} \\ P = P_b + p_2, & T = T_b + \vartheta, \quad C = C_b + \gamma \end{cases} \quad (4.1.10)$$

şeklinde uygulandığında

$$(\rho_b + \rho') \frac{D(\mathbf{v}_b + \mathbf{u})}{Dt} = -\nabla \cdot (P_b + p_2) + \mu \nabla^2 (\mathbf{v}_b + \mathbf{u}) + (\rho_b + \rho') \mathbf{g} \quad (4.1.11)$$

$$\frac{D(T_b + \vartheta)}{Dt} = k_T \nabla^2 (T_b + \vartheta) \quad (4.1.12)$$

$$\frac{D(C_b + \gamma)}{Dt} = k_C \nabla^2 (C_b + \gamma) \quad (4.1.13)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_b + \mathbf{u}) = 0 \quad (4.1.14)$$

olur. Burada $\mathbf{v}_b = 0$ ve $T_b = T_1 - \frac{(T_1 - T_2)}{d} y$, $C_b = C_1 - \frac{(C_1 - C_2)}{d} y$ olması kullanılırsa

ve küçük niceliklerin yüksek mertebeden türevli terimleri ihmal edilirse

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla \cdot p_2 + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho' \mathbf{g} \quad (4.1.15)$$

$$\frac{D\vartheta}{Dt} - \frac{\Delta T}{d} v = k_T \nabla^2 \vartheta \quad (4.1.16)$$

$$\frac{D\gamma}{Dt} - \frac{\Delta C}{d} v = k_C \nabla^2 \gamma \quad (4.1.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1.18)$$

elde edilir. Burada $\rho_b = \rho_0 [1 - \beta(T_b - T_1) + \beta'(C_b - C_1)]$,

$\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_1) + \beta'(C - C_1)]$ ve $\Delta T = T_1 - T_2$, $\Delta C = C_1 - C_2$ şeklindedir. O halde

$\rho = \rho_b + \rho'$ eşitliğinden $\rho' = \rho - \rho_b$ olup işlemleri yaparsak $\rho' = -\rho_0 [\beta\vartheta - \beta'\gamma]$

bulunur. Bunu (4.1.15) denkleminde yerine yazarsak

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla \cdot p_2 + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho_0 [\beta\vartheta - \beta'\gamma] \mathbf{g} \quad (4.1.19)$$

olarak bulunur. Burada g yerçekimi ivmesini yöne bağlı olarak $-g$ alalım. O halde

Newtoniyen ve sıkıştırılmaz durumda ki akışkanın denklemleri

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p_2}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (4.1.20)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p_2}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \rho_0 g (\beta\vartheta - \beta'\gamma) \quad (4.1.21)$$

$$\frac{D\vartheta}{Dt} - \frac{\Delta T}{d} v = k_T \nabla^2 \vartheta \quad (4.1.22)$$

$$\frac{D\gamma}{Dt} - \frac{\Delta T}{d} v = k_C \nabla^2 \gamma \quad (4.1.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1.24)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi bu denklemleri

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{d}{k_T} \mathbf{u}, \quad \tilde{t} = \frac{k_T}{d^2} t, \quad \tilde{p}_2 = \frac{d^2}{k_T \mu} p_2, \quad \tilde{\vartheta} = \frac{\vartheta}{\Delta T}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\Delta C} \quad \tilde{x} = \frac{x}{d}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{d}$$

ifadeleri ile boyutsuz forma getirelim. Bunları denklemden yerine yazarsak ve “ \sim ” işaretini ihmal edersek

$$\rho \frac{k_T^2}{d^3} \frac{Du}{Dt} = -\frac{k_T \mu}{d^3} \frac{\partial p_2}{\partial x} + \mu \frac{k_T}{d^3} \nabla^2 u \quad (4.1.25)$$

$$\rho \frac{k_T^2}{d^3} \frac{Dv}{Dt} = -\frac{k_T \mu}{d^3} \frac{\partial p_2}{\partial y} + \mu \frac{k_T}{d^3} \nabla^2 v + \rho_0 g (\beta \Delta T \cdot \vartheta - \beta' \Delta C \cdot \gamma) \quad (4.1.26)$$

$$\frac{\Delta T \cdot k_T}{d^2} \frac{D\vartheta}{Dt} - k_T \frac{\Delta T}{d^2} v = k_T \frac{\Delta T}{d^2} \nabla^2 \vartheta \quad (4.1.27)$$

$$k_T \frac{\Delta C}{d^2} \frac{D\gamma}{Dt} - k_T \frac{\Delta C}{d^2} v = \frac{k_C}{d^2} \Delta C \cdot \nabla^2 \gamma \quad (4.1.28)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1.29)$$

olur. Bu denklemler düzenlenirse

$$\rho \frac{k_T}{\mu} \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p_2}{\partial x} + \nabla^2 u \quad (4.1.30)$$

$$\rho \frac{k_T}{\mu} \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p_2}{\partial y} + \nabla^2 v + \frac{\rho_0 g d^3 \beta \Delta T}{k_T \mu} \vartheta - \frac{\rho_0 g \beta' \Delta C d^3}{k_T \mu} \gamma \quad (4.1.31)$$

$$\frac{D\vartheta}{Dt} - v = \nabla^2 \vartheta \quad (4.1.32)$$

$$\frac{D\gamma}{Dt} - v = \frac{k_C}{k_T} \nabla^2 \gamma \quad (4.1.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1.34)$$

denklemleri elde edilir. Burada

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \text{kinematik yapışkanlık,}$$

$$Le = \frac{k_T}{k_C} = \text{Lewis sayısı}$$

$$Pr = \frac{\mu}{k_T \rho} = \text{Prantdl sayısı}$$

$$Ra_T = \frac{\rho_0 g d^3 \Delta T \beta}{k_T \mu} = \frac{\beta \cdot d^3 g \Delta T}{\nu k_T} = \text{Isıl Rayleigh Sayısı}$$

$$Ra_C = \frac{\rho_0 g d^3 \Delta C \beta'}{k_T \mu} = \frac{\beta' \cdot d^3 \Delta C \cdot g}{\nu k_T} = \text{çözünen made Rayleigh sayısı}$$

olmak üzere son denklemleri bu boyutsuz parametrelere göre yeniden yazarsak

$$\frac{1}{Pr} \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p_2}{\partial x} + \nabla^2 u \quad (4.1.35)$$

$$\frac{1}{Pr} \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p_2}{\partial y} + \nabla^2 v + Ra_T \cdot \vartheta - Ra_C \cdot \gamma \quad (4.1.36)$$

$$\frac{D\vartheta}{Dt} = v + \nabla^2 \vartheta \quad (4.1.37)$$

$$\frac{D\gamma}{Dt} = v + \frac{1}{Le} \nabla^2 \gamma \quad (4.1.38)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.1.39)$$

elde edilir. Şimdi $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ maddesel türev ifadesi daha açık olarak yazılırsa (4.1.35) ve (4.1.36) denklemleri

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p_2}{\partial x} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (4.1.40)$$

$$\frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p_2}{\partial y} + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + Ra_T \cdot \vartheta - Ra_C \cdot \gamma \quad (4.1.41)$$

şeklinde yazılır. Birinci denklemin y değişkenine, ikinci denklemin x değişkenine göre türevlerini alıp ikinci denklemden birinci denkleme çıkartılırsa, $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ girdap

fonsiyonu olmak üzere yukarda ki denklemlerden

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] = \nabla^2 \omega + Ra_T \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - Ra_C \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad (4.1.42)$$

denklemini elde edilir. Diğer denklemleri de eklenerek

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] = \nabla^2 \omega + Ra_T \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - Ra_C \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad (4.1.43)$$

$$\frac{D\vartheta}{Dt} = v + \nabla^2 \vartheta \quad (4.1.44)$$

$$\frac{D\gamma}{Dt} = v + \frac{1}{Le} \nabla^2 \gamma \quad (4.1.45)$$

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.1.46)$$

girdap fonksiyonuna bağlı yukarda ki denklemler elde edilir. Doğrusal kararlılık için doğrusal olmayan terimler ihmal edilirse (4.1.43)- (4.1.45) denklemleri

$$\frac{1}{\text{Pr}} \left[\frac{\partial \omega}{\partial t} \right] = \nabla^2 \omega + Ra_T \frac{\partial \vartheta}{\partial x} - Ra_C \frac{\partial \gamma}{\partial x} \quad (4.1.47)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = v + \nabla^2 \vartheta \quad (4.1.48)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = v + \frac{1}{Le} \nabla^2 \gamma \quad (4.1.49)$$

olarak yazılabilir.

Kararlılığı araştırmak için W karmaşık zaman sabiti, a yatay düzlemde dalga sayısı olmak üzere normal mod analizini kullanalım (Chandrasekhar,1961). Buna göre sınır koşulları göz önüne alınarak

$$\tilde{\Psi}(y) = \Psi_0 \sin(n\pi y), \quad \theta(y) = \theta_0 \sin(n\pi y), \quad \Gamma(y) = \Gamma_0 \sin(n\pi y)$$

olmak üzere

$$\Psi(x, y, t) = \tilde{\Psi}(y) \exp\{Wt + iax\}$$

$$\vartheta(x, y, t) = \theta(y) \exp\{Wt + iax\}$$

$$\gamma(x, y, t) = \Gamma(y) \exp\{Wt + iax\}$$

olarak alınabilir. Burada gerekli işlemler yapılarak

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \nabla^2 \Psi = -s\Psi, \quad \nabla^2 \vartheta = -s\vartheta, \quad \nabla^2 \gamma = -s\gamma, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = W\vartheta$$

$$\nabla^2 \omega = s^2 \Psi, \quad \frac{\partial \omega}{\partial t} = -sW\Psi, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = ia\vartheta, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} = ia\gamma, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial t} = W\gamma$$

ifadeleri bulunur. Bunları (4.1.47)-(4.1.49) denklemlerinde yerine yazarsak $s = a^2 + n^2\pi^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{W}{Pr} (-s) \tilde{\Psi}(y) \exp\{Wt + iax\} &= \{s^2 \tilde{\Psi}(y)\} \exp\{Wt + iax\} \\ &+ Ra_r ia \theta(y) \exp\{Wt + iax\} - Ra_c ia \Gamma(y) \exp\{Wt + iax\} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow W\theta(y) \exp\{Wt + iax\} - ia\tilde{\Psi}(y) \exp\{Wt + iax\} = \{-a^2\theta(y) + \theta''(y)\} \exp\{Wt + iax\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow W\Gamma(y) \exp\{Wt + iax\} - ia\tilde{\Psi}(y) \exp\{Wt + iax\} \\ = \frac{1}{Le} \{-a^2\Gamma(y) + \Gamma''(y)\} \exp\{Wt + iax\} \end{aligned} \quad (4.1.50)$$

elde edilir. Sınır koşullarını yerine yazıp bu denklemleri düzenlersek

$$-s \frac{W}{Pr} \Psi_0 - s^2 \Psi_0 - iaRa_r \theta_0 + iaRa_c \Gamma_0 = 0 \quad (4.1.51)$$

$$W\theta_0 - ia\Psi_0 + s\theta_0 = 0 \quad (4.1.52)$$

$$W\Gamma_0 - ia\Psi_0 + \frac{s}{Le} \Gamma_0 = 0 \quad (4.1.53)$$

bulunur. Bu son 3 denklemin sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinantı sıfır olmalı. O halde bu determinanttın

$$\begin{aligned} (-sW - s^2 Pr)(W + s)(Le.W + s) + ia(-ia) Pr \Re(Le.W + s) \\ + ia\varphi Le Pr(W + s) ia = 0 \end{aligned} \quad (4.1.54)$$

eşitliği bulunur.

W büyüme sabiti karmaşık bir sabittir. (4.1.54) eşitliğini W büyüme sabitine göre düzenlenirse, denklem

$$\begin{aligned} -sLeW^3 - s^2(\text{Pr}Le + Le + 1)W^2 - [a^2\text{Pr}Le(\wp - \Re) + s^3(\text{Pr}Le + \text{Pr} + 1)]W \\ + s\text{Pr}(a^2\Re - s^3 - a^2\wp Le) = 0 \end{aligned} \quad (4.1.55)$$

olur. W_1, W_2 reel sayılar olmak üzere $W = W_1 + iW_2$ karmaşık zaman sabitini alalım. $W_1 < 0$ olduğunda sistem daima kararlıdır. $W_1 > 0$ olduğunda sistem kararsız olacaktır. Burada doğal kararlılık durumu için $W_1 = 0$ kabul edelim. (4.1.55) denkleminde $W = iW_2$ yazarak denklemin reel ve sanal kısımlarına ayıralım. O halde reel ve sanal kısımlar sırasıyla

$$sW_2^2(Le\text{Pr} + Le + 1) + \text{Pr}(-s^3 + a^2(\Re - \wp Le)) = 0 \quad (4.1.56)$$

ve

$$W_2^3Les - W_2(s^3(Le\text{Pr} + \text{Pr} + 1) + a^2\text{Pr}Le(\wp - \Re)) = 0 \quad (4.1.57)$$

şeklinde bulunur. (4.1.56) ve (4.1.57) denklemleri $W_2 = 0$ ve

$s^3 - a^2(\Re - Le\wp) = 0$ olduğunda sağlanır. $\frac{s^3}{a^2}$ nin a^2 ve n^2 değerlerine göre minimum

değerini bulursak $n = 1$ için kritik dalga sayısı $a^2 = \frac{\pi^2}{2}$ bulunur. O halde

$\Re = Le\wp + \frac{27\pi^4}{4}$ olarak elde edilir. Bu durağan Rayleigh sayısıdır.

Benzer olarak salınım başlangıcı için $W_2 \neq 0$ olup sanal kısımdan

$$\Re = \wp + \frac{s^3(\text{Pr}Le + \text{Pr} + 1) - sW_2^2Le}{a^2\text{Pr}Le} \quad (4.1.58)$$

bulunur.

Reel kısımdan ise

$$W_2^2 = \frac{s^3 \text{Pr} - a^2 \text{Pr} (\mathfrak{R} - Le\wp)}{s (\text{Pr} Le + Le + 1)} \quad (4.1.59)$$

olur. Yukarda ki (4.1.58) eşitliğinden \mathfrak{R} değerini (4.1.59) eşitliğinde yerine yazalım.

Buradan W_2^2 değerini çekersek

$$W_2^2 = \frac{-s^3 (\text{Pr} + 1) + a^2 \text{Pr} Le\wp (Le - 1)}{sLe^2 (\text{Pr} + 1)} \quad (4.1.60)$$

elde edilir. O halde W_2 nin pozitif köklerini araştırmalıyız. Eğer hiç pozitif kök yoksa salınım kararsızlığı mümkün değildir. Eğer iki pozitif kök varsa (4.1.58) eşitliği ile

$$\text{verilen } \mathfrak{R} = \wp + \frac{s^3 (\text{Pr} Le + \text{Pr} + 1) - sW_2^2 Le}{a^2 \text{Pr} Le}$$

ifadesi doğal salınım Rayleigh sayısını verir.

(4.1.60) denklemleri ile verilen W_2 nin iki pozitif kökünün olabilmesi için

$$sLe^2 (\text{Pr} + 1)W_2^2 + s^3 (\text{Pr} + 1) - a^2 \text{Pr} Le\wp (Le - 1) = 0$$

Denkleminde Descartes' kuralından $sLe^2 (\text{Pr} + 1) > 0$ olduğundan

$$(s^3 (\text{Pr} + 1) - a^2 \text{Pr} Le\wp (Le - 1)) < 0 \quad (4.1.61)$$

olmalıdır. Yani

$$(s^3 (\text{Pr} + 1) - a^2 \text{Pr} Le\wp (Le - 1)) < 0$$

olduğunda overstabiliteye (salınım kararsızlığı) ulaşılmaz. Yukarda ki (4.1.61) eşitsizliğinden

$$\wp > \frac{s^3 (\text{Pr} + 1)}{a^2 Le \text{Pr} (Le - 1)} \text{ bulunur. Bu eşitlikte } s = a^2 + n^2 \pi^2 \text{ olduğu göz önüne alınarak } a^2$$

dalga sayısına göre minimum değerini alırsak $\wp > \frac{27\pi^4 (\text{Pr} + 1)}{4Le \text{Pr} (Le - 1)}$ elde edilir. O halde

$$\wp > \frac{27\pi^4 (\text{Pr} + 1)}{4Le \text{Pr} (Le - 1)} \text{ koşulu sağlandığında salınım kararsızlığına ulaşılmaz.}$$

Yine benzer olarak $(s^3 (\text{Pr} + 1) - a^2 \text{Pr} Le\wp (Le - 1)) > 0$ olduğunda salınım hareketinin hariç tutulduğu anlaşılır. $(s^3 (\text{Pr} + 1) - a^2 \text{Pr} Le\wp (Le - 1)) > 0$ olması $Le < 1$ olması ile mümkündür.

Şimdi (4.1.59) eşitliğinde ki W_2 değerini (4.1.58) eşitliğinde yerine yazıp \Re değerini çekersek

$$\Re = \frac{(\text{Pr } Le + 1)}{Le(\text{Pr} + 1)} \wp + \frac{s^3 (\text{Pr } Le + Le + \text{Pr} + 1)(\text{Pr } Le + 1)}{a^2 \text{Pr } Le^2 (\text{Pr} + 1)} \quad (4.1.63)$$

elde edilir. Burada $s = \pi^2 + a^2$ eşitliğini kullanırsak

$$\Re = \frac{(\text{Pr } Le + 1)}{Le(\text{Pr} + 1)} \wp + \frac{(\pi^2 + a^2)^3 (\text{Pr } Le + Le + \text{Pr} + 1)(\text{Pr } Le + 1)}{a^2 \text{Pr } Le^2 (\text{Pr} + 1)} \quad (4.1.64)$$

bulunur. \Re Rayleigh sayısını a^2 dalga sayısına göre minimum değerini alırsak

$a^2 = \frac{\pi^2}{2}$ bulunur. Bunu \Re eşitliğinde yerine yazarsak

$$\Re = \frac{(\text{Pr } Le + 1)}{Le(\text{Pr} + 1)} \wp + \frac{(27\pi^2)(\text{Pr } Le + Le + \text{Pr} + 1)(\text{Pr } Le + 1)}{4 \text{Pr } Le^2 (\text{Pr} + 1)} \quad (4.1.65)$$

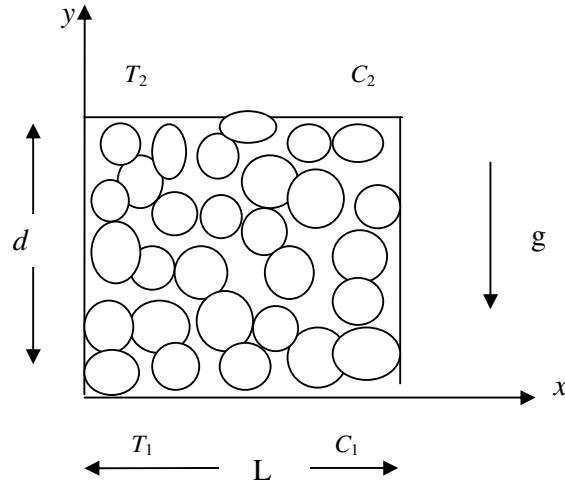
elde edilir. Buradan salınım hareketi için kritik Rayleigh sayısını bulmuş oluruz. Sonuçları daha net görebilmek için Pr, \wp, Le parametrelerine değerler verilerek (4.1.64) eşirliğinden $\Re - a$ grafikleri çizilebilir. Bu grafikler tartışma bölümünde verilmiştir.

4.2. Gözenekli Ortam da Alttan Isıtılan Kapalı Bir Bölgedeki Newtoniyen Akışkanın Global Kararlılık Analizi

Bu bölümde Lombardo ve ark. (2001) nın yapmış olduğu çalışmada ki yöntem izlenerek tanımlayacağımız hareketin doğrusal olmayan enerji kararlılık analizini inceleyeceğiz.

- 1) İlk olarak $\varepsilon = 1$, $Le = 1$ olması durumunu
- 2) İkinci olarak $\varepsilon = 1$ ve $Le \neq 1$ olması durumunu ve
- 3) Üçüncü olarak da herhangi ε ve Le olması durumunu inceleyeceğiz.

Yine bu çalışmada; kapalı bir bölgede, alt yüzeyi ısıtılan ve dikey yüzeyleri izole edilmiş gözenekli ortam ile doldurulmuş taşınım problemi ele alınmıştır. Şimdi bu çalışmadaki problemi şematik ve matematiksel olarak ifade edelim.



Şekil 4.2.1. Gözenekli ortamın fiziksel modeli

2- boyutlu, d yüksekliğinde L uzunluğunda, tuzlanmış olan alt tabakasından ısıtılan, kapalı, gözenekli bir bölgenin sıkıştırılmaz Newtoniyen akışkan ile doldurulduğunu varsayalım. Yatay duvarlar homojen olup farklı ısı ve derişiklik değerlerine sahiptir. Alt tabaka T_1 ısı değerine ve C_1 derişiklik değerine, üst tabaka ise T_2 ısı değerine ve C_2 derişiklik değerine sahiptir. Burada $T_1 > T_2$ ve $C_1 > C_2$ sağlanır. Bu çalışmada akışkan için Boussinesq yaklaşımını göz önüne alınmış olup, bu yaklaşıma göre, akışkan özellikleri ρ yoğunluğunun dışında sabit olarak kabul edilmiştir. ρ ise ısı ve

derişiklik değerlerine doğrusal olarak bağlı olup $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_1) + \beta'(C - C_1)]$ şeklinde tanımlanmıştır. Burada ρ_0, T_1, C_1 sırasıyla başlangıç (referans) yoğunluğu, sıcaklığı ve derişikliğidir. Ayrıca β ve β' sırasıyla ısı ve derişiklik hacimsel açılım katsayılarıdır. Diğer taraftan her bir parçacığa sadece kaldırma kuvvetinin etkidiği diğer kuvvetlerin ise ihmal edildiği kabul edilmiştir.

Bu kabuller altında gözenekli ortam için Navier-Stokes denklemleri aşağıdaki gibi verilir.

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla \cdot P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \frac{\mu}{\kappa} \mathbf{v} + \rho_f \mathbf{g} \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T = k_T \nabla^2 T \quad (4.2.2)$$

$$\varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla C = k_C \nabla^2 C \quad (4.2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.2.4)$$

Yukarıdaki (4.2.1) denkleminin ilk terimi yerel ivmelenmeyi, ikinci terim atalet terimlerini, üçüncü terim gözenekli ortam içinde akışkanın basınç değişimini, dördüncü terim yapışkan kuvvetleri beşinci terim Darcy akış etkisi ile yapışkan sürüklenme kuvvetini ve son terim ise gövde kuvvetlerini göstermektedir.

Problemin başlangıç koşulu

$$t = 0 \text{ için } \mathbf{v} = 0, T = T_1, C = C_1$$

ve sınır koşulları $t > 0$: için;

$$x = 0, 0 \leq y \leq d, \text{ için } u = v = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

$$x = L, 0 \leq y \leq d, \text{ için } u = v = 0, \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \frac{\partial C}{\partial x} = 0$$

$$y = 0, 0 \leq x \leq L, \text{ için } u = v = 0, T = T_1, C = C_1$$

$$y = d, 0 \leq x \leq L, \text{ için } u = v = 0, T = T_2, C = C_2$$

olarak ifade edilir.

Hareketin kararlılık analizine geçmeden önce denklemleri uygun forma getirelim. Bunun için ilk önce sıvının hareketsiz yani $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ olması durumunu inceleyelim. (4.2.1)-(4.2.4) denklemleri başlangıç durumunda sadece y doğrultusunda harekette olacağından

$T_b = T_b(y)$, $C_b = C_b(y)$ olur. Diğer elemanlar başlangıç durumunda \mathbf{v}_b , P_b, ρ_b şeklinde olsun. Buradan (4.2.1)-(4.2.4) denklemleri

$$-\nabla \cdot P_b + \mathbf{g} \rho_b = 0 \quad (4.2.5)$$

$$\frac{\partial T_b}{\partial t} = k_T \nabla^2 T_b \quad (4.2.6)$$

$$\frac{\partial C_b}{\partial t} = k_C \nabla^2 C_b \quad (4.2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4.2.8)$$

olur. Yukarıda ki (4.2.5)- (4.2.8) denklemlerinden ve sınır koşullarından $\Delta T = T_1 - T_2$,

$$\Delta C = C_1 - C_2 \text{ olmak üzere } T_b = T_1 - \frac{\Delta T}{d} y \text{ ve benzer olarak } C_b = C_1 - \frac{\Delta C}{d} y \text{ bulunur.}$$

Şimdi sıvı hareketli iken yani

$$\begin{cases} \rho = \rho_b + \rho', & \mathbf{v} = \mathbf{v}_b + \mathbf{u} \\ P = P_b + p_2, & T = T_b + \vartheta, \quad C = C_b + \gamma \end{cases} \quad (4.2.9)$$

şeklinde küçük yavaş akımlar uygulandığında

$$(\rho_b + \rho') \frac{D(\mathbf{v}_b + \mathbf{u})}{Dt} = -\nabla \cdot (P_b + p_2) + \mu \nabla^2 (\mathbf{v}_b + \mathbf{u}) - \frac{\mu}{\kappa} (\mathbf{v}_b + \mathbf{u}) + (\rho_b + \rho') \mathbf{g} \quad (4.2.10)$$

$$\frac{D(T_b + \vartheta)}{Dt} = k_T \nabla^2 (T_b + \vartheta) \quad (4.2.11)$$

$$\varepsilon \frac{\partial (C_b + \gamma)}{\partial t} + (\mathbf{v}_b + \mathbf{u}) \nabla (C_b + \gamma) = k_C \nabla^2 (C_b + \gamma) \quad (4.2.12)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v}_b + \mathbf{u}) = 0 \quad (4.2.13)$$

elde edilir. Burada $\mathbf{v}_b = 0$ olması ve $T_b = T_1 - \frac{\Delta T}{d} y$, $C_b = C_1 - \frac{\Delta C}{d} y$

eşitlikleri kullanılıp, küçük niceliklerin yüksek mertebeden türevli terimleri ihmal edilirse

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla \cdot p_2 + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\mu}{\kappa} \mathbf{u} + \rho' \mathbf{g} \quad (4.2.14)$$

$$\frac{D\vartheta}{Dt} + \left(\frac{T_2 - T_1}{d} \right) v = k_T \nabla^2 \vartheta \quad (4.2.15)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \gamma + \left(\frac{C_2 - C_1}{d} \right) v = k_C \nabla^2 \gamma \quad (4.2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2.17)$$

elde edilir. Burada $\rho_b = \rho_0 [1 - \beta(T_b - T_1) + \beta'(C_b - C_1)]$ ve $\rho = \rho_0 [1 - \beta(T - T_2) + \beta'(C - C_2)]$ şeklindedir. O halde $\rho = \rho_b + \rho'$ eşitliğinden $\rho' = \rho - \rho_b$ olup $\rho' = -\rho_0 [\beta\vartheta - \beta'\gamma]$ bulunur. Bunu (4.2.14) denkleminde yerine yazarsak;

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p_2 + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \frac{\mu}{\kappa} \mathbf{u} - \rho_0 \mathbf{g} [\beta\vartheta - \beta'\gamma] \quad (4.2.18)$$

bulunur. Yukarıda ki denklemler düzenlenirse

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p_2}{\partial x} + \mu \nabla^2 u - \frac{\mu}{\kappa} u \quad (4.2.19)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p_2}{\partial y} + \mu \nabla^2 v - \frac{\mu}{\kappa} v + \rho_0 g (\beta\vartheta - \beta'\gamma) \quad (4.2.20)$$

$$\frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{(T_1 - T_2)}{d} v + k_T \nabla^2 \vartheta \quad (4.2.21)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \gamma = \frac{(C_1 - C_2)}{d} v + k_C \nabla^2 \gamma \quad (4.2.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2.23)$$

şeklinde olur. Şimdi bu denklemleri

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{d}{k_T} \mathbf{u}, \quad \tilde{t} = \frac{k_T}{d^2} t, \quad \tilde{P} = \frac{d^2}{k_T^2} p_2,$$

$$\tilde{\vartheta} = \frac{\vartheta}{\Delta T}, \quad \tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\Delta C}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{d}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{d}$$

ifadeleri ile boyutsuz forma getirelim. Bunları denkleminde yerine yazarsak ve “ \sim ” işareti ihmal edilirse

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\nu}{k_T} \nabla^2 u - \frac{\mu d^2}{\rho \kappa k_T} u \quad (4.2.24)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\nu}{k_T} \nabla^2 v - \frac{\mu d^2}{\rho \kappa k_T} v + \frac{\rho_0 d^3}{\rho k_T^2} g (\beta \Delta T \cdot \vartheta - \beta' \Delta C \cdot \gamma) \quad (4.2.25)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \vartheta = \nu + \nabla^2 \vartheta \quad (4.2.26)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \gamma = \nu + \frac{1}{Le} \nabla^2 \gamma \quad (4.2.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2.28)$$

elde edilir. Burada $\gamma \rightarrow \gamma Le$ alırsak ve $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ kinematik yapışkanlık

$$Le = \frac{k_T}{k_C} = \text{Lewis sayısı}, Pr = \frac{\mu}{k_T \rho} = \text{Prandtl sayısı}, \quad Da = \frac{d^2}{\kappa} = \text{Darcy sayısı}$$

$$Ra_T = \frac{g \beta \Delta T d^3}{\nu k_T} = \text{Isıl Rayleigh Sayısı},$$

$$Ra_C = \frac{\beta' d^2 \Delta C g}{\nu k_T} = \text{çözünen made Rayleigh sayısı}$$

olmak üzere son denklemleri yeniden yazarsak

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + Pr \nabla^2 u - Da Pr u \quad (4.2.29)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + Pr \nabla^2 v - Da Pr v + Pr (Ra_T \cdot \vartheta - Ra_C \cdot \gamma) \quad (4.2.30)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \vartheta = \nu + \nabla^2 \vartheta \quad (4.2.31)$$

$$\varepsilon Le \frac{\partial \gamma}{\partial t} + Le \mathbf{u} \cdot \nabla \gamma = \nu + \nabla^2 \gamma \quad (4.2.32)$$

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.2.33)$$

elde edilir. Şimdi elde edilen (4.2.29)-(4.2.31) denklemleri için analizini Le ve ε sayılarının farklı durumuna göre yapacağız.

4.2.1. $Le = \varepsilon = 1$ Olması Durumunda:

Bu problemin (4.2.9) eşitliklerindeki bozulmaları göz önüne alarak kararlılığını inceleyelim. Bu bozulmalardan sonra

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \text{Pr} \nabla^2 u - Da \text{Pr} u \quad (4.2.34)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \text{Pr} \nabla^2 v - Da \text{Pr} v + \text{Pr} (Ra_T \cdot \vartheta - Ra_C \cdot \gamma) \quad (4.2.35)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \vartheta = \nu + \nabla^2 \vartheta \quad (4.2.36)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \gamma = \nu + \nabla^2 \gamma \quad (4.2.37)$$

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.2.38)$$

denklemleri elde edilir. Burada $Ra_T \rightarrow \mathfrak{X}$, $Ra_C \rightarrow \wp$ olmak üzere $\phi = \mathfrak{X} \vartheta - \wp \gamma$ dönüşümü yaparsak ilk denklem

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{u} - Da \text{Pr} \mathbf{u} + \text{Pr}(\phi) \mathbf{j} \quad (4.2.39)$$

şeklinde olur. Bu denklemi \mathbf{u} ile çarpıp Ω üzerinden integral alırsak, $(\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)}$ üzerinde iç çarpım fonksiyonu olmak üzere yukarıdaki denklem

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{u} \right) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}) = (-\nabla P, \mathbf{u}) + \text{Pr} (\nabla^2 \mathbf{u}, \mathbf{u}) - Da \text{Pr} (\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \text{Pr} (\phi, \nu) \mathbf{j} \quad (4.2.40)$$

şeklinde yazılır. Burada sınır koşulları ve kısmi integral kullanılırsa $(\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0$ ve $(\nabla P, \mathbf{u}) = 0$ olduğu görülür (Xu ve ark., 2007). Bu iç çarpım ifadesinden integrale geçerse

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \mathbf{u} d\Omega = \text{Pr} \int_{\Omega} \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\Omega - Da \text{Pr} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \text{Pr} (\phi, \nu) \mathbf{j} \quad (4.2.41)$$

yazılır. Eşitliğin solunda ki ifade de integral t değişkeninden bağımsız olduğundan

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \mathbf{u} d\Omega = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 \quad \text{olarak yazılır. Yine } \int_{\Omega} \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad \text{integraline kısmi integral}$$

uygularsak

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 = \Pr \|\nabla \mathbf{u}\|^2 - Da \Pr \|\mathbf{u}\|^2 + \Pr(\phi, v) \quad (4.2.42)$$

eşitliği bulunur. Burada ki iç çarpım fonksiyonuna Cauchy-Schwartz eşitsizliği uygulanırsa $(\phi, v) \leq \|\phi\| \cdot \|\mathbf{u}\|$ elde edilir. Ayrıca $2ab \leq a^2 + b^2$ eşitsizliğinden

$$(\phi, v) \leq \|\phi\| \cdot \|\mathbf{u}\| \leq \frac{\|\phi\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{u}\|^2}{2} \leq \|\mathbf{u}\|^2 \text{ olur. Bu son eşitsizliği yukarda ki eşitsizlikte yerine}$$

yazıp Poincare eşitsizliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 &\leq -\pi^2 \Pr \|\mathbf{u}\|^2 - Da \Pr \|\mathbf{u}\|^2 + \Pr \|\mathbf{u}\|^2 \\ &\leq 2 \Pr \|\mathbf{u}\|^2 (1 - \pi^2 - Da) \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

elde edilir. Elde edilen bu diferansiyel denklemi çözersek

$$\|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq \mathbf{u}(0) \exp\{2 \Pr(1 - \pi^2 - Da)t\} \quad (4.2.44)$$

bulunur. Burada $\Pr(1 - \pi^2 - Da) < 0$ için $t \rightarrow \infty$ olduğunda $\|\mathbf{u}(t)\|^2 \rightarrow 0$ elde edilir.

Ayrıca $\phi = \mathfrak{R} \vartheta - \wp \gamma$ değişken dönüşümünü $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \vartheta = v + \nabla^2 \vartheta$ denklemine

uygulanıp $\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \gamma = v + \nabla^2 \gamma$ eşitliği kullanılırsa

$$\phi_t + \mathbf{u} \nabla \phi = (\mathfrak{R} - \wp) v + \nabla^2 \phi \quad (4.2.45)$$

denklemi elde edilir. (4.2.45) denklemini ϕ ile çarpıp integral alırsak $(\mathbf{u} \cdot \nabla \phi, \mathbf{u}) = 0$ olmak üzere

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\phi\|^2 = (\mathfrak{R} - \wp)(v, \phi) - \|\nabla \phi\|^2 \quad (4.2.46)$$

elde edilir.

$(\mathfrak{R} - \wp) < 0$ için akımın daima kararlı olduğunu gösterelim: Bunun için yukarda

ki denklemdeki $\|\nabla \phi\|^2$ ifadesine Poincare eşitsizliğini uygulayalım. Buradan

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\phi\|^2 \leq (\mathfrak{R} - \wp)(v, \phi) - \pi^2 \|\phi\|^2 \text{ eşitsizliği bulunur.}$$

$(\phi, v) \leq \|\phi\| \cdot \|\mathbf{u}\|$ ve $2ab \leq a^2 + b^2$ eşitsizliklerini kullanarak

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\phi\|^2 \leq (\mathfrak{R} - \wp) \|\mathbf{u}\|^2 - \pi^2 \|\phi\|^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\phi\|^2 + 2\pi^2 \|\phi\|^2 \leq 2(\mathfrak{R} - \wp) \|\mathbf{u}\|^2 \quad (4.2.47)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $\|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq \mathbf{u}(0) \exp\{2\text{Pr}(1 - \pi^2 - Da)t\}$ eşitsizliğini kullanarak diferansiyel denklemini çözersek

$$\|\phi(t)\|^2 \leq \frac{(\mathfrak{R} - \wp) \mathbf{u}(0)}{\text{Pr}(1 - \pi^2 - Da) + \pi^2} \exp\{2\text{Pr}(1 - \pi^2 - Da)t\} + \phi(0) \exp(-2\pi^2 t) \quad (4.2.48)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte yine $\text{Pr}(1 - \pi^2 - Da) < 0$ için $t \rightarrow \infty$ olduğunda $\|\phi(t)\| \rightarrow 0$ bulunur.

Benzer yöntemi $\frac{\partial \gamma}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \gamma = \nu + \nabla^2 \gamma$ denkleminde uygularsak $\text{Pr}(1 - \pi^2 - Da) < 0$ için $t \rightarrow \infty$ olduğunda $\|\gamma(t)\| \rightarrow 0$ elde edilir. Buradan $(\mathfrak{R} - \wp) < 0$ için akımın kararlı olduğunu bulmuş oluruz.

4.2.2. $Le \neq 1$ ve $\varepsilon = 1$ Olması Durumunda:

Burada şartsız doğrusal olmayan üstel kararlılığı bulmak ve Lombardo ve ark. (2000, 2001) çalışmalarında ki parametreler metodunun en iyileştirmesi sayesinde doğrusal ve doğrusal olmayan kritik Rayleigh sayılarının çakıştığını bulmak mümkündür.

Bunun için $Ra_T \rightarrow \mathfrak{R}$, $Ra_c \rightarrow \wp$ ve $\delta > 0$ sabit bir reel sayı olmak üzere $\phi = \mathfrak{R}\vartheta - \wp\gamma$ ve $\psi = \mathfrak{R}\vartheta - Le\delta\wp\gamma$ değişken dönüşümü uygulayalım. O halde yukarda ki (4.2.29)-(4.2.33) denklemleri $\delta Le \neq 1$ olması durumunda

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + Pr\nabla^2\mathbf{u} - DaPr\mathbf{u} + Pr(\phi)\mathbf{j} \quad (4.2.49)$$

$$Le(\phi_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\phi) = (Le\mathfrak{R} - \wp)v + \left(\frac{Le^2\delta - 1}{Le\delta - 1}\right)\nabla^2\phi - \left(\frac{Le - 1}{Le\delta - 1}\right)\nabla^2\psi \quad (4.2.50)$$

$$(\psi_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\psi) = (\mathfrak{R} - \delta\wp)v + \left(\frac{(\delta - 1)}{Le\delta - 1}\right)\nabla^2\psi + \left(\frac{\delta(Le - 1)}{Le\delta - 1}\right)\nabla^2\phi \quad (4.2.51)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad (4.2.52)$$

şekline dönüşür. Burada $E(t) = \frac{1}{2}\left[\lambda\|\mathbf{u}\|^2 + Le\|\phi\|^2 + \tau\|\psi\|^2\right]$ Lyapunov fonksiyonunu alalım (Mulone ve Rionero,1998). Burada λ ve τ pozitif sabitlerdir. Bu norm değişimini oluşturmak için (4.2.49)-(4.2.51) denklemlerini $(\lambda\mathbf{u}, \phi, \tau\psi)^T$ ile çarpıp Ω tanım kümesi üzerinden integral alırsak daha önce yapılan işlemlere benzer olarak

$$\frac{1}{2}\lambda\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2 = -Pr\lambda\|\nabla\mathbf{u}\|^2 - \lambda DaPr\|\mathbf{u}\|^2 + \lambda Pr(v, \phi) \quad (4.2.53)$$

$$\frac{1}{2}Le\frac{d}{dt}\|\phi\|^2 = (Le\mathfrak{R} - \wp)(v, \phi) - \left(\frac{Le^2\delta - 1}{Le\delta - 1}\right)\|\nabla\phi\|^2 + \left(\frac{Le - 1}{Le\delta - 1}\right)(\nabla\phi, \nabla\psi) \quad (4.2.54)$$

$$\frac{1}{2}\tau\frac{d}{dt}\|\psi\|^2 = \tau(\mathfrak{R} - \wp\delta)(v, \psi) - \tau\left(\frac{\delta - 1}{Le\delta - 1}\right)\|\nabla\psi\|^2 - \tau\left(\frac{\delta(Le - 1)}{Le\delta - 1}\right)(\nabla\phi, \nabla\psi) \quad (4.2.55)$$

denklemlerini elde edilir. Burada ki $\|\cdot\|$ ve (\cdot) iç çarpım $L_2(\Omega)$ üzerinde ki norm ve iç çarpımdır. $E(t)$ eşitliğinin türevini alırsak

$$\dot{E}(t) = \frac{1}{2}\lambda\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2}Le\frac{d}{dt}\|\phi\|^2 + \frac{1}{2}\tau\frac{d}{dt}\|\psi\|^2 \quad (4.2.56)$$

elde edilir. (4.2.53), (4.2.54) ve (4.2.55) denklemleri (4.2.56) değişim denkleminde yerine yazılıp ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= (Le\mathfrak{R} - \wp + \lambda Pr)(v, \phi) + \tau(\mathfrak{R} - \delta\wp)(v, \psi) \\ &- \left[\lambda Pr \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + Da Pr \lambda \|\mathbf{u}\|^2 + \left(\frac{Le^2\delta - 1}{Le\delta - 1} \right) \|\nabla \phi\|^2 \right] \\ &- \left[\tau \left(\frac{\delta - 1}{Le\delta - 1} \right) \|\nabla \psi\|^2 + \frac{(Le - 1)(\tau\delta - 1)}{Le\delta - 1} (\nabla \phi, \nabla \psi) \right] \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

elde edilir. Bu ifadeyi $I_0 = (Le\mathfrak{R} - \wp + \lambda Pr)(v, \phi) + \tau(\mathfrak{R} - \delta\wp)(v, \psi)$ ve

$$\begin{aligned} D_0 &= \lambda Pr \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + Da Pr \lambda \|\mathbf{u}\|^2 + \left(\frac{Le^2\delta - 1}{Le\delta - 1} \right) \|\nabla \phi\|^2 + \tau \left(\frac{\delta - 1}{Le\delta - 1} \right) \|\nabla \psi\|^2 \\ &+ \frac{(Le - 1)(\tau\delta - 1)}{Le\delta - 1} (\nabla \phi, \nabla \psi) \end{aligned}$$

olmak üzere $\dot{E}(t) = I_0 - D_0$ şeklinde yazabiliriz. Buradaki D_0 fonksiyonelinin pozitif tanımlı olmasını garanti etmek için

$$\frac{Le^2\delta - 1}{Le\delta - 1} > 0, \quad \frac{\delta - 1}{Le\delta - 1} > 0 \quad \text{ve} \quad [(Le - 1)(\tau\delta - 1)]^2 - 4\tau(1 - Le^2\delta)(\delta - 1) < 0$$

olmalıdır. Bu kabulden

$$\begin{aligned} \alpha_1 \left(\|\nabla \phi\|^2 + \|\nabla \psi\|^2 \right) &\leq \left(\frac{Le^2\delta - 1}{Le\delta - 1} \right) \|\nabla \phi\|^2 + \frac{\tau(\delta - 1)}{Le\delta - 1} \|\nabla \psi\|^2 \\ &+ \frac{(Le - 1)(\tau\delta - 1)}{Le\delta - 1} (\nabla \phi, \nabla \psi) \end{aligned} \quad (4.2.58)$$

olacak şekilde pozitif bir

$$\alpha_1 = \frac{4\tau(Le^2\delta - 1)(\delta - 1) - (Le - 1)^2(\tau\delta - 1)^2}{(Le\delta - 1)[1 - Le^2\delta + \tau(\delta - 1)]}$$

reel sayısı vardır (Lombardo ve ark.2001). $H; \mathbf{u}, \phi, \psi$ fonksiyonlarının x ve y değişkenlerinin periyodik fonksiyonlarının kümesi olmak üzere

$m = \max_H \frac{I_0}{D_0}$ diyelim. Burada maksimum ifadesinden $\dot{E}(t)$ türevini

$$\dot{E}(t) = I_0 - D_0 \leq (m - 1)D_0 \quad (4.2.59)$$

şeklinde yazabiliriz. O halde (4.2.58) eşitsizliğinden

$$\dot{E}(t) \leq (m-1) \left(\alpha_1 \|\nabla\phi\|^2 + \alpha_1 \|\nabla\psi\|^2 + \lambda Pr \|\nabla\mathbf{u}\|^2 + Da Pr \lambda \|\mathbf{u}\|^2 \right) \quad (4.2.60)$$

yazılır. Burada Poincare eşitsizliğini kullanırsak ve $\gamma = \min\left(\frac{\alpha_1\pi^2}{Le}, \frac{\alpha_1\pi^2}{\tau}, Pr(Da + \pi^2)\right)$

alıp $\dot{E}(t)$ yeniden düzenlenirse $\dot{E}(t) \leq (m-1)\gamma E(t)$ bulunmuş olur. Bu diferansiyel denklemi çözersek $E(t) \leq E(0) \exp((m-1)\gamma t)$ elde edilir. Bu ise bize $m < 1$ için sistemin kararlı olduğunu gösterir. Şimdi $Le \neq 1$, $\varepsilon = 1$ için doğrusal ve doğrusal olmayan kritik Rayleigh sayılarının hangi koşullarda çakıştığını göstereceğiz. Bunun için yukarıda ki $m = \max_H \frac{I_0}{D_0}$ maksimum probleminin Euler –Lagrange denklemlerini

bulalım. O halde $\frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{I_0}{D_0} \right)_{\varepsilon=0} = 0$ olmalı. Bu ifadeyi hesaplırsak

$$\begin{aligned} \delta \left(\frac{I_0}{D_0} \right) &= \frac{\delta I_0 \cdot D_0 - I_0 \cdot \delta D_0}{D_0^2} = \frac{1}{D_0} \left(\delta I_0 - \frac{I_0}{D_0} \Big|_{\max} \delta D_0 \right) \\ &= \frac{1}{D_0} (\delta I_0 - m \delta D_0) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan maksimum problemi için $\delta I_0 - m \delta D_0 = 0$ eşitliği elde edilir.

Burada \mathbf{h}, k ve t fonksiyonları sınırlarda sıfır olan ve $C^2(\Omega)$ sınıfından keyfi fonksiyonlar olmak üzere,

$$\delta I_0 = \frac{d}{d\varepsilon} I(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{h}, \phi + \varepsilon k, \psi + \varepsilon t) \Big|_{\varepsilon=0} \quad (4.2.61)$$

ve

$$\delta D_0 = \frac{d}{d\varepsilon} D(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{h}, \nabla\phi + \varepsilon \nabla k, \nabla\psi + \varepsilon \nabla t) \Big|_{\varepsilon=0} \quad (4.2.62)$$

olur. O halde $\delta I_0 - m \delta D_0 = 0$ denklemini oluşturalım.

$$\begin{cases} \alpha = Le\mathfrak{X} - \wp + \lambda Pr, & \beta = \tau(\mathfrak{X} - \delta\wp), & \Gamma = \frac{Le^2\delta - 1}{Le\delta - 1} \\ \xi = \frac{\tau(\delta - 1)}{Le\delta - 1} & \eta = \frac{(Le - 1)(\tau\delta - 1)}{Le\delta - 1} \end{cases} \quad (4.2.63)$$

olmak üzere (4.2.61) ve (4.2.62) ifadelerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\delta I_0 &= \frac{d}{d\varepsilon} I(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{h}, \phi + \varepsilon k, \psi + \varepsilon t) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \alpha \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} (v + \varepsilon h_2)(\phi + \varepsilon k) d\Omega \Big|_{\varepsilon=0} + \beta \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} (v + \varepsilon h_2)(\psi + \varepsilon t) d\Omega \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \alpha \int_{\Omega} (\phi h_2 + kv) d\Omega + \beta \int_{\Omega} (\psi h_2 + tv) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.2.64}$$

bulunur. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
\delta D_0 &= \frac{d}{d\varepsilon} D(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{h}, \nabla \phi + \varepsilon \nabla k, \nabla \psi + \varepsilon \nabla t) \Big|_{\varepsilon=0} \\
&= \lambda \text{Pr} \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u} + \varepsilon \nabla \mathbf{h})^2 d\Omega \Big|_{\varepsilon=0} + Da \text{Pr} \lambda \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} (\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{h})^2 d\Omega \Big|_{\varepsilon=0} \\
&+ \Gamma \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} (\nabla \phi + \varepsilon \nabla k)^2 d\Omega \Big|_{\varepsilon=0} + \xi \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} (\nabla \psi + \varepsilon \nabla t)^2 d\Omega \Big|_{\varepsilon=0} \\
&+ \eta \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} (\nabla \psi + \varepsilon \nabla t)(\nabla \phi + \varepsilon \nabla k) d\Omega \Big|_{\varepsilon=0}
\end{aligned} \tag{4.2.65}$$

olur. Yukarıda ki türev ve kısmi integral hesapları yapılırsa

$$\begin{aligned}
\delta D_0 &= \frac{d}{d\varepsilon} D(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{h}, \nabla \phi + \varepsilon \nabla k, \nabla \psi + \varepsilon \nabla t) \\
&= -2\lambda \text{Pr} \int_{\Omega} (\nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{h}) d\Omega - 2Da \text{Pr} \lambda \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{h}) d\Omega \\
&- 2\Gamma \int_{\Omega} (\nabla^2 \phi \cdot k) d\Omega - 2\xi \int_{\Omega} (\nabla^2 \psi \cdot t) d\Omega \\
&- \eta \int_{\Omega} (\nabla^2 \psi \cdot t + \nabla^2 \phi \cdot k) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.2.66}$$

bulunur. Bulduğumuz bu ifadeleri $\delta I_0 - m\delta D_0 = 0$ eşitliğinde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
&\alpha \int_{\Omega} (\phi h_2 + kv) d\Omega + \beta \int_{\Omega} (\psi h_2 + tv) d\Omega \\
&- m \left[-2\lambda \text{Pr} \int_{\Omega} (\nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{h}) d\Omega - 2Da \text{Pr} \lambda \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{h}) d\Omega \right] \\
&- m \left[-2\Gamma \int_{\Omega} (\nabla^2 \phi \cdot k) d\Omega - 2\xi \int_{\Omega} (\nabla^2 \psi \cdot t) d\Omega \right] \\
&- m \left[-\eta \int_{\Omega} (\nabla^2 \phi \cdot t + \nabla^2 \psi \cdot k) d\Omega \right] = 0
\end{aligned} \tag{4.2.67}$$

olur. Bu eşitlikte gerekli işlemler yapılırsa maksimum probleminin Euler-Lagrange denklemleri

$$\alpha\phi\mathbf{j} + \beta\psi\mathbf{j} + 2mDa Pr \lambda \mathbf{u} + 2m Pr \lambda \nabla^2 \mathbf{u} = 0 \quad (4.2.68)$$

$$\alpha v + 2m\Gamma \nabla^2 \phi + m\eta \nabla^2 \psi = 0 \quad (4.2.69)$$

$$\beta v + 2m\xi \nabla^2 \psi + m\eta \nabla^2 \phi = 0 \quad (4.2.70)$$

olarak elde edilir. Birinci denklemin bileşenleri

$$-2mDa Pr \lambda u + 2m Pr \lambda \nabla^2 u = 0 \quad (4.2.71)$$

$$\alpha\phi + \beta\psi - 2mDa Pr \lambda v + 2m Pr \lambda \nabla^2 v = 0 \quad (4.2.72)$$

şeklinde yazılır. (4.2.71) denklemin y değişkenine göre, (4.2.72) denklemin x

değişkenine göre kısmi türevlerini alıp ikinciden birinciyi çıkartırsak $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$

girdap fonksiyonu olmak üzere

$$\alpha \frac{\partial}{\partial x} \phi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi + 2mDa Pr \lambda \omega + 2m Pr \lambda \nabla^2 \omega = 0 \quad (4.2.73)$$

elde edilir. O halde yukarıda ki (4.2.69), (4.2.70), (4.2.73) denklemleri

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial}{\partial x} \phi + \beta \frac{\partial}{\partial x} \psi + 2mDa Pr \lambda \omega + 2m Pr \lambda \nabla^2 \omega = 0 \\ \alpha v + 2m\Gamma \nabla^2 \phi + m\eta \nabla^2 \psi = 0 \\ \beta v + 2m\xi \nabla^2 \psi + m\eta \nabla^2 \phi = 0 \end{cases} \quad (4.2.74)$$

şeklinde yazılır. ϕ ve ψ değişkenlerini yok etmek için sınır koşullarını sağlayan aşağıda

ki sinüs çözümleri arayalım. Bunun için

$$\tilde{\Psi}(y) = \Psi_0 \sin(n\pi y), \quad \theta(y) = \theta_0 \sin(n\pi y), \quad \Gamma(y) = \Gamma_0 \sin(n\pi y)$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \Psi(x, y, t) \\ \vartheta(x, y, t) \\ \gamma(x, y, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}(y) \\ \theta(y) \\ \Gamma(y) \end{bmatrix} \cdot \exp(Wt + iax)$$

normal mode analizini uygulayalım. $s = n^2\pi^2 + a^2$ olmak üzere

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = ia\Psi \quad \omega = \nabla^2 \Psi = -s\Psi$$

$$\phi = \Re\vartheta - \delta\gamma \rightarrow \frac{\partial\phi}{\partial x} = \Re\frac{\partial\vartheta}{\partial x} - \delta\frac{\partial\gamma}{\partial x} = ia\Re\vartheta - ia\delta\gamma$$

$$\psi = \Re\vartheta - Le\delta\wp\gamma \rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial x} = \Re\frac{\partial\vartheta}{\partial x} - Le\delta\wp\frac{\partial\gamma}{\partial x} = ia\Re\vartheta - iaLe\delta\wp\gamma$$

$$\nabla^2\phi = -s\Re\vartheta + \delta s\gamma, \quad \nabla^2\psi = -s\Re\vartheta + sLe\delta\wp\gamma$$

olarak bulunur. Bunlar (4.2.74) denklemlerinde yerine yazıp

$$\tilde{\Psi}(y) = \Psi_0 \sin(n\pi y), \quad \theta(y) = \theta_0 \sin(n\pi y), \quad \Gamma(y) = \Gamma_0 \sin(n\pi y)$$

olması kullanılırsa

$$ia\Re(\alpha + \beta)\theta_0 - ia\wp(\alpha + \beta Le\delta)\Gamma_0 + 2m\Pr\lambda s(s - Da)\Psi_0 = 0$$

$$-s\Re(2m\Gamma + m\eta)\theta_0 + s\wp(2m\Gamma + m\eta Le\delta)\Gamma_0 + \alpha ia\Psi_0 = 0$$

$$-s\Re(2m\xi + m\eta)\theta_0 + s\wp(2m\xi Le\delta + m\eta)\Gamma_0 + \beta ia\Psi_0 = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem sisteminin kat sayılar matrisinin determinantını alıp m değerini çekersek

$$m_1 = 0$$

$$m_2 = \frac{\sqrt{-\Pr\lambda(-4\xi\Gamma + \eta^2)(Da - s)(-\beta^2\Gamma + \beta\alpha\eta - \alpha^2\xi)}a}{\Pr\lambda s(-4\xi\Gamma + \eta^2)(Da - s)} \quad (4.2.75)$$

$m_3 = -m_2$ bulunur. Burada $m_2^2 = m^2$ değerini alırsak

$$m^2 = \frac{(\beta^2\Gamma - \beta\alpha\eta + \alpha^2\xi)a^2}{\Pr\lambda s^2(\eta^2 - 4\Gamma\xi)(Da - s)} \quad (4.2.76)$$

elde ederiz. Yine $s = n^2\pi^2 + a^2$ ifadesini m^2 eşitliğinde yerine yazıp a^2 ve n^2 ifadelerine göre maksimum değerini alalım. Maksimum değer için $n=1$ olmalı.

Maksimum değer için

$$m^2 = \frac{(\beta^2\Gamma - \beta\alpha\eta + \alpha^2\xi)a^2}{\Pr\lambda s^2(\eta^2 - 4\Gamma\xi)(Da - s)} \text{ eşitliğinin } a^2 \text{ değerine göre türevini alıp } a^2 \text{ çekilirse}$$

$$a^2 = \frac{Da}{4} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\sqrt{(Da-9\pi^2)(Da-\pi^2)}}{4} \quad \text{ve} \quad (4.2.77)$$

$$a^2 = \frac{Da}{4} - \frac{\pi^2}{4} - \frac{\sqrt{(Da-9\pi^2)(Da-\pi^2)}}{4} \quad (4.2.78)$$

bulunur. Bu a^2 değerlerinden birincisini m_2^2 eşitliğinde yerine yazılırsa

$$m^2 = \frac{16 \left(Da - \pi^2 + \sqrt{(Da-9\pi^2)(Da-\pi^2)} \right) (-\alpha^2 \xi + \beta \eta \alpha - \Gamma \beta^2)}{\text{Pr} \lambda \left(3\pi^2 + Da + \sqrt{(Da-9\pi^2)(Da-\pi^2)} \right) \left(-3\pi^2 + 3Da - \sqrt{(Da-9\pi^2)(Da-\pi^2)} \right) (-4\Gamma \xi + \eta^2)} \quad (4.2.79)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte

$$\begin{cases} \alpha = Le\mathfrak{R} - \wp + \lambda \text{Pr}, & \beta = \tau(\mathfrak{R} - \delta\wp) \\ \Gamma = \frac{Le^2\delta - 1}{Le\delta - 1}, & \xi = \frac{\tau(\delta - 1)}{Le\delta - 1}, & \eta = \frac{(Le - 1)(\tau\delta - 1)}{Le\delta - 1} \end{cases}$$

değerlerini kullanarak λ ve τ parametrelerine göre minimum değerini alırsak dört çift

λ ve τ değeri bulmuş oluruz. Bunlardan uygun olanın yani denklemini minimum yapanı

$$\tau = \frac{(Le - 1)(\wp - \mathfrak{R})}{(\delta\wp Le - \mathfrak{R})(\delta - 1)}, \quad \lambda = \frac{(Le\delta - 1)(\wp - \mathfrak{R})}{\text{Pr}(\delta - 1)} \quad (4.2.80)$$

şeklinde bulunur. Bunları $m^2 = m_2^2$ de yerine yazıp düzenlersek

$$m^2 = \frac{16(\wp - \mathfrak{R}) \left(Da - \pi^2 + \sqrt{(Da-9\pi^2)(Da-\pi^2)} \right)}{\left(3Da - 3\pi^2 - \sqrt{(Da-9\pi^2)(Da-\pi^2)} \right) \left(3\pi^2 + Da + \sqrt{(Da+9\pi^2)(Da+\pi^2)} \right)^2} \quad (4.2.81)$$

elde edilir. $m^2 < 1$ olduğu kullanılırsa ve bu ifadedden \mathfrak{R} değerini çekersek

$$\mathfrak{R} = \frac{(Da - \pi^2)(4\wp - 27\pi^4 - Da^2) + \sqrt{(Da-9\pi^2)(Da-\pi^2)}(4\wp - 4Da\pi^2 - Da^2 + 9\pi^4)}{4 \left(Da - \pi^2 + \sqrt{(Da-9\pi^2)(Da-\pi^2)} \right)} \quad (4.2.82)$$

elde edilir. Kritik ısı Rayleigh sayısını, Darcy sayısı ve kritik çözünen madde Rayleigh sayısına bağlı olarak bulmuş olduk.

Lineer olmayan kritik Rayleigh sayısı ile lineer bir Rayleigh sayısı arasında ki çakışmayı bulalım. Bunun için Lombardo ve ark.(2001) nın yapmış olduğu çalışmada ki tekniği kullanalım.

O halde $\lambda = \frac{\wp - Le\mathfrak{R}}{Pr}$, $\tau = \frac{1}{\delta}$ seçersek $\alpha = 0$, ve $\eta = 0$ elde edilir. Bu

değerleri (4.2.76) eşitliğinde yerine yazalım. Buradan

$$m^2 = \frac{-\beta^2 a^2}{4Pr\lambda\xi(Da - \pi^2 - a^2)(\pi^2 + a^2)^2} \quad (4.2.83)$$

olarak bulunur. Ayrıca burada $a^2 = \frac{Da}{4} - \frac{\pi^2}{4} + \frac{\sqrt{(Da - 9\pi^2)(Da - \pi^2)}}{4}$, β, ξ ve

$$\lambda = \frac{\wp - Le\mathfrak{R}}{Pr}, \quad \tau = \frac{1}{\delta}$$

değerlerini yerine yazıp düzenlersek

$$m^2 = \frac{4\left(Da - \pi^2 + \sqrt{(Da - 9\pi^2)(Da - \pi^2)}\right)(\mathfrak{R} - \delta\wp)^2 (Le\delta - 1)}{\delta(\delta - 1)(\wp - Le\mathfrak{R})\left(-3\pi^2 + 3Da - \sqrt{(Da - 9\pi^2)(Da - \pi^2)}\right)^2 \left(Da + 3\pi^2 + \sqrt{(Da - 9\pi^2)(Da - \pi^2)}\right)} \quad (4.2.84)$$

bulunur. Bu eşitlikte yine $m^2 < 1$ olmasını kullanıp \mathfrak{R} değerini çekersek Darcy sayısı, Lewis sayısı, çözünen madde Rayleigh sayısına (\wp) ve δ ya bağlı çok uzun bir ifade elde etmiş oluruz. Burada Rayleigh sayısının Prandtl sayısına bağlı olmadığı elde edilmiş olur. \mathfrak{R} değerinin çok uzun bir ifade olmasından dolayı sayısal değer verilerek yaklaşık olarak Rayleigh sayısı bulabiliriz. $m < 1$ olması durumunda $m^2 < 1$ eşitsizliğinden \mathfrak{R} değerinin çekersek bu ifade de $Le = 3$, $\delta = 0.1$, $Da = 0.0001$ ve $\pi = 3$ değerleri yerine yazılırsa \mathfrak{R} ile \wp arasında

$$\mathfrak{R} < 0.1000000000\wp + 0.03968268668\sqrt{2}\sqrt{62496.53572\wp + 56484652.06} - 421.7754477 \quad (4.2.85)$$

eşitsizliği bulunur. Bu ifadenin grafik olarak gösterimi tartışma kısmında verilmiştir.

4.2.3. Herhangi ε ve Le Sayısı için Kararlılık Analizi:

Bunun için

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \text{Pr}\nabla^2\mathbf{u} - Da\text{Pr}\mathbf{u} + \text{Pr}(\mathfrak{R}\vartheta - \wp\gamma) \quad (4.2.85)$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\vartheta = \nu + \nabla^2\vartheta \quad (4.2.86)$$

$$\varepsilon Le \frac{\partial\gamma}{\partial t} + Le\mathbf{u}\nabla\gamma = \nu + \nabla^2\gamma \quad (4.2.87)$$

$$\nabla\mathbf{u}=\mathbf{0} \quad (4.2.88)$$

denklemini yeniden ele alalım. Kararlılık analizi için Lombardo ve ark.(2001) çalışmasında ki enerji denklemi metodunu kullanacağız. Bu nedenle bu denklemleri $(\mathbf{u}, \vartheta, \gamma)^T$ ile çarpıp Ω tanım kümesi üzerinden integral alalım. O halde

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}\|^2 = -\text{Pr}\|\nabla\mathbf{u}\|^2 - Da\text{Pr}\|\mathbf{u}\|^2 + \text{Pr}(\nu, \mathfrak{R}\vartheta - \wp\gamma) \quad (4.2.89)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vartheta\|^2 = (\nu, \vartheta) - \|\nabla\vartheta\|^2 \quad (4.2.90)$$

$$\varepsilon Le \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\gamma\|^2 = (\nu, \gamma) - \|\nabla\gamma\|^2 \quad (4.2.91)$$

eşitliklerini elde etmiş oluruz. Enerji denklemi için $\lambda > 0$, $\tau > 0$ birleştirme sabitleri olmak üzere $E(t) = \frac{1}{2} \left[\|\mathbf{u}\|^2 + \lambda \|\vartheta\|^2 + \tau Le^2 \varepsilon \wp \|\gamma\|^2 \right]$ alalım. $E(t)$ enerji denkleminin değişimini inceleyeceğimizden eşitliğinin t değişkenine göre türevini almalıyız. O halde yukarda ki eşitlikleri kullanırsak

$$\begin{aligned} \dot{E}(t) &= (\text{Pr}\mathfrak{R} + \lambda)(\nu, \vartheta) + \wp(Le\tau - \text{Pr})(\nu, \gamma) \\ &\quad - \left[\text{Pr}\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + Da\text{Pr}\|\mathbf{u}\|^2 + \lambda\|\nabla\vartheta\|^2 + Le\tau\wp\|\nabla\gamma\|^2 \right] \end{aligned} \quad (4.2.92)$$

olur. $\alpha = \text{Pr}\mathfrak{R} + \lambda$, $\beta = \wp(Le\tau - \text{Pr})$ olmak üzere

$$I = \alpha(\nu, \vartheta) + \beta(\nu, \gamma) \text{ ve}$$

$D = \text{Pr}\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + Da\text{Pr}\|\mathbf{u}\|^2 + \lambda\|\nabla\vartheta\|^2 + Le\tau\wp\|\nabla\gamma\|^2$ olsun. O halde yukarda ki türev ifadesi $\dot{E}(t) = I - D$ şeklinde yazılır. $E(t)$ enerji denkleminin maksimum değerini

bulmak için $m = \max_H \frac{I}{D}$ diyelim. Bu maksimum probleminin Euler-Lagrange denklemleri $\delta I - m \delta D = 0$ ifadesinden bir önceki bölümde yapılan ile benzer olarak yapılırsa

$$\begin{cases} 2m \text{Pr} \nabla^2 \mathbf{u} - 2m \text{Da} \text{Pr} \mathbf{u} + (\text{Pr} \mathfrak{R} + \lambda) \vartheta \mathbf{j} + \wp (Le \tau - \text{Pr}) \gamma \mathbf{j} = \nabla p' \\ 2m \lambda \nabla^2 \vartheta + (\text{Pr} \mathfrak{R} + \lambda) v = 0 \\ 2m Le \tau \nabla^2 \gamma + (Le \tau - \text{Pr}) v = 0 \end{cases} \quad (4.2.93)$$

olarak elde edilir. Burada p' Lagrange çarpanıdır. Yine ilk eşitliği bileşenlerine ayırıp birinci denklemin y değişkenine göre ikinci denklemini x değişkenine göre türevini alıp çıkartırsak

$$\begin{aligned} 2m \text{Pr} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] - 2m \text{Pr} \text{Da} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ + (\text{Pr} \mathfrak{R} + \lambda) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \wp (Le \tau - \text{Pr}) \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.94)$$

denklemini elde edilir. Burada $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ girdap fonksiyonu, Ψ akım fonksiyonu olmak üzere yukarıda ki denklem

$$\begin{aligned} 2m \text{Pr} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\omega) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\omega) \right] - 2m \text{Pr} \text{Da} (\omega) \\ + (\text{Pr} \mathfrak{R} + \lambda) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \wp (Le \tau - \text{Pr}) \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (4.2.95)$$

olarak düzenlenir. O halde

$$2m \text{Pr} \nabla^2 \omega - 2m \text{Pr} \text{Da} (\omega) + (\text{Pr} \mathfrak{R} + \lambda) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \wp (Le \tau - \text{Pr}) \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0$$

$$2m \lambda \nabla^2 \vartheta + (\text{Pr} \mathfrak{R} + \lambda) v = 0$$

$$2m \tau \nabla^2 \gamma + (\text{Pr} + \tau) v = 0$$

olarak yazılır. Normal mode analizini uygularsak;

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}(y) = \Psi_0 \sin(n\pi y) \\ \vartheta(y) = \vartheta_0 \sin(n\pi y) \\ \gamma(y) = \gamma_0 \sin(n\pi y) \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} \Psi(x, y, t) = \tilde{\Psi}(y) \exp\{\sigma t + iax\} \\ \vartheta(x, y, t) = \vartheta(y) \exp\{\sigma t + iax\} \\ \gamma(x, y, t) = \gamma(y) \exp\{\sigma t + iax\} \end{cases}$$

alınır. Bu ifadeleri son eşitliklerde kullanırsak ve ifadeleri düzenlersek $s = n^2\pi^2 + a^2$ olmak üzere

$$2m s^2 \text{Pr} \Psi_0 + 2m \text{Pr} s Da \chi_0 + \alpha ia \vartheta_0 + \beta ia \gamma_0 = 0$$

$$-2m s \lambda \vartheta_0 + \alpha ia \Psi_0 = 0$$

$$-2m s \tau Le \gamma_0 + \beta ia \Psi_0 = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümü için katsayılar matrisinin determinantının sıfır olacağından

$$\frac{4m^2 \text{Pr} s^2 Le(s + Da)}{a^2} = \frac{Le(\text{Pr} \mathfrak{R} + \lambda)^2}{\lambda} + \vartheta^2 \frac{(Le\tau - \text{Pr})^2}{\tau} \quad (4.2.96)$$

elde edilir. $\tau = \frac{\text{Pr}}{Le}$ için \mathfrak{R} en büyük değerini alır. O halde $m=1$ kararlılık sınırında

yukarıda ki son denklem

$$\frac{4\text{Pr} s^2 Le(s + Da)}{a^2} = \frac{Le(\text{Pr} \mathfrak{R} + \lambda)^2}{\lambda} \quad (4.2.97)$$

olarak bulunur. Buradan kararlılık sınırında, sol tarafın a^2 değerine göre minimum değerini alalım. Bunun için $(n=1)$ ve (4.2.97) denkleminin a^2 ye göre türevini alıp a^2 değerini çekersek

$$\begin{cases} a^2 = -\pi^2 \\ a^2 = -\frac{\pi^2}{4} - \frac{Da}{4} + \frac{\sqrt{(9\pi^2 + Da)(\pi^2 + Da)}}{4} \\ a^2 = -\frac{\pi^2}{4} - \frac{Da}{4} - \frac{\sqrt{(9\pi^2 + Da)(\pi^2 + Da)}}{4} \end{cases}$$

değerleri elde edilir. Bu değerlerden minimum yapan değer

$$a^2 = -\frac{\pi^2}{4} - \frac{Da}{4} - \frac{\sqrt{(9\pi^2 + Da)(\pi^2 + Da)}}{4} \text{ dır.}$$

Bunu (4.2.97) denkleminde yerine yazarsak

$$A = \frac{\left(-3\pi^2 + Da + \sqrt{(9\pi^2 + Da)(\pi^2 + Da)}\right)^2 \left(-3\pi^2 - 3Da + \sqrt{(9\pi^2 + Da)(\pi^2 + Da)}\right)}{4\left(\pi^2 + Da + \sqrt{(9\pi^2 + Da)(\pi^2 + Da)}\right)}$$

olmak üzere $\text{Pr} \cdot A = \frac{(\text{Pr} \mathfrak{R} + \lambda)^2}{\lambda}$ eşitliği elde edilir.

Buradan \mathfrak{R} değerini çekersek $\mathfrak{R} = \sqrt{\frac{\lambda \cdot A}{\text{Pr}}} - \lambda$ bulunur. Bu elde ettiğimiz ıslı Rayleigh sayısının (\mathfrak{R}) en iyi değerini bulmak için λ parametresine göre maksimumunu alalım.

Bu maksimum değer $\lambda = \frac{A}{4\text{Pr}}$ olur. Bu değeri $\mathfrak{R} = \sqrt{\frac{\lambda \cdot A}{\text{Pr}}} - \lambda$ eşitliğinde yerine yazarsak

$\mathfrak{R} = \frac{A}{4\text{Pr}}$ elde edilir. A değerini de \mathfrak{R} eşitliğinde yerine yazarsak

$$\mathfrak{R} = \frac{\left(-3\pi^2 + Da + \sqrt{(9\pi^2 + Da)(\pi^2 + Da)}\right)^2 \left(-3\pi^2 - 3Da + \sqrt{(9\pi^2 + Da)(\pi^2 + Da)}\right)}{16\text{Pr}\left(\pi^2 + Da + \sqrt{(9\pi^2 + Da)(\pi^2 + Da)}\right)}$$

bulunur. Yukarda da görüldüğü gibi Rayleigh sayısı Darcy ve Prandtl sayısına bağlı olarak elde edildi. Çözünen madde Rayleigh sayısına bağlı değildir. Buradan çıkardığımız sonuç ise herhangi Le ve ε için çözünen madde Rayleigh sayısının değerine bakılmaksızın (4.2.5)-(4.2.8) ile verilen (v, T, C, P) çözümleri

$$\Re < \frac{\left(-3\pi^2 + Da + \sqrt{(9\pi^2 + Da)(\pi^2 + Da)}\right)^2 \left(-3\pi^2 - 3Da + \sqrt{(9\pi^2 + Da)(\pi^2 + Da)}\right)}{16 \Pr\left(\pi^2 + Da + \sqrt{(9\pi^2 + Da)(\pi^2 + Da)}\right)}$$

olduğunda şartsız olarak doğrusal olmayan kararlıdır.

5. TARTIŞMA

Tezin tartışma bölümünde, bu çalışmanın 4.1.1. bölümünde yapılan araştırmalar sonucunda elde edilen ve 4.1.64 eşitliği ile bulunan ısı Rayleigh sayısı değişkenlerine sayısal değerler verilerek bazı grafikler çizildi ve bu grafiklerden bir tanesi daha önce ki yıllarda yapılan S. Lombardo ve ark. (2001) çalışması ile karşılaştırıldı. Ayrıca 4.2.2. bölümünde elde edilen çözünen madde Rayleigh sayısı ve ısı Rayleigh sayısı arasında ki bağıntı grafiksel olarak gösterildi.

4.1.1 bölümünde yer alan 4.1.64 eşitliğinde $\varphi = 150$, $Pr = 1$, $\pi \cong 3.14$ ve $Le = 0.3$, $Le = 0.5$, $Le = 0.7$, $Le = 3$, $Le = 7$ alınarak Şekil 4.1.2 çizilmiştir. Bu şekilde Lewis sayısının değişimine göre $\mathfrak{R}-a$ değişimi incelenmiştir.

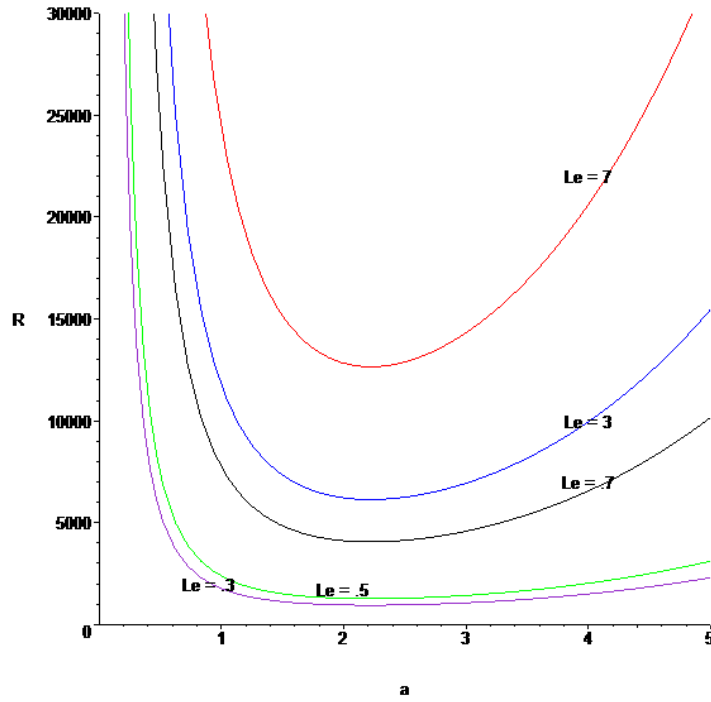
Yine 4.1.64 eşitlikte Lewis sayılarının aynı değerleri için $\varphi = 150$, $Pr = 7$, $\pi \cong 3.14$ alarak $\mathfrak{R}-a$ değişimi Şekil 4.1.3 'te incelenmiştir. Burada Prandtl sayısının etkisi görülmektedir.

Benzer olarak 4.1.64. eşitliğinde $Le = 0.7$, $Pr = 1$, $\pi \cong 3.14$ değerleri için φ nin $\varphi = 20$, $\varphi = 50$, $\varphi = 100$, $\varphi = 150$, $\varphi = 200$ olması halinde Şekil 4.1.4. ve $\varphi = 100$, $\varphi = 500$, $\varphi = 1000$, $\varphi = 1500$, $\varphi = 2000$ alınarak Şekil 4.1.5 çizilmiştir. Bu grafikte çözünen madde Rayleigh sayısı φ nin $\mathfrak{R}-a$ değişimi üzerinde etkisi gösterilmiştir.

Şekil 4.1.6. de ise S. Lombardo ve ark. (2001) çalışmasında $\mathfrak{R} = \frac{\varphi}{\varepsilon} + 4\pi^2 \frac{1 + \varepsilon Le}{\varepsilon Le}$ ifadesinde $Le = 0.7$, $\pi \cong 3.14$, $\varepsilon = 0.5$ ve $\varphi = 100$, $\varphi = 500$, $\varphi = 1000$, $\varphi = 1500$, $\varphi = 2000$ için $\mathfrak{R}-a$ değişim grafiği incelenmiştir.

Şekil 4.1.7 de Şekil 4.1.5 ile Şekil 4.1.6 beraber gösterilmiştir.

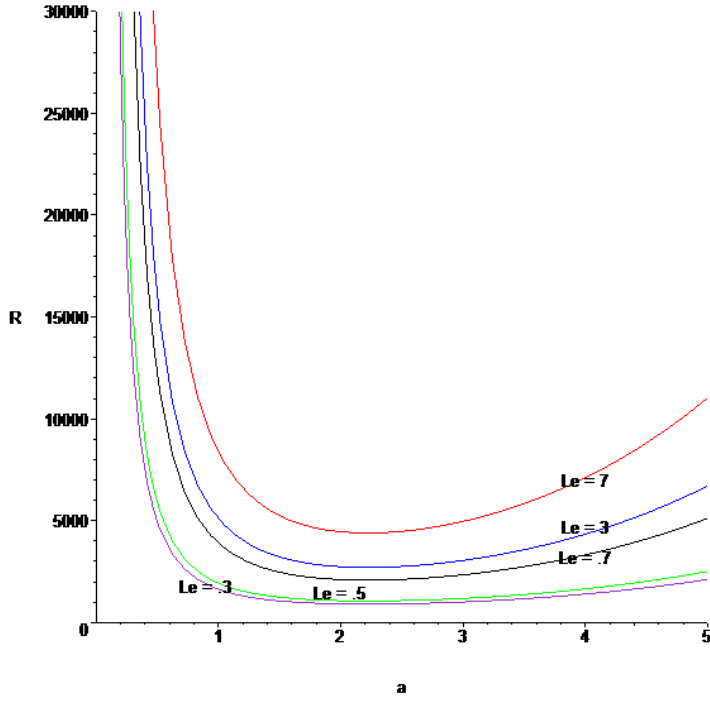
Şekil 4.2.2 de ise 4.2.85 eşitsizliğinin grafiksel gösterimidir. Şekilden de anlaşılacağı gibi \mathfrak{R} ile $\varphi = C$ arasında yaklaşık doğrusal bir bağıntı vardır.



Şekil 4.1.2. $\varphi = 150$, $Pr = 1$, $\pi \cong 3.14$ ve $Le = 0.3$, $Le = 0.5$, $Le = 0.7$, $Le = 3$, $Le = 7$ için $\mathfrak{R} - a$ değişim grafiği

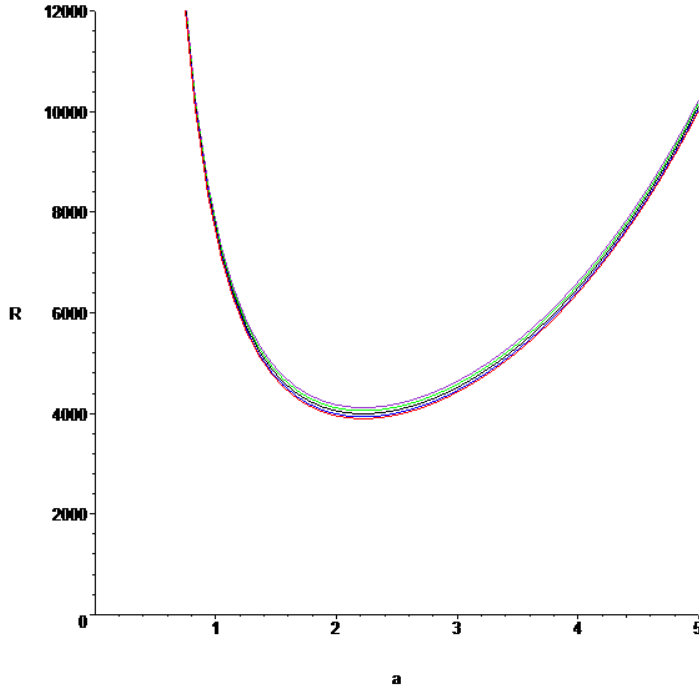
Şekil 4.1.2 , $\mathfrak{R} = \frac{(Pr Le + 1)}{Le(Pr + 1)} \varphi + \frac{(\pi^2 + a^2)^3 (Pr Le + Le + Pr + 1)(Pr Le + 1)}{a^2 Pr Le^2 (Pr + 1)}$ eşitliğinde

Lewis sayısına değerler verilerek elde edilmiştir. Lewis sayısının küçük değerleri ($Le = 0.3$, $Le = 0.5$, $Le = 0.7$) için a dalga boyu 0 ile 1 aralığında değişirken Rayleigh sayısı hızlı bir şekilde azalmıştır. $1 < a < 4$ aralığında ise neredeyse sabit kalmıştır. Ancak $a \geq 4$ için Rayleigh sayısı artmaya başlamıştır. Lewis sayısının büyük değerleri ($Le = 3$, $Le = 7$) için ise, yaklaşık $0 < a < 2$ aralığında Rayleigh sayısı hızla azalmış $a = 2$ ve civarında minimum değerini alarak artmaya başlamıştır. a dalga boyunun yaklaşık 2 değerinde bütün Lewis sayıları için Rayleigh sayısı minimum değerine ulaşmakta ve parabolik değişim göstermektedir. Rayleigh sayısı bu a değerinden öncesinde ve sonrasında maksimum değere ulaşmaktadır.

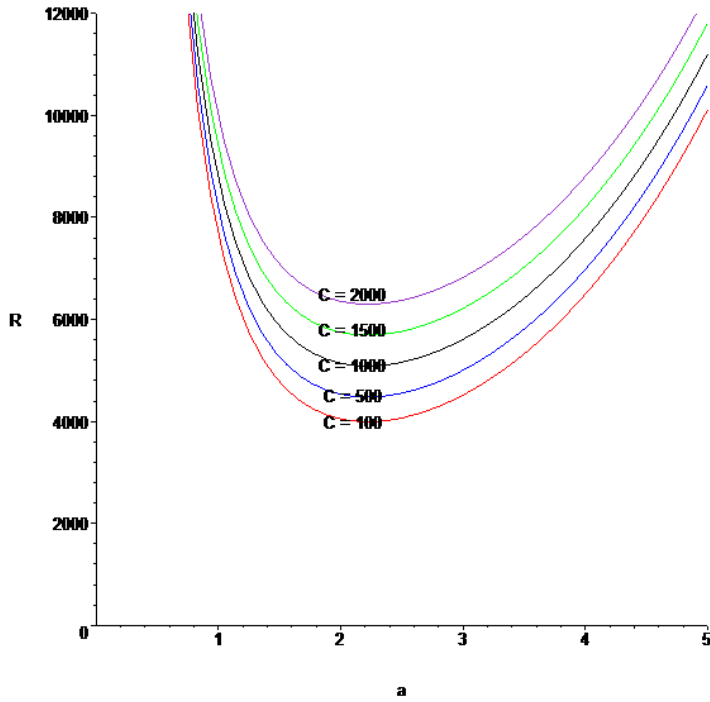


Şekil 4.1.3. $\varphi = 150$, $Pr = 7$, $\pi \cong 3.14$ ve $Le = 0.3$, $Le = 0.5$, $Le = 0.7$, $Le = 3$, $Le = 7$ için $\mathfrak{R} - a$ değişim grafiği

Şekil 4.1.3, (4.1.64) eşitliğine $\varphi = 150$, $Pr = 7$, $\pi \cong 3.14$ ve $Le = 0.3$, $Le = 0.5$, $Le = 0.7$, $Le = 3$, $Le = 7$ değerleri verilerek çizilmiştir. Burada şekil 4.1.2 den farklı olarak Prandtl sayısının $Pr = 7$ olması durumu incelenmiştir. Bu durumda ki değişiklik ısı Rayleigh sayısının değerinin düşmesidir.

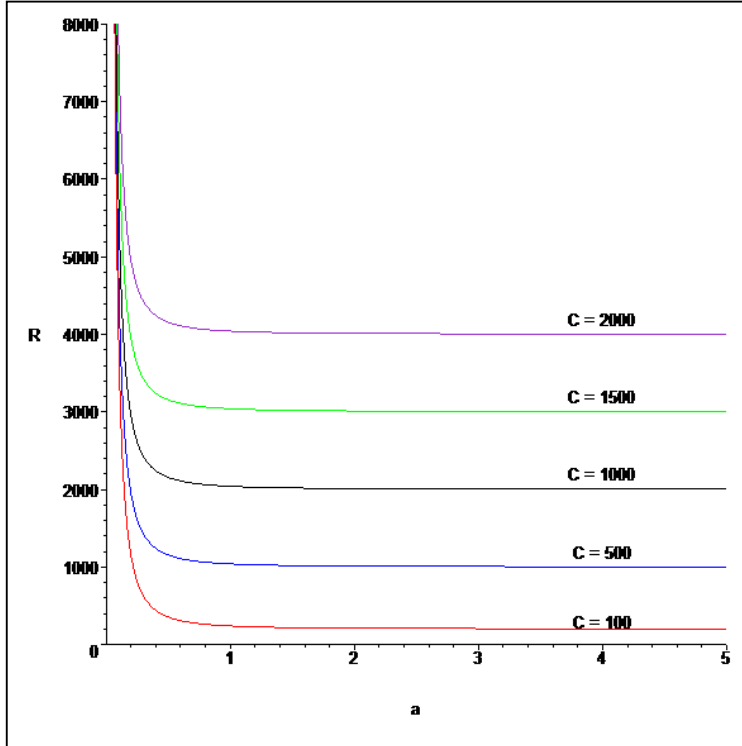


Şekil 4.1.4. $Le = 0.7$, $Pr = 1$, $\pi \cong 3.14$ ve $\wp = 20$, $\wp = 50$, $\wp = 100$, $\wp = 150$, $\wp = 200$ için \wp nin $\mathfrak{R}-a$ değişimi üzerindeki etkisinin grafiği



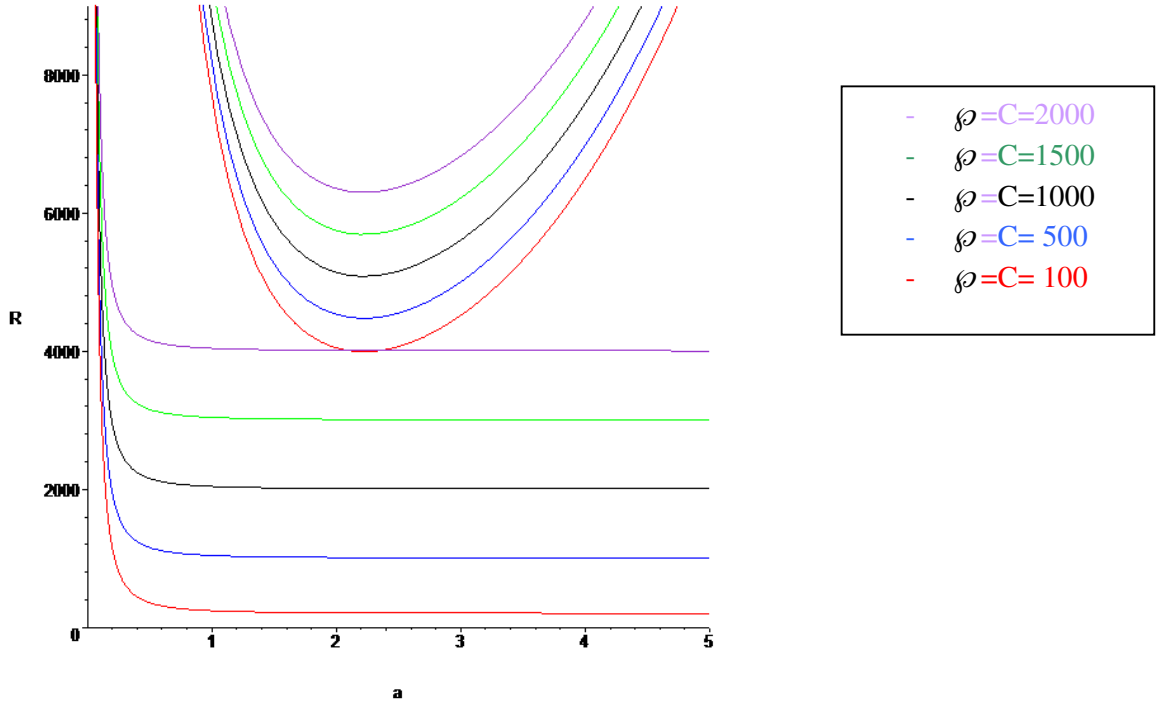
Şekil 4.1.5. $Le = 0.7$, $Pr = 1$, $\pi \cong 3.14$ ve $\wp = 100$, $\wp = 500$, $\wp = 1000$, $\wp = 1500$, $\wp = 2000$ için \wp nin $\mathfrak{R}-a$ değişimi üzerinde ki etkisinin grafiği

Şekil 4.1.4. ve Şekil 4.1.5, (4.1.64) eşitliğinde $Pr=1$ için $\wp=C$ nin değişimi incelenmiştir. Şekiller göz önüne alınırsa \wp nin artması şekilsel olarak grafikte çok fazla bir değişikliğe yol açmamıştır. Referans aralıkları küçülmüştür. Isıl Rayleigh sayısı yaklaşık olarak dalga sayısının $a=2$ olması durumunda minimum değerini almıştır.



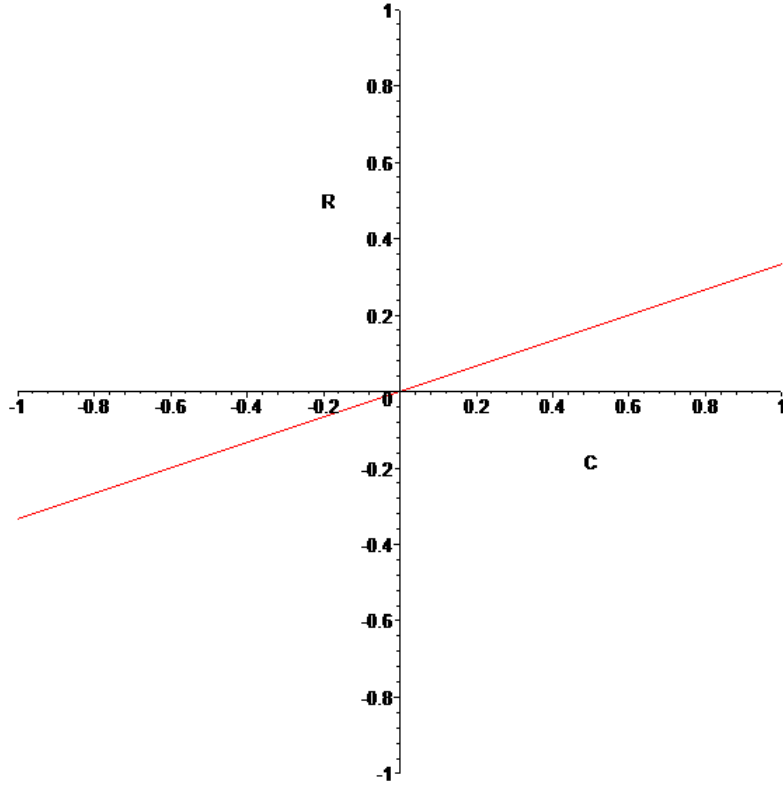
Şekil 4.1.6. S. Lombardo ve ark. (2001) çalışmasında $\mathfrak{R} = \frac{\wp}{\varepsilon} + 4\pi^2 \frac{1+\varepsilon Le}{\varepsilon Le}$ ifadesinde $Le = 0.7$, $\pi \cong 3.14$, $\varepsilon = 0.5$ ve $\wp = 100$, $\wp = 500$, $\wp = 1000$, $\wp = 1500$, $\wp = 2000$ için $\mathfrak{R}-a$ değişim grafiği

Şekil 4.1.6 da S. Lombardo ve ark. (2001) çalışmasında bulunan kritik ısı Rayleigh sayısı $Le = 0.7$, $\pi \cong 3.14$, $\varepsilon = 0.5$ ve $\wp = 100$, $\wp = 500$, $\wp = 1000$, $\wp = 1500$, $\wp = 2000$ değerleri için hesaplanıp dalga sayısına göre grafiği alınmıştır. Şekilde görüldüğü gibi Rayleigh sayısı dalga sayısı 0 ile 1 arasındayken hızlı bir şekilde azalırken 1 den büyük değerler için sabit kaldığı söylenebilir



Şekil. 4.1.7. Şekil 4.1.5 ve Şekil 4.1.6'nin bir arada görünümü

Şekil 4.1.7 de Şekil 4.1.5 ve Şekil 4.1.6 aynı grafikte gösterilmiştir. $\varphi = C = 100$ eğrisi ile $\varphi = C = 2000$ eğrisi yaklaşık olarak $a = 2$ noktasında aynı değeri almaktadır. \Re Rayleigh sayısının 8000 olarak alınması grafikleri karşılaştırma amaçlıdır.



Şekil. 4.2.2. $Le = 3$, $\delta = 0.1$, $Da = 0.001$, $\pi = 3$ için 4.2.85 eşitsizliğinin çözünen madde Rayleigh sayısı ile ısıl Rayleigh sayısı grafiği

Şekil 4.2.2 de 4.2.85 eşitsizliği ile verilen ifadenin $Le = 3$, $\delta = 0.1$, $Da = 0.001$, $\pi = 3$ değerleri için çizilmiştir. Bu grafikte Rayleigh sayısı ile ısıl Rayleigh sayısı arasında yaklaşık olarak doğrusal bir ilişki olduğu görülmektedir. Bu doğru sifıra çok yakın bir değerden geçmektedir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması önemli iki alt bölümden oluşmaktadır. Biri gözeneksiz diğeri gözenekli olmak üzere attan ısıtılan ve alt tabakası tuzlanmış bir ortamın doğrusal kararlılık analizi ile global kararlılık analizleri S. Lombardo ve ark. (2001), Mulone ve Rionero (1998), Mulone ve Straughan (2006) çalışmalarından yararlanılarak Newtoniyen akışkanlar için araştırılmıştır. Bulgular bölümünün ilk alt bölümünde bulunan sonuçlar grafiklerle S. Lombardo ve ark. (2001), çalışması ile karşılaştırılmıştır. Sonuçlar yorumlanmıştır.

Bu çalışmayı Newtoniyen olmayan yapışkan akışkanlar ve nihayetinde yapışkan elastik akışkanlar için genişletebiliriz. Bu durumda akışkanın yapışkanlığı sabit olmayıp, örneğin shear (kayma) bağımlı olup, eğrisel bağımlılık durumunda buradaki yöntemlerle kararlılık analizleri büyük önem arz edecektir.

Bu çalışmadan yararlanılarak ortamın geometrisi değiştirilerek, Newtoniyen ve Newtoniyen olmayan akışkanlar için değişik problemler tanımlanıp bu çalışmada kullanılan yöntemlerle kararlılık analizleri araştırılabilir.

Yine değişik geometrilerde bilgisayar paket programları kullanılarak ve deneysel verilere dayanarak sayısal çözümler elde edilebilir.

7. KAYNAKLAR

- Altınışık, K. , 2003. *Uygulamalarla Isı Transferi*, Nobel Yayın Dağıtım,788s, Ankara
- Bahloul, A., Kalla, L., Bennacer, R., Beji, H., Vasseur, P., 2004. Natural convection in a vertical porous slot heated from below and with horizontal concentration gradients, *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 43, 653-663
- Batchelor, G. K., 1954. Heat Transfer by Free convection across s Closed Cavity Between Vertical Boundaries at Different Temperatures, *Q. Appl. Math.*, 12,3 209-233
- Batchelor, G. K. , 1956. On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number, *J. Fluid Mech.* 1(2), 177-190
- Baytaş, C. A. 2006. Gözenekli ortamlarda taşınım olayı. *İTÜ Dergisi/c, Fen Bilimleri Cilt:4 sayı:1,3-13*
- Bourich, M., Amahmid, A., Hasnaoui, M., 2004. Double diffusive convection in a porous enclosure submitted to cross gradients of temperature and concentration, *Energy Conversion and Management*, 45, 1655- 1670
- Boyce, W. E., Diprima, R. C., 1986. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. John Wiley&Sons, 695s. New York
- Burggraf, O. B., 1966. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows, *J. Fluid Mech.* 24, 113–151
- Chandrasekhar, S.,1961. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Clarendon Pres: Oxford. 652 s, UK
- Canuto, C., Hussaini, M. Y., Alfio Quarteroni, Thomas, A. Zang, 1988. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer- Verlag Berlin Heidelberg, 567s, USA

- David, E., Lauriat, G. , Cheng, P., 1991. A numerical solution of variable porosity effects on natural convection in a packed-sphere cavity. *Journal of Heat Transfer Transactions of the ASME*, 113, 391-399.
- Debnath, L., 2004. *Nonlinear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*. Second Edition. Birkhauser Boston, 737s, USA
- Demir, H., 1996. The stability properties of some rheological flows, Ph. D. Thesis, The University of Glamorgan, School of Accounting and Mathematics, Division of Maths and Computing, 264 s, Wales (Galler), UK
- Incropera, F. D., David, P. D., 2000. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*, 912s
- Ingham, D. B. , Pop, I., (ed) 1998. *Transport Phenomena in Porous Media I*, Pergamon, Elsevier Science, Oxford, UK
- Ingham, D. B. , Pop, I., (ed) 2002. *Transport Phenomena in Porous Media II*, Pergamon, Elsevier Science, Oxford, 449s, UK
- Ingham, D. B. , Pop, I., (ed) 2005. *Transport Phenomena in Porous Media III* Pergamon, Elsevier Science, Oxford, 477s, UK
- Joseph, D. D. , Shir, C. C., 1968. Convective Instability in a Temperature and Concentration Field. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*. Vol. 30, No: 1, 38-80
- Kalla, L., Mamou, M., Vasseur, P., Robillard, L., 2001. Multiple solutions for double diffusive convection in a shallow porous cavity with vertical fluxes of heat and mass, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 44, 4493-4504
- Kawaguti, M., 1961. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for the Flow in a Two-Dimensional Cavity. *Journal of the Physical Society of Japan* 16, 2307-2315
- Lewis, J. A., 1950. *Free Convection in Commercial Insulating Materials*, Doktora Tezi, Graduate Division of Applied Math., Brown University, Providence, RI,

- Lombardo, S., Mulone, G., Straughan, B., 2001. Non-linear stability in the Benard problem for a double-diffusive mixture in a porous medium. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, *Math. Meth. Appl. Sci.* 24,1229–1246
- Lombardo, S., Mulone, G., 2001. global Nonlinear Exponential stability of the Conduction-Diffusion Solution for Schmidt Numbers Greater than Prandtl Numbers, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 262, 191-207
- Miklavcic, M., 2001. *Applied Functional Analysis and Partinal Differential Equations*. World Scientific, 294s, USA.
- Mohamad, A.A, Bennacer, R., 2002. Double diffusion, natural convection in an enclosure filled with saturated porous medium subjected to cross gradients; stably stratified fluid, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45, 3725-3740.
- Mulone, G., Rionero, S. 1998. Unconditional nonlinear stability in the Benard Problem for mixture: necessary and sufficient conditions. *Rend. Math. Acc. Lincei series 9*, 9, 221-236
- Mulone, G., Straughan, B. 2006. An operative method to obtain necessary and sufficient stability conditions for double diffusive convection in porous media. *ZAMM. Z. Angew. Math. Mech.* 86, 7, 507-520
- Nield, D. A., 1968. The onset of thermohaline convection in a porous medium. *Water Research*, 4, 553-560
- Nield, D. A. Bejan A., 1992. *Convection in Porous Media (2nd edn)*. Springer-Verlag, 640 s, New York, USA
- Ostrach, S., 1952. *Laminar Natural Convection Flow and Heat Transfer of Fluids with and without Heat sources in Channels with Constant Wall Temperatures*. NACA TN 2863

- Pop, I., 2004. Some boundary- layer problems in convective flow in porous media.
Emerging Technologies and Techniques in Porous Media (Editörler: Ingham D.B., Bejan A., Mamut E., Pop, I.), Kluwer, 65-91
- Robert, C. McOwen., 1995. *Partial Differential Equations: Methods and Applications*.
 Northeastern University, 418s, USA
- Rudraiah, N., Srimani, P.K., Friedrich, R., 1982. Finite amplitude convection in a
 two-component fluid saturated porous layer. *International Journal of Heat and
 Mass Transfer*, 25-5, 715-722
- Sing, A. K., Paul, T., Thorpe, G.R., 1999. Natural convection due to heat and mass
 transfer in a composite system. *Heat and Mass Transfer*, 35, 39-48.
- Soğukoğlu, M., 2000. *Akışkanlar Mekaniği*, Birsen yayınevi, 329s, İstanbul
- Straughan, B. 1992. *The method, Stability, and Nonlinear Convection*. Series in
 Applied Mathematical Sciences, Vol. 91. Springer-Verlag: Berlin,445 s,USA
- Taunton, J. W., Lightfoot, E. N., 1972. Theodore Green Thermohaline Instability and
 Salt Fingers in a Porous Medium. *Phys. Fluids* 15, 748-753
- Temam, R. , Miranville, A., 2005. *Mathematical modeling in Continuum Mechanics*,
 Second edition, Cambridge University Press, UK
- Trevisan, O.V., Bejan, A., 1985. Natural convection with combined heat and mass
 transfer buoyancy effects in a porous medium, *International Journal of Heat and
 Mass Transfer*, 28, 1597-1611
- Wang, S. , Tan, W., 2008. Stability analysis of double- diffusive convection of Maxwell
 fluid in a porous medium heated from below. *Physics Letters A*, 372,3046- 3050
- Xu, L., S. Yang. , 2007. Stability analysis of thermosolutal second- order fluid in
 porous Benard layer. *Ricerche di Matematica*, 56, 149-160

Yang, K. T., 1987 . *Natural convection in Enclosures, In: Handbook of Single Phase convective Heat Transfer.* (Editörler: Kakaç, S., Shah, R., Aung, W.), John Wiley Sons Inc., 13. bölüm, New York,

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı Doğum Yeri: **HATİCE MUTİ-RİZE**

Doğum Tarihi: **25.07.1978**

Medeni Hali: **BEKÂR**

Bildiği Yabancı Diller: **İNGİLİZCE**

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: **İKİZDERE LİSESİ, 1995**

Lisans: **ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDB. FAK. MATEMATİK BÖLÜMÜ, 2001**

Yüksek Lisans: **ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ, MATEMATİK ANABİLİMDALI, 2005**

Çalıştığı Kurum ve Yıl: **ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN EDB. FAK. MATEMATİK BÖLÜMÜ-2001-**

İletişim Bilgileri:

ÇİFTLİK MAH. TURGUT REİS SOK. 31/3 SAMSUN

TEL: 0539 9919378