T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

T-GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜMLENMİŞ MODÜLLER

DOKTORA TEZİ

Berna KOŞAR

Matematik Anabilim Dalı

ŞUBAT 2014
SAMSUN

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

T-GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜMLENMİŞ MODÜLLER

DOKTORA TEZİ

Berna KOŞAR
(08210512)

Tezin Savuma Tarihi : 14.02.2014

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Celil NEBİYEV

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Berna KOŞAR Tarafından Hazırlanan

T-GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜMLENMİŞ MODÜLLER

başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 14/02/2014 tarihinde yapılan sınav ile DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	**:**	**Prof. Dr. Ali PANCAR** Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Jüri Üyeleri	**:**	**Prof. Dr. Ali Bülent EKİN** Ankara Üniversitesi
		Prof. Dr. Şenol EREN Ondokuz Mayıs Üniversitesi
		Doç. Dr. Hamza ÇALIŞICI Ondokuz Mayıs Üniversitesi
		Yrd. Doç. Dr. Celil NEBİYEV Ondokuz Mayıs Üniversitesi

14/02/2014

Prof. Dr. Recep TAPRAMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Aydınlık ve üretken bir dünya için bilime olan inancımla, öncelikle bana bu problemi veren ve öngörüleriyle yol gösteren danışmanım sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Celil NEBİYEV'e, karşılaştığım sorunların çözümünde bilgi ve tecrübesinin yanısıra ilgisini hiç bir zaman esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Ali PANCAR'a, yoğun çalışmalarına rağmen gelerek bizi onurlandıran ve katkılarını sunan sayın hocam Prof. Dr. Ali Bülent EKİN'e, tez çalışmalarımı özenle inceleyerek önerileriyle yönlendiren sayın hocam Doç. Dr. Hamza ÇALIŞICI'ya ve katkılarından dolayı sayın hocam Prof. Dr. Şenol EREN'e teşekkürü bir borç bilirim.

Tezin gözden geçirilmesindeki emeklerinden dolayı sevgili arkadaşlarım Burcu NİŞANCI ve Ergül TÜRKMEN'e, ilgi ve alakalarını eksik etmeyerek her zaman desteklerini hissettiğim hocalarıma ve eşime, paylaştığımız tüm zamanı umuda dönüştüren ailemin birer ferdi olarak gördüğüm Serpil ve Tevfik ŞAHİN' e, Hatice MUTİ' ye teşekkür ederim.

Çağdaş ve demokratik bir toplum için eleştirel düşünceyi yaşam felsefesi olarak benimseten hayattaki en büyük şansım olan aileme bugüne kadarki sabır ve hoşgörülerinden dolayı en içten teşekürlerimi sunarım.

Şubat 2014 Berna KOŞAR

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

KISALTMALAR

$\boldsymbol{R}$	: Birimli halka
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: Tamlık bölgesinin kesir cismi
$\varnothing$	: Boş küme
$\subseteq$	: Alt küme
$\subset$	:Öz alt küme
$\leq$	: Alt modül
$<$	: Öz alt modül
$<<$	: Küçük alt modül
$\boldsymbol{1_R}$	: R halkasının birimi
$\boldsymbol{0_R}$	: R halkasının sıfırı
$\boldsymbol{a \mid b}$	: a, b yi böler
$\boldsymbol{a \nmid b}$	: a, b yi bölmez
$\boldsymbol{S^{-1}R}$	: R halkasının S çarpımsal alt kümesine göre kesirler halkası
$\boldsymbol{K(R)}$	: Bir R tamlık bölgesinin kesir cismi
(A)	: Bir A kümesi tarafından üretilen ideal
(a)	: Bir R halkasında a elemanı tarafından üretilen esas ideal
$\langle \boldsymbol{X} \rangle$	: X kümesi tarafından üretilen alt modül
$\boldsymbol{{}_R R}$	: R sol R-modülü
$\boldsymbol{R_R}$	: R sağ R-modülü
$\boldsymbol{Rm = \langle m \rangle}$	: Bir $m \in M$ elemanı tarafından üretilen devirli alt modül
$\boldsymbol{\sum_{i \in I} M_i}$	: Bir M modülünün $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin toplamı
$\boldsymbol{\prod_{i \in I} M_i}$	: $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin direkt çarpımı
$\boldsymbol{\bigoplus_{i \in I} M_i}$	: Bir M modülünün $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin (iç) direkt toplamı
$\boldsymbol{\bigoplus'_{i \in I} M_i}$	: Bir M modülünün $\{M_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin dış direkt toplamı
Gör f	: Bir f homomorfizmasının görüntü kümesi
Çek f	: Bir f homomorfizmasının çekirdeği
$\boldsymbol{End(M)}$	: M modülünün endomorfizmalarının halkası
$\cong$	: İzomorfizma
$\boldsymbol{i}$	: İçerme fonksiyonu
$\boldsymbol{p}$	: Doğal homomorfizma
$\boldsymbol{\pi_j}$	: j. projeksiyon (izdüşüm epimorfizması)

$\boldsymbol{\varepsilon_j}$: j. injeksiyon (gömme monomorfizması)

$\boldsymbol{I_M}$: M modülünün birim homomorfizması

$\boldsymbol{M/N}$: M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü

$\boldsymbol{F(R)}$: R tamlık bölgesinin sıfırdan farklı tüm kesirsel ideallerinin kümesi

$\boldsymbol{T(M)}$: M modülünün torsion (burulma) alt modülü

$\boldsymbol{T_p(M)}$: M modülünün P- asıl bileşeni

$\boldsymbol{M^{(I)}}$: M modülünün I indis kümesine göre kopyalarının toplamı

$\boldsymbol{RadM}$: M modülünün radikali

$\boldsymbol{P(M)}$: M modülünün tüm radikal alt modüllerinin toplamı

T-GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜMLENMİŞ MODÜLLER

ÖZET

Bu doktora tezinde, bir modülün parçalanışının genelleştirilmesi olarak tümleyen alt modüller yardımıyla alt modüllerin t-toplamı ve modüllerin t-toplam terimleri ile t-ayrışımı tanımlandı. Alt modüllerinin t-toplamı olan her π-projektif modül aynı alt modüllerinin direkt toplamıdır. M modülü $\{U_i\}_{i\in I}$ alt modüller ailesinin t-toplamı ise, $RadM = \sum_{i\in I} RadU_i$ dir. T-toplam terimleri kullanılarak (güçlü) t-radikal tümlenmiş modüller tanımlandı ve bu modülerin bazı temel özellikleri verildi. T-radikal tümlenmiş modüllerin her sonlu toplamı t-radikal tümlenmiştir. Küçük radikale sahip her güçlü t-radikal tümlenmiş modül tümlenmiştir. Bu çalışmada ayrıca (dual sonlu) t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüller tanımlandı. Bir dağılımlı t-genelleştirilmiş tümlenmiş modülün her bölüm modülü t-genelleştirilmiş tümlenmiştir. Dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüllerin herhangi direkt toplamı dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiştir. Birimli bir R halkasının yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her serbest sol R-modülün dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş olmasıdır.

Anahtar Kelimeler: (Genelleştirilmiş) Tümleyen, (Genelleştirilmiş) Tümlenmiş Modül; T-Toplam; T-Ayrışım; (Güçlü) T-Radikal Tümlenmiş Modül; (Dual sonlu) T-Genelleştirilmiş Tümlenmiş Modül.

T-GENERALIZED SUPPLEMENTED MODULES

ABSTRACT

In this dissertation, t-sum of submodules, t-sum terms of modules and t-decompositions are defined as a generalization of a decomposition of a module using supplement submodules. Every π-projective module that is a t-sum of submodules is identical to the direct sum of same submodules. If a module M is a t-sum of a family $\{U_i\}_{i\in I}$ of submodules, then $RadM = \sum_{i\in I} RadU_i$. T-summand are used to define (strongly) t-radical supplemented modules, and some basic properties of such modules are given. Every finite sum of t-radical supplemented modules is t-radical supplemented. Every strongly t-radical supplemented module having small radical is supplemented. Also in this dissertation (cofinitely) t-generalized supplemented modules are defined. Every factor module of a distributive t-generalized supplemented module is t-generalized supplemented. Arbitrary direct sum of any cofinitely t-generalized supplemented modules is cofinitely t-generalized supplemented. A unital ring R is semi-perfect if and only if every free left R-module is cofinitely t-generalized supplemented.

Key Words: (Generalized) Supplement; (Generalized) Supplemented Module; T-Sum; T-Decomposition; (Strongly) T-Radical Supplemented Module; (Cofinitely) T-Generalized Supplemented Module.

1. GİRİŞ

Her abel grup bir $\mathbb{Z}$-modül, herhangi bir R halkası, üzerindeki çarpma işlemine göre sol R-modül ve F cisim olmak üzere her V (sol) F-vektör uzayı bir sol F-modül olduğundan modül teorisi oldukça geniş araştırma ve uygulama alanına sahiptir. Özellikle, bir modülün alt modüllerini çalışmak ideal teorisini çalışmak anlamına gelmektedir. Günümüze kadar bu konuyla ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır.

R birimli bir halka ve M bir üniter sol R-modül olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V = 0$ ise, M modülüne U ve V alt modüllerinin direkt toplamı denir ve $M = U \oplus V$ ile gösterilir. U ve V alt modüllerine M nin direkt toplam terimleri ve $M = U \oplus V$ yazılışına da M nin bir parçalanışı denir. Direkt toplam teriminin bir genelleştirilmesi olarak tümleyen alt modüller tanımlanmıştır. $M = U + V$ ve $U \cap V << V$ ise, V alt modülüne U nun M modülünde tümleyeni denir. M modülünün her alt modülü bir tümleyene sahip ise, M modülüne tümlenmiş modül, M nin M/U bölüm modülü sonlu üretilmiş olan her U alt modülü M de tümleyene sahip ise, M modülüne dual sonlu tümlenmiş modül denir. Her tümlenmiş modül dual sonlu tümlenmiştir. M modülünün radikali $RadM$, M modülünde tümleyene sahip ise, M modülüne radikal tümlenmiş, M nin $RadM$ alt modülünü içeren her alt modülü tümleyene sahip ise, M ye güçlü radikal tümlenmiş modül denir. Dual sonlu tümlenmiş modüller güçlü radikal tümlenmiş modüllerin öz genellemesidir. M modülünün her alt modülü direkt toplam terimi olacak şekilde bir tümleyene sahip ise M modülüne $\oplus$-tümlenmiş modül denir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Genel bilgiler bölümünde bulgular kısmında kullanılacak tanım ve teoremlere yer verildi.

Materyal ve yöntem bölümünde (genelleştirilmiş) tümlenmiş modüllerin, güçlü $\oplus$-radikal tümlenmiş modüllerin ve (yarı-) mükemmel halkaların bazı özellikleri verildi.

Bulgular ve tartışma bölümü dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda bir modülün parçalanışı zayıflatılarak alt modüllerin t-toplamı ve modüllerin t-toplam terimleri ile t-ayrışımı tanımlandı. Alt modüller ailesinin t-toplamı olan her π-

projektif modülün aynı alt modüller ailesinin direkt toplamı olduğu Sonuç 4.1.5 de gösterildi. Teorem 4.1.13 de M modülü $\{U_i\}_{i\in I}$ alt modüller ailesinin t-toplamı ise, $RadM = \sum_{i\in I} RadU_i$ olduğu ispatlandı.

İkinci kısımda (güçlü) $\oplus$-radikal tümlenmiş modüller sınıfı ile (güçlü) radikal tümlenmiş modüller sınıfı arasında yer alan (güçlü) t-radikal tümlenmiş modüller tanımlandı. Bu kavramların öz olarak birbirlerini içerdiği örneklerle açıklandı. Önerme 4.2.11 de küçük radikale sahip her güçlü t-radikal tümlenmiş modülün tümlenmiş olduğu ispatlandı. Ayrıca t-radikal tümlenmiş modüllerin sonlu t-toplamlarının da t-radikal tümlenmiş olduğu gösterildi.

Üçüncü kısımda, genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş modüllerin genellemesi olarak t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüller tanımlandı. Bu modüllerin temel özellikleri verildi. Dağılımlı her t-genelleştirilmiş tümlenmiş modülün her bölüm modülünün t-genelleştirilmiş tümlenmiş olduğu ispatlandı. Sonlu üretilmiş t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüllerin tümlenmiş olduğu gösterildi.

Bulgular ve tartışma bölümünün son kısmında dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüller tanımlanarak bazı özellikleri verildi. (Dual sonlu) genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş olmayan (dual sonlu) t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül örneği verildi. Teorem 4.4.8 de bir R halkasının yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşulun her serbest sol R-modülün dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş olduğu ispat edildi.

1.1. Literatür Araştırması

Literatürde ilk E. Matlis'in (1958) " Injective modules over noetherian rings" adlı çalışmasında kullanmış olduğu injektif bürüm kavramını B. Eckmann ve A. Schopf (1953) "Über injective moduln" adlı çalışmalarında tanımlamışlardır. Bu kavramın duali olarak projektif örtü kavramını H. Bass (1960) "Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings" adlı çalışmasında vermiştir. Her modül injektif bürüme sahip olmasına karşın projektif örtüye sahip olmayabilir. H. Bass her (sonlu üretilmiş) sol modülü projektif örtüye sahip olan halkaları sol (yarı-) mükemmel halka olarak tanımlamıştır. E. A. Mares (1963) "Semi-perfect modules" adlı çalışmasında her bölüm modülü projektif örtüye sahip olan modülleri yarı-mükemmel olarak tanımlamıştır. F. Kasch ve E. A. Mares (1966) "Eine kennzeichonung semi-perfekter moduln” adlı çalışmalarında projektif bir modülün yarı mükemmel olması için gerek ve yeter koşulun o modülün tümlenmiş olması olduğunu göstermişlerdir. H. Zöschinger (1974-1986) yılları arasında tümlenmiş modülleri (lokal) Dedekind bölgeleri üzerinde inceleyerek karakterize etmiştir. Ayrıca tümlenmiş modüllerin bir genellemesi olarak radikal tümlenmiş modülleri tanımlamıştır. S. H. Mohamed ve B. J. Müller (1990) “Continuous and discrete modules” adlı kaynakta tümlenmiş modüllerin daha kuvvetli bir yapısı olan $\oplus$-tümlenmiş modülleri tanımlayarak temel özelliklerini vermişlerdir. W. Xue (1996) “Characterizations of semiperfect and perfect rings” adlı çalışmasında tümlenmiş modülleri genelleştirerek literatürde rad-tümlenmiş modül olarak da kullanılan genelleştirilmiş tümlenmiş modülleri tanımlamış ve bazı özelliklerini vermiştir. A. Harmancı, D. K. Tütüncü ve P. F. Smith (1999) “ On $\oplus$-supplemented modules” adlı çalışmalarında $\oplus$-tümlenmiş modüllerin özelliklerini geliştirmişlerdir ve sonlu sayıdaki $\oplus$-tümlenmiş modüllerin direkt toplamının da $\oplus$-tümlenmiş olduğunu göstermişlerdir. A. Idelhadj, R. Tribak (2003) “On some properties of $\oplus$-supplemented modules” adlı çalışmalarında $\oplus$-tümlenmiş modülleri irdelemişlerdir ve $\oplus$-tümlenmiş modülün bölüm modülünün $\oplus$-tümlenmiş modülün bölüm modülünün $\oplus$-tümlenmiş olmayabileceğini örneklemişlerdir. R. Alizade, G. Bilhan ve P. F. Smith (2001) “Modules whose maximal submodules have supplements” adlı çalışmalarında dual sonlu tümlenmiş modülleri tanımlayarak bir R halkasının yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşulun her R-modülün dual sonlu tümlenmiş olduğunu göstermişlerdir. H. Çalışıcı ve A. Pancar (2004) “$\oplus$-cofinitely supplemented modules” adlı çalışmalarında $\oplus$-dual sonlu tümlenmiş modülleri tanımlamışlardır ve keyfi sayıdaki $\oplus$-dual sonlu tümlenmiş modüllerin direkt toplamının da $\oplus$-dual sonlu tümlenmiş olduğunu göstermişlerdir. Y. Wang ve N. Ding (2006) “Generalized supplemented modules” adlı çalışmalarında genelleştirilmiş tümlenmiş modülleri incelemişlerdir. E. Büyükaşık ve C. Lomp (2008) “On a recent generalization of semiperfect rings” adlı çalışmalarında dual sonlu rad-tümlenmiş modülleri tanımlamışlardır. M. T. Koşan (2009) “Generalized cofinitely semiperfect modules” adlı çalışmasında dual sonlu rad-tümlenmiş modüllerin daha kuvvetli bir yapısı olan dual sonlu genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş modülleri tanımlayarak bazı özelliklerini vermiştir. H. Çalışıcı ve E. Türkmen (2010) “Generalized $\oplus$-supplemented modules” adlı çalışmalarında genelleştirilmiş $\oplus$-

tümlenmiş modüllerin sonlu direkt toplamının da genelleştirilmiş ⊕-tümlenmiş olduğunu göstermişlerdir. Y. Talebi ve A. Mahmoudi (2011) "On rad-⊕-supplemented modules" adlı çalışmalarında tamamen rad-⊕-s modülleri çalışmışlardır. Dağılımlı modüllerde rad-⊕-s modüllerin bölüm modüllerinin de rad-⊕-s olduğunu göstermişlerdir. E. Büyükaşık ve E.Türkmen (2011) "Strongly radical supplemented modules" adlı çalışmalarında radikal tümlenmiş modüllerden daha kuvvetli bir yapı olan güçlü radikal tümlenmiş modülleri tanımlamışlardır. B. Nişancı Türkmen ve A. Pancar (2013) "Generalizations of ⊕-supplemented modules" adlı çalışmalarında (güçlü) ⊕-radikal tümlenmiş modül kavramını tanımlayarak modülleri (güçlü) ⊕-radikal tümlenmiş olan halkaları araştırmışlar ve (lokal) Dedekind bölgeleri üzerinde yapılarını incelemişlerdir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Halkalar

Tanım 2.1.1. Boştan farklı bir R kümesi üzerinde tanımlı $"+"$ ve $"\cdot"$ ikili işlemleri ile beraber aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(R,+,\cdot)$ cebirsel yapısına **halka** denir.

H1) $(R,+)$ bir değişmeli gruptur,

H2) $(R,\cdot)$ bir yarı gruptur,

H3) $"\cdot"$ işleminin $"+"$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır (Hungerford, 1973).

$(R,+,\cdot)$ bir halka olsun. Bu takdirde $(R,+)$ bir grup olduğundan etkisiz elemanı vardır. Bu etkisiz elemana **halkanın sıfırı** denir ve $\mathbf{0}_R$ ile gösterilir. Eğer R halkasının $"\cdot"$ işlemine göre birim elemanı varsa R ye **birimli halka** denir ve çarpmaya göre birim elemanı $\mathbf{1}_R$ ile gösterilir. Eğer $(R,\cdot)$ yarı grubu değişmeli ise R halkasına **değişmeli halka** denir. Bu durumda her a, $b\in R$ için $ab=ba$ sağlanır. $R=\{0\}$ tek elemanlı bir halkadır. Bu halkaya **aşikar halka** denir (Hungerford, 1973).

Bu çalışmada bütün halkalar aşikar halkadan farklı kabul edilecektir. Ayrıca $(R,+,\cdot)$ halkası denildiğinde birimli halka anlaşılacak ve kısaca R ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2. R bir halka ve I, R halkasının boştan farklı bir alt kümesi olsun. I, R halkası üzerindeki işlemlere göre bir halka yapısına sahipse, I alt kümesine R halkasının bir **alt halkası** denir. I nın R halkasının bir alt halkası olması için gerek ve yeter koşul her $a,b\in I$ için $a-b\in I$ ve $ab\in I$ olmasıdır. I, R nin bir alt halkası olmak üzere her $r\in R$, her $a\in I$ için $ra\in I$ $(ar\in I)$ ise, I alt halkasına, R halkasının **sol (sağ) ideali** denir. I, R halkasının hem sol hem de sağ ideali ise, I ya, R halkasının **ideali** denir. R bir halka olmak üzere R nin $\{0_R\}$ ve R idealine

R nin **aşikar idealleri**, R nin kendisinden farklı bir idealine ise **öz ideali** denir. Her $a \in R$ için $Ra = \{ra \mid r \in R\}$, R halkasının bir sol ideali, $aR = \{ar \mid r \in R\}$, R halkasının bir sağ idealidir. Eğer R birimli ise, $a = 1_R a \in Ra$ ve $a = a1_R \in aR$ dir. A, R halkasının bir alt kümesi olsun. R de A yı kapsayan en küçük (sol, sağ) ideale A **tarafından üretilen (sol, sağ) ideal** denir ve (A) ile gösterilir. Bu durumda (A), R de A yı kapsayan tüm ideallerin arakesitidir. Eğer $A = \{a\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise A nın ürettiği ideale **esas (temel) ideal** denir ve (a) ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.3. R halkasında $0_R \neq r \in R$ elemanı için $rs = 0_R$ (veya $sr = 0_R$) olacak şekilde en az bir $0_R \neq s \in R$ elemanı bulunabiliyorsa $r \in R$ elemanına **sol (sağ) sıfır bölen eleman** denir. R halkası sol (sağ) sıfır bölen içermiyorsa R halkasına **sol (sağ) sıfır bölensiz halka** denir. Sol ve sağ sıfır bölensiz halkaya **sıfır bölensiz halka** denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.4. Birimli ve sıfır bölensiz bir R halkasına **bölge** denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Değişmeli R bölgesine **tamlık bölgesi** denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.5. Her ideali esas (temel) ideal olan değişmeli ve birimli bir R halkasına **esas (temel) ideal halkası** denir. Her ideali esas (temel) ideal olan bir tamlık bölgesine **esas (temel) ideal bölgesi** denir (Hungerford, 1973).

$0 \neq n \in \mathbb{Z}$ elemanı için $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ bölüm halkası esas ideal halkasıdır. $\mathbb{Z}$ tamlık bölgesi bir esas ideal bölgesidir.

Tanım 2.1.6. R bir halka ve $r \in R$ sıfırdan farklı bir eleman olsun. $rs = 1_R$ $(sr = 1_R)$ olacak şekilde bir $s \in R$ elemanı mevcut ise r elemanına, R halkasının **sağ (sol) terslenebilir elemanı** denir. Eğer r sağ ve sol terslenebilir ise, **terslenebilirdir** denir. R halkasının sıfırdan farklı her elemanı terslenebilir ise, R halkasına **bölme halkası** denir. Değişmeli bölme halkasına **cisim** denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.7. R bir halka ve I, R halkasının kendisinden farklı sol (sağ) ideali olsun. I, R den farklı herhangi bir sol (sağ) ideal tarafından içerilmiyorsa I ya R nin **sol (sağ) maksimal ideali** denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.1.8. R değişmeli bir halka ve P, R halkasının kendisinden farklı ideali olsun. a, $b \in R$ olmak üzere $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa, P idealine R halkasının **asal ideali** denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

P kümesinde yansıyan, ters simetrik ve geçişmeli bir $\leq$ bağıntısı verilmiş ise, $(P,\leq)$ çiftine **kısmi** (veya **parçalı**) **sıralı küme** denir. Her $p \in P$ için $a \leq p$ koşulu $a = p$ eşitliğini gerektirirse $a \in P$ elemanına P kümesinin **maksimal elemanı** denir (maksimal eleman tek olmak zorunda değildir). Kısmi sıralı $(P,\leq)$ kümesinin bir C alt kümesinde her $a,b \in C$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$ koşulu gerçeklenirse C ye **tam sıralı alt küme** veya **zincir** denir. $a \in P$ olsun. Her $c \in C$ için $c \leq a$ ise, a elemanına C nin **üst sınırı** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Lemma 2.1.9. (Zorn Lemması) Kısmi sıralı kümede her zincirin bir üst sınırı varsa, bu kümede en az bir maksimal eleman vardır (Hungerford, 1973).

Önerme 2.1.10 R halka olsun. R nin her öz sol (sağ) ideali bir maksimal sol (sağ) ideal tarafından kapsanır (Wisbauer, 1991).

2.2. Modüller

Tanım 2.2.1. R halkası ve $(M,+)$ abel grubu için $f: R\times M \to M$ fonksiyonu verilmiş olsun. $f(r,m)\in M$ elemanı rm ile gösterilsin. Her $r,s \in R$ ve her $m,n \in M$ için,

(i) $r(m+n) = rm + rn$

(ii) $(r+s)m = rm + sm$

(iii) $(rs)m = r(sm)$

ise, M ye bir **sol R-modül** denir ve $_R M$ veya sadece M ile gösterilir. Eğer her $m \in M$ için,

(iv) $1_R m = m$

ise, M ye bir **üniter sol R-modül** veya kısaca **üniter R-modül** denir (Hungerford, 1973).

Bu çalışmada bütün modüller üniter sol R-modül olarak alınacaktır.

M bir R-modül ise, $(M,+)$ abel grubunun birim elemanı genellikle 0_M veya 0 ile gösterilir. Eğer $M=\{0\}$ tek elemanlı ise, bu modüle **sıfır modül** adı verilir. Kısaca bu modül $\mathbf{0}$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.2.2. M bir R-modül ve $\varnothing \neq A \subseteq M$ olsun. Eğer A alt kümesi, M modülü ve R halkasındaki işlemlere göre kendi başına bir R-modül ise, A kümesine M modülünün bir **alt modülü** denir ve genellikle $\boldsymbol{A \leq M}$ ile gösterilir. M bir R-modül ve $\varnothing \neq A \subseteq M$ olmak üzere A kümesinin bir alt modül olması için gerek ve yeter koşul $\forall a,b \in A$ ve $\forall r \in R$ için $a-b \in A$ ve $ra \in A$ olmasıdır.

Bu tanıma göre 0 ve M nin kendisi M nin alt modülleridir. Bu alt modüllere M nin **aşikar alt modülleri** denir. M nin kendisinden farklı alt modüllerine ise, M nin **öz alt modülleri** denir. A, M nin bir öz alt modülü ise bu, $\boldsymbol{A < M}$ ile gösterilir. Ayrıca bir modülün bir takım alt modüllerinin arakesiti bir alt modüldür (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.3. M bir R-modül ve X, M nin bir alt kümesi olsun. M nin X i kapsayan bütün alt modüllerinin arakesitine X in **ürettiği alt modül** denir ve $\langle \boldsymbol{X} \rangle$ ile gösterilir. Eğer X sonlu elemanlı ise, X in ürettiği alt modüle **sonlu üretilmiş alt modül** ve $X=\{a\}$ şeklinde tek elemanlı ise, $\langle X \rangle = \langle a \rangle$ ya **devirli alt modül** denir.

Eğer $M=\langle X \rangle$ olacak şekilde M nin X sonlu alt kümesi varsa, M ye **sonlu üretilmiş *R*-modül,** $M=\langle a \rangle$ olacak şekilde $\exists\, a \in M$ varsa M ye ***a* tarafından üretilmiş devirli *R*-modül** denir (Hungerford, 1973).

$\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modülü sonlu üretilmiştir. Ancak $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$-modülü sonlu üretilmiş değildir. Boş kümenin ürettiği alt modülün sıfır olduğu açıktır. R sol R-modülü birim eleman tarafından üretilen devirli bir modüldür (Hungerford, 1973).

Teorem 2.2.4. M bir R-modül ve X, M nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu takdirde $\langle X \rangle = \{ r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n \mid r_i \in R,\ x_i \in X, i=1,2,...,n, n \in \mathbb{Z}^+ \}$ şeklindedir (Hungerford, 1973).

Sonuç 2.2.5. M bir R-modül ve X, M nin bir alt kümesi olsun. $X=\{a\} \subseteq M$ ise, $\langle X \rangle = \langle a \rangle = Ra$ dır.

Tanım 2.2.6. M bir R-modül ve $\{N_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $X=\bigcup_{i\in I} N_i$ olmak üzere X tarafından üretilen alt modüle $\{N_i\}_{i\in I}$ **ailesinin toplamı** denir ve $\langle X\rangle = \sum_{i\in I} N_i$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.2.7. M bir R-modül ve $\{N_i\}_{i\in I}$ M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\sum_{i\in I} N_i = \left\{ n_{i_1}+n_{i_2}+\cdots+n_{i_k} \mid i_j\in I,\, n_{i_j}\in N_{i_j},\, j=1,2,\ldots,k,\, k\in\mathbb{Z}^+ \right\}$ olur. Eğer I sonlu elemanlı ve $I=\{1,2,...,k\}$ ise bu toplam

$N_1+N_2+\cdots+N_k = \left\{ n_1+n_2+\cdots+n_k \mid n_i\in N_i,\ i=1,2,\ldots,k \right\}$

şeklindedir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.8. M bir R-modül ve N de M nin bir alt grubu olsun. M/N bölüm grubu $r\in R$, $m+N\in M/N$ olmak üzere, $r(m+N)=rm+N$ ile tanımlı dış işleme göre bir R-modül yapısına sahiptir. Bu M/N R-modülüne M nin N ye göre **bölüm modülü** adı verilir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.9. M sonlu üretilmiş R-modül olsun. Bu takdirde M nin her bölüm modülü sonlu üretilmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: M sonlu üretilmiş bir R-modül olduğundan $M=\langle x_1,x_2,\ldots,x_n\rangle$ olacak şekilde $\exists\ n\in\mathbb{Z}^+$ ve $\exists\ x_1, x_2,\ldots,x_n\in M$ vardır. Herhangi bir $N\le M$ ve herhangi bir $m+N\in M/N$ alalım. $m\in M$ ve $M=\langle x_1,x_2,\ldots,x_n\rangle$ olduğundan $m=r_1x_1+\cdots+r_nx_n$ olacak şekilde $\exists\ r_1, r_2,\ldots,r_n\in R$ vardır. Burada $m+N=(r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_nx_n)+N=(r_1x_1+N)+\cdots+(r_nx_n+N)=r_1(x_1+N)+\cdots+r_n(x_n+N)$ olup $M/N=\langle x_1+N,\ldots,x_n+N\rangle$ olur. O halde M/N bölüm modülü sonlu üretilmiştir.

Tanım 2.2.10. M bir R-modül ve $N\le M$ olsun. M/N bölüm modülü sonlu üretilmiş ise, N alt modülüne M nin **dual sonlu alt modülü** denir (Alizade ve ark., 2001).

M sonlu üretilmiş ise, Teorem 2.2.9 dan M nin her alt modülü dual sonludur.

Tanım 2.2.11. M bir R-modül ve $N < M$ olsun. M nin N yi kapsayan N den farklı bir öz alt modülü yoksa, N ye M nin **maksimal alt modülü** denir (Wisbauer, 1991).

Bir modülün birden fazla maksimal alt modülü olabilir. Örneğin, ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ modülünde her p asal sayısı için $p\mathbb{Z}$ alt modülleri birer maksimal alt modüldür. Buna karşılık maksimal alt modülü olmayan modüller de vardır. Örnek olarak $\mathbb{Q}$ sol $\mathbb{Z}$- modülü verilebilir.

Teorem 2.2.12. M bir R-modül ve N de M modülünün bir öz alt modülü olsun. Bu takdirde N öz alt modülünün maksimal olması için gerek ve yeter koşul $\forall m \in M - N$ için $N + \langle m \rangle = M$ olmasıdır (Kasch, 1982).

İspat: $(\Rightarrow)$ $\forall m \in M - N$ için $N \subset N + \langle m \rangle$, $N \neq N + \langle m \rangle$ ve N, M nin maksimal alt modülü olduğundan $N + \langle m \rangle = M$ olur.

$(\Leftarrow)$ $N \leq K$ ve $N \neq K$ olan herhangi bir K alt modülünü ele alalım. Eğer $K = M$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $N \neq K$ olduğundan $\exists m \in K - N$ vardır. Bu durumda $m \in M - N$ olup hipotez gereği $N + \langle m \rangle = M$ olur. Aynı zamanda $m \in K$ olduğundan $\langle m \rangle \leq K$ olup $M = N + \langle m \rangle \leq K$ olur. Dolayısıyla $K = M$ bulunur.

Tanım 2.2.13. R bir halka olsun. Sıfırdan farklı her sol R-modül bir maksimal alt modüle sahip ise R halkasına **sol Bass halka** denir (Clark ve ark., 2006).

Teorem 2.2.14. M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde $K \to K/N$ ile tanımlı M nin N yi kapsayan alt modülleri ile M/N nin alt modülleri arasında birebir bir eşleme yapılabilir. Böylece M/N nin her alt modülü, K, M nin N yi kapsayan alt modülü olmak üzere K/N şeklindedir. Ayrıca N yi kapsayan $K \leq M$ alt modülünün M de maksimal olması için gerek ve yeter koşul K/N nin M/N de maksimal olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.15. M sonlu üretilmiş R-modül olsun. Bu takdirde M nin her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanır (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: N, M nin herhangi bir öz alt modülü olsun. M nin N yi kapsayan öz alt modüllerin kümesini S ile gösterelim. $N \in S$ olduğundan $S \neq \varnothing$ dır. S kümelerdeki kapsama bağıntısına göre kısmi sıralı bir kümedir. K, S kümesinin boştan farklı bir zinciri olsun. K nın bütün elemanlarının birleşimini L ile gösterelim. K tam sıralı olduğundan K kümesinin elemanları kümelerdeki kapsama bağıntısına göre karşılaştırılabilir olup L, M nin bir alt modülüdür. Üstelik M sonlu üretilmiş olduğundan $M = Rm_1 + Rm_2 + \cdots + Rm_n$ olacak şekilde $m_1, m_2, ..., m_n \in M$ elemanları vardır. Eğer $L = M$ ise $\forall i = 1,2,...,n$ için $m_i \in L = \cup_{N' \in K} N'$ yazılır. Bu takdirde öyle $N' \in K$ vardır ki $\forall i = 1,2,...,n$ için $m_i \in N'$ olup $M = N'$ bulunur. Bu ise $N' \in K$ olması ile çelişir. O halde $L \neq M$ dir. Yani L, M modülünün bir öz alt modülüdür. L, K kümesinin S de bir üst sınırı olduğundan, Zorn Lemması gereğince S kümesi bir maksimal elemana sahiptir. Bu takdirde bu maksimal eleman M nin N öz alt modülünü kapsayan bir maksimal alt modülüdür.

Sonuç 2.2.16. M bir R-modül ve N, M nin kendisinden farklı dual sonlu alt modülü olsun. Bu takdirde N, M nin bir maksimal alt modülü tarafından kapsanır.

İspat: Teorem 2.2.15 gereğince M / N, bir K / N maksimal alt modülüne sahiptir. Teorem 2.2.14 gereğince K, M modülünün N alt modülünü kapsayan bir maksimal alt modülüdür.

Teorem 2.2.17. (Modüler kural) M bir R-modül, K, N ve H da M nin alt modülleri ve $H \subseteq N$ olsun. Bu takdirde, $(H+K) \cap N = H + (K \cap N)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: Herhangi $a \in (H+K) \cap N$ alalım. Bu durumda $a \in H+K$ ve $a \in N$ olur. $a \in H+K$ olduğundan $a = h+k$ olacak şekilde $\exists h \in H$ ve $\exists k \in K$ vardır. $H \subseteq N$ olduğundan $h \in N$ olur. Bu durumda $k = a-h$ ve $a \in N$, $h \in N$ olduğundan $k \in N$ olup $k \in K \cap N$ bulunur. Yani $h \in H$, $k \in K \cap N$ olup $a = h+k \in H + (K \cap N)$ bulunur. Bu durumda $(H+K) \cap N \subseteq H + (K \cap N)$ olur. Ayrıca, $H + (K \cap N) \subseteq H+K$ ve $H + (K \cap N) \subseteq N$ olduğundan $H + (K \cap N) \subseteq (H+K) \cap N$ olur. Dolayısıyla $(H+K) \cap N = H + (K \cap N)$ dir.

Tanım 2.2.18. M modülünün her K, L, N alt modülleri için, $N + (K \cap L) = (N+K) \cap (N+L)$ veya $N \cap (K+L) = (N \cap K) + (N \cap L)$ denk koşullarından biri sağlanıyorsa M modülüne **dağılımlıdır** denir (Mikhalev ve Tuganbaev, 1999).

Tanım 2.2.19. R tamlık bölgesi ve M bir R-modül olsun. $m \in M$ olmak üzere, sıfırdan farklı bir $r \in R$ için $rm = 0$ ise, m elemanına M modülünün **torsion (burulmalı) elemanı** denir. Eğer böyle bir r elemanı mevcut değil ise bu m elemanına M modülünün **burulmasız elemanı** denir. M nin torsion (burulmalı) elemanlarının kümesi $\boldsymbol{T(M)}$ ile gösterilir ve $T(M)$ M nin bir alt modülüdür. Burada $T(M)$ alt modülüne M nin **torsion (burulma) kısmı** denir. $T(M) = M$ ise M modülüne **torsion** (**burulmalı**) **modül** ve $T(M) = 0$ ise M modülüne **serbest torsion** (**burulmasız**) **modül** denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 2.2.20. R bir halka, $\varnothing \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer her $a, b \in S$ için $ab \in S$ ise S kümesine R nin **çarpımsal kapalı alt kümesi** denir. R tamlık bölgesi ve S, R nin $0_R \notin S$ olacak şekildeki çarpımsal kapalı alt kümesi olsun. Bu durumda $R \times S$ üzerinde her $(r,s),(r',s') \in R \times S$ için $(r,s) \sim (r',s') \Leftrightarrow (rs' - r's) = 0$ şeklinde tanımlanan "$\sim$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. $(r,s) \in R \times S$ elemanının denklik sınıfını $\frac{r}{s}$ ile $R \times S$ kümesinin "$\sim$" bağıntısına göre tüm denklik sınıflarının kümesini $S^{-1}R$ ile gösterelim. $\frac{r}{s}, \frac{r'}{s'} \in S^{-1}R$ keyfi elemanlar olmak üzere $\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs' + r's}{ss'}$ ve $\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r'}{s'}\right) = \frac{rr'}{ss'}$ ile tanımlı toplama $(+)$ ve çarpma $(\cdot)$ işlemlerine göre $S^{-1}R$ bir tamlık bölgesidir. $S^{-1}R$ halkasına R nin S ye göre **kesirler halkası** veya **bölümler halkası** denir. Eğer S, R nin sıfırdan farklı bütün elemanlarının kümesi ise, $S^{-1}R$ bir cisimdir. Bu cisme R tamlık bölgesinin **kesir cismi** veya **bölüm cismi** denir ve $\boldsymbol{K(R)}$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

$\mathbb{Z}$ tamlık bölgesinin kesir cismi $\mathbb{Q}$ dur ve $\mathbb{Q}$ sol $\mathbb{Z}$ modüldür.

Tanım 2.2.21. Bir R birimli ve değişmeli halkasının herhangi iki a ve b elemanı için $a \mid b$ veya $b \mid a$ ise, R halkasına **değerlendirme halkası** denir. Eğer R değerlendirme halkası tamlık bölgesi ise, R ye **değerlendirme bölgesi** denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.2.22. M bir R-modül ve $m \in M$ olsun. Sağ sıfır bölen olmayan her r elemanı için $m = rm_1$ olacak şekilde $m_1 \in M$ elemanı varsa $m \in M$ elemanına

bölünebilirdir denir. Eğer M nin her elemanı bölünebilir ise M ye **bölünebilir modül** denir. Bir başka ifadeyle R nin sağ sıfır bölen olmayan her r elemanı için $M = rM$ oluyorsa M ye **bölünebilir modül** denir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 2.2.23. R tamlık bölgesi ve $K(R)$, R nin kesir cismi olsun. $K(R)$ R-modülünün $\frac{b}{c}$ elemanı ile R nin a elemanının çarpımı $\frac{ab}{c}$ şeklindedir. F, $\exists\ 0_R \neq r \in R$ için $rF \subseteq R$ koşulunu sağlayan $K(R)$ R-modülünün bir alt modülü olsun. F ye R halkasının **kesirsel ideali** denir. F, R nin kesirsel ideali ise, $RF = F$ dir. R nin sıfırdan farklı tüm kesirsel ideallerinin kümesi $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{R})$ ile gösterilir. R nin idealleri birer kesirsel ideal olup **tam ideal** olarak adlandırılır. $I = rF$ ise, $I = rF \subseteq R$ olduğundan I, R nin bir idealidir. Ayrıca $I = rF$ ise, $F = \left(\frac{1_R}{r}\right) I$ şeklindedir (Larsen ve McCarthy, 1971).

Önerme 2.2.24. R tamlık bölgesi, F ve F' R nin kesirsel idealleri ise FF', R nin kesirsel idealidir (Larsen ve McCarthy, 1971).

İspat: $FF' = \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_i f_i' \;\middle|\; f_i \in F,\ f_i' \in F',\ i = 1,2,\ldots,n \text{ ve } n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesinin R nin kesirsel ideali olduğunu gösterelim. F ve F', R nin kesirsel ideali olduğundan $rF \subseteq R$ ve $sF' \subseteq R$ koşulunu sağlayan $0_R \neq r \in R$, $0_R \neq s \in R$ elemanları vardır. Buradan $(rs)FF' = (sr)FF' \subseteq s(rF)F' \subseteq sF' \subseteq R$ olacak şekilde $0_R \neq rs \in R$ elemanı var olduğundan FF', R nin kesirsel ideali bulunur.

Tanım 2.2.25. R tamlık bölgesi, F, R nin keyfi bir kesirsel ideali olsun. $FF' = R$ koşulunu sağlayan bir F' kesirsel ideali varsa F ye **terslenebilir kesirsel ideal** denir (Larsen ve McCarthy, 1971).

Tanım 2.2.26. Sıfırdan farklı her kesirsel ideali terslenebilir olan tamlık bölgesine **Dedekind bölgesi** denir (Larsen ve McCarthy, 1971).

Teorem 2.2.27. R tamlık bölgesi olsun. R nin Dedekind bölgesi olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her öz ideali R nin öz asal ideallerinin çarpımı olarak sıra gözetilmeksizin tek türlü olarak yazılabilmesidir (Larsen ve McCarthy, 1971).

Önerme 2.2.28. Her esas ideal bölgesi Dedekind bölgesidir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: $K(R)$, R nin kesir cismi ve F, R nin sıfırdan farklı bir kesirsel ideali olsun. Bu takdirde $rF \subseteq R$ koşulunu sağlayan $0_R \neq r \in R$ elemanı vardır. rF, R nin bir tam ideali ve R nin her ideali esas ideal olduğundan $rF = Ra$ olacak şekilde bir $0_R \neq a \in R$ elemanı vardır. $c = \frac{1_R}{a} \in K(R)$ elemanı için $F' = cR \subseteq K(R)$ dir. $FF' = R$ olduğundan F, R nin terslenebilir kesirsel idealidir. Dolayısıyla R Dedekind bölgesidir.

Teorem 2.2.29. R Dedekind bölgesi ve M burulmalı R-modül olsun. Γ, R nin tüm maksimal ideallerinin kümesi ve $P \in \Gamma$ olmak üzere $\exists\, n \geq 0$ tamsayısı için $P^n m = 0$ koşulunu sağlayan $m \in M$ elemanlarının kümesi $\boldsymbol{T_P(M)}$ ile gösterilir ve $T_P(M)$, M nin bir alt modülüdür. Bu alt modüle M modülünün $\boldsymbol{P}$**-asıl bileşeni** denir. Ayrıca $M = \bigoplus_{P \in \Gamma} T_P(M)$ dir (Cohn, 2002).

2.3. Homomorfizmalar ve İzomorfizma Teoremleri

Tanım 2.3.1. M ve N iki R-modül olsun. Eğer $f : M \to N$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa f ye bir $\boldsymbol{R}$**-modül homomorfizması** veya kısaca **homomorfizma** denir.

(i) Her $a, b \in M$ için, $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(ii) Her $a \in M$ ve her $r \in R$ için, $f(ra) = rf(a)$

$M = N$ ise f ye M nin bir **endomorfizması** denir ve M nin bütün endomorfizmalarının kümesi $\boldsymbol{End_R(M)}$ veya $\boldsymbol{End(M)}$ ile gösterilir. $End(M)$, fonksiyonlar üzerinde tanımlı toplama ve bileşke işlemine göre bir halka yapısına sahiptir.

Eğer f homomorfizması bire-bir ise f ye **monomorfizma,** örten ise **epimorfizma**, birebir ve örten ise **izomorfizma** denir. M ve N modülleri arasında en az bir izomorfizma varsa M ile N ye **izomorf modüller** denir ve $\boldsymbol{M \cong N}$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.3.2. Her $m \in M$ için $f(m) = 0_N$ ile tanımlı $f : M \to N$ fonksiyonu bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya **sıfır homomorfizma** denir ve genellikle **0** ile gösterilir. Her $m \in M$ için $g(m) = m$ ile tanımlı $g : M \to M$ fonksiyonuda bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya **birim homomorfizma** adı verilir ve genellikle $\boldsymbol{I_M}$ veya $\mathbf{1_M}$ ile gösterilir. M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Her $n \in N$ için $i(n) = n$ ile tanımlı $i : N \to M$ homomorfizması bir monomorfizma olup bu monomorfizmaya **içerme monomorfizması** denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.3.3. $f : M \to N$ bir homomorfizma olsun. $\{a \in M \mid f(a) = 0\}$ kümesine f nin **çekirdeği** denir ve ***Çek f*** ile gösterilir. $\{f(a) \mid a \in M\}$ kümesine de f nin **görüntüsü** denir ve ***Gör f*** ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Buna göre, $Çek\, f = \{a \in M \mid f(a) = 0\}$ ve $Gör\, f = \{f(a) \mid a \in M\}$ dir.

Teorem 2.3.4. M bir R-modül ve $K \leq M$ olsun. Bu takdirde $p : M \to M/K$, $a \to p(a) = a + K$ dönüşümü bir epimorfizmadır ve $Çek\, p = K$ dır.

Bu epimorfizmaya **doğal homomorfizma** veya **kanonik epimorfizma** adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.5. $f : M \to N$ bir R-modül homomorfizması, $K \leq M$ ve $S \leq N$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır.

(i) $f(K)$, $Gör\, f$ tarafından kapsanan N nin bir alt modülüdür. Buna göre $Gör\, f$ de N nin bir alt modülüdür.

(ii) $f^{-1}(S)$, $Çek\, f$ yi kapsayan M nin bir alt modülüdür. Buna göre $Çek\, f$, M nin bir alt modülüdür

(iii) $f^{-1}(f(K)) = K + Çek\, f$ dir. Eğer $Çek\, f \subseteq K$ ise, $f^{-1}(f(K)) = K$ dır.

(iv) $f(f^{-1}(S)) = S \cap Gör\, f$ dir. Eğer $S \subseteq Gör\, f$ ise, $f(f^{-1}(S)) = S$ dir (Kasch, 1982).

Önerme 2.3.6. M bir R-modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin K alt modülünü içeren M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\bigcap_{i \in I}(N_i / K) = \left(\bigcap_{i \in I} N_i\right)/K$ dır (Hungerford, 1973).

İspat: $a+K \in \bigcap_{i\in I}(N_i / K)$ olsun. Bu takdirde her $i \in I$ için $a+K \in N_i / K$ ve $a \in N_i$ dir. O halde $a+K \in \left(\bigcap_{i\in I} N_i\right)/K$ dır. Buradan $\bigcap_{i\in I}(N_i / K) \subseteq \left(\bigcap_{i\in I} N_i\right)/K$ olur. Tersine, $\left(\bigcap_{i\in I} N_i\right)/K \subseteq \bigcap_{i\in I}(N_i / K)$ olduğu açıktır. Dolayısıyla istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 2.3.7. (Homomorfizma Teoremi veya 1. İzomorfizma Teoremi)
M ve N iki R-modül olsun. Her $f: M \to N$ homomorfizması için $p: M \to M/Çek\, f$ doğal epimorfizma olmak üzere $f = \overline{f} \circ p$ olacak şekilde bir tek $\overline{f}: M/Çek\, f \to N$ monomorfizması vardır. Özellikle, $M/Çek\, f \cong Gör\, f$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Sonuç 2.3.8. M, N birer R-modül ve $f: M \to N$ bir epimorfizma ise, $M/Çek\, f \cong N$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.9. (2. İzomorfizma Teoremi) M bir R-modül ve $N, K \leq M$ olsun. Bu takdirde $(N+K)/K \cong N/(N \cap K)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.3.10. (3. İzomorfizma Teoremi) N, K ve M, $N \leq K \leq M$ koşulunu sağlayan R-modüller ise, $M/K \cong (M/N)/(K/N)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

2.4. Direkt Çarpım ve Direkt Toplam

Tanım 2.4.1. R bir halka ve I boştan farklı bir indis kümesi olmak üzere, $\{M_i\}_{i\in I}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. $\{\alpha \mid \alpha: I \to \cup_{i\in I} M_i,\, her\ i \in I\ için\ \alpha(i) \in M_i\}$ dönüşümler kümesine $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **çarpımı** denir ve bu küme $\boldsymbol{\prod_{i\in I} M_i}$ ile gösterilir. Her $i \in I$ için $\alpha(i) := \alpha_i$ ve $\alpha := (\alpha_i)_{i\in I}$ olarak alalım. Burada α_i ye $\boldsymbol{\alpha}$ **nın** $\boldsymbol{i}$. **bileşeni** denir. Eğer I indis kümesi sayılabilir ise, $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}, \ldots)$ şeklinde gösterilir.

$\alpha, \beta \in \prod_{i\in I} M_i$ olmak üzere,

(i) $\alpha = \beta \Leftrightarrow$ her $i \in I$ için $\alpha_i = \beta_i$,

$(ii)\ \alpha+\beta=(\alpha_i+\beta_i)_{i\in I}$,

$(iii)\ r\in R$ olmak üzere $r\alpha=(r\alpha_i)_{i\in I}$ şeklinde tanımlıdır. Bu cebirsel işlemlere göre $\prod_{i\in I} M_i$ bir sol R-modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **dış direkt çarpımı** denir.

Bir $\alpha\in\prod_{i\in I} M_i$ elemanının sonlu tane bileşeni sıfırdan farklı ve diğer bütün bileşenleri sıfır ise, α ya **sonlu desteklidir** denir. $\prod_{i\in I} M_i$ modülünde sıfır elemanı sonlu destekli kabul edilerek bütün sonlu destekli elemanların kümesi $\prod_{i\in I} M_i$ de bir alt modül yapısına sahiptir ve bu alt modül $\boldsymbol{\oplus'_{i\in I} M_i}$ ile gösterilir. Burada $\oplus'_{i\in I} M_i$ alt modülüne $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **dış direkt toplamı** denir. Eğer I indis kümesi sonlu ise, $\prod_{i\in I} M_i=\oplus'_{i\in I} M_i$ dir.

Eğer $\forall i\in I$ için $M_i=M$ ise $\oplus'_{i\in I} M_i=\boldsymbol{M^{(I)}}$ yazılır ve M modülünün **kopyalarının toplamı** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.4.2. M ve N iki R-modül ve I boş kümeden farklı bir indis kümesi olsun. Eğer en az bir $f: M^{(I)}\to N$ epimorfizması mevcut ise, N ye $\boldsymbol{M}$**-üretilmiş modül** denir. I indis kümesi sonlu elemanlı ise, N ye **sonlu $\boldsymbol{M}$-üretilmiş modül** denir (Wisbauer, 1991).

R bir halka ve M keyfi bir sol R-modül olsun. M yi elemanlarıyla birlikte indis kümesi olarak alalım. Her $(r_m)_{m\in M}\in R^{(M)}$ için $f\left((r_m)_{m\in M}\right)=\sum\limits_{m\in M} r_m m$ ile tanımlı $f: R^{(M)}\to M$ dönüşümü bir epimorfizmadır. Dolayısıyla M modülü R-üretilmiştir.

Tanım 2.4.3. $\{M_i\}_{i\in I}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. $j\in I$ olmak üzere her $(m_i)_{i\in I}\in\prod\limits_{i\in I} M_i$ elemanı için $\pi_j\left((m_i)_{i\in I}\right)=m_j$ ile tanımlı $\pi_j:\prod\limits_{i\in I} M_i\to M_j$ dönüşümüne ***j.* projeksiyon (izdüşüm epimorfizması)** ve her $m_j\in M_j$ için $\varepsilon_j(m_j)=(\delta_{ij}m_j)_{i\in I}$ $\left(\delta_{ij}=\begin{cases}0_R, & i\neq j\\ 1_R, & i=j\end{cases}\right)$ ile tanımlı $\varepsilon_j: M_j\to\prod\limits_{i\in I} M_i$ dönüşümüne ***j.* injeksiyon (gömme monomorfizması)** denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.4.4. M bir R-modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Her $m \in M$ elemanı tek türlü olarak M_i alt modüllerinin elemanlarının toplamı şeklinde yazılabilirse, M ye M_i alt modüllerinin **iç direkt toplamı** denir ve $\boldsymbol{M = \bigoplus_{i\in I} M_i}$ ile gösterilir. Yani $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ ise, M nin her m elemanı, $i_1, i_2, ..., i_k \in I$ ve $m_{i_1} \in M_{i_1}, m_{i_2} \in M_{i_2}, ..., m_{i_k} \in M_{i_k}$ olmak üzere $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_k}$ formunda tek türlü olarak yazılabilir. Buradaki her $i \in I$ için M_i alt modüllerine M modülünün **direkt toplam terimleri** denir. $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ yazılışına da M modülünün bir **direkt parçalanışı** veya sadece **parçalanışı** adı verilir. (Alizade ve Pancar, 1999).

Eğer M sıfırdan farklı alt modüllerin bir direkt toplamı olarak yazılamıyorsa M modülüne **parçalanamazdır** denir (Hungerford, 1973).

Önerme 2.4.5. M bir R-modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ olması için gerek ve yeter koşul $M = \sum_{i\in I} M_i$ ve her $i \in I$ için $M_i \cap \left(\sum_{j\neq i} M_j \right) = 0$ olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $(\Rightarrow)$ $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ olsun. Bu durumda M nin her m elemanı $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_n}$ şeklinde yazılabileceğinden $m \in M_{i_1} + M_{i_2} + \cdots + M_{i_n} \subseteq \sum_{i\in I} M_i$ olur. O halde $M = \sum_{i\in I} M_i$ gerçeklenir. Ayrıca, $x \in M_i \cap \left(\sum_{j\neq i} M_j \right)$ ise $x = m_i = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_n}$, $i_k \neq i$ yazılabilir. Yazılışın tek türlü olmasından $m_i = m_{i_1} = m_{i_2} = \cdots = m_{i_n} = 0$ elde edilir. Böylece her $i \in I$ için $M_i \cap \left(\sum_{j\neq i} M_j \right) = 0$ dır.

$(\Leftarrow)$ $M = \sum_{i\in I} M_i$ olduğundan her $m \in M = \sum_{i\in I} M_i$ elemanı, $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_n}$ şeklinde yazılabilir. Yazılışın tek türlü olduğunu göstermek için bir m elemanının $m = m_{i_1} + m_{i_2} + \cdots + m_{i_n} = m'_{i'_1} + m'_{i'_2} + \cdots + m'_{i'_t}$ şeklinde iki gösteriminin bulunduğunu varsayalım. Gerekirse toplam terimlerinin yerlerini değiştirerek ve sıfır toplam terimlerini ekleyerek, $n = t$ ve her $k = 1, 2, \ldots, n$ için $i_k = i'_k$ olduğunu kabul edebiliriz.

O halde yukarıdaki eşitlikten her $k=1,2,\ldots,t$ için $m_{i_k}-m'_{i'_k}=\sum_{j\neq k}\left(m'_{i'_j}-m_{i_j}\right)\in M_{i_k}\cap\left(\sum_{j\neq i}M_{i_j}\right)=0$ ve buradan da $m_{i_k}=m'_{i'_k}$ elde edilir. Böylece yazılışın tek türlü olduğu görülür.

Önerme 2.4.6. M bir R-modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $M=\bigoplus_{i\in I}M_i$ ise $M\cong\bigoplus'_{i\in I}M_i$ dir. Tersine $\{M_i\}_{i\in I}$ R-modüllerin bir ailesi olmak üzere $M=\bigoplus'_{i\in I}M_i$ ise, $M'_i=\left\{\left(m_j\right)_{j\in I}\mid \forall j\neq i \text{ } için \text{ } m_j=0,\ m_i\in M_i\right\}\cong M_i$ ve $M=\bigoplus_{i\in I}M'_i$ gerçeklenir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $f\left(\left(m_i\right)_{i\in I}\right)=\sum_{i\in I}m_i$ ile tanımlı $f:\bigoplus'_{i\in I}M_i\rightarrow M$ fonksiyonunun bir homomorfizma olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $\forall m\in\bigoplus_{i\in I}M_i$ için $m=\sum_{i\in I}m_i$ tek türlü olacak şekilde $m_i\in M_i$ var olduğundan f bir izomorfizmadır.

Tersine, $\{M_i\}_{i\in I}$ R-modüllerin bir ailesi olmak üzere $M=\bigoplus'_{i\in I}M_i$ olsun. $k=i$ için $x_k=m$ ve $k\neq i$ için $x_k=0$ alınarak $\pi_i(m)=\left(x_k\right)_{k\in I}$ ile tanımlı $\pi_i:M_i\rightarrow M'_i$ fonksiyonu bir izomorfizmadır. Sıfırdan farklı $m_{i_j}\in M_{i_j}$ $\left(j=1,2,\ldots,n\right)$ elemanları için $m=\left(m_i\right)_{i\in I}\in M$ elemanı $m=\left(\ldots,0,m_{i_1},0,\ldots\right)+\cdots+\left(\ldots,0,m_{i_n},0,\ldots\right)\in\sum_{i\in I}M'_i$ şeklinde yazılabilir. Burada her $i\in I$ için $M'_i\cap\left(\sum_{j\neq i}M'_j\right)=0$ olduğu gösterilebilir. O halde Önerme 2.4.5 den $M=\bigoplus_{i\in I}M'_i$ elde edilir.

Bu önerme ile iç ve dış direkt toplamın birbirine izomorf olduğu görülür. Bundan sonra dış direkt toplam yerine de sadece direkt toplam yazılışı kullanılacaktır.

Önerme 2.4.7. F bir R-modül ve $X=\left\{x_k\mid k\in K\right\}$ F nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki iki koşul denktir.

(i) Her $a\in F$ elemanı, sadece sonlu sayıda r_k katsayıları sıfırdan farklı (veya hepsi sıfır) olmak üzere, tek türlü olarak $a=\sum_{k\in K}r_kx_k$ şeklinde yazılabilir.

(ii) Her $k \in K$ için $f_k(r) = rx_k$ şeklinde tanımlanan $f_k : R \to Rx_k$ fonksiyonu bir izomorfizmadır ve $F = \underset{k \in K}{\oplus} Rx_k$ olur (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ f_k fonksiyonunun bir epimorfizma olduğu açıktır. $r,s \in R$ keyfi olmak üzere, $f_k(r) = f_k(s)$ olsun. Buradan $rx_k = sx_k$ eşitliği elde edilir. Yazılışın tek türlülüğünden $r = s$ olup f_k fonksiyonu bir monomorfizmadır. Dolayısıyla f_k bir izomorfizma olup $R \cong Rx_k$ olur. Her $a \in F$ elemanı tek türlü olarak Rx_k modüllerinin $r_k x_k$ elemanlarının sonlu toplamı şeklinde gösterilebildiğinden $F = \underset{k \in K}{\oplus} Rx_k$ yazılır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $F = \underset{k \in K}{\oplus} Rx_k$ olduğundan her $a \in F$, $a = \sum_{k \in K} r_k x_k$ sonlu toplamı şeklinde gösterilebilir ve $a = \sum_{k \in K} r_k x_k = \sum_{k \in K} r_k' x_k$ ise, her $k \in K$ için $r_k x_k = r_k' x_k$ dır. Buradan $f_k(r_k) = f_k(r_k')$ bulunur. $f_k : R \to Rx_k$ bir monomorfizma olduğundan $r_k = r_k'$ olur. O halde $a \in F$ elemanı $a = \sum_{k \in K} r_k x_k$ olarak tek türlü yazılır.

Tanım 2.4.8. F bir modül olsun. Önerme 2.4.7 deki denk koşullardan birini gerçekleyen F modülüne **serbest modül**, $X = \{x_k \mid k \in K\}$ kümesine de F nin **serbest üretenler kümesi** veya **tabanı** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

R halkasının birimi 1_R olmak üzere, her R halkası tabanı $X = \{1_R\}$ olan bir serbest R-modüldür.

2.5. Projektif ve π-Projektif Modüller

Tanım 2.5.1. $\{M_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ R-modüller topluluğundan ve bunların $f_i : M_i \to M_{i+1}$ homomorfizmalarından oluşan $\cdots \to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \to \cdots$ dizisinde her $i \in \mathbb{Z}$ için $Gör\, f_i = Çek\, f_{i+1}$ ise bu diziye **tam dizi** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.5.2. M, N ve K, R-modüller olmak üzere $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \to 0$ şeklindeki tam diziye **kısa tam dizi** denir. Bu durumda f homomorfizması bire-bir, g homomorfizması örten ve $Gör\, f = Çek\, g$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.5.3. M ve N iki R-modül olsun. $M \xrightarrow{g} K \rightarrow 0$ satırı tam dizi olmak üzere, eğer aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir $h: N \rightarrow M$ homomorfizması bulunabilir ise, N ye **M-projektiftir** denir.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "g"] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Bir başka ifadeyle yukarıdaki diyagramda g epimorfizma olmak üzere her $f: N \rightarrow K$ homomorfizması için $f = goh$ olacak şekilde bir $h: N \rightarrow M$ homomorfizması bulunabilirse N ye **M-projektiftir** denir. Eğer N modülü her M modülü için M-projektif ise N modülüne **projektif modül** denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.5.4. $\{P_i\}_{i \in I}$ kümesi R-modüllerin bir ailesi olsun. $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ direkt toplamının projektif olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için P_i nin projektif olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: $(\Rightarrow)$ $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ projektif olsun. Keyfi $f: M \rightarrow N$ epimorfizmasını ve $g: P_i \rightarrow N$ homomorfizmasını alalım. $\pi_i: P \rightarrow P_i$ i. projeksiyon ve $\varepsilon_i: P_i \rightarrow P$ i. injeksiyon olmak üzere P projektif olduğundan $g \circ \pi_i: P \rightarrow N$ için $f \circ h = g \circ \pi_i$ olacak şekilde $h: P \rightarrow M$ homomorfizması vardır. $e = h \circ \varepsilon_i$ olmak üzere $e: P_i \rightarrow M$ homomorfizması için

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \\
 & P_i \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "e"] \arrow[d, dashed, shift right, "\varepsilon_i"'] & \\
 & P \arrow[u, shift right, "\pi_i"'] \arrow[uul, dashed, "h"] &
\end{tikzcd}$$

$f \circ e = f \circ h \circ \varepsilon_i = g \circ \pi_i \circ \varepsilon_i = g \circ 1_{P_i} = g$ olup her $i \in I$ için P_i projektif bulunur.

$(\Leftarrow)$ $f: M \to N$ örten homomorfizma ve $g: P \to N$ bir homomorfizma olsun. Her $i \in I$ için P_i projektif olduğundan $g \circ \varepsilon_i : P_i \to N$ homomorfizması için $g \circ \varepsilon_i = f \circ h_i$ olacak şekilde $h_i : P_i \to M$ homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \\
 & P \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dashed, "h"] & \\
 & P_i \arrow[u, "\varepsilon_i"'] \arrow[uul, dashed, "h_i"] &
\end{tikzcd}$$

Her $(m_i)_{i \in I} \in P$ için $h\left((m_i)_{i \in I}\right) = \sum_{i \in I} h_i(m_i)$ ile tanımlı $h: P \to M$ fonksiyonunu ele alalım. h nin bir homomorfizma olduğu gösterilebilir. Herhangi $(m_i)_{i \in I} \in P$ alalım. Bu durumda her $i \in I$ için $g \circ \varepsilon_i = f \circ h_i$ eşitliği yardımıyla

$$(fh)\left((m_i)_{i \in I}\right) = f\left(\sum_{i \in I} h_i(m_i)\right) = \sum_{i \in I} (fh_i)(m_i) = \sum_{i \in I} (g\varepsilon_i)(m_i) = g\left(\sum_{i \in I} \varepsilon_i(m_i)\right) = g\left((m_i)_{i \in I}\right)$$

elde edilir. Böylece $f \circ h = g$ bulunur. O halde P projektiftir.

Tanım 2.5.5. M R-modül ve $e \in End(M)$ olsun. Eğer $e^2 = e$ ise, e endomorfizmasına bir **idempotent** denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.5.6. $f: M \to N$ bir R-modül epimorfizması olsun. Eğer $f \circ g = I_N$ olacak şekilde bir $g: N \to M$ homomorfizması mevcut ise, bu takdirde f epimorfizması **parçalanabilirdir** denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.5.7. $f: M \to N$, $g: N \to M$ R-modül homomorfizmaları ve $g \circ f = I_M$ olsun. Bu takdirde $N = Gör\, f \oplus Çek\, g$ eşitliği vardır (Kasch, 1982).

İspat: $\forall n \in N$ için $n = f(g(n)) + n - f(g(n))$, $f(g(n)) \in Gör\, f$, $n - f(g(n)) \in Çek\, g$ olduğundan $N = Gör\, f + Çek\, g$ bulunur. Şimdi herhangi $n \in Gör\, f \cap Çek\, g$ alalım. Bu takdirde $g(n) = 0_M$ ve $n = f(m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. Buradan $0_M = g(n) = g(f(m)) = m$ olduğundan

$n = f(m) = f(0_M) = 0_N$ bulunur. Sonuç olarak $Gör\, f \cap Çek\, g = 0$ olup $N = Gör\, f \oplus Çek\, g$ elde edilir.

Teorem 2.5.8. M bir R-modül olsun. Eğer $f \in End(M)$ bir idempotent ise $Çek\, f = Gör\,(I_M - f)$, $Gör\, f = Çek\,(I_M - f)$ ve $M = f(M) \oplus (I_M - f)(M)$ eşitlikleri vardır (Kasch, 1982).

İspat: Teorem 2.5.7 nin ispatına benzer yolla yapılabilir.

Tanım 2.5.9. M bir R-modül olsun. Eğer M nin $M = U + V$ şartını sağlayan her U, V alt modülleri için $Gör\, f \subset U$ ve $Gör\,(1_M - f) \subset V$ olacak şekilde bir $f \in End(M)$ varsa M ye **π-projektif** veya **eşsürekli *R*-modül** denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.5.10. M bir R-modül olsun. Bu takdirde M modülünün π-projektif olması için gerek ve yeter koşul M modülünün $M = U + V$ şartını sağlayan her U, V alt modülleri için $(u,v) \to \varphi(u,v) = u + v$ ile tanımlı $\varphi : U \times V \to M$ epimorfizmasının parçalanabilir olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: $(\Rightarrow)$ $M = U + V$ olan M modülünün herhangi U, V alt modüllerini ele alalım. $\varphi \circ h = I_M$ olacak şekilde bir $h : M \to U \times V$ homomorfizmasının varlığını gösterelim. M π-projektif olduğundan $Gör\, f \subset U$ ve $Gör\,(I_M - f) \subset V$ olacak şekilde bir $f \in End(M)$ vardır. $m \to h(m) = \left(f(m), (I_M - f)(m)\right)$ şeklinde tanımlı $h : M \to U \times V$ dönüşümünü tanımlayalım. h dönüşümünün bir homomorfizma olduğunu göstermek kolaydır. $\forall m \in M$ için,

$(\varphi \circ h)(m) = \varphi(h(m)) = \varphi\left(f(m),\ (I_M - f)(m)\right) = f(m) + (I_M - f)(m) = f(m) + m - f(m) = m$

olduğundan $\varphi \circ h = I_M$ bulunur ki bu da istenendir.

$(\Leftarrow)$ $M = U + V$ olan M modülünün herhangi U, V alt modüllerini ele alalım. $(u,v) \to \varphi(u,v) = u + v$ şeklinde tanımlı $\varphi : U \times V \to M$ homomorfizması parçalanabilir olduğundan $\varphi \circ h = I_M$ olacak şekilde bir $h : M \to U \times V$ homomorfizması vardır. Her $m \in M$ için $h(m) = (u_m, v_m)$ diyelim. $f : M \to M$ dönüşümü $m \to f(m) = u_m$ olarak tanımlayalım. f dönüşümünün bir homomorfizma olduğunu göstermek kolaydır. Şimdi $Gör\, f \subset U$ ve $Gör\,(I_M - f) \subset V$ olduğu gösterilirse istenen elde edilir. $Gör\, f \subset U$ olduğu açıktır. $x \in Gör\,(I_M - f)$ alalım. Bu durumda $x = m - f(m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ vardır. $x = m - u_m = (\varphi \circ h)(m) - u_m = \varphi(h(m)) - u_m = \varphi(u_m, v_m) - u_m = u_m + v_m - u_m = v_m \in V$ bulunur. Yani $Gör\,(I_M - f) \subset V$ olur.

Teorem 2.5.11. R bir halka olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır.

(i) R projektif sol R-modüldür.

(ii) Her serbest R-modül projektiftir (Kasch, 1982).

İspat: (i) $f : N \to K$ epimorfizması ve $g : R \to K$ homomorfizması verilsin. f epimorfizma olduğundan $g(1_R) = f(n)$ olacak şekilde bir $n \in N$ vardır. Bu takdirde her $r \in R$ için $h(r) = rn$ ile tanımlı $h : R \to N$ dönüşümü homomorfizmadır. $f \circ h = g$ olduğunu göstermek için $r \in R$ keyfi bir eleman olsun. Bu takdirde $g(r) = g(r1_R) = rg(1_R) = rf(n) = f(rn) = (f \circ h)(r)$ olduğundan istenilen elde edilir.

(ii) F serbest R-modülü verilsin. Bu takdirde $F = R^{(I)}$ olacak şekilde I indis kümesi vardır. (i) den R projektif sol R-modüldür. Teorem 2.5.4 den F projektiftir.

2.6. İnjektif Modüller

Tanım 2.6.1. M ve N iki R-modül olsun. Her $f : K \to N$ monomorfizması ve $g : K \to M$ homomorfizması için $h \circ f = g$ olacak şekilde bir $h : N \to M$ homomorfizması bulunabilirse, M modülüne **N-injektiftir** denir. Diğer bir ifadeyle, tam satırlı her

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramı $h : N \to M$ homomorfizması ile değişmeli üçgene tamamlanabilirse, M modülüne **N-injektiftir** denir. Eğer M modülü her N modülü için N-injektif ise M modülüne bir **injektif modül** denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.6.2. Her M modülü için N bir injektif modül olmak üzere $f : M \to N$ monomorfizması vardır (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.6.3. Her injektif modül, kendisini içeren modül içinde bir direkt toplam terimidir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: M bir injektif R-modül ve $M \leq M_1$ olsun. Bu takdirde I'_M içerme monomorfizması ve I_M birim dönüşüm olmak üzere aşağıdaki diyagramı değişmeli kılan bir $g : M_1 \to M$ homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "I'_M"] \arrow[d, "I_M"'] & M_1 \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

$m_1 \in M_1$ keyfi olmak üzere $g(m_1) \in M$ olup $g \circ I'_M = I_M$ olduğundan $g(m_1) = g(g(m_1))$ yazılır. Buradan $m_1 - g(m_1) \in Çek\, g$ olup $m_1 = g(m_1) + (m_1 - g(m_1)) \in M + Çek\, g$ olduğundan $M_1 \leq M + Çek\, g \leq M_1$ yani $M_1 = M + Çek\, g$ elde edilir. Diğer taraftan $m_1 \in M \cap Çek\, g$ keyfi elemanı için $g \circ I'_M = I_M$ olduğundan $m_1 = g(m_1) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $M_1 = M \oplus Çek\, g$ olur.

Önerme 2.6.4. Her R-injektif R-modül injektiftir (Wisbauer, 1991).

Önerme 2.6.5. R tamlık bölgesi ve M R-modülü bölünebilir ve burulmasız olsun. Bu takdirde M injektiftir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: M bölünebilir ve burulmasız bir modül olsun. I, R halkasının keyfi bir ideali ve $f : I \to M$ bir R-modül homomorfizması olmak üzere

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

diyagramını ele alalım. s, I idealinin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. Bu durumda M bölünebilir olduğundan $f(s) = sm$ olacak şekilde $m \in M$ elemanı vardır. $k \in I$ keyfi olsun. Bu durumda $sf(k) = f(sk) = f(ks) = kf(s) = ksm = skm$ olup M

burulmasız olduğundan $f(k)=km$ dir. Her $r \in R$ için $h(r)=rm$ ile tanımlı $h:R \to M$ dönüşümü bir homomorfizmadır. Ayrıca $h \circ i = f$ olduğu açıktır. Dolayısıyla M , R- injektif olup Önerme 2.6.4 den M injektif olur.

Örnek 2.6.6. R tamlık bölgesi ve $K(R)$, R nin kesir cismi olsun. Bu takdirde $K(R)$ bölünebilir ve burulmasız bir R-modüldür. Önerme 2.6.5 gereğince $K(R)$ injektiftir.

2.7. Basit ve Yarı-Basit Modüller

Tanım 2.7.1. M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. M nin aşikar alt modüllerinden başka hiçbir alt modülü yoksa M modülüne **basit modül** denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.7.2. M basit bir R-modül ise 0, M nin maksimal alt modülüdür ve M devirlidir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: M basit modül olduğundan 0 alt modülünü M den başka kapsayan alt modül yoktur. Dolayısıyla tanım gereği 0, M nin maksimal alt modülüdür. $0 \neq m \in M$ olmak üzere $Rm \leq M$ dir. $0 \neq Rm$ ve M basit olduğundan $Rm = M$ olup M devirlidir.

Teorem 2.7.3. M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) N, M nin bir maksimal alt modülüdür.

(ii) M/N bölüm modülü basittir (Anderson ve Fuller, 1974).

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ $U/N \leq M/N$ keyfi bir alt modülü için $N \leq U$ ve N, M nin maksimal alt modülü olduğundan $U = N$ veya $U = M$ olur. Buradan $U/N = \{N\}$ veya $U/N = M/N$ olup, M/N bölüm modülü basittir.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $N \subseteq U \subseteq M$ şartını sağlayan M nin U alt modülünü alalım. Buradan $\{N\} \subseteq U/N \subseteq M/N$ yazılır. M/N basit olduğundan $U/N = M/N$ veya $U/N = \{N\}$ olur. O halde $U = M$ veya $U = N$ olup N, M nin maksimal alt modülüdür.

Teorem 2.7.4. M bir R-modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) M nin her alt modülü basit alt modüllerin toplamıdır.

(ii) M basit alt modüllerin toplamıdır.

(iii) M basit alt modüllerin direkt toplamıdır.

(iv) M nin her alt modülü bir direkt toplam terimidir (Kasch, 1982).

Tanım 2.7.5. M bir R-modül olsun. Teorem 2.7.4 ün denk koşullarından birini sağlayan M modülüne **yarı-basit modül** denir (Kasch, 1982).

Her yarı-basit modül basit alt modüllerin direkt toplamı olduğundan yarı-basit modüllerin direkt toplamı da yarı-basittir.

Sonuç 2.7.6. Yarı-basit bir modülün her alt modülü yarı-basittir.

Teorem 2.7.7. Yarı-basit modüllerin homomorf görüntüleri yarı-basittir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: M, M_1 birer R-modül ve M yarı-basit olmak üzere $f: M \to M_1$ epimorfizmasını alalım. $Çek\, f \leq M$ ve M yarı-basit olduğundan $M = Çek\, f \oplus K$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. Teorem 2.3.7 ve Teorem 2.3.9 kullanılırsa $K \cong M/Çek\, f \cong M_1$ elde edilir. Sonuç 2.7.6 gereği K yarı-basit olup M_1 yarı-basittir.

Tanım 2.7.8. R halka olsun. R sol (sağ) R-modül olarak yarı-basit ise, R halkasına **yarı-basit** denir.

Herhangi bir R halkasının yarı-basit olması için gerek ve yeter koşul her sol (sağ) R-modülün yarı-basit olmasıdır (Kasch, 1982).

2.8. Küçük Alt Modüller

Tanım 2.8.1. M bir R-modül ve K, M modülünün bir öz alt modülü olsun. Eğer $K + L = M$ koşulunu sağlayan M modülünün hiçbir L öz alt modülü yoksa K alt modülüne M de **küçüktür** denir ve $\boldsymbol{K \ll M}$ ile gösterilir.

Buna göre $K \ll M$ ve $K + L = M$ ise $L = M$ dir. Bu durumda $0 \ll M$ dir (Wisbauer, 1991).

Küçük alt modüller ile ilgili kullanılacak bazı özellikler aşağıdaki teorem altında toplanabilir.

Teorem 2.8.2. K, N ve M birer R-modül olsun.

(i) $K \subseteq N \subseteq M$ ve $N << M$ ise, $K << M$ dir.

(ii) $K \subseteq N \subseteq M$ ve $K << N$ ise K, M nin N yi kapsayan her alt modülünde de küçüktür.

(iii) $f: M \to N$ bir R-modül homomorfizması olsun. Eğer $K << M$ ise, $f(K) << N$ dir.

(iv) Eğer K alt modülü M modülünde hem direkt toplam terimi hem de küçük ise bu takdirde $K = 0$ dır.

(v) $K \subseteq N \subseteq M$ ve N, M nin bir direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde $K << N$ olması için gerek ve yeter koşul $K << M$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: (i) $K + L = M$ olacak şekilde herhangi bir L alt modülünü ele alalım. Bu takdirde $K \leq N$ olduğundan $N + L = M$ olup $N << M$ olduğundan $L = M$ bulunur. Dolayısıyla $K << M$ dir.

(ii) L, M nin N yi kapsayan bir alt modülü olsun. $K + T = L$ olacak şekilde herhangi bir $T \leq L$ alt modülünü ele alalım. $K + T = L$ eşitliğinin her iki tarafının N ile arakesitini alırsak $(K + T) \cap N = L \cap N$ olup $N \leq L$ ve modüler kuraldan $K + (T \cap N) = N$ bulunur. $K << N$ olduğundan $T \cap N = N$ olur. Dolayısıyla $N \subseteq T$ dir. $K + T = L$ ve $K \leq N \leq T$ den $T = L$ elde edilir. Buradan $K << L$ bulunur.

(iii) $f(K) + L = f(M)$ olacak şekilde herhangi bir $L \leq f(M)$ alt modülünü alalım. Bu takdirde $f^{-1}(f(K) + L) = M$ yazılabilir. Buradan $K + f^{-1}(L) = M$ dir. $K << M$ olduğundan $f^{-1}(L) = M$ olup $L = f(M)$ olduğu görülür. O halde $f(K) << f(M)$ dir ve (ii) den $f(K) << N$ bulunur.

(iv) K bir direkt toplam terimi olduğundan $M = K \oplus N$ olacak şekilde bir N alt modülü vardır. $K << M$ olduğundan $N = M$ olur. Ayrıca $K \cap N = 0$ olduğundan $K = K \cap M = K \cap N = 0$ bulunur.

(v) $(\Rightarrow)$ $K << N$ ise, (ii) den $K << M$ dir.

$(\Leftarrow)$ $K << M$ olsun. $K + L = N$ olacak şekilde herhangi bir $L \leq N$ alt modülünü ele alalım. N, M nin bir direkt toplam terimi olduğundan $M = N \oplus U$ olacak şekilde

$U \leq M$ vardır. O halde $K+L+U=M$ olur. $K << M$ olduğundan $L+U=M$ olup eşitliğin her iki tarafının N ile arakesiti alınırsa ve modüler kural uygulanırsa $N=L+(U \cap N)=L$ olur. Sonuç olarak $K << N$ elde edilir.

Teorem 2.8.2 nin bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 2.8.3. M bir R-modül, $K_1, K_2, ..., K_n, M_1, M_2, ..., M_n$ M nin alt modülleri ve her $i=1,2,...,n$ için $K_i << M_i$ olsun. Bu takdirde, $K_1+K_2+\cdots+K_n << M_1+M_2+\cdots+M_n$ dir (Kasch, 1982).

İspat: $n=2$ için gösterelim. $K_1+K_2+L=M_1+M_2$ olacak şekilde herhangi bir L alt modülünü alalım. $K_1 << M_1$ olduğundan ve Teorem 2.8.2 (ii) den $K_2+L=M_1+M_2$ olur. Benzer şekilde $K_2 << M_2$ olduğundan ve Teorem 2.8.2 (ii) den $L=M_1+M_2$ elde edilir. Buradan $K_1+K_2 << M_1+M_2$ bulunur. Benzer şekilde sonlu sayıdakiler için de gösterilebilir.

2.9. Bir Modülün Radikali

Tanım 2.9.1. M bir R-modül olsun. M nin bütün maksimal alt modüllerinin arakesitine M nin **radikali** denir ve ***RadM*** ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Buna göre $RadM = \cap\{K \leq M \mid K, M \text{ de maksimal}\}$ dir.

Tanım 2.9.2. M bir R-modül olsun. Eğer M nin hiçbir maksimal alt modülü yoksa $RadM=M$ olarak tanımlanır ve M modülüne **radikal modül** denir (Wisbauer, 1991).

Basit modüllerin tek maksimal alt modülü 0 olduğundan basit modüllerin radikali sıfırdır.

Teorem 2.9.3. M bir R-modül olsun. Bu takdirde $RadM = \sum_{L<<M} L$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: Herhangi bir $L << M$ alt modülünü ele alalım. Eğer M nin bir K maksimal alt modülü L yi içermezse $K+L=M$ olup $K=M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla L, M nin bütün maksimal alt modülleri tarafından içerilir. Böylece $L \leq RadM$ olur. Buradan da $\sum_{L<<M} L \leq RadM$ bulunur. Şimdi de ters kapsamayı gösterelim. Her $m \in RadM$ için $Rm << M$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $m \in RadM$ keyfi bir eleman olsun. Kabul edelim ki Rm, M de küçük olmasın. Bu durumda $Rm+L=M$ olacak şekilde $\exists L\neq M$ alt modülü vardır. O halde $S=\{L\subset M \mid m\notin L, Rm+L=M\}$ kümesi boştan farklıdır. Bu kümede kapsama bağıntısına göre her zincirin bir üst sınıra sahip olduğunu gösterelim. K, S nin bir zinciri ve $C=\cup_{B\in K} B$ olsun. Bu takdirde C, M nin bir alt modülüdür. $M\neq C$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $M=C$ olsun. Bu durumda $m\in C=\cup_{B\in K} B$ olup $m\in B$ olacak şekilde $\exists B\in K\subset S$ mevcuttur. Bu ise S nin seçimi ile çelişir. Dolayısıyla $M\neq C$ dir. C modülünün K nın bir üst sınırı olduğu açıktır. Dolayısıyla Zorn Lemması gereği S bir P gibi maksimal eleman içerir. Burada P nin M de maksimal alt modül olduğu gösterilebilir. Burada da $m\notin P$ olduğundan $m\notin RadM$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $Rm \ll M$ bulunur.

Önerme 2.9.4. M bir R-modül olsun. $M / RadM$ bölüm modülünün tek küçük alt modülü $\{0_{M/RadM}\}$ dır. Yani $Rad(M / RadM)=0$ dır (Wisbauer, 1991).

İspat: M nin tüm maksimal alt modüllerinin ailesi $\{M_i\}_{i\in I}$ olsun. Bu durumda Teorem 2.2.14 ile $M / RadM$ bölüm modülünün tüm maksimal alt modülleri $i\in I$ için $M_i / RadM$ formundadır. Böylece Önerme 2.3.6 dan

$$Rad(M / RadM)=\bigcap_{i\in I}(M_i / RadM)=\Big(\bigcap_{i\in I}M_i\Big)/ RadM = RadM / RadM=0 \text{ dır.}$$

Önerme 2.9.5. M bir R-modül ve $K\leq L\leq M$ alt modüller olsun. Bu takdirde $RadK\leq RadL$ dir (Kasch, 1982).

İspat: $m\in RadK$ keyfi bir eleman olsun. Bu takdirde $Rm \ll K$ ve $K\leq L$ olduğundan $Rm \ll L$ olup $m\in RadL$ dir.

Tanım 2.9.6. M bir modül olsun. M modülünün tüm radikal alt modüllerinin toplamı olan $P(M)$, M modülünün alt modülüdür. Eğer $P(M)=0$ ise, M modülüne **indirgenmiş modül** denir (Wisbauer, 1991).

Her M modülü için $P(M / P(M))=0$ dır. $M / P(M)$ bölüm modülüne M nin **indirgenmiş kısmı** denir.

Önerme 2.9.7. M bir modül olsun. Bu takdirde $RadP(M)=P(M)$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $m \in P(M)$ keyfi olsun. Her $1 \le i \le n$ için V_i, M modülünün radikal alt modülü ve $v_i \in V_i$ olmak üzere $m = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$ şeklinde yazılabilir. O halde her $1 \le i \le n$ için $Rv_i << V_i$ olur. Buradan $Rm << V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ elde edilir. Teorem 2.8.2 (ii) den $Rm << P(M)$ olup $m \in RadP(M)$ bulunur. Dolayısıyla $P(M) \le RadP(M)$ dir. Tersine, $RadP(M) \le P(M)$ olduğu açıktır. O halde istenen eşitlik elde edilir.

Teorem 2.9.8. M bir R-modül olsun. Eğer M nin her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanıyorsa $RadM << M$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $RadM + L = M$ olacak şekilde herhangi bir L alt modülü için eğer $L \ne M$ olsa, hipotez gereği L bir K maksimal alt modülü tarafından kapsanır. Burada $M = RadM + L \subseteq K$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $L = M$ olup $RadM << M$ dir.

Sonuç 2.9.9. M sonlu üretilmiş R-modül ise $RadM << M$ dir (Wisbauer, 1991).

Sonuç 2.9.10. M sonlu üretilmiş R-modül ise M nin herhangi sayıdaki küçük alt modülünün toplamı da M de küçüktür.

Tanım 2.9.11. M bir R-modül olsun. Eğer M modülünün her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanıyorsa M modülüne **eş-atom modül** denir (Zöschinger, 1974).

Teorem 2.9.8 gereğince eş-atom modüller küçük radikale sahiptir.

Teorem 2.9.12. M ve N iki R-modül ve $f: M \to N$ bir R-modül homomorfizması olsun. Bu takdirde $f(RadM) \subseteq RadN$ dir. Ayrıca $Çek\, f \subseteq RadM$ ise $f(RadM) = Radf(M)$ dir (Anderson ve Fuller, 1974).

İspat: $f(RadM) \subseteq Radf(M)$ olduğu Teorem 2.8.2. (iii) ve Teorem 2.9.3 den görülür. Dolayısıyla $Radf(M) \subseteq RadN$ olduğundan $f(RadM) \subseteq RadN$ elde edilir. Kabul edelim ki $Çek\, f \subseteq RadM$ olsun. $m \in Radf(M)$ olsun. Bu takdirde $\exists n \in M$ için $m = f(n)$ şeklinde yazılabilir. Kabul edelim ki $n \in M$ elemanı M nin bütün maksimal alt modülleri tarafından kapsanmasın. Bu durumda M nin en az bir K maksimal alt modülü için $K + Rn = M$ dir. Buradan $f(K) + f(Rn) = f(M)$ elde edilir. $f(Rn) = Rf(n) = Rm << f(M)$ olduğundan $f(K) = f(M)$ bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının f ile ters görüntüsü alınırsa $M = K + Çek\, f$ bulunur. $Çek\, f \subseteq RadM$ olduğundan $K = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $n \in RadM$ olup $m \in f(RadM)$ olduğu görülür. Sonuç olarak $f(RadM) = Radf(M)$ dir.

Teorem 2.9.13. M R-modül ve $N \leq M$ olmak üzere $N \leq RadM$ olsun. Bu takdirde $Rad(M/N) = (RadM)/N$ olur (Anderson ve Fuller, 1974).

İspat: $N \leq RadM$ olduğundan $N \leq \cap\{K \mid K,\ M\ de\ maksimal\} = RadM$ olup Önerme 2.3.6 gereğince $Rad(M/N) = (RadM)/N$ dir.

Teorem 2.9.14. Her $i \in I$ için M_i ler M nin alt modülleri olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Bu takdirde $RadM = \bigoplus_{i \in I} RadM_i$ ve $M / RadM \cong \bigoplus_{i \in I}(M_i / RadM_i)$ dir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.9.15. M yarı-basit R-modül ise $RadM = 0$ dır (Kasch, 1982).

İspat: M yarı-basit olduğundan her alt modülü bir direkt toplam terimi olup M nin küçük alt modülü yalnızca 0 olur. O halde $RadM = 0$ olduğu görülür.

R bir halka olsun. R nin tüm sol maksimal ideallerinin arakesiti $Rad({}_R R)$ ile R nin tüm sağ maksimal ideallerinin arakesiti $Rad(R_R)$ eşit olup R nin bir idealidir. $RadR = Rad({}_R R) = Rad(R_R)$ ile gösterilir.

Önerme 2.9.16. R bir halka olsun. R halkasının sol Bass halka olması için gerek ve yeter koşul sıfırdan farklı her M R-modülü için $RadM << M$ olmasıdır (Clark ve ark., 2006).

2.10. Oyuk ve Lokal Modüller

Tanım 2.10.1. M bir R-modül olsun. Eğer M nin her öz alt modülü M de küçük ise M ye **oyuk** modül denir (Clark ve ark., 2006).

Tanım 2.10.2. M bir R-modül olsun. Eğer M, kendisinden farklı bütün alt modüllerini kapsayan bir öz alt modüle sahipse ya da M nin tüm öz alt modüllerinin toplamı M nin bir öz alt modülü ise M ye **lokal modül** denir. R halkası sol R-modül olarak lokal ise R halkasına **lokal halka** denir (Wisbauer, 1991).

Her cisim kendi üzerinde lokal modül yapısına sahiptir. Ayrıca p bir asal sayı ve $k \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^k}$ lokal halkadır.

Teorem 2.10.3. M lokal modül olsun. Bu takdirde M nin tek maksimal alt modülü $RadM$ dir ve $RadM << M$ dir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.10.4. M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) M oyuktur ve $RadM \neq M$ dir.

(ii) M oyuktur ve devirlidir (veya sonlu üretilmiştir).

(iii) M lokaldir (Wisbauer, 1991).

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ $RadM \neq M$ olduğundan M nin bir K maksimal alt modülü vardır. O halde her $m \in M - K$ için $Rm + K = M$ dir. Ayrıca M oyuk olduğundan $K << M$ olup $Rm = M$ bulunur. Dolayısıyla M devirlidir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ M devirli olduğundan sonlu üretilmiştir. Ayrıca M kendi içinde küçük olmadığından $RadM \neq M$ dir. Buradan M nin bir N maksimal alt modülü vardır. Kabul edelim ki K, M nin herhangi bir öz alt modülü olsun ve N tarafından kapsanmasın. O halde N maksimal olduğundan $K + N = M$ olup $K << M$ olduğundan $N = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $K \leq N$ olmak zorundadır. Yani N, M nin diğer bütün öz alt modüllerini kapsar. Ayrıca N öz alt modül olduğundan M lokaldir.

$(iii) \Rightarrow (i)$ M lokal olsun. O halde M nin tüm öz alt modüllerini kapsayan bir N öz alt modülü vardır. Kabul edelim ki $N + L = M$ şartını sağlayan L alt modülü için $L \neq M$ olsun. Buradan $L \leq N$ olup $N = M$ çelişkisi elde edilir. O halde $N + L = M$ şartını sağlayan her L alt modülü için $L = M$ olup $N << M$ bulunur. M nin herhangi bir K öz alt modülünü alalım. $K \leq N$ ve $N << M$ olduğundan $K << M$ bulunur. Dolayısıyla M oyuktur. Ayrıca Teorem 2.10.3 gereğince $RadM = N \neq M$ dir.

Teorem 2.10.5. R lokal olmayan bir değişmeli bölge ve M bir R-modül olsun. Aşağıdaki ifadeleri göz önüne alalım.

(i) M injektiftir.

(ii) M bölünebilirdir.

(iii) R halkasının her P maksimal ideali için $M = PM$ olur.

(iv) $RadM = M$ dir.

Bu takdirde $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$ sağlanır (Alizade ve ark., 2001).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Tümlenmiş Modüller

$M = U \oplus V$ olması için gerek ve yeter koşulun $M = U + V$ ve $U \cap V = 0$ olduğu biliniyor. Bu koşulların bir genelleştirmesi olarak literatürde aşağıdaki kavramlar yer almaktadır.

Tanım 3.1.1. U bir M R-modülünün alt modülü olsun. M nin bir V alt modülü için $U \cap V = 0$ ve V bu koşula göre maksimal ise yani $U \cap V' = 0$ olacak şekilde her $V \leq V'$ için $V' = V$ ise V ye U nun **kesişime göre tümleyeni** denir.

Tanım 3.1.2. U bir M R-modülünün alt modülü olsun. M nin bir V alt modülü için $U + V = M$ ve V bu koşula göre minimal ise yani $U + V' = M$ olacak şekilde $V' \leq V$ için $V' = V$ ise V ye U nun **toplamaya göre tümleyeni** veya kısaca **tümleyeni** denir.

Önerme 3.1.3. M bir modül U ve V, M nin iki alt modülü olsun. $M = U \oplus V$ olması için gerek ve yeter koşul V nin U nun hem kesişime hem de toplamaya göre tümleyeni olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $M = U \oplus V$ ise $U \cap V = 0$ dır. $V \leq V'$ koşulunu sağlayan M modülünün bir V' alt modülü için $U \cap V' = 0$ olsun. $M = U \oplus V$ eşitliğinin her iki tarafının V' ile arakesiti alınıp modüler kural uygulanırsa $V' = V' \cap M = V' \cap (U \oplus V) = V + (V' \cap U) = V$ olur. O halde V alt modülü $U \cap V = 0$ koşulunu sağlayan maksimal alt modül olduğundan V, U nun kesişime göre tümleyenidir. $M = U \oplus V$ ise $M = U + V$ dir. $L \leq V$ olmak üzere $M = U + L$ olsun. $M = U + L$ eşitliğinin V ile arakesiti alınıp modüler kural uygulanırsa $V = V \cap M = V \cap (U + L) = L + (U \cap V) = L + 0 = L$ olur. O halde V, $M = U + V$ koşulunu sağlayan minimal olup U nun toplamaya göre tümleyenidir.

$(\Leftarrow)$ V, U nun kesişime göre tümleyeni olduğundan $U \cap V = 0$ dır. Yine V, U nun toplamaya göre tümleyeni olduğundan $M = U + V$ dir. Dolayısıyla $M = U \oplus V$ bulunur.

Teorem 3.1.4. M bir R-modül ve $U, V \leq M$ olsun. V alt modülünün U nun M modülünde bir tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = U + V$ ve $U \cap V << V$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: $(\Rightarrow)$ V, U nun M de bir tümleyeni olsun. Buna göre $M = U + V$ dir. Bir $X \subseteq V$ alt modülü için $U \cap V + X = V$ olsun. Bu durumda $U + (U \cap V) + X = M$ ve $U + X = M$ bulunur. V, U nun tümleyeni olduğundan V nin minimalliği gereği $X = V$ olmalıdır. Yani $(U \cap V) + X = V$ şartını sağlayan her $X \subseteq V$ alt modülü için $X = V$ olur. Dolayısıyla $U \cap V << V$ dir.

$(\Leftarrow)$ $M = U + V$ ve $U \cap V << V$ olsun. $U + X = M$ şartını sağlayan her $X \subseteq V$ alt modülü için $X = V$ olduğu gösterilirse istenen elde edilir. $X \subseteq V$ ve $U + X = M$ olan herhangi X alt modülünü ele alalım. Son eşitliğin her iki tarafının V ile arakesitini alırsak modüler kural gereği $V = M \cap V = (U + X) \cap V = (U \cap V) + X$ olup $(U \cap V) + X = V$ elde edilir. $U \cap V << V$ olduğundan $X = V$ bulunur.

Kesişime göre tümleyen her zaman mevcut olmasına karşın toplamaya göre tümleyen her zaman olmayabilir. Örnek 3.1.5 de toplamaya göre tümleyen olmayabileceği gösterilmiştir. Ayrıca kesişime ve toplamaya göre tümleyenler tek (hatta izomorf) olmayabilir. M bir modül ve $U << M$ olsun. Bu takdirde küçüklük tanımından M modülü U alt modülünün tümleyenidir. Dolayısıyla her modül küçük alt modülünün tümleyenidir.

Örnek 3.1.5. $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modülünün sıfırdan farklı hiçbir öz alt modülü bir tümleyene sahip değildir. Kabul edelim ki U, $\mathbb{Z}$ nin sıfırdan farklı bir öz alt modülü olsun. Bu takdirde $U = n\mathbb{Z}$ ve $n \neq 0, \mp 1$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}$ vardır. U nun bir $m\mathbb{Z}$ tümleyeninin var olduğunu kabul edelim. O halde $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ ve $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} << m\mathbb{Z}$ dir. Böylece $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} \subseteq Rad\mathbb{Z} = \bigcap_{p \, asal} p\mathbb{Z} = 0$ olup $n\mathbb{Z} \cap m\mathbb{Z} = 0$ olur. Bu ancak $m\mathbb{Z} = 0$ olması durumunda mümkündür. Buradan $\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = n\mathbb{Z}$ çelişkisi elde edilir.

Tümleyen alt modüller ile ilgili bazı özellikler Önerme 3.1.6 ile verilmiştir.

Önerme 3.1.6. M bir R-modül, U, $V \leq M$ ve V, U nun M de bir tümleyeni olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler vardır.

(i) Eğer $W \leq U$ için $M = W + V$ ise V, W modülünün de bir tümleyenidir.

(ii) Eğer $K << M$ ise V, $U + K$ alt modülünün de M de bir tümleyenidir.

(iii) Eğer $K << M$ ise $K \cap V << V$ dir.

(iv) Eğer $L \leq U$ ise $(V + L)/L$ de U/L nin M/L de bir tümleyenidir.

(v) $X \subset V$ ve $X << M$ ise $X << V$ dir.

(vi) $RadV = V \cap RadM$ dir.

(vii) Eğer M sonlu üretilmiş ise V de sonlu üretilmiştir.

$(viii)$ $Rad(M/U) = (RadM + U)/U$ dur (Wisbauer, 1991).

İspat: (i) $X \leq V$ alt modülü için $M = W + X$ ise $W \leq U$ olduğundan $M = U + X$ olur. Buradan V, U nun bir tümleyeni olduğundan $X = V$ bulunur.

(ii) $U + V = M$ olduğundan $(U + K) + V = M$ eşitliği vardır. Şimdi bir $X \leq V$ için $(U + K) + X = M$ olsun. Buradan $K + (U + X) = M$ olup $K << M$ olduğundan $U + X = M$ bulunur. $X \leq V$ ve V, U alt modülünün M de bir tümleyeni olduğundan V alt modülünün minimalliği gereği $X = V$ elde edilir. Dolayısıyla V, $U + K$ alt modülünün de M de bir tümleyenidir.

(iii) V, U nun bir tümleyeni olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ dir. Bir $S \leq V$ için $V = (K \cap V) + S$ olsun. O halde $M = U + V = U + (K \cap V) + S$ gerçeklenir. $K << M$ olduğundan Teorem 2.8.2 (i) den $K \cap V << M$ olup $M = U + S$ yazılabilir. V nin minimalliğinden $S = V$ olup $K \cap V << V$ elde edilir.

(iv) $M/L = (U + V)/L = (V + U + L)/L = ((V + L)/L) + (U/L)$ olduğu açıktır. $(U/L) \cap ((V + L)/L) = ((U \cap V) + L)/L$ olduğundan $((U \cap V) + L)/L \ll (V + L)/L$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir.

$$\left[((U \cap V) + L)/L\right] + K/L = ((U \cap V) + K)/L = (V + L)/L$$

olan herhangi $K/L \leq (V + L)/L$ alalım. Burada $(U \cap V) + K = V + L$ elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın V ile arakesiti alınırsa

$\left(\left(U \cap V\right)+K\right) \cap V=\left(U \cap V\right)+\left(K \cap V\right)=\left(V+L\right) \cap V=V$ olur. $U \cap V << V$ olduğundan $K \cap V=V$ olup $V \leq K$ bulunur. Dolayısıyla $\left(V+L\right)/L \leq K/L$ olup $K/L=\left(V+L\right)/L$ elde edilir. Böylece $\left(\left(U \cap V\right)+L\right)/L << \left(V+L\right)/L$ olur.

(v) $X+K=V$ olacak şekilde $K \leq V$ olsun. V, U nun M de bir tümleyeni olduğundan $M=U+V=U+X+K$ ve $X << M$ olduğundan $M=U+K$ olur. Buradan $K=V$ bulunur. Dolayısıyla $X << V$ dir.

(vi) $V \leq M$ olduğundan $RadV \leq RadM$ dir. Buradan $RadV \leq V \cap RadM$ olduğu açıktır. Tersine, $x \in V \cap RadM$ keyfi olsun. O halde $x \in RadM$ olduğundan $Rx << M$ dir. Böylece (v) şıkkından $Rx << V$ olup $x \in RadV$ bulunur. Dolayısıyla $V \cap RadM \leq RadV$ olur. Sonuç olarak $RadV=V \cap RadM$ elde edilir.

(vii) M sonlu üretilmiş bir modül olduğundan $M=\langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$ olacak şekilde $m_1, m_2, \ldots, m_n \in M$ vardır. Ayrıca V, M de U nun bir tümleyeni olduğundan $M=U+V$ dir. Buradan her $i=1,2,\ldots,n$ için $m_i=u_i+v_i$ olacak şekilde $u_i \in U$ ve $v_i \in V$ vardır. Dolayısıyla $M=U+\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ olup V alt modülünün minimalliğinden $V=\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ bulunur. O halde V sonlu üretilmiştir.

$(viii)$ Herhangi $x+U \in Rad\left(M/U\right)$ alalım. $x \in M$ ve $M=U+V$ olduğundan $x=u+v$ olacak şekilde $\exists u \in U$ ve $\exists v \in V$ vardır. Burada $x+U=u+v+U=v+U$ olur. $v+U \in Rad\left(M/U\right)$ olduğundan $\left(Rv+U\right)/U=R\left(v+U\right) << M/U$ olur. $Rv+T=V$ olan herhangi $T \leq V$ alalım. Burada $M/U=\left(U+V\right)/U=\left(U+Rv+T\right)/U=\left(Rv+U\right)/U+\left(T+U\right)/U$ olup $\left(Rv+U\right)/U << M/U$ olduğundan $\left(T+U\right)/U=M/U$ olur. O halde $U+T=M$ olup V, U nun M de bir tümleyeni ve $T \leq V$ olduğundan V nin minimalliği gereği $T=V$ olur. Böylece $Rv << V$ olup $Rv << M$ ve buradan da $v \in RadM$ elde edilir. O halde $x+U=v+U \in \left(RadM+U\right)/U$ olup $Rad\left(M/U\right) \leq \left(RadM+U\right)/U$ olur. $p: M \to M/U$ doğal epimorfizması yardımıyla Teorem 2.8.2 (iii) de kullanılarak $\left(RadM+U\right)/U \leq Rad\left(M/U\right)$ olduğu gösterilebilir. O halde $Rad\left(M/U\right)=\left(RadM+U\right)/U$ olup istenen elde edilir

Tanım 3.1.7. M bir R-modül, $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ koşulunu gerçekleyen M nin her V alt modülü için U nun M de V tarafından kapsanan bir tümleyeni varsa U alt modülüne M de **bol tümleyene sahiptir** denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.1.8. Bir M R-modülünün her alt modülü M de bir tümleyene sahipse, M ye bir **tümlenmiş modül,** M nin her alt modülü M de bol tümleyene sahipse M ye **bol tümlenmiş modül** denir (Wisbauer, 1991). Ayrıca M nin her dual sonlu alt modülü M de bir tümleyene sahip ise M ye **dual sonlu tümlenmiş modül** denir (Alizade ve ark., 2001).

M nin her N alt modülü $N + M = M$ olarak yazılabildiğinden M bol tümlenmiş ise tümlenmiş olduğu açıktır. Ayrıca her tümlenmiş modül dual sonlu tümlenmiştir. Sonlu üretilmiş her modülün her alt modülü dual sonlu olacağından her sonlu üretilmiş dual sonlu tümlenmiş modül tümlenmiştir.

Önerme 3.1.9. M bir R-modül olsun. Eğer M bir oyuk modül ise tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: M bir oyuk modül ve K, M nin herhangi bir alt modülü olsun. M bir oyuk modül olduğundan $L \leq M$ için $K + L = M$ koşulu sadece $L = M$ için sağlanır. O halde M, K nın bir tümleyeni olup M tümlenmiş modül bulunur.

Sonuç 3.1.10. M bir R-modül olsun. Eğer M lokal modül ise, tümlenmiştir.

Teorem 3.1.11. M tümlenmiş modül ise, M nin her bölüm modülü tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: M/N, M nin herhangi bir bölüm modülü ve $U/N \leq M/N$ olsun. M tümlenmiş olduğundan U nun M de bir V tümleyeni vardır. Bu durumda $N \leq U$ olduğundan Önerme 3.1.6 (iv) den $(V+N)/N$ de U/N nin M/N de bir tümleyeni olur. Böylece M/N nin her alt modülü bir tümleyene sahip olup M/N tümlenmiştir.

Sonuç 3.1.12. M tümlenmiş modül ise, M nin homomorf görüntüsü tümlenmiştir.

İspat: M nin homomorf görüntüsü M nin bölüm modülüne izomorf olduğundan Teorem 3.1.11 gereğince istenen elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1.13. M bir R-modül olmak üzere $M_1, U \leq M$ ve M_1 tümlenmiş olsun. Eğer $M_1 + U$ nun M de bir tümleyeni varsa U nun da M de bir tümleyeni vardır (Wisbauer, 1991).

İspat: M_1+U nun M deki tümleyeni X ve $M_1\cap(U+X)$ alt modülünün M_1 deki tümleyeni Y olsun. Bu takdirde $M=M_1+U+X$, $(M_1+U)\cap X \ll X$ ve $M_1=(M_1\cap(U+X))+Y$, $(M_1\cap(U+X))\cap Y \ll Y$ elde edilir.

Buradan $M=M_1+U+X=(M_1\cap(U+X))+Y+U+X=U+X+Y$ ve $U\cap(X+Y)\leq X\cap(U+Y)+Y\cap(U+X)\leq X\cap(U+M_1)+Y\cap(U+X) << X+Y$ olur. Böylece $X+Y$, U nun M de bir tümleyenidir.

Teorem 3.1.14. M_1 ve M_2 birer R-modül olmak üzere $M=M_1+M_2$ olsun. M_1 ve M_2 tümlenmiş ise M tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: $U\leq M$ olsun. $M=(M_1+U)+M_2$, M de 0 aşikar tümleyenine sahiptir. X, $(M_1+U)\cap M_2$ nin M_2 de bir tümleyeni ise Yardımcı Teorem 3.1.13 den $0+X$, M de M_1+U nun bir tümleyenidir. Yine $M_1\cap(U+X)$ in M_1 de bir tümleyeni Y ise Yardımcı Teorem 3.1.13 den $X+Y$, U nun M de bir tümleyenidir. Dolayısıyla M tümlenmiştir.

Bu teoremden hareketle sonlu sayıdaki tümlenmiş R-modüllerin toplamının da tümlenmiş olduğu gösterilebilir.

Teorem 3.1.15. R lokal olmayan Dedekind bölgesi ve M bir R-modül olsun. M modülünün tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin burulma modül olması ve M nin her P-bileşeninin tümlenmiş olmasıdır (Zöschinger, 1974).

3.2. $\oplus$-Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.2.1. M bir R-modül olsun. M nin her alt modülünün M de direkt toplam terimi olacak şekilde bir tümleyeni varsa M ye **$\oplus$-tümlenmiş modül** denir. O halde M, $\oplus$-tümlenmiş modül ise $\forall N\leq M$ için $M=N+K$, $N\cap K << K$ ve $K\oplus L=M$ olacak şekilde $K,L\leq M$ vardır (Mohamed ve Müller, 1990).

$\oplus$-tümlenmiş modüller tümlenmiştir.

Teorem 3.2.2. Sonlu sayıda $\oplus$-tümlenmiş R-modülün direkt toplamı da $\oplus$-tümlenmiştir (Harmancı ve ark., 1999).

İspat: n pozitif bir tam sayı ve $1\leq i\leq n$ için M_i ler $\oplus$-tümlenmiş R-modüller olsun. $M=M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_n$ yazalım. $n=2$ için M nin $\oplus$-tümlenmiş olduğunu gösterelim. $n > 2$ için de tümevarım yöntemiyle ispat yapılabilir. $M = M_1 \oplus M_2$ ve $N \leq M$ olsun. $M = M_1 + M_2 + N$ olduğundan 0 modülü, $M_1 + M_2 + N$ nin M de bir tümleyenidir. M_2 $\oplus$-tümlenmiş olduğundan $M_2 \cap (M_1 + N)$ nin, M_2 de direkt toplam terimi olacak şekilde bir K tümleyeni vardır. O halde $M_2 \cap (M_1 + N) + K = M_2$, $K \cap (M_1 + N) << K$ ve $M_2 = K \oplus K'$ olacak şekilde $K' \leq M_2$ vardır. Burada $M = M_1 + M_2 + N = (M_1 + N) + M_2 \cap (M_1 + N) + K =$ $M_1 + N + K$ olur. M_1 $\oplus$-tümlenmiş olduğundan $M_1 \cap (K + N)$ nin M_1 de direkt toplam terimi olan bir L tümleyeni vardır. Buradan $M_1 = M_1 \cap (K + N) + L$, $(K + N) \cap L << L$ ve $M_1 = L \oplus L'$ olacak şekilde $L' \leq M_1$ vardır. Buradan $M = M_1 + N + K = M_1 \cap (K + N) + L + (K + N) = K + N + L$ dir. Ayrıca $K \cap (L + N) \leq K \cap (M_1 + N)$ ve $K \cap (M_1 + N) << K$ olduğundan $K \cap (L + N) << K$ dır. O halde $N \cap (K + L) \leq K \cap (L + N) + L \cap (K + N) << K + L$ dir. Böylece $K + L$, N nin M de bir tümleyenidir. K, M_2 nin ve L, M_1 in direkt toplam terimleri olduğundan $K + L = K \oplus L$ de M nin bir direkt toplam terimidir. Böylece $M = M_1 \oplus M_2$ $\oplus$-tümlenmiştir.

Tanım 3.2.3. M ve N R-modüller olmak üzere $f : M \to N$ bir epimorfizma ve *Çek* $f << M$ ise, f epimorfizmasına **küçük epimorfizma** veya **örtü** denir. Bu durumda M modülüne $f : M \to N$ küçük epimorfizması ile birlikte N modülünün **küçük örtüsü** denir. Eğer M projektif ise M modülüne $f : M \to N$ küçük epimorfizması ile birlikte N modülünün **projektif örtüsü** denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 3.2.4. M bir R-modül olsun. M modülünün her bölüm modülü bir projektif örtüye sahip ise M modülüne **yarı-mükemmel modül** denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.2.5. R bir halka olsun. R sol (sağ) R-modülü yarı-mükemmel ise, R halkasına **yarı-mükemmel** denir (Wisbauer, 1991).

Herhangi bir halkanın yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş modülün projektif örtüye sahip olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.2.6. M bir projektif modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) M yarı-mükemmeldir.

(ii) M tümlenmiştir.

(iii) M $\oplus$-tümlenmiştir (Harmancı ve ark, 1999).

Sonuç 3.2.7. R bir halka olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) R yarı-mükemmeldir.

(ii) ${}_R R$ tümlenmiştir.

(iii) ${}_R R$ $\oplus$-tümlenmiştir.

(iv) Her sonlu üretilmiş serbest R-modül tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

Tanım 3.2.8. R bir halka olsun. $R/RadR$ yarı-basit halka ise, R ye **yarı-lokal halka** denir (Facchini, 1998).

Tanım 3.2.9. R keyfi bir halka olsun. Her sol R-modül projektif örtüye sahip ise, R ye **sol mükemmel halka** denir (Wisbauer, 1991).

R halkasının sol mükemmel olması için gerek ve yeter koşul R nin yarı-lokal sol Bass halka olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.2.10. R halkasının sol mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her sol R-modülün (bol) tümlenmiş olmasıdır (Wisbauer, 1991).

3.3. Genelleştirilmiş Tümlenmiş ve Genelleştirilmiş $\oplus$-Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.3.1. M bir R-modül, U ve V M nin iki alt modülü olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \leq RadV$ ise V ye U nun M de bir **genelleştirilmiş tümleyeni** denir. M R-modülünün her alt modülü bir genelleştirilmiş tümleyene sahip ise M ye bir **genelleştirilmiş tümlenmiş modül** veya kısaca ***GT*-modül** denir (Xue, 1996).

Bu tanımdan da görüleceği üzere bir modülün radikali küçük alt modüllerinin toplamı olduğundan her tümleyen bir genelleştirilmiş tümleyendir. Dolayısıyla her tümlenmiş modül bir genelleştirilmiş tümlenmiş modüldür. Ancak her genelleştirilmiş tümlenmiş modül tümlenmiş modül olmayabilir.

Önerme 3.3.2. M bir R-modül $N, K \leq M$ olsun. $N + K$, M de bir X genelleştirilmiş tümleyenine ve $N \cap (K + X)$ de N de bir Y genelleştirilmiş tümleyenine sahip olsun. Bu takdirde $X+Y$, M de K nın bir genelleştirilmiş tümleyenidir (Çalışıcı ve Türkmen, 2010).

İspat: X, M de $N+K$ nın bir genelleştirilmiş tümleyeni olduğundan $M=(N+K)+X$ ve $(N+K)\cap X\leq RadX$ dir. $N\cap(K+X)$, N de bir Y genelleştirilmiş tümleyene sahip olduğundan $N=\left[N\cap(K+X)\right]+Y$ ve $(K+X)\cap Y\leq RadY$ olur. Buradan $M=N+K+X=\left[\left(N\cap(K+X)\right)+Y\right]+K+X$ $=K+(X+Y)$ dir. $K\cap(X+Y)\leq X\cap(K+Y)+Y\cap(K+X)\leq X\cap(K+N)+$ $Y\cap(K+X)\leq RadX+RadY\leq Rad(X+Y)$ bulunur. Dolayısıyla $X+Y$, M de K nın bir genelleştirilmiş tümleyenidir.

Tanım 3.3.3. M bir R-modül olsun. M nin her alt modülü M de bir direkt toplam terimi olacak şekilde bir genelleştirilmiş tümleyene sahipse M ye bir **genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş modül** denir (Çalışıcı ve Türkmen, 2010).

$\oplus$-tümlenmiş modüller genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiştir. Ancak tersi her zaman doğru değildir.

Teorem 3.3.4. Sonlu sayıda genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş R-modüllerin direkt toplamı da genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiştir (Çalışıcı ve Türkmen, 2010).

İspat: n herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere $M_i, (1\leq i\leq n)$ genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş R-modüllerin herhangi bir sonlu ailesi ve $M=M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_n$ olsun. İspatı $n=2$ için yapalım. $M=M_1\oplus M_2$ ve K, M nin keyfi bir alt modülü olsun. Buradan $M=M_1+M_2+K$ olup M_1+M_2+K, M de bir 0 genelleştirilmiş tümleyenine sahiptir. M_1 genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş olduğundan $M_1\cap(M_2+K)$, M_1 de bir direkt toplam terimi olacak şekilde X genelleştirilmiş tümleyenine sahiptir. Bu takdirde Önerme 3.3.2 den X, M de M_2+K nın bir genelleştirilmiş tümleyenidir. M_2 de bir genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş modül olduğundan $M_2\cap(K+X)$, M_2 de bir direkt toplam terimi olacak şekilde Y genelleştirilmiş tümleyenine sahiptir. Önerme 3.3.2 tekrar uygulanırsa $X+Y$, M de K nın bir genelleştirilmiş tümleyeni olur. X, M_1 in bir direkt toplam terimi ve Y

de M_2 nin bir direkt toplam terimi olduğundan $X \oplus Y$, M nin bir direkt toplam terimidir. Bu ispat benzer şekilde $n > 2$ için yapılabilir.

Teorem 3.3.5. M bir projektif modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.
(i) M bir yarı-mükemmel modüldür.
(ii) M bir genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş modüldür (Türkmen, 2013).

Teorem 3.3.6. M sonlu üretilmiş bir R-modül olsun. Bu takdirde M nin genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin $\oplus$-tümlenmiş olmasıdır (Çalışıcı ve Türkmen, 2010).

İspat: $(\Rightarrow)$ M nin herhangi bir N alt modülünü alalım. M genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş olduğundan N nin M de direkt toplam terimi olacak şekilde bir K genelleştirilmiş tümleyeni vardır. Buradan $M = N + K$, $N \cap K \leq RadK$ ve $M = K \oplus L$ olacak şekilde $\exists K$, $L \leq M$ vardır. Teorem 2.2.9 gereğince K sonlu üretilmiştir. Sonuç 2.9.9 dan $RadK << K$ elde edilir. Teorem 2.8.2 (i) gereğince $N \cap K << K$ olup K, N nin M de bir tümleyeni olur. Dolayısıyla M $\oplus$-tümlenmiştir.
$(\Leftarrow)$ Açıktır.

Tanım 3.3.7. M bir R-modül olsun. Eğer M nin her dual sonlu alt modülü M nin direkt toplam terimi olan bir genelleştirilmiş tümleyene sahip ise M ye **dual sonlu genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş** modül denir (Koşan, 2009).

Önerme 3.3.8. M sonlu üretilmiş bir R-modül olsun. M nin genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin dual sonlu genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş olmasıdır (Ecevit ve ark., 2012).
İspat: M modülü sonlu üretilmiş olduğundan her alt modülü dual sonlu olup istenen elde edilir.

Tanım 3.3.9. M bir R-modül olsun. $RadM$, M modülünde bir tümleyene sahipse M modülüne **radikal tümlenmiş modül** denir (Zöschinger, 1974).

Radikal tümlenmiş modüllerden daha kuvvetli bir yapı olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.3.10. M bir modül olsun. M modülünün $RadM$ alt modülünü kapsayan her alt modülü M de tümleyene sahipse, M ye **güçlü radikal tümlenmiş modül** denir (Büyükaşık ve Türkmen, 2011).

Teorem 3.3.11. M, $RadM \ll M$ koşulunu sağlayan bir R-modül olsun. Bu takdirde M modülünün tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul M modülünün güçlü radikal tümlenmiş modül olmasıdır (Büyükaşık ve Türkmen, 2011).

$\oplus$-tümlenmiş modüllerin genellemesi veya başka bir ifadeyle radikal tümlenmiş modüllerden daha kuvvetli bir yapı olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 3.3.12. M bir modül olsun. $RadM$, M modülünde direkt toplam terimi olacak şekilde bir tümleyene sahipse, M modülüne **$\oplus$-radikal tümlenmiş modül** denir (Nişancı Türkmen ve Pancar, 2013).

Tanım 3.3.13. M bir modül olsun. M modülünün $RadM$ alt modülünü kapsayan her alt modülü M modülünde direkt toplam terimi olacak şekilde bir tümleyene sahipse, M modülüne **güçlü $\oplus$-radikal tümlenmiş modül** denir (Nişancı Türkmen ve Pancar, 2013).

Teorem 3.3.14. R halkasının yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş serbest R-modülün güçlü $\oplus$-radikal tümlenmiş olmasıdır (Nişancı Türkmen ve Pancar, 2013).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. T-Toplam

Tanım 4.1.1. M bir R-modül ve U, $V \leq M$ olsun. Eğer U ve V M de birbirlerinin tümleyenleri ise M ye U ve V nin bir **t-toplamı** denir. Eğer M, U ve V nin bir t-toplamı ise $M = U + V$, $U \cap V << U$ ve $U \cap V << V$ olur. U ile V ye **t-toplam terimleri**, M modülünün bu şekildeki yazılışına da M nin bir **t-ayrışımı** denir.

$M = U \oplus V$ ise, U ile V nin M modülünde t-toplam terimi olduğu açıktır.

Teorem 4.1.2. M bir R-modül olsun. M nin bol tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin her U alt modülü için $X \leq U$ ve $U \cap Y << Y$ olacak şekilde M nin bir $M = X + Y$ t-ayrışımının bulunmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M bol tümlenmiş olsun. M nin herhangi bir U alt modülünü alalım. M bol tümlenmiş olduğundan tümlenmiş olup U nun M de bir Y tümleyeni vardır. Bu durumda $M = U + Y$ ve $U \cap Y << Y$ olur. $M = U + Y$ ve M bol tümlenmiş olduğundan Y nin M de $X \leq U$ olacak şekilde bir X tümleyeni vardır. O halde $M = X + Y$ ve $X \cap Y << X$ olur. Ayrıca $X \leq U$ ve $U \cap Y << Y$ olduğu göz önüne alınırsa $X \cap Y << Y$ olur. Böylece $X \leq U$ ve $U \cap Y << Y$ olacak şekilde M nin bir $M = X + Y$ t-ayrışımı bulunur.

$(\Leftarrow)$ M nin herhangi bir U alt modülünü alalım. $M = U + V$ olsun. Hipotezden $X \leq U \cap V$ ve $U \cap V \cap Y << Y$ olacak şekilde M nin bir $M = X + Y$ t-ayrışımı vardır. $M = X + Y$ ve $X \leq U \cap V \leq V$ olduğundan modüler kuraldan $V = X + V \cap Y$ olup $M = U + V = U + X + V \cap Y = U + V \cap Y$ olur. Yine hipotezden $S \leq V \cap Y$ ve $V \cap Y \cap T << T$ olacak şekilde M nin bir $M = S + T$ t-ayrışımı vardır. $S \leq V \cap Y$ ve $M = S + T$ olduğundan modüler kuraldan $V \cap Y = S + V \cap Y \cap T$ elde edilir. Ayrıca $V \cap Y \cap T << T$ olduğundan $M = U + V \cap Y = U + S + V \cap Y \cap T = U + S$ olur. Burada $U \cap S \leq U \cap V \cap Y << Y$ olduğundan $U \cap S << M$ olup S, M de bir tümleyen olduğundan Önerme 3.1.6. (v) den $U \cap S << S$ olur. Yani U, M de

$S \leq V$ olacak şekilde bir S tümleyenine sahiptir. Böylece U, M de bol tümleyene sahip olup M bol tümlenmiştir.

Tanım 4.1.3. M bir R-modül ve $\{U_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Eğer her $i \in I$ için U_i ve $\sum_{k\in I-\{i\}} U_k$, M de birbirlerinin tümleyenleri ise, M ye $\{U_i\}_{i\in I}$ **ailesinin bir t-toplamı** denir.

Önerme 4.1.4. M bir π-projektif R-modül ve U ile V nin bir t-toplamı olsun. Bu durumda $U \cap V = 0$ olup $M = U \oplus V$ eşitliği vardır (Wisbauer, 1991).

İspat: $U \times V$ modülünün $P = \{(u,-u) | u \in U \cap V\}$ alt modülünü ele alalım. Eğer $P = \{(0,0)\}$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $P = \{(u,-u) | u \in U \cap V\}$ $\leq (U \cap V)\times 0 + 0 \times (U \cap V)$ olduğu gösterilebilir. M, U ve V nin bir t-toplamı olduğundan $U \cap V << U$ ve $U \cap V << V$ olur. Bu durumda $(U \cap V)\times 0 << U \times 0$, $0 \times (U \cap V) << 0 \times V$ olup, $P \leq (U \cap V)\times 0 + 0 \times (U \cap V) << U \times 0 + 0 \times V = U \times V$ dir. Burada P, $f : U \times V \to M$, $(u,v) \to u+v$ homomofizmasının çekirdeği olduğu gösterilebilir. M modülü π-projektif olduğundan Teorem 2.5.10 gereğince f parçalanabilirdir. Dolayısıyla $f \circ g = I_M$ olacak şekilde bir $g : M \to U \times V$ homomorfizması vardır. Bu durumda Teorem 2.5.7 gereğince $U \times V = Gör\, g \oplus Çek\, f$ olduğundan $U \times V = Gör\, g \oplus P$ olup $P << U \times V$ olduğundan bu durum ancak $P = \{(0,0)\}$ olmasıyla mümkündür.

Önerme 4.1.4 ün genellemesi olarak Sonuç 4.1.5 verilebilir.

Sonuç 4.1.5. M bir R-modül ve $\{U_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. M π-projektif ve $\{U_i\}_{i\in I}$ ailesinin bir t-toplamı ise, $M = \bigoplus_{i\in I} U_i$ olur.

İspat: M, π-projektif ve $\{U_i\}_{i\in I}$ ailesinin bir t-toplamı olsun. Bu durumda her $k \in I$ için U_k ve $\sum_{i\in I-\{k\}} U_i$, M de birbirlerinin tümleyenleri olup Önerme 4.1.4 gereğince $U_k \cap \left(\sum_{i\in I-\{k\}} U_i \right) = 0$ bulunur. O halde $M = \bigoplus_{i\in I} U_i$ olup istenen elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.6. M bir R-modül ve V, U nun M de bir tümleyeni ve K, $T \leq V$ olsun. T, K nın V de bir tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul T modülünün $U+K$ nın M de bir tümleyeni olmasıdır (Nebiyev ve Pancar, 2013).

İspat: $(\Rightarrow)$ T, K nın V de bir tümleyeni olsun. $U+K+T_1=M$ olan herhangi $T_1 \leq T$ alalım. K, $T_1 \leq V$ olduğundan $K+T_1 \leq V$ olup ayrıca $U+K+T_1=M$ ve V, U nun M de bir tümleyeni olduğundan $K+T_1=V$ olur. O halde T, K nın V de bir tümleyeni olduğundan $T_1=T$ olup T modülü $U+K$ nın M de bir tümleyeni olur.

$(\Leftarrow)$ T, $U+K$ nın M de bir tümleyeni olsun. $K+T_1=V$ olan herhangi $T_1 \leq T$ alalım. Bu durumda $M=U+V=U+K+T_1$ olup $T_1 \leq T$ ve T, $U+K$ nın M de bir tümleyeni olduğundan $T_1=T$ olur. O halde T, K nın V de bir tümleyeni olup istenen elde edilir.

Önerme 4.1.7. M, U ve V nin bir t-toplamı olsun. Eğer K, S nin U da bir tümleyeni ve T, L nin V de bir tümleyeni ise $K+T$, $S+L$ nin M de bir tümleyeni olur (Nebiyev ve Pancar, 2013).

İspat: Kabul edelim ki K, S nin U da bir tümleyeni, T de L nin V de bir tümleyeni olsun. Bu durumda $M=U+V=S+K+L+T=S+L+K+T$ bulunur. Ayrıca Yardımcı Teorem 4.1.6 dan K modülü $V+S$ nin, T de $U+L$ nin M de bir tümleyeni olup $(V+S)\cap K \ll K$ ve $(U+L)\cap T \ll T$ olur. O halde
$$(S+L)\cap(K+T) \leq (S+L+K)\cap T+(S+L+T)\cap K=(U+L)\cap T+(V+S)\cap K$$
$\ll T+K=K+T$ olup $K+T$, $S+L$ nin M de bir tümleyeni olur.

Önerme 4.1.7 den aşağıdaki sonuçlar kolayca elde edilebilir.

Sonuç 4.1.8. M, $U_1,U_2,...,U_n$ nin bir t-toplamı olsun. Eğer K_i, T_i nin U_i $(i=1,2,...,n)$ de bir tümleyeni ise $K_1+K_2+\cdots+K_n$ de $T_1+T_2+\cdots+T_n$ nin M de bir tümleyenidir.

Sonuç 4.1.9. M, $U_1,U_2,...,U_n$ nin bir t-toplamı olsun. Eğer U_i, K_i ve T_i $(i=1,2,\ldots,n)$ nin bir t-toplamı ise M, $K_1+K_2+\cdots+K_n$ ve $T_1+T_2+\cdots+T_n$ nin bir t-toplamıdır.

Sonuç 4.1.10. M, $U_1,U_2,...,U_n$ nin bir t-toplamı olsun. Eğer K_i, U_i $(i=1,2,...,n)$ de bir tümleyen ise $K_1+K_2+\cdots+K_n$ de M de bir tümleyendir.

Sonuç 4.1.11. M, $U_1,U_2,...,U_n$ nin bir t-toplamı olsun. Eğer K_i, U_i $(i=1,2,...,n)$ nin bir t-toplam terimi ise $K_1+K_2+\cdots+K_n$ de M nin bir t-toplam terimidir.

Önerme 4.1.12. M, U ile V nin bir t-toplamı ve L, $T\leq V$ olsun. Bu takdirde V nin L ile T nin bir t-toplamı olması için gerek ve yeter koşul M nin hem $U+L$ ile T nin hem de $U+T$ ile L nin bir t-toplamı olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ V, L ile T nin bir t-toplamı olsun. T, L nin V de bir tümleyeni ve V, U nun M de bir tümleyeni olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.6 dan T, $U+L$ nin M de bir tümleyeni olur. Bu takdirde $(U+L)\cap T<<T$ dir. Benzer şekilde $(U+T)\cap L<<L$ olduğu gösterilebilir. $U\cap V<<U$ olduğundan $(U+L)\cap T\leq U\cap(L+T)+L\cap(U+T)=U\cap V+(U+T)\cap L<<U+L$ olur. $(U+L)\cap T<<T$, $(U+L)\cap T<<U+L$ ve $M=U+V=(U+L)+T$ olduğundan M, $U+L$ ve T nin bir t-toplamıdır. Benzer işlemler yapılarak M nin $U+T$ ve L nin bir t-toplamı olduğu gösterilebilir.

$(\Leftarrow)$ Kabulden T, $U+L$ nin M de bir tümleyenidir. O halde Yardımcı Teorem 4.1.6 ile T, L nin V de bir tümleyenidir. Benzer şekilde L de T nin V de bir tümleyenidir. Böylece V, T ve L nin bir t-toplamıdır.

Teorem 4.1.13. M, $\{U_i\}_{i\in I}$ ailesinin bir t-toplamı olsun. Bu durumda $RadM=\sum_{i\in I}RadU_i$ olur.

İspat: $\sum_{i\in I}RadU_i\leq RadM$ olduğu açıktır. Tersine bir $x\in RadM$ alalım. $x\in M=\sum_{i\in I}U_i$ olduğundan $x=x_{i_1}+x_{i_2}+\cdots+x_{i_n}$ olacak şekilde $\exists i_1,i_2,...,i_n\in I$ ve $\exists x_{i_1}\in U_{i_1}$, $\exists x_{i_2}\in U_{i_2}$,…, $\exists x_{i_n}\in U_{i_n}$ vardır. $1\leq t\leq n$ olmak üzere $Rx_{i_t}+S=U_{i_t}$ olan herhangi bir $S\leq U_{i_t}$ alalım. Burada $Rx+S+\sum_{i\in I-\{i_t\}}U_i=M$ olduğu gösterilebilir. $Rx+S+\sum_{i\in I-\{i_t\}}U_i=M$ ve $Rx<<M$ olduğundan $S+\sum_{i\in I-\{i_t\}}U_i=M$ olup ayrıca

$S \leq U_{i_t}$ ve U_{i_t}, $\sum_{i \in I - \{i_t\}} U_i$ nin M de bir tümleyeni olduğundan $S = U_{i_t}$ bulunur. O halde $Rx_{i_t} << U_{i_t}$ olup $x_{i_t} \in Rad\,U_{i_t}$ olur. Dolayısıyla $x = x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_n} \in \sum_{i \in I} RadU_i$ olup $RadM \leq \sum_{i \in I} RadU_i$ elde edilir. Sonuç olarak $RadM = \sum_{i \in I} RadU_i$ dir.

4.2. T-Radikal Tümlenmiş ve Güçlü T-Radikal Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.2.1. M bir R-modül olsun. $RadM$, M modülünde t-toplam terimi olacak şekilde bir tümleyene sahipse M modülüne **t-radikal tümlenmiş modül** denir.

O halde M t-radikal tümlenmiş modül ise, $M = RadM + K$, $RadM \cap K << K$ ve $M = K + L$, $K \cap L << K$, $K \cap L << L$ olacak şekilde K, $L \leq M$ vardır.

Her $\oplus$-radikal tümlenmiş modül t-radikal tümlenmiştir ve her t-radikal tümlenmiş modül radikal tümlenmiştir.

Tanım 4.2.2. M bir R-modül olsun. M modülünün $RadM$ alt modülünü kapsayan her alt modülü M modülünde t-toplam terimi olacak şekilde bir tümleyene sahipse, M modülüne **güçlü t-radikal tümlenmiş modül** denir.

O halde M güçlü t-radikal tümlenmiş modül ise, $RadM \subseteq K$ olmak üzere M nin her K alt modülü için $M = K + L$, $K \cap L << L$ olacak şekilde M nin bir L t-toplam terimi vardır.

Güçlü t-radikal tümlenmiş modüllerin, güçlü radikal tümlenmiş olduğu ve güçlü $\oplus$-radikal tümlenmiş modüllerin, güçlü t-radikal tümlenmiş olduğu açıktır.

Önerme 4.2.3. Her tümlenmiş modül güçlü t-radikal tümlenmiştir.

İspat: M tümlenmiş modül ve $RadM \leq U \leq M$ olsun. M tümlenmiş modül olduğundan U nun M de bir V tümleyeni vardır. Yine M tümlenmiş modül olduğundan V nin M de bir V' tümleyeni vardır. O halde $M = V + V'$, $V \cap V' << V'$ olur. $V \cap V' << V'$ olduğundan $V \cap V' << M$ dir. Buradan Önerme 3.1.6 (v) gereğince $V \cap V' << V$ olur. O halde V ve V', M de birbirlerinin tümleyeni olup V, M nin bir t-toplam terimidir. Dolayısıyla M güçlü t-radikal tümlenmiştir.

Bu bölümün sonunda Önerme 4.2.3 ün tersinin her zaman doğru olmadığına dair bir örnek verilecektir.

Önerme 4.2.4. Her radikal modül (güçlü) t-radikal tümlenmiştir.

İspat: M bir radikal modül olsun. $M = RadM + 0$ ve $RadM \cap 0 = 0 << 0$ ve $M = 0 + M$, $0 \cap M = 0 << 0$ ve $0 \cap M = 0 << M$ olduğundan M modülünün $RadM$ alt modülü M de t-toplam terimi olacak şekilde bir tümleyene sahiptir. Dolayısıyla M t-radikal tümlenmiştir. Yine M modülünün $RadM$ alt modülünü kapsayan M den farklı bir alt modülü olmadığından M güçlü t-radikal tümlenmiştir.

Sonuç 4.2.5. Her M R-modülü için $P(M)$ güçlü t-radikal tümlenmiştir.

İspat: M keyfi bir R-modül olsun. $RadP(M) = P(M)$ olduğundan Önerme 4.2.4 gereği $P(M)$ güçlü t-radikal tümlenmiştir.

Önerme 4.2.6. $RadM << M$ koşulunu sağlayan her M modülü t-radikal tümlenmiştir.

İspat: M, $RadM << M$ koşulunu sağlasın. $M = RadM + N$ koşulunu sağlayan $N \leq M$ alt modülünü alalım. $RadM << M$ olduğundan $M = N$ dir. $RadM \cap N << N$ ve $M = N + 0$, $N \cap 0 = 0 << 0$, $N \cap 0 = 0 << N$ olduğundan M modülü t-radikal tümlenmiştir.

Sonuç 4.2.7. Her eş atom modül t-radikal tümlenmiştir.

Sonuç 4.2.8. R halkası sol Bass halka ise sıfırdan farklı her sol R-modül t-radikal tümlenmiştir.

İspat: R sol Bass halka olsun. Bu takdirde Önerme 2.9.16 gereğince sıfırdan farklı her sol M R-modülü için $RadM << M$ dir. O halde Önerme 4.2.6 dan istenen elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.2.9. M (güçlü) t-radikal tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde M t-toplam terimi olan radikal alt modüle sahiptir.

İspat: M (güçlü) t-radikal tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde $M = RadM + V$, $RadM \cap V << V$, $M = V + V'$, $V \cap V' << V$ ve $V \cap V' << V'$ olacak şekilde V, $V' \leq M$ vardır. $RadV' = V'$ olduğunu gösterelim. $RadM \cap V << V$ ve $RadM \cap V = RadV$ olduğundan $RadV << V$ dir. $M = V + V'$, $V \cap V' << V$ ve $V \cap V' << V'$ olduğundan Teorem 4.1.13 den $RadM = RadV + RadV'$ olur. Buradan

$M = V + RadV'$ bulunur. Eşitliğin her iki tarafının V' ile arakesiti alınıp modüler kural uygulanırsa $V' = RadV' + (V \cap V')$ elde edilir. $V \cap V' << V'$ olduğundan $RadV' = V'$ bulunur. Dolayısıyla V', M nin radikal bir t-toplam terimi olur.

Önerme 4.2.10. M indirgenmiş modül olsun. M (güçlü) t-radikal tümlenmiş ise, $RadM << M$ dir.

İspat: M (güçlü) t-radikal tümlenmiş olduğundan $M = RadM + V$, $RadM \cap V << V$ ve $M = V + V'$, $V \cap V' << V$, $V \cap V' << V'$ koşullarını sağlayan M modülünün V, V' alt modülleri vardır. $RadM \cap V = RadV$ olduğundan $RadV << V$ olur. Yardımcı Teorem 4.2.9 dan $RadV' = V'$ olur. M indirgenmiş modül olduğundan $V' = 0$ olup $M = V$ bulunur. O halde $RadM = M \cap RadM = V \cap RadM = RadV << V = M$ olur.

Önerme 4.2.3 ve ilgili tanımlar yardımıyla Önerme 4.2.11 elde edilir.

Önerme 4.2.11. M bir R-modül ve $RadM << M$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) M güçlü t-radikal tümlenmiştir.

(ii) M güçlü radikal tümlenmiştir.

(iii) M tümlenmiştir.

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ Açıktır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Teorem 3.3.11 den açıktır.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Önerme 4.2.3 den açıktır.

Önerme 4.2.12. M bir dağılımlı güçlü t-radikal tümlenmiş modül olsun. U, M modülünün bir alt modülü olmak üzere M / U bölüm modülü de güçlü t-radikal tümlenmiştir.

İspat: U, M modülünün bir alt modülü ve V / U, M / U bölüm modülünün $Rad(M / U) \subseteq V / U$ koşulunu sağlayan bir alt modülü olsun. Burada $(RadM + U) / U \subseteq Rad(M / U)$ olduğu gösterilebilir. Buradan $RadM \subseteq V$ olur. M güçlü t-radikal tümlenmiş olduğundan V nin M de t-toplam terimi olacak şekilde bir tümleyeni vardır. O halde $M = V + T$, $V \cap T << T$ ve $M = T + T'$, $T \cap T' << T$ ve $T \cap T' << T'$ olacak şekilde T, $T' \leq M$ vardır. Önerme 3.1.6 (iv) den $(T + U) / U$, V/U nun M / U da bir tümleyeni olur. Şimdi $(T + U) / U$ nun

M/U da bir t-toplam terimi olduğunu gösterelim. $M = T + T'$ olduğundan $M/U = (T+U)/U + (T'+U)/U$ olur. M dağılımlı modül olduğundan $U + (T \cap T') = (U+T) \cap (U+T')$ olup $[(T+U)/U] \cap [(T'+U)/U] = [(T+U) \cap (T'+U)]/U = (U + (T \cap T'))/U$ olur. $T \cap T' \ll T$ ve $T \cap T' \ll T'$ olduğundan $(U + (T \cap T'))/U \ll (T+U)/U$ ve $(U + (T \cap T'))/U \ll (T'+U)/U$ yazılabilir. Böylece $(T+U)/U$, M/U da bir t-toplam terimi olur. Sonuç olarak M/U bölüm modülü güçlü t-radikal tümlenmiştir.

Teorem 4.2.13. M, M_1 ve M_2 nin bir t-toplamı olsun. Eğer M_1 ve M_2 t-radikal tümlenmiş modüller ise M de t-radikal tümlenmiştir.

İspat: M_1 t-radikal tümlenmiş modül olduğundan $RadM_1$ in M_1 de t-toplam terimi olacak şekilde bir V_1 tümleyeni vardır. M_2 t-radikal tümlenmiş modül olduğundan $RadM_2$ nin de M_2 de t-toplam terimi olacak şekilde bir V_2 tümleyeni vardır. M, M_1 ve M_2 nin bir t-toplamı olduğundan Teorem 4.1.13 gereğince $RadM = RadM_1 + RadM_2$ olur. V_1, $RadM_1$ in M_1 de bir tümleyeni ve V_2 de $RadM_2$ nin M_2 de bir tümleyeni olduğundan Önerme 4.1.7 gereğince $V_1 + V_2$, $RadM = RadM_1 + RadM_2$ nin M de bir tümleyenidir. Ayrıca V_1, M_1 in bir t-toplam terimi ve V_2, M_2 nin bir t-toplam terimi olduğundan Sonuç 4.1.11 den $V_1 + V_2$, M de bir t-toplam terimi olup M, t-radikal tümlenmiş modüldür.

Sonuç 4.2.14. T-radikal tümlenmiş modüllerin sonlu sayıdaki t-toplamı da t-radikal tümlenmiştir.

Önerme 4.2.15. R lokal olmayan bir değişmeli bölge ve M bir injektif R-modül olsun. Bu takdirde M (güçlü) t-radikal tümlenmiş modüldür.

İspat: M injektif bir R-modül ve R lokal olmayan değişmeli bir bölge olduğundan Teorem 2.10.5 gereğince M radikal modüldür. Dolayısıyla M (güçlü) t-radikal tümlenmiş modüldür.

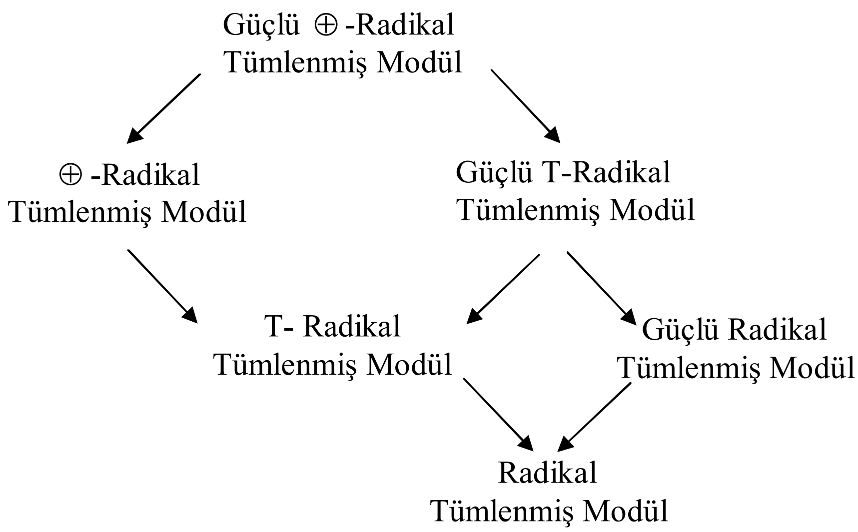
Sonuç 4.2.16. Lokal olmayan değişmeli bir bölge üzerindeki her modül bir (güçlü) t-radikal tümlenmiş modülün alt modülüdür.

Örnek 4.2.17. $\mathbb{Z}$ lokal olmayan değişmeli bir bölge ve ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ modülü injektif olduğundan Teorem 2.10.5 gereğince $Rad\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ olur. O halde Önerme 4.2.4 gereğince ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ güçlü t-radikal tümlenmiş modüldür. Ancak ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ burulmasız modül olduğundan Teorem 3.1.15 gereğince tümlenmiş değildir.

Teorem 4.2.18 R keyfi bir halka olsun. R halkası sol mükemmel ise her sol R-modül güçlü t-radikal tümlenmiştir.

İspat: R sol mükemmel halka olsun. Bu takdirde Teorem 3.2.10 dan her sol R-modül tümlenmiş olup Önerme 4.2.3 den her sol R-modül güçlü t-radikal tümlenmiştir.

Aşağıdaki şema (güçlü) t-radikal tümlenmiş modüllerin diğer modül sınıfları içindeki yerini göstermektedir.



Şekil 4.1. Güçlü t-radikal tümlenmiş modüllerin yeri

4.3. T-Genelleştirilmiş Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.3.1. M bir R-modül olsun. M nin her alt modülünün M de tümleyen olan en az bir genelleştirilmiş tümleyeni varsa M ye **t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül** denir. Bu takdirde M, t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül ise her $N \leq M$ için $M = N + K$, $N \cap K \leq RadK$ ve $M = K + L$, $K \cap L << K$ olacak şekilde K, $L \leq M$ vardır.

Açıktır ki genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş modüller t-genelleştirilmiş tümlenmiştir. Ancak bunun tersi her zaman doğru olmayabilir (Bkz. Örnek 4.4.7).

Her tümlenmiş modül t-genelleştirilmiş tümlenmiştir. Ancak bunun tersi her zaman doğru olmayabilir (Bkz. Örnek 4.3.7 ve Örnek 4.3.8). Oyuk modüller tümlenmiş olduğundan t-genelleştirilmiş tümlenmiştir.

Önerme 4.3.2. Sonlu sayıdaki t-genelleştirilmiş tümlenmiş R-modülün t-toplamı da t-genelleştirilmiş tümlenmiştir.

İspat: n bir pozitif tam sayı $I=\{1,2,\ldots,n\}$ olmak üzere M modülü $\{M_i\}_{i\in I}$, t-genelleştirilmiş tümlenmiş R-modüllerin herhangi bir t-toplamı olsun. İspatı $n=2$ için yapalım. M modülü M_1 ve M_2 modüllerinin bir t-toplamı ve N, M nin keyfi bir alt modülü olsun. Buradan $M=M_1+M_2+N$ olur. M_2 t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül olduğundan $M_2\cap(M_1+N)$ nin M_2 de tümleyen olan bir K genelleştirilmiş tümleyeni vardır. O halde $M_2=M_2\cap(M_1+N)+K$, $[(M_1+N)\cap M_2]\cap K\leq RadK$ ve $M_2=K+K'$, $K\cap K'<<K$ olacak şekilde $K'\leq M_2$ vardır. Buradan $M=M_1+M_2+N=M_1+M_2\cap(M_1+N)+K+N=M_1+N+K$ elde edilir. $[(M_1+N)\cap M_2]\cap K=(M_1+N)\cap K$ olduğundan $(M_1+N)\cap K\subseteq RadK$ bulunur. O halde K, M_1+N nin M de bir genelleştirilmiş tümleyenidir. M_1 t-genelleştirilmiş tümlenmiş olduğundan $M_1\cap(K+N)$ nin M_1 de tümleyen olan bir L genelleştirilmiş tümleyeni vardır. Yani $M_1=M_1\cap(K+N)+L$, $M_1\cap(K+N)\cap L\subseteq RadL$ ve $M_1=L+L'$, $L\cap L'<<L$ olacak şekilde $L'\leq M_1$ vardır. Buradan $M=M_1+N+K=M_1\cap(K+N)+L+N+K=K+N+L$ olur. $M_1\cap(K+N)\cap L=(K+N)\cap L$ olduğundan $(K+N)\cap L\subseteq RadL$ dir. O halde $N\cap(K+L)\leq K\cap(N+L)+L\cap(N+K)\leq K\cap(M_1+N)+(K+N)\cap L\subseteq RadK+RadL\subseteq Rad(K+L)$ olur. Bu durumda $M=N+(K+L)$ ve $N\cap(K+L)\subseteq Rad(K+L)$ olduğundan $K+L$, N nin M de bir genelleştirilmiş tümleyenidir. M, M_1 ve M_2 nin bir t-toplamı, K, M_2 de tümleyen ve L, M_1 de tümleyen olduğundan Sonuç 4.1.11 den $K+L$, M de bir tümleyendir. N nin M de tümleyen olan bir genelleştirilmiş tümleyeni bulunduğundan M t-genelleştirilmiş tümlenmiştir. $n>2$ için benzer şekilde ispatlanabilir.

Sonuç 4.3.3. Sonlu sayıda t-genelleştirilmiş tümlenmiş R-modülün direkt toplamı da t-genelleştirilmiş tümlenmiştir.

Önerme 4.3.4. M bir R-modül ve $RadM << M$ olsun. M nin t-genelleştirilmiş tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin tümlenmiş olmasıdır.

İspat: N, M nin herhangi bir alt modülü olsun.

$(\Rightarrow)$ M t-genelleştirilmiş tümlenmiş olduğundan $M = N + K$, $N \cap K \subseteq RadK$ ve K, M de tümleyen olacak şekilde $K \leq M$ vardır. $N \cap K \subseteq RadK \subseteq RadM$ olduğu açıktır. Ayrıca $RadM << M$ olduğundan $N \cap K << M$ olur. Önerme 3.1.6 (v) den $N \cap K << K$ elde edilir. O halde K, N nin M de bir tümleyenidir. Dolayısıyla M tümlenmiş modüldür.

$(\Leftarrow)$ M tümlenmiş olduğundan $M = N + K$ ve $N \cap K << K$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. $N \cap K \subseteq RadK$ olduğundan K, M de N nin bir genelleştirilmiş tümleyenidir. M nin her alt modülünün tümleyen olan bir genelleştirilmiş tümleyeni bulunduğundan M bir t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüldür.

Sonuç 4.3.5. (i) Her eş-atom t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül, tümlenmiştir.

(ii) Her sonlu üretilmiş t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül, tümlenmiştir.

Önerme 4.3.6. M radikal modül ise, M t-genelleştirilmiş tümlenmiştir.

İspat: M nin herhangi bir N alt modülünü alalım. $N + M = M$ ve $N \cap M \subseteq M = RadM$ olduğundan M, N nin bir genelleştirilmiş tümleyenidir. Ayrıca M, 0 ın bir tümleyenidir. Dolayısıyla M t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüldür.

Aşağıdaki iki örnek genel olarak t-genelleştirilmiş tümlenmiş modülün tümlenmiş olması gerekmediğini göstermektedir. Bunun için kullanılan ilk örnekteki M modülü $RadM = M$ şartını sağlamaktadır. Fakat ikinci örnek $RadM \neq M$ olacak şekildeki M modülleri için de istenilen şartları sağlayan modüllerin var olduğunu göstermektedir.

Örnek 4.3.7. M, $RadM = M$ şartını sağlayan bir burulmasız $\mathbb{Z}$-modül olsun. Önerme 4.3.6 dan M t-genelleştirilmiş tümlenmiştir. Ancak Teorem 3.1.15 den M tümlenmiş değildir. Dolayısıyla M $\oplus$-tümlenmiş değildir. M yerine $\mathbb{Q}$ burulmasız

$\mathbb{Z}$-modülü alınarak ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ modülünün $\oplus$-tümlenmiş olmayan t-genelleştirilmiş tümlenmiş olduğu görülür.

Örnek 4.3.8. p bir asal tamsayı olmak üzere $M=\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_p$ sol $\mathbb{Z}$-modülünü göz önüne alalım. Burada $RadM=Rad\left(\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Z}_p\right)=Rad\mathbb{Q}\oplus Rad\left(\mathbb{Z}_p\right)=\mathbb{Q}\oplus 0$ olup $RadM\neq M$ dir. $\mathbb{Z}_p$ basit olduğundan t-genelleştirilmiş tümlenmiştir. O halde Sonuç 4.3.3 gereğince M t-genelleştirilmiş tümlenmiştir. Ancak $\mathbb{Q}$ tümlenmiş olmadığından M tümlenmiş değildir.

Önerme 4.3.9. M modülü M_1 ve M_2 modüllerinin t-toplamı olsun. M_2 nin t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul M/M_1 in her N/M_1 alt modülü için $K\leq M_2$, $M=K+N$ ve $N\cap K\subseteq RadM$ olacak şekilde M nin bir K tümleyen alt modülünün olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ Kabul edelim ki M_2 t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül ve $N/M_1\leq M/M_1$ olsun. M_2 t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül olduğundan $N\cap M_2$ alt modülünün M_2 de tümleyen olacak şekilde bir K genelleştirilmiş tümleyeni vardır. O halde $M_2=N\cap M_2+K$, $N\cap M_2\cap K\subseteq RadK$ ve $M_2=K+K'$, $K\cap K'<<K$ olacak şekilde $K'\leq M_2$ vardır. $M=M_1+M_2$ olduğundan $M=M_1+N\cap M_2+K=N+K$ olur. Ayrıca $N\cap K\subseteq RadK\subseteq RadM$ olur. K, M_2 de bir tümleyen ve M, M_1 ve M_2 nin bir t-toplamı olduğundan Sonuç 4.1.10 dan K, M de bir tümleyen alt modüldür.

$(\Leftarrow)$ Hipotezi sağlayan bir M/M_1 bölüm modülünü ele alalım. $H\leq M_2$ olsun. Bu takdirde $\left(H+M_1\right)/M_1\leq M/M_1$ dir. Hipotez gereğince $L\leq M_2$, $M=L+H+M_1$ ve $L\cap\left(H+M_1\right)\subseteq RadM$ olacak şekilde M nin bir L tümleyen alt modülü vardır. $M_2=M\cap M_2=\left(L+H\right)+M_1\cap M_2$ ve $M_1\cap M_2<<M_2$ olduğundan $M_2=L+H$ elde edilir. Ayrıca $L\cap H\leq L\cap\left(H+M_1\right)\subseteq RadM$ ve $L\cap H\leq L$ olduğundan Önerme 3.1.6 (vi) gereğince $L\cap H\leq L\cap RadM=RadL$ dir. Buradan L, M_2 de H nin bir genelleştirilmiş tümleyenidir.

Kabul edelim ki L, M de T nin bir tümleyeni olsun. $M = T + L$ ve $T \cap L << L$ olur. $M_2 = M_2 \cap M = M_2 \cap (T+L) = L + M_2 \cap T$ ve $M_2 \cap T \cap L \leq T \cap L << L$ olduğundan L, M_2 de $M_2 \cap T$ nin bir tümleyenidir. Yani L, M_2 de bir tümleyen olur.

Teorem 4.3.10. M modülü M_1 ve M_2 modüllerinin t-toplamı, M bir t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül ve M nin $M = K + M_2$ koşulunu sağlayan her K tümleyen alt modülü için $K \cap M_2$, M de bir tümleyen olsun. Bu takdirde M_2 t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüldür.

İspat: $N / M_1 \leq M / M_1$ olsun. M nin $N \cap M_2$ alt modülünü göz önüne alalım. M t-genelleştirilmiş tümlenmiş olduğundan $N \cap M_2$ alt modülünün M de tümleyen olacak şekilde bir K' genelleştirilmiş tümleyeni vardır. Yani $M = (N \cap M_2) + K'$ ve $(N \cap M_2) \cap K' \leq RadK'$ olacak şekilde M de bir K' tümleyen alt modülü vardır. Buradan $M = N + K'$ olur. $M = (N \cap M_2) + K'$ eşitliğinin her iki tarafının M_2 ile arakesiti alınırsa $M_2 = (N \cap M_2) + (K' \cap M_2)$ bulunur. $K = M_2 \cap K'$ diyelim. Bu takdirde $M_2 = (N \cap M_2) + K$ elde edilir. $M = M_1 + M_2$ ve $M_1 \leq N$ olduğundan $M = N + M_2 = N + (N \cap M_2) + K = N + K$ olur. $M = M_2 + K'$ ve K', M de bir tümleyen olduğundan hipotez gereğince K, M de bir tümleyen olur. Ayrıca $N \cap K = (N \cap M_2) \cap K' \leq RadK' \leq RadM$ dir. O halde Önerme 4.3.9 dan M_2 t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüldür.

Yardımcı Teorem 4.3.11. M bir t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül ve $N \leq M$ olsun. M modülündeki her K tümleyen alt modülü için $(N+K)/N$, M/N de bir tümleyen alt modül ise, M/N bölüm modülü t-genelleştirilmiş tümlenmiştir.

İspat: M nin N yi kapsayan herhangi bir X alt modülünü alalım. M t-genelleştirilmiş tümlenmiş olduğundan $M = X + D = D + D'$, $X \cap D \leq RadD$ ve $D \cap D' << D$ olacak şekilde $D, D' \leq M$ vardır. $M = X + D$ ve $N \leq X$ olduğundan $M/N = (X+D)/N = X/N + (D+N)/N$ olur.Burada $X \cap D \leq RadD$ olduğundan

$$[X/N] \cap [(D+N)/N] = (X \cap D + N)/N \leq (RadD + N)/N \leq Rad((D+N)/N)$$

olup $(D+N)/N$, X/N nin M/N de bir genelleştirilmiş tümleyeni olur. Ayrıca

D, M de bir tümleyen olduğundan hipotez gereğince $(D+N)/N$ de M/N de bir tümleyendir. O halde $(D+N)/N$, X/N nin M/N de tümleyen olacak şekilde bir genelleştirilmiş tümleyeni olup M/N t-genelleştirilmiş tümlenmiştir.

Teorem 4.3.12. M bir dağılımlı t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde M nin her N alt modülü için M/N bir t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüldür.

İspat: D, M nin bir tümleyen alt modülü olsun. Bu takdirde $M = D + D'$ ve $D \cap D' \ll D$ olacak şekilde $D' \leq M$ vardır. $M = D + D'$ olduğundan $M/N = (D+N)/N + (D'+N)/N$ olur. M dağılımlı olduğundan $N + (D \cap D') = (N+D) \cap (N+D')$ eşitliği sağlanır. O halde $(D+N)/N \cap (D'+N)/N = [(D+N) \cap (D'+N)]/N = (N + (D \cap D'))/N$ olur. $p: M \to M/N$ doğal homomorfizma yardımıyla Teorem 2.8.2 (iii) den $(D+N)/N \cap (D'+N)/N = (D \cap D' + N)/N \ll (D+N)/N$ bulunur. Buradan M nin D tümleyen alt modülü için $(D+N)/N$, M/N de bir tümleyen alt modül olur. O halde Yardımcı Teorem 4.3.11 den M/N bir t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüldür.

4.4. Dual Sonlu T-Genelleştirilmiş Tümlenmiş Modüller

Tanım 4.4.1. M bir R-modül olsun. Eğer M nin her dual sonlu alt modülü M de tümleyen olacak şekilde bir genelleştirilmiş tümleyene sahipse M ye **dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş** modül denir.

Her dual sonlu genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş modülün dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş olduğu açıktır. T-genelleştirilmiş tümlenmiş modüller, dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiştir. Eğer modül sonlu üretilmiş ise, bu ifadenin tersinin de doğru olduğu açıktır.

Önerme 4.4.2. M bir R-modül ve $RadM \ll M$ olsun. M nin dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin dual sonlu tümlenmiş olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ N, M nin herhangi bir dual sonlu alt modülü olsun. M dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş olduğundan $M = N + K$, $N \cap K \subseteq RadK$ ve K, M de tümleyen olacak şekilde $K \leq M$ vardır. $N \cap K \subseteq RadK \subseteq RadM$ ve $RadM << M$ olduğundan $N \cap K << M$ olup Önerme 3.1.6 (v) den $N \cap K << K$ dır. O halde K, N nin M de bir tümleyenidir. Dolayısıyla M dual sonlu tümlenmiştir.

$(\Leftarrow)$ M dual sonlu tümlenmiş olduğundan M nin herhangi bir N dual sonlu alt modülü için $M = N + K$ ve $N \cap K << K$ olacak şekilde $K \leq M$ vardır. $N \cap K \subseteq RadK$ olduğundan K, M de N nin bir genelleştirilmiş tümleyenidir. M nin her dual sonlu alt modülünün tümleyen olan bir genelleştirilmiş tümleyeni bulunduğundan M bir dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüldür.

Sonuç 4.4.3. M sonlu üretilmiş bir R-modül olsun. M nin dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin dual sonlu tümlenmiş olmasıdır.

İspat: Önerme 4.4.2 ve Sonuç 2.9.9 dan açıktır.

Önerme 4.4.4. M, $\{U_i\}_{i \in I}$ ailesinin bir t-toplamı olsun. Eğer her $i \in I$ için U_i dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş ise M de dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiştir.

İspat: K, M nin herhangi bir dual sonlu alt modülü olsun. Hipotez gereğince $M = \sum_{i \in I} U_i$ olduğundan $M = K + U_{i_1} + U_{i_2} + \cdots + U_{i_n}$ olacak şekilde $\exists\, i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ vardır. Burada Önerme 3.3.2 kullanılarak her $t = 1, 2, \ldots, n$ için V_{i_t}, U_{i_t} de bir tümleyen olacak şekilde K nın M de bir $V_{i_1} + V_{i_2} + \cdots + V_{i_n}$ genelleştirilmiş tümleyeninin olduğu gösterilebilir. Her $t = 1, 2, \ldots, n$ için V_{i_t}, U_{i_t} de bir tümleyen ve M, $\{U_i\}_{i \in I}$ ailesinin bir t-toplamı olduğundan Sonuç 4.1.11 kullanılarak $V_{i_1} + V_{i_2} + \cdots + V_{i_n}$ nin M de bir tümleyen olduğu gösterilebilir. Yani K nın M de tümleyen olan bir genelleştirilmiş tümleyeni vardır. Dolayısıyla M dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiştir.

Sonuç 4.4.5. Keyfi sayıda dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş R-modülün direkt toplamı da dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiştir.

Teorem 4.4.6. M projektif ve sonlu üretilmiş bir R-modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) M yarı-mükemmeldir.

(ii) M genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş modüldür.

(iii) M dual sonlu genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş modüldür.

(iv) M t-genelleştirilmiş tümlenmiştir.

(v) M dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiştir.

İspat: $(i)\Leftrightarrow(ii)$ Teorem 3.3.5 den açıktır. $(ii)\Rightarrow(iv)$ Açıktır. $(iv)\Rightarrow(ii)$ M t-genelleştirilmiş tümlenmiş ve sonlu üretilmiş olduğundan Önerme 4.3.4 gereğince M tümlenmiştir. Ayrıca M projektif olduğundan Teorem 3.2.6 gereğince M $\oplus$-tümlenmiş olup genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş modüldür. $(ii)\Leftrightarrow(iii)$ ve $(iv)\Leftrightarrow(v)$ açıktır.

Örnek 4.4.7. R değerlendirme halkası olmayan bir değişmeli lokal halka, a, $b\in R$ olmak üzere $a\nmid b$ ve $b\nmid a$ olsun. m, R halkasının tek maksimal ideali olmak üzere $(a)\cap(b)=0$ ve $am=bm=0$ olduğunu kabul edelim. F üreteçleri x_1, x_2, x_3 olan bir serbest R-modül, K, F nin ax_1-bx_2 ile üretilen bir alt modülü ve $M=F/K$ olsun. Bu takdirde $M=\dfrac{Rx_1\oplus Rx_2\oplus Rx_3}{R(ax_1-bx_2)}=(R\overline{x_1}+R\overline{x_2})\oplus R\overline{x_3}$ dir ve M $\oplus$-tümlenmiş değildir (Idelhadj ve Tribak, 2003).

- R lokal halka olduğundan Sonuç 3.1.10 gereğince R tümlenmiş olup Sonuç 3.1.12 den Rx_1, Rx_2, Rx_3 tümlenmiştir. Teorem 3.1.14 gereğince F tümlenmiştir. Teorem 3.1.11 den $M=F/K$ bölüm modülü de tümlenmiştir. Önerme 4.2.3 gereğince M güçlü t-radikal tümlenmiş modüldür. Ancak M güçlü $\oplus$-radikal tümlenmiş değildir (Nişancı Türkmen ve Pancar, 2013).
- M tümlenmiş olduğundan t-genelleştirilmiş tümlenmiş olur. M sonlu üretilmiş olup $\oplus$-tümlenmiş olmadığından Teorem 3.3.6 gereğince M genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş değildir.
- M t-genelleştirilmiş tümlenmiş olduğundan M dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiştir. Üstelik M sonlu üretilmiş olduğundan ve genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş olmadığından M dual sonlu genelleştirilmiş $\oplus$-tümlenmiş değildir.

Aşağıdaki şema t-genelleştirilmiş tümlenmiş modüllerin diğer modül sınıfları içindeki yerini göstermektedir.

(Dual Sonlu) $\oplus$-Tümlenmiş Modül

(Dual Sonlu) Genelleştirilmiş $\oplus$-TümlenmişModül

(Dual Sonlu) Tümlenmiş Modül

(Dual Sonlu) T- Genelleştirilmiş Tümlenmiş Modül

(Dual Sonlu) Genelleştirilmiş Tümlenmiş Modül

Şekil 4.2. (Dual sonlu) T-genelleştirilmiş tümlenmiş modüllerin yeri

Teorem 4.4.8. R bir halka olsun. Bu takdirde R halkasının yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her serbest sol R-modülün dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ M bir serbest R-modül olsun. Bu durumda Önerme 2.4.7 den $M = \underset{i\in I}{\oplus} Rx_i$ ve her $i \in I$ için $R \cong Rx_i$ olacak şekilde M nin $\{x_i\}_{i\in I}$ alt kümesi vardır. R R-modül olarak projektif, sonlu üretilmiş ve yarı-mükemmel olduğundan Teorem 4.4.6 dan R dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiş R-modüldür. Dolayısıyla Sonuç 4.4.5 den $M = \underset{i\in I}{\oplus} Rx_i$ modülü dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiştir.

$(\Leftarrow)$ R sol R-modül olarak serbest olduğundan hipotez gereğince R sol R-modülü dual sonlu t-genelleştirilmiş tümlenmiştir. Ayrıca R sol R-modülü projektif ve sonlu üretilmiş olduğundan Teorem 4.4.6 gereğince yarı-mükemmeldir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, t-ayrışıma sahip modüllerin tümleyen alt modüller ve direkt toplam terimleri ile ilgili bazı özellikler çalışıldı. Genel olarak parçalanabilir veya parçalanamaz modüller üzerine yapılan tüm çalışmalar "t-ayrışım" tanımı için açık problemler olarak görünmektedir. Özellikle, "Modülleri, t-ayrışıma sahip olmayan devirli modüllerin t-toplamı olan halkalar nedir?" problemi üzerine çalışılabilir.

Her genişlemesinde tümleyene sahip olan modüller (E) özelliğine sahiptir denir. Her genişlemesinde t-toplam terimi olacak şekilde tümleyene sahip olan modüller çalışılabilir. Ayrıca her genişlemesinde t-toplam terimi olan modüller üzerine de çalışılabilir.

Dedekind bölgeleri üzerinde güçlü t-radikal tümlenmiş modüllerin yapısı belirlenebilir. Ayrıca t-genelleştirilmiş tümlenmiş modül yapısında tümleyen alt modül yerine t-toplam alınarak daha kuvvetli bir yapı elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Alizade, R., Pancar, A., 1999. *Homoloji Cebire Giriş*, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Samsun.

Alizade, R., Bilhan, G., Smith, P.F., 2001. Modules whose maximal submodules have supplements, *Comm. Algebra*, 29(6), 2389-2405.

Anderson, F.W., Fuller, K.R., 1992. *Rings and Categories of Modules*, 2nd. ed., New York, Springer-Verlag.

Bass, H., 1960. Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 95, 466-488.

Büyükaşık, E., Lomp, C., 2008. On a recent generalization of semiperfect rings, *Bull. Aust. Math. Soc.*, 78 (2), 317-325.

Büyükaşık, E., Lomp, C., 2009. Rings whose modules are weakly supplemented are perfect. Application to certain ring extension, *Math. Scand.*, 106, 25-30.

Büyükaşık, E., Türkmen, E., 2012. Strongly radical supplemented modules, *Ukranian Math. J.*, 8(63), 1306-1313.

Cohn, P.M., 1989. *Algebra*, Vol.2., 2nd. ed., Printed in Great Britain at The Bath Press, Avon.

Clark, J., Lomp, C.,Vajana, N., Wisbauer, R., 2006. *Lifting Modules*, 1st. ed., Birkhauser Verlag Basel, Boston-Berlin.

Çalışıcı, H., Pancar, A., 2014. $\oplus$-Cofinitely supplemented modules, *Czechoslavak Math. J.*, 54 (129), 1083-1088.

Çalışıcı, H., Türkmen, E., 2010. Generalized $\oplus$-supplemented modules, *Algebra and Discrete Math.*, 10, 10-18.

Ecevit, Ş., Koşan, M.T., Tribak, R., 2012. Rad-$\oplus$-supplemented modules and cofinitely rad-$\oplus$-supplemented modules, *Algebra Colloquium*, 19, 637-648.

Eckmann, B., Schopf, A., 1953. Über injective moduln, *Arch. Math.*, 4, 75-78.

Facchini, A., 1998. *Module Theory*, 1st. ed., Progress in Mathematics, 167, Birkhauser, Verlag, Basel.

Harmancı, A., Keskin, D., Smith, P.F., 1999. On $\oplus$-supplemented modules. *Acta. Math. Hungar.*, 83(1-2), 161-169.

Hungerford, T.W., 1973. *Algebra*, 1st. ed., Springer-Verlag, New York.

Idelhadj, A., Tribak, R., 2003. On some properties of $\oplus-$supplemented modules, *Int. J. Math. Math. Sci.*, 69, 4373-4387.

Kasch, F., 1982. *Modules and Rings*, 1st. ed., London Mathematical Society by Academic Press.

Koşan, M.T., 2009. Generalized cofinitely semiperfect modules, *Int. Electron J. Algebra*, 5, 58-69.

Larsen, M.D., McCarthy, P.J., 1971. *Multiplicative Theory of Ideals,* Pure and Applied Mathematics, 43.

Matlis, E., 1958. Injective modules over noetherian rings, *Pasific J. Math*., 8, 511-528.

Mares, E.A., 1963. Semi-perfect modules, *Math. Z.*, 82(4), 347-360.

Mares, E.A., Kasch, F., 1966. Eine Kennzeichhnung semi-perfekter moduln, *Nagoya Math. J.*, 27, 525-529.

Mikhalev, A.V., Tuganbaev, A.A., 1999. Distributive modules and rings and their close analogs, *Math. Sci.,* 93(2), 149-253.

Mohamed, S.H., Müller, B.J., 1990. *Continuous and Discrete Modules*, 1st. ed., Cambridge University Press, New-York, Sydney.

Nebiyev, C., Pancar, A., 2013. On supplement submodules, *Ukrainian Math. J.*, 65(7), 961-966.

Nişancı Türkmen, B., Pancar, A., 2013. Generalizations of $\oplus$-supplemented modules, *Ukrainian Math. J.*, 65(4), 555-564.

Sharpe, D.W., Vamos, P., 1972. *Injective Modules*, 1st. ed., Lectures in Pure Mathematics University of Sheffield, The Great Britain.

Talebi, Y., Mahmoudi, A., 2011. On rad- $\oplus$-supplemented modules, *Thai J. Math.,* 9(2), 373-381.

Türkmen, E., 2013. Rad-$\oplus$-supplemented modules, *An. Şt. Univ. Ovidius Constanta*, 21(1), 225-238.

Wisbauer, R., 1991. *Foundations of Module and Ring Theory*, Revised and Updated English edition, Gordon and Breach, Philadelphia.

Wang, Y., Ding, N., 2006. Generalized supplemented modules, *Taiwanese J. Math.*, 10(6), 1589-1601.

Xue, W., 1996. Characterizations of semiperfect and perfect rings, *Publ. Math.*, 40(1), 115-125.

Zöschinger, H., 1974. Komplementierte moduln über Dedekindringen, *J. Algebra*, 29, 42-56.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad:	**Berna KOŞAR**
Doğum Yeri ve Tarihi:	**Ankara-25.11.1980**
E-Posta:	**bernak@omu.edu.tr**
Lisans:	**Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü**
YüksekLisans:	**Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı**

Mesleki Deneyim ve Ödüller: Araştırma Görevlisi

TEZDEN TÜRETİLEN SUNUMLAR

- **Koşar, B.,** Nebiyev, C., 2013: T- Generalized Supplemented Modules. The International Conference On Algebra In Honour Of Patrick SMITH And John CLARK's 70th Birthdays. August 12-15, 2013 Balıkesir, Turkey.