

T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ AŞAMALI BİR COXIAN KUYRUK MODELİNİN  
OPTİMİZASYONU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve KÜNEFECİ

İstatistik Anabilim Dalı

ŞUBAT 2014  
SAMSUN





T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**İSTATİSTİK ANABİLİM DALI**

**İKİ AŞAMALI BİR COXIAN KUYRUK MODELİNİN  
OPTİMİZASYONU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Merve KÜNEFECİ  
(10210230)**

**Tezin Savuma Tarihi : 18/ 02/ 2014**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Vedat SAĞLAM**



**Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**

**İstatistik Anabilim Dalında**

**Merve Künefeci Tarafından Hazırlanan**

**İKİ AŞAMALI BİR COXIAN KUYRUK MODELİNİN**

**OPTİMİZASYONU**

**başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 18/02/2014 tarihinde yapılan sınav ile  
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.**

**Başkan : Doç. Dr. Vedat SAĞLAM** .....

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Pelin KASAP** .....

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

**Yrd. Doç. Dr. Müjgan ZOBU** .....

Amasya Üniversitesi

**18/02/2014**

**Prof. Dr. Recep TAPRAMAZ**

Enstitü Müdürü



*Anneme, Babama ve Eşime*





## ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimi boyunca ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum değerli danışman hocam Doç. Dr. Vedat SAĞLAM'a bilgilerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı teşekkürü borç bilirim. Bu çalışmanın ortaya çıkmış olması değerli hocamın başından sonuna kadar bana destek oluşuyla gerçekleşmiştir.

Ayrıca bana yardımcı olan bölümdeki ve bölüm dışındaki birlikte çalışmaktan zevk aldığım sayın hocalarıma, asistan arkadaşlarıma desteklerinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan anneme, babama ve büyük bir sabırla her zaman yanımda olan eşim Erdal Nuri KÜNEFECİ'ye çok teşekkür ediyorum.

Şubat 2014

Merve KÜNEFECİ



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|   |           |
|---|-----------|
| ÖNSÖZ.....  | vii       |
| İÇİNDEKİLER .....   | ix        |
| ÇİZELGELER .....  | xi        |
| ŞEKİLLER LİSTESİ.....   | xiii      |
| ÖZET.....   | xv        |
| ABSTRACT .....  | xvii      |
| <b>1. GİRİŞ .....</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Tezin Amacı.....  | 1         |
| 1.2 Literatür Araştırması .....   | 2         |
| <b>2. GENEL BİLGİLER.....</b>   | <b>3</b>  |
| <b>3. MARKOV ZİNCİRLERİ.....</b>  | <b>5</b>  |
| 3.1 Sürekli Parametrel Markov Zincirleri .....                          | 5         |
| 3.1.1 Poisson süreci.....   | 6         |
| 3.1.1.1 Poisson sürecinin özellikleri .....                             | 6         |
| 3.1.2 Geçiş oranları .....  | 8         |
| 3.1.3 Markov zincirinin herhangi bir durumda oturma süresi .....        | 8         |
| 3.1.4 Kolmogorov denklemleri .....                                      | 10        |
| 3.1.5 Limit dağılımı .....  | 11        |
| <b>4. STOKASTİK KUYRUK SİSTEMLERİ .....</b>                             | <b>13</b> |
| 4.1 Kuyruk Sistemlerinin Genel Yapısı.....                              | 13        |
| 4.2 Tek Kanallı Markovian Kuyruk Sistemleri ve Performans Ölçüleri..... | 15        |
| 4.2.1 $M / M / 1$ Sistemi ve analizi .....                              | 15        |
| 4.2.1.1 $M / M / 1$ Sisteminin performans ölçüleri .....                | 15        |
| Sistemdeki ortalama müşteri sayısı .....                                | 15        |
| Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı .....                         | 16        |
| Bir müşterinin sistemde ve kuyrukta ortalama bekleme süresi.....        | 16        |
| 4.2.2 $M / M / c$ Sistemi ve analizi.....                               | 17        |
| 4.2.2.1 $M / M / c$ Sisteminin performans ölçüleri .....                | 17        |
| Sistemdeki ortalama müşteri sayısı .....                                | 17        |
| Bir müşterinin sistemde ve kuyrukta ortalama bekleme süresi.....        | 17        |
| 4.2.3 $M / M / c / 0$ Sistemi .....                                     | 17        |
| 4.2.3.1 $M / M / c / 0$ Sisteminin performans ölçüleri .....            | 18        |
| Sistemdeki ortalama müşteri sayısı .....                                | 18        |
| Bir müşterinin sistemde ve kuyrukta ortalama bekleme süresi.....        | 18        |
| <b>5. FAZ TİPİ DAĞILIMLAR.....</b>                                      | <b>19</b> |
| 5.1 Erlang - rlang - $r$ Dağılımı .....                                 | 19        |
| 5.2 Hypoexponential Dağılım.....  | 20        |
| 5.3 Coxian Dağılımı .....   | 21        |
| <b>6. DÖNÜŞÜMLER.....</b>   | <b>23</b> |
| 6.1 Laplace Dönüşümü .....  | 23        |
| 6.2 $z$ -Dönüşümü .....   | 23        |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>7. İKİ AŞAMALI BİR COXIAN KUYRUK MODELİNİN OPTİMİZASYONU .....</b> | <b>25</b> |
| 7.1 Stokastik Model .....   | 25        |
| 7.2 Limit Dağılımı .....  | 25        |
| 7.3 Olasılık Fonksiyonu .....   | 26        |
| 7.4 Performas Ölçülerinin Bulunması .....                             | 27        |
| 7.4.1 $z$ - Dönüşümünün Coxian kuyruk modelinde kullanılması .....    | 27        |
| 7.4.2 Laplace dönüşümünün Coxian kuyruk modelinde kullanılması .....  | 27        |
| 7.5 Performas Ölçülerinin Optimizasyonu .....                         | 28        |
| 7.6 Kaybolma Olasılığı.....   | 28        |
| 7.7 Kanalların Optimal Sıralaması .....                               | 28        |
| 7.8 Sayısal Örnek.....  | 29        |
| <b>8. SONUÇ VE TARTIŞMA.....</b>                                      | <b>33</b> |
| <b>KAYNAKLAR.....</b>   | <b>35</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>  | <b>37</b> |

## ÇİZELGELER LİSTESİ

|  | <b><u>Sayfa</u></b> |
|--|---------------------|
| <b>Çizelge 7.1.</b> $\mu_1 > \mu_2$ için performans ölçülerinin hesaplanması ..... | 30                  |
| <b>Çizelge 7.2.</b> $\mu_1 < \mu_2$ için performans ölçülerinin hesaplanması ..... | 30                  |
| <b>Çizelge 7.3.</b> $\mu_1 = \mu_2$ için performans ölçülerinin hesaplanması ..... | 31                  |



## ŞEKİLLER LİSTESİ

|   | <u>Sayfa</u> |
|---|--------------|
| Şekil 2.1. Sayma sürecinin örneklem fonksiyonu.....   | 4            |
| Şekil 3.1. Markov zincirinin oturma süreleri .....    | 9            |
| Şekil 5.1. Tandem'de $r$ tane üstel hizmet fazı ..... | 19           |
| Şekil 5.2. Hypoexponential dağılım .....              | 20           |
| Şekil 5.3. Coxian dağılımı .....                      | 21           |
| Şekil 7.1. İki fazda Coxian kuyruk modeli .....       | 25           |





## İKİ AŞAMALI BİR COXIAN KUYRUK MODELİNİN OPTİMİZASYONU

### ÖZET

Bu tezde  $\lambda$  parametrelili üstel dağılımlı gelişlere sahip iki fazlı bir Coxian kuyruk modeline ait stokastik denklem sistemi elde edilmiştir. Herhangi bir anda  $\alpha$ 'ya ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) göre sistemin dolu ya da boş olması olasılıkları hesaplanmıştır. Ayrıca ortalama müşteri sayısı da elde edilmiştir. Eğer bu modelde  $\alpha = 1$  ve  $\mu_1 = \mu_2$  seçilirse,  $M / E_2 / 1 / 0$  kuyruk modelinin elde edileceği gösterilmiştir.  $\alpha = 1$  için ise bir müşterinin servis süresinin hypoexponential olacağı da gösterilmiştir. Eğer  $\alpha = 0$  alınırsa bu durumda bir  $M / M / 1 / 0$  kuyruk modeline sahip oluruz. Teorem 7.1' de sistemde bulunan ortalama müşteri sayısının optimal değerleri verilmiştir. Teorem 7.2'de ise servis parametrelerinin karşılıklı yer değiştirmesiyle elde edilecek optimal servis kanalı sıralaması için kaybolma olasılıkları belirlenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Coxian model; Diferansiyel denklemler; Kaybolma olasılığı; Limit dağılımı



## ON OPTIMIZATION OF A COXIAN QUEUEING MODEL WITH TWO PHASES

### ABSTRACT

In this thesis, we have obtained stochastic equation systems of a Coxian queueing model with two phases where arrival stream of this model is according to the exponential distribution with  $\lambda$  parameter. We have obtained the probabilities of the state idle and state occupied with respect to  $\alpha(0 \leq \alpha \leq 1)$  at any given  $t$  moment.

Furthermore the mean number of customer is found. In this model if  $\alpha = 1$  and  $\mu_1 = \mu_2$  taken then  $M/E_2/1/0$  queueing model is obtained. Also for  $\alpha = 1$  it is shown that service time of a customer is according to hypoexponential.

If  $\alpha = 0$  is taken we have  $M/M/1/0$  queueing system. The optimal values of the mean number of customer in the system is found in Theorem 7.1. Furthermore, loss probability by changing the parameters of service are obtained for optimal ordering of phases by Theorem 7.2.

**Key Words:** Coxian model; Differential equations; Loss probability; Limiting distribution; Optimal ordering.



## 1. GİRİŞ

Müşterilerin talep ettikleri bir hizmet için beklemeleri günlük hayatımızda artık bir zorunluluk haline gelmiş, hayatımızın bir parçası olmuştur. Restoranlarda yemek için beklemek, sağlık hizmeti veren kuruluşlarda hasta kuyruklarında beklemek, alışveriş merkezlerinde ödeme yapmak için beklemek, trafik ışıklarında beklemek ve her türlü depolama, stoklama işlerinde beklemek gibi. Bütün bu bekleme gerektiren işlerde hizmet sunan (hizmet veren), verilen hizmet kalitesinin yüksek olmasını ve müşterilerin bekleme sürelerini en düşük düzeyde tutmayı hedeflemektedir.

Hizmet için gelen müşteri, isteklerinin zamanında karşılanmasını bekler. Müşteri gereğinden fazla beklediğinde, hizmet verenin müşteriye kaybetme olasılığı vardır. Bu hizmet verenin arzu ettiği bir durum değildir. Hizmet vericinin yararları ile hizmet talep edenin yararlarını dengeleyen bir ekonomik strateji belirlenmesi kuyruk teorisi analizi ile gerçekleştirilebilir. Kuyruk Teorisi; sıraya girme, kuyrukta bekleme ve sıranın önünde hizmet verenler tarafından servisin sunulmasını içeren birçok ilişkili işlemin matematiksel analizinde kullanılır.

### 1.1 Tezin Amacı

Bu tez çalışması yapılırken esas olarak bir “İki Fazlı Coxian Kuyruk Modeli” analiz edilmeye çalışılmış ve bu modele ait stokastik denklem sistemi elde edilmiştir. Elde edilen bu denklem sistemi yardımıyla bu modelin istenilen performans ölçülerine ait bulgular elde edilmeye çalışılmıştır. İki fazlı Coxian kuyruk modelinde hizmet parametreleri  $\mu_i$ ,  $i = 1,2$ ; birinci fazdan ikinci faza geçiş olasılığı  $\alpha$ ; birinci fazdan sonra sistemi terk etme olasılığı ise  $(1 - \alpha)$ ’ dır. Burada amacımız parametrelerin durumuna göre optimal sıralamalar yapılarak modelimizin hangi durumda daha avantajlı olacağını göstermektir. Yine Cox(2) sistemimizden yola çıkarak hizmet parametreleri ve geçiş olasılıklarına göre sistemimizin farklı sistemlere dönüşeceği gösterilmeye çalışılmıştır.

## 1.2 Literatür Araştırması

Tek fazlı kuyruk sistemleri, Kuyruk Teorisinin önemli bölümlerinden birisini teşkil etmektedir. Çok daha karmaşık kuyruk sistemleri modelleyebilmek için hypoexponential ve hiperexponential dağılımların beraber kullanıldığı faz tipli dağılımlar oluşturulabilir. Kompleks olasılıklar ve kompleks oranların matematiksel olarak ifade edilmeye başlanmasıyla birlikte D.R. Cox (1955), rasyonel bir Laplace dönüşümünün üstel fazların bir dizisi olarak ifade edilebileceğini göstermiştir. W.J. Stewart (2009), herhangi bir fazda hizmet tamamlandıktan sonra diğer faza geçerek hizmetini seri alacak şekilde ard arda hizmetlerin serisi olarak hizmet dizisini tanımlamıştır. Coxian dağılımlarının başka bir geniş alt kümesi F. Neuts tarafından tanıtılan faz tipli dağılımlardır. N. Bhat (2008) tarafından verilen Erlang dağılımının olasılıksal genellemesi de faz tipi dağılım olarak kabul edilir. R. Marie (1980), hizmet süreleri Cox'un genelleştirilmiş aşama metoduna uyan ve Poisson giriş akımları yük bağımlı kuyruk ile belirlenmiş modelin denge durumunu incelemiştir. Bu modelde çözüm bu modelle aynı denge durumuna sahip doğum - ölüm süreci ile elde edilmiştir. M. Zobu, V. Sağlam (2013a), ise iki aşamalı Tandem hizmet kuyruğunun optimal sıralamasını vermiştir ve yine M. Zobu (2013b) tip-1 ve tip-2 olasılıklarına bağlı olarak hizmet süresi Coxian giriş akımları Poisson dağılımlı iki kanallı bir hizmet sistemine ait optimal örneklem genişliğini elde etmiştir. Aralarında bekleme hattı olmayan ve Coxian hizmet süreli bir üretim hattının analizini çeşitli yollarla H.T. Papadopoulos (1998) yapmıştır. Bu çalışmada ise iki aşamalı  $\lambda$  parametrelili üstel giriş akımlı bir Coxian kuyruk modelinin durağanlık denklem sistemleri elde edilmeye çalışılmıştır.

## 2. GENEL BİLGİLER

Stokastik süreçlere ait bazı genel tanımlar aşağıdaki gibidir:

**Tanım 2.1:**  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  olasılık uzayı olsun. Burada  $\Omega$ , örnek uzayı;  $\mathcal{F}$ ,  $\sigma$  – cebir;  $P$ ’ de olasılık ölçüsüdür. Bu uzayda tanımlanan  $\{\xi_t, t \geq 0\}$  tesadüfi değişkenler ailesine *stokastik süreç* denir. Burada  $t$  - zamana ilişkin parametredir.

**Tanım 2.2:**  $\xi_t$  sürecinin alabileceği değerler kümesi  $\mathbb{R}_x$  ile  $t$  parametresinin alabileceği değerler kümesi de  $T$  ile gösterilir. Bu bağlamda  $\mathbb{R}_x$ ’e durum uzayı,  $T$  ye ise *indis kümesi* ya da *parametre kümesi* denir.  $\mathbb{R}_x = (-\infty, \infty)$  ve  $T = (0, \infty]$ . Durum uzayı  $E$  ile de gösterilir.

Eğer  $T = (-\infty, \infty)$  ise  $\xi_t$  ye stokastik fonksiyon denir ve  $\{\xi_t, T\}$  ile ifade edilir. Stokastik süreçler durum uzayına ve parametre kümesine göre; kesikli veya sürekli parametrelili, kesikli veya sürekli durum uzaylı stokastik süreç olmak üzere dört kısma ayrılır.

$\xi_t = k$ ,  $k \in \mathbb{R}_x$  olduğunda stokastik süreç  $t$  anında  $k$  durumundadır. Stokastik süreç tesadüfi değişken kavramının genel hali, tesadüfi değişken kavramı da stokastik süreç kavramının özel halidir.

$t = t_0$  gibi bir sabite eşit olduğunda stokastik süreç  $\xi_{t_0}$  gibi bir boyutlu tesadüfi değişkene dönüşür.  $t \in \{t_1, t_2\}$  alabiliyorsa stokastik süreç iki boyutlu tesadüfi değişkene dönüşür ve  $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2})$  biçimindedir.  $t \in \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  için stokastik süreç  $n$  boyutlu tesadüfi değişkenler vektörüne dönüşür, yani  $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n})$  biçimindedir.

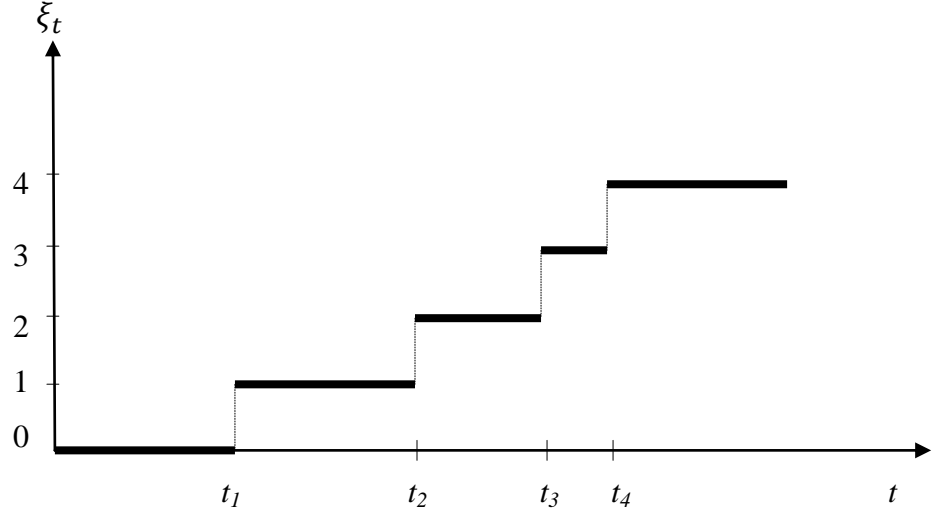
**Tanım 2.3:**  $\{\xi_t, t \geq 0\}$  bir stokastik süreç olsun. Eğer  $n = 1, 2, \dots$  ve  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t < \infty$  için  $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$  tesadüfi değişkenleri bağımsız iseler, bu sürece bağımsız artımlı süreç (B.A.S.) denir.

**Tanım 2.4:**  $\{\xi_t, t \geq 0\}$  bir stokastik süreç olsun. Eğer  $n = 1, 2, \dots$ ,  $h > 0$  ve  $t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t < \infty$  için  $\xi_{t_1+h}, \xi_{t_2+h}, \dots, \xi_{t_n+h}$  değişkenlerinin ortak dağılımı ile  $\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \dots, \xi_{t_n}$  değişkenlerinin ortak dağılımı aynı ise bu sürece durağan süreç denir. Böylece durağan sürecin dağılımı, başlangıç

zamanındaki değişimle etkilenmeyecek ve herhangi bir  $h > 0$  için  $\xi_t$  ile  $\xi_{t+h}$  aynı dağılıma sahip olacaktır. (Khaniev, 2003)

**Tanım 2.5:**  $\{\xi_t, t \geq 0\}$  tesadüfi süreci  $(0, t)$  aralığında meydana gelmiş olan olayların toplam sayısını temsil ederse (gösterirse) bu sürece sayma süreci denir. Bu tanımdan sayma süreci  $\xi_t$  aşağıdaki koşulları sağlar. (Hsu, 1996)

1.  $\xi_t \geq 0$  ve  $\xi_0 = 0$
2.  $\xi_t$  tamsayı değerlidir.
3.  $s < t$  ise  $\xi_s \leq \xi_t$
4.  $(s, t)$  aralığında meydana gelen olayların sayısı  $\xi_t - \xi_s$  ye eşittir.



Şekil 2.1. Sayma sürecinin örneklem fonksiyonu



### 3. MARKOV ZİNCİRLERİ

#### 3.1 Sürekli Parametrelili Markov Zincirleri

**Tanım 3.1:**  $\{ \xi_t, t \geq 0 \}$ , durum uzayı  $E = \{0,1, \dots\}$  olan sürekli parametrelili bir süreç olsun. Denklem (3.1) geçerli olduğunda bu sürece sürekli parametrelili Markov zinciri denir. Her bir  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq t < \infty$  ve  $n_1, \dots, n_k \in E$  için;

$$P(\xi_t = j / \xi_{t_1} = n_1, \dots, \xi_{t_k} = n_k) = P(\xi_t = j / \xi_{t_k} = n_k) \quad (3.1)$$

$t > t'$  için;

$$P(\xi_t = j / \xi_u, u \leq t') = P(\xi_t = j / \xi_{t'}) \quad (3.2)$$

olur. (Grimmett, 1992)

(3.1) ve (3.2) denklemlerine Markov özelliği ya da belleksizlik özelliği denir. Bu tanıma göre Markov sürecinin herhangi bir  $t$  anında durumu belli olduğunda bunun geçmiş ve geleceği birbirinden bağımsızdır.

$p_{ij}(t) = P(\xi_{t+t'} = j / \xi_{t'} = i)$  ifadesinin anlamı  $t'$  anında  $i$  durumunda olan sürecin  $t + t'$  anında  $j$  - durumunda olması olasılığıdır. Özel olarak,  $t' = 0$  alındığında;

$$p_{ij}(t) = P(\xi_t = j / \xi_0 = i) \quad (3.3)$$

olur.

$\{ \xi_t, t \geq 0 \}$  süreci homojen süreç olarak adlandırılır.  $p_{ij}(t)$  olasılığına  $i$  durumundan  $j$  durumuna geçiş olasılığı denir. Bunlar aşağıdaki özellikleri sağlar.

$\forall i, j \in E$  için;

$$\begin{aligned} p_j(t) &= P(\xi_t = j) \\ p_j(t) &\geq 0 \\ p_{ij}(t) &\geq 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} p_{ij}(t) &= 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

olur.

### 3.1.1 Poisson süreci

Sayma süreçlerinin en önemlilerinden birisi de Poisson sürecidir.

**Tanım 3.2:** Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa  $\{\xi_t, t \geq 0\}$  sayma süreci bir Poisson süreci olarak adlandırılır. Poisson süreci sürekli parametrelili kesikli durum uzaylı stokastik süreçtir.

1.  $P(\xi_0 = 0) = 1$  (3.5)

2.  $\xi_t$  bağımsız artımlı süreçtir.

3. Herhangi bir  $t$  aralık uzunluğundaki olayların sayısı  $\lambda t$  ortalama ile Poisson dağılmıştır. Yani tüm  $t > 0$  için;

$$P(\xi_{t+s} - \xi_s = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

olur. Bu 3. özellik Poisson sürecinin durağan artımlı ve  $E(\xi_t) = \lambda t$  olduğunu gösterir.

Poisson sürecinin ortalaması, varyansı ve kovaryansı aşağıdaki gibi verilmiştir.

i)  $E(\xi_t) = \lambda t$  (3.7)

ii)  $E(\xi_t^2) = (\lambda t)^2 + \lambda t$  (3.8)

$V(\xi_t) = E(\xi_t^2) - E(\xi_t)^2 = \lambda t$  (3.9)

iii)  $\forall s, t > 0$  için  $Cov(\xi_t, \xi_s) = \lambda \min(t, s)$  (3.10)

#### 3.1.1.1 Poisson sürecinin özellikleri

1.  $h \rightarrow 0$  iken,  $\xi_h \sim Pois(\lambda h)$  ve  $f(x_h) = \frac{e^{-\lambda h} (\lambda h)^k}{k!}$ ,  $k = 0, 1, \dots$  olduğunda,

a)  $P(\xi_h = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$  (3.11)

b)  $P(\xi_h = 1) = \lambda h + o(h)$  (3.12)

c)  $P(\xi_h \geq 2) = o(h)$  (3.13)

olur.

2. Poisson sürecinin geliş anları  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  olsun. Bunlara sıçrayış anları denir. Bu dizi bağımsız artımlı bir dizidir. Denklem (3.14).

$$T_1 = t_1 - t_0, \quad T_2 = t_2 - t_1, \quad \dots, \quad T_n = t_n - t_{n-1} \quad (3.14)$$

Burada;

i)  $T_i$ 'ler  $\lambda$  parametrelili üstel dağılıma sahiptirler.

ii)  $T_i$ ' ler bağımsızdır.

3.  $\{\xi_t^{(1)}, t \geq 0\}, \{\xi_t^{(2)}, t \geq 0\}, \dots, \{\xi_t^{(n)}, t \geq 0\}$  ,  $n$ -tane stokastik süreç veriliyor ve ortalama oranları sırasıyla  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  ve  $\lambda = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  olarak alındığında  $\eta_t = \sum_{i=1}^n \xi_t^{(i)}$  de bir Poisson sürecidir.

4.  $\{\xi_t, t \geq 0\}$  ,  $\lambda$  parametrelili Poisson süreci olsun.  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t < \infty$  geliş anlarıdır.  $\xi_t = 1$  koşulu altında  $t_1$  geliş anı  $(0, t)$  aralığında düzgün dağılıma sahiptir.

5.  $\{X_t, t \geq 0\}$  poisson süreci ve  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t < \infty$  bu sürecin geliş anlarıdır. Her bir geliş anı  $p$  olasılığı ile sağlanıyor veya  $1 - p = q$  olasılığı ile sağlanamıyor.  $N_t$  ile  $(0, t)$  aralığında yerleşen ve sağlanan gelişlerin sayısını gösterelim. Bu durumda  $N_t$  ,  $\lambda pt$  parametrelili Poisson dağılımına sahiptir. Yani  $N_t$ ' nin Poisson süreci olabilmesi için aşağıdaki özellikleri sağlaması gerekir. Denklem (3.15).

a.  $N_t = 0$

b.  $N_t$  , bağımsız artımlı süreçtir. (3.15)

c.  $N_t$ ' nin geliş anları  $\xi_t$ ' nin geliş anlarıdır.

$$P(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda pt} (\lambda pt)^k}{k!} , \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

6.  $\{\xi_t, t \geq 0\}$   $\lambda$  parametrelili Poisson süreci olsun.  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t < \infty$  'ler geliş anlarıdır.  $\xi_t = n$  koşulu altında  $(0, t)$  aralığında  $t_1, t_2, \dots, t_n$  geliş anlarının ortak olasılık yoğunluk fonksiyonunu denklem (3.16)' da veriliyor.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n / \xi = n) = \frac{n!}{t^n} ; \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n \quad (3.16)$$

7.  $\lambda$  parametrelili Poisson sürecinde  $n$ . geliş anı  $n$  ve  $\lambda$  parametrelili gamma dağılımına sahiptir. Yani  $t_n$ ' in olasılık yoğunluk fonksiyonu denklem (3.17)' deki gibidir.

$$f_{t_n}(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(n)} ; \quad \lambda > 0, \quad x > 0 \quad (3.17)$$

8.  $\{\xi_t, t \geq 0\}$   $\lambda$  parametrelili Poisson süreci olsun.  $t_1 < t_2 < \dots$  ' ler geliş anlarıdır.  $t_1, t_2, \dots, t_n$  geliş anlarının ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu da denklem (3.18)' de verilmiştir.

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda^n e^{-\lambda x_n} ; \quad x_1 < x_2 < \dots < x_n \quad (3.18)$$

### 3.1.2 Geçiş oranları

Kabul edelim ki;

$$p_{ij}(0) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (3.19)$$

olsun. Burada  $\delta_{ij}$ 'e kronoker delta denir.

**Tanım 3.3:**  $p_{ij}(t)$ 'nin sıfır noktasında türevi varsa, yani;

$$p'_{ij}(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(h) - p_{ij}(0)}{h} \quad (3.20)$$

ise  $p'_{ij}(0) = a_{ij}$  'lere geçiş oranları denir.

Eğer  $i = j$  ise; yani  $a_{ii}$  'ye  $i$  durumunda kalma oranı,  $a_{ij}(i \neq j)$  'ye ise  $i$  durumundan  $j$  durumuna geçiş oranı denir (denklem (3.21)) ve bu oranlar denklem (3.22)'deki özellikleri sağlar. (İnal, 1988).

$$\Lambda = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

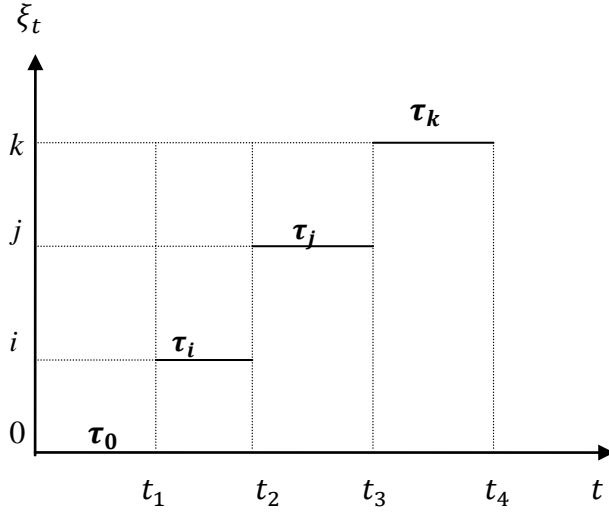
- 1)  $i \neq j$  için  $a_{ij} \geq 0$
  - 2)  $i = j$  için  $a_{ii} \leq 0$
  - 3)  $\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = 0$
- (3.22)

### 3.1.3 Markov zincirinin herhangi bir durumda oturma süresi

Markov zincirinin herhangi bir  $i$  durumunda oturma süresi ile ilgili aşağıdaki teorem verilir.

**Teorem 3.1:**  $\tau_i$  Markov zincirinin  $i$  durumunda oturma süresi olsun. Bu durumda  $\tau_i$  üstel dağılıma sahiptir.

**İspat.**  $t_1, t_2, \dots$  ler durum değiştirme anları olsun.



**Şekil 3.1.** Markov zincirinin oturma süreleri

$P(\tau_i > t + s / \tau_i > s)$  olasılığını göz önüne alalım. Markov zincirlerinin belleksizlik özelliğinden dolayı;

$$P(\tau_i > t + s / \tau_i > s) = P(\tau_i > t) \quad (3.23)$$

ve koşullu olasılıktan dolayı;

$$P(\tau_i > t + s / \tau_i > s) = \frac{P((\tau_i > t + s) \cap (\tau_i > s))}{P(\tau_i > s)} = \frac{P(\tau_i > t + s)}{P(\tau_i > s)} \quad (3.24)$$

yazılır. (3.23) ve (3.24) denklemlerinin eşitlenmesiyle;

$$P(\tau_i > t + s) = P(\tau_i > t) P(\tau_i > s) \quad (3.25)$$

elde edilir.  $F_i(t) = P(\tau_i \leq t)$  ve  $\Phi_i(t) = P(\tau_i > t)$  olarak alalım. Yukarıdaki (3.25) denklemini yeniden düzenlersek  $\Phi_i(t)\Phi_i(s) = \Phi_i(t + s)$  şeklinde yazılabilir.  $\Phi_i(t + s)$  fonksiyonu türevlenebilir olsun.

$$\begin{aligned} \Phi_i(t + s) - \Phi_i(t) &= \Phi_i(t)\Phi_i(s) - \Phi_i(t) \\ &= \Phi_i(t)(\Phi_i(s) - 1) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Denklem (3.26) s 'ye bölüp limite geçilirse;

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi_i(t+s) - \Phi_i(t)}{s} = \Phi_i(t) \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\Phi_i(s) - 1)}{s}$$

$$\Phi_i(0) = 1 - P(\tau_i < 0) = 1 - P(\emptyset) = 1 - 0 = 1 \quad (3.27)$$

$$\Phi'_i(t) = \Phi_i(t)\Phi'_i(0) \quad (3.28)$$

olur. Denklem (3.28)' den;

$$\Phi'_i(0) = \frac{\Phi'_i(t)}{\Phi_i(t)} = [\ln(\Phi_i(t))]' \quad (3.29)$$

eşitliği elde edilir. Denklem (3.29),  $[0, t]$  aralığında integrallenirse;

$$\ln \Phi_i(t) = \Phi'_i(0)t \quad \text{veya} \quad \Phi_i(t) = e^{\Phi'_i(0)t} \quad (3.30)$$

bulunur.  $F_i(t) = 1 - e^{\Phi'_i(0)t}$  ve  $\theta_i = -\Phi'_i(0)$  alındığında;

$$F_i(t) = 1 - e^{-t\theta_i}, \quad t > 0 \quad (3.31)$$

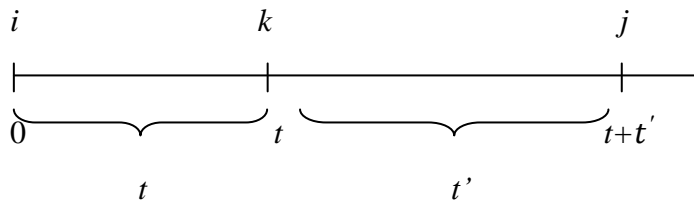
olduğu görülür. Sonuç olarak Markov sürecinin  $i$ . durumda kalma süresinin üstel dağılıma uyduğu görülür. Ayrıca beklenen değer ve varyans denklem (3.32) ve denklem (3.33)' deki gibidir.

$$E(\tau_i) = \frac{1}{\theta_i} \quad (3.32)$$

$$V(\tau_i) = \frac{1}{\theta_i^2} \quad (3.33)$$

### 3.1.4 Kolmogorov denklemleri

$t' \geq 0$  ve  $t \geq 0$  birbirini izleyen iki zaman aralığı olsun. Ayrıca  $\forall i, k, j \in E$  olsun.



$t + t'$  zaman aralığında  $i$  durumundan  $j$  durumuna geçiş olasılığı toplam olasılık formülüne göre denklem (3.34) ile denklem (3.35) elde edilir.

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t)p'_{kj}(0) = \sum_{k \in E} p_{ik}(t)a_{kj} \quad (3.34)$$

$$p'_{ij}(t') = \sum_{k \in E} a_{ik}p_{kj} \quad (3.35)$$

(3.34) ve (3.35) denklemlerine sırasıyla Kolmogorov'un *ileriye* ve *geriye doğru diferansiyel denklemleri* denir. denklem (3.34)' te başlangıç durumu dikkate alınmadığında;

$$p'_{ij}(t) = \sum_{k \in E} p_k(t) a_{kj} \quad (3.36)$$

denklemleri elde edilir.

### 3.1.5 Limit dağılımı

Sürekli parametrelili Markov zinciri indirgenemez ise  $t \rightarrow \infty$  için geçiş olasılıkları sabit bir değere yaklaşır. Bu sabit olasılık başlangıç durumuna bağlı değildir.  $\forall_i$  için;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t) = \pi_j \quad (3.37)$$

olur. Bu limit durumuna denge durumu (steady-state) denir. Elemanları  $\pi_j, j = 0, 1, 2, \dots$  olan vektörü  $P$  ile gösterelim. Buna göre;  $P = [\pi_0, \pi_1, \dots]$  olur.  $P$ 'ye limit dağılımı ya da limit olasılık dağılımı denir. denklemin (3.37)'nin her iki yanının  $t$ 'ye göre limitini alırsak;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p'_{ij}(t) = \sum_k \lim_{t \rightarrow \infty} \pi_{ik}(t) a_{kj} \quad (3.38)$$

$$\sum_k \pi_k a_{kj} = 0 \quad (3.39)$$

denklemleri elde edilir. Bu eşitlik kuyruk modellerinin kurulmasında temel bir ifadedir.





## 4. STOKASTİK KUYRUK SİSTEMLERİ

### 4.1. Kuyruk Sistemlerinin Genel Yapısı

D.Kendall (1953) çok servis biriminin olduğu kuyruk problemlerinde; geliş dağılımı, servis süresi dağılımı ve sistemde bulunan paralel servis sayısını tanımlamak üzere bir notasyon önermiştir.

A. Lee (1966) ise bu notasyona servis disiplini ve sistemde bulunan maksimum müşteri sayısını eklemiştir.

H. A. Taha (1968) da altıncı karakteristik olan geliş kaynağını notasyona katmıştır.

(a / b / c) : (d / e / f) ifadesini açıklayacak olursak:

a: Gelişler arası sürenin dağılım fonksiyonunu (geliş akımını) gösterir.

b: Hizmet süresinin dağılım fonksiyonunu gösterir.

c: Servis (hizmet) kanalı sayısını gösterir.

d: Hizmet disiplinini gösterir.

e: Sistemde (serviste ve kuyrukta) izin verilen çok müşteri sayısını gösterir.

f: Geliş kaynağının büyüklüğünü gösterir. (Halaç, 1988)

Kuyruk sistemleri; tek kanallı, paralel çok kanallı, fazlı, ardışık, paralel ve ardışık olabilirler. Tek kanallı servis sistemlerinde bir tane hizmet sağlayıcı vardır. Paralel çok kanallı servis sistemlerinde aynı hizmeti sağlayabilen birden fazla hizmet sağlayıcısı vardır.

Fazlı servis sistemlerindeki yapı çok çeşitli olmakla beraber diğer servis sistemlerinden en belirgin farkı servis sağlayıcılarının birim olarak adlandırılması ve bütün sistemde ünitelerden biri dolu ise sistemin meşgul olmasıdır. Ardışık servis sistemleri ise servis sağlayıcılarının ard arda sıralanmış olmasıdır. Paralel ve ardışık servis sistemleri servis sağlayıcıların hem paralel hem de devamında yeniden bir ya da birden fazla servis sağlayıcısının olmasıdır ve bu böyle devam edebilir.

**Tanım 4.1:** Paralel  $n$  kanallı bir kuyruk sisteminde müşterilerin sisteme geliş anları  $t_1, t_2, \dots, t_k$  olsun.  $t_k, k$ . müşterinin sisteme geliş anı olmak üzere  $T_k = t_k - t_{(k-1)}$  'lar ardışık iki müşteri arasındaki süreyi gösterebilir.

$T_k$  'lar tesadüfi değişkendir.  $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$  dizisine müşteri akımı (sisteme giriş akımı) denir.  $T_1, T_2, \dots, T_k$  'ların bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduğu varsayılır.  $T_1, T_2, \dots, T_k$  'ların dağılım fonksiyonunu  $P(T_i < t) = A(t)$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) ile gösterelim.  $A(t)$  keyfi ya da belirli bir olasılık fonksiyonu olabilir. Keyfi olduğunda giriş akımına recurrent akım denir ve  $G_1$  ile gösterilir.  $A(t)$  'nin verilmesi ile giriş akımı belirlenir.

**a.** Eğer  $A(t) = P(T_i < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ise buna Poisson akımı denir ve  $M$  ile gösterilir ( $M$ :Markovian)

**b.** Eğer  $T_i = D$  (sabit) ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) ise bu akıma Deterministik akım denir ve  $D$  ile gösterilir.

**c.**  $T_i = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_r$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) olmak üzere  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  'lar bağımsız ve aynı dağılıma sahip olsun.

$P(\eta_j < t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  ise bu akıma Erlang akımı denir ve  $E_r$  ile gösterilir.

**Tanım 4.2:** Sisteme gelen her bir müşteri belli bir zaman içerisinde hizmet alıyorsa bu zamana hizmet süresi denir. Sistemin belirlenebilmesi için hizmet süresinin dağılım fonksiyonunun verilmesi gerekir. Bu süre genellikle bir tesadüfi değişkendir.

$\xi_i$ ,  $i$ . müşterinin hizmet süresini göstermek üzere  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  'lar bağımsız tesadüfi değişkenler olup aynı dağılıma sahiptirler. Hizmet süresinin dağılım fonksiyonu  $P(\xi_i < t) = B(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ile gösterilsin,  $B(t)$  keyfi olduğunda hizmet süresi  $G$  ile gösterilir.  $B(t)$ 'nin verilmesi ile hizmet süresi belirlenir.

**a.** Eğer  $B(t) = P(\xi_i < t) = 1 - e^{-\mu t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$  ise buna Poisson akımı denir ve  $M$  ile gösterilir.  $B(t)$ 'nin verilmesi ile hizmet süresi belirlenir.

**b.** Eğer  $\xi_i = D$  (sabit) ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) ise bu akıma Deterministik akım denir ve  $D$  ile gösterilir.

**c.**  $\xi_i = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_r$ , ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) olmak üzere  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$  'lar bağımsız ve aynı dağılıma sahip olsun.

$P(\eta_j < t) = 1 - e^{-\mu t}$ ,  $t \geq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, r$  ise bu akıma Erlang akımı denir ve  $E_r$  ile gösterilir.

**Tanım 4.3:** Sisteme gelen müşteri talep ettiği hizmeti belli bir kurala göre almalıdır. Bu kurala hizmet disiplini denir. Çeşitli hizmet disiplinleri hizmet vermek için esas olarak kullanılmaktadır.

- a. FIFO (İlk gelen ilk hizmeti alır)
- b. LIFO (Son gelen ilk hizmeti alır)
- c. RANDOM (Tesadüfi olarak hizmet alınır)
- d. PRIORITY (Öncelikli hizmet)

Servis ve kuyruk kapasitesi, sistemde izin verilen en çok müşteri sayısını belirler. Bu sayı sonlu ya da sonsuz olabilir. Aksi belirtilmediği sürece geliş kaynağı büyüklüğü sonsuzdur.

## 4.2 Tek Kanallı Markovian Kuyruk Sistemleri ve Performans Ölçüleri

### 4.2.1 M/M/1 Sistemi ve analizi

Bu sistem üç elemanın verilmesiyle tanımlanır.

i) Müşterilerin sisteme geliş (varış) anları, bu anlar  $t_1, t_2, \dots$  tesadüfi değişkenleridir.

ii) Her bir müşterinin hizmet süresi  $\gamma$  tesadüfi değişkenidir ve bu değişken  $\mu$  parametrelili üstel dağılıma sahiptir.

iii) Hizmet sistemi bir tane hizmet verenden (kanaldan) oluşmuştur. Sistemin hizmet disiplini FIFO dur.  $\xi(t)$ ,  $t$  anında sistemde olan müşteri sayısı olduğunda  $\{\xi(t), t > 0\}$  ve durum uzayı  $E = \{0, 1, 2, \dots\}$  olan bir stokastik süreç olacaktır. Bu süreç  $P_k(t) = P(\xi(t) = k)$  sistemde  $t$  anında  $k$  tane müşteri olması olasılığıdır.  $P_k(t)$  olasılığını bulmak oldukça zordur. Fakat bu olasılık  $t \rightarrow \infty$  için  $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$  koşulu altında mevcuttur.

#### 4.2.1.1 M/M/1 Sisteminin performans ölçüleri

##### Sistemdeki ortalama müşteri sayısı

Sistemde  $n$  tane müşteri olması olasılığı  $P_n = \rho^n(1 - \rho)$  'dur. Sistemde herhangi bir anda beklenen müşteri sayısı ise denklem (4.1)' de verilmiştir.

$$E(N) = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (4.1)$$

### Kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısı

$M/M/1$  sisteminde kuyrukta bekleyen ortalama müşteri sayısını (4.2) veya (4.3) denklemleriyle elde edebiliriz.

$$E(N_q) = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad (4.2)$$

$$E(N_q) = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho \quad (4.3)$$

### Bir müşterinin sistemde ve kuyrukta ortalama bekleme süresi

$W$  : Bir müşterinin sistemde bekleme süresi

$W_q$ : Bir müşterinin kuyrukta bekleme süresi

olsun.  $E(W)$  ' yi bulabilmek için önce  $W$  ' nin yoğunluk fonksiyonunu bulmalıyız. Çünkü  $W$  sürekli bir tesadüfi değişkendir.  $f_w(x)$  ,  $W$  ' nin yoğunluk fonksiyonu olsun.

$f_w(x / N = n)$ , sistemde  $n$  tane müşteri olduğu bilindiğine göre bir müşterinin bekleme süresini bulmak için aşağıdaki denklemleri incelemek gerekir.

$$f_w(x / A) = \frac{f_w(x)}{P(A)} \quad (4.4)$$

$$W = \eta'_1 + \eta_2 + \dots + \eta_n + \eta_{n+1} \sim t_{n+1} \quad (4.5)$$

$(t_{n+1})$ . sıçrayış anlarının dağılım fonksiyonu ile  $W$  ' nun dağılım fonksiyonu benzerdir. Burada;  $\eta'_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+1}$  bağımsızdır, ancak dağılımları aynıdır ve üstel dağılmış tesadüfi değişkenlerdir.

$$f_w(x / N = n) = f_{t_{n+1}}(x) = \frac{\mu(\mu x)^n}{n!} e^{-\mu x} \quad (4.6)$$

Sistemde  $n$  tane müşterinin olduğu bilindiğine göre  $(n+1)$ . müşterinin beklemesinin olasılık fonksiyonu toplam olasılık formülüne göre aşağıdaki gibidir.

$$f_w(x) \begin{cases} (\mu - \lambda) e^{-(\mu-\lambda)x} & , x \geq 0 \\ 0 & , d. d. \end{cases} \quad (4.7)$$

Sistemde bekleme süresinin ortalaması ise denklem (4.8)' de verilmiştir.

$$E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda} \quad (4.8)$$

Bir müşterinin sistemde bekleme süresi  $W = W_q + \frac{1}{\mu}$  ise, bir müşterinin kuyrukta ortalama bekleme süresi;

$$E(W_q) = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} \quad (4.9)$$

olur.

#### 4.2.2 $M/M/c$ Sistemi ve analizi

Bu sistem sonsuz müşteri kaynaklı Poisson geliş akımlı  $c$  kanaldan oluşmuş her bir kanaldaki müşterinin hizmet süreleri üstel dağılıma uymaktadır. Sistem ilk gelene ilk hizmet disiplini ile çalışır. Müşteri sisteme geldiğinde kanalların tümü de doluyrsa hizmet almak için bekleme hattına girer.

##### 4.2.2.1 $M/M/c$ Sisteminin performans ölçüleri

###### Sistemdeki ortalama müşteri sayısı

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı;

$$E(N) = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} p_0 + \rho \quad (4.10)$$

olarak elde edilir.

###### Bir müşterinin sistemde ve kuyrukta ortalama bekleme süresi

Müşterinin kuyruktaki ortalama bekleme süresi;

$$E(W_q) = \frac{\mu \rho^n}{(n-1)!(n\mu - \lambda)^2} p_0 \quad (4.11)$$

olur.

Müşterinin sistemdeki ortalama bekleme süresi ise denklem (4.12)' de verilmiştir.

$$E(W) = E(W_q) + \frac{1}{\mu} = \frac{\mu \rho^n}{(n-1)!(n\mu - \lambda)^2} p_0 + \frac{1}{\mu} \quad (4.12)$$

#### 4.2.3 $M/M/c/0$ Sistemi

Bu sistemde  $c$  tane kanaldan herhangi biri ya da daha fazlası boş ise, müşteriler hizmet alırlar. Aksi halde  $c$  kanalın bütünü de dolu ise hizmet almadan sistemi terk ederler (beklemelerine müsaade edilmez). Sistem dolu olduğunda,  $(c+1)$ . ve daha sonraki müşteriler hizmet almadan geri dönerler.

#### 4.2.3.1 $M/M/c/0$ Sisteminin performans ölçüleri

##### Sistemdeki ortalama müşteri sayısı

Sistemdeki ortalama müşteri sayısı denklem (4.13)' te verilmiştir.

$$E(N) = \rho(1 - P_c) \quad (4.13)$$

##### Bir müşterinin sistemde ve kuyrukta ortalama bekleme süresi

Sistem dolu olduğunda  $(c+1)$ . ve daha sonraki müşteriler hizmet almadan geri döndüğünden kuyruk uzunluğu ve kuyruktaki ortalama müşteri sayısı sıfırdır. Çünkü müşterilerin beklemesine müsaade edilmez. Dolayısıyla müşterinin kuyruktaki ortalama bekleme süresi;

$$E(W_q) = 0 \quad (4.14)$$

olur.

Sistemdeki ortalama bekleme süresi ise;

$$E(W) = \frac{\rho(1-P_c)}{\lambda(1-P_c)} = \frac{1}{\mu} \quad (4.15)$$

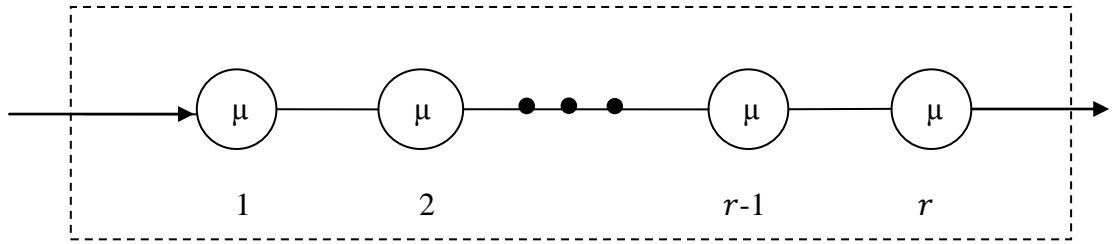
şeklindedir. (Little, 1961).

## 5. FAZ TİPİ DAĞILIMLAR

Faz tipi dağılımlar birden çok faz veya hizmet verenden oluşmakta ve fazların herhangi biri dolu olduğunda sisteme müşteri girememektedir. Bu faz tipi dağılımlar seri, paralel veya ikisi birlikte olabilir.

### 5.1. Erlang – r Dağılımı

Erlang-r dağılımı  $E_r$  ile gösterilir. Bir  $E_r$  dağılımını bağımsız  $r$  tane ve her biri  $\mu$  parametrelili üstel dağılıma sahip fazlar olarak aşağıdaki şekilde gösterebiliriz. Burada her bir fazda tek bir hizmet veren bulunmaktadır. Dolayısıyla böyle bir sisteme giren müşteri  $r$  tane fazdan ard arda hizmet alarak sistemi terk eder. Burada  $\forall r \in \mathbb{Z}^+$  olur.



Şekil 5.1. Tandem’de  $r$  tane üstel hizmet fazı

Bunu analiz etmek için müşterinin  $i$ . fazda harcadığı zaman, olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f_Y(y) = \mu e^{-\mu y}$  olan bir kitleden çekilmiş olsun ( $y \geq 0$ ). Böylece her bir faz için beklenen değer ve varyans denklem (5.1) ve denklem (5.2)’de verildiği gibi olur.

$$E(\eta) = 1/\mu \quad (5.1)$$

$$\sigma_\eta^2 = 1/\mu^2 \quad (5.2)$$

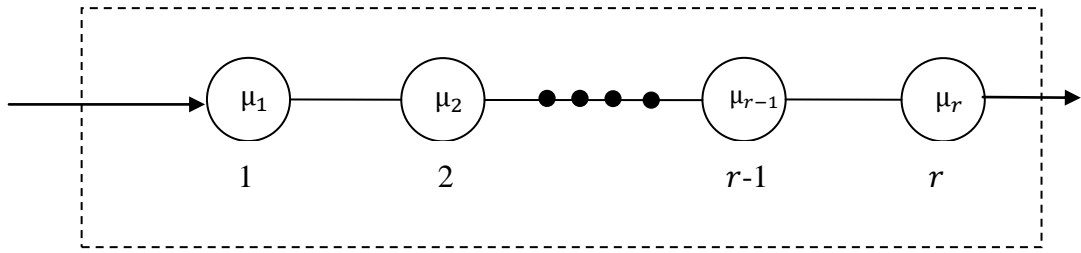
Sistemdeki hizmetlerde harcanan toplam zaman  $r$  tane bağımsız aynı dağılmış rasgele değişkenlerin toplamından, tüm hizmetin beklenen değer ve varyansı bir müşteriden denklem (5.3) ile denklem (5.4)’deki gibi elde edilir.

$$E(\xi) = r \left( \frac{1}{\mu} \right) = \frac{r}{\mu} \quad (5.3)$$

$$\sigma_{\xi}^2 = r \left( \frac{1}{\mu} \right)^2 = \frac{r}{\mu^2} \quad (5.4)$$

## 5.2 Hypoexponential Dağılım

Bu dağılımın Erlang-  $r$  dağılımından farkı her bir fazdaki hizmet süresinin dağılımı farklı parametrelili üstel dağılıma sahip olmasıdır. Yani  $i = 1, 2, \dots, r$  için her bir fazdaki ortalama hizmet süresi  $1/\mu_i$  dir. Yine, her bir müşteri  $r$  tane ardışık fazda hizmetini tamamlayarak bu sistemi terk eder. Bu müşterinin bu sistemde ki harcamış olduğu sürelerin dağılımı hypoexponential dağılıma uyar ve bu durum aşağıdaki şekilde gösterilir.



Şekil 5.2. Hypoexponential dağılım

Burada her bir fazdaki hizmet süresi bağımsız  $\xi_i \sim \exp(\mu_i)$  olmak üzere  $\xi = \sum_{i=1}^r \xi_i$  için  $\xi$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu denklem (5.5)'te şöyle veriliyor.

$$f_{\xi}(x) = \sum_{i=1}^r \alpha_i \mu_i e^{-\mu_i x} \quad , \quad x \geq 0 \quad (5.5)$$

Burada  $\alpha_i = \prod_{j=1, j \neq i}^r \frac{\mu_j}{\mu_j - \mu_i}$  dir.

$\xi$ 'in beklenen değer ve varyansı ise denklem (5.6) ve denklem (5.7)'deki gibidir.

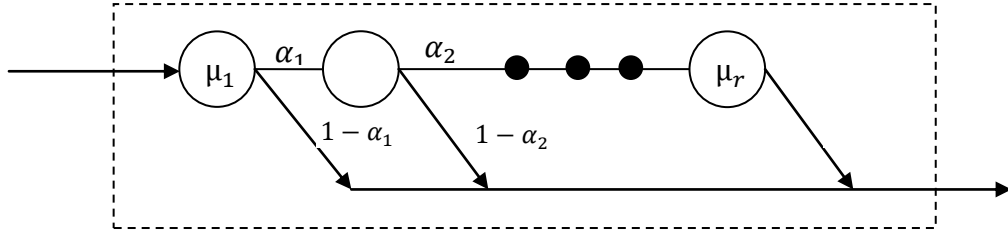
$$E[\xi] = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\mu_i} \quad (5.6)$$

$$Var[\xi] = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\mu_i^2} \quad (5.7)$$



### 5.3 Coxian Dağılımı

Bundan önceki faz tipi dağılımlarda müşteri sisteme girdiğinde hizmetini tamamlamadan sistemden çıkması mümkün değildi. Burada ise  $i$ . fazda hizmet tamamlandıktan sonra hizmete devam etmek için  $\alpha_i$  olasılığı ile  $(i + 1)$ . faza geçer.  $1 - \alpha_i$  olasılığı ile de hizmeti terk eder. Bir müşterinin böylesi bir sistemde harcamış olduğu sürelerin dağılımı Coxian dağılımı olarak adlandırılır. Bu model 1955 yılında Cox tarafından bulunduğundan, Cox ismine atfen bu şekilde adlandırılmıştır. Aşağıdaki şekilde Coxian dağılımına sahip bir sistem verilmiştir.



Şekil 5.3. Coxian dağılımı

Şekil 5.3’de görülüyor ki,  $p_1 = 1 - \alpha_1$  olasılıkla hizmetin ilk fazından sonra hizmet süreci biter,  $p_2 = \alpha_1(1 - \alpha_2)$  olasılıkla ilk iki hizmet fazı tamamlanır ve biter. Bu mantık doğrultusunda devam edersek, süreç sonlandırılmadan önce ilk  $k$  hizmet fazının tamamlanmasının olasılığı;  $p_k = (1 - \alpha_k) \prod_{i=1}^{k-1} \alpha_i$  olarak ortaya çıkar.

Coxian dağılımı  $r$  tane hipoüstel dağılım arasından olasılıksal bir seçenek olarak gösterilebilir.

Coxian rasgele değişkeninin beklenen değeri Şekil 5.3’den bulunabilir. Şekil 5.3’den biz ilk fazın her zaman gerçekleştiğini görebiliriz ve bu fazın beklenen değeri  $E[\xi_1] = 1/\mu_1$  olur. İkinci fazın beklenen değeri  $\alpha_1$  olasılıkla gerçekleşerek  $E[\xi_2] = 1/\mu_2$  olur ve bu şekilde devam eder.  $k > 1$  fazlar için beklenen değer  $E[\xi_k] = 1/\mu_k$  olur ki bunun gerçekleşme olasılığı  $\prod_{j=1}^{k-1} \alpha_j$ ’ dir. Toplam beklenen değerler bize Coxian-r dağılmış rasgele değişkenin beklenen değerini bulmamızı sağlar. Denklem (5.8).

$$E[\xi] = \frac{1}{\mu_1} + \frac{\alpha_1}{\mu_2} + \frac{\alpha_1\alpha_2}{\mu_3} + \dots + \frac{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{r-1}}{\mu_r} = \sum_{k=1}^r \frac{A_k}{\mu_k} \quad (5.8)$$

Bu durumda  $k > 1$  değerleri için  $A_k = \prod_{j=1}^{k-1} \alpha_j$  olur ve  $A_1 = 1$ 'dir. Bundan sonraki gösterimlerde  $r$  fazlı Coxian dağılımı  $Cox(r)$  ile gösterilecektir. Örneğin  $Cox(2)$ ; parametreleri  $\mu_1, \mu_2$  ve  $\alpha$  olan  $Cox(2)$  dağılmış tesadüfi değişken için beklenen değer ve varyans denklem (5.9) ve denklem (5.10).’da şöyle veriliyor.

$$E[\xi] = \frac{1}{\mu_1} + \alpha \frac{1}{\mu_2} = \frac{\mu_2 + \alpha\mu_1}{\mu_1\mu_2} \quad (5.9)$$

$$Var[\xi] = \frac{\mu_2^2 + \alpha\mu_1^2(2-\alpha)}{\mu_1^2\mu_2^2} \quad (5.10)$$

## 6. DÖNÜŞÜMLER

### 6.1 Laplace dönüşümü

**Tanım 6.1:**  $\xi$  pozitif değerler alan sürekli bir tesadüfi değişken ve bunun olasılık yoğunluk fonksiyonu  $f_\xi(x)$  olsun. Bununla birlikte  $s$  bir reel değişken olarak kabul edilsin. Bu durumda aşağıdaki integral tüm  $s$  reel değişkenleri için tanımlı ise;  $\mathcal{L}_x(s)$ ' ye  $f(x)$ ' in Laplace dönüşümü denir.

$$\mathcal{L}_x(s) \equiv \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (6.1)$$

Burada  $\mathcal{L}_x(s) \equiv E(e^{-s\xi})$  olarak verilebilir. Laplace dönüşümünün aşağıdaki özellikleri sağladığı gösterilebilir.

$$\text{i) } \mathcal{L}_x(s)|_{s=0} = 1 \quad (6.2)$$

$$\text{ii) } \frac{d}{ds} \mathcal{L}_x(s) \Big|_{s=0} = -E(\xi) \quad (6.3)$$

$$\text{iii) } \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}_x(s) \Big|_{s=0} = E(\xi^2) \quad (6.4)$$

Bunların en genel halini şu şekilde belirtebiliriz:

$$\frac{d^{(m)}}{ds^{(m)}} \mathcal{L}_x(s) \Big|_{s=0} = (-1)^m E(\xi^m) , \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+ \quad (6.5)$$

### 6.2 $z$ - Dönüşümü

$\xi$  pozitif değerler alan kesikli bir tesadüfi değişken olmak üzere,  $\xi$ ' in olasılık yoğunluk fonksiyonu tek türlü olarak bu fonksiyonun  $z$  dönüşümü ile belirlenir (aynı zamanda buna bu fonksiyonun üreten fonksiyonu da denir) ve denklem (6.6).’ daki gibi verilir.

$$P_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n , |z| \leq 1 , z \in \mathbb{C} ; P_n = P(\xi = n), n \geq 0 \quad (6.6)$$

Burada  $z$  kompleks değişken olup  $P_\xi(z)$  analitiktir. Başka bir deyişle bu toplam sonludur.

$z$  dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$i) |P_{\xi}(z)| \leq 1 \quad (6.7)$$

$$ii) P_{\xi}(1) = 1 \quad (6.8)$$

$$iii) P_{a+b\xi}(z) = E(z^{a+b\xi}) = z^a E(z^{b\xi}) \quad (6.9)$$

iv)  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  tesadüfi değişkenleri bağımsız iseler bu tesadüfi değişkenlerin toplamlarının  $z$  dönüşümü, bu tesadüfi değişkenlerin ayrı ayrı  $z$  dönüşümlerinin çarpımına eşittir. Yani  $\eta = \sum_{i=1}^n \xi_i$  olmak üzere;

$$P_{\eta}(z) = \prod_{i=1}^n P_{\xi_i}(z) \quad (6.10)$$

olur.

$$v) \frac{d^k P_{\xi}(z)}{dz^k} = E(\xi(\xi-1) \dots (\xi-k+1)) \quad (6.11)$$

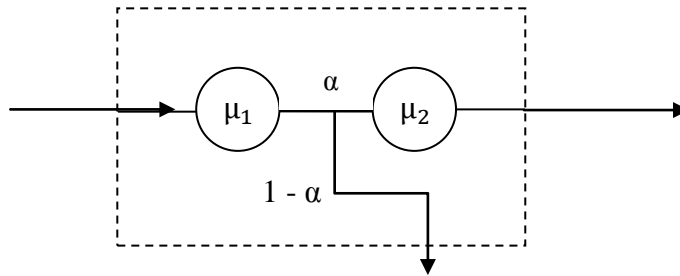
vi)  $z$  dönüşümü sürekli bir fonksiyondur. (Stewart, 2009)

## 7. İKİ AŞAMALI BİR COXIAN KUYRUK MODELİNİN OPTİMİZASYONU

Araştıracığımız model aşağıdaki gibi tanımlanıyor.

### 7.1 Stokastik Model

Geliş akımı  $\lambda$  parametresi ile ve hizmet parametreleri  $\mu_i (i = 1,2)$  ile üstel dağılıma uyan iki aşamalı bir Coxian kuyruk modeli dikkate alınıyor. Birinci ve ikinci aşama sırasıyla boş veya dolu olabilir, ancak bu sistemde aynı anda iki müşteriye müsaade edilmez. Herhangi bir  $t$  anında birinci fazın durumu  $\xi_t$  ile ikinci fazın durumu  $\eta_t$  ile gösteriliyor. Herhangi bir  $t$  anında  $\alpha$ 'ya göre sistemin boş ve dolu olma olasılıklarını, bu sisteme ait limit dağılımlarını, diferansiyel ve fark denklemlerini elde edebiliriz. Bu iki fazlı Coxian kuyruk modeli Şekil 7.1 yardımıyla gösteriliyor.



Şekil 7.1. İki fazlı Coxian kuyruk modeli

### 7.2 Limit Dağılımı

Burada  $\{(\xi_t, \eta_t), t \geq 0\}$  iki boyutlu sürekli parametrelili Markov zincirinin durum uzayı  $\Omega = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$ 'dir.

$$P_{ij}(t) = \text{Prob}\{\xi_t = i, \eta_t = j\} \quad \forall (i, j) \in \Omega \quad (7.1)$$

Bu olasılıklar için Kolmogorov diferansiyel denklemleri elde ediliyor.  $\{(\xi_t, \eta_t), t \geq 0\}$  sürecinin geçiş olasılıkları  $(t, t+h)$  aralığı için denklem (7.2); denklem (7.3) ve denklem (7.4) aşağıdaki gibi bulunuyor.

$$P_{00}(t+h) = (1 - \lambda h + o(h))P_{00}(t) + (1 - \alpha)(\mu_1 h + o(h))P_{10}(t) + (\mu_2 h + o(h))P_{01}(t) + o(h) \quad (7.2)$$

$$P_{01}(t+h) = (1 - \mu_2 h + o(h))P_{01}(t) + \alpha(\mu_1 h + o(h))P_{10}(t) + o(h) \quad (7.3)$$

$$P_{10}(t+h) = (1 - \mu_1 h + o(h))P_{10}(t) + (\lambda h + o(h))P_{00}(t) + o(h) \quad (7.4)$$

$h \rightarrow 0$  iken (7.2), (7.3) ve (7.4) eşitliklerini denklem (7.5), denklem (7.6); ve denklem (7.7)'daki gibi yeniden yazabiliriz.

$$P'_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) + (1 - \alpha)\mu_1 P_{10}(t) + \mu_2 P_{01}(t) \quad (7.5)$$

$$P'_{01}(t) = -\mu_2 P_{01}(t) + \alpha\mu_1 P_{10}(t) \quad (7.6)$$

$$P'_{10}(t) = -\mu_1 P_{10}(t) + \lambda P_{00}(t) \quad (7.7)$$

Ayrıca  $P_{ij}(t)$  nin limit dağılımının var olduğu varsayılıyor, yani;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \pi_{ij} \quad , \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P'_{ij}(t) = 0 \quad (7.8)$$

olarak limit dağılımı bu şekilde veriliyor. (D.Cross, 1998)

$\{(\xi_t, \eta_t), t \geq 0\}$  için denge-durumu denklemleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$$0 = -\lambda\pi_{00} + (1 - \alpha)\mu_1\pi_{10} + \mu_2\pi_{01} \quad (7.9)$$

$$0 = -\mu_2\pi_{01} + \alpha\mu_1\pi_{10} \quad (7.10)$$

$$0 = -\mu_1\pi_{10} + \lambda\pi_{00} \quad (7.11)$$

$$\sum \sum_{(i,j) \in \Omega} \pi_{ij} = 1 \quad (7.12)$$

### 7.3 Olasılık Fonksiyonu

$\rho_1 = \lambda/\mu_1$  ve  $\rho_2 = \lambda/\mu_2$  alalım. (7.12) koşulu altında (7.9), (7.10) ve (7.11) denklemlerini çözersek aşağıdaki iki boyutlu olasılık fonksiyonunu elde ederiz.

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{1+\rho_1+\rho_2\alpha} \quad , & (i,j) = (0,0) \\ \frac{\rho_2\alpha}{1+\rho_1+\rho_2\alpha} \quad , & (i,j) = (0,1) \\ \frac{\rho_1}{1+\rho_1+\rho_2\alpha} \quad , & (i,j) = (1,0) \\ 0 \quad , & d. d. \end{cases} \quad (7.13)$$

$\pi_0$  sistemde hiç müşteri olmaması olasılığını ve  $\pi_1$  de sistemde bir müşteri olması olasılığını gösterebilir. Burada  $\pi_0 = \pi_{00}$  ve  $\pi_1 = \pi_{01} + \pi_{10}$  olur.

## 7.4 Performans Ölçülerinin Bulunması

### 7.4.1 $z$ - Dönüşümünün Coxian kuyruk modelinde kullanılması

$\pi_k$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , dizisinin  $z$ - dönüşümü şöyle tanımlanıyor:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k, \quad (7.14)$$

Burada  $z$  kompleks değişken  $P(z)$  ise analitiktir yani  $\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k < \infty$  (Stewart,2009)

$$P(z) = \pi_0 + \pi_1 z = \frac{1+(\rho_1+\rho_2\alpha)z}{1+\rho_1+\rho_2\alpha} \quad (7.15)$$

$N$  tesadüfi değişkeni sistemdeki müşterilerin sayısı olsun. Ortalama müşteri sayısı:

$$E[N] = \left. \frac{d}{dz} P(z) \right|_{z=1} = \frac{\rho_1+\rho_2\alpha}{1+\rho_1+\rho_2\alpha} \quad (7.16)$$

olur.

İkinci ve daha yüksek momentler buna uygun olarak türev alınarak hesaplanabilir.  $z$  dönüşümünün  $k$ . türevinde  $z = 1$  alınarak  $k$ . faktöriyel momentler bulunur.

$$\lim_{z \rightarrow 1} P^{(k)}(z) = E[N(N-1) \dots (N-k+1)] \quad (7.17)$$

Böylece;

$$\begin{aligned} Var(N) &= E([N(N-1)] + E[N] - E^2[N]) \\ &= \frac{\rho_1+\rho_2\alpha}{(1+\rho_1+\rho_2\alpha)^2} \end{aligned} \quad (7.18)$$

bulunur.

### 7.4.2 Laplace Dönüşümünün Coxian kuyruk modelinde kullanılması

$W$  tesadüfi değişkeni sistemdeki herhangi bir müşterinin bekleme süresini gösterebilir.  $W$ ' nin Laplace dönüşümü denklem (7.19)' daki gibidir.

$$\mathcal{L}_W(s) = \frac{(1-\alpha)\mu_1}{\mu_1+s} + \frac{\alpha\mu_1}{\mu_1+s} \frac{\mu_2}{\mu_2+s} \quad (7.19)$$

Cox(2) için sistemdeki müşterinin ortalama bekleme zamanı (7.20)denkleminde veriliyor.

$$E[W] = \frac{\mu_2+\alpha\mu_1}{\mu_1\mu_2} \quad (7.20)$$

Denklem (7.19) kullanılarak da diğer momentler elde edilebilir. Örneğin;

$$Var[W] = \frac{\mu_2^2 + \alpha \mu_1^2 (2 - \alpha)}{\mu_1^2 \mu_2^2} \quad (7.21)$$

olur.

### 7.5 Performans Ölçülerinin Optimizasyonu

**Teorem 7.1:**  $\alpha = 1$  için ortalama müşteri sayısı,  $E[N]$ , maksimum olur.

*İspat :* Denklem (7.16)'yı denklem (7.22)'de tekrar yazalım.

$$\frac{1}{E[N]} = 1 + \frac{1}{\rho_1 + \rho_2 \alpha} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (7.22)$$

Ortalama müşteri sayısının tersinin,  $1/E[N]$ 'nin, minimum değeri ortalama müşteri sayısının,  $E[N]$ 'nin, maksimum değeridir.  $\alpha = 1$  için  $1/E[N]$  minimum olur. Başka bir ifadeyle ortalama müşteri sayısı  $\alpha = 1$  olasılığıyla maksimum olur.

$$\max_{0 \leq \alpha \leq 1} E[N] = \frac{\rho_1 + \rho_2}{1 + \rho_1 + \rho_2} \quad (7.23)$$

### 7.6 Kaybolma Olasılığı

$\Pi_{loss}$  sistemdeki müşterinin kaybolma olasılığı olsun. Bu bağlamda sistemde kuyruk olmadığı için kaybolma olasılığı denklem (7.24)'deki gibi hesaplanır.

$$\Pi_{loss} = \pi_{01} + \pi_{10} = 1 - \pi_{00} \quad \text{veya} \quad \Pi_{loss} = 1 - \frac{1}{1 + \rho_1 + \rho_2 \alpha} \quad (7.24)$$

### 7.7 Kanalların Optimal Sıralaması

$0 \leq \alpha \leq 1$  aralığını göz önüne alarak ilk fazın hizmet parametresi  $\mu_1$  ve ikinci fazın hizmet parametresi  $\mu_2$  'dir.  $\mu_1 \geq \mu_2$  için performans ölçüleri ve kaybolma olasılıkları  $\Pi_{loss}^{(1)}$  ile veriliyor. Benzer biçimde  $\mu_1 \leq \mu_2$  için de performans ölçüleri ve kaybolma olasılıkları da  $\Pi_{loss}^{(2)}$  ile veriliyor.

(7.24) denklemini kullanarak  $\Pi_{loss}^{(1)}$  ve  $\Pi_{loss}^{(2)}$  'yi denklem (7.25)' deki gibi yazabiliriz.

$$\Pi_{loss}^{(1)} = \frac{\rho_1 + \rho_2 \alpha}{1 + \rho_1 + \rho_2 \alpha}, \quad \Pi_{loss}^{(2)} = \frac{\rho_2 + \rho_1 \alpha}{1 + \rho_2 + \rho_1 \alpha} \quad (7.25)$$



Aşağıdaki teorem optimal sıralamayı veriyor.

**Teorem 7.2:** Bu sistemde ilk aşamanın parametresi ikinci aşamanın parametresinden büyükse; yani  $\mu_2 \leq \mu_1$  ise denklem (7.26) elde edilir.

$$\Pi_{loss}^{(1)} \leq \Pi_{loss}^{(2)} \quad (7.26)$$

*İspat:* Aşağıdaki denklem (7.27)'yi inceleyelim..

$$\mu_2 \leq \mu_1 \quad (7.27)$$

Denklem (7.27) aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir .

$$\rho_1 \leq \rho_2 \quad (7.28)$$

$$\rho_1(1 - \alpha) \leq \rho_2(1 - \alpha) \quad (7.29)$$

$$\rho_1 + \rho_2 \alpha \leq \rho_2 + \rho_1 \alpha \quad (7.30)$$

$$\frac{1}{\rho_2 + \rho_1 \alpha} \leq \frac{1}{\rho_1 + \rho_2 \alpha} \quad (7.31)$$

$$1 + \frac{1}{\rho_2 + \rho_1 \alpha} \leq 1 + \frac{1}{\rho_1 + \rho_2 \alpha} \quad (7.32)$$

$$\left[ \frac{1 + \rho_1 + \rho_2 \alpha}{\rho_1 + \rho_2 \alpha} \right]^{-1} \leq \left[ \frac{1 + \rho_2 + \rho_1 \alpha}{\rho_2 + \rho_1 \alpha} \right]^{-1} \quad (7.33)$$

Verilen denklemlerde görülüyor ki  $\mu_1 \geq \mu_2$  olduğunda ilk aşamanın kaybolma olasılığı ikinci aşamanın kaybolma olasılığından daha küçüktür.

## 7.8 Sayısal Örnek

İki jüri üyesinden oluşan bir mülakatta, adaylar sırasıyla birinci ve ikinci jüri üyesinin yapmış olduğu mülakata katılmak zorundadırlar. Adayın birinci jüri üyesinde başarılı olması olasılığı veya ikinci jüri üyesine geçmesi olasılığı  $\alpha$ ' dır. Birinci jüri üyesinde başarısız olması olasılığı veya sistemi terk etme olasılığı  $(1 - \alpha)$ ' dır. Adayların sınava gelişleri  $\lambda = 2,3$  parametresi ile Poisson akımına uyuyor ve hizmet parametreleri sırasıyla  $\mu_1 = 5,2$  ve  $\mu_2 = 3,2$  biçiminde olup sistemde beklemeye müsaade edilmiyor. Sistemimiz Cox(2) dağılımına uyum sağlıyor. Performans ölçüleri ve kaybolma olasılıkları  $\alpha$ ' nın farklı değerleri için hesaplanıp Çizelge 7.1.' deki gibi veriliyor. Mülakatta jüri üyelerinin yerleri değiştirilmesi durumundaki kaybolma olasılıkları ve performans ölçüleri  $\alpha$ ' nın farklı değerleri için hesaplanıp Çizelge 7.2.' deki gibi; mülakattaki hizmet parametrelerinin

$\mu_1 = \mu_2 = 4,2$  olduğu varsayıldığındaki kaybolma olasılıkları ve performans ölçüleri de  $\alpha$ 'nın farklı değerleri için hesaplanıp Çizelge 7.3.'deki gibi bulunuyor.

**Çizelge 7.1.**  $\mu_1 > \mu_2$  için performans ölçülerinin hesaplanması

| $\alpha$ | $\Pi_{loss}$ | $Max\{E(N)\}$ | $Var(N)$ | $E(W)$ | $Var(W)$ |
|----------|--------------|---------------|----------|--------|----------|
| 0,0      | 0.278        | 0.513         | 0.201    | 0.172  | 0.029    |
| 0,4      | 0.395        | 0.513         | 0.239    | 0.291  | 0.087    |
| 0,6      | 0.440        | 0.513         | 0.246    | 0.351  | 0.104    |
| 1,0      | 0.513        | 0.513         | 0.250    | 0.470  | 0.119    |

$\lambda = 2,3$  ;  $\mu_1 = 5,2$  ;  $\mu_2 = 3,2$  için sistemin performans ölçülerinin sayısal değerleri Çizelge 7.1.'de görülmektedir. Çizelgeyi incelediğimizde  $M / Cox(2) / 1$  sistemimizin  $\alpha = 0$  için  $M / M / 1 / 0$  sistemine dönüştüğünü;  $\alpha = 1$  için ise  $M / Hyp(2) / 1$  sistemine dönüştüğü görülür.

**Çizelge 7.2.**  $\mu_1 < \mu_2$  için performans ölçülerinin hesaplanması

| $\alpha$ | $\Pi_{loss}^{(2)}$ | $Max\{E(N)\}$ | $Var^{(2)}(N)$ | $E^{(2)}(W)$ | $Var^{(2)}(W)$ |
|----------|--------------------|---------------|----------------|--------------|----------------|
| 0,0      | 0,401              | 0,513         | 0,240          | 0,299        | 0,089          |
| 0,4      | 0,451              | 0,513         | 0,248          | 0,367        | 0,108          |
| 0,6      | 0,474              | 0,513         | 0,249          | 0,402        | 0,114          |
| 1,0      | 0,513              | 0,513         | 0,250          | 0,470        | 0,119          |

Mülakatta jürilerin yerlerinin değiştiği durumundaki sistemin performans ölçüleri Çizelge 7.2.'de sayısal olarak verilmektedir. Yine  $\alpha = 0$  ve  $\alpha = 1$  için  $M / Cox(2) / 1$  sistemimizin farklı sistemlere dönüştüğünü söylemek mümkündür. Çizelge 7.1. ve Çizelge 7.2. birlikte incelendiğinde  $\alpha < 1$  için hesaplanan performans ölçülerinin Çizelge 7.1.'de daha düşük olduğu, yani ilk durumun daha avantajlı olduğu sonucuna ulaşılır.

**Çizelge 7.3.**  $\mu_1 = \mu_2$  için performans ölçülerinin hesaplanması

| $\alpha$ | $\Pi_{loss}$ | $Max\{E(N)\}$ | $Var(N)$ | $E(W)$ | $Var(W)$ |
|----------|--------------|---------------|----------|--------|----------|
| 0,0      | 0.353        | 0.522         | 0.228    | 0.238  | 0.056    |
| 0,4      | 0.433        | 0.522         | 0.245    | 0.333  | 0.092    |
| 0,6      | 0.466        | 0.522         | 0.248    | 0.380  | 0.104    |
| 1,0      | 0.522        | 0.522         | 0.249    | 0.476  | 0.113    |

Çizelge 7.3. için kullanılan parametreler  $\lambda = 2,3$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = 4,2$ ' dir. Çizelge 7.3.' ün son satırına baktığımızda  $\alpha = 1$  için  $M / Cox(2) / 1$  sistemimiz  $M / E_2 / 1$  sistemine dönüşmüştür. Çizelge 7.1.' in performans ölçüleriyle Çizelge 7.3.' ün performans ölçülerini karşılaştırdığımızda ise yine Çizelge 7.1.' in daha avantajlı olduğu sonucuna ulaşılır.



## 8. SONUÇ VE TARTIŞMA

Tezin 1. bölümünde kuyruk sistemlerinin tarihi geçmişinden günümüze gelişimi ve çeşitli alanlardaki kullanımı ile ilgili kısaca bilgi verilmiştir.

2. bölümde ise kuyruk teorisinin temelini teşkil eden stokastik süreçlere ilişkin çeşitli tanım ve kavramlar verilmiştir.

3. bölümde Sürekli Parametrelili Markov Zincirleri, Poisson süreci ve özellikleri, geçiş oranları matrisi, Markov zincirinin herhangi bir durumda oturma süresinin üstel dağıldığı Teorem 3.1. yardımıyla verildi. Bununla birlikte Kolmogorov'un ileri ve geri denklemleri ile Limit dağılımı da verildi.

4. bölümde servis sistemlerinin genel yapısı, kuyruk notasyonu, disiplin türleri, seri ve paralel kanallı, açık ve kapalı kuyruk sistemlerinden bahsedilerek  $M / M / 1$  sisteminin performans ölçüleri bulundu.

5. bölümde faz tipi dağılım türlerinden bu tezde kullanılan Erlang –  $r$  dağılımı, Hypoexponential dağılım ve Coxian dağılımı şekiller yardımıyla anlatıldı.

6. bölümde Laplace ve  $z$  dönüşümleri kısaca tanıtıldı.

Tezin orijinal kısmını oluşturan iki aşamalı bir coxian kuyruk modeli analiz edilerek performans ölçüleri bulunmuş ve bir sayısal örnekle bulunan sonuçlar desteklenmiştir. Bulunan bu sonuçlar aşağıda sıralanmıştır.

*i)* Sistem analiz edilerek limit olasılıkları elde edildi ve üreten fonksiyon kullanılarak olasılık fonksiyonu bulundu.

*ii)* Sistemdeki ortalama müşteri sayısı ve herhangi bir müşterinin kaybolma olasılığı hesaplandı.

*iii)* Sistemdeki müşterilerin ortalama sayısının optimizasyonu Teorem 7.1 yardımıyla bulundu: Her iki sıralama için sistemdeki optimal ortalama müşteri sayısının  $Max\{E(N)\}$  olduğu ve Çizelge 7.1. ile Çizelge 7. 2' de aynı değerleri aldığı görüldü.

*iv)* Hizmet parametreleri için fazların optimal sıralaması Teorem 7.2 ile verildi: Teorem 7.2'nin sayısal sonuçları Çizelge 7.1. ve Çizelge 7.2.' de görülmektedir. İlk sıralamaya göre performans ölçülerinin daha optimal olduğu da tespit edilmiştir.

v) Sistemdeki bir müşterinin bekleme süresinin Laplace dönüşümü ve bu dönüşüm yardımıyla bu müşterinin bekleme süresinin ortalaması ve varyansı elde ediliyor.  $\alpha = 0$  için ortalama hizmet süresi minimum olmasına karşın,  $\alpha = 1$  için hizmet süresinin varyansı maksimum olur.

vi) Çizelge 7.1., Çizelge 7.2. ve Çizelge 7.3.' te konuyla ilgili sayısal örnek verilmiştir. Ayrıca bir müşterinin sistemi terk etme olasılığı ve hizmet parametrelerinin aynı veya farklı olması durumlarında analiz edilen bu sistemin farklı kuyruk sistemlerine dönüştüğü görülür.

vii)  $\alpha = 1$  ve  $\mu_1 = \mu_2$  için  $M / Cox(2) / 1$  sistemi  $M / E_2 / 1$  sistemine dönüşür. Bu durum Çizelge 7.3.'ün son satırında sayısal olarak da görülür.

viii)  $\alpha = 1$  ve  $\mu_1 \neq \mu_2$  için  $M / Cox(2) / 1$  sistemi  $M / Hyp(2) / 1$  sistemine dönüşür. Başka bir ifadeyle hizmet süresi hypoexponential dağılıma uyar. Bu durum sayısal olarak Çizelge 7.1 ve Çizelge 7.2. 'nin son satırlarında görülür.

ix)  $\alpha = 0$  için  $M / Cox(2) / 1$  sistemi  $M / M / 1 / 0$  sistemine dönüşür. Bu durum da sayılar olarak Çizelge 7.1., Çizelge 7.2 ve Çizelge 7.3' ün ilk satırlarında gösterilmiştir.

x)  $\alpha < 1$  için sıralamaya bağlı olarak Çizelge 7.1. ve Çizelge 7.2'de hesaplanan ortalama bekleme süresi, bekleme süresinin varyansı ve sistemdeki müşteri sayısının varyansı, ilk sıralama için daha düşüktür.

Bundan sonraki çalışmalar için faz sayılarının arttırılması tavsiye edilebilir.

## KAYNAKLAR

- Cox, D.R., 1955. A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes, Proc. Camb. Phil. Soc., 313-19.
- Stewart, W.J., 2009. Probability, markov chains, queues, simulation, New Jersey.
- Neuts, F. 1975. Probability distributions of phase type, in Liber Amicorum Professor Emeritus H.Florin, Department of Mathematics, University of Louvain, Louvain, Belgium 173-206.
- Bhat, U. N., 2008. An introduction to queuing theory, Boston,.
- Marie, R., 1980. Calculating equilibrium probabilities for  $\lambda(n)/C_k/1/N$  queues, *ACM Sigmetrics Performance Evaluation Review*, Vol. 9, No.2.
- Zobu, M., Sağlam, V., Sağır, M., Yücesoy, E., Zaman, T., 2013a. The simulation and minimization of loss probability in the tandem queueing with two heterogeneous channels, *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2013, Article ID 529010, pages 4.
- Zobu, M., 2013b Using sequential analysis for hypothesis tests in the phase-type distribution queueing systems, Ph.D. Thesis, Ondokuz Mayıs University, Samsun, Turkey.
- Papadopoulos, H.T., 1998. Analysis of production lines with coxian service times and no intermediate buffers, Department of Business Administration, pages 670-685.
- Khaniev, T., 2003, Markov zincirleri, KTÜ Matbaası, Trabzon.
- Hsu, H., 1996. Probability, random variables, & random processes, schaum's outline series, McGRAW-Hill.
- Grimmett, G.R., Stirzaker, D.R., 1992. Probability and random processes, Oxford University Press, Oxford.
- İnal, C., 1988. Olasılıksal süreçlere giriş, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, A/56, Ankara.
- Kendall, D.G., 1953. Some problems in the theory of queues, Journal of Royal Statistic Society.
- Lee , A., 1966. Applied queueing theory, Macmillan and Co., London.

- Taha, H.A., 1968. An introduction to operations research, Macmillan Publishing Co, New York.
- Little, J.D.C., 1961. A proof for the queueing formula :  $L = \lambda W$  , Oper. Res. 9, 383 – 387.
- Halaç, O., 1983. Kantitatif karar verme teknikleri, İstanbul Üniversitesi İşletme Fakültesi Yayın No: 3078/138, İstanbul.
- Gross, D., Harris, C.M., 1998. Fundamentals of queueing theory, Third Edition, John Wiley&Sons, New York.



## **ÖZGEÇMİŞ**

**Adı Soyadı :** Merve KÜNEFECİ

**Doğum Yeri ve Tarihi :** Kadıköy - 1987

**E-Posta :** mrv.ugurlu@gmail.com

**Lisans :** Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi - İstatistik Bölümü