



T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**ÇEŞİTLİ SINIR KOŞULLARINA SAHİP TABAKALI KOMPOZİT PLAKALARIN
SONLU ELEMANLAR METODU KULLANILARAK
KRİTİK BURKULMA YÜKÜ AÇISINDAN İNCELENMESİ**

YÜKSEKLİSANS TEZİ

**Muhammed Fatih BAŞOĞLU
12210105**

Tezin Savunma Tarihi : 09 Temmuz 2015

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Zihni ZERİN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında
Muhammed Fatih Başoğlu Tarafından Hazırlanan

**ÇEŞİTLİ SINIR KOŞULLARINA SAHİP TABAKALI KOMPOZİT PLAKALARIN
SONLU ELEMANLAR METODU KULLANILARAK
KRİTİK BURKULMA YÜKÜ AÇISINDAN İNCELENMESİ**

başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 09/07/2015 tarihinde yapılan sınav ile
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : **Doç. Dr. Zihni ZERİN (Danışman)**
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Jüri Üyeleri : **Yrd. Doç. Dr. Sertaç TUHTA**
Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Burçin Şenol ŞEKER
Amasya Üniversitesi

..../..../2015

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Enstitü Müdürü

iii

Sevgili eřim Būřra'ya,

ÖNSÖZ

Öncelikle çalışmalarım süresince değerli desteklerini esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Zihni ZERİN, araştırma görevlisi arkadaşlarım Ferruh TURAN, Kerem ERTEK, Yusuf EMİROĞLU, Tuğçe KARAHASANOĞLU ve Emre ALPASLAN'a içtenlikle teşekkür ederim.

Sevgili eşim Büşra'ya bu süreçte bana gösterdiği destek ve anlayıştan dolayı ve hayatım boyunca hem fiilen hem de dualarıyla beni yalnız bırakmayan annem Ayşen BAŞOĞLU ve babam Ahmet BAŞOĞLU'na sevgi ve şükranlarımı sunarım.

Çalışmanın konu ile alakadar kişilere yarar sağlaması ümidiyle.

Temmuz 2015

Muhammed Fatih Başoğlu
İnşaat Mühendisi

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ.....	vii
İÇİNDEKİLER	ix
ÇİZELGELER LİSTESİ.....	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xiii
KISALTMALAR ve SİMGELER	xv
ÖZET	xvii
ABSTRACT	xix
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Kompozit Yapılar	1
1.2 İnce Cidarlı Yapılar	2
1.3 Amaç ve Kapsam.....	3
1.4 Literatür	5
1.4.1 Temel teori ve metotlar	5
1.4.2 Literatür taraması	6
2. PLAK ve BURKULMA MEKANİĞİ	13
2.1 Plak	13
2.1.1 Tanımı ve yapılan varsayımlar	13
2.1.2 Plak çeşitleri.....	14
2.2 Burkulma	16
2.2.1 Tanım	16
2.2.2 Hesap metotları	19
2.2.2.1 Denge metodu	19
2.2.2.2 Enerji metotları	20
2.2.2.3 Dinamik yaklaşım	22
2.2.2.4 Bileşik yükleme durumunda burkulma	22
3. TABAKALI KOMPOZİT PLAK MEKANİĞİ	25
3.1 Giriş	25
3.2 An-İzotropik Elastisite Teorisi	25
3.2.1 Tanımlar	25
3.2.2 Bünye bağıntıları	26
3.3 Ortotropik Tabaka	30
3.4 Klasik Tabakalı Plak Teorisi	32
3.4.1 Giriş	32
3.4.2 Yapılan varsayımlar	32
3.4.3 Deplasman ve birim-şekil-değiştirmeler	33
3.4.4 Hareket denklemleri.....	37
3.4.5 Tabakalı plak bünye denklemleri.....	41
3.5 Birinci-Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi	44
3.5.1 Geliştirilmiş plak teorileri.....	44
3.5.2 Kinematik	46
3.5.3 Hareket denklemleri.....	47
3.6 Reddy'nin Layerwise Teorisi	51
3.6.1 Teorinin altyapısı	51
3.6.2 Deplasman ve birim-şekil-değiştirmeler	51
3.6.3 Temel denklemler	53

4. TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN SONLU ELEMAN ANALİZİ	55
4.1 Giriş	55
4.2 Sonlu Elemanlar Metodu	56
4.2.1 Temel özellikler	56
4.2.2 Modellemede dikkate alınacak hususlar	57
4.2.2.1 Sonlu eleman ağı oluşturma	58
4.2.2.2 Yükün temsil edilme şekli	60
4.2.2.3 Sınır koşullarının belirlenmesi	61
4.3 Klasik Tabakalı Plak Teorisi (CLPT).....	62
4.3.1 Temel denklemler	62
4.3.2 Sonlu eleman modeli	62
4.3.2.1 Zayıf formülasyon	63
4.3.2.2 İnterpolasyon ve sonlu eleman modeli	64
4.3.3 Non-lineer model	70
4.4 Birinci-Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi (FSDT)	71
4.4.1 Temel denklemler	71
4.4.2 Sonlu eleman modeli	71
4.4.3 Dinamik durum.....	74
4.4.3.1 Kısmi ayrıştırma	75
4.4.3.2 Zamana bağlı yaklaşım	77
4.4.4 Kayma kenetlenmesi	79
4.5 Hesaplamalar	80
4.5.1 Eleman matrislerinin ve numerik integrasyonlarının bulunması	80
4.5.2 Birim-şekil-değiştirme ve gerilmelerin hesaplanması.....	82
4.5.3 Non-lineer cebrik ifadeler için hesap metotları	84
4.5.3.1 Direkt iterasyon metodu.....	84
4.5.3.2 Newton-Raphson iterasyon metodu	85
4.6 Süreklilik Formülasyonları	86
5. LİTERATÜR ile KIYAS ANALİZLERİ	91
5.1 [12] Çalışması için Yapılan Analizler	91
5.2 [13] Çalışması için Yapılan Analizler	92
6. ANALİZ ve BULGULAR	95
6.1 Belirlenen Koşullar	95
6.2 Bulgular	99
6.2.1 Tabaka yönlenme etkisi	102
6.2.2 Kenar formu etkisi	109
6.2.2.1 Boşluksuz durumda	111
6.2.2.2 "a" tipi boşluk durumunda	112
6.2.2.3 "b" tipi boşluk durumunda	113
6.2.2.4 "c" tipi boşluk durumunda	114
6.2.2.5 "d" tipi boşluk durumunda	115
6.2.2.6 "e" tipi boşluk durumunda	116
6.2.2.7 "f" tipi boşluk durumunda	117
6.2.3 Boşluk tipi etkisi	118
6.2.3.1 Geniş () kenar formu için	118
6.2.3.2 Düz [] kenar formu için.....	122
6.2.3.3 Dar) (kenar formu için	126
7. SONUÇ ve ÖNERİLER	131
KAYNAKLAR	135
ÖZGEÇMİŞ	141

ÇİZELGELER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 1.1. Belirlenen θ laminasyon (tabakalanma) açıları	5
Çizelge 4.1. Plak eğilme elemanları için Lagrange ψ_i ve Hermite ϕ_i interpolasyon fonksiyonları [1]	66
Çizelge 5.1. [12] çalışması referans ve karşılaştırma analizi değerleri	92
Çizelge 5.2. [13] çalışması referans ve karşılaştırma analizi değerleri	94
Çizelge 6.1. Epoxy-Carbon tabaka mekanik özellikleri	95
Çizelge 6.2. Tabakalanma gruplarına ait adet, kalınlık, açı bilgileri	96
Çizelge 6.3. Elde edilen lineer kritik-burkulma-yükü P_{cr} değerleri [N]	100

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1.	Kompozit yapılar	1
Şekil 1.2.	İzotropik ve an-izotropik malzeme deformasyonları.....	2
Şekil 1.3.	Yapı sektöründe ince plak uygulamaları	3
Şekil 1.4.	Belirlenen plak formu ve boşluk kombinasyonları	4
Şekil 1.5.	[8] çalışmasına ait görsel	6
Şekil 1.6.	[9] çalışmasına ait görsel	7
Şekil 1.7.	[11] çalışmasına ait görsel	7
Şekil 1.8.	[12] çalışmasına ait görsel	8
Şekil 1.9.	[13] çalışmasına ait görsel	8
Şekil 1.10.	[14] çalışmasına ait görsel	8
Şekil 1.11.	[15] çalışmasına ait görsel	9
Şekil 1.12.	[17] çalışmasına ait görsel	9
Şekil 1.13.	[18] çalışmasına ait görsel	10
Şekil 1.14.	[19] çalışmasına ait görsel	10
Şekil 1.15.	[20] çalışmasına ait görsel	11
Şekil 1.16.	[21] çalışmasına ait görsel	11
Şekil 1.17.	[22] çalışmasına ait görsel	12
Şekil 1.18.	[23] çalışmasına ait görsel	12
Şekil 2.1.	Plak orta-düzlemi	13
Şekil 2.2.	Plak ayırım cetveli.....	14
Şekil 2.3.	Membran kuvvetler	14
Şekil 2.4.	Farklı plak eleman tiplerine ait iç-kuvvetler	15
Şekil 2.5.	Düzlem içi yüke maruz plak eleman	16
Şekil 2.6.	Rijit kürenin farklı denge durumları.....	17
Şekil 2.7.	Deformasyonun istikamet bifurkasyonu	17
Şekil 2.8.	Burkulmanın lineer ve non-lineer analiz grafiği	18
Şekil 2.9.	Rijitliğin sabit ve değişken olma durumları	19
Şekil 2.10.	Burkulma modları.....	19
Şekil 2.11.	Etkileşim eğrisi	22
Şekil 3.1.	İzotropik ve an-izotropik malzeme tarifi, ve Gerilme bileşenleri.....	26
Şekil 3.2.	Üç-boyutlu (3D) koordinat sistemde gerilme bileşenleri	27
Şekil 3.3.	Yapı ve fiber koordinat sistemleri	31
Şekil 3.4.	Fiber takviyeli elemanın serbest cisim diyagramı	31
Şekil 3.5.	Kirchhoff-Love hipotezinde ince plak eğilmesi	34
Şekil 3.6.	Kalınlık boyunca birim-şekil-değiştirme ve gerilme değişim kabulü	35
Şekil 3.7.	Plak elemana etkiyen kuvvetler	39
Şekil 3.8.	Reddy'nin Layerwise teorisi kinematiği	52
Şekil 4.1.	Sonlu eleman ağ sıkılaştırmaları	59
Şekil 4.2.	Farklı mertebeden elemanların bağlantıları	59
Şekil 4.3.	Lokal ağ sıkılaştırmaları	60
Şekil 4.4.	SEM'de sınır kuvvetlerinin temsil edilişi	61
Şekil 4.5.	Klasik plak teorisi (CLPT) plak eğilme elemanları.....	65
Şekil 4.6.	Birinci-mertebe kayma deformasyon teorisi (FSDT) C_0 plak eğilme elemanları	74
Şekil 4.7.	Düzlem içi yükleme altında plak eleman	77

Şekil 4.8.	Bozulmuş üç-boyutlu (3D) kabuk eleman.....	88
Şekil 5.1.	[12] çalışmasına ait görsel	91
Şekil 5.2.	[12] çalışması referans ve karşılaştırma analizi grafiği	92
Şekil 5.3.	[13] çalışmasına ait görsel	93
Şekil 5.4.	[13] çalışması referans ve karşılaştırma analizi grafiği	93
Şekil 6.1.	Boşluk formlarının ölçü ve kısa adları.....	96
Şekil 6.2.	Plaklara ait ölçü, kenar formu ve sınır koşulları	97
Şekil 6.3.	Tabakalanma gruplarına ait adet, kalınlık ve yönlenme açısı bilgileri	98
Şekil 6.4.	<i>Pcr</i> değerlerinin oluşturduğu üç-boyutlu (3D) yüzey grafiği [<i>kN</i>]	101
Şekil 6.5.	Boşluk tipi değişimine göre <i>Pcr</i> değerleri [<i>kN</i>] – radar grafik.....	103
Şekil 6.6.	Boşluk tipi değişimine göre <i>Pcr</i> değerleri [<i>kN</i>] – 3D grafik.....	104
Şekil 6.7.	Tabaka yönlenme gruplarına göre <i>Pcr</i> değerleri [<i>kN</i>] – 3D grafik	105
Şekil 6.8.	Tabaka yönlenme gruplarına göre <i>Pcr</i> değerlerinin oransal [%] değişimi – 3D grafik	106
Şekil 6.9.	Tabaka yönlenme gruplarına göre <i>Pcr</i> değişim farkları [<i>kN</i>] ve oranları [%] – çubuk grafik	107
Şekil 6.10.	Kenar formu değişimine göre <i>Pcr</i> değerleri [<i>kN</i>] – radar grafik.....	109
Şekil 6.11.	Kenar formu değişimine göre <i>Pcr</i> değerleri [<i>kN</i>] – 3D grafik	110
Şekil 6.12.	Boşluksuz durumda kenar formuna göre <i>Pcr</i> değişim farkları [%] ve [<i>kN</i>] – 3D ve çubuk grafik.....	111
Şekil 6.13.	“a” tipi boşluk durumunda kenar formuna göre <i>Pcr</i> değişim farkları [%] ve [<i>kN</i>] – 3D ve çubuk grafik	112
Şekil 6.14.	“b” tipi boşluk durumunda kenar formuna göre <i>Pcr</i> değişim farkları [%] ve [<i>kN</i>] – 3D ve çubuk grafik	113
Şekil 6.15.	“c” tipi boşluk durumunda kenar formuna göre <i>Pcr</i> değişim farkları [%] ve [<i>kN</i>] – 3D ve çubuk grafik	114
Şekil 6.16.	“d” tipi boşluk durumunda kenar formuna göre <i>Pcr</i> değişim farkları [%] ve [<i>kN</i>] – 3D ve çubuk grafik	115
Şekil 6.17.	“e” tipi boşluk durumunda kenar formuna göre <i>Pcr</i> değişim farkları [%] ve [<i>kN</i>] – 3D ve çubuk grafik	116
Şekil 6.18.	“f” tipi boşluk durumunda kenar formuna göre <i>Pcr</i> değişim farkları [%] ve [<i>kN</i>] – 3D ve çubuk grafik	117
Şekil 6.19.	Geniş () kenar formunda boşluk tipine göre <i>Pcr</i> değerleri [<i>kN</i>] – 3D grafik.....	119
Şekil 6.20.	Geniş () kenar formunda boşluksuz duruma oranla <i>Pcr</i> değişimi [%] – çizgi grafik	120
Şekil 6.21.	Geniş () kenar formunda boşluk tipine göre <i>Pcr</i> değişim farkları [<i>kN</i>] ve oranları [%] – çubuk grafik.....	121
Şekil 6.22.	Düz [] kenar formunda boşluk tipine göre <i>Pcr</i> değerleri [<i>kN</i>] – 3D grafik.....	123
Şekil 6.23.	Düz [] kenar formunda boşluksuz duruma oranla <i>Pcr</i> değişimi [%] – çizgi grafik	124
Şekil 6.24.	Düz [] kenar formunda boşluk tipine göre <i>Pcr</i> değişim farkları [<i>kN</i>] ve oranları [%] – çubuk grafik.....	125
Şekil 6.25.	Dar) (kenar formunda boşluk tipine göre <i>Pcr</i> değerleri [<i>kN</i>] – 3D grafik.....	127
Şekil 6.26.	Dar) (kenar formunda boşluksuz duruma oranla <i>Pcr</i> değişimi [%] – çizgi grafik	128
Şekil 6.27.	Dar) (kenar formunda boşluk tipine göre <i>Pcr</i> değişim farkları [<i>kN</i>] ve oranları [%] – çubuk grafik.....	129
Şekil 7.1.	Boşluk tipine göre <i>Pcr</i> değişim fark oranları [%] – çubuk grafik.....	132

KISALTMALAR ve SİMGELER

SEM	: Sonlu Elemanlar Metodu
vb.	: ve benzeri
bk.	: bakınız
() []) (: Plak kenar formu gösterimleri; eğrisel geniş “()”, düz “[]” ve eğrisel dar “) (“
CPT	: Classical Plate Theory (Klasik Plak Teorisi)
CLPT	: Classical Laminated Plate Theory (Klasik Tabakalı Plak Teorisi)
FSDT	: First-Order Shear Deformation Plate Theory (Birinci-Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi)
2D	: Two-Dimensional (İki-Boyutlu)
3D	: Three-Dimensional (Üç-Boyutlu)
P_{cr}	: Kritik-burkulma-yükü
L/t	: Plak boy/kalınlık oranı
w/t	: Plak çökme/kalınlık oranı
u, v, w	: Düzlem içi yer-değiştirmeler
$\{F\}$: Kuvvet vektörü
$[K]$: Rijitlik matrisi
\bar{n}_{cr}	: Kritik dış yük
\bar{n}_0	: Dış yük
λ_{cr}	: Kritik yük parametresi
λ	: Yük parametresi
W_e	: Dış basınç kuvvetlerinin yaptığı iş
W_i	: İç kuvvetlerin yaptığı iş
U_b	: Eğilmeden meydana gelen potansiyel enerji
Π_0	: Toplam potansiyel enerji
R_i	: Bileşik yükleme bileşenleri
σ_k	: Normal ve Kayma gerilmeleri ($k = 1, 2, \dots, 6$)
ε_j	: Normal ve Kayma birim-şekil-değiştirmeleri ($j = 1, 2, \dots, 6$)
C_{kj}	: Elastik sabit katsayısı
U_0	: Birim-şekil-değiştirme enerji yoğunluk fonksiyonu
E_i	: Elastisite modülleri ($i = 1, 2, 3$)
G_{ij}	: Kayma modülleri ($i, j = 1, 2, 3$)
ν_{ij}	: Poisson oranları ($i, j = 1, 2, 3$)
x_1, x_2, x_3	: Genel koordinat sistemi
$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$: Malzeme koordinat sistemi
Q_{ij}	: Rijitlikler ($i, j = 1, 2, \dots, 6$)
θ	: Laminasyon (tabakalanma) açısı
$\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$: (x, y, z) koordinatlarına ait birim vektörler
ϕ_1, ϕ_2	: Orta düzlem normalinin y - ve x -eksenlerine göre döneme açıları
N_i, Q_i, M_i	: Reaksiyon kuvvet ve momentleri ($i = 1, 2, 6$)
I_i	: Kütle ataleti
n_x ve n_y	: Birim normal doğrultman kosinüsleridir
A_{ij}, D_{ij} ve B_{ij}	: Tabakanın sırasıyla uzama, eğilme ve eğilmeli-uzama rijitliği
Φ^J	: Global interpolasyon fonksiyonları

U_e	: Tipik eleman Ω^e 'deki u 'nun sonlu eleman interpolantı
ψ_i ve ϕ_i	: Lagrange ve Hermite interpolasyon fonksiyonları
$[S^e]$: Stabilite (veya geometrik rijitlik) matrisi
ω_{max}	: Yapının maksimum doğal frekansı
$[K_L]$ ve $[K_{NL}]$: Lineer ve non-lineer rijitlik matrisleri
(ξ, η, ζ)	: Lokal koordinat sistemi
r_f	: Köşe yuvarlama yarıçapı

ÇEŞİTLİ SINIR KOŞULLARINA SAHİP TABAKALI KOMPOZİT PLAKALARIN SONLU ELEMANLAR METODU KULLANILARAK KRİTİK BURKULMA YÜKÜ AÇISINDAN İNCELENMESİ

ÖZET

Bu çalışmada geniş açıklığa sahip (stadyum, hava limanı terminali, avm, spor salonu, vb.) alanları örtmede hafif, aynı zamanda burkulma dayanımı yüksek plak ve kabuk eleman ihtiyacına yönelik kullanılabilecek tabakalı plakların burkulma analizleri ANSYS® sonlu eleman paket programı yardımı ile incelenmektedir. Analizlerde plak eleman kenar formu, boşluk tipi ve tabakalanma açısı varyasyonlarına bağlı parametreler kullanılmıştır.

İlk olarak plak özellikleri, burkulma tanımı ve hesap metotları sunulmuştur. Anizotropik elastisite teorisi, tabakalı kompozit plak mekaniği ve sonlu elemanlar metoduna dair teorik bilgilerin derlenmesinin ardından tabakalı kompozit plakların sonlu elemanlar metodu ifadelerinin elde edilmesi verilmiştir. Sonlu elemanlar yönteminin yaklaşık bir çözüm metodu olması sebebiyle çalışmamıza paralel literatürdeki bazı çalışmalara ait sonuçlarla kıyaslama analizleri yapılmıştır.

Bu çerçevede çeşitli form, boşluk ve tabakalanma koşullarına sahip tabakalı kompozit plakların sonlu elemanlar yöntemi ile 294 ayrı lineer burkulma analizi yapılmış ve elde edilen sonuçlar ışığında belirlenen parametrelerin etkileri yorumlanmıştır.

Çalışmanın literatüre katkısı, boşluk ve tabakalanma koşullarının yanında yay formundaki eğrisel serbest kenar etkisinin incelenmiş olmasıdır. Elde edilen sonuçlar neticesinde tabakalanma açısının belirgin şekilde kritik burkulma yükü üzerinde etkisinin olduğu tespit edilmiştir. Ayrıca, çalışmanın daha ileri taşınmasında yapışma kusurları (delaminasyon) mevcudiyeti ve non-lineer analiz ile kusurların ilerleyişinin incelenmesi durumlarının ele alınabileceği görüşüne ulaşılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Tabakalı kompozit plak, SEM, Burkulma, Eğrisel kenar, Boşluklu plak.

ANALYSIS of CRITICAL BUCKLING LOAD of LAMINATED COMPOSITE PLATES with DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS by USING FEM

ABSTRACT

In this study, laminated composite plates with lightweight and high buckling strength qualifications, could be used for the purpose of roofing the structures with large spans (stadium, airport terminal, mall, coliseum, etc.), were investigated with respect to critical buckling load by using finite-element software ANSYS®. In the analyses, variations of free edge forms of plate element, cutout types and lamination configurations were used as parameters.

Firstly, general characteristic and behavior of plates, theory of stability and its calculation methods were presented. After giving basic information about theory of anisotropic elasticity, mechanics of laminated composite plates and finite-element method, obtaining of finite-element expressions of laminated composite plates were given. Because finite-element method is an approximate calculation method, some literature researches, that are similar to our study, were analyzed again for result validity comparison.

Within this scope, 294 different critical buckling load analyses of laminated composite plates with various forms, cutouts and lamination conditions were performed by using finite-element method. Effects of those parameters were evaluated by the obtained results.

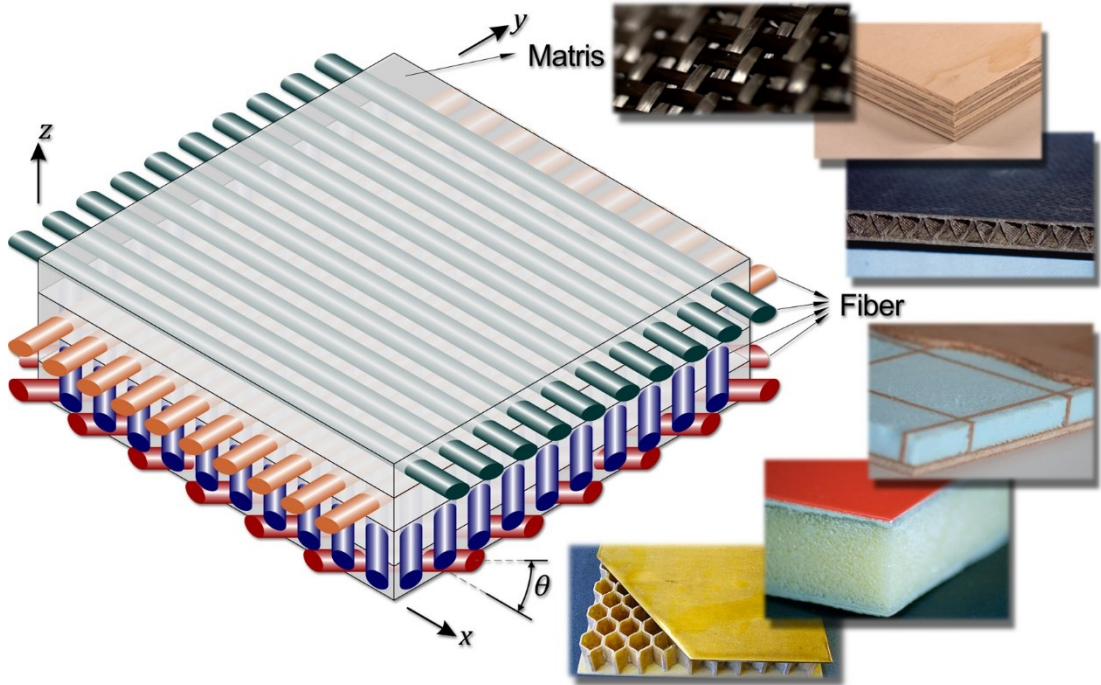
Contribution to the literature of the current study is investigation of effects of curvilinear free-edge forms besides cutouts and lamination conditions. According to the obtained results, the fact that lamination condition has the most significant influence on the critical buckling load values is understood. For future work, existence of delamination might be considered and progression of the defect could be investigated by using non-linear analysis.

Key Words: Laminated composite plate, FEM, Stability, curvilinear edge, plate with cutout.

1. GİRİŞ

1.1 Kompozit Yapılar

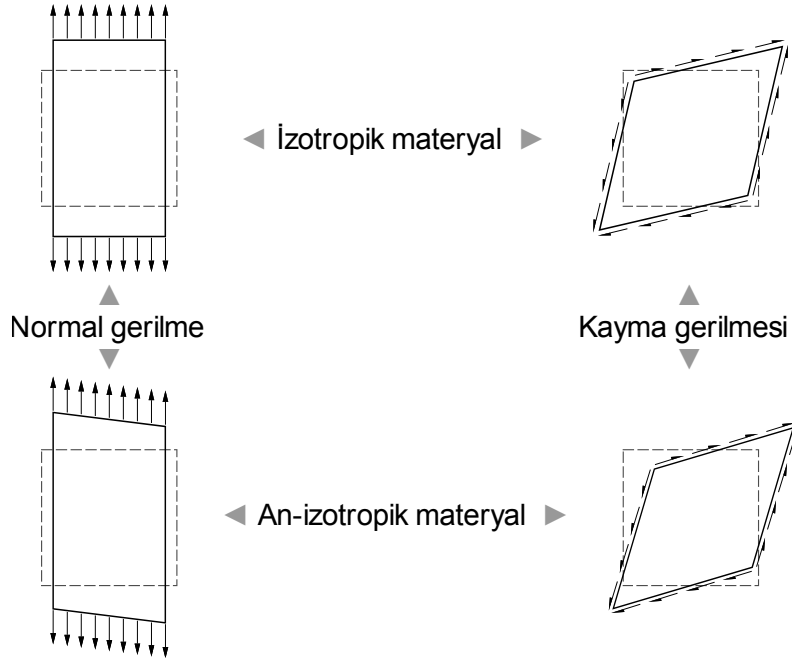
“Kompozit” ifadesi makroskobik ölçekte iki veya daha fazla malzemenin bir araya gelmesi ile oluşan yeni malzemeye verilen isimdir (Şekil 1.1). Dayanım, rijitlik, ağırlık, korozyon direnci, termal özellikler, yorulma ömrü ve aşınma direnci gibi malzeme özellikleri kompozit yapılar sayesinde ihtiyaca göre şekillendirilebilmektedir. Kompozit tasarımı ve analitik çalışmaları için an-izotropik elastisitesine, yapısal teorilere ve çökme/hasar kriterlerine dair bilgi birikimine gerek duyulur. İzotropik malzemelere kıyasla an-izotropik malzemeler kompleks mekanik davranışlar sergilerler [1].



Şekil 1.1. Kompozit yapılar

Mesela, izotropik ve an-izotropik (monoklinik) malzemedan meydana gelen iki ayrı dörtgen bloğu ele alalım. İzotropik blokta yalnızca kayma gerilmesi etkisinde sadece kayma birim-şekil-değiştirmesi ortaya çıkar; benzer şekilde aynı blokta normal gerilme etkisinde sadece normal birim-şekil-değiştirme oluşur. Aynı yüklemeler an-izotropik malzemedan bir bloğa uygulandığı zaman Şekil 1.2’de görüldüğü gibi izotropik malzemedan farklı deformasyonlar ortaya koyar. An-izotropik malzeme her

iki yükleme halinde de hem normal hem de kayma birim-şekil-değiştirme davranışı sergiler [1].



Şekil 1.2. İzotropik ve an-izotropik malzeme deformasyonları

Kompozit yapıların birçok reel probleminde kesin çözüm olanağı bulunamamaktadır. Bu yüzden temsil niteliğine sahip yaklaşım çözümleri gerekmektedir. Sonlu elemanlar metodu (SEM), sınır-değer, başlangıç-değer ve öz-değer problemlerinin numerik çözümleri için efektif bir yaklaşım metodudur ve kompozit yapıların davranışlarını öngörmeye günümüzdeki en etkin numerik araçtır. Herhangi bir fiziksel sürecin matematik modelinin formülasyonu ve analizinde çalışmanın amacına uygun bir şekilde bütün detaylar dâhil edilmelidir. Örneğin, numerik bir modelde arzu edilen düzeyde yakınsaklık ile gerçek yükleme ve sınır koşulu temsili sağlanabilir. Fakat malzeme özelliklerin (fiziksel sabitlerin) elde edilmesi, zorunlu olarak hassas fiziksel ölçümler gerektiren bir yaklaşımdır. Bu parametrelerin bazılarının yüzeysel yaklaşımı ve diğerlerinin hassas şekilde temsili problemin bütününün gerçekçi şekilde modellenmesini sağlamaz. Malzeme davranışı ile beraber deformasyon kinematiği de hassas bir şekilde temsil edilmelidir [1].

1.2 İnce Cidarlı Yapılar

Plak ve kabuk formundaki ince cidarlı yapılar teknolojinin birçok alanında karşımıza çıkmaktadır; yapı, mekanik, havacılık, denizcilik gibi. Plak ve kabukların bu derece geniş ölçekte kullanımının oluşması yapısal özelliklerinden kaynaklıdır. Uygun bir

tasarım ile çok ince plaklar ve özellikle kabuklar çok büyük yükleri taşıyabilirler. Bu yüzden, hafifliğin şart olduğu hava taşıtlarında sıklıkla değerlendirilmektedir [2].

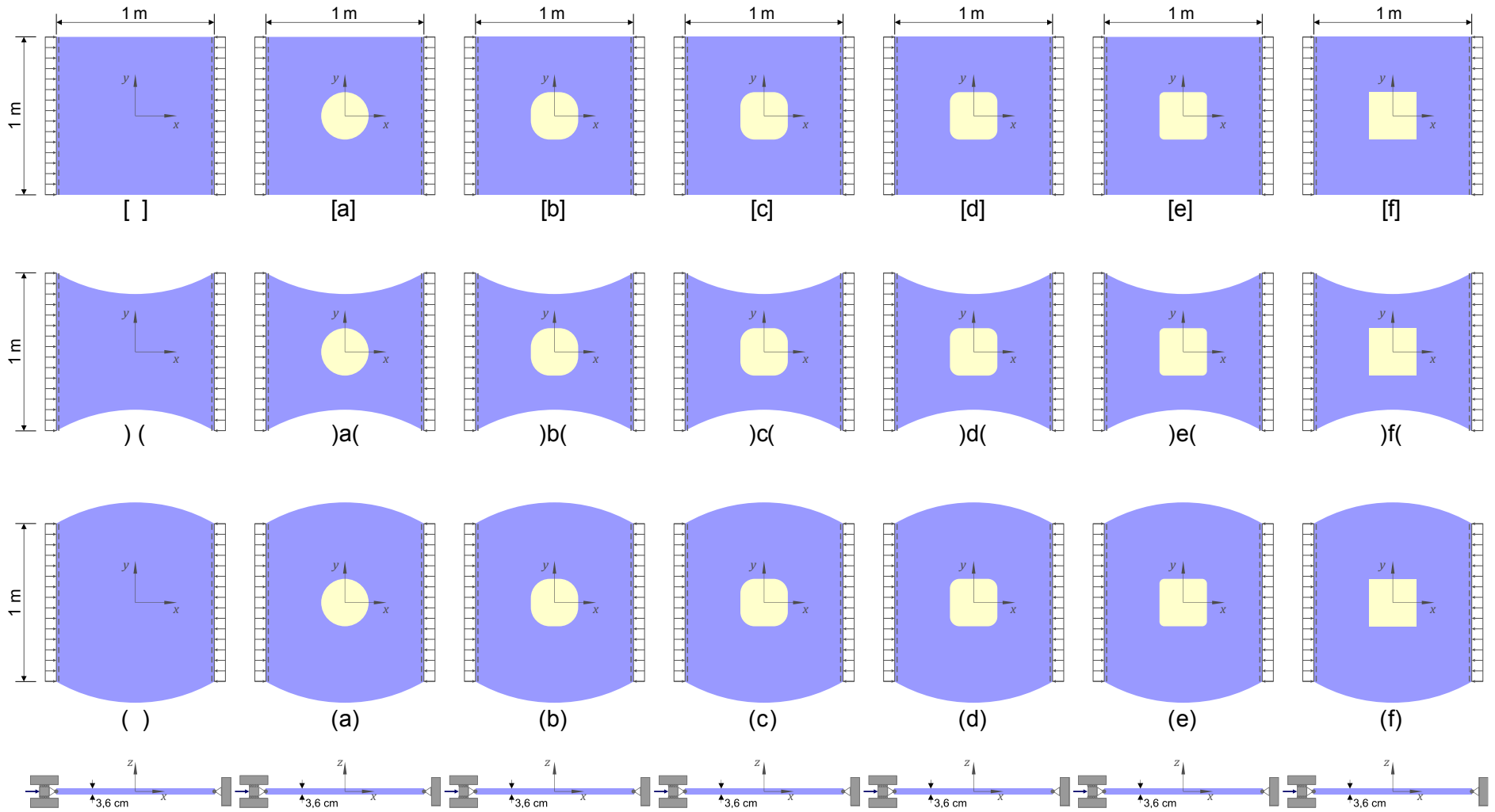
1.3 Amaç ve Kapsam

Yapı sektöründe bilhassa geniş açıklığa sahip (stadyum, hava limanı terminali, avm, spor salonu, vb.) (Şekil 1.3) alanları örtmede hafif, aynı zamanda yüksek dayanım performansına sahip plak ve kabuk elemanlara ihtiyaç duyulmaktadır. Yalnız ince cidarlı bu yapıların burkulmaya elverişli oluşundan kullanım öncesi tahkikleri büyük önem arz eder.



Şekil 1.3. Yapı sektöründe ince plak uygulamaları
(a) AAMI Park Stadyumu - Melbourne / Avustralya [3]
(b) CET (Bálna) avm - Budapeşte / Macaristan [4]
(c) Landesgartenschau Sergi Salonu - Stuttgart / Almanya [5]

Bu ihtiyaç temelinde çalışmamızı şekillendirerek tabakalı kompozit plaklar için belirlenen plak eleman formu, boşluk tipi (Şekil 1.4) ve tabaka yönlenme (Çizelge 1.1) varyasyonlarına göre lineer kritik-burkulma-yükü (P_{cr}) analizlerini gerçekleştirmek ve anlamlı kıyaslamalar elde etmek hedeflenmiştir. Analizlerde sonlu eleman tabanlı ANSYS® [6] paket programı kullanılmıştır.



Şekil 1.4. Belirlenen plak formu ve boşluk kombinasyonları

Çizelge 1.1. Belirlenen θ laminasyon (tabakalanma) açıları

Grup no	θ laminasyon (tabakalanma) açıları
01	[0/18/-18/36/-36/54/-54/72/-72/90]s
02	[0/20/-20/40/-40/60/-60/80/-80]s
03	[0/22,5/-22,5/45/-45/67,5/-67,5/90]s
04	[0/24/-24/48/-48/72/-72/90]o.s
05	[0/30/-30/60/-60/90]s
06	[0/36/-36/72/-72]s
07	[0/40/-40/80/90]o.s
08	[0/45/-45/90]s
09	[0/60/-60]s
10	[0/72/-72/144/-144]
11	[0/90]s
12	[-60/60]s
13	[45/-45]s
14	[-30/30]s

Analizler için gerekli teorik alt yapı tesisi için çalışmada ilk olarak plak karakteristikleri, burkulma tanımı ve hesap metotları incelenmiştir. Ardından, tabakalı kompozit plak mekaniğine dair analitik hesap metotları ve sonlu elemanlar metoduna dair teorik bilgilerin derlenmesinin peşine tabakalı kompozit plakların sonlu elemanlar metodu ifadelerinin elde edilmesi verilmiştir.

Sonlu elemanlar yönteminin yaklaşık bir çözüm metodu olmasından dolayı çalışmamıza paralel literatürdeki bazı çalışmalara ait sonuçlarla kıyaslama analizleri yapılmıştır.

Bu çerçevede çeşitli form, boşluk ve tabakalanma koşullarına sahip tabakalı kompozit plakların sonlu elemanlar yöntemi ile lineer burkulma analizi yapılmış ve elde edilen sonuçlar ışığında belirlenen parametrelerin etkileri yorumlanmıştır.

Çalışmanın literatüre katkısı, boşluk ve tabakalanma koşullarının yanında yay formundaki eğrisel serbest kenar etkisinin incelenmiş olmasıdır. Özetle bu çalışmanın hedefi; çeşitli boşluk, tabakalanma ve kenar formu kombinasyonlarının (Şekil 1.4, Çizelge 1.1) lineer kritik-burkulma-yükü (P_{cr}) değerlerine etkisinin nasıl olacağına dair ışık tutmaktır.

1.4 Literatür

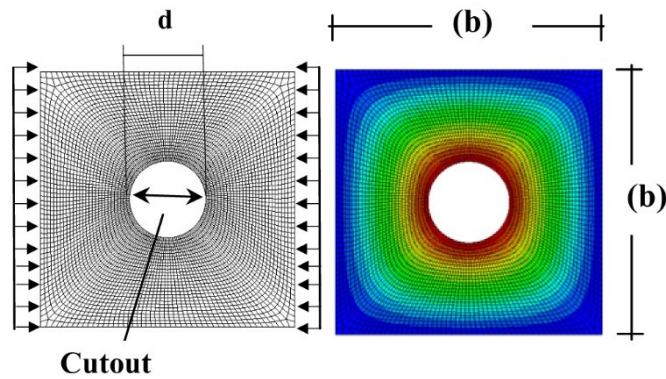
1.4.1 Temel teori ve metotlar

1800'lü yıllardan bu yana birçok plak probleminin temel teorileri (öncelikle Navier, Kirchhoff, Levy tarafından) ve numerik yaklaşımları üzerine (Galerkin, Wahl ve diğerleri tarafından) çalışılmıştır [7];

- 1944 Love, Kirchhoff ince plak teorisini kalın plaklara uyarlamıştır.
- 1946 Prescott, teoriyi plak orta yüzeyinde meydana gelen birim-şekil-değişimleri dikkate alarak geliştirmiştir.
- 1954 Reissner, teorisinde yanal yüzeylerde kayma-kesme kuvvetinden dolayı oluşan deformasyonları dikkate alarak önemli bir gelişimin önünü açmıştır.
- 1956 Turner, Clough, Martin ve Topp mühendislik problemlerinin büyük ölçüde çözümlenmesine olanak veren sonlu elemanlar metodunu geliştirmişlerdir. Argyis ve Zienkiewicz(1956)'in ise sonlu elemanlar sayısal çalışmalarına büyük katkıları olmuştur.

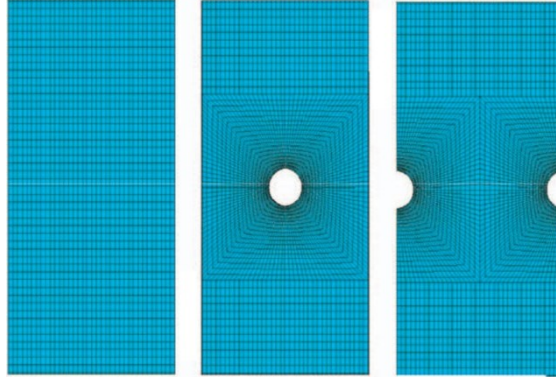
1.4.2 Literatür taraması

[8] çalışmasında Al Qablan H., Katkhuda H. & Dwairi H. tarafından dairesel boşluğa sahip kare formundaki tabakalı kompozit plakların burkulma yükü analizlerinin çeşitli parametrelere bağlı sonlu eleman analizleri gerçekleştirilmiştir. Parametre olarak farklı boşluk boyut ve konumları ile birlikte tabaka yönlenmeleri ve yükleme sınır koşulları seçilmiştir (Şekil 1.5).



Şekil 1.5. [8] çalışmasına ait görsel

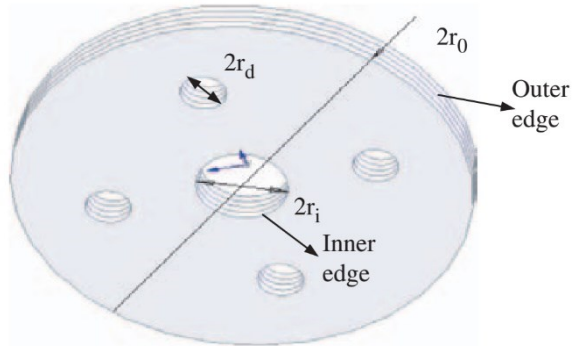
[9] çalışmasında Baba B.O. tarafından tabakalı kompozit dikdörtgen plakların burkulma yükünün sınır koşullarına bağlı değişimi ANSYS® sonlu eleman paket programı ile incelenmiştir. Parametre olarak çeşitli boşluk şekilleri, uzunluk/kalınlık oranları ve tabakalanma koşullarına bağlı değişimler kullanılmıştır (Şekil 1.6).



Şekil 1.6. [9] çalışmasına ait görsel

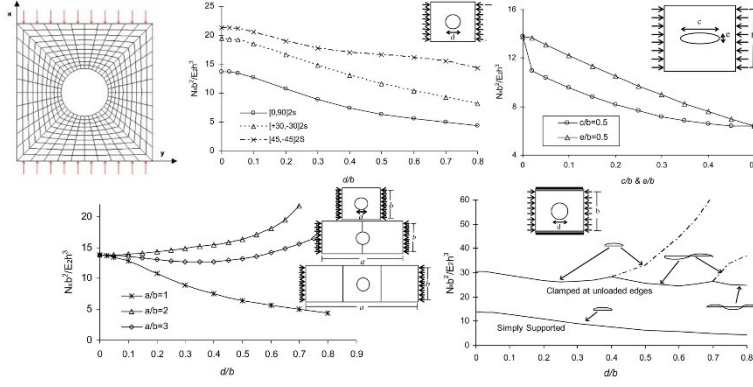
[10] çalışmasında Baba B.O. & Baltacı A. tarafından çeşitli anti-simetrik tabakalanma, boşluk tipi ve uzunluk/kalınlık oranlarının burkulma davranışı üzerini etkisini incelemek üzere numerik ve deneysel bir çalışma ortaya konmuştur.

[11] çalışmasında Baltacı A., Sarıkanat M. & Yıldız H. tarafından dairesel boşluklara sahip dairesel tabakalı kompozit plakların dış kenarı boyunca düzlem içi uniform yük etkisindeki burkulma analizleri sonlu eleman metodu kullanılarak araştırılmıştır. Delik boyutu, konumu, kalınlık değişimi, sınır koşulu etkileri ve mod şekilleri belirlenmiştir (Şekil 1.7).



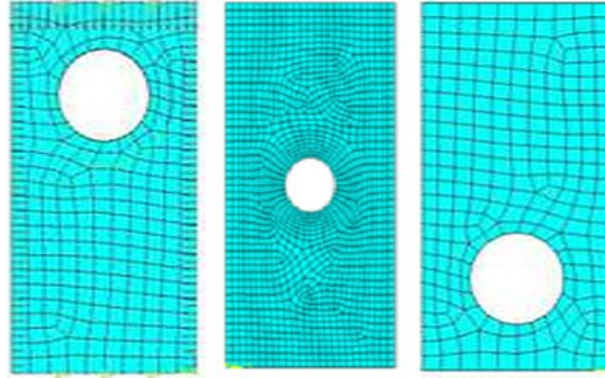
Şekil 1.7. [11] çalışmasına ait görsel

[12] çalışmasında Ghannadpour S., Najafi A. & Mohammadi B. tarafından tabakalı kompozit dikdörtgen plakların boşluklu olma durumundaki burkulma davranışı üzerine sonlu eleman yöntemi kullanılarak çalışılmıştır. Çeşitli boşluk boyut ve şekilleri, plak kenar oranları ve sınır koşullarına bağlı etkilere ait bulgular elde edilmiştir (Şekil 1.8).



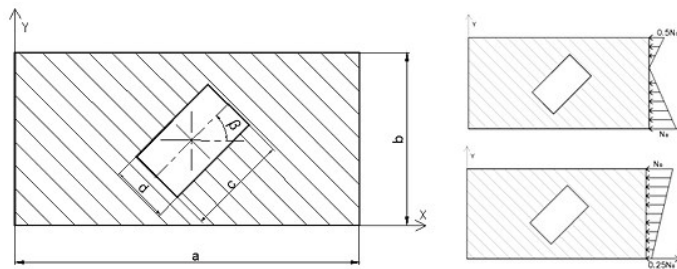
Şekil 1.8. [12] çalışmasına ait görsel

[13] çalışmasında Joshi A., Reddy P.R., Krishnareddy V.N. & Sushma C.V. tarafından dairesel boşuklu ve iki doğrultuda yükleme durumundaki dikdörtgen plaklarda ANSYS® sonlu eleman paket programı ile burkulma yükünün belirlenmesi üzerine çalışılmıştır. Boşluk pozisyonunu plak-boy/en oranı ve plak-en/kalınlık oranları değişimi için burkulma değerleri elde edilmiştir (Şekil 1.9).



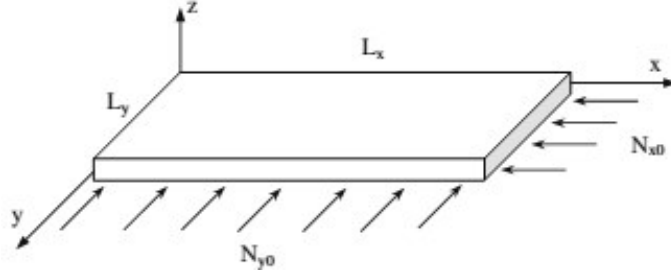
Şekil 1.9. [13] çalışmasına ait görsel

[14] çalışmasında Narayana A.L., Rao K. & Kumar R.V. tarafından sonlu eleman numerik metodu kullanılarak lineer olarak değişen düzlem içi basınç yükü varyasyonları için tabakalı kompozit dikdörtgen plaklarda kare ve dikdörtgen boşluk durumlarının burkulma davranışına olan etkisi incelenmiştir (Şekil 1.10). Boşluk boyutu ve konumu, kenar oranları ve uzunluk/kalınlık oranlarına bağlı değişimler elde edilmiştir.



Şekil 1.10. [14] çalışmasına ait görsel

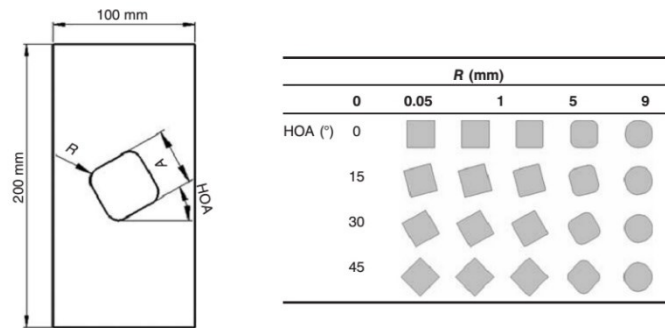
[15] çalışmasında Özben T. tarafından fiber takviyeli tabakalı kompozit plakların analitik ve sonlu eleman metotları ile kritik burkulma yükü çözümlenmeleri gerçekleştirilmiştir. Farklı tabaka yönlendirmeleri, simetrik ve anti-simetrik tabakalanma ve farklı mesnetlenme koşulları için kritik burkulma yükleri, deformasyonlar ve 1. ve 2. mod formları elde edilmiştir (Şekil 1.11).



Şekil 1.11. [15] çalışmasına ait görsel

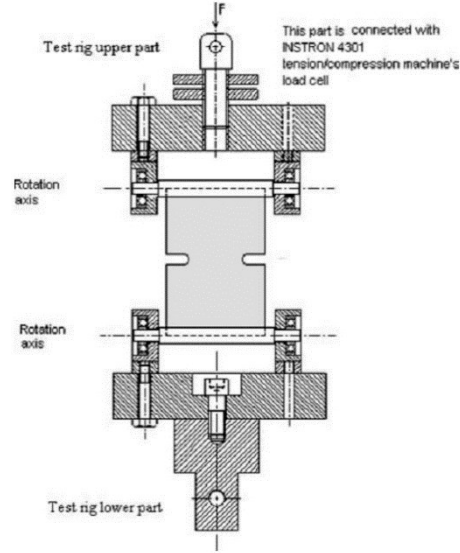
[16] çalışmasında Tekin M. & Altan M. tarafından tek doğrultuda düzlem içi basınç etkisindeki sabit mesnetli dikdörtgen betonarme plakların burkulma analizi için yaklaşım ortaya konmuştur. Dairesel boşluklu ve boşluksuz betonarme plakların burkulma yüklerinin kıyası için tabakalı kompozit plak olarak sonlu elemanlar yöntemi kullanılmıştır. Kompozit malzeme ve tabakalı kompozit malzeme yaklaşımları tartışılmıştır.

[17] çalışmasında Yazici M. tarafından tabakalı kompozit dikdörtgen plakların boşluklu durumda burkulma davranışları sonlu eleman yöntemi kullanılarak incelenmiştir. Boşluk boyutu, oryantasyonu ve köşe yuvarlama yarıçapları varyasyonlarının etkileri değerlendirilmiştir (Şekil 1.12).



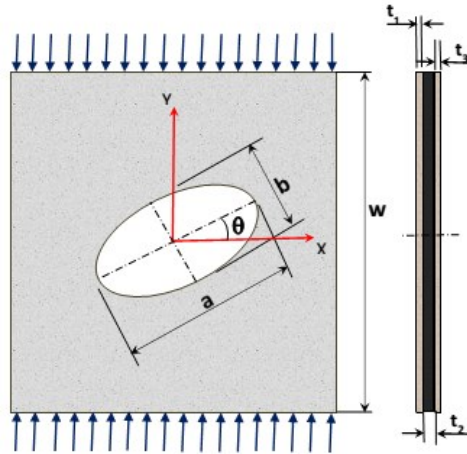
Şekil 1.12. [17] çalışmasına ait görsel

[18] çalışmasında Yazici M., Ozcan R., Ulku S. & Okur I. tarafından tabakalı kompozit dikdörtgen plaklarda karşılıklı kenarlarından yapılacak U-şeklindeki kesilerin burkulma davranışına olan etkisi deneysel ve sonlu eleman metotları kullanılarak incelenmiştir. Parametre olarak U-şeklinin taban dönüş yarıçapı ve yükseklik varyasyonları kullanılmıştır (Şekil 1.13).



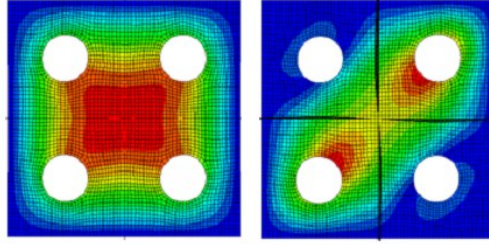
Şekil 1.13. [18] çalışmasına ait görsel

[19] çalışmasında Al-Jameel S.E.S. & Albazzaz R.K. tarafından eliptik ve dairesel boşluklara sahip dörtgen tabakalı kompozit plakların burkulma davranışları ANSYS® sonlu eleman paket programı ile incelenmiştir. Parametre olarak elips formunun yükseklik/genişlik oranı ve boşluk yönelme açılarının varyasyonları kullanılmıştır (Şekil 1.14).



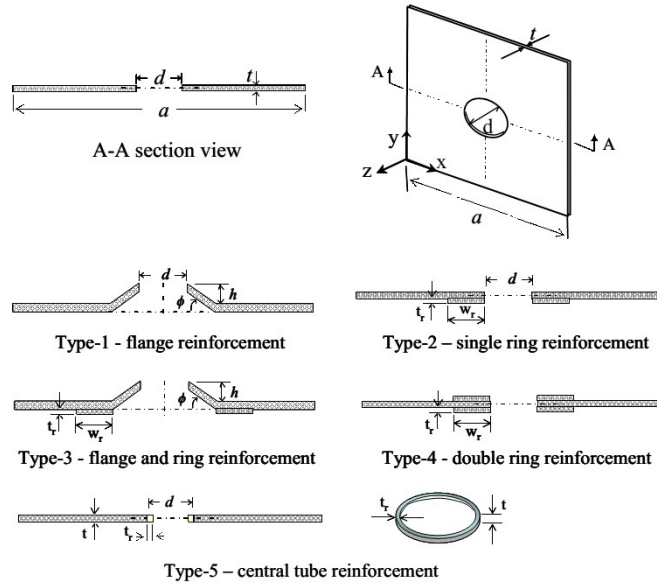
Şekil 1.14. [19] çalışmasına ait görsel

[20] çalışmasında Al-Qablan H., Dwairi H., Shatarat N., Rosan T. & Al-Qablan T. tarafından berkitmeli kare tabakalı kompozit plakların burkulması incelenmiştir. Bu tür plaklar için yarı-analitik bir model yaklaşımı türetilmiştir. Dairesel boşluk durumu için sonlu eleman analizi yapılmıştır. Parametre olarak da tabaka yönlenmeleri, boşluk boyutu ve konumu, berkitme sayısı ve konumu kullanılmıştır. Üç tip düzlem içi yükleme belirlenmiştir (Şekil 1.15).



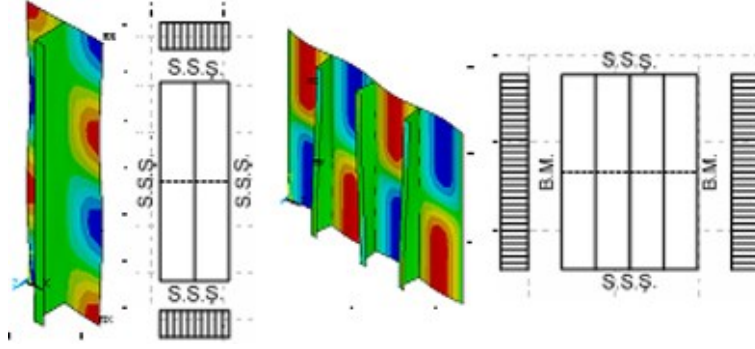
Şekil 1.15. [20] çalışmasına ait görsel

[21] çalışmasında Guo S., Zhou L. & Cheung C. tarafından kayma gerilmesi etkisinde tabakalı ve sandviç kompozit panellerin boşluk çevresi gerilme yığılma etkisini azaltmak için yapılan güçlendirmenin burkulma stabilitesine etkisi deneysel ve numerik analizlerle incelenmiştir. Parametre olarak boşluk boyut ve tasarımı ve güçlendirme için kullanılan malzemeler kullanılarak gerilme dağılımları ve burkulma davranışları değerlendirilmiştir (Şekil 1.16).



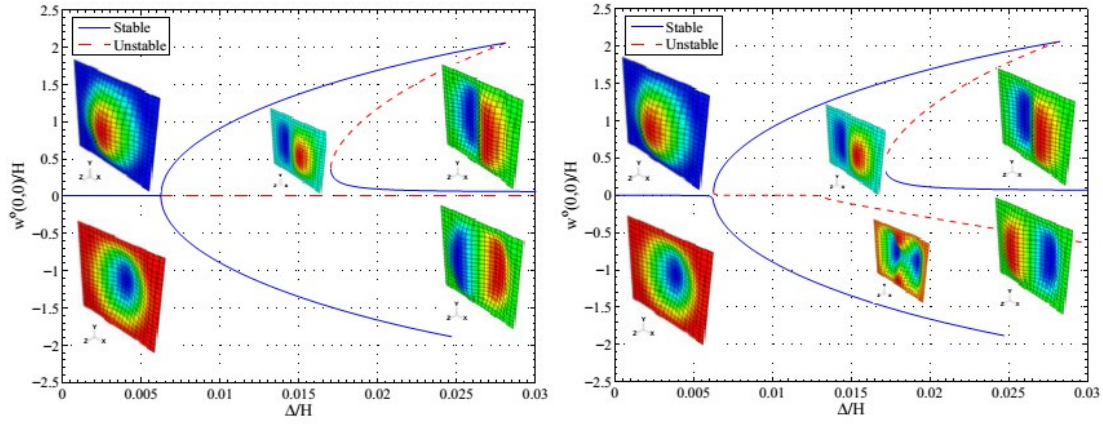
Şekil 1.16. [21] çalışmasına ait görsel

[22] çalışmasında Yıldız Y.O. tarafından basit mesnetli ve aksenal basınç yükü etkisinde enine berkitmeli izotropik ve kompozit plakların ANSYS® sonlu eleman paket programı ile burkulma analizleri incelenmiştir (Şekil 1.17).



Şekil 1.17. [22] çalışmasına ait görsel

[23] çalışmasında Majeed M.A. tarafından simetrik tabaka dizimli plaklarda burkulma-çatallanması (bifurkasyon), burkulma-sonrası ve ikincil-burkulma durumlarını gerçekleştirecek düzlem içi basınç yüklerinin simetrik-olmayan tabaka dizilimine sahip plaklardaki etkileri ABAQUS® sonlu eleman paket programı kullanılarak incelenmiştir (Şekil 1.18).



Şekil 1.18. [23] çalışmasına ait görsel

2. PLAK ve BURKULMA MEKANİĞİ

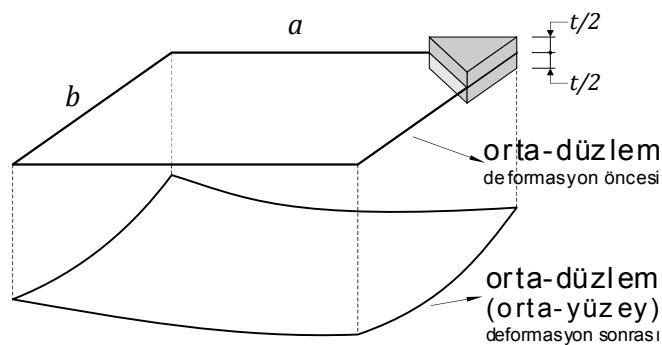
2.1 Plak

2.1.1 Tanımı ve yapılan varsayımlar

Plakların kalınlık ölçüsü diğer karakteristik boyutlarına (en, boy, çap) kıyasla çok küçüktür. Geometrilere düz veya eğrisel sınırlara sahip olabilir ve taşıdıkları statik veya dinamik yüklerin çoğunluğu plak düzlemine dik doğrultudadır [2].

Plakların taşıma prensibi belli bir ölçüde kiriş veya kablolarla benzerlik göstermektedir. Bu benzerlikten yararlanarak yapının eğilme rijitliğine bağlı olarak plak elemanı için sonsuz sayıda kirişin ızgara dizilimi veya sonsuz sayıda kablonun ağ kurgusu şeklinde yaklaşımlar yapılabilir. Plakların bu iki boyutlu yapısının sonucu daha hafif yapılar ve beraberinde ekonomik avantajlar ortaya çıkmaktadır. Plaklarda düzleme dik yükler taşınırken kesme kuvveti, eğilme ve burulma momentleri ortaya çıkar. Plaklar açıklık ve kalınlıkça benzer kirişlerden büyük ölçüde daha rijittir. Bunun nedeni, her iki doğrultuda da yük taşınması ve yüksek burulma rijitliği özelliğine sahip olmasıdır. Bu sayede ince plağın hafiflik ve kullanışlı şekil özellikleri, yüksek yük taşıma kapasitesi, ekonomiklik ve teknolojik avantajlarla birleştirmektedir. İfade edilen bu aşikâr özelliklerinden dolayı ince plaklar bütün mühendislik alanlarında geniş ölçüde kullanılmaktadır [2].

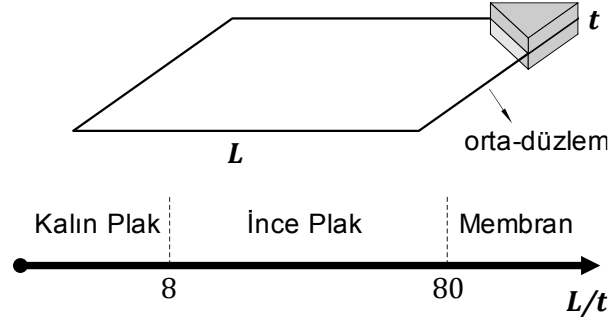
Plak yüzeyine paralel olarak kalınlığı ortadan ikiye bölen yüzeye plağın orta-düzlemi adı verilir (Şekil 2.1). Başlangıçta düzlemsel olan plak, düzlem içi ve düzlemine dik yükler etkisinde deformasyona uğrar ve plak orta-düzlemi eğrisel bir yüzey formuna dönüşür. Sabit kalınlıklı plaklarda plağın şekli orta-düzleminin geometrisi ile tarif edilir [2].



Şekil 2.1. Plak orta-düzlemi

2.1.2 Plak çeşitleri

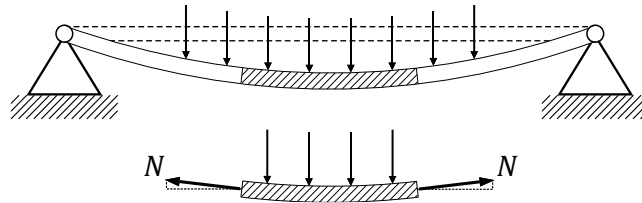
Plaklar eğilme etkileri sayesinde düzlemlerine dik yüklere karşı koymaktadırlar. Plakların eğilme karakteristiği boyutlarından çok kalınlıklarına göre değişim göstermektedir. Plaklar boy/kalınlık (L/t) oranlarına bağlı olarak üç ana grupta sınıflandırılırlar [2];



Şekil 2.2. Plak ayırım cetveli

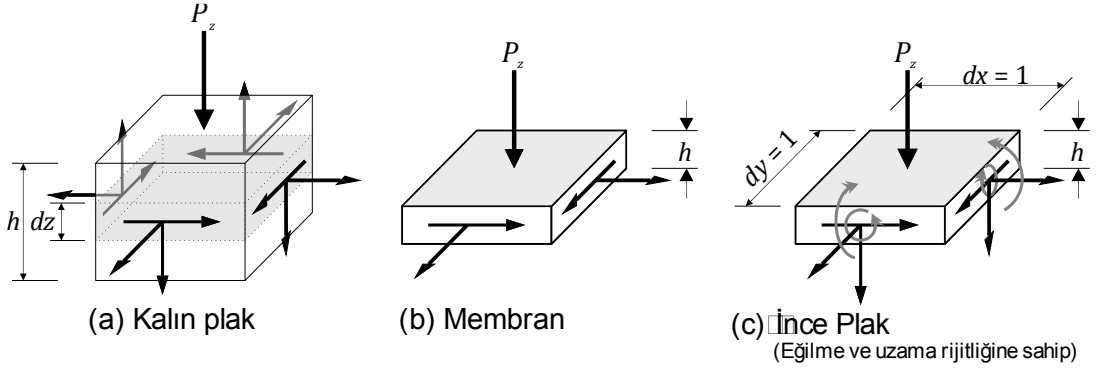
a) *Kalın plaklar:* $L/t \leq 8 \sim 10$ Bu tür plakların analizinde genel üç-boyutlu (3D) elastisite teorisinin gerilme, birim-şekil-değişirme ve yer-değişirme ifadeleri kullanılır (Şekil 2.4) [2].

b) *Membranlar:* $L/t \geq 80 \sim 100$ Çok düşük eğilme rijitliğine sahiptirler. Yükleri plak orta-düzlemindeki aksenal gerilme (ve kayma gerilmeleri) ile taşırlar (Şekil 2.4). Bu gerilmelerin düşey bileşenleri ile düşey doğrultuda membrana etkiyen yükler dengelenir (Şekil 2.3) [2].



Şekil 2.3. Membran kuvvetler

c) *İnce plaklar:* $8 \sim 10 \leq L/t \leq 80 \sim 100$ En yaygın ara-tip plak grubudur. Maks-çökme/kalınlık (w/t) oranına bağlı olarak kalın plak ve membranlardan ayrışır. Bu nedenle bu tür plaklar iki alt grupta incelenir (Şekil 2.4);



Şekil 2.4. Farklı plak eleman tiplerine ait iç-kuvvetler

i) **Rijit plaklar:** Çökme/kalınlık oranının 0,2'den küçük veya eşit olması ($w/t \leq 0,2$) durumunda rijit plak olarak sınıflandırılabilirler. Rijit plaklar eğilmeye karşı dayanıklı ince plaklardır. Yükleri iki-boyutlu (2D) olarak (çoğunlukla eğilme ve burulma momentleri, ve kesme kuvvetleri ile) taşırlar. Orta-düzlem deformasyonları ve membran kuvvetler ihmal edilebilir. Rijit plaklarda statik denge denklemleri plağın deforme olmamış hali için yazılabilir [2].

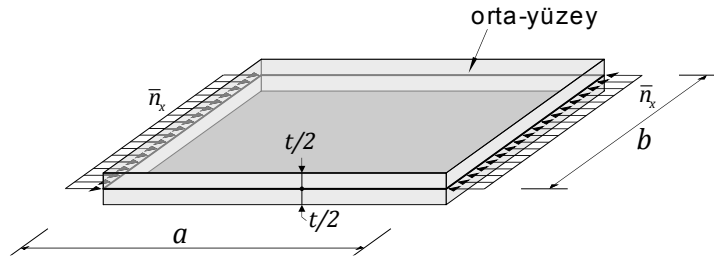
ii) **Eğilebilir plaklar:** Plak çökmesinin belli bir mertebeyi ($w/t \geq 0,3$) geçmesi durumunda, orta-düzlemdeki uzamalarla yanal (düzleme dik) sapmalar ortaya çıkar. Bu tür plaklara eğilebilir plaklar denir. Bu plaklar rijit plak ve membran kombinasyonu gibi davranır ve dış yükleri içsel momentlerin, kesme kuvvetlerin ve membran (eksenel) kuvvetlerin birlikteliği ile taşır. Bu tür plaklar elverişli ağırlık/yük özelliğinden ötürü havacılık sektöründe geniş kullanım alanına sahiptirler. Maksimum çökmenin plak kalınlığını aştığı durumlarda membran davranış sergilerler. Bu sebeple, çökme oranının $w/t > 5$ olması durumunda eğilme gerilmeleri membran gerilmelere oranla ihmal edilebilir mertebede olmaktadır [2].

Bu sınıflandırma w/t oranının yanında plağın yükleme tipi ve sınır koşullarına da bağlıdır [2].

2.2 Burkulma

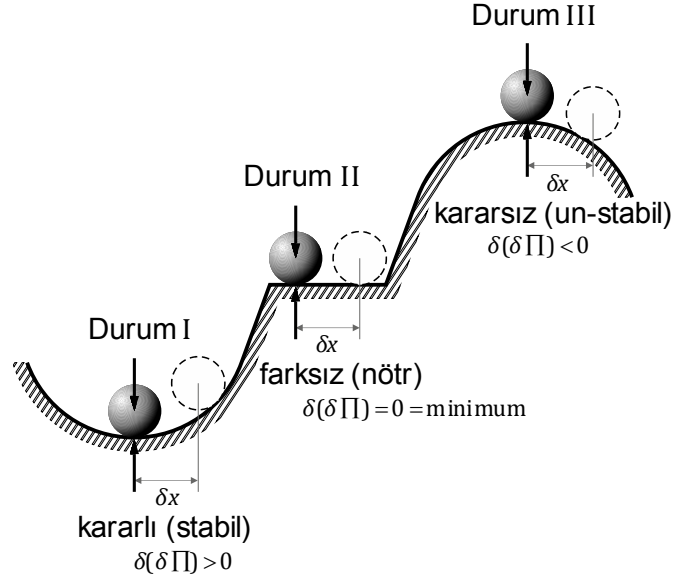
2.2.1 Tanım

Düzlem içi normal ve kesme kuvvetleri etkisine maruz ince plak elemanlarda bu kuvvetlerin yeterince küçük olması durumunda kararlı bir denge söz konusu olmaktadır (Şekil 2.5). Bu yüzden deformasyonlar da düzlem içi yer-değiştirmelerle sınırlı kalmaktadır ($w = 0, u \neq 0, v \neq 0$). Düzlem içi kuvvetlerin artışı belli mertebeden sonra gözle görülebilir düzeyde deformasyonlar ortaya koymaktadır. Yani düzlem içi deformasyonlara aynı zamanda düzleme dik deformasyonlarda eklenmektedir. Bu durumda kararlı olan denge hali kararsız hale dönüşmekte ve plak burkulmaktadır. Bu hale neden olan en küçük yüke kritik yük adı verilir. Kritik yük aşıldıktan sonra düzleme dik büyük deformasyonlar oluşmakta ve plak tamamıyla göçmektedir [24].



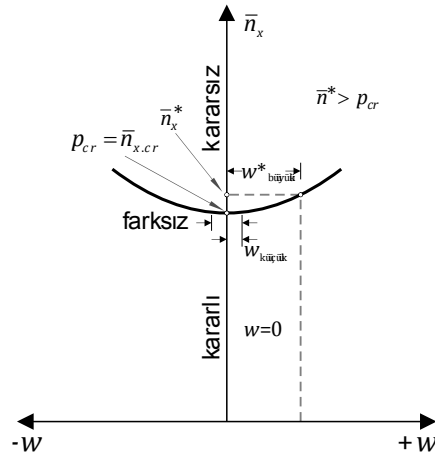
Şekil 2.5. Düzlem içi yüke maruz plak eleman

Plak burkulmasının temel prensibi, rijit bir kürenin farklı denge durumlarına ait basit bir benzetme ile tarif edilebilir (Şekil 2.6). Küre, büyük çukur bir kâsede duruyorsa (durum I) bu denge haline kararlı denge hali denir. Kürenin denge hali küçük bir $\delta(x)$ deplasmanı ile bozulsa bile belli bir zaman sonra ilk denge konumuna geri döner. Eğer küre bir düzlem yüzeyde duruyorsa (durum II) buna farksız denge hali denir. Bu küreye küçük bir $\delta(x)$ deplasmanı uygulanırsa küre yeni bir denge konumuna sahip olur. Yani ilk denge konumuna geri dönmez fakat ilk denge konumundan da uzaklaşmaz. Eğer küre başka bir kürenin üzerinde duruyorsa (durum III) bu denge haline kararsız denge hali denir. Uygulanacak en küçük $\delta(x)$ deplasmanı bile dengeyi tamamen bozar ve böylece göçme meydana gelir. Klasik burkulma teorisinde kararlı halden kararsız hale geçişte her zaman farksız bir denge konumu mevcuttur. Stabilite ile alakalı bütün denklemler farksız denge konumu için yazılmaktadır. Yani kritik yük farksız denge konumuna karşı gelen yük değeri olarak ortaya çıkmaktadır [24].



Şekil 2.6. Rijit kürenin farklı denge durumları

Plak stabilite problemlerinin matematiksel ifadelerinde farksız denge hali, deformasyonların çatallanma (bifurkasyon) noktası olarak varsayılmaktadır. Bu kritik yük değerinden sonra plağın alacağı burkulma formu iki farklı deformasyon şeklinde meydana gelmektedir (bunlardan biri kararlı denge konumu ve diğeri de kararsız denge konumu ile ilgilidir) (Şekil 2.7). Plakların elastik stabilite analizlerinde Hooke kanunu geçerlidir [24].

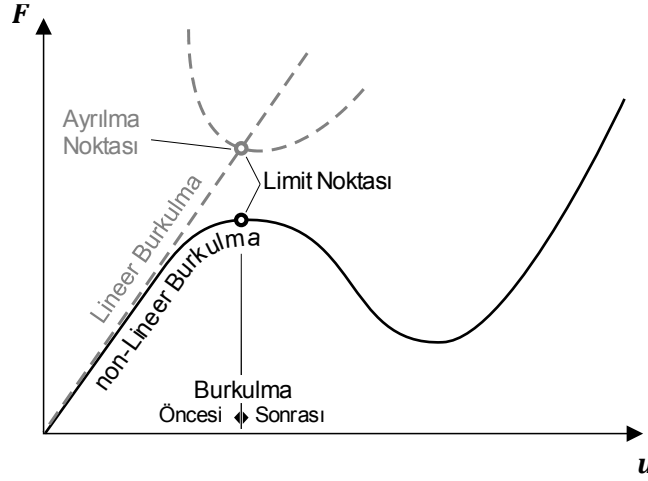


Şekil 2.7. Deformasyonun istikamet bifurkasyonu

Burkulmanın lineer ve non-lineer analizi ile ilgili grafik Şekil 2.8'de gösterilmektedir. Grafikteki çatallanma noktası burkulmanın lineer hesabından elde edilen kritik yük değerini gösterir. Bu noktadan sonra sistem, kararsız duruma geçer ve davranışı öngörülemez [22].

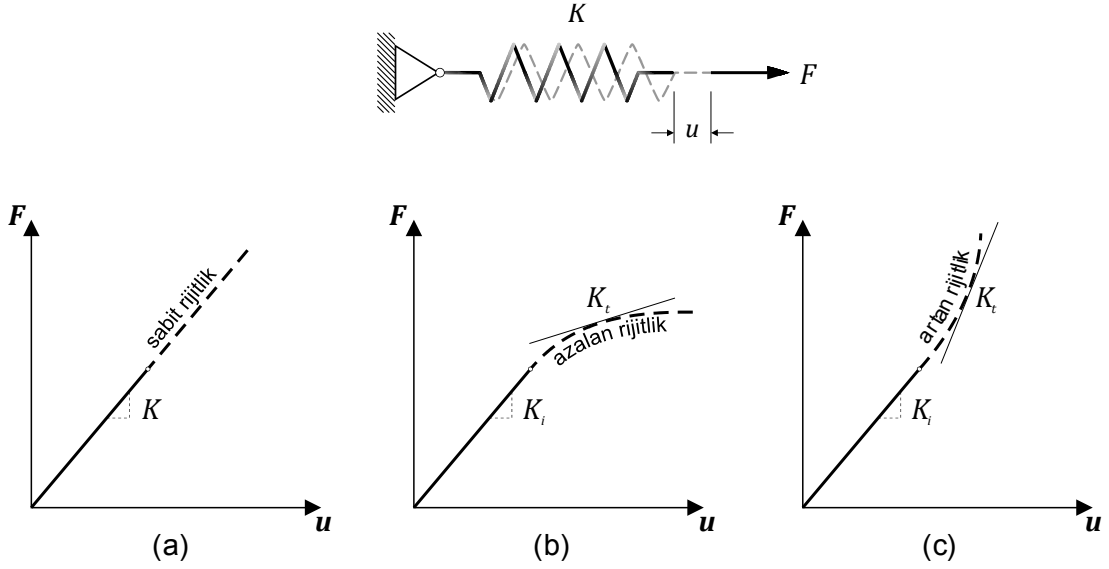
Burkulma-öncesi ve -sonrası durumların incelenmesinde non-lineer analizden yararlanılır. Lineer çözüm sistemin mükemmel olduğu durum için yapılar. Oysaki yapıların gerçekte mükemmel-olmayan davranış içinde olmalarından ötürü

çatallanma noktasına yaklaştıkça lineer çözümün verdiği sonuçlar yeterli doğrulukta olamamaktadır [22].



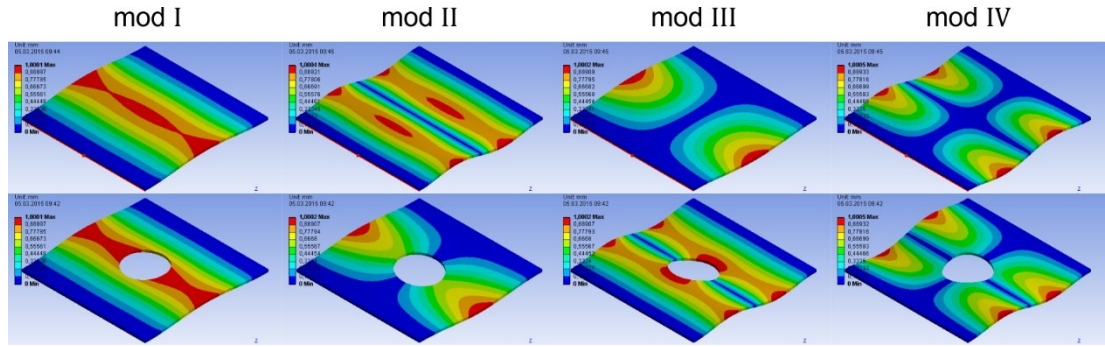
Şekil 2.8. Burkulmanın lineer ve non-lineer analiz grafiği

Mükemmel ve mükemmel-olmayan yapıların ayrımını basit yay-eşitliğinden yararlanarak açıklayalım; $\{F\} = [K] \cdot \{u\}$ eşitliğinde $\{F\}$ uygulanan kuvveti, $[K]$ yay rijitliğini, $\{u\}$ da yer-değiştirmeyi ifade etmektedir. Bu eşitlik, küçük-deformasyon teorisini ifade etmektedir. Bu duruma uygun davranan yapılara mükemmel yapı adı verilmektedir ve $[K]$ rijitliği sabit bir değerdir (Şekil 2.9a). Diğer taraftan mükemmel-olmayan yapılarda ise deformasyon esnasında geometrinin değişmesi ile doğal olarak $[K]$ rijitliği de değişmektedir. Bu değişim kuvvet artışıyla pozitif veya negatif yönde olabilir (Şekil 2.9b,c). Rijitliği azalan yapılarda kritik yük değerine (burkulma noktasına) yaklaşıldıkça kuvvet artışı ile birlikte daha büyük deformasyonlar meydana gelecektir ve kritik seviyeye ulaşan yükün çok küçük bir artışı bile yapıda çok büyük deformasyonlar meydana getirecektir, bu da yapı rijitliğindeki azalmanın göstergesidir [22].



Şekil 2.9. Rijitliğin sabit ve değişken olma durumları

Plaklar için burkulma modlarını (şekillerini), genel ve bölgesel olarak ikiye ayırabiliriz (Şekil 2.10). Burkulma modları; sınır şartları, plak şekil ve özelliklerine bağlı olarak değişir [22].



Şekil 2.10. Burkulma modları

2.2.2 Hesap metotları

Plakların klasik burkulma problemleri (i) statik denge diferansiyel denklemleri, (ii) enerji metotları ve (iii) dinamik yaklaşımlarla ifade edilebilirler [24].

2.2.2.1 Denge metodu

Denge metodunda plağın hafifçe burkulduğunu varsayırız. Bu varsayım, deformasyon formuna göre yazılan denge diferansiyel denklemleri için gereklidir. Böylece plağın eğilme ve uzamasının birlikte meydana geldiği hal ele alınarak denge denklemleri elde edilir. Düzlem içi yüklerin kritik yükten çok küçük bir farkla büyük olması halinde, düzleme dik deformasyonlar (w) yükteki artışın küçüklüğüne bakmaksızın çok büyük değerlere ulaşır (Şekil 2.7). Bu durumu ortaya çıkaran en küçük yükleme hali kritik yüküdür [24].

Denge metodunun daha genel hali, stabilite problemini bir öz-değer problemine dönüştürür. Bu amaçla referans değer olan dış yükü (\bar{n}_0) bir yük parametresi λ ile çarparız. Bu yüzden, denge diferansiyel denkleminin belli terimleri bu λ çarpanını içermektedir. Bu şekilde elde edilen homojen diferansiyel denklem ($w(x, y)$) çözümü, sınır koşullarından belirlenecek keyfi katsayılar ($C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$) sahip olacaktır. Bu denklemlerin determinantını sıfıra eşitleyerek λ 'nın hesaplandığı karakteristik bir polinom ifade elde edilir. En küçük öz-değer λ_{cr} 'ği verir ve buradan kritik yük hesaplanır [24];

$$\bar{n}_{cr} = \lambda_{cr} \cdot \bar{n}_0 \quad (2.1)$$

Karakteristik ifadenin ($\lambda = 0$) çözümü burkulmamış denge durumuna karşı gelmektedir [24].

2.2.2.2 Enerji metotları

Plak stabilite problemleri, değişik enerji teoremlerinin genişletilmesi ile de formüle edilebilir. Enerjinin korunumu kanunu gereği plağın kararlı denge halinden kararsız denge haline geçişini ifade edelim. Bu geçişte enerjinin korunumu ile ifade edilen dengenin farksız hali de meydana gelir. Bu ifadenin fiziksel tanımı: Farksız denge halinde, herhangi bir enerji kaybı veya artışı olmadan plağın orijinal düz formu eğrisel bir forma geçer. Bu durumun enerji denklemi ise;

$$\Delta W_i + \Delta W_e = W_i^* + W_e^*(\lambda) = 0 \quad (2.2)$$

şeklinde ifade edilir [24].

Orta-düzlemde uzama olmadan meydana gelen küçük eğilmeler durumunda dış basınç kuvvetlerinin yaptığı iş W_e^* , eğilmenin oluşturduğu düzlem içi deplasmanlardan meydana gelir. Benzer şekilde, iç kuvvetlerin yaptığı iş W_i^* , eğilmeden meydana gelen potansiyel enerji (U_b^*) şeklindedir. Ayrıca, burkulma süresince dış kuvvetin şiddetinin değişmediği kabul edilir. Dış kuvvetlerin işi, yukarıda da ifade edildiği gibi, yük parametresi λ fonksiyonu cinsinden verilir [24].

Çoğunlukla, varyasyonel prensip kullanılarak burkulma problemi ifade edilir. Bu durum da denge konumundan çok küçük bir sapma yapmış plağın ele alındığı durumdur. Dış ve iç kuvvetlerin yaptığı işlerin sıfırlanması koşuluyla (2.2) denklemini potansiyeller cinsinden tekrar yazarsak [24];

$$\Pi_0 + \Delta \Pi = 0 \quad (2.3)$$

Buradaki Π_0 , plak yük sisteminin kararlı denge konumuna ait toplam potansiyelini ve $\Delta\Pi$ ise toplam potansiyeldeki artışı ifade etmektedir. En yakın denge konumunu ifade eden bu durumda orta-yüzey, yükte meydana gelen küçük artıştan dolayı hafifçe eğilir. Bu, kararlı denge konumunda toplam potansiyelin sıfırlanması ($\Pi_0 = 0$) gerektiğini göstermektedir [24].

Toplam potansiyel artışını ($\Delta\Pi$) Taylor serisi ile ifade edecek olursak;

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \frac{1}{2!}\delta^2\Pi + \dots \quad (2.4)$$

(2.3) denkleminde $\Delta\Pi$ sıfıra eşit olmalıdır. Fakat bir denge sistemi için potansiyelin ilk varyasyonu sıfırdır ($\delta\Pi = 0$). Sonuç olarak, toplam potansiyelin ikinci varyasyonu da sıfırlanır. Bunu ifade edersek [24];

$$\delta^2\Pi = \delta(\delta\Pi) = \delta[\delta\Pi(c_1, c_2, c_3, \dots, c_n)] = 0 \quad (2.5)$$

Farksız denge konumuna karşı gelen minimum potansiyel enerjinin türevinin sıfıra eşitlenmesi gerekmektedir [24];

$$i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{için} \quad \frac{\partial(\Delta\Pi)}{\partial c_i} = \frac{\partial\Pi^*}{\partial c_i} = 0 \quad (2.6)$$

Buradaki $\Pi^* = \Delta\Pi$, en yakın denge konumdaki toplam potansiyel enerjiyi ifade eder. Böylece, bu yaklaşım çökme yüzeyi ifadesinin birden fazla keyfi sabit ($c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$) içermesi durumunda da kullanılabilir [24].

(2.6) ifadesini, bir öz-değer – öz-vektör problemine indirgeye bilmek için yeniden λ yük faktörü kullanılır. Önce, plağın mevcut yükler altında denge halinde olduğu göz önüne alınır ve orta-yüzeyin düz olduğu varsayılır. Daha sonra, hafifçe eğilmenin meydana geldiği yakın denge haline (bifurkasyona) ulaşılanaya kadar λ faktörü ile yükü artırarak denge koşulu bozulur. Farksız denge halinde, w deplasmanlarından ötürü oluşacak şekil-değiştirme enerjisi ile dış kuvvetlerin potansiyeli toplamı minimum olmalıdır. Sıfırdan farklı en küçük çözüm ise λ 'nın kritik değerini λ_{cr} 'i vermektedir [24].

Ayrıca, denge koşulu tipi toplam potansiyelin ikinci varyasyonu yardımıyla da belirlenebilir [24];

$$\begin{array}{lll} \text{Kararlı denge için} & : \delta^2\Pi > 0 & \delta\Pi = 0 \\ \text{Farksız denge için} & : \delta^2\Pi = 0 = \min & \delta\Pi = 0 \\ \text{Kararsız denge için} & : \delta^2\Pi < 0 & \delta\Pi = 0 \end{array} \quad (2.7)$$

2.2.2.3 Dinamik yaklaşım

Stabilite problemlerinde genellikle dinamik metotlarla analiz sıklıkla kullanılmamaktadır. Düzleme dik titreşimlerin diferansiyel ifadelerinin oluşturulmasında düzlem içi kuvvetlerin etkisini dikkate almak gerekmektedir. Bu nedenle, hareket denklemi λ yük faktörünü içermektedir. Düzleme dik deformasyonları ani şekilde artıran λ 'nın en küçük değeri kritik yük faktörü olmaktadır [24].

Burkulma ve titreşim diferansiyel denklemlerinin kıyaslanmasıyla plak stabilite probleminin dinamik çözümüne alternatif bir yaklaşım sunulabilmektedir. Eğer burkulma şekli ve serbest-titreşim modları aynı ise kritik yük ve en düşük doğal frekans aynı koşullarda meydana gelir. İki diferansiyel denklem sadece bir sabit değer ile birbirlerinden ayrılmaktadır. Plakların dinamik stabilite probleminin incelenmesi; serbest-titreşim probleminin analizi ve statik stabilite probleminin analizi olarak indirgenebilir [24].

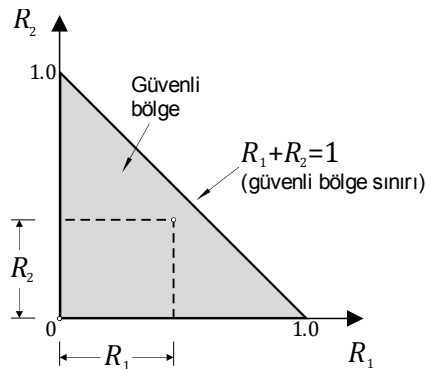
2.2.2.4 Bileşik yükleme durumunda burkulma

Aynı anda düzlem-içi basınç ve kesme kuvvetleri ile düzleme dik eğilmenin bileşik olarak plağa etkimesi durumunda, bu kuvvetlerin ayrı ayrı etkimesi ile burkulma oluşturacak yüklemekten daha düşük değerlerde burkulma meydana gelecektir. Bileşik yükleme etkisi için yapılan yaklaşım aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir [24];

$$R_1^n + R_2^m + R_3^k + \dots \leq 1 \quad (2.8)$$

Burada R_i aşağıdaki şekilde hesaplanan yük oranıdır;

$$R_i = \frac{i\text{-ninci yükleme (tek başına etkileyen)}}{i\text{-ninci yüklemenin kritik yükü}} = \frac{\bar{n}_i}{\bar{n}_{cr,i}} \quad (2.9)$$



Şekil 2.11. Etkileşim eğrisi

(2.8) denkleminin grafik gösterimi Şekil 2.11'deki doğrunun altında kalan gri taralı alanı ifade etmektedir. R_1 - R_2 ikililerinin kesişim noktası taralı alan sınırlarının üstünde veya dışında olması durumunda burkulma meydana gelmektedir. Gerard, dikdörtgen plaklar için çeşitli sınır koşulları ve plak boyutları için etkileşim-ifadelerini türetmiştir [24].

3. TABAKALI KOMPOZİT PLAK MEKANİĞİ

3.1 Giriş

Kompozit malzemelerden meydana gelmiş yapıların analizi için an-izotropik elastisite teorisi, uygun bir yapısal teori, sistemin çökme tahkiki için kırılma kriterleri ve yapıya ilişkin sınır değer problemlerini çözmek için numerik bir yaklaşım metoduna ihtiyaç duyulmaktadır [1].

Temel mühendislik eğitiminde izotropik malzemeler üzerinde durulmaktadır ama yeni nesil mühendislik problemlerinin analizi için yeterli olmamaktadır. Malzemeyi oluşturan bileşenlerin an-izotropik heterojen bir madde olması durumunda, rijitliği doğru şekilde modellemek, gerilmeleri belirlemek ve çeşitli göçme durumlarının başlangıç ve ilerleyişini belirlemek için uygun bir yapısal teoriye ihtiyaç duyulmaktadır. Mevcut metaller hakkındaki bilgi birikimi ile izotropik ve an-izotropik ortamlar arasında benzerlik kurmak ve bunlardan bir sonuç türetmek hatalı sonuçların elde edilmesine neden olmaktadır [1].

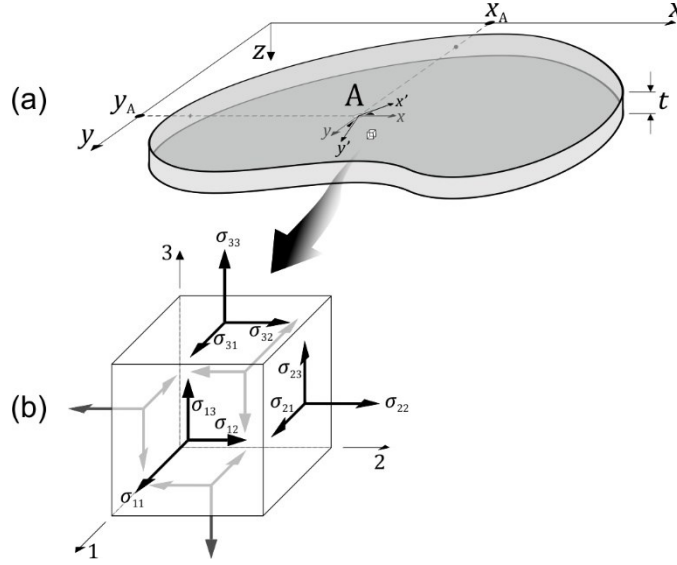
Bu bölümde temel olarak an-izotropik elastisite teorisi ve tabakalı kompozitlerin mekaniği üzerine odaklanılmıştır. Burada temel varsayımlar, kompozit malzemelerin bünye bağıntıları ve yapısal tabakalı kompozit teorilerinin türetilmesi üzerinde durulacaktır [1].

3.2 An-İzotropik Elastisite Teorisi

3.2.1 Tanımlar

Kompozit malzeme mekaniğini anlayabilmek için kompozit malzemenin temel davranışlarını inceleyerek başlamak gerekmektedir. İlk olarak, homojen ve heterojen malzeme sistemlerinin farkları tariflenecektir. Malzemenin her yerinde malzeme karakteristiği değişmeden kalıyorsa bu tür malzemelere homojen malzeme denir. Heterojen bir malzeme sisteminde, malzeme karakteristiği konumun bir fonksiyonu şeklinde tanımlanmaktadır. İzotropik ve an-izotropik malzemelerin aralarındaki farkları ise şöyle tariflenebilir. Bir noktadaki bütün malzeme karakteristikleri doğrultudan bağımsız ise malzemeye izotropik malzeme denir. İzotropik malzemenin bir A noktasından geçen tüm doğrultularda malzemenin fiziksel özellikleri aynıdır

(Şekil 3.1a). An-izotropik malzemeler ise doğrultuya bağlı olarak farklı fiziksel özellikler sergilerler. Bir malzeme aynı anda izotropik-homojen veya izotropik-heterojen veya an-izotropik-homojen veya an-izotropik-heterojen olabilir [1].



Şekil 3.1. İzotropik ve an-izotropik malzeme tanımı, ve Gerilme bileşenleri

3.2.2 Bünye bağıntıları

Üç-boyutlu (3D) Kartezyen koordinat sisteminde (Şekil 3.1b) deformasyonu ifade ederken alışlagelen gerilme ve birim-şekil-değiştirmelerin 6 bileşeninden (3 normal ve 3 kayma) yararlanır. 6 gerilme ve 6 birim-şekil-değiştirme arasındaki lineer bağıntı genelleştirilmiş Hooke kanunu olarak bilinir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir [1],

$$\sigma_k = C_{kj} \cdot \varepsilon_j \quad (k = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.1)$$

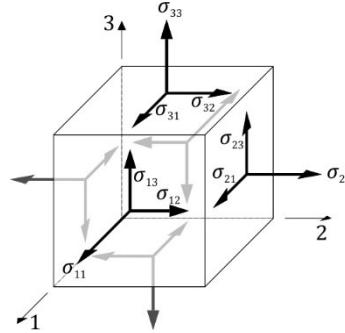
Buradaki C_{kj} elastik sabit katsayılarıdır. (3.1), Hooke kanununa ait genel tansörel formun sadeleştirilmiş halidir [25-29]. Genel form ise [1];

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (3.2)$$

C_{kj} konuma göre değişen bir fonksiyon ise malzeme heterojendir, eğer malzemenin her yerinde aynı ise homojendir. C_{kj} , (6×6) kare matrisin k . satırı ve j . sütunundaki değeri ifade etmektedir. İndislerin karmaşasından kurtulmak için gerilme ve birim-şekil-değiştirmeye ait alt indisler aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir [1];

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, & \sigma_2 &= \sigma_{22}, & \sigma_3 &= \sigma_{33}, & \sigma_4 &= \sigma_{23}, & \sigma_5 &= \sigma_{13}, & \sigma_6 &= \sigma_{12} \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22}, & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33}, & \varepsilon_4 &= 2 \cdot \varepsilon_{23}, & \varepsilon_5 &= 2 \cdot \varepsilon_{13}, & \varepsilon_6 &= 2 \cdot \varepsilon_{12} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Burada $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ normal gerilmeleri, $(\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$ kayma gerilmelerini göstermektedir. Aynı zamanda $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6)$ düzlem içi (düzleme paralel) gerilmeleri ve $(\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5)$ düzlem dışı (düzleme dik) gerilmeleri ifade etmektedir. Benzer terminoloji birim-şekil-değiştirmeler içinde kullanılmaktadır [1].



Şekil 3.2. Üç-boyutlu (3D) koordinat sistemde gerilme bileşenleri

C_{ij} matrisindeki 36 katsayı, birbirlerinden tamamen bağımsız değildir. Bağımsız katsayıların sayısı malzeme yapısına bağlıdır. $C_{kj} = C_{jk}$ şeklinde simetrik olan malzemeler için birim-şekil-değiştirme enerji yoğunluk fonksiyonu U_o ifadesi [1];

$$\frac{\partial U_o}{\partial \varepsilon_k} = \sigma_k \quad (3.4)$$

şeklinde de ifade edilebilir;

$$U_o = \int_0^{\varepsilon_k} \sigma_k \cdot d\varepsilon \quad (3.5)$$

(3.1) ifadesini (3.5)'de yerine yazarsak;

$$U_o = \frac{1}{2} \cdot C_{kj} \cdot \varepsilon_j \cdot \varepsilon_k \quad (3.6)$$

(3.6) ifadesini (3.4)'de yerine yazarsak;

$$\sigma_k = \frac{1}{2} \cdot (C_{kj} + C_{jk}) \cdot \varepsilon_j \quad (3.7)$$

(3.7) ve (3.1) ifadeleri karşılaştırıldığında, $C_{kj} = C_{jk}$ olduğu anlaşılmaktadır. Bu simetriden dolayı, an-izotropik malzemeler için sadece 21 tane bağımsız elastik sabit elde edilmektedir. (3.1) ifadesini matris formunda yazarsak [1];

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & sim. & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

Bazı an-izotropik malzemeler, malzeme simetrisine sahip olabilirler ve temel malzeme karakteristiği 21'den daha az katsayı kullanılarak ifade edilebilir. Bir noktadaki elastik sabitler her koordinat sistemi için aynı değerlere sahip ise, yani belirli bir malzeme simetrisi söz konusu ise; bu noktadaki malzeme için belirtilen düzleme, elastik simetri düzlemi adı verilmektedir. Tek simetri düzlemi olan malzemeler monoklinik malzemeler olarak adlandırılır ve bu tür malzemelerin bağımsız elastik sabitlerinin sayısı 13'e düşer. Simetri düzleminin $x_3 = 0$ olması halinde temel bağıntılar aşağıdaki şekli alır [1];

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

Plak düzlemine dik σ_4 ve σ_5 kayma gerilmeleri, düzlem içi gerilme bileşenlerinden bağımsızdır [1].

Malzeme sisteminin birbirine dik 3 simetri düzlemi bulunması durumunda bağımsız elastik sabitlerin sayısı 9'a düşmüş olur. Bu tür malzemeler ortotropik malzeme olarak adlandırılır. Ortotropik malzemeler için gerilme – birim-şekil-değiştirme bağıntıları [1];

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

Malzeme koordinatları doğrultusunda yüklenen ortotropik malzemeler için uzama ve kayma bileşenleri arasında herhangi bir etkileşim bulunmamaktadır [1].

Ortotropik bir malzeme için rijitlik katsayıları C_{ij} 'ler mühendislik sabitleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilmektedir [29];

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32}}{\Delta \cdot E_2 \cdot E_3} \\
C_{12} &= \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23}}{\Delta \cdot E_2 \cdot E_3} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32} \cdot \nu_{13}}{\Delta \cdot E_1 \cdot E_2} \\
C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32}}{\Delta \cdot E_2 \cdot E_3} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12} \cdot \nu_{23}}{\Delta \cdot E_1 \cdot E_2} \\
C_{22} &= \frac{1 - \nu_{13} \cdot \nu_{31}}{\Delta \cdot E_1 \cdot E_3} \\
C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12} \cdot \nu_{31}}{\Delta \cdot E_1 \cdot E_3} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21} \cdot \nu_{13}}{\Delta \cdot E_1 \cdot E_2} \\
C_{33} &= \frac{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}{\Delta \cdot E_1 \cdot E_2} \\
C_{44} &= G_{23} \quad C_{55} = G_{13} \quad C_{66} = G_{12} \\
\Delta &= \frac{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - \nu_{31} \cdot \nu_{13} - 2 \cdot \nu_{21} \cdot \nu_{32} \cdot \nu_{13}}{E_1 \cdot E_2 \cdot E_3}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

E_i , malzemenin i doğrultusundaki elastisite modülünü ifade eder. ν_{ij} , malzeme i doğrultusunda gerilmeye maruz iken, j doğrultusundaki birim-şekil-değiştirmenin i doğrultusundaki birim-şekil-değiştirmeye oranı olarak tanımlanır ve poisson oranı olarak adlandırılır. (G_{23}, G_{31}, G_{12}), sırasıyla 2-3, 3-1 ve 1-2 düzlemlerindeki kayma modüllerini ifade eder [1].

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \tag{3.12}$$

Ortotropik bir malzeme sisteminde birbirine dik üç düzleme göre simetrik olan bir malzeme, simetri düzlemlerinden birinde izotrop ise, yani malzeme özellikleri bu düzlemde doğrultuya göre değişmiyorsa bu tip malzemeye enine izotrop malzeme adı verilmektedir. Enine izotrop malzemede birbirinden bağımsız 5 elastik sabit bulunmaktadır. x_1 doğrultusunun izotropik düzlemin normali olması durumunda, gerilme – birim-şekil-değiştirme bağıntısı (3.13) şeklini almaktadır [1];

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \hat{C} & 0 & 0 \\ & sim. & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{3.13}$$

$$\text{Buradaki } \hat{C} = \frac{(C_{11} - C_{12})}{2}$$

İzotropik bir malzeme için sonsuz sayıda elastik simetri düzlemi bulunmaktadır ve 2 elastik katsayı ile ifade edilebilir. İzotropik malzemenin gerilme – birim-şekil-değiştirme bağıntıları [1];

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \hat{C} & 0 & 0 \\ & sim. & & & \hat{C} & 0 \\ & & & & & \hat{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\text{Buradaki } \hat{C} = \frac{(C_{11}-C_{12})}{2}$$

Bu iki katsayı, elastisite modülü E ve poisson oranına ν bağlı olarak aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir;

$$C_{11} = \frac{E \cdot (1 - \nu)}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \quad , \quad C_{12} = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \quad (3.15)$$

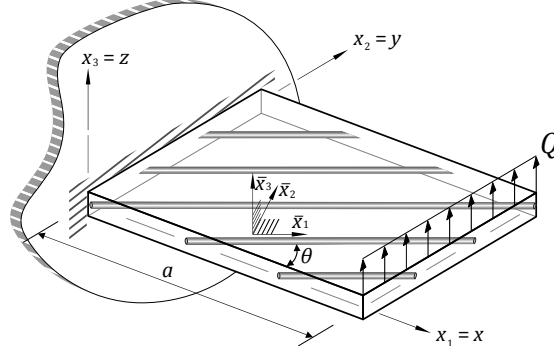
Fiber takviyeli kompozit malzeme, an-izotropik bir malzemedir. Eğer fiberlerin tamamı tabaka düzlemine paralel düzlemler içinde kalıyorsa, malzeme koordinat eksenini x_1 'i fiber doğrultusunda seçerek, homojen ortotrop malzeme karakterize edilir [1].

3.3 Ortotropik Tabaka

Tek bir ortotropik tabakanın malzeme koordinatlarına $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ göre düzlem içi (düzleme paralel) gerilme – birim-şekil-değiştirme bağıntıları;

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

şeklindedir. $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ genel koordinat sistemini ve $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ malzeme koordinat sistemini göstermek üzere; genel koordinat takımına (x_1, x_2, x_3) göre olan gerilme σ_i , şekil-değiştirme ε_i ve rijitlikleri Q_{ij} ; malzeme koordinat takımında $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ ifade etmek için (3.16) ifadesinde simgelerin üstüne çizgiler konularak ifade edilmiştir (Şekil 3.3) [1].



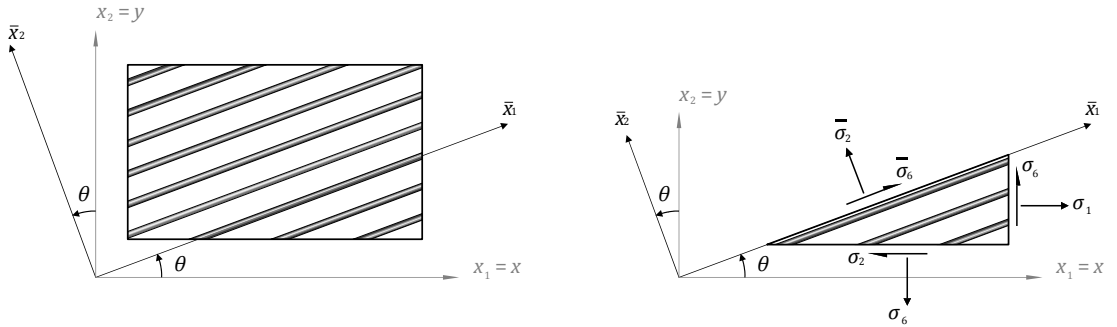
Şekil 3.3. Yapı ve fiber koordinat sistemleri

(3.16) denklemindeki \bar{Q}_{ij} 'ler, düzlem gerilmelerin indirgenmiş rijitlikleri olarak adlandırılırlar ve mühendislik sabitleri cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilirler [1];

$$\bar{Q}_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}, \quad \bar{Q}_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}}, \quad \bar{Q}_{12} = \frac{\nu_{12} \cdot E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \quad (3.17)$$

$$\bar{Q}_{66} = G_{12}$$

Tabaka içindeki fiberler, malzemenin ana (birincil) malzeme eksenini 1 doğrultusunda uzandır ve \bar{x}_1 ile ifade edilir. Malzeme eksenlerinin, genel koordinat eksenleri (x, y, z) ile aynı doğrultuda olmaması durumunda $(\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_6)$ gerilmelerini $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6) = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy})$ gerilmeleri cinsinden elde etmek için koordinat dönüşüm bağıntıları kullanılır (Şekil 3.4) [1].



Şekil 3.4. Fiber takviyeli elemanın serbest cisim diyagramı

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

Buradaki θ açısı, pozitif x -ekseni ile pozitif \bar{x}_1 -ekseni arasında saatin tersi yönünde ölçülen açığı ifade etmektedir. Bu açı laminasyon (tabakalanma) açısı olarak adlandırılır [1].

3.4 Klasik Tabakalı Plak Teorisi

3.4.1 Giriş

Fiber takviyeli kompozitler, tabaka veya katman olarak adlandırılan ince levhalar halinde üretilir. Bu kompozit katmanlar, istenilen kalınlığa ve rijitliğe sahip olacak şekilde tabakalı bir yapı oluşturmak üzere birleştirilirler. Çoğunlukla tabakalı kompozitlerin kalınlıklarının diğer düzlemsel ölçülerine kıyasla küçük olması sebebi ile tabakalı kompozitlerin gerilme analizlerinde iki-boyutlu (2D) teorilerden yararlanılır. Üç-boyutlu (3D) elastisite teorisinde kalınlık boyunca oluşacak deplasmanlar ve/veya gerilmeler için yapılan varsayımlar ile iki-boyutlu (2D) teoriler elde edilmektedir. Klasik tabakalı plak teorisi (CLPT), klasik plak teorisinin tabakalı plaklar için türetilmiş bir uzantısıdır. Bu teoride düzlem içi deplasmanların kalınlık boyunca lineer olarak değiştiği ve düzleme dik deplasmanların kalınlık boyunca sabit kaldığı varsayılmaktadır (yani, düzleme dik normal birim-şekil-değiştirme sıfırdır). Kalınlığı düzlem boyutlarına kıyasla iki merteye küçük olan tabakalı plakların birçok uygulamasında klasik tabakalı plak teorisi yeterli olmaktadır. Klasik tabakalı plak teorisinin (CLPT) yetersiz kaldığı noktada daha gelişmiş bir hali olan birinci-mertebe kayma deformasyon plak teorisi (FSDT) kullanılır [1].

3.4.2 Yapılan varsayımlar

Klasik tabakalı plak teorisinin türetilmesinde Kirchhoff-Love hipotezi kullanılmıştır. Kirchhoff-Love hipotezinde yapılan varsayımlar; Deformasyon öncesi orta-düzleme dik olan kesitler deformasyon sonrasında da doğrusallığını korurlar, uzamazlar ve orta-yüze normaldirler. Bu üç kabul ile düzleme dik birim-şekil-değiştirmeler ε_{xz} , ε_{yz} , ε_{zz} ihmal edilmiş olur. ε_{zz} 'nin ihmal edilmesi ile çarpanı olduğu σ_{zz} de ihmal edilmiş olur ve plağın toplam potansiyel enerjisinde σ_{zz} değeri de sıfırlanır. Ortotropik plakalardan oluşmuş tabakalı bir plakta, tabaka açılanmalarına bakmaksızın, ε_{xz} ve ε_{yz} 'nin yok sayılmasıyla σ_{xz} ve σ_{yz} de ihmal edilmiş olur. Buradan klasik tabakalı plak teorisinin, düzleme dik şekil değiştirme ve gerilme bileşenlerinin hesaba katılmadığı sonucu ortaya çıkmaktadır. Bu da plağın düzleme dik doğrultuda sonsuz rijit olduğu sonucunu ortaya koymaktadır. Hâlbuki plaklar gerçekte düzleme dik doğrultuda daha zayıftırlar [1].

Klasik plak teorisi, ince plakların analizi için yeterli bir yöntemdir (özellikle de düzleme dik şekil değiştirmelerin ihmal edilebileceği durumlarda). Diğer taraftan, gelişmiş fiber takviyeli kompozit materyallerden meydana gelmiş plaklarda, elastisite ve kayma modülü oranlarının (E_1/G_{13} ve E_1/G_{23}) çok büyük olmasından dolayı kalınlık boyunca meydana gelecek zorlamalara karşı dirençsizdirler. Çünkü düzleme

dik efektif kayma modülleri (G_{13} ve G_{23}), fiber doğrultusundaki (E_1) elastisite modülünden oldukça küçüktürler. Düzleme dik doğrultudaki normal ve kayma gerilmelerinin ($\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_z$), düzlem içi gerilmelerinden ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$) mertebeye daha küçük olmasına rağmen düzleme dik gerilmeler için materyal dayanım sınırı da düzlem içi gerilmeler için materyal dayanımından mertebeye daha küçüktür. Bu yüzden klasik tabakalı plak teorisi (CLPT), düzleme dik kayma gerilmesi ve tabaka ayrışması (yani, delaminasyon) durumlarında çökmeye eğilimli kompozitler için kullanılmamaktadır [1].

3.4.3 Deplasman ve birim-şekil-değiştirmeler

Kalınlığı h olan; N tane ortotropik katmanın malzeme ana (birincil) doğrultuları ile yapının genel x koordinatı arasında ($\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$) açıları olacak şekilde dizilmiş bir plak ele alalım ve şu kabulleri yapalım [1];

- Katmanlar birbirine kusursuz şekilde yapışmıştır
- Her katman malzemesi lineer elastik ve 3 adet materyal simetri düzlemine sahiptir (yani, ortotropiktir)
- Her plak, sabit (yani, uniform) bir kalınlığa sahiptir
- Birim-şekil-değiştirmeler küçüktür.

Tabakalı plağın bulunduğu xy -düzlemi, plağın orta düzlemi ile çakışacak şekildedir. Deformasyon öncesi (x, y, z) koordinatındaki bir P noktası, deformasyon sonrası $(x + u_1, y + u_2, z + u_3)$ konumuna gelir. Buradaki (u_1, u_2, u_3) deplasman vektörünün bileşenleridir [1].

$$u = u_1 \cdot \hat{e}_x + u_2 \cdot \hat{e}_y + u_3 \cdot \hat{e}_z \quad (3.20)$$

ve $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$, (x, y, z) koordinatlarına ait birim vektörlerdir. Kirchhoff hipotezinin ilk iki varsayımı gereği deplasmanlar (u_1, u_2, u_3) aşağıdaki şekilde ifade edilirler (Şekil 3.5),

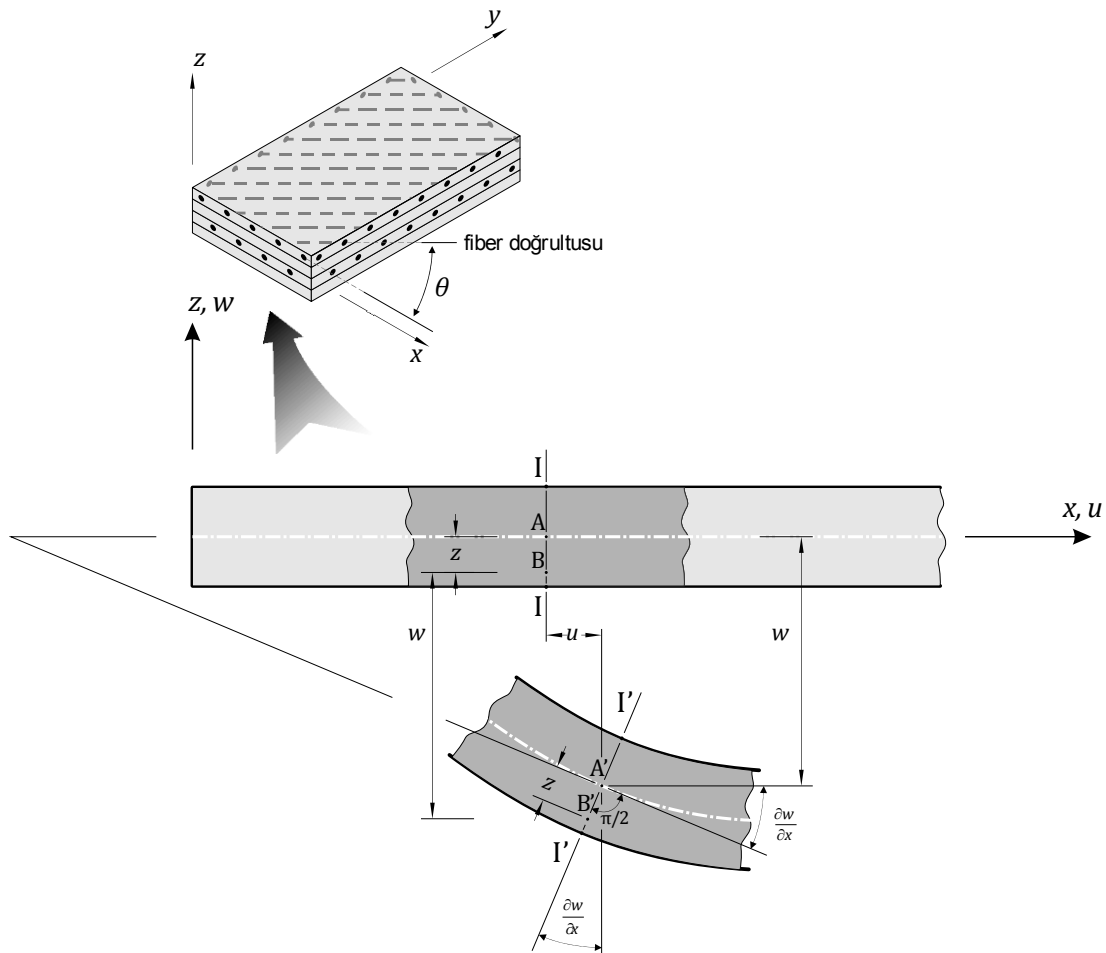
$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) + z \cdot \phi_1(x, y, t) \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) + z \cdot \phi_2(x, y, t) \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Buradaki (u, v, w) , xy -düzlemindeki (yani, tabakalı plağın orta düzlemindeki) bir noktaya ait deplasmanları; ϕ_1 ve ϕ_2 , sırasıyla orta düzlem normalinin y - ve x -eksenlerine göre rotasyonlarını; ve t de zamanı göstermektedir. Kirchhoff hipotezinin 3'üncü varsayımı ϕ_1 ve ϕ_2 rotasyonlarının sırasıyla $-\frac{\partial w}{\partial x}$ ve $-\frac{\partial w}{\partial y}$ 'ye eşit olduklarını ifade etmektedir [1];

$$\phi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad \phi_2 = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.22)$$

Böylece klasik plak teorisinin deplasman ifadeleri aşağıdaki şekli alır,

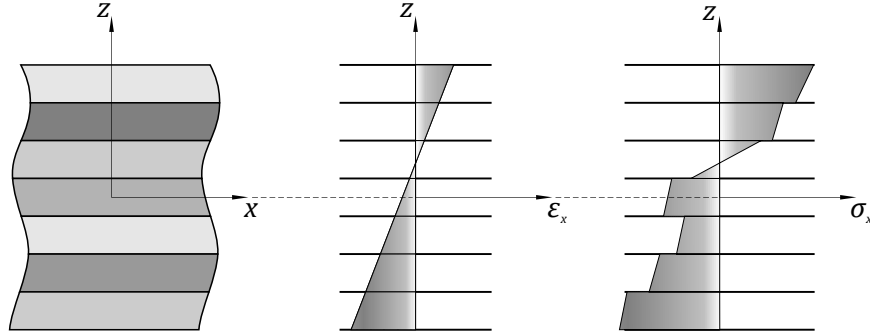
$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u(x, y, t) - z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \\ u_2(x, y, z, t) &= v(x, y, t) - z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} \\ u_3(x, y, z, t) &= w(x, y, t) \end{aligned} \quad (3.23)$$



Şekil 3.5. Kirchhoff-Love hipotezinde ince plak eğilmesi

Birbirinden farklı malzeme özelliklerine sahip birden çok tabakası olan plakları modellemek için tekil-tabaka teorisinin kinematik varsayımlarını kullanırken, üstü kapalı olarak birim-şekil-değiştirmelerin, birbirinden farklı malzeme özelliklerine sahip tabakaların arayüzlerinde de dahil olmak üzere, tabakalı plağın kalınlığı boyunca sürekli olduğu varsayılmaktadır (Şekil 3.6). Bu varsayım, tabakalı plak teorilerinin geliştirilmesinde önemli bir rol oynamakta ve tabakaların materyal sabitlerini yapının

kalınlığı boyunca ortalamasını alarak, eşdeğer bir tekil-tabaka olarak kabul etmemize olanak sunmaktadır. Diğer taraftan bu varsayım tabakalar arasında meydana gelen gerilmeleri yeterli doğrulukta sunmamaktadır [1].



Şekil 3.6. Kalınlık boyunca birim-şekil-değiştirme ve gerilme değişim kabulü

Sürekli ortamda bir yapının deplasman ifadeleri bilindiği durumda birim-şekil-değiştirme – deplasman bağıntıları kullanılarak plaktaki birim-şekil-değiştirmeler hesaplanabilir [1, 29],

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_m}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.24)$$

Burada (m) alt indisi kullanılarak tekrarlı ifadeler özetlenmiştir ve $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, plaktaki deformasyonun tarifi için kullanılan koordinatlarıdır. (3.24) denklemindeki birim-şekil-değiştirmeler, deplasman değişimlerinin non-lineer fonksiyonlarıdır. Birim-şekil-değiştirmelerin non-lineer kısımları kapalı olarak incelenmelidir ve çalışılmak istenilen problemlerin sınıfına göre ihmal edilebilir terimler çıkarılabilmektedir. Buna göre küçük birim-şekil-değiştirmeli problemler için ifadeleri sınırlarsak [1];

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2, \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y} \ll 1 \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} \right)^2, \quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} \right)^2, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y} \ll 1 \\ \left(\frac{\partial u_3}{\partial z} \right)^2 \ll 1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

(u_1, u_2, u_3) , sırasıyla (x_1, x_2, x_3) koordinatları boyunca oluşan toplam deplasman bileşenleridir. Burada ortalama mertebede rotasyona ($10^\circ \sim 15^\circ$) sahip plak problemleri dikkate alınmıştır. Bundan dolayı aşağıdaki terimler, düzleme dik normallerin rotasyonları ile ilgilidir [1];

$$\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2, \quad \left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial y} \quad (3.26)$$

(3.26) ifadeleri küçük olmalarına rağmen ihmal edilemezler. (3.25) ve (3.26) denklemleri ile ifade edilen sınırlamalarla (3.24) denklemini daha basit bir formda ifade edersek [1];

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_3}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial y}\right) \\ \varepsilon_{xz} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_{yz} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial y}\right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Buradaki birim-şekil-değiştirmeler, Von Kármán birim-şekil-değiştirmeleri olarak adlandırılır [1].

(3.23) deplasman ifadelerine ait birim-şekil-değiştirmeler, Von Kármán birim-şekil-değiştirme – deplasman bağıntıları (3.27) kullanılarak hesaplanabilirler [1];

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \equiv \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_2 \equiv \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_3}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_6 \equiv 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_3}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} - 2z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 \equiv 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \varepsilon_5 \equiv 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \\ \varepsilon_3 \equiv \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_3}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

(3.28) ve (3.29) denklemlerinde tabakalı plak koordinatları $(x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$ ile ifade edilen birim-şekil-değiştirmeler için tekil alt indis notasyonu kullanılmıştır. (3.28) denklemindeki birim-şekil-değiştirmelerin genel formu [1];

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} + z \cdot \varepsilon_i^{(1)} \quad (i = 1,2,6) \quad (3.30)$$

Burada $\varepsilon_i^{(0)} = (\varepsilon_1^{(0)}, \varepsilon_2^{(0)}, \varepsilon_6^{(0)})$, orta düzleme ait uzama ve düzlem içi kayma etkileri ile ilgilidir ve membran birim-şekil-değiş-tirmeler olarak adlandırılır. $\varepsilon_i^{(1)} = (\varepsilon_1^{(1)}, \varepsilon_2^{(1)}, \varepsilon_6^{(1)})$ değerleri de eğilmelerdir. $\varepsilon_i^{(0)}$ ve $\varepsilon_i^{(1)}$ 'in her ikisi de sadece (x, y) 'de tanımlı fonksiyonlardır. (3.28) denklemi, klasik tabakalı plak teorisi için membran birim-şekil-değiş-tirmelerin $\varepsilon_i^{(0)}$ ve eğilmelerin $\varepsilon_i^{(1)}$ aşağıdaki açık forma sahip olduğunu göstermektedir [1];

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(0)} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_1^{(1)} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_2^{(0)} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, & \varepsilon_2^{(1)} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \varepsilon_6^{(0)} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, & \varepsilon_6^{(1)} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (3.31)$$

(3.31) ifadelerindeki $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$, $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2$, $\frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}$ terimler, Von Kármán non-lineer birim-şekil-değiş-tirmeleridir. Matris notasyonunda (3.30) ifadesinin formu [1];

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{(0)} \\ \varepsilon_2^{(0)} \\ \varepsilon_6^{(0)} \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{(1)} \\ \varepsilon_2^{(1)} \\ \varepsilon_6^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

Daha önce de ifade edildiği üzere, (3.32) denklemindeki birim-şekil-değiş-tirmeler, tabakalı plak kalınlığı boyunca lineer olarak değişmekte ve bunun tabaka diziliminden bağımsız olduğuna dikkat edilmelidir. Sabit bir z değeri için birim-şekil-değiş-tirmeler, sadece x ve y koordinatlarına göre değişmektedir [1].

3.4.4 Hareket denklemleri

Enerji prensipleri veya vektör mekaniği (yani, Newton yasaları) kullanılarak, katı bir cismin hareket denklemleri türetilir. Enerji prensipleri, hareket denklemlerini ve ilgili sınır koşullarını türetebilmek için toplam potansiyel enerjinin minimizasyonunu (veya toplam bütünüleyici enerjinin maksimizasyonunu) gerektirir. Bu yüzden enerji metotlarında cismin enerjisine ait uygun ifadeleri yazmak gerekir. Vektör mekaniğinde cismin temsili bir hacimsel elemanı, bütün etki ve tepki kuvvetleri ile izole edilir (yani, bir serbest cisim diyagramı kullanılır), ve temel hareket denklemleri; kuvvetler ve momentlerin toplamıyla elde edilir. Enerji prensiplerinin avantajı, sadece hareket denklemlerinin elde edilmesi değil; aynı zamanda sınır koşulları formunun, hareket

denklemleri ile uyumlu olmasını sağlamaktır. Vektör mekaniği yaklaşımı fiziksel sezgilere daha yatkındır. Belli başlı koşullarda iki metot da farklı (fakat birbiriyle yakından ilişkili) hareket denklem takımları verebilirler [1].

Bu çalışmada, enerji metotlarından virtüel yer-değiştirme prensibinden faydalanacağız. Virtüel yer-değiştirme prensibinde bir cismin (statik veya dinamik) denge durumundaki, dış ve iç kuvvetlerin her birinin virtüel deplasmanları doğrultusundaki hareketi sonucu oluşan toplam virtüel iş sıfır olmalıdır. Toplam virtüel iş, iç kuvvetlerin yaptığı virtüel iş ile dış kuvvetlerin yaptığı virtüel işin toplamına eşittir. Virtüel yer-değiştirme prensibi ile hareket denklemleri aşağıdaki şekildedir [1, 29];

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} = I_o \cdot \ddot{u} - I_1 \cdot \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} = I_o \cdot \ddot{v} - I_1 \cdot \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + N(w) + q \\ = I_o \cdot \ddot{w} + I_2 \cdot \left(\frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right) + I_1 \cdot \left(\frac{\partial \ddot{u}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{v}}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Burada, örneğin $\ddot{w} = \partial^2 w / \partial t^2$ 'dir,

$$N(w) = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_1 \frac{\partial w}{\partial x} + N_6 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_6 \frac{\partial w}{\partial x} + N_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (3.36)$$

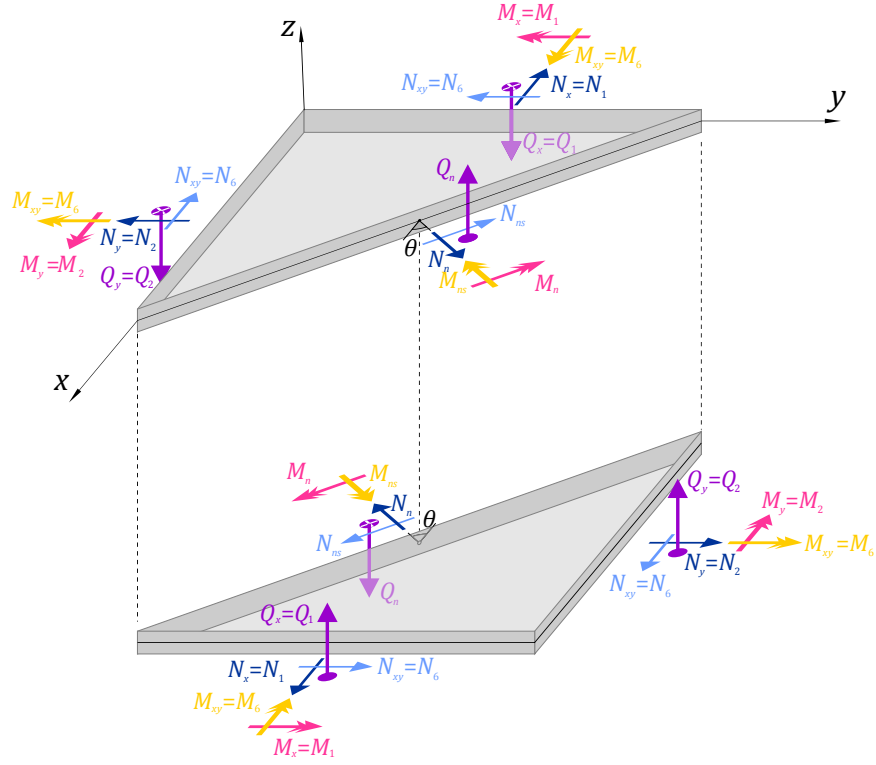
q , düzleme dik yayılı yükü ifade etmektedir. (N_i, M_i)'ler de reaksiyon kuvvet ve momentleridir (Şekil 3.7),

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \cdot dz \quad , \quad \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \cdot z \cdot dz \quad (3.37)$$

($\sigma_1 = \sigma_{xx}$, $\sigma_2 = \sigma_{yy}$, $\sigma_6 = \sigma_{xy}$) ve I_i kütle ataletidir,

$$\begin{Bmatrix} I_o \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \cdot \rho \cdot dz \quad (3.38)$$

ρ , malzemenin yoğunluğunu ifade etmektedir.



Şekil 3.7. Plak elemana etkiyen kuvvetler

(3.33) ve (3.34) denklemlerinde eşitliklerin sağ tarafındaki ikinci terimler, rotatif atalet terimleridir. Bu terimler, sıklıkla $I_o \cdot \ddot{u}$ ve $I_o \cdot \ddot{v}$ atalet terimlerine kıyasla küçük olmasından ötürü ihmal edilirler. Aynı durum (3.35) denkleminin sağ tarafındaki ikinci terim için de geçerlidir [1]. Teorinin geometrik ve doğal (kuvvetlerle alakalı) sınır koşulları [29] (Şekil 3.7);

$$u_n, u_{ns}, w, \frac{\partial w}{\partial n} \quad (\text{geometrik}) \quad (3.39)$$

$$N_n, N_{ns}, \hat{Q}_n, M_n \quad (\text{doğal}) \quad (3.40)$$

$$u_n = u \cdot n_x + v \cdot n_y, \quad u_{ns} = -u \cdot n_y + v \cdot n_x$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial x} n_x + \frac{\partial w}{\partial y} n_y \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}
N_n &= N_1 \cdot n_x^2 + N_2 \cdot n_y^2 + 2 \cdot N_6 \cdot n_x \cdot n_y \\
N_{ns} &= (N_2 - N_1) \cdot n_x \cdot n_y + N_6 \cdot (n_x^2 - n_y^2) \\
M_n &= M_1 \cdot n_x^2 + M_2 \cdot n_y^2 + 2 \cdot M_6 \cdot n_x \cdot n_y \\
M_{ns} &= (M_2 - M_1) \cdot n_x \cdot n_y + M_6 \cdot (n_x^2 - n_y^2) \\
\hat{Q}_n &= Q_1 \cdot n_x + Q_2 \cdot n_y - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

ve n_x ve n_y plak sınırlarındaki birim normal doğrultman kosinüsleridir. x , y ve z doğrultularındaki kuvvetlerin ve x - ve y -eksenlerindeki momentlerin toplanması ile vektör mekaniği yaklaşımı lineer durum için aşağıdaki ifadeleri vermektedir [1];

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} &= I_o \cdot \ddot{u} - I_1 \cdot \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \\
\frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} &= I_o \cdot \ddot{v} - I_1 \cdot \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} \\
\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + q &= I_o \cdot \ddot{w} \\
\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_6}{\partial y} - Q_1 &= I_2 \cdot \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} - I_1 \cdot \ddot{u} \\
\frac{\partial M_6}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2 &= I_2 \cdot \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} - I_1 \cdot \ddot{v}
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Q_1 ve Q_2 , düzleme dik kesme kuvvetleridir. (3.43)'deki 4'üncü ve 5'inci denklemlerde Q_1 ve Q_2 üçüncü ifadede yerine yazılırlarsa (3.35) denklemini non-lineer terimsiz olarak elde ederiz. (3.43) denklemleri, üç-boyutlu (3D) elastisite hareket denklemlerinden de türetilbilir (dış kuvvetlerin olmaması durumunda) [1];

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \tag{3.44}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \tag{3.45}$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \cdot \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \tag{3.46}$$

(3.44), (3.45) ve (3.46) denklemlerini plak kalınlığı $\left(-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right)$ boyunca z 'ye göre integre edilirse, (3.43)'deki ilk üç denklemi, rotatif atalet terimleri olmadan elde edilebilir. σ_{xz} , σ_{yz} ve σ_{zz} değerleri için sınır koşulları [1];

$$\begin{aligned}
z = \pm \frac{h}{2} \text{ 'de} \quad \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \\
z = \frac{h}{2} \text{ 'de} \quad \sigma_{zz} = q \\
z = -\frac{h}{2} \text{ 'de} \quad \sigma_{zz} = 0
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Benzer şekilde, (3.44)-(3.46)'deki denklemleri, z ile çarpıp, plak kalınlığı boyunca integre ederek (3.43)'deki diğer iki denklem de elde edilmiş olur [1].

3.4.5 Tabakalı plak bünye denklemleri

Tabakalı plak bünye denklemleri, kuvvet ve moment reaksiyonları (N_i, M_i) ile birim-şekil-değiştirmeler $(\varepsilon_i^{(0)}, \varepsilon_i^{(1)})$ arasındaki bağıntıyı kurar. Tabaka koordinat sisteminde (3.37) denklemlerindeki σ_i gerilme terimlerini, ε_i birim-şekil-değiştirme terimleri ile değiştirip, z ye göre integrali alınırsa ifade;

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{(0)} \\ \varepsilon_2^{(0)} \\ \varepsilon_6^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{(1)} \\ \varepsilon_2^{(1)} \\ \varepsilon_6^{(1)} \end{Bmatrix} \tag{3.48}$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{(0)} \\ \varepsilon_2^{(0)} \\ \varepsilon_6^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^{(1)} \\ \varepsilon_2^{(1)} \\ \varepsilon_6^{(1)} \end{Bmatrix} \tag{3.49}$$

A_{ij} , D_{ij} ve B_{ij} sabitleri, tabakanın sırasıyla uzama, eğilme ve eğilmeli-uzama rijitliğini ifade etmektedir;

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} Q_{ij}^{(k)}(1, z, z^2). dz \tag{3.50}$$

$Q_{ij}^{(k)}$, tabakalı plak koordinatlarına göre k . tabakanın malzeme rijitliğini ifade eder. $Q_{ij}^{(k)}$ 'lerin her tabaka için sabit bir değer olması kalınlık boyunca integralin uygulamasını kolaylaştırır [1]. Böylece[1];

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)}(z_{k+1} - z_k) \tag{3.51}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)}(z_{k+1}^2 - z_k^2) \tag{3.52}$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (3.53)$$

N , tabakalı plaktaki katman sayısıdır ve (z_k, z_{k+1}) , k . katmanının kalınlık koordinatlarının alt ve üst değerleridir [1].

Aşağıdaki dönüşüm ifadeleri ile $Q_{ij}^{(k)}$ malzeme rijitlikleri, $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ cinsinden ifade edilebilir (bk. (3.16)) (k üst indisi daha sade bir ifade için aşağıdaki ifadelerde kullanılmamıştır);

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \bar{Q}_{11} \cdot \cos^4 \theta + 2 \cdot (\bar{Q}_{12} + 2 \cdot \bar{Q}_{66}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \bar{Q}_{22} \cdot \sin^4 \theta \\ Q_{12} &= (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} - 4 \cdot \bar{Q}_{66}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \bar{Q}_{12} \cdot (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ Q_{22} &= \bar{Q}_{11} \cdot \sin^4 \theta + 2 \cdot (\bar{Q}_{12} + 2 \cdot \bar{Q}_{66}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \bar{Q}_{22} \cdot \cos^4 \theta \\ Q_{16} &= (\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} - 2 \cdot \bar{Q}_{66}) \cdot \sin \theta \cdot \cos^3 \theta \\ &\quad + (\bar{Q}_{12} - \bar{Q}_{22} + 2 \cdot \bar{Q}_{66}) \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \\ Q_{26} &= (\bar{Q}_{11} - \bar{Q}_{12} - 2 \cdot \bar{Q}_{66}) \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \\ &\quad + (\bar{Q}_{12} - \bar{Q}_{22} + 2 \cdot \bar{Q}_{66}) \cdot \sin \theta \cdot \cos^3 \theta \\ Q_{66} &= (\bar{Q}_{11} + \bar{Q}_{22} - 2 \cdot \bar{Q}_{12} - 2 \cdot \bar{Q}_{66}) \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta + \bar{Q}_{66} \cdot (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (3.54)$$

$\bar{Q}_{ij}^{(k)}$, k . katmanın malzeme koordinatlarına $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ göre malzeme rijitlikleridir. $Q_{ij}^{(k)}$ tabakalı plak koordinatlarına (x_1, x_2, x_3) dönüştürülmüş malzeme rijitlikleridir. θ , pozitif x_1 -ekseninden fiber doğrultusundaki pozitif \bar{x}_1 -eksenine saatin tersi istikametinde ölçülen tabakalanma açısıdır (Şekil 3.3) [1].

(3.33), (3.34) ve (3.35)'deki hareket denklemleri, hem analitik hem de deplasman sonlu eleman modellerini geliştirmek için (u, v, w) deplasmanları cinsinden ifade edilebilir. İlk adım olarak, (3.48) tabakalı plak bünye denklemlerinin yerine (3.28) birim-şekil-değiştirme – deplasman bağıntıları yazılır. Sonra ki adımda ise, (3.48)'den gelen kuvvet ve moment reaksiyonları, (3.33)-(3.35) hareket denklemlerinde yerine konur. Sonuç olarak, 3 deplasman (u, v, w) için 3 diferansiyel denklemlilik bir sistem elde edilir;

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial u}{\partial y} + A_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{11} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{12} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + B_{16} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[A_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial u}{\partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{16} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + B_{26} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{66} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] = I_o \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[A_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{16} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + B_{26} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + B_{66} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{12} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + B_{22} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + B_{26} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] = I_o \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{11} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + D_{12} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + D_{16} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \\
& + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[B_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{16} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + D_{26} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{66} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] \\
& + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{12} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right. \\
& \quad \left. + D_{22} \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_{26} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right] + N(w) + q \\
& = I_o \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + I_1 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial t^2} \right)
\end{aligned} \tag{3.57}$$

(3.55) ve (3.56) denklemleri, B_{ij} eğilmeli-uzama rijitliklerinin sıfır olması durumunda (3.57) denkleminde ayrışabilirler. Bu durumda, (3.55) ve (3.56) denklemleri, düzlem içi deplasmanlar u ve v için bağımsız olarak çözülebilirler. Ayrıca (3.57) denklemi de, düzleme dik w çökmeleri için çözülebilir. $B_{ij} = 0$ ve düzlem içi deplasman ve kuvvetlerin sıfır olması durumunda, u ve v de aynı şekilde sıfır olur. Denklemlerin

bağımsız olarak çözülebildiği bu durumda düzleme dik q yükü etkisindeki w çökmesi aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\begin{aligned}
& - \left[D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \\
& - 4 \left(D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \right) + N(w) + q = I_o \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Ortotropik durumda $B_{ij} = 0$, ve $A_{16} = A_{26} = 0$, ve $D_{16} = D_{26} = 0$; İzotropik durumda da $D_{11} = D_{22} = D$, $D_{12} + 2D_{66} = 2D$ ve $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$ 'dir [1].

3.5 Birinci-Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi

3.5.1 Geliştirilmiş plak teorileri

Literatürde düzleme dik kayma deformasyonlarını içeren birçok plak teorisi mevcuttur. Bu teorilerde deplasman veya gerilme bileşenleri, referans düzlemdeki kalınlık koordinatı ve belirsiz konum fonksiyonlarının lineer kombinasyonlarının açılımından elde edilmektedir. Bu sayede üç-boyutlu (3D) elastisite problemi iki-boyuta (2D) indirgenmiş olmaktadır. Temel denklemler, hem virtüel iş prensibini kullanarak hem de tabakalı plak kalınlığı boyunca üç-boyutlu (3D) gerilme denge ifadelerinin ağırlıklı-integrali ile türetilmektedir. Böylece eşdeğer bir tekil-tabaka plak teorisi geliştirilmiş olur [1].

Deplasman esaslı teorilerde, deplasman vektörünün 3 bileşeni, kalınlık koordinatı ve belirsiz fonksiyonların kuvvet serileri açılımından elde edilir. Virtüel deplasman prensipleri veya moment metodları, denge denklemlerinin türetilmesi için kullanılır. Bütün tekil-tabaka plak teorilerinde deplasmanlar ve birim-şekil-değiştirmeler, tabakalı plak kalınlığı boyunca süreklidir (yani, katman arayüzeylerinde tek bir değere sahiptir). Bu durum, gerilmelerin hesaplanmasında bünye denklemlerinin kullanılması koşulunda katman arayüzeylerindeki değişken elastik katsayılarından dolayı tabaka içi gerilme alanlarının süreksizliğine sebep olmaktadır [1].

Birinci-mertebe kayma deformasyon teorisi (FSDT), en yaygın olarak kullanılan deplasman esaslı teoridir. Bu teoride (3.21) denklemlerindeki deplasman ifadeleri esas alınmaktadır;

$$\begin{aligned}
u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z. \phi_1(x, y) \\
u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z. \phi_2(x, y) \\
u_3(x, y, z) &= w(x, y)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

(u_1, u_2, u_3) , tabakalı plaktaki bir noktanın (x, y, z) deplasmanlarını; (u, v, w) ise orta düzlemdeki bir noktanın $(x, y, 0)$ deplasmanını; ve (ϕ_1, ϕ_2) de düzleme dik normalin sırasıyla (y, x) -eksenlerine göre rotasyonlarını ifade etmektedir. Birinci-mertebe kayma deformasyon teorisi, çoğunlukla "Mindlin Plak Teorisi" olarak bilinir. Birinci-mertebe kayma deformasyon teorisi ile plak kalınlığında düzleme dik sabit bir kayma birim-şekil-değiştirme değeri elde edilmesinden ötürü kayma düzeltme faktörlerine gerek duyulmaktadır. Kayma birim-şekil-değiştirmelerinin birinci-mertebe teorisindeki sabit durumu ile elastisite teorisindeki ikinci-dereceden veya yüksek-mertebeden dağılım durumları arasındaki farklılık için kayma düzeltme faktörleri boyutsuz değerler olarak hesaplamaya dahil edilir. Tabakalı kompozitler için kayma düzeltme faktörü, genelde tabaka özelliklerine, tabaka dizilimine ve yapı tipine (geometri ve sınır koşulları) bağlıdır [1].

İkinci ve yüksek-mertebeden plak teorileri, yüksek-mertebeden yer-değiştirme ifadeleri içerirler. Örneğin, Reddy'nin üçüncü-mertebe teorisinin temelini oluşturan deplasman ifadesi [30, 31];

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z \cdot \phi_1 + z^3 \cdot \left(-\frac{4}{3h^2}\right) \cdot \left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z \cdot \phi_2 + z^3 \cdot \left(-\frac{4}{3h^2}\right) \cdot \left(\phi_2 + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (3.60)$$

şeklinindedir. Bu deplasman ifadesiyle tabakalı yapının üst ve alt yüzeylerindeki düzleme dik kayma birim-şekil-değiştirmeleri (ve dolayısıyla gerilmeleri) sıfırlanmaktadır [1].

Son olarak ifade edilen Reddy'nin teorisinde de görüldüğü gibi üçüncü-mertebe teorilerini de içermek üzere deplasman esaslı teorilerin tamamı tek bir deplasman ifadesinden elde edilebilmektedir. Reddy'nin üçüncü-mertebe birim-şekil-değiştirme-sürekliliği teorisi [32], teknik plak teorilerinin en genel halidir. Bu teoride aşağıdaki deplasman ifadesi [33] esas alınmıştır;

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u + \alpha \cdot z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} + \beta \cdot z \cdot \phi_1 + \lambda \cdot z^2 \cdot \psi_1 + \gamma \cdot z^3 \cdot \theta_1 \\ u_2(x, y, z) &= v + \alpha \cdot z \cdot \frac{\partial w}{\partial y} + \beta \cdot z \cdot \phi_2 + \lambda \cdot z^2 \cdot \psi_2 + \gamma \cdot z^3 \cdot \theta_2 \\ u_3(x, y, z) &= w + \lambda_1 \cdot z \cdot \psi_3 + \gamma_1 \cdot z^2 \cdot \theta_3 \end{aligned} \quad (3.61)$$

(u, v, w) , (x, y, z) doğrultularındaki orta düzlem deplasman bileşenleridir; ϕ_1 ve ϕ_2 , düzleme dik normalin sırasıyla y - ve x -eksenlerine göre rotasyonlarıdır; ve ψ_i ve θ_i

de belirsiz fonksiyonlardır. Bütün genelleştirilmiş deplasmanlar, sadece x ve y 'nin fonksiyonlarıdır. Çeşitli tekil-tabaka teorilerinin deplasman ifadeleri, (3.61) denkleminde iz katsayıları $(\alpha, \beta, \lambda, \lambda_1, \gamma, \gamma_1)$ için uygun değerlerin verilmesiyle elde edilebilir [1].

Örneğin;

Klasik teori için (3.23):

$$\alpha = -1 \quad , \quad \beta = \lambda = \gamma = \lambda_1 = \gamma_1 = 0 \quad (3.62)$$

Birinci-mertebe teorisi için (3.59):

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 1 \quad , \quad \lambda = \gamma = \lambda_1 = \gamma_1 = 0 \quad (3.63)$$

İkinci-mertebe teorisi için:

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 1 \quad , \quad \lambda = 1 \quad , \quad \gamma = \lambda_1 = \gamma_1 = 0 \quad (3.64)$$

Reddy'nin üçüncü-mertebe teorisi [31] için (3.60):

$$\alpha = 0 \quad , \quad \beta = 1 \quad , \quad \lambda = 0 \quad , \quad \gamma = 1 \quad , \quad \lambda_1 = \gamma_1 = 0$$

$$\theta_1 = -\frac{4}{3h^2} \cdot \left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (3.65)$$

$$\theta_2 = -\frac{4}{3h^2} \cdot \left(\phi_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

Diğer birçok üçüncü-mertebeden tekil-tabaka teorilerinin deplasman ifadeleri, (3.61) deplasman ifadesinden çıkarılabilmektedir [1].

Üçüncü-mertebe teoriler, hassasiyeti artırırken bilinmeyen sayısını da artırmalarının külfetli ve kullanışsız olmasından ötürü literatürde çok fazla dikkate alınmazlar. Üçüncü-mertebe teorilerine nazaran deplasman esaslı tekil-tabaka teorileri daha kullanışlıdır. Üçüncü-mertebe teorileri (yani kalınlık koordinatına ait kübik terimler içeren teoriler), her tabakada düzleme dik ikinci-dereceden birim-şekil-değiştirme varyasyonları türetmekte ve kalınlık boyunca birim-şekil-değiştirmelerin gerçek dağılımlarını vermektedir. Bu yüzden kayma düzeltme faktörü gerektirmemektedir. Birinci-mertebe teorisi belirgin şekilde en kullanışlı (hassasiyet artışını hesaplamada zorluk çıkarmadan gerçekleştiren) teoridir [1].

3.5.2 Kinematik

Birinci-mertebe kayma deformasyon teorisinde, klasik tabakalı teori için yapılan 3 varsayımdan biri çıkartılmıştır. Yani, tabakalı plak orta düzlem normali doğrultusundaki bir doğru deformasyon sonrası da düz ve uzamadan kalır, fakat orta

yüzeye dik olduğu kabulü çıkarılmıştır. Böylece, düzleme dik normalin ϕ_1 ve ϕ_2 rotasyonları, (bk. (3.59)) $\partial w/\partial x$ ve $\partial w/\partial y$ 'den bağımsızdırlar [1].

Birinci-mertebe kayma deformasyon teorisinin deplasman ifadesi, (3.59) denkleminde verilmektedir. Buradaki ϕ_1 ve ϕ_2 düzleme dik normalin rotasyonlarıdır. Von Kármán birim-şekil-değiştirmeleri, (3.59) deplasman ifadesine bağlı olarak şöyle ifade edilir [1];

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^{(0)} + z \cdot \varepsilon_i^{(1)} \quad (i = 1,2,6,4,5) \quad (3.66)$$

Burada;

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(0)} &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2, & \varepsilon_1^{(1)} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \\ \varepsilon_2^{(0)} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, & \varepsilon_2^{(1)} &= \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \\ \varepsilon_6^{(0)} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}, & \varepsilon_6^{(1)} &= \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \\ \varepsilon_3^{(0)} &= 0, & \varepsilon_3^{(1)} &= 0 \\ \varepsilon_4^{(0)} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_2, & \varepsilon_4^{(1)} &= 0 \\ \varepsilon_5^{(0)} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_1, & \varepsilon_5^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

3.5.3 Hareket denklemleri

Birinci-mertebe kayma deformasyon teorisinin hareket denklemleri;

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} = I_o \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \cdot \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} = I_o \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \cdot \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + N(w) + q = I_o \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_6}{\partial y} - Q_1 = I_1 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_o \cdot \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \quad (3.71)$$

$$\frac{\partial M_6}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2 = I_1 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_o \cdot \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \quad (3.72)$$

şeklindedir. Burada;

$$(Q_1, Q_2) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_5, \sigma_4) \cdot dz \quad (\sigma_5 = \sigma_{xz}, \sigma_4 = \sigma_{yz}) \quad (3.73)$$

ve (N_i, M_i) , $N(w)$ ve I_i ifadeleri, daha önce (3.37), (3.36) ve (3.38) denklemlerinde verilmiş olduğu şekildedir [1].

Birinci-mertebe teorisi için sınır koşullarının formu (bk. (3.41), (3.42)) [1];

$$u_n, u_{ns}, w, \phi_n, \phi_{ns} \quad (\text{geometrik}) \quad (3.74)$$

$$N_n, N_{ns}, Q_n, M_n, M_{ns} \quad (\text{doğal}) \quad (3.75)$$

Düzleme dik kesme kuvvetleri Q_i , deplasmanlar cinsinden ifade edilirse;

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_5 \\ \sigma_4 \end{Bmatrix} \cdot dz = \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_5^{(0)} \\ \varepsilon_4^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (3.76)$$

Burada;

$$\begin{aligned} A_{ij} &= K_{ij} \cdot \int_{-h/2}^{h/2} Q_{ij}^{(k)} dz \quad (i, j = 4, 5) \\ &= K_{ij} \cdot \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \end{aligned} \quad (3.77)$$

ve K_{ij} kayma düzeltme katsayılarıdır. Tabakalı plak koordinatına göre $Q_{ij}^{(k)}$ ile $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ arasındaki bağıntı [1];

$$\begin{aligned} Q_{44} &= \bar{Q}_{44} \cdot \cos^2 \theta + \bar{Q}_{55} \cdot \sin^2 \theta \\ Q_{45} &= (\bar{Q}_{55} - \bar{Q}_{44}) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \\ Q_{55} &= \bar{Q}_{55} \cdot \cos^2 \theta + \bar{Q}_{44} \cdot \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (3.78)$$

şeklindedir.

(3.68)-(3.72) hareket denklemleri, deplasmanlar $(u, v, w, \phi_1, \phi_2)$ cinsinden (3.79)-(3.83) ifadeleri ile verilmektedir [1];

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[A_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. + B_{16} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[A_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{16} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. + B_{66} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] = I_o \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[A_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{16} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. + B_{66} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[A_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + A_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + B_{12} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. + B_{26} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] = I_o \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_2 \right) + A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_1 \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_2 \right) + A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_1 \right) \right] + N(w) + q = I_o \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[B_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{11} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. + D_{16} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[B_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{16} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] - \left[A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_2 \right) + A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_1 \right) \right] \\
& = I_o \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.82}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left[B_{16} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{16} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial y} \left[B_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{26} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + D_{12} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \right. \\
& \quad \left. + D_{26} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \right) \right] - \left[A_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_2 \right) + A_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_1 \right) \right] \\
& = I_o \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.83}$$

Ayrıışık çözüme uygun tabakalı plak (yani $B_{ij} = 0$, $I_1 = 0$) durumu için (w, ϕ_1, ϕ_2) içeren (3.81)-(3.83) denklemleri (3.79) ve (3.80) denklemlerinden bağımsız olarak çözülebilirler. Bu durumda (3.82)-(3.83) denklemlerinin alacağı form [1];

$$\begin{aligned}
& D_{11} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + D_{16} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \\
& + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} - A_{45} \left(\phi_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - A_{55} \left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = I_o \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.84}$$

$$\begin{aligned}
& D_{16} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} \\
& + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} - A_{44} \left(\phi_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - A_{45} \left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = I_o \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{3.85}$$

şeklindedir. Ortotropik plaklar için $A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}, A_{45}$ tabakalı plak rijitlikleri sıfırdır. Böylece (3.81), (3.84) ve (3.85) denklemlerini basitleştirerek [1];

$$A_{55} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + A_{44} \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + N(w) + q = I_o \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{3.86}$$

$$D_{11} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial y^2} - A_{55} \left(\phi_1 + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = I_o \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \tag{3.87}$$

$$D_{66} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial y^2} - A_{44} \left(\phi_2 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = I_o \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} \tag{3.88}$$

şeklinde ifade edilir.

3.6 Reddy'nin Layerwise Teorisi

3.6.1 Teorinin altyapısı

Yer yer tabaka-ayrışmaları (yapışma-kusurları) olan, serbest kenarlı veya üç-boyutlu (3D) gerilme bölgeleri olan tabakalı kompozit analizlerinde üç-boyutlu (3D) kinematik esaslı bir teori kullanılması, sayısallaştırılmış bir modelin geliştirilmesi ve bu modelin de alışlagelmiş üç-boyutlu (3D) sonlu eleman modelinden daha efektif olması şarttır. Bu gereksinimlerden dolayı Reddy'nin Layerwise teorisinin kullanılmasına ihtiyaç duyulmaktadır [34]. Bu teoride deplasmanlar, her tabaka içinde sonlu elemanların Lagrange açılımları kullanılarak hesaplanmaktadır. Kalınlık boyunca düğüm değerleri, düzlem içi koordinatların (x, y) fonksiyonlarıdır. Teoride her tabakanın, hem matematiksel hem de fiziksel tabaka olarak karakterize edilebiliyor olması hesaplama kolaylığı sağlamaktadır. Bununla birlikte tabaka-ayrışmalarının/yapışma-kusurlarının, göçmelerin, çatlama/yarılmaların ve bunun gibi durumların modellenmesi açısından, birkaç fiziksel katmanı bir alt tabaka gibi karakterize etme olanağı sunmaktadır. Reddy'nin Layerwise teorisi, alışlagelmiş üç-boyutlu (3D) sonlu eleman modeli ile karşılaştırıldığında, aynı sonuçları daha kısa sürede hesaplama imkânı veren bir veri yapısına sahip olduğu görülmektedir [1, 35-37].

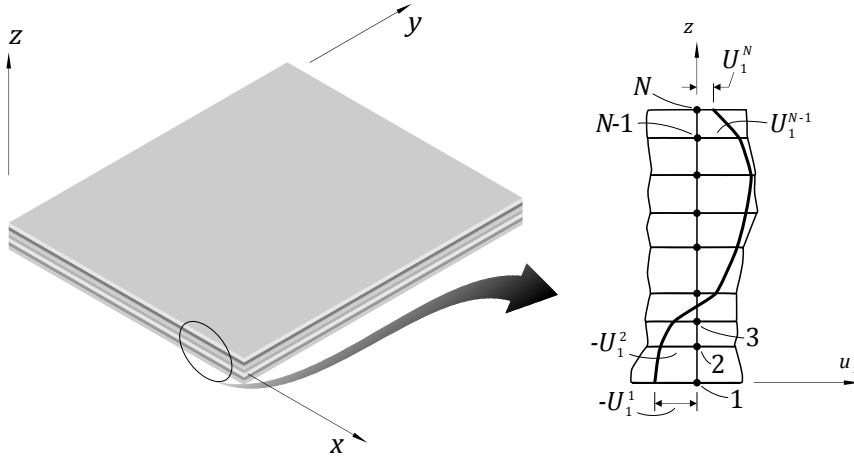
3.6.2 Deplasman ve birim-şekil-değiştirmeler

Reddy'nin Layerwise teorisi, tabakalı plak kalınlık doğrultusunda aşağıdaki deplasman açılımı ifadesini esas almaktadır. i . deplasman bileşeni ifadesi;

$$u_i(x, y, z) = \sum_{J=1}^N U_i^J(x, y) \cdot \Phi^J(z) = U_i^J(x, y) \cdot \Phi^J(z) \quad (3.89)$$

$i = 1, 2, 3$ değerlerini alır; N , tabakalı plağın kalınlığı boyunca ayrıştırma numaralarını (yani sonlu eleman ayrıştırmasındaki düğüm numaralarını) verir; ve Φ^J , kalınlık koordinatına (z) bağlı fonksiyonlardır. İfade sadeliği için üç deplasmanın da hesabında aynı interpolasyon fonksiyonu kullanılmıştır. Deplasmanların birbirinden bağımsız interpolasyon fonksiyonları da olabilir (özellikle u_3 için). Φ^J fonksiyonları, tabakalı plak kalınlığı boyunca J . arayüze bağlı tabakalarla ilgili Lagrange interpolasyon fonksiyonları cinsinden tanımlanan global interpolasyon fonksiyonlarıdır. (U^J, V^J, W^J) , kalınlık boyunca mevcut düğümlerin yer-değiştirme değerlerini (u, v, w) ifade etmektedir (Şekil 3.8). Φ^J 'nin bu lokal yapısından ötürü kalınlık boyunca deplasmanlar süreklidir, fakat z 'ye göre türevleri süresizdir. Bu durum tabaka arayüzelerindeki bütün düzleme dik birim-şekil-değiştirmelerin süresiz olacağını göstermektedir. Böylece, tabaka bünye denklemlerinden (yani,

arayüzeyde iki tabakanın birim-şekil-değiştirmeleri ile elastik rijitliklerinin çarpımından) hesaplanan tabaka içi düzleme dik gerilmeler, sürekli olabilmektedirler. Tabaka arayüzeylerinde düzlem içi birim-şekil-değiştirmeler ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$) sürekli olacaktır, fakat malzeme özelliklerinin tabakadan tabakaya değişmesinden dolayı düzlem içi gerilmeler ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$) süreksiz olmaktadır. Sonuçta teori ile $3N$ tane değişken ve $3N$ tane iki-boyutlu diferansiyel denklem elde edilir. Layerwise teorisinin avantajı sadece iki-boyutlu (2D) sonlu elemanın kullanılmasıdır. Layerwise modellerinde eleman kenar boyutları, alışıl gelmiş üç-boyutlu (3D) sonlu elemanlar yerine sadece iki-boyutla (2D) sınırlı olmasıdır [1].



Şekil 3.8. Reddy'nin Layerwise teorisi kinematığı

(3.89) denklemindeki N değeri, uygun olarak seçilebilir. N , her fiziksel tabaka için en az bir eleman olacak şekilde seçildiğinde, tabaka içi gerilme dağılımları doğru şekilde belirlenebilir. Alt tabaka konsepti, birkaç tabakayı eşdeğer tek bir tabakaymış gibi modellemek için kullanılabilir, yani N değerinin tabakalı plaktaki fiziksel tabaka sayısından daha az olması anlamına gelmektedir [1].

Burada toplam kalınlığı h olan bir tabakalı kompozit plak ele alınmaktadır. Von Kármán non-lineer plak teorisinin birim-şekil-değiştirme – deplasman bağintıları kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilmektedir [1];

$$\begin{aligned}
 \epsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = \frac{\partial U^J}{\partial x} \cdot \Phi^J + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial W^J}{\partial x} \cdot \Phi^J \right) \cdot \left(\frac{\partial W^J}{\partial x} \cdot \Phi^J \right) \\
 \epsilon_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 = \frac{\partial V^J}{\partial y} \cdot \Phi^J + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial W^J}{\partial y} \cdot \Phi^J \right) \cdot \left(\frac{\partial W^J}{\partial y} \cdot \Phi^J \right) \\
 \epsilon_3 &= \frac{\partial w}{\partial z} = W^J \cdot \frac{d\Phi^J}{dz}
 \end{aligned} \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_4 &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = V^J \cdot \frac{d\Phi^J}{dz} + \frac{\partial W^J}{\partial y} \cdot \Phi^J \\
\varepsilon_5 &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = U^J \cdot \frac{d\Phi^J}{dz} + \frac{\partial W^J}{\partial x} \cdot \Phi^J \\
\varepsilon_6 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \left(\frac{\partial U^J}{\partial y} + \frac{\partial V^J}{\partial x} \right) \Phi^J + \left(\frac{\partial W^J}{\partial x} \cdot \Phi^J \right) \cdot \left(\frac{\partial W^J}{\partial y} \cdot \Phi^J \right)
\end{aligned} \tag{3.91}$$

3.6.3 Temel denklemler

Düğüm değişkenleri (U^J, V^J, W^J) için temel denklemler, virtüel yer-değiştirme prensibi ile türetilebilir. Layerwise teorisinin denge denklemleri;

$$\frac{\partial M_1^I}{\partial x} + \frac{\partial M_6^I}{\partial y} - Q_1^I = 0 \tag{3.92}$$

$$\frac{\partial M_6^I}{\partial x} + \frac{\partial M_2^I}{\partial y} - Q_2^I = 0 \tag{3.93}$$

$$\frac{\partial K_1^I}{\partial x} + \frac{\partial K_2^I}{\partial y} - Q_3^I + N^I(W^J) = 0 \tag{3.94}$$

$I = 1, 2, \dots, N$ değerleri için, burada;

$$N^I(W^J) = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(S_1^{IJ} \cdot \frac{\partial W^J}{\partial x} + S_6^{IJ} \cdot \frac{\partial W^J}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left(S_6^{IJ} \cdot \frac{\partial W^J}{\partial x} + S_2^{IJ} \cdot \frac{\partial W^J}{\partial y} \right) \tag{3.95}$$

ve bileşkerler aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
M_i^I &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i \cdot \Phi^I(z) \, dz, \quad S_i^{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i \cdot \Phi^I(z) \cdot \Phi^J(z) \cdot dz \quad (i = 1, 2, 6) \\
Q_1^I &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_5 \cdot \frac{d\Phi^I}{dz} \, dz, \quad Q_2^I = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_4 \cdot \frac{d\Phi^I}{dz} \, dz, \quad Q_3^I = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_3 \cdot \frac{d\Phi^I}{dz} \cdot dz \\
K_1^I &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_5 \cdot \Phi^I \cdot dz, \quad K_2^I = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_4 \cdot \Phi^I \cdot dz
\end{aligned} \tag{3.96}$$

(3.92)-(3.94) denklemleri $3N$ tane değişken (U^I, V^I, W^I) ieren $3N$ tane iki-boyutlu diferansiyel denklemden meydana gelmektedir. N , tabakalı plağın st ve alt yüzü dahil arayüzeylerin sayısını ifade eder. Bileşkeler $(M_i^I, S_i^{IJ}, Q_i^I, K_i^I)$, tabaka bünye denklemleri ve birim-şekil-değiştirme – deplasman bağıntıları kullanılarak arayüzey deplasman fonksiyonları (U^I, V^I, W^I) cinsinden ifade edilebilirler [1].

4. TABAKALI KOMPOZİT PLAKLARIN SONLU ELEMAN ANALİZİ

4.1 Giriş

Kompleks geometri ve sınır koşullarının mevcudiyeti durumunda tabakalı kompozitlere ait temel kısmi diferansiyel denklemler kapalı formda çözülememektedir. Çoğunlukla, tüm kenarları basit mesnetli (Navier metodu) veya karşılıklı iki kenar basit mesnetli iken diğer kenarların isteğe bağlı olan (Lévy metodu) dörtgen plaklar için plak teorilerinin analitik çözümleri bulunmaktadır. Rayleigh-Ritz ve Galerkin metotları da yaklaşık analitik çözümlerde kullanılmaktadır, yalnız karmaşık geometrilerin fonksiyonlarının oluşturulmasının zorluğundan dolayı daha basit geometrilerle kısıtlı kalmaktadırlar. Numerik yöntemlerin kullanılmasının önemi uygulamaya yönelik problemlerin çözümünü kolaylaştırmaktadır. Kompleks yapı ve sistemlerin belirlenen diferansiyel denklemlerinin çözümünde kullanılan numerik metotların arasında sonlu elemanlar metodu en efektif olanıdır [1].

Plak teorileri için geliştirilmiş birkaç çeşit sonlu eleman modeli bulunmaktadır. Bunlar üç ana sınıfta toplanabilir: (i) deplasman modelleri, (ii) karma ve hibrit modeller, ve (iii) denge modelleri. Plak teorilerinin deplasman sonlu eleman modellerinde virtüel yer-değiştirme prensibi esas alınmakta ve temel denklemlerin tamamı deplasmanlar cinsinden ifade edilmektedir. Karma ve hibrit sonlu eleman modellerinde plak teorilerinin farklı durumlarının karması veya modifikasyonu esas alınmaktadır. Bu durumda deplasmanlar ve gerilmelerin her ikisi de bağımsız ve yaklaşık olarak belirlenmektedir. Denge modellerinde virtüel kuvvetler prensibi esas alınmaktadır. Bu üç tip model arasından, yer-değiştirme sonlu eleman modelleri en gerçekçi olan ve paket programlarda sıklıkla kullanılanıdır [1].

Bu bölümde temel olarak sonlu elemanlar metodu ve klasik plak teorisi ve birinci-mertebe kayma deformasyon plak teorisinin deplasman sonlu eleman modellerinin geliştirilmesinden bahsedilecektir [1].

4.2 Sonlu Elemanlar Metodu

4.2.1 Temel özellikler

Sonlu elemanlar metodu kompleks geometrik forma sahip katı cisim ve yapı mekaniği problemlerinin çözümü için şimdiye kadar geliştirilmiş en etkin numerik tekniktir. Bir problemin sonlu elemanlarla analizi oldukça sistematiktir. Analiz birkaç mantıksal basamağa bölünüp bir bilgisayar yazılımı olarak ifade edilerek kompleks problemler, sistemi tarif eden veriler kullanılarak (fiziksel özellikler, başlangıç ve sınır koşulları) çözülebilmektedir. Sonlu elemanlar yöntemini mühendislik uygulamalarını modelleme ve simüle etmede ayrıcalıklı kılan özelliği de budur [1].

Sonlu elemanlar tekniği, diğer metotlarda bulunmayan iki ayırıcı özelliğe sahiptir:

1. Probleme ait sistem birbiri ile kesişmeyen basit alt sistemler topluluğu teşkil edilecek şekilde bölünür ve bunlara sonlu elemanlar adı verilir. Buradaki sistem ifadesi, fiziksel sistemi veya temel denklemleri çözülecek olan malzemeyi ifade etmektedir. Bir sistemin elemanlara bölünmesine, sonlu elemanlara ayrıştırma adı verilir. Oluşturulan bu eleman topluluğuna da sistemin sonlu eleman ağı denir. Genel itibari ile sonlu eleman ağı, sistemi ifade eden bir yaklaşımdır [1].
2. Herbir sonlu elemanda temel denklemlerin çözüm yaklaşımı, belirsiz parametrelerin ve hemen hemen tamamı polinom olan seçilmiş yaklaşım fonksiyonlarının doğrusal (lineer) bir kombinasyonu ile yapılır [1].

Her eleman için çözümün polinom şeklinde ifade edilmesi ile sistemin çözümünün ardışık bir yaklaşımı, eleman arayüzeylerindeki sonlu eleman çözümünün sürekliliği ve muhtemel türevleri ile elde edilebilir. Buna elemanların bir araya getirilmesi prosedürü adı verilir [1].

Sonlu elemanlar metodunda geometrik olarak kompleks bir sistemin alt sistemler topluluğu olarak temsili, bu yaklaşım fonksiyonlarının kolayca oluşturulmasını sağlamaktadır. Çözümün eleman düğüm noktalarındaki değerler cinsinden ifade edilmesi ile (yani, interpolasyon yapılarak) bir eleman için yaklaşım fonksiyonlarını uygun interpolasyon hesap polinomları şeklinde tanımlayarak şu ifadeyi yazabiliriz:

$$u(x) \approx U_e(x) = \sum_{j=1}^n U_j^e \psi_j^e(x) \quad (4.1)$$

Buradaki U_e , tipik eleman Ω^e 'deki u 'nun sonlu eleman interpolantını ifade eder. U_j^e , U_e 'nin j . noktadaki değeridir. $\psi_j^e(x)$ ise interpolasyon fonksiyonlarıdır. Örneğin iki-

boyutlu (2D) bir problemde bir $u(x, y)$ fonksiyonunun doğrusal sonlu eleman yaklaşımında, üçgen parçacıkların bir araya getirilmesiyle oluşturulmuş sistemi temsil eden üçgen sonlu elemanlar kullanılır ve sonra formun lineer polinomları aracılığıyla her bir eleman üzerinde $u(x, y)$ fonksiyonu yaklaşımı gerçekleştirilir [1, 29, 38].

$$u \approx a + bx + cy = \sum_{j=1}^3 U_j^e \psi_j^e(x, y) \quad (4.2)$$

İki temel özelliği (sistemin sonlu elemanlara ayrıştırılması ve (4.1) form denklemleri ile u çözümünün temsil edilmesi) dışında sonlu elemanlar metodu; verilen bir diferansiyel denklemin her bir eleman için ağırlıklı-integral veya varyasyonel ifadeler olarak adlandırılan eşdeğer bir formda yeniden biçimlendirildiği genel bir numerik metottur. U_j^e parametreleri, her bir eleman için varyasyonel ifadelerin yeterli olmasıyla elde edilir. Varyasyonel ifadenin yeterliliği, bir elemanın U_j^e parametreleri arasında bir takım cebirsel bağıntılar türetir. Sistemin elemanlara bölünmesinden sonra eleman arayüzelerindeki $U_e(x)$ 'in sürekliliği kullanılarak elemanlar orijinal pozisyonlarında bir araya getirilirler. Sonlu eleman metodu, aranan fonksiyonun düğüm değerleri için çok sayıda denklemin çözümünü gerektirmektedir. Denklem sayısı, bilinmeyen düğüm değerleri sayısı kadardır. Bu yüzden, çok fazla hesaplama gerektiren bir metottur ve sadece bilgisayar yardımıyla hesaplamaların yapılması durumunda pratiktir [1].

Sonlu eleman metodu, varyasyonel metot yaklaşımları (Rayleigh-Ritz, Galerkin, en küçük kareler, kollokasyon, alt bölgelerde kollokasyon vb.) için yaklaşım fonksiyonlarını oluşturmanın bir tekniği olarak ele alınabilir. Sistemin sonlu elemanlara bölünmesi ve seçimlerin polinomlarla kısıtlanması yaklaşım fonksiyonlarının meydana getirilmesini elverişli bir hale getirmektedir. Sadece bir tane sonlu eleman metodu mevcut olmasına karşın kullanılan varyasyonel metodun temel denklemi için yeterli olmasına bağlı olarak bir denklemin farklı birkaç sonlu eleman modeli olabilmektedir [1].

4.2.2 Modellemede dikkate alınacak hususlar

Yapısal bir problemin sonlu eleman analizi, yapı davranışını temsil eden matematiksel bir modelin numerik analizidir. Bu yüzden, sonlu elemanlar ile modelleme, yapının geometrisinin ve davranışının temsilini dikkate alan varsayımlar içermektedir. Yapının nasıl davrandığına dair geçerli varsayımlar sadece nitelikli bir bilgiye sahip olmayla yapılabilir. Yapı ve yapının sonlu eleman modeli deformasyonlarını elde ettiğimiz

temel denklemlere dair yeterli bilgi, mevcut işlemin iyi bir matematik modelinin geliştirilmesine olanak sağlar [1].

Çalışmada sonlu eleman modeli prosedürünün birkaç farklı durumu ele alınmakta ve eleman geometrisi, ağ hassasiyeti ve yük durumunun temsilinde dikkat edilen temel esaslar gösterilmektedir [1, 38].

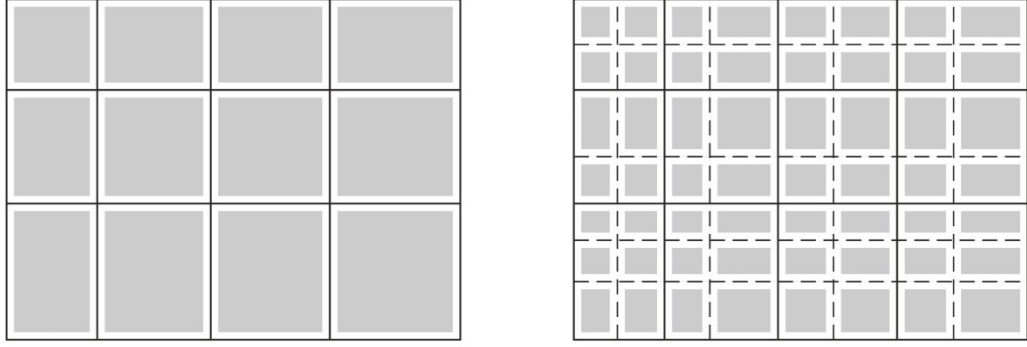
4.2.2.1 Sonlu eleman ağı oluşturma

Bir yapının sonlu eleman ağını oluşturmada aşağıdaki esaslar izlenmelidir:

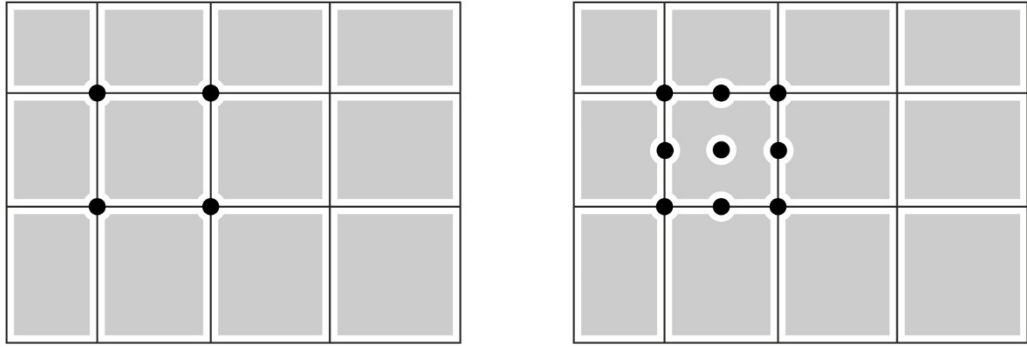
1. Ağ, sayısal sistemin geometrisini ve yük durumunu doğru bir şekilde temsil etmelidir.
2. Ağ, çözümü yeterli hassasiyette temsil etmelidir (deplasman ve/veya gerilme).
3. Özellikle büyük değişimlerin olduğu kritik bölgelerde ağ, uzun/kısa kenar oranı büyük olan elemanlar içermemelidir.

Yukarıda belirtilen esaslar dahilinde ağ, yüzeysel (iri ve az elemanlı) veya hassas (küçük ve çok elemanlı) olabilir ve tek tip veya farklı mertebelerde ve türde elemandan (üçgen ve dörtgen, lineer ve ikinci dereceden) meydana gelebilir. Uygun eleman mertebesi ve tipi seçimi ile doğru sonuçlar elde edilirken hesap kolaylığı sağlanmış olur. Eleman ve ağ seçimi problemden probleme değişiklik gösterir. Bir problemde iyi sonuç veren bir ağ ve/veya eleman yapısı farklı bir problem için aynı performansı sağlamayabilir. Bu üç esas doğrultusunda yüzeysel ağ oluşturulmaya başlanmalı, problemdeki simetrilere faydalanılmalı ve elde edilen sonuçlar fiziksel bilgi birikimi ve yaklaşık analitik ve deneysel bilgiler doğrultusunda değerlendirilmelidir. Bu değerlendirmeler bir sonraki ağ sıkılaştırması ve analizlerin şekillendirilmesinde kullanılır [1].

Tek tip elemandan (ör: lineer veya ikinci-dereceden eleman) meydana gelen ağların oluşturulması kolaydır çünkü aynı mertebedeki elemanlar birbirleri ile uyumludur. Ağ sıkılaştırmasının birkaç alternatifi mevcuttur. Bunlardan biri *h*-tipi ağ sıkılaştırmasıdır ve mevcut ağ elemanlarının aynı tipte iki veya daha fazla elemana bölünmesiyle yapılır (Şekil 4.1a). Bir diğeri ise *p*-tipi ağ sıkılaştırması ve mevcut ağ elemanlarının daha yüksek-mertebeden elemanlarla yer değiştirmesi ile yapılmaktadır (Şekil 4.1b). *h*- ve *p*-tipi ağ sıkılaştırmaları; kimi yerde elemanların iki veya daha fazla elemana ayrıştırılmasıyla, kimi yerde de daha yüksek-mertebeden elemanlarla değiştirilerek yapılabilir. Lokal ağ sıkılaştırmasında çok küçük ve çok büyük elemanlar yan yana olmamalıdır [1].



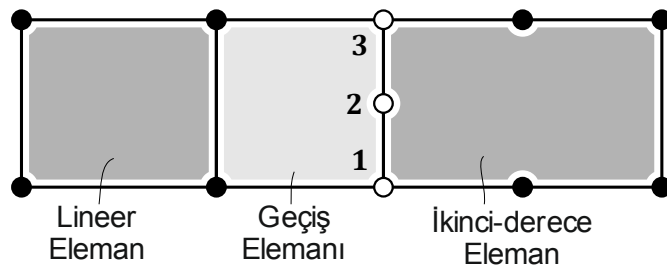
(a) h -tipi ağ sıkılaştırması



(b) p -tipi ağ sıkılaştırması

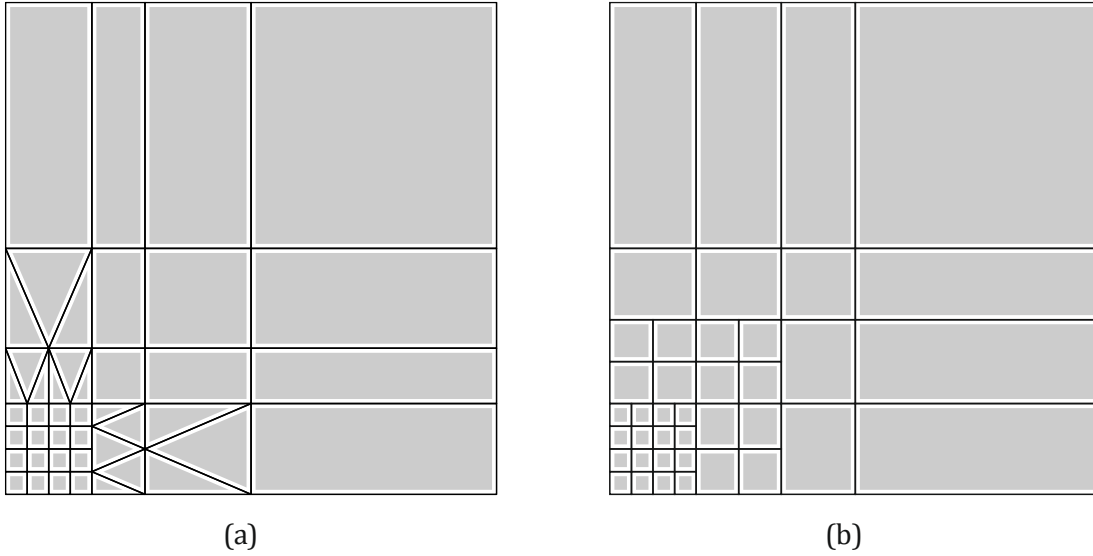
Şekil 4.1. Sonlu eleman ağ sıkılaştırmaları

Katı cisim ve yapı mekaniğinde farklı tipte elemanların bir arada kullanılmasının gerektiği birçok problem mevcuttur. Örneğin, iki-boyutlu (2D) plak eğilme elemanı, bir-boyutlu (1D) kiriş eleman ile bağlanabilir. Plak elemanın klasik plak teorisi ile modellenmesi durumunda kiriş elemanı da Euler-Bernoulli kirişi teoremi ile modellenmelidir ki, bağlantı noktalarında aynı serbestlik derecelerine sahip olabilsin. Bir düzlem elastik elemanın bir kiriş elemana bağlanması durumunda, bu bağlanan elemanların serbestlik derecelerinin uyumsuz olması durumunda (çünkü kirişin dönme serbestlik derecesinin karşılığı elastik elemanda bulunmamaktadır), iki-boyutlu (2D) düzlem elastik elemandan bir-boyutlu (1D) kiriş elemana geçişi sağlayacak özel bir eleman oluşturulmalıdır. Bu tür elemanlara geçiş elemanları adı verilir [1].



Şekil 4.2. Farklı mertebeden elemanların bağlantıları

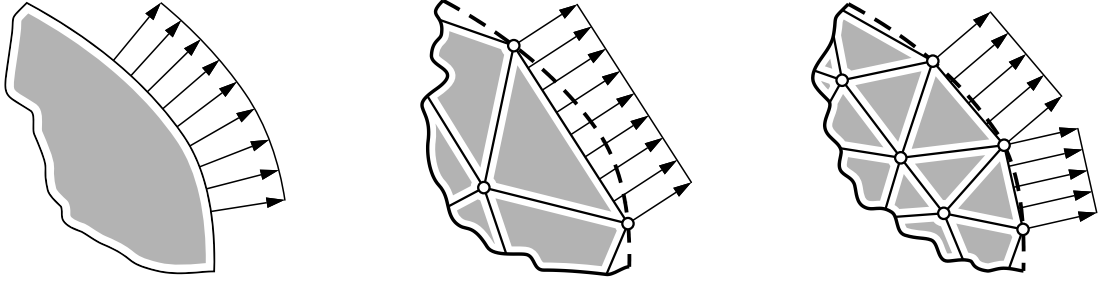
Lokal ağ sıkılaştırmasını yapabilmek için farklı dereceden elemanları kombine etmek gerekebilir, lineer ve ikinci dereceden elemanlar gibi farklı dereceden elemanları kombine etmenin iki yolu mevcuttur. Biri, elemanın farklı kenarlarında değişik sayılarda düğüm noktaları bulunan geçiş elemanları kullanmak (Şekil 4.2). Diğeri, farklı dereceli elemanlar arasındaki ortak kenarlarda yüksek dereceli elemanın ara düğüm noktalarının düşük dereceli elemanın karşılık geldiği noktayla aynı değeri alacak şekilde sabitlemek (2'nolu düğüm değerini, 1 ve 3'nolu düğüm değerlerinin ortalamasına eşitlemek). Şekil 4.3'de bu sıkılaştırmalara örnekler gösterilmektedir [1].



Şekil 4.3. Lokal ağ sıkılaştırmaları

4.2.2.2 Yükün temsil edilme şekli

Katı bir cismin, yayılı yük etkisi altında olduğunu varsayalım. Cismin deplasmanı bir grup sonlu elemanla modellendiğinde, yayılı yükü de düğüm noktalarına etkileyen bir grup düğüm kuvveti şeklinde modellenmelidir. Düğüm noktası kuvvetlerinin sonlu eleman düğüm noktalarındaki deplasmanlar ile yaptıkları işin, yayılı yükün yer-değiştirme doğrultusundaki hareket ile yaptığı işe eşit olması gerekmektedir. Çözümün doğruluğu, eleman tipine ve sistemi temsil eden ağa ve asıl kuvvetlerin temsil edilmesine bağlıdır. Örneğin eğrisel bir sınırın modellenmesinde lineer eleman kullanılması asıl kuvvet dağılımını etkileyecektir (Şekil 4.4). Bu durumda h - veya p - tipi ağ sıkılaştırmaları ile bu sınır kuvvetlerinin modellenmesi geliştirilebilmektedir. Yayılı kuvvetten dolayı oluşan yük vektörü, çözüm yaklaşımı için kullanılan elemanın interpolasyon fonksiyonu ile hesaplanmalıdır. Örneğin, çözüm yaklaşımı, ikinci dereceden dokuz-düğüm noktalı elemanlar kullanılarak yapılmışsa yayılı kuvvetin düğüm noktası dağılımları dört-düğüm noktalı lineer elemanlar kullanılarak değerlendirilmemelidir [1].



Şekil 4.4. SEM'de sınır kuvvetlerinin temsil edilişi

Diğer bir durum da farklı tipte yaklaşımlara sahip birbirine temas halindeki iki cisme etkiyen sınır kuvvetidir. Örneğin, bir plak ile dairesel bir diskin teması ile bir tepki kuvveti meydana gelir, bu kuvvet noktasal bir yük veya lokal yayılı yük olarak modellenebilir. Şekil değiştirebilen cisimlerin aralarındaki temas kuvvetinin noktasal kuvvet olarak modellenmesi, gerçekte yayılı olan yükün bir yaklaşımıdır. Yükün modellenmesinde yayılı yükün sinüsünü kullanmak daha gerçekçi olmaktadır [1] (Şekil 4.4).

4.2.2.3 Sınır koşullarının belirlenmesi

Kuvvetlerin ifade edildiği sınır parçası ile yer-değiştirmelerin ifade edildiği sınır parçasının ortak noktalara sahip olmaları birçok problemde karşılaşılan durumdur. Başka bir deyişle ağın birkaç düğüm noktasında hem kuvvetin hem de yer-değiştirmenin serbestlik dereceleri belirtilebilir. Bu noktalara tekil noktalar denir. Her durumda bu iki sınır koşulu aynı noktada uygulanamaz. Genel bir kural olarak, geometrik (yani, deplasman) sınır koşulu tekil noktalarda uygulanmalı ve kuvvet sınır koşulu dikkate alınmamalıdır. Gerçek durumda, kuvvet sınır koşullarının uygulanması sonucu olarak geometrik sınır koşulları ortaya çıkar ise ilk olarak dikkate alınması gerekmektedir [1].

Sınır-değer problemlerinin analizinde de başka bir tip tekillikle karşılaşılır. Bu da aynı sınır noktasında deplasman veya kuvvet değişkeninin iki farklı değerinin belirlenmesidir. Sonlu eleman analizinde, ya iki değer arasında bir seçim yapmak ya da bu iki değer ağırlıklı ortalamasını almak gerekir. Eğer bu iki değer arasından seçim yapılacaksa daha emniyetli olması için büyük olan değer tercih edilmelidir. Her durumda gerçek sınır koşulu, bir yaklaşım koşulu ile yer değiştirmektedir. Yaklaşım sınır koşullarının gerçeğe olan yakınlığı, noktanın sahip olduğu elemanların boyutlarına bağlıdır. Çoğunlukla kabul edilebilir bir sonuç elde edebilmek için tekil nokta civarında ağ sıklaştırması gerekmektedir [1].

Birçok basit problemin kendi mühendislik formülasyonlarıyla gerçekleştirilen yaklaşımları ile SEM çözümü sonuçlarının birbir örtüşmemesine çok önem verilmemelidir. Analizde meydana gelen değişik hataların bağıl oranları ve

doğrultuları, sonlu eleman ağında yapılan sıklaştırmanın hangi aşamada sonlandırması gerektiğini ortaya koymaktadır [1].

4.3 Klasik Tabakalı Plak Teorisi (CLPT)

4.3.1 Temel denklemler

Klasik tabakalı plak teorisi, ince izotropik plaklar için olan Kirchhoff plak teorisinin tabakalı plaklar için genişletilmiş halidir. Kirchhoff plak teorisinin varsayımları bölüm 3.4.2 'de ve temel hareket denklemlerinin çıkarılması da bölüm 3.4.4 'te ele alınmıştır. Statik durumda klasik tabakalı plak teorisinin denge denklemleri (bk. (3.33)-(3.35) ve (3.39)-(3.43)):

$$-\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y}\right) = 0 \quad (4.3)$$

$$-\left(\frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y}\right) = 0 \quad (4.4)$$

$$-\left(\frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + N(w) + q\right) = 0 \quad (4.5)$$

(N_1, N_2, N_6) ve (M_1, M_2, M_6) , (3.37) denklemlerinde tanımlanan kuvvet ve moment bileşkeleri ve $N(w)$, (3.36) denkleminde tanımlanan non-lineer ifadedir [1];

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} dz \quad \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} z dz \quad (4.6)$$

$$N(w) = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_1 \frac{\partial w}{\partial x} + N_6 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_6 \frac{\partial w}{\partial x} + N_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (4.7)$$

Denge denklemleri, tabakalı plak bünye denklemleri kullanılarak deplasmanlar (u, v, w) cinsinden ifade edilebilirler (bk. (3.33)-(3.35) (3.55)-(3.57)). Burada (4.1) denkleminin sonlu eleman modeli, kuvvet ve moment bileşkelerinin deplasmanlar cinsinden bilindiği varsayımı ile geliştirilmiştir [1].

4.3.2 Sonlu eleman modeli

Sonlu eleman modeli denklemlerinin geliştirilmesi iki temel adımda meydana gelmektedir: (1) denklemlerin ağırlıklı-integral ifadeleri oluşturulur ve (2) interpolasyon teoremi kullanılarak deplasman yaklaşımları ve ağırlıklı-integral ifadeleri kullanılarak düğüm noktaları deplasmanları ve kuvvetleri arasındaki cebirsel denklemlerin

diferansiyelleri türetilir. İlk olarak, diferansiyel denklemler, çözülebilmeleri için ağırlıklı-integral formunda yeniden yazılırlar. Bu işlem, düğüm deplasmanları ve kuvvetleri arasında bağımsız lineer cebirsel bağıntıların türetilmesi için gereklidir. Ağırlıklı-integral ifadesi hem direkt olarak temel denklemlerden hem de virtüel deplasmanlar prensibinden türetilir. Her iki yaklaşım da zayıf formülasyon adı verilen ağırlıklı-integral ifadesini birebir aynı şekilde verir. Sonraki adımda, (4.1) formunun uygun sonlu eleman interpolasyonları kullanılarak bağımlı değişkenlere yaklaşım yapılmış olunur. Bunlar, deplasmanlar ve kuvvetlerin düğüm değerleri arasındaki cebirsel bağıntıları elde etmek için ifadelerin zayıf formülasyonlarında yerlerine yazılır. Anlatımı sadeleştirmek için, (4.5) denklemdeki non-lineer $N(w)$ terimi ihmal edilir ve lineer denklemlerin sonlu eleman modelleri geliştirilir [1].

4.3.2.1 Zayıf formülasyon

Virtüel yer-değiştirme prensibi, (4.3)-(4.5)'deki diferansiyel denklemlerin zayıf formülasyonunu verir. Buna alternatif olarak, (4.3)-(4.5)'in zayıf formülasyonu şöyle de açıklanabilir; Her denklem, uygun bir ağırlık-fonksiyonu ile çarpılır ve tipik bir eleman üzerinde integrali alınır. İfadenin her ağırlık-fonksiyon tercihi için uygulanabilmesiyle denklemlerle ilgili deplasman bileşen açılımı düğüm değerleri mevcut olan ağırlık-fonksiyonu olarak olabildiğince farklı, lineer bağımsız fonksiyonlar şeklinde seçilebilir. Ağırlık-fonksiyonu, deplasman bileşenindeki virtüel varyasyon terimine sahiptir. (4.3)-(4.5)'deki üç denklem, (x, y, z) koordinat sistemindeki kuvvet dengesiyle uyuşmaktadır. Bundan dolayı, bu üç denklemin ağırlık-fonksiyonları, sırasıyla $(\delta u, \delta v, \delta w)$ virtüel varyasyonlarına sahiptirler [1].

(4.3) denklemi, ağırlık-fonksiyonu δu ile çarpılıp, Ω^e bölgesinde integrallenirse;

$$0 = \int_{\Omega^e} \delta u \left[-\frac{\partial N_1}{\partial x} - \frac{\partial N_6}{\partial y} \right] dx dy \quad (4.8)$$

N_1 ve N_6 ; u , v ve w deplasmanlarının türevlerine ait fonksiyonlardır. İnterpolasyon fonksiyonlarının türevlenebilirliğini azaltmak için u , v ve w 'nin sonlu eleman yaklaşımlarında kısmi integrasyonla (veya gradient teoremiyle) ağırlık-fonksiyonu δu olarak işlem gören N_1 ve N_6 'daki türevi kullanılmıştır [1].

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \delta u}{\partial y} N_6 \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} (N_1 n_x + N_6 n_y) \delta u ds \quad (4.9)$$

(n_x, n_y) , Ω^e bölgesinin Γ^e sınırındaki birim normalin doğrultman kosinüsleridir. Sınır integralindeki parantez içi ifade düzlem içi normal kuvveti göstermektedir [1].

$$N_1 n_x + N_6 n_y = N_n \quad (4.10)$$

Böylece (4.8) denklemini aşağıdaki hali almaktadır;

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \delta u}{\partial y} N_6 \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} \delta u N_n ds \quad (4.11)$$

(4.11) denklemine, (4.3)'ün zayıf formülasyonu denir. Çünkü (4.11) denklemini, (4.3) orijinal diferansiyel denkleme kıyasla, (u, v, w) bağlı değişkenlerinin daha az türevlenebilirliğini (daha zayıf sürekliliğini) gerektirmektedir [1].

(4.4) ve (4.5) için de aynı prosedürü takip ederek aşağıdaki zayıf formlar elde edilmektedir;

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \delta v}{\partial x} N_6 + \frac{\partial \delta v}{\partial y} N_2 \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} N_{ns} \delta v ds \quad (4.12)$$

$$0 = - \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} M_1 + 2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} M_6 + \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} M_2 + \delta w q \right] dx dy \quad (4.13)$$

$$- \int_{\Gamma^e} \left[\delta w V_n + \frac{\partial \delta w}{\partial n} M_n \right] ds$$

δv ve δw , sırasıyla v ve w deplasmanlarının virtüel değişkenleridir [1].

4.3.2.2 İnterpolasyon ve sonlu eleman modeli

Bir elemanın üzerinde şekil (form) interpolasyonları ile deplasman (u, v, w) yaklaşımları;

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j(x, y) \quad v = \sum_{j=1}^n v_j \psi_j(x, y) \quad w = \sum_{j=1}^m \Delta_j \phi_j(x, y) \quad (4.14)$$

şeklinindedir. Burada; (u_j, v_j) , (u, v) 'nin düğüm değerlerini ve Δ_j de w 'nin düğüm değerleri ve türevlerini ifade etmektedir. Bütün düğüm deplasmanları ve rotasyonları, genelleştirilmiş deplasmanlar olarak adlandırılır ve Ω^e bölgesi üzerinde tanımlıdır [1].

Sonlu eleman analizinde kullanılan iki temel interpolasyon fonksiyonu bulunmaktadır. Lagrange'da sadece fonksiyonun, Hermite'de ise fonksiyonun ve türevlerinin interpolasyonu gerçekleştirilmektedir. Lagrange interpolasyonu kullanılarak meydana getirilen sonlu elemanlar C^0 olarak, Hermite interpolasyonu kullanılarak meydana getirilen sonlu elemanlar C^m olarak adlandırılır. Buradaki m interpolasyona katılan türevlerin mertebesini ifade eder ve $m > 0$ 'dır [1].

(4.11)-(4.13) denklemlerinin türev mertebelerine göre, Lagrange ψ_i ve Hermite ϕ_i interpolasyon fonksiyonu belirlenir [38, 39]. Açıkça, (u, v) 'nin C^0 -interpolasyonu ve

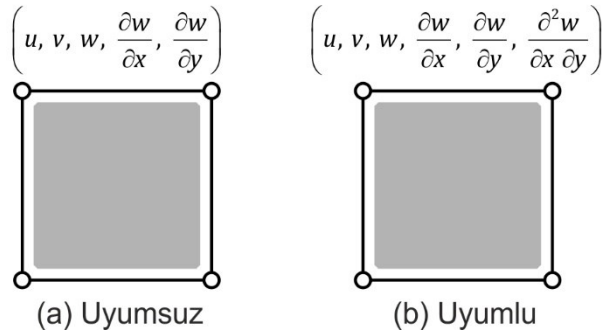
w 'nun C^1 -interpolasyonu, (4.11)-(4.13) denklemlerinde zayıf formülasyonları kullanırken klasik plak teorisinin plak eğilme elemanını oluşturmak için gerekmektedir [1].

Dört-düğümlü dörtgen elemanlar kullanılan (u, v) 'nin lineer Lagrange ve w 'nin kübik Hermite interpolasyonunda $n = 4$ ve $m = 16$ 'dır. Bu durumda düğüm değerinden dört tanesi w 'ya bağlıdır [1];

$$w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.15)$$

Lagrange ψ_i ve Hermite ϕ_i interpolasyon fonksiyonları, Çizelge 4.1'de verilmiştir. Uygun plak eleman için Hermite interpolasyon fonksiyonları, Euler-Bernoulli kiriş elemanının Hermite kübik polinomlarının tansör çarpımlarının alınması ile elde edilir [1, 38].

(u, v, w) 'nin bu interpolasyon seçimi, $(u, v, w, \partial w / \partial n)$ 'nin elemanların arayüzelerindeki sürekliliğini sağlamaktadır. Bu yüzden bu tür elemanlara uyumlu elemanlar adı verilir. Eğer interpolasyonda karışık türev $\partial^2 w / \partial x \partial y$ yoksa düzleme dik deplasman eğiminin iç eleman sürekliliği sonuç eleman ile uyumsuz. Bundan dolayı, uyumsuz eleman olarak adlandırılır. Uyumlu eleman her düğümünde toplam 6 serbestlik derecesine sahiptir, diğer taraftan uyumsuz eleman her düğümünde toplam 5 serbestlik derecesine sahiptir (Şekil 4.5) [1].



Şekil 4.5. Klasik plak teorisi (CLPT) plak eğilme elemanları

Çizelge 4.1. Plak eğilme elemanları için Lagrange ψ_i ve Hermite ϕ_i interpolasyon fonksiyonları [1]

Eleman tipi	İnterpolasyon fonksiyonu	Açıklamalar
Lagrange elemanları:		
Lineer	$\frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$	i düğüm için ($i = 1, \dots, 4$)
İkinci dereceden	$\frac{1}{4}\xi\xi_i(1 + \xi\xi_i)\eta\eta_i(1 + \eta\eta_i)$	Köşe düğümü
	$\frac{1}{2}\eta\eta_i(1 + \eta\eta_i)(1 - \xi^2)$	Kenar düğümü, $\xi_i = 0$
	$\frac{1}{2}\xi\xi_i(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)$	Kenar düğümü, $\eta_i = 0$
	$(1 - \xi^2)(1 - \eta^2)$	İç düğüm
Seredipity eleman:		
İkinci dereceden	$\frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i - 1)$	Köşe düğümü
	$\frac{1}{2}(1 - \xi^2)(1 + \eta\eta_i)$	Kenar düğümü, $\xi_i = 0$
	$\frac{1}{2}(1 + \xi\xi_i)(1 - \eta^2)$	Kenar düğümü, $\eta_i = 0$
Hermite kübik eleman:		
İnterpolasyon fonksiyonları		
u değişkeni için	$\frac{1}{16}(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 2)(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 2)$	
$\partial u / \partial \xi$ türevi için	$\frac{-1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 1)(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 2)$	i düğüm için
$\partial u / \partial \eta$ türevi için	$\frac{-1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 2)\eta_i(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 1)$	($i = 1, \dots, 4$)
$\partial^2 u / \partial \xi \partial \eta$ türevi için	$\frac{1}{16}\xi_i(\xi + \xi_i)^2(\xi\xi_i - 1)\eta_i(\eta + \eta_i)^2(\eta\eta_i - 1)$	
İnterpolasyon fonksiyonları		
u değişkeni için	$\frac{1}{2}(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)(2 + \xi_0 + \eta_0 - \xi^2 - \eta^2)$	
$\partial u / \partial \xi$ türevi için	$\frac{1}{2}\xi_i(\xi_0 + 1)^2(\xi_0 - 1)(\eta_0 + 1)$	i düğüm için
$\partial u / \partial \eta$ türevi için	$\frac{1}{2}\eta_i(\xi_0 + 1)(\eta_0 + 1)^2(\eta_0 - 1)$	($i = 1, \dots, 4$)
	$\xi = (x - x_c)/a$ $\eta = (y - y_c)/b$	($2a$ ve $2b$, dörtgen
	$\xi_0 = \xi\xi_i$ $\eta_0 = \eta\eta_i$	elemanın kenarlarıdır)

((ξ_i, η_i), elemanın i -ninci düğüm koordinatlarını; (x_c, y_c), eleman merkezinin global koordinatını ifade eder).

(4.3)-(4.5) denklemlerinin sonlu eleman modeli, (u, v, w) için (4.14)'deki ifadeler yerine yazılarak ve $\delta u = \psi_i$, $\delta v = \psi_i$, $\delta w = \phi_i$ ifadelerini de (4.11)-(4.13)'deki yerlerine yazılarak elde edilir. Bu, her zayıf formun i . cebrik ifadesini verir. Her eleman, toplamda $(2n + m)$ düğüm serbestlik derecesine sahiptir. Böylece aşağıdaki ifadeleri elde edilmektedir [1];

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_6 \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds \quad (4.16)$$

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_6 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_2 \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} N_{ns} \psi_i ds \quad (4.17)$$

$$0 = - \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} M_1 + 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} M_6 + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} M_2 + \phi_i q \right] dx dy \quad (4.18)$$

$$- \int_{\Gamma^e} \left[\phi_i V_n + \frac{\partial \phi_i}{\partial n} M_n \right] ds$$

Bu denklemler aşağıdaki şekilde ifade edilebilir;

$$\sum_{\beta=1}^3 \sum_{j=1}^{n(\beta)} K_{ij}^{\alpha\beta} \Delta_j^\beta - F_i^\alpha = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n(\alpha) \quad (4.19)$$

veya

$$[K^e] \{\Delta^e\} - \{F^e\} = \{0\} \quad (4.20)$$

Burada, $\alpha = 1, 2, 3$; $n(1) = n(2) = 4$ ve $n(3) = 16$ 'dır. Δ_j^β değişkenleri ve $K_{ij}^{\alpha\beta}$ rijitlik sabitleri aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır [1];

$$\Delta_j^1 = u_j \quad , \quad \Delta_j^2 = v_j \quad , \quad \Delta_j^3 = \Delta_j \quad (4.21)$$

ve

$$K_{ij}^{1\alpha} = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{6j}^\alpha \right] dx dy$$

$$N_{1j}^1 = A_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$N_{1j}^2 = A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$N_{1j}^3 = - \left(B_{11} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right)$$

$$K_{ij}^{2\alpha} = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{2j}^\alpha \right] dx dy$$

$$N_{6j}^1 = A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$N_{6j}^2 = A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$N_{6j}^3 = - \left(B_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right)$$

$$N_{2j}^1 = A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$N_{2j}^2 = A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}$$

$$N_{2j}^3 = - \left(B_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right)$$

$$K_{ij}^{3\alpha} = - \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} M_{1j}^\alpha + 2 \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y} M_{6j}^\alpha + \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2} M_{2j}^\alpha \right] dx dy$$

(4.22)

$$\begin{aligned}
M_{1j}^1 &= B_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{2j}^2 &= B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{1j}^3 &= - \left(D_{11} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right) \\
M_{6j}^1 &= B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{6j}^2 &= B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{6j}^3 &= - \left(D_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right) \\
M_{2j}^1 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{2j}^2 &= B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \\
M_{2j}^3 &= - \left(D_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \right)
\end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
F_i^1 &= \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds \quad , \quad F_i^2 = \int_{\Gamma^e} N_{ns} \psi_i ds \\
F_i^e &= \int_{\Gamma^e} \left(\phi_i V_n + \frac{\partial \phi_i}{\partial n} M_n \right) ds - \int_{\Omega^e} \phi_i q dx dy
\end{aligned} \tag{4.24}$$

ifadeleri yazılabilmektedir ve diğer tüm katsayılar sıfırdır [1].

(4.22)-(4.24) denklemlerindeki katsayıların hesaplanması için her bir eleman sistemi üzerindeki integrallerinin çözülmesi gerekmektedir. Eleman geometrisinin dörtgen olmadığı veya (x, y) koordinatında karmaşık fonksiyonların integralleri ile karşılaşılacak durumlarda, klasik metotlarla integralin kesin çözümü mümkün değildir. Sonlu eleman bilgisayar yazılımları bu tür integralleri, numerik metotlar kullanarak hesaplamaktadırlar. Klasik tabakalı plak teorisinin sonlu eleman modelinin oluşturulması bu şekilde tamamlanmış olur [1].

Bir elemanın (4.19)-(4.20) denklemleri, düğüm deplasmanlarının ve düğüm kuvvet dengelerinin içsel eleman sürekliliği kullanılarak bir araya getirilir. Sonra problemin deplasman ve kuvvet sınır koşulları, bir araya getirilen sistem

denklemlerine uygulanır ve tüm ağın düğüm deplasmanları için denklemler hesaplanır. (4.14) denklemleri herhangi bir $(x, y, 0)$ noktasındaki deplasmanı bulmada ve (3.23) denklemindeki deplasman ifadesi de bir (x, y, z) noktasının toplam deplasmanını belirlemede kullanılabilir. Global koordinattaki (x, y, z) birim-şekil-değişiklikler (3.30) ve gerilmeler, deplasman ifadesi kullanılarak hesaplanabilir ve (3.18)-(3.19)'deki dönüşümü denklemleri kullanılarak tabaka koordinatlarına dönüşümü yapılabilir [1].

4.3.3 Non-linear model

Eğer Von Kármán non-linear birim-şekil-değişiklikleri (bk. (3.31)), sonlu eleman modeline dâhil edilirse yukardaki prosedür, cebrik ifadelerin (4.19)-(4.20) sonuçlarının non-linear olması haricinde bir değişikliğe uğramaz. Non-linear model için rijitlik katsayıları [1];

$$K_{ij}^{13} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \hat{N}_{1j} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \hat{N}_{6j} \right] dx dy \quad , \quad K_{ij}^{3a} = 2K_{ji}^{a3}$$

$$K_{ij}^{23} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \hat{N}_{6j} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \hat{N}_{2j} \right] dx dy \quad (4.25)$$

$$K_{ij}^{33} = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial x} \left(\bar{N}_1 \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \bar{N}_6 \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \left(\bar{N}_6 \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + \bar{N}_2 \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

Buradaki;

$$\hat{N}_{aj} = A_{a1} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + A_{a2} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + A_{a6} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \right) \quad (a = 1,2,6) \quad (4.26)$$

$$\hat{N}_I = \frac{1}{2} A_{I1} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} A_{I2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + A_{I6} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (I = 1,2,6)$$

Non-linear modelin non-linear cebrik ifadeleri, iteratif metotlar yardımı ile çözümlenir. İteratif metotlarda bağımlı değişkenler içeren ifadeler ve bunların türevleri, önceki iterasyonlardan alınan değerler ile hesaplanır. Böylece integraller numerik metotlar yardımı ile çözümlenmiş olur [1].

4.4 Birinci-Mertebe Kayma Deformasyon Teorisi (FSDT)

4.4.1 Temel denklemler

Bu bölümde, birinci-mertebe kayma deformasyon teorisinin deplasman sonlu eleman modellerinden bahsedilmektedir. Klasik tabakalı plak teorisi için uygulananla aynı prosedür uygulanmaktadır. İlk olarak teorisinin statik denge denklemlerini ele alınmaktadır [1].

(3.68)-(3.72) denklemlerindeki zamana göre türevli terimlerin ihmal edilmesiyle birinci-mertebe teorisinin denge denklemleri elde edilir (yani, bütün bileşkelerin sadece uzay koordinat sisteminin fonksiyonu olduğu varsayılır) [1]:

$$-\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y}\right) = 0 \quad , \quad -\left(\frac{\partial N_6}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y}\right) = 0 \quad (4.27)$$

$$-\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + N(w) + q\right) = 0 \quad (4.28)$$

$$-\left(\frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial M_6}{\partial y} - Q_1\right) = 0 \quad , \quad -\left(\frac{\partial M_6}{\partial x} + \frac{\partial M_2}{\partial y} - Q_2\right) = 0 \quad (4.29)$$

(4.27)-(4.29) denklemlerinin zayıf formülasyonları, klasik tabakalı plak teorisi için gösterilenle aynı şekilde elde edilir. İlk denklem δu ile çarpılır, ikincisi δv , üçüncüsü δw , dördüncüsü $\delta \phi_1$, beşincisi $\delta \phi_2$ ile çarpılırlar. Zayıf formülasyonları elde etmek için sonuçlardan ağırlık-fonksiyonlarına kadar olan diferansiyellerin çözümlenmesinde yine kısmi-integrasyon kullanılır [1].

4.4.2 Sonlu eleman modeli

Kuvvet ve moment bileşkeleri bağlı değişkenlerin $(u, v, w, \phi_1, \phi_2)$ en fazla birinci türevlerini içerir. Bu nedenle, hepsi için Lagrange interpolasyon fonksiyonları kullanılarak yaklaşım yapılabilir. Buna göre, birinci-mertebe plak teorisinin plak eğilme elemanı, bir C^0 elemanıdır. Deplasmanların $(u, v, w, \phi_1, \phi_2)$ yaklaşımları aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned} u &= \sum_{j=1}^n u_j \psi_j(x, y) & v &= \sum_{j=1}^n v_j \psi_j(x, y) & w &= \sum_{j=1}^n w_j \psi_j(x, y) \\ \phi_1 &= \sum_{j=1}^n S_j^1 \psi_j(x, y) & \phi_2 &= \sum_{j=1}^n S_j^2 \psi_j(x, y) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Burada ψ_j , interpolasyon fonksiyonunun Lagrange ailesidir. Lineer, ikinci-mertebeden veya daha yüksek-mertebeden interpolasyon fonksiyonları için kullanılabilir [1].

Lineer durum için Ω^e üzerinde (4.27)-(4.29) denklemlerinin zayıf formülasyonları aşağıdaki şekildedir [1];

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_6 \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} N_n \psi_i ds \quad (4.31)$$

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_6 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_2 \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} N_{ns} \psi_i ds \quad (4.32)$$

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} Q_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} Q_2 + \psi_i q \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} Q_n \psi_i ds \quad (4.33)$$

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_1 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_6 + \psi_i Q_1 \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} M_n \psi_i ds \quad (4.34)$$

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_6 + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_2 + \psi_i Q_2 \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} M_{ns} \psi_i ds \quad (4.35)$$

Birinci-mertebe teorisinin sonlu eleman modelini, (4.30)'deki $(u, v, w, \phi_1, \phi_2)$ ifadelerini, (4.31)-(4.35) denkleminde yerine yazarak elde ederiz [1].

$$\sum_{\beta=1}^5 \sum_{j=1}^n K_{ij}^{\alpha\beta} \Delta_j^\beta - F_i^\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, 5) \quad (4.36)$$

veya

$$[K^e] \{\Delta^e\} - \{F^e\} = \{0\} \quad (4.37)$$

Burada, rijitlik ve kuvvet katsayıları $(\alpha = 1, 2, \dots, 5)$ ile tanımlanmıştır;

$$\begin{aligned} K_{ij}^{1\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{6j}^\alpha \right] dx dy \\ K_{ij}^{2\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} N_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} N_{2j}^\alpha \right] dx dy \\ K_{ij}^{3\alpha} &= \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} Q_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} Q_{2j}^\alpha \right] dx dy \\ K_{ij}^{4\alpha} &= - \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_{1j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_{6j}^\alpha + \psi_i Q_{1j}^\alpha \right] dx dy \\ K_{ij}^{5\alpha} &= - \int_{\Omega^e} \left[\frac{\partial \psi_i}{\partial x} M_{6j}^\alpha + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} M_{2j}^\alpha + \psi_i Q_{2j}^\alpha \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.38)$$

$\alpha = 1, 2, \dots, 5$ ve $I = 1, 2, 6$ için N_{Ij}^α , M_{Ij}^α ve Q_{Ij}^α katsayıları aşağıda verilmiştir;

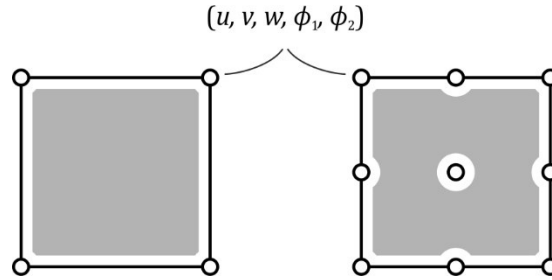
$$\begin{aligned}
N_{1j}^1 &= A_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & N_{1j}^2 &= A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{1j}^4 &= B_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & N_{1j}^5 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{2j}^1 &= A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & N_{2j}^2 &= A_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{2j}^4 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & N_{2j}^6 &= B_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{6j}^1 &= A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & N_{6j}^2 &= A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
N_{6j}^4 &= B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & N_{6j}^5 &= B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{1j}^1 &= B_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & M_{1j}^2 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{1j}^4 &= D_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & M_{1j}^5 &= D_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + D_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{2j}^1 &= B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & M_{2j}^2 &= B_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{2j}^4 &= D_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & M_{2j}^5 &= D_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + D_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{6j}^1 &= B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & M_{6j}^5 &= B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
M_{6j}^4 &= D_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + D_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & M_{6j}^5 &= D_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + D_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \\
Q_{1j}^4 &= A_{55} \psi_j & , & & Q_{2j}^4 &= A_{45} \psi_j & , & & Q_{1j}^5 &= A_{45} \psi_j & , & & Q_{2j}^5 &= A_{44} \psi_j \\
Q_{1j}^3 &= A_{55} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{45} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} & , & & Q_{2j}^3 &= A_{45} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{44} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}
\end{aligned} \tag{4.39}$$

$$\begin{aligned}
F_i^1 &= \int_{\Gamma^e} \psi_i N_n ds & , & & F_i^2 &= \int_{\Gamma^e} \psi_i N_{ns} ds \\
F_i^3 &= \int_{\Omega^e} q \psi_i dx dy + \int_{\Gamma^e} \psi_i Q_n ds & & & & \\
F_i^4 &= \int_{\Gamma^e} \psi_i M_n ds & , & & F_i^5 &= \int_{\Gamma^e} \psi_i M_{ns} ds
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Diğer bütün katsayılar sıfırdır [1].

Dört-düğümlü dörtgen eleman kullanılması durumunda, eleman rijitlik matrisinin boyutu (20×20) 'dir. Dokuz düğümlü olması halinde ise boyut (45×45) 'tir (Şekil 4.6). Düzlem içi serbestlik derecesi (u, v) ihmal edilirse (ayrık durum için), lineer ve ikinci-dereceden dörtgen elemanlar için rijitlik matrislerinin boyutları sırasıyla (12×12) ve (27×27) 'dir. (4.38)-(4.40) denklemlerindeki katsayılar, genelde numerik integrasyon metotları ile hesaplanmaktadır [1].

Bütün elemanların sonlu eleman denklemleri meydana getirildikten sonra düğüm deplasman sürekliliği ve düğüm kuvvet dengesi kullanılarak hepsi bir araya getirilir. Ardından deplasman ve kuvvet sınır koşulları, toplam sistem denklemlerine uygulanır ve denklemler deplasmanların düğüm değerleri için çözülür. (4.30) denklemleri, Ω^e bölgesi içinde herhangi bir noktadaki deplasman, birim-şekil-değiştirme ve gerilmelerin belirlenmesinde kullanılmaktadır [1].



Şekil 4.6. Birinci-mertebe kayma deformasyon teorisi (FSDT) C^0 plak eğilme elemanları
(Her düğüm, $(u, v, w, \phi_1, \phi_2)$ serbestlik derecelerine sahiptir)

Geometrik non-lineerlik (Von Kármán prensibindeki), klasik tabakalı teoride yapıldığı gibi dâhil edilebilir. Yani (4.25)-(4.26) denklemlerindeki non-lineer katsayılar, birinci-mertebe kayma deformasyon teorisi için de geçerlidir [1].

4.4.3 Dinamik durum

Klasik ve birinci-mertebe kayma teorilerinin (4.19)-(4.20) ve (4.36)-(4.37) sonlu eleman modellerini geliştirirken, sadece statik durum dikkate alınmıştır. Dinamik durum için sonlu eleman modellerini oluşturmada (3.55)-(3.57) ve (3.79)-(3.83)

hareket denklemlerini dikkate almak gerekmektedir. Zamana bağılı problemlerde çoğunlukla yapılan varsayım; değişkenlerin herbiri $[u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t), \phi_1(x, y, t), \phi_2(x, y, t)]$, koordinatların (x, y) bir fonksiyonu ile zamanın (t) bir fonksiyonunun çarpımı cinsinden ifade edilebilmesidir [1];

$$u = \sum_{j=1}^n u_j(t) \cdot \psi_j(x, y) \quad , \quad v = \sum_{j=1}^n v_j(t) \cdot \psi_j(x, y) \quad , \quad w = \sum_{j=1}^n w_j(t) \cdot \psi_j(x, y) \quad (4.41)$$

$$\phi_1 = \sum_{j=1}^n S_j^1(t) \cdot \psi_j(x, y) \quad , \quad \phi_2 = \sum_{j=1}^n S_j^2(t) \cdot \psi_j(x, y)$$

Genelleştirilmiş deplasmanların düğüm değerleri, burada zamanın (t) fonksiyonları cinsinden ifade edilmektedir. Sonlu eleman denklemlerini meydana getirirken, ilk olarak herhangi bir t ($t > 0$) anı için $(u, v, w, \phi_1, \phi_2)$ değişkenlerinin üç boyutlu dönüşüm yaklaşımı yapılır. Bu adıma kısmi ayrıştırma adı verilmektedir. Bu, zamana bağılı adî diferansiyel denklemlerin oluşturulmasını sağlar. Bu diferansiyel denklemler daha sonra, belli bir andaki düğüm değerleri için daha ileri yaklaşımlar yapılarak cebrik ifadelerle dönüştürülür. Zaman türevleri yaklaşımı, zamana bağılı yaklaşım olarak bilinir. Yaklaşımların bu iki aşaması aşağıda açıklanmaktadır [1].

4.4.3.1 Kısmi ayrıştırma

(4.41) denklemlerini, (3.79)-(3.83) denklemlerinin zayıf formülasyonlarında yerine koyarak zamana bağılı değişkenler $(u_j, v_j, w_j, S_j^1, S_j^2)$ için $5n$ tane adî diferansiyel denklem dizisi elde edilmektedir;

$$t > 0 \text{ için } \Omega^e \text{ bölgesinde,} \quad (4.42)$$

$$[K^e] \cdot \{\Delta^e\} + [M^e] \cdot \{\dot{\Delta}^e\} = \{F^e\}$$

$[K^e]$, eleman rijitlik matrisi; F^e , (4.37) denklemindeki kuvvet vektörü; $[M^e]$, kütle matrisidir. Kütle matrisi katsayıları aşağıda verilmektedir [1];

$$[M^e] = \begin{bmatrix} [M^{11}] & [M^{12}] & [M^{13}] & [M^{14}] & [M^{15}] \\ & [M^{22}] & [M^{23}] & [M^{24}] & [M^{25}] \\ & & [M^{33}] & [M^{34}] & [M^{35}] \\ & sim. & & [M^{44}] & [M^{45}] \\ & & & & [M^{55}] \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

ve

$$M_{ij}^{11} = \int_{\Omega^e} I_0 \psi_i \psi_j dx dy \quad , \quad M_{ij}^{12} = 0 \quad , \quad M_{ij}^{13} = 0$$

$$M_{ij}^{14} = \int_{\Omega^e} I_1 \psi_i \psi_j dx dy \quad , \quad M_{ij}^{15} = 0$$

(4.44)

$$M_{ij}^{22} = M_{ij}^{11} \quad , \quad M_{ij}^{23} = 0 \quad , \quad M_{ij}^{24} = 0 \quad , \quad M_{ij}^{25} = M_{ij}^{14}$$

$$M_{ij}^{33} = M_{ij}^{11} \quad , \quad M_{ij}^{34} = 0 \quad , \quad M_{ij}^{35} = 0 \quad , \quad M_{ij}^{44} = M_{ij}^{11}$$

$$M_{ij}^{45} = M_{ij}^{14} \quad , \quad M_{ij}^{55} = M_{ij}^{11}$$

(4.42) denklemini, analiz türüne bağlı olarak daha uygun bir forma indirgenebilir.

Statik analiz için ivme vektörü $\{\ddot{\Delta}\}$ sıfır alınır ve aşağıdaki sonuç elde edilir [1];

$$[K^e] \cdot \{\Delta^e\} = \{F^e\} \quad (4.45)$$

Doğal titreşim problemleri için periyodik hareket kabulü yapılır ve ivme vektörü aşağıdaki ifade ile değiştirilir [1];

$$\{\ddot{\Delta}^e\} = -\omega^2 \cdot \{\Delta_o^e\}$$

veya

(4.46)

$$\{\Delta^e\} = \{\Delta_o^e\} \cdot e^{-i\omega t}$$

Böylece (4.42) denklemini, bir öz-değer problemi şeklini alır;

$$([K^e] - \omega^2 \cdot [M^e]) \cdot \{\Delta_o^e\} = \{F_o^e\} \quad (4.47)$$

Burkulma analizi için (yani plağın burkulmasına sebep olan düzlem içi basınç kuvveti değerini belirlemek için) (4.47) denklemindeki kütle matrisini, stabilite matrisi $[S^e]$ ile ve ω^2 , burkulma yükü λ ile yer değiştirilir. Stabilite matrisi, (3.81) denkleminin geometrik non-lineerliğinden meydana gelmektedir;

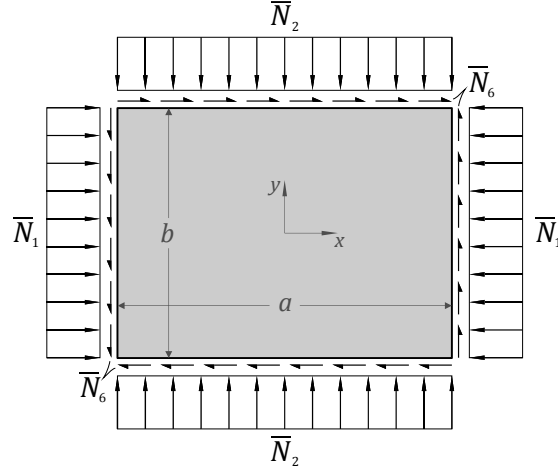
$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{N}_1 \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{N}_6 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{N}_6 \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{N}_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (4.48)$$

Buradaki $(\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_6)$, uygulanan düzlem içi kuvvetlerdir (Şekil 4.7). Birinci-mertebe teorisi için, stabilite (veya geometrik rijitlik) matrisi $[S^e]$ aşağıdaki şekildedir [1];

$$[S^e] = \begin{bmatrix} [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ & [0] & [0] & [0] & [0] \\ & & [S^{33}] & [0] & [0] \\ & sim. & & [0] & [0] \\ & & & & [0] \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Buradaki;

$$S_{ij}^{33} = \int_{\Omega^e} \left[\bar{N}_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \bar{N}_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \bar{N}_6 \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \right) \right] dx dy \quad (4.50)$$



Şekil 4.7. Düzlem içi yükleme altında plak eleman

Bu durumda λ öz-değeri, gerçek burkulma yükünün, uygulanan düzlem içi kuvvetlerine oranını temsil etmektedir [1];

$$\lambda = \frac{N_1}{\bar{N}_1} = \frac{N_2}{\bar{N}_2} = \frac{N_3}{\bar{N}_3} \quad (4.51)$$

4.4.3.2 Zamana bağlı yaklaşım

Geçici tepki (transient response) durumunda, t anı çözümü için $(t + \delta t)$ anında $\{\Delta\}$ çözümünü bağıntılı cebrik ifadelerin elde edilebilmesiyle (4.42) denklemindeki çözümün zamana göre türevi kendi çözümü cinsinden ifade edilebilir. Buradaki δt birim zaman aralığını gösterir. $t = (s + 1) \cdot \delta t$ anı için $\{\Delta\}$ ve $\{\dot{\Delta}\}$ vektörlerinin çözümüne aşağıda verilen Newmark integrasyon şemasındaki ifadelerle yaklaşım yapılır;

$$\begin{aligned} \{\dot{\Delta}\}_{s+1} &= \{\dot{\Delta}\}_s + \left[(1 - \alpha) \cdot \{\ddot{\Delta}\}_s + \alpha \cdot \{\ddot{\Delta}\}_{s+1} \right] \cdot \delta t \\ \{\Delta\}_{s+1} &= \{\Delta\}_s + \{\dot{\Delta}\}_s \cdot \delta t + \left[(1 - \gamma) \cdot \{\ddot{\Delta}\}_s + \gamma \cdot \{\ddot{\Delta}\}_{s+1} \right] \cdot \frac{(\delta t)^2}{2} \end{aligned} \quad (4.52)$$

Buradaki s , zaman adım sayısıdır. α ve γ , şemanın doğruluk ve stabilite kontrol parametreleridir. s alt indisi değerlendirilen vektörlerin s . zaman adımını belirtmektedir. (yani, $t = s \cdot \delta t$ anındaki) [1].

(4.42) ve (4.52) denklemlerini kullanarak bir eleman için aşağıdaki cebrik ifadeleri elde edilmektedir,

$$[\widehat{K}]_{s+1} \cdot \{\Delta\}_{s+1} = \{\widehat{F}\}_{s,s+1} \quad (4.53)$$

Burada $\{\Delta\}_{s+1}$, $t = (s + 1) \cdot \delta t$ anındaki $\{\Delta\}$ değerini ifade eder [1], ve

$$\begin{aligned} [\widehat{K}]_{s+1} &= [K]_{s+1} + a_3 \cdot [M]_{s+1} \\ \{\widehat{F}\}_{s,s+1} &= \{F\}_{s+1} + [M]_{s+1} \cdot (a_3 \cdot \{\Delta\}_s + a_4 \cdot \{\dot{\Delta}\}_s + a_5 \cdot \{\ddot{\Delta}\}_s) \\ a_3 &= \frac{2}{\gamma \cdot (\delta t)^2} \quad , \quad a_4 = a_3 \cdot \delta t \quad , \quad a_5 = \frac{1}{\gamma} - 1 \end{aligned} \quad (4.54)$$

$\{\Delta\}$ çözümü, $t_{s+1} = (s + 1) \cdot \delta t$ anı için elde edildikten sonra t_{s+1} anındaki $\{\Delta\}$ 'nin birinci ve ikinci türevleri (hız ve ivme) aşağıdaki gibi hesaplanabilir;

$$\begin{aligned} \{\ddot{\Delta}\}_{s+1} &= a_3 \cdot (\{\Delta\}_{s+1} - \{\Delta\}_s) - a_4 \cdot \{\dot{\Delta}\}_s - a_5 \cdot \{\ddot{\Delta}\}_s \\ \{\dot{\Delta}\}_{s+1} &= \{\dot{\Delta}\}_s + a_2 \cdot \{\ddot{\Delta}\}_s + a_1 \cdot \{\ddot{\Delta}\}_{s+1} \end{aligned} \quad (4.55)$$

Buradaki $a_1 = \alpha \cdot \delta t$ ve $a_2 = (1 - \alpha) \cdot \delta t$ 'dir [1].

(4.53) denkleminin tek bir eleman için olduğu bilinmektedir. Bundan dolayı, (4.54) denklemindeki işlemler de tek bir eleman için uygulanmıştır ve $[\widehat{K}^e] = \{\widehat{F}^e\}$, statik analizdeki gibi bir araya getirilmiştir. Sınır koşullarının da eklenmesini ardından t_{s+1} anı için çözüm yapılır. Bu işlemler, istenilen zaman adım sayısına kadar tekrarlanır. Böylece, (4.53)-(4.54) denklemi, bir zaman-akış şemasını temsil eder [1].

İlk zaman adımında $\{\Delta(t)\}$ ve $\{\dot{\Delta}(t)\}$ 'daki başlangıç koşulları, bütün ağın her bir elemanı için $\{\Delta\}_0$ ve $\{\dot{\Delta}\}_0$ 'ları hesaplamakta kullanılır. İvme vektörü $\{\ddot{\Delta}\}_0$, $t = 0$ 'da (4.42) denkleminde hesaplanır;

$$\{\ddot{\Delta}\}_0 = [M]^{-1} \cdot (\{F\}_0 - [K] \cdot \{\Delta\}_0) \quad (4.56)$$

Çoğunlukla $\{F\}_0 = \{0\}$ olarak kabul edilmektedir. Başlangıç koşullarının sıfır $\{\Delta\}_0 = \{0\}$ olması ve $t = 0$ 'da uygulanan kuvvetin sıfır olduğu varsayılması durumunda, $\{\ddot{\Delta}\}_0 = \{0\}$ alınır [1].

Gerçek çözüm vektörleri $\{\Delta\}$ ve $\{\dot{\Delta}\}$ 'nin yaklaşımlarının (4.52) denklemleriyle ifade edilmesiyle, $\{\Delta\}_{s+1}$ çözümüne hata payı ilavesi meydana gelmektedir. (4.53) denkleminin tekrarlı çözümü ile her bir zaman adımında hata daha da büyümektedir. Hatanın zamanla kontrolsüz şekilde büyüdüğü bu tür zaman-yaklaşım şemaları kararsız olarak tanımlanır. Eğer hata bütün zaman değerleri için sınırlı seviyede ise, şema kararlı olarak tanımlanır. Bazı şemalar için sadece zaman adımı üzerinde belli kısıtlamalar ile hata sınırlandırılabilir. Bu tip şemalar, koşullu kararlı şemalar olarak adlandırılır. Bundan dolayı, sadece kararlı veya koşullu kararlı şemalar kullanılmaktadır [1].

Newmark şemasının numerik kararlılığı α ve γ değerlerinin seçimine bağlıdır. Sadece $\alpha = \gamma = 1/2$ olması durumunda şema koşulsuz kararlıdır. Bu parametrelerin diğer alternatifleri için, zaman artışı δt , aşağıdaki kararlılık kriterine uygun olarak seçilmelidir;

$$\alpha \geq \frac{1}{2}, \quad \gamma < \alpha \quad \text{için} \quad (4.57)$$

$$\delta t < \delta t_{cr} = \left[\frac{1}{2} \omega_{max}^2 (\alpha - \gamma) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Buradaki ω_{max} , analiz edilen yapının maksimum doğal frekansıdır. Bu değer, geçici (transient) analizler için kullanılanla aynı sonlu eleman ağı ile elde edilir [1].

(4.52) Newmark zaman yaklaşım şemasındaki α ve γ parametreleri, bilinen birkaç sonlu farklar şemasını türetmek için seçilebilir. Bunlardan bazıları aşağıda verilmiştir [1];

- Sabit-Ortalama ivme metodu (kararlı şema) : $\alpha = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{2}$
- Lineer ivme metodu (şartlı kararlı) : $\alpha = \frac{1}{2}, \gamma = \frac{1}{3}$ (4.58)
- Merkezi sonlu fark metodu (şartlı kararlı) : $\alpha = \frac{1}{2}, \gamma = 0$

4.4.4 Kayma kenetlenmesi

Birinci-mertebe kayma deformasyon plak teorisinde deplasman-esaslı C^0 plak elemanlar, literatürde mevcutları arasında en basitidir. Ancak, elemanların açıklık-kalınlık oranının büyük olması durumunda (yani, ince plaklarda) bu tip düşük mertebe elemanların (dokuz veya daha az düğümlü elemanların) hassasiyeti yeterli değildir. İnce plaklar için ε_4 ve ε_5 kayma birim-şekil-değiştirmelerinin sıfır olması gerekir ve böylece birinci-mertebe teorisi esaslı plak elemanlar fazlasıyla rijit olur. Bunun neticesinde hesaplanan deplasmanlar, gerçek çözüme göre oldukça küçük çıkar. Kayma kenetlenmesi (shear locking) olarak bilinen bu davranış türü (aşırı rijit davranış), kayma deformasyon elemanlarının uygulanmaya başlanmasından beri sorun teşkil etmektedir [1, 40].

Düzleme dik kayma birim-şekil-değiştirmenin sıfır olduğu plak elemanlarda eğrilikleri doğru şekilde modelleyebilmek için kayma deformasyon elemanlarının yetersizliğinden ileri gelen kayma kenetlenmesinin etkisini hafifleten çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Birkaçını ifade edecek olursak bunların içerisinde indirgenmiş integrasyon, karışık formülasyonlar, hibrit formülasyonlar, varsayımsal birim-şekil-değiştirme teknikleri ve ayrı Kirchhoff metotları vardır. Literatürdeki birinci-mertebe

kayma deformasyonu için deformasyon esaslı çok sayıdaki yeni sonlu elemanlardan sadece birkaçı yeterli ölçüde başarılıdır [1].

İnce plakların, kayma deformasyonlu plak sonlu elemanları ile modellenmesi durumunda, düzleme dik kayma birim-şekil-değiştirmelerinden kaynaklı enerji sıfırlanır. Numerik olarak bu durum (enerjinin yok olması), kayma rijitlik matrisi ile deplasman vektörü çarpımının sıfır olmasını gerektiren sınırlayıcı bir koşula eşdeğerdir. Bu yüzden, sıfırlanmayan terimler içeren eden bir çözüm elde etmek için kayma rijitlik matrisi tekil olmalıdır. Kayma rijitlik matrisinin tekilliğini elde etmenin tek yolu, integrallerin kesin çözümleri için hesaplanması gereken integrallerden bir-mertebede düşük numerik integrasyon kullanmaktır. Dolayısıyla, kayma rijitliğinin indirgenmiş integrasyonu gerekir. Bu gözlemler, kayma rijitlik matrisinin tekilik ölçüleri temelinde kenetlenme davranışı tarifini sağlamaktadır. Bağımsız kayma sabitleri sayısı, ince plak limiti ve diğer kriterler dâhilinde elemana uygulanır [1].

Averill ve Reddy tarafından; elemanın kenar/kalınlık oranının çok büyük olması durumunda elemana uygulanan kayma sabitlerinin açık formunu tanımlamak için yeni ve basit bir analitik teknik sunulmuştur. Bir elemanın kayma sabitleri formunun bilinmesi durumunda, birkaç yaygın birinci-mertebe teorisi temelli tekniğin uygulanmasıyla, ince yapıların modellenmesinde kullanılan muhtemel performanslar tespit edilebilir [1].

4.5 Hesaplamalar

4.5.1 Eleman matrislerinin ve numerik integrasyonlarının bulunması

Rijitlik ve kütle matrisleri gibi eleman katsayılarının bulunması, integral hesapları ile mümkündür. Bu integrallerin çözümleri çoğunlukla karmaşık ve tarif ettikleri yapılar düzensizdir (yani, dörtgen olmayan) ve analitik yöntemlerle çözümleri olanaksızdır. Kareleştirme adı verilen numerik integrasyon ile bu tür integraller hesaplanır [1].

İntegral hesabı için birkaç numerik metot vardır. Gauss-Legendre karelestirmesi, diğer metotlarla karşılaştırıldığında daha doğru yaklaşımı daha az hesaplama süreci ile vermesi nedeniyle en sık kullanılan metottur [1, 38];

Örnek olarak birinci-dereceden bir integral hesabı için,

$$\int_a^b G(x)dx \quad (4.59)$$

Burada, $G(x)$, $a \leq x \leq b$ 'de tanımlı bir fonksiyondur. $G(x)$ eğrisi altında kalan alan (4.59) integralinin hesabını ifade etmektedir. Bütün integrasyon metotlarında eğri altında kalan alana ağırlıklı toplamla yaklaşım yapılmaktadır;

$$\int_a^b G(x)dx = w_1G(x_1) + w_2G(x_2) + \dots + w_NG(x_N) = \sum_{I=1}^N w_I G(x_I) \quad (4.60)$$

$I = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere w_I 'ya ağırlık adı verilir ve x_I örnek veya temel noktaları temsil etmektedir [1].

Gauss kareleştirmesinde fonksiyonunun $G(x)$ 'in $p = (2N - 1)$ veya daha düşük dereceli bir polinom olması durumunda $G(x)$ fonksiyonu integralinin kesin değeri elde edilir;

$$\begin{aligned} \int_a^b G(x)dx &= \int_{-1}^1 \hat{G}(r)dr = w_1\hat{G}(r_1) + w_2\hat{G}(r_2) + \dots + w_N\hat{G}(r_N) \\ &= \sum_{I=1}^N w_I G(r_I) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Burada, $\hat{G}(r)$, $G(r)$ 'nin dönüştürülmüş halidir;

$$\hat{G}(r) = G(x(r)) \cdot J(r) \quad (4.62)$$

$J(r)$, dönüşümün Jacobian'ı ve N de Gauss noktalarının sayısıdır. x ve r arasında koordinat dönüşümü, (a, b) aralığının lokal $(-1, 1)$ aralığı olarak ifade edilmesi şeklindedir. Yeni koordinat r 'ye, $-1 \leq r \leq 1$, doğal veya normalleşmiş koordinat denir ve eleman içinde lokal olarak tanımlanır [1].

p -ninci dereceden bir polinomun kesin integrasyonu için, N Gauss noktaları sayısı, $(p + 1)/2$ 'den büyük en küçük tam sayıya eşit alınmaktadır. Gauss noktaları ve ağırlıkları, numerik analiz hakkındaki tüm çalışmalardan elde edilebilmektedir [1, 38].

Sonlu eleman analizinden ortaya çıkan alan-integrallerini numerik olarak hesaplayabilmek için eleman sistemlerinin, kare sisteme $-1 \leq (r, s) \leq 1$ ((r, s) , doğal koordinat sistemdir) dönüştürülmesi gerekmektedir. Ω^e bölgesinin kare sistemine (Ω^M) (master eleman) dönüşümü için geometrik yaklaşım gerekmektedir. Geometrik yaklaşım, çoğunlukla aynı çözüm yoluyla Ω^e bölgesi geometrisinin interpolasyonu ile gerçekleştirilmektedir;

$$x = \sum_{j=1}^m x_j \hat{\psi}_j(r, s) \quad , \quad y = \sum_{j=1}^m y_j \hat{\psi}_j(r, s) \quad (4.63)$$

Burada (x, y) , sonlu eleman formülasyonlarında kullanılan global koordinat sistemidir. Geometri yaklaşımında kullanılan interpolasyon fonksiyonları $\hat{\psi}_j$ ile bağlı değişkenlerin yaklaşımında (yani, problemin çözümünde) kullanılan ψ_j fonksiyonları

genellikle aynı değildirlir. $\hat{\psi}_j = \psi_j$ (yani, $m = n$) ise formülasyon izo-parametrik olarak ifade edilir. Eğer $m < n$ ise, alt-parametrik formülasyon adını alır [1].

(4.62) dönüşümü, global koordinat ve Ω^e bölgesinde tanımlı integral ifadelerin, (r, s) lokal koordinat cinsinden master eleman (Ω^M) üzerinde tanımlı integral ifadelere dönüşümünü sağlamaktadır;

$$\int_{\Omega^e} G(x, y) dx dy = \int_{\Omega^M} \hat{G}(r, s) dr ds \quad (4.64)$$

İfadesi, Gauss kareleştirme formülü ile yaklaşım yapılabilecek bir ifadedir [1];

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \hat{G}(r, s) dr ds = \sum_{I, J=1}^N w_I w_J \hat{G}(r_I, s_J) \quad (4.65)$$

$\hat{G}(r, s)$, r veya s 'de en yüksek mertebeden (p) bir polinom ise integrali kesin olarak hesaplamak için $N = \left\lceil \frac{p+1}{2} \right\rceil$ 'dir. $p + 1$, değeri çift değil ise; N , $(p + 1)/2$ 'den büyük en küçük tam sayıya eşit olmalıdır. Örneğin, bir 2×2 Gaussian kareleştirme (yani, $N = 2$) üçüncü-mertebeden bir polinomu kesin olarak integre eder ve 3×3 kareleştirme beşinci-mertebeden bir polinomu kesin olarak integre eder. İntegrasyon mertebesini belirlemeden önce her terim incelenmeli ve polinom mertebesi belirlenmelidir [1].

4.5.2 Birim-şekil-değiştirme ve gerilmelerin hesaplanması

Denklemlerin bir araya getirilerek yapılan çözüm ile genelleştirilmiş deplasmanların düğüm değerleri elde edildikten sonra, her bir eleman için deplasmanların (4.30) diferansiyeli ile birim-şekil-değiştirmeler hesaplanır. Deplasman sonlu eleman modellerinde, sadece deplasmanlar eleman sınırları boyunca süreklidir, birim-şekil-değiştirmelerin eleman sınırları boyunca sürekliliği garanti edilemez. Bu durumda, iki elemana ait ortak bir sınırda birim-şekil-değiştirmeler ve dolayısıyla gerilmeler arayüzeyin iki tarafında da farklı değerler alır. Diğer taraftan, birim-şekil-değiştirmeler ve dolayısıyla gerilmeler eleman içinde süreklidirler. Bu bölümde, birim-şekil-değiştirmeler ve gerilmelerin hesaplanmasına dair özet bir değerlendirme sunulmaktadır [1].

Barlow, birim-şekil-değiştirmelerin ve gerilmelerin, $(N - 1) \times (N - 1)$ Gauss noktalarında hesaplanması durumunda en doğru sonucun elde edildiğini göstermiştir [41, 42]. Buradaki $N \times N$, rijitlik katsayılarının hesabında kullanılan Gauss kareleştirme kuralıdır. Bu indirgenmiş mertebe integrasyon kuralı indirgenmiş integrasyon olarak tanımlanır ve indirgenmiş integrasyon noktalarına Barlow noktaları

adı verilir. Örneğin, birinci-mertebe teorisinin lineer dörtgen plak eğilme elemanı eğilme rijitliğinin kesin hesabında 2×2 integrasyonu gerekmektedir. Ardından, birim-şekil-değiştirmeler ve gerilmelerin bulunması için bir-nokta integrasyonu (veya 1×1), kullanılmalıdır. Benzer şekilde ikinci-dereceden dörtgen bir eleman için Barlow noktaları, 2×2 Gauss kuralının Gauss noktalarındadır [1].

Bilinmelidir ki, sonlu eleman modellerindeki deplasmanlar global koordinatlara (x, y, z) göre dir. Barlow noktalarındaki bu değerlerin diferansiyelleri, global koordinatlardaki birim-şekil-değiştirmeleri verir. Yalnız, tabaka analizinde göçme kriterinin kullanılması, gerilmelerin ve birim-şekil-değiştirmelerin tabaka (veya ana malzeme) koordinatlarına göre olmasını gerektirmektedir. Birim-şekil-değiştirmeler ve gerilmeleri malzeme koordinatlarına göre elde etmek için birim-şekil-değiştirmeler ve gerilmeleri her bir tabakanın ilgili malzeme koordinatlarına göre dönüştürülmesi gerekmektedir. İlk olarak, (3.28) veya (3.66)-(3.67) denklemlerindeki global ε_i birim-şekil-değiştirmeleri, tabaka $\bar{\varepsilon}_i$ birim-şekil-değiştirmelerine (3.18)-(3.19) denkleminde kullanılan dönüşüm ifadeleriyle benzer şekilde dönüştürülür [1]:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -2 \cos \theta \sin \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & 2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.66)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{Bmatrix} \quad (4.67)$$

Sonra tabaka bünye denklemleri, Barlow noktalarında malzeme koordinatları ile temsil edilen gerilmelerin hesabında kullanılır;

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ \bar{\varepsilon}_6 \end{Bmatrix} \quad (4.68)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_4 \\ \bar{\sigma}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_4 \\ \bar{\varepsilon}_5 \end{Bmatrix} \quad (4.69)$$

$[\bar{Q}]$ matrisi, tabakanın ana koordinatları doğrultusundaki malzeme rijitlik matrisini ifade eder [1].

Düzlem içi $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$ gerilmeleri, sadece gerilme – birim-şekil-değiştirme (bünye) bağıntıları ile hesaplanırken, düzleme dik $(\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$ gerilmeler ise hem bünye denklemleri (3.48) hem de üç-boyutlu (3D) elastisite denge diferansiyel denklemleri ile hesaplanabilir [1];

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (4.71)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (4.72)$$

(4.70)-(4.71) denklemlerinin z 'ye göre integrasyonu ile $(\sigma_{xz}, \sigma_{yz})$ 'yi bulunur ve bu değerler de (4.72) denkleminde yerine koyularak σ_{zz} 'yi elde edilir [29]. Homojen plakların ve ince tabakalıların gerilmelerinin (4.70)-(4.71) denge denklemlerinden hesaplanmasıyla daha hassas doğrulukta sonuçlar elde edilmektedir [1].

4.5.3 Non-lineer cebrik ifadeler için hesap metotları

Non-lineer (Von Kármán) birim-şekil-değiştirmeleri kullanıldığında (4.22) (veya (4.36) -(4.37)) denklemlerinde yer alan eleman rijitlik matrisi, non-lineer ve asimetriktir. Bu yüzden, bir araya getirilen ifadeler de non-lineer ve asimetrik olmaktadır. Bir araya getirilen non-lineer ifadeler, sınır koşulları etki ettirildikten sonra cebrik ifadelerin yaklaşık çözümünü bulan bir metotla çözülmelidir. Sıklıkla kullanılan iki iterasyon metodu aşağıda sunulmaktadır [1].

Bir araya getirilen non-lineer sonlu eleman denklemlerinin şekli;

$$[K(\{\Delta\})] \cdot \{\Delta\} = \{F\} \quad (4.73)$$

$[K]$ rijitlik matrisi, $\{\Delta\}$ bilinmeyenine bağlı bir değer olması sebebiyle hesaplanamaz. Dolayısıyla, çözüm için varsayımsal bir $\{\Delta\}$ çözüm vektörü ve (4.73) denkleminin iterasyon yöntemlerinden biri yardımıyla $[K]$ hesaplanmaktadır [1].

4.5.3.1 Direkt iterasyon metodu

Picard metodu olarak da bilinen direkt iterasyon metodunda, bir önceki iterasyondan çözüm vektörü r , rijitlik matrisinin hesabında kullanılır ve $(r + 1)$. iterasyon sonucu, ifadenin çözülmesi ile elde edilir [38, 43];

$$[K(\{\Delta\}^r)] \cdot \{\Delta\}^{r+1} = \{F\} \quad (4.74)$$

Buradaki $\{\Delta\}^r$, r . iterasyonun çözümünü ifade etmektedir. Bu yüzden, direkt iterasyon metodunda K_{ij} katsayıları (dolayısıyla $K_{ij}^{\alpha\beta}$), bir önceki iterasyondan $\{\Delta\}^r$ çözümü kullanılarak hesaplanır ve $(r + 1)$. iterasyondaki sonuç, (4.74) denkleminin çözülmesi ile elde edilir [1].

$$\{\Delta\}^{r+1} = [K(\{\Delta\}^r)]^{-1} \cdot \{F\} \quad (4.75)$$

İterasyonun başlangıcında ($r = 0$ 'da) bir çözüm kabulü $\{\Delta\}^0$ yapılmaktadır. Örneğin, $\{\Delta\}^0 = \{0\}$ olması büyük çökme eğilimleri için non-lineer rijitlik matrisini lineere indirgemektedir. (4.75) denklemi, ilk iterasyonun $\{\Delta\}^1$ sonunda problemin lineer çözümünü verir. $\{\Delta\}^r$ ve $\{\Delta\}^{r+1}$ arasındaki farkın önceden belirlenmiş hata toleransı seviyesine düşene kadar iterasyonuna devam edilir (yani, (4.75) denklemi her iterasyon için çözülür). Hata kriteri formu;

$$\sqrt{\frac{\sum_{I=1}^N |\Delta_I^{r+1} - \Delta_I^r|^2}{\sum_{I=1}^N |\Delta_I^{r+1}|^2}} < \varepsilon \quad (10^{-3} \text{ olsun}) \quad (4.76)$$

Buradaki N , sonlu eleman ağında birincil bilinmeyenlerin (yani, genelleştirilmiş deplasmanların) toplam sayısıdır [1].

4.5.3.2 Newton-Raphson iterasyon metodu

Newton-Raphson iterasyon metodunda cebrik (4.73) denklemlerinin bilinen $\{\Delta\}^r$ çözümüne göre Taylor serisi açılımı esas alınmaktadır. Metodun tarifi için (4.73) denklemi aşağıdaki formda tekrar yazılır [1];

$$\{R\} = [K] \cdot \{\Delta\} - \{F\} = 0 \quad (4.77)$$

$\{R\}$, kalıntıyı (residual) ifade etmektedir. $\{R\}$ 'nin $\{\Delta\}^r$ 'ye göre açılımından aşağıdaki ifade elde edilir;

$$\begin{aligned} \{0\} &= \{R\} \\ &= \{R\}^r + \left[\frac{\partial \{R\}}{\partial \{\Delta\}} \right]^r \cdot (\{\Delta\}^{r+1} - \{\Delta\}^r) + \frac{1}{2!} \cdot \left[\frac{\partial^2 \{R\}}{\partial \{\Delta\}^2} \right]^r \cdot (\{\Delta\}^{r+1} - \{\Delta\}^r)^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.78)$$

veya

$$0 \approx \{R\}^r + [K^T]^r \cdot \{\delta\Delta\} + O \cdot (\{\delta\Delta\})^2 \quad (4.79)$$

$[K]^T$, tanjant rijitlik matrisidir (veya geometrik rijitlik matrisidir) [1];

$$[K^T]^r \equiv \left[\frac{\partial \{R\}}{\partial \{\Delta\}} \right] \quad \{\Delta\} = \{\Delta\}^r \text{ de hesaplanır.} \quad (4.80)$$

$$\{\delta\Delta\} = \{\Delta\}^{r+1} - \{\Delta\}^r \quad (4.81)$$

Çeşitli prensiplerle formüle edilmiş yapısal problemler için $[K]$ simetrik olmasa da $[K^T]$ simetrik bir matristir. (4.79) denkleminden;

$$\{\delta\Delta\} = -[K^T]^{-1} \cdot \{R\}^r = [K^T(\{\Delta\}^r)]^{-1} \cdot (\{F\} - [K(\{\Delta\}^r)] \cdot \{\Delta\}^r) \quad (4.82)$$

ve $(r + 1)$. iterasyondaki toplam çözüm aşağıdaki gibi ifade edilir [1];

$$\{\Delta\}^{r+1} = \{\Delta\}^r + \{\delta\Delta\} \quad (4.83)$$

(4.82) denkleminin iterasyon çözümü, (4.76) denklemindeki yakınsaklık kriteri sağlanana veya (4.82)-(4.83) denklemindeki kalıntının (residual) $\{R\}$ önceden seçilmiş belirli bir değerin altına inene kadar devam eder. Her iterasyonun başlangıcında tanjant rijitlik matrisindeki ve kalıntı (residual) vektöründeki, $\{\Delta\}$ 'nin mevcut en son çözümünün kullanılması gerekliliğine dikkat edilmelidir. Tanjant rijitlik matrisi sabit tutulup, kalıntı (residual) vektörü iterasyon boyunca yenilenirse, daha az hesap yükü elde edilir. Bu yaklaşıma düzenlenmiş Newton-Raphson metodu denir [1].

4.6 Süreklilik Formülasyonları

Lineer analizlerde deplasmanların ve rotasyonların küçük oldukları ve malzemenin lineer elastik davranış sergilediği kabul edilmektedir. Von Kármán birim-şekil-değiştirmeli bir tabakalı plak teorisini esas alan non-lineer formülasyonda sürekli ortam geometrisinin yükleme süresince değişmediği varsayılmaktadır. Küçük birim-şekil-değiştirmeler ve kısmen büyük çökmeler ve rotasyonlar için bu varsayımlar iyi sonuçlar elde edilmesini sağlar. Bu tür varsayımları esas alan elemanlar, tabakalı elemanlar olarak adlandırılmaktadır [1].

Fakat büyük deplasmanlar ve birim-şekil-değiştirmelerin olduğu problemlerde yapının geometrisi yükleme boyunca değişir. Bu tür problemlerde geometrik değişimler, bir sonraki yükleme artışı uygulanmadan önce hesaba katılmalıdır. Bu yüzden yapının üzerindeki toplam yük, adım adım artırılarak uygulanmalı ve geometri yükleme artışları arasında yenilenmelidir. Bu yaklaşımlar üzerine kurulan sonlu elemanlara, sürekli ortam elemanları adı verilmektedir [1].

Sürekli ortam problemlerinde deformasyon ve gerilme durumlarının belirlenmesinde kullanılan iki ayrı kademeli artım formülasyonu vardır [44]: (i) Total Lagrange formülasyonu ve (ii) Yenilenmiş Lagrange formülasyonu. Bu formülasyonlarda mevcut yük artımı için yapının geometrisi, bir önceki artımda elde edilen geometriden hesaplanır. Total Lagrange formülasyonunda bütün değerler sabit bir geometriyle ifade edilir. Deplasmanlar ve gerilme ifadelerindeki değişimler, referans geometriye göre belirlenir. Yenilenmiş Lagrange formülasyonunda yapının bir önceki artımdaki geometrisi, mevcut artımın çözümü ile yenilenir ve bu yenilenen geometri, bir sonraki artımın referans geometrisi olarak kullanılır. İki formülasyon için de denge durumuna ait kademeli artım denklemlerinin genel şekli aşağıdaki gibidir;

$$[K_L + K_{NL}] \cdot \{\delta U_i\} = \{R^{t+\delta t}\} - \{F_{i-1}^{t+\delta t}\} \quad (4.84)$$

i , mevcut iterasyon numarasını göstermektedir. $\{\Delta U\}$, kademeli artım deplasman vektörüdür. $\{R\}$, kalıntı (residual) kuvvet vektörüdür. $\{F\}$, dış yük vektörüdür. $[K_L]$ ve $[K_{NL}]$, sırasıyla lineer ve non-lineer rijitlik matrisleridir [1].

Total Lagrange formülasyonunda birim-şekil-değiştirme – deplasman bağıntıları, Green-Lagrange birim-şekil-değiştirme tansörü ve ikinci Piola-Kirchhoff gerilme tansörü S cinsinden yazılmıştır. t anındaki non-lineer rijitlik matrisi ve düğüm noktası gerilmeleri, deforme olmamış geometrideki bir eleman (Ω^e) üzerinde aşağıdaki denklemler ile ifade edilmiştir;

$$\begin{aligned} [K_L] &= \int_{\Omega^e} [B_L]^T \cdot [C] \cdot [B_L] \cdot dV \\ [K_{NL}] &= \int_{\Omega^e} [B_{NL}]^T \cdot [S] \cdot [B_{NL}] \cdot dV \\ \{F\} &= \int_{\Omega^e} [B_L]^T \cdot \{S\} \cdot dV \end{aligned} \quad (4.85)$$

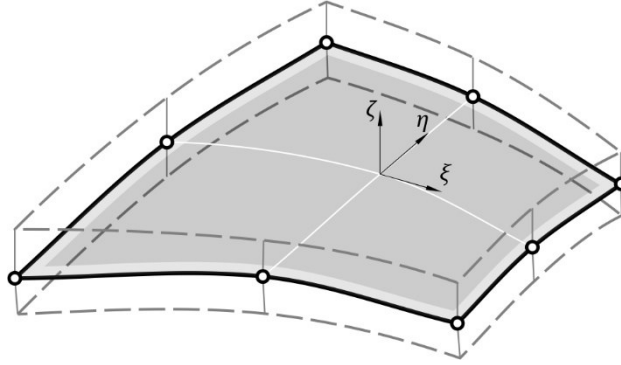
$[B_L]$ ve $[B_{NL}]$, lineer ve non-lineer birim-şekil-değiştirme – deplasman dönüşüm matrisleridir. $[C]$, bünye elastisite matrisidir. $[S]$, ikinci Piola-Kirchhoff gerilme bileşenleri matrisidir ve $\{S\}$, bu gerilmelerin vektörüdür [1].

Yenilenmiş Lagrange formülasyonunda en son elde edilen deforme olmuş geometri, bir sonraki geometrinin belirlenmesinde referans alınır. Düğüm koordinatları, yeni bir referans durumu oluşturmak için kademeli artım çözümü kullanılarak yenilenir. Böylece, non-lineer rijitlik ifadesinde kullanılan gerilmeler aynı zamanda da düğüm gerilme değerleri, Cauchy gerilmeleridir (τ). Eleman rijitlikleri ve kuvvet vektörleri aşağıdaki gibi ifade edilir [1];

$$\begin{aligned} [K_L] &= \int_{\Omega^e} [B_L]^T \cdot [C] \cdot [B_L] \cdot dV \\ [K_{NL}] &= \int_{\Omega^e} [B_{NL}]^T \cdot [\tau] \cdot [B_{NL}] \cdot dV \\ \{F\} &= \int_{\Omega^e} [B_L]^T \cdot \{\tau\} \cdot dV \end{aligned} \quad (4.86)$$

Ahmad - Zienkiewicz tarafından sürekli ortam formülasyonuna spesifik bir örnek olarak bozulmuş (dejenere) kabuk eleman ortaya konmuştur [45]. Eleman, birinci-mertebe kayma deformasyon plak/kabuk teorisinde (bk. Bölüm 3.5.2) kullanılan varsayımlar aynen kullanılarak üç-boyutlu (3D) elastisite denklemlerinden elde

edilmiştir. Bozulmuş (dejenere) üç-boyutlu (3D) kabuk eleman (Şekil 4.8) kısmen büyük çökmelere ve rotasyonlara olanak vermektedir [1].



Şekil 4.8. Bozulmuş üç-boyutlu (3D) kabuk eleman.

Sekiz düğümlü dikdörtgen plak elemanın deplasman ifadeleri ikinci-mertebe terimler de dahil edilerek aşağıdaki şekilde verilmektedir;

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) + z \cdot \theta_1(x, y) + z^2 \cdot \phi_1(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) + z \cdot \theta_2(x, y) + z^2 \cdot \phi_2(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (4.87)$$

Düzlem içi deplasmanlar (u, v) ve katsayılar (ϕ_1, ϕ_2) , aşağıdaki katsayıları içeren bi-lineer bir polinom ile genişletilmiştir;

$$\{ 1 \ x \ y \ xy \} \quad (4.88)$$

w ve rotasyonlar (θ_1, θ_2) da aşağıdaki katsayıları içeren polinomlar ile interpolasyon gerçekleştirilir [1];

$$\{ 1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^2 \ y \ xy^2 \} \quad (4.89)$$

Köşe düğümlerinde yedi serbestlik derecesi $(u, v, w, \theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2)$ ve kenar-ortası düğümlerinde üç serbestlik derecesi (w, θ_1, θ_2) mevcuttur. Elemanın 40 serbestlik derecesine vardır. Dolayısıyla eleman, QHD40 diye kodlanacaktır [1].

(4.85) ve (4.86) denklemlerinin eleman matrislerindeki hacim integrallerini hesaplayabilmek için Gauss kareleştirilmesi kullanılmaktadır. Kalınlık boyunca integrasyon tek tabaka içermektedir. Bünye matrisi $[C]$, tabakadan tabakaya değişiklik gösteren ve kalınlık doğrultusunda süreksiz bir fonksiyondur. Bu yüzden integrasyon her tabaka için ayrı ayrı gerçekleştirilmelidir. Tabaka sayısının artmasıyla hesap yükü de artmaktadır. İşlemin alternatifi ise kalınlık boyunca belirli integrasyon hesaplamak ve problemi iki-boyuta (2D) indirgemektir. Genel itibariyle Jacobian matrisi, lokal koordinatın (ξ, η, ζ) bir fonksiyonu olup; ζ da kalınlık koordinatıdır. Kalınlık/eğiklik oranının küçük olması durumunda ζ 'deki terimler ihmal edilebilir. Böylece, Jacobian

matrisi $[J]$, ζ 'den bağımsız hale gelir ve belirli integrasyon kullanılabilir. ζ terimleri, $[J]$ 'de kalması durumunda kalınlık boyunca Gaussian noktaları eklenmelidir [1].

QHD40 elemanının deplasman ifadesi (4.87) seçimiyle düzlem içi gerilmelerin iyi bir gösterimi mümkündür. Bu formülasyonda düzlem içi gerilmeler $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy})$, bünye denklemleri (4.68) ile hesaplanır ve şekilleri aşağıdaki gibidir [1];

$$\sigma_{xx} = f_1(z^2, x^2, y^2) \quad (4.90)$$

$$\sigma_{yy} = f_2(z^2, x^2, y^2) \quad (4.91)$$

$$\sigma_{xy} = f_3(z^2, x^2, y^2) \quad (4.92)$$

Düzleme dik gerilme bileşenleri $(\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$, (4.70)-(4.72) denge denklemleri ile hesaplanır ve şekilleri aşağıdaki gibidir [1];

$$\sigma_{xz} = f_4(z^3, x, y) \quad (4.93)$$

$$\sigma_{yz} = f_5(z^3, x, y) \quad (4.94)$$

$$\sigma_{zz} = f_6(z^3) \quad (4.95)$$

İnce kabuk yapılarında “eleman kenetlenmesinden” (element locking) kaçınmak için rijitlik katsayılarının düzleme dik kayma deformasyonu ile ilgili terimleri (yani, C_{44} , C_{45} ve C_{55} terimlerini) hesaplanırken indirgenmiş integrasyon kullanılır. Bu yüzden, bünye matrisi $[C]$, biri düzleme dik kayma modülsüz $[C]_b$ ve diğeri ise sadece düzleme dik kayma modüllü $[C]_s$ olmak üzere iki parçaya bölünür. $[C]_b$ içeren rijitlik katsayılarını hesaplamak için tam integrasyon ve $[C]_s$ içerenler için indirgenmiş integrasyon kullanılır [1, 46, 47].

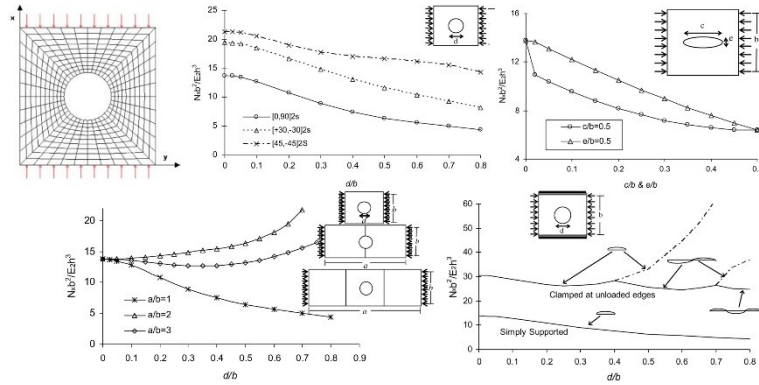
Kayma kenetlenmesinin önüne geçmek için statik ve dinamik problemlerde seçici indirgenmiş integrasyon kullanılmış olsa bile, bu genel bir kural gibi uygulanmamalıdır. Non-lineer problemlerde, non-lineer rijitlik katsayılarını doğru şekilde hesaplayabilmek için yüksek-mertebeden kareleştirme kullanmak gerekebilir. İntegrasyon şemalarının, mertebe artırımı ile yeteri etkinlik elde edilene kadar kullanılması tavsiye edilmektedir. Ancak paket program kullanımında, integrasyon kuralı seçmek mümkün olamamaktadır [1].

5. LİTERATÜR ile KIYAS ANALİZLERİ

Bu bölümde literatürden boşluklu tabakalı kompozit plakların burkulmasının incelendiği iki ayrı çalışma için gerçekleştirilen lineer kritik-burkulma-yükü analizlerinin yeniden sayısal olarak incelemesi ve karşılaştırmaları yer almaktadır.

5.1 [12] Çalışması için Yapılan Analizler

Ghannadpour S., Najafi A. & Mohammadi B. tarafından dört kenarından basit mesnetli tabakalı kompozit dikdörtgen plakların boşluklu olma durumunda burkulma davranışı üzerine sonlu eleman yöntemi kullanılarak çalışılmıştır. Çeşitli boşluk boyut ve şekilleri, plak kenar oranları ve sınır koşullarına bağlı etkilere ait bulgular elde edilmiştir.

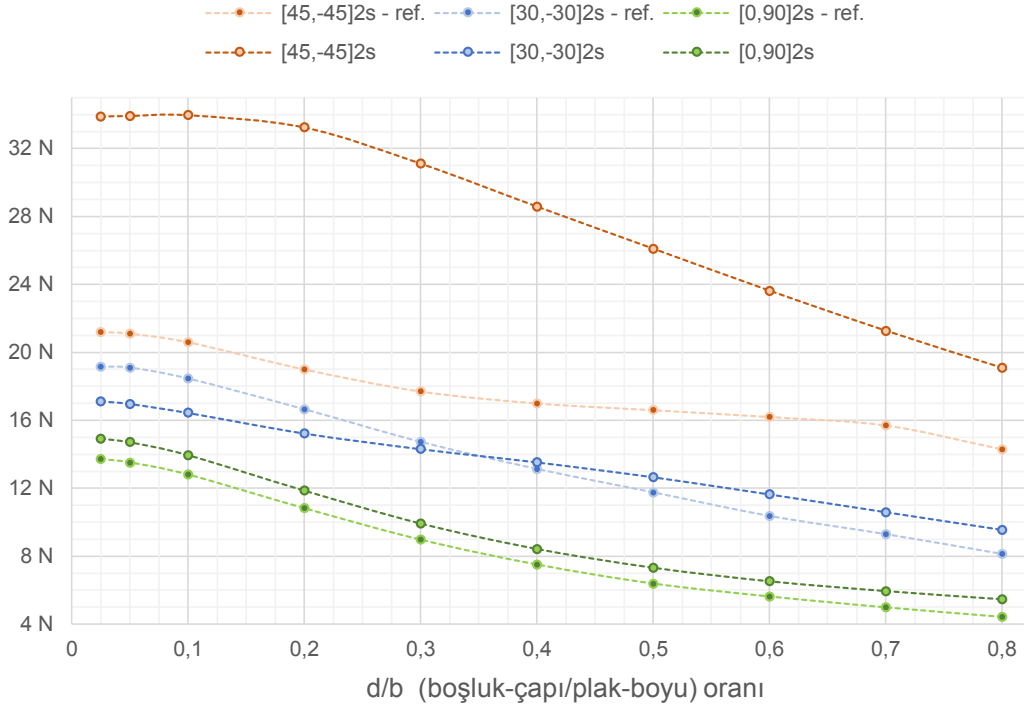


Şekil 5.1. [12] çalışmasına ait görsel

Bu değerler içerisinde dairesel-boşluk-çapı/plak-boyu (d/b) oransal değişiminin kritik-burkulma-yüküne olan etkisine ait sonuçlar¹ ile aynı koşullar için yapılan karşılaştırma analiz sonuçları, Şekil 5.2 ve Çizelge 5.1'de yer almaktadır.

[45,-45]_{2s} tabaka yönlenmesinde ortalama %60'a varan rölatif hata çıkmaktadır. Fakat [30,-30]_{2s} ve [0,90]_{2s} tabaka yönlenmelerinde bu oranlar ortalama %1 ve %13 mertebesinde dir.

¹ Yayındaki değerlerin tamamı rakamsal olarak sunulmadığı için bir kısmı grafik okumalarıyla elde edilmiştir.



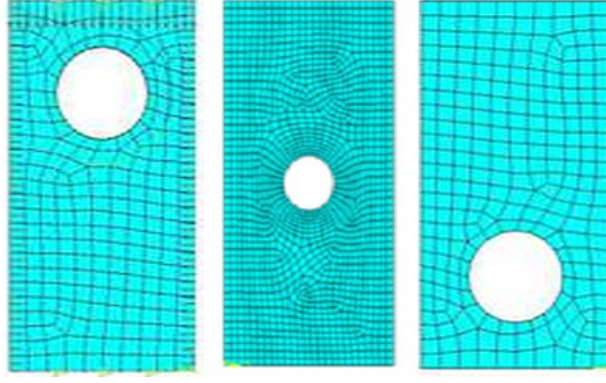
Şekil 5.2. [12] çalışması referans ve karşılaştırma analizi grafiği

Çizelge 5.1. [12] çalışması referans ve karşılaştırma analizi değerleri

d/b	Referans Değerler (N) [12]			Karşılaştırma Analizleri (N)			Rölatif Hata %'leri		
	[45,-45] _{2s}	[30,-30] _{2s}	[0,90] _{2s}	[45,-45] _{2s}	[30,-30] _{2s}	[0,90] _{2s}	[45,-45] _{2s}	[30,-30] _{2s}	[0,90] _{2s}
0,025	21,2	19,1	13,7	33,9	17,1	14,9	59,9%	-10,5%	8,9%
0,05	21,1	19,1	13,5	33,9	17,0	14,7	60,7%	-11,1%	8,9%
0,1	20,6	18,5	12,8	34,0	16,4	14,0	64,9%	-10,9%	9,1%
0,2	19,0	16,6	10,8	33,2	15,2	11,9	75,0%	-8,5%	9,7%
0,3	17,7	14,7	9,0	31,1	14,3	9,9	75,8%	-2,8%	10,7%
0,4	17,0	13,1	7,5	28,6	13,5	8,4	68,1%	3,0%	12,2%
0,5	16,6	11,8	6,4	26,1	12,7	7,3	57,2%	7,6%	14,6%
0,6	16,2	10,4	5,6	23,6	11,6	6,5	45,9%	12,3%	15,8%
0,7	15,7	9,3	5,0	21,3	10,6	5,9	35,5%	13,9%	19,1%
0,8	14,3	8,1	4,4	19,1	9,6	5,5	33,5%	17,4%	23,2%

5.2 [13] Çalışması için Yapılan Analizler

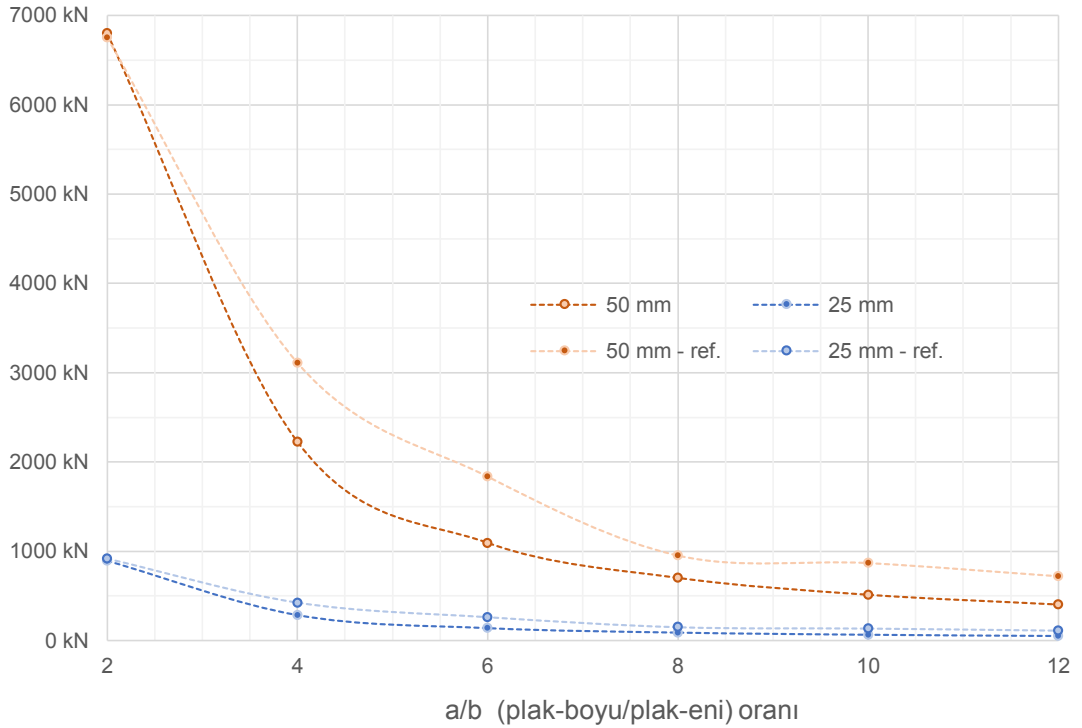
Joshi A., Reddy P.R., Krishnareddy V.N. & Sushma C.V. tarafından karşılıklı iki kenarı ankastre mesnetli, dairesel boşluklu ve iki doğrultuda yükleme durumundaki dikdörtgen plaklarda ANSYS® sonlu eleman paket programı ile burkulma yükünün belirlenmesi üzerine çalışılmıştır. Boşluk pozisyonunu plak-boy/en (a/b) oranı ve plak-en/kalınlık (b/t) oranları değişimi için burkulma değerleri elde edilmiştir.



Şekil 5.3. [13] çalışmasına ait görsel

Bu değerler içerisinde boşluğun plağın ortasında yer aldığı durumda plak-boy/en (a/b) oransal değişiminin kritik-burkulma-yüküne olan etkisine ait sonuçlar¹ ile aynı koşullar için yapılan karşılaştırma analiz sonuçları, Şekil 5.4 ve Çizelge 5.2'de yer almaktadır.

Kalınlığın 50 mm olması durumunda ortalama %30, 25 mm olması durumunda ise ortalama %38 rölatif hata çıkmaktadır.



Şekil 5.4. [13] çalışması referans ve karşılaştırma analizi grafiği

¹ Yayındaki değerler rakamsal olarak sunulmadığı için tamamı grafik okumalarıyla elde edilmiştir.

Çizelge 5.2. [13] çalışması referans ve karşılaştırma analizi değerleri

a/b	Referans Değerler (kN) [13]		Karşılaştırma Analizleri (kN)		Rölatif Hata %'leri	
	t: 50 mm	t: 25 mm	t: 50 mm	t: 25 mm	t: 50 mm	t: 25 mm
2	6.751,4	915,3	6.799,8	891,9	0,7%	-2,6%
4	3.110,7	424,9	2.226,0	284,7	-28,4%	-33,0%
6	1.836,1	262,3	1.093,3	139,1	-40,5%	-47,0%
8	952,2	150,3	700,9	89,1	-26,4%	-40,7%
10	867,5	135,2	511,7	65,0	-41,0%	-51,9%
12	719,9	112,0	402,0	51,1	-44,2%	-54,4%

6. ANALİZ ve BULGULAR

Bu bölümde analiz için tasarlanan plak tipleri, tabaka yönlenme koşulları, boşluk tipleri, materyal özellikleri ve sınır şartları tarif edilip; ardından da en yalın haliyle elde edilen analiz bulguları sunulmaktadır.

Çalışmada materyal, mesnetlenme ve yükleme sınır koşulları sabit olmak üzere, 3 kenar formu, 6 boşluk tipi ve 14 tabaka yönlenme koşulu ile analiz kombinasyonları oluşturularak, ANSYS® [6] sonlu eleman analiz paket programı ile 294 adet lineer kritik-burkulma-yükü analizi gerçekleştirilmiştir.

6.1 Belirlenen Koşullar

Analiz için tasarlanan kompozit plak kalınlığı 36 mm ve plağın komşu köşeleri arasındaki mesafeleri 1'er m olarak belirlenmiş. Plağın karşılıklı iki kenarı sabit mesnetli diğer iki kenarı ise serbesttir ve yükleme tek eksenli olarak sadece mesnetli kenarlara dik doğrultudadır. Serbest olan kenarların formları ise eğrisel geniş "()", düz "[]" ve eğrisel dar ") (" olmak üzere 3 tiptedir (Şekil 6.2).

Materyal olarak, Çizelge 6.1'de mekanik özellikleri verilen, ortotropik Epoxy-Carbon tabakalar kullanılmıştır.

Çizelge 6.1. Epoxy-Carbon tabaka mekanik özellikleri

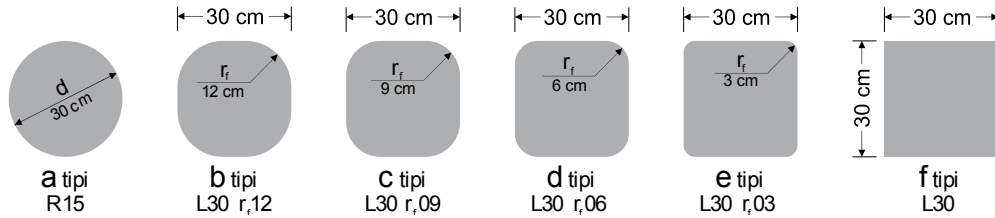
Mekanik Özellikler	Değerler
E_1	121 GPa
$E_2 = E_3$	8,6 GPa
$G_{12} = G_{13}$	4,7 GPa
G_{23}	3,1 GPa
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,27
ν_{23}	0,40

Tabaka yönlenmeleri ise Çizelge 6.2'deki değerler doğrultusunda 14 gruptan oluşmaktadır. Kullanılan tabaka yönlenme ifadelerinin uzunluğundan dolayı grafiklerde ve metin içerisinde ilgili yerlerde Çizelge 6.2'de verilen bu grup numaraları ile belirtilecektir. Buradaki, N ortotropik katman adedini, t_L katman kalınlığını, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$ katman birincil doğrultularının x eksenine ile yaptığı yönlenme açılarını ifade etmektedir.(Şekil 6.3).

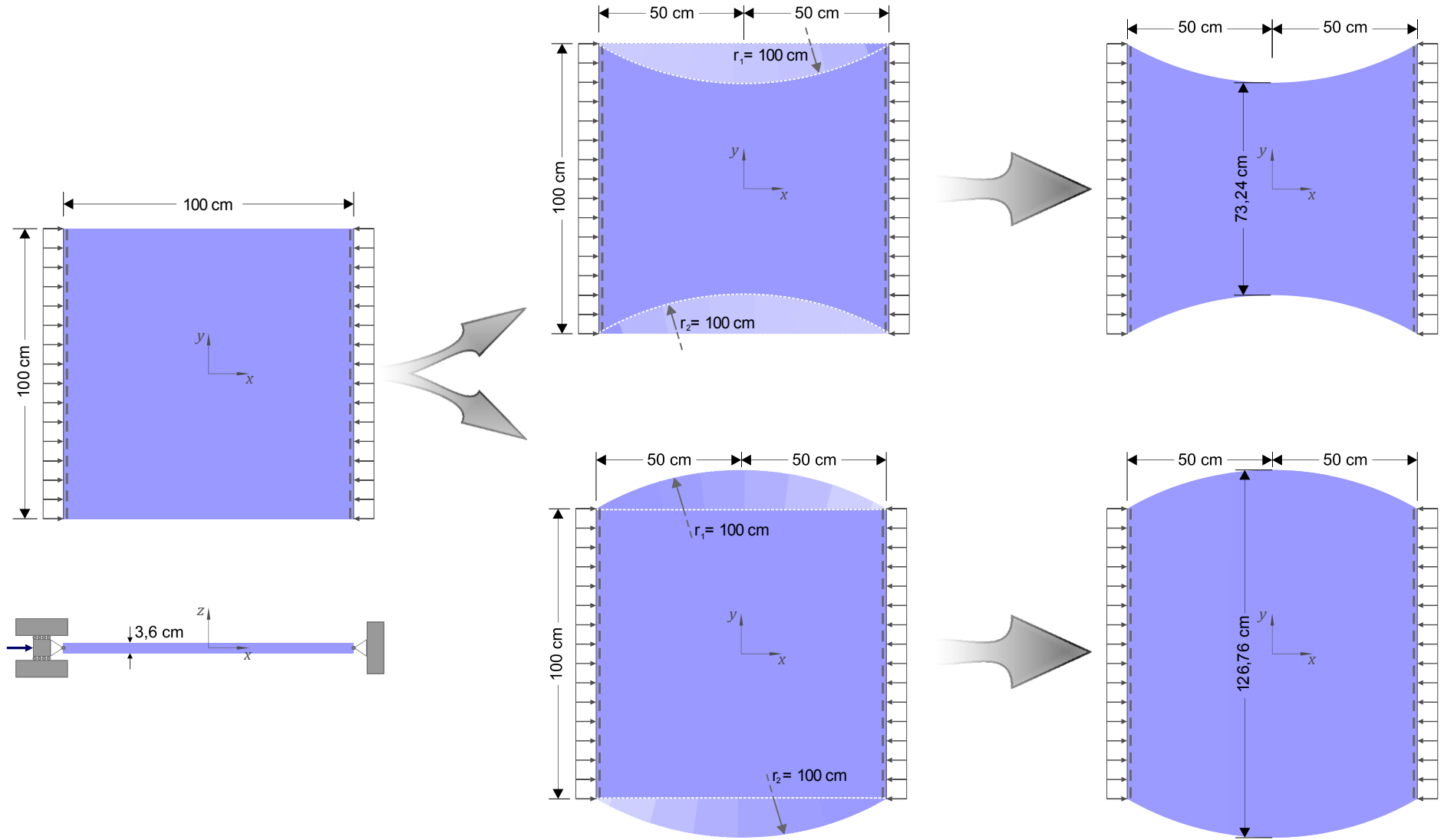
Çizelge 6.2. Tabakalanma gruplarına ait adet, kalınlık, açı bilgileri

	[0/18/-18/36/-36/54/-54/72/-72/90]s	[0/20/-20/40/-40/60/-60/80/-80]s	[0/22,5/-22,5/45/-45/67,5/-67,5/90]s	[0/24/-24/48/-48/72/-72/90]o.s	[0/30/-30/60/-60/90]s	[0/36/-36/72/-72]s	[0/40/-40/80/90]o.s	[0/45/-45/90]s	[0/60/-60]s	[0/72/-72/144/-144]	[0/90]s	[-60/60]s	[45/-45]s	[-30/30]s
Grup	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$N_{(adet)}$	20	18	16	15	12	10	9	8	6	5	4	4	4	4
t_L mm	1,8	2	2,25	2,4	3	3,6	4	4,5	6	7,2	9	9	9	9
t_{toplam} mm	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
θ_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-60	45	-30
θ_2	18	20	22,5	24	30	36	40	45	60	72	90	60	-45	30
θ_3	-18	-20	-22,5	-24	-30	-36	-40	-45	-60	-72	90	60	-45	30
θ_4	36	40	45	48	60	72	80	90	-60	144	0	-60	45	-30
θ_5	-36	-40	-45	-48	-60	-72	90	90	60	-144				
θ_6	54	60	67,5	72	90	-72	80	-45	0					
θ_7	-54	-60	-67,5	-72	90	72	-40	45						
θ_8	72	80	90	90	-60	-36	40	0						
θ_9	-72	-80	90	-72	60	36	0							
θ_{10}	90	-80	-67,5	72	-30	0								
θ_{11}	90	80	67,5	-48	30									
θ_{12}	-72	-60	-45	48	0									
θ_{13}	72	60	45	-24										
θ_{14}	-54	-40	-22,5	24										
θ_{15}	54	40	22,5	0										
θ_{16}	-36	-20	0											
θ_{17}	36	20												
θ_{18}	-18	0												
θ_{19}	18													
θ_{20}	0													

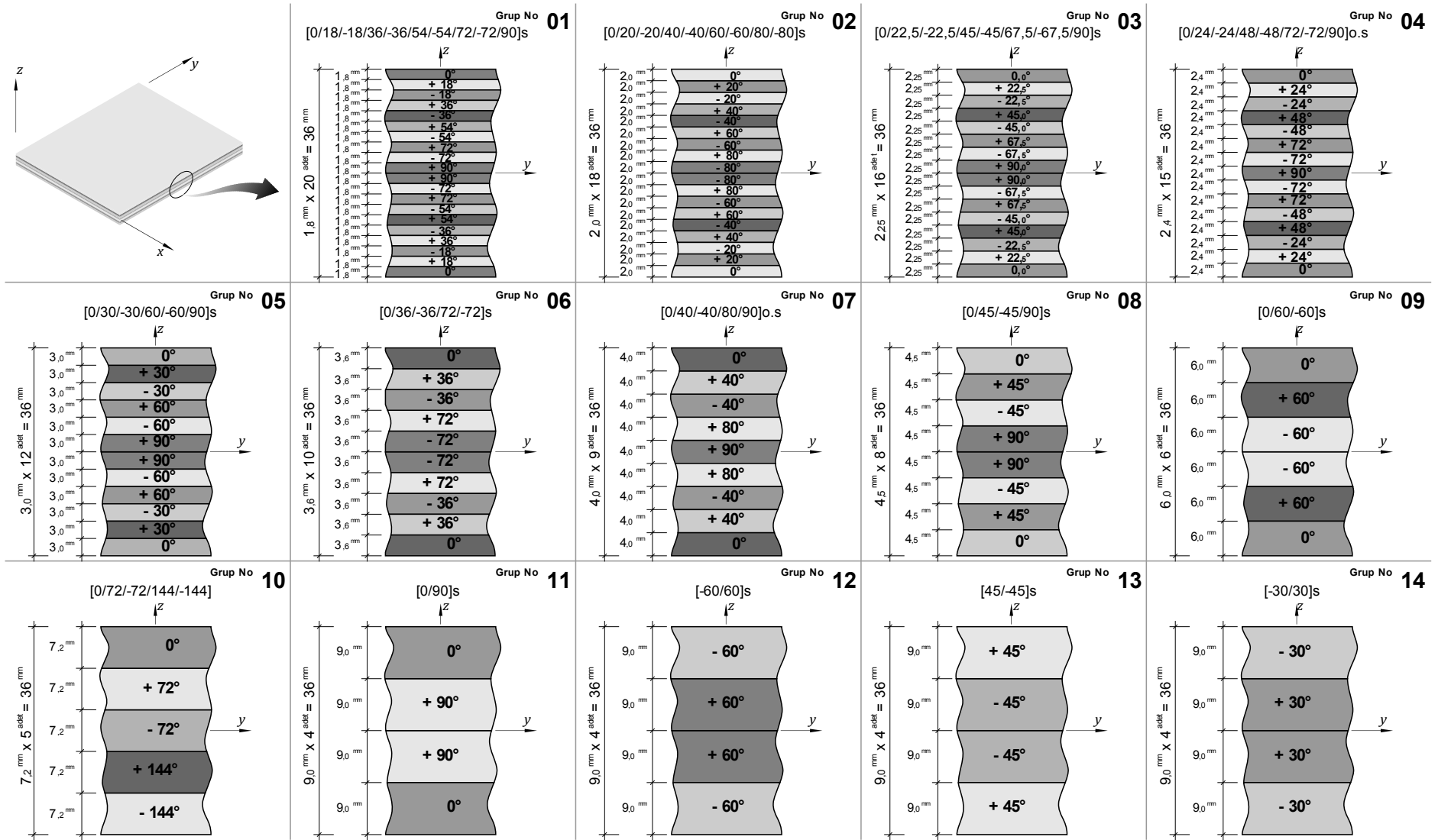
Tabakaların orta notasında oluşturulacak boşluk formları için de 6 farklı tip belirlenmiştir. Bunlar 30 × 30 cm kare, köşe yuvarlama yarıçapları $r_f = 3, 6, 9, 12$ cm olan 4 ayrı dörtgen formu ve yarıçapı $r = 15$ cm olan daireden meydana gelmektedir (Şekil 6.1).



Şekil 6.1. Boşluk formlarının ölçü ve kısa adları



Şekil 6.2. Plaklara ait ölçü, kenar formu ve sınır koşulları



Şekil 6.3. Tabakalanma gruplarına ait adet, kalınlık ve yönlenme açısı bilgileri

6.2 Bulgular

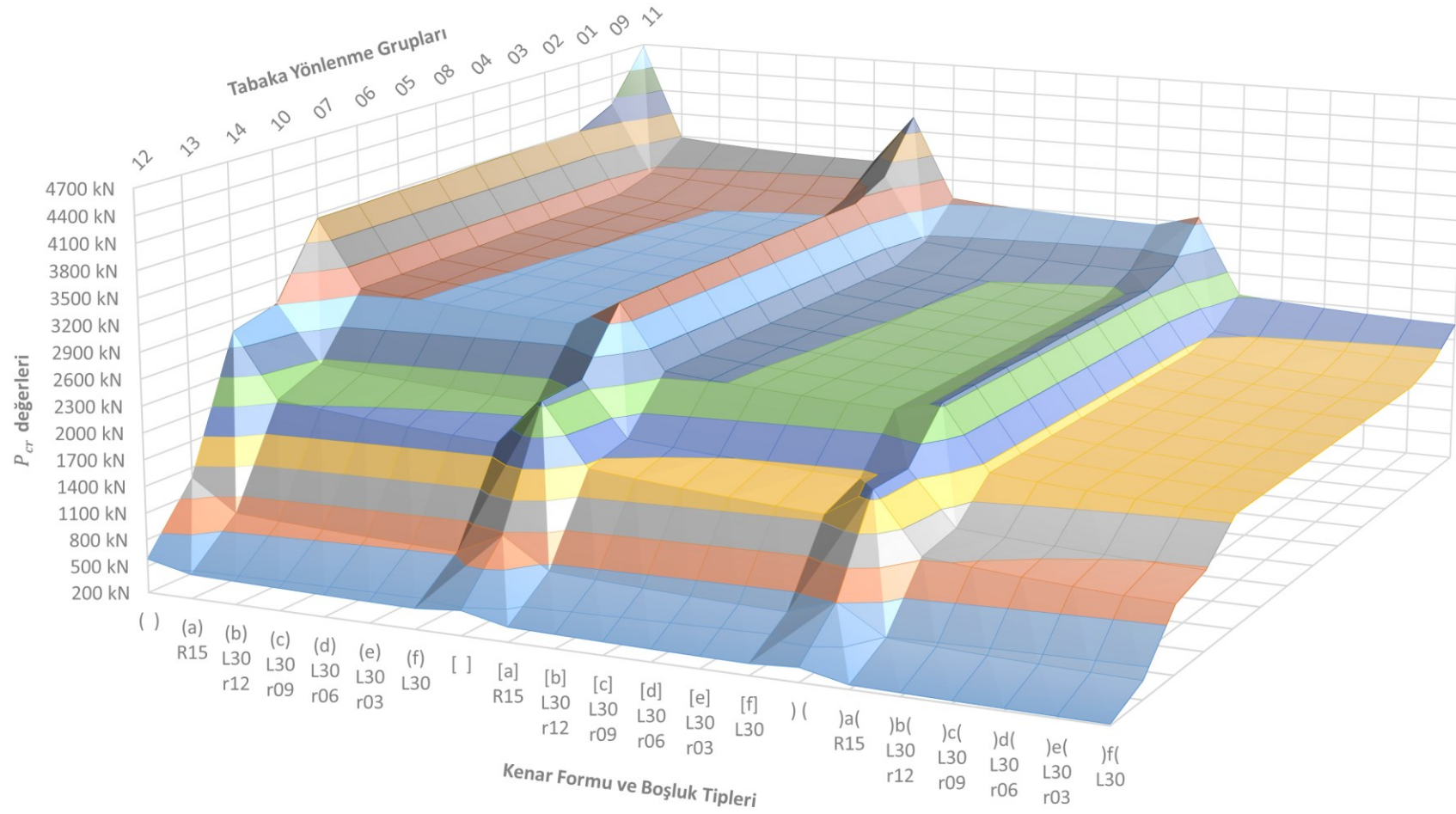
Analizler neticesinde elde edilen lineer kritik-burkulma-yükü (P_{cr}) değerleri [N] cinsinden Çizelge 6.3'te verilmektedir. Değerlerin bütününün oluşturduğu üç-boyutlu (3D) yüzey grafiği¹ Şekil 6.4'te verilmektedir.

Elde edilen bu verileri farklı perspektiflerden değerlendirebilmek adına sonuçlar çeşitli grafik gösterimlerinden faydalanılarak görselleştirilmiştir. İncelemeler, (i) tabaka yönlenmelerine, (ii) plak kenar formlarına ve (iii) boşluk tiplerine göre olmak üzere 3 başlık altında toplanmıştır.

¹ Grafikte düşey eksen (P_{cr}) değerlerini; yatay eksen kenar ve boşluk tipini; derinlik eksenini ise tabaka yönlenme gruplarını ifade etmektedir.

Çizelge 6.3. Elde edilen lineer kritik-burkulma-yükü (P_{cr}) değerleri [N]

[N]	[0/18/-18/36/-36/54/-54/72/-72/90]s	[0/20/-20/40/-40/60/-60/80/-80]s	[0/22.5/-22.5/45/-45/67.5/-67.5/90]s	[0/24/-24/48/-48/72/-72/90]o.s	[0/30/-30/60/-60/90]s	[0/36/-36/72/-72]s	[0/40/-40/80/90]o.s	[0/45/-45/90]s	[0/60/-60]s	[0/72/-72/144/-144]	[0/90]s	[60/60]s	[45/-45]s	[30/30]s
Grup	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
()	3.802.026,6	3.795.800,2	3.787.679,7	3.783.011,9	3.763.958,0	3.751.406,0	3.746.663,0	3.764.919,6	4.025.618,7	2.912.295,5	4.670.210,8	582.033,3	1.285.686,9	2.767.408,8
(a) R15	3.003.290,9	2.998.511,0	2.992.291,3	2.988.593,4	2.974.266,8	2.964.979,6	2.962.761,8	2.975.929,6	3.142.444,2	2.253.748,0	3.478.941,3	470.874,6	940.761,7	2.033.373,3
(b) L30 r12	2.954.739,4	2.950.021,2	2.943.889,4	2.940.262,9	2.926.208,8	2.917.303,8	2.915.199,0	2.929.108,5	3.100.140,4	2.209.058,2	3.435.767,6	460.407,6	910.410,9	1.980.207,0
(c) L30 r09	2.915.235,6	2.910.580,6	2.904.537,3	2.900.983,0	2.887.199,0	2.878.686,6	2.876.713,2	2.891.455,9	3.068.184,8	2.172.369,7	3.406.552,6	451.276,0	884.473,7	1.932.552,2
(d) L30 r06	2.881.672,1	2.877.053,0	2.871.066,5	2.867.568,8	2.854.000,6	2.845.867,5	2.844.070,6	2.859.717,7	3.042.917,8	2.139.365,2	3.385.539,8	443.414,4	860.277,1	1.892.546,2
(e) L30 r03	2.854.902,6	2.850.324,0	2.844.397,8	2.840.958,1	2.827.603,1	2.819.839,2	2.818.188,3	2.834.755,1	3.024.382,8	2.112.762,8	3.371.501,5	436.596,1	839.446,7	1.856.692,8
(f) L30	2.837.104,4	2.832.553,4	2.826.669,5	2.823.274,4	2.810.077,3	2.802.610,0	2.801.016,9	2.818.452,9	3.013.991,0	2.093.881,8	3.365.641,4	432.075,0	824.909,2	1.833.240,6
[]	3.151.921,4	3.146.592,8	3.139.615,5	3.135.656,6	3.118.938,7	3.107.418,5	3.101.340,4	3.116.738,5	3.350.213,3	2.401.225,0	3.983.243,6	477.597,5	1.071.372,0	2.356.768,4
[a] R15	2.393.191,5	2.389.295,9	2.384.223,2	2.381.288,5	2.369.518,1	2.362.037,6	2.359.374,8	2.372.075,8	2.539.745,7	1.785.836,7	2.955.961,5	365.960,0	738.900,4	1.656.860,8
[b] L30 r12	2.346.587,4	2.342.755,0	2.337.771,4	2.334.902,0	2.323.404,7	2.316.282,4	2.313.824,3	2.327.057,0	2.497.800,8	1.744.720,8	2.912.282,5	355.836,5	710.640,9	1.605.284,8
[c] L30 r09	2.308.822,5	2.305.044,8	2.300.139,3	2.297.329,7	2.286.081,1	2.279.311,7	2.277.053,9	2.290.918,4	2.465.970,3	1.710.647,1	2.882.094,0	347.216,8	686.326,8	1.561.131,8
[d] L30 r06	2.277.014,2	2.273.281,4	2.268.441,5	2.265.684,5	2.254.656,6	2.248.219,9	2.246.158,9	2.260.664,2	2.440.037,9	1.681.370,1	2.858.311,9	339.837,1	664.881,9	1.522.811,4
[e] L30 r03	2.251.130,0	2.247.437,5	2.242.656,1	2.239.946,4	2.229.118,4	2.222.992,1	2.221.121,2	2.236.256,5	2.419.794,1	1.656.689,6	2.840.433,3	333.653,7	646.248,1	1.488.880,3
[f] L30	2.233.349,4	2.229.680,1	2.224.934,8	2.222.257,0	2.211.569,4	2.205.689,0	2.204.000,2	2.219.693,0	2.407.159,4	1.638.400,8	2.830.757,1	329.171,5	631.960,2	1.463.403,6
) (2.375.401,2	2.371.405,9	2.366.160,5	2.363.159,8	2.350.458,6	2.341.381,3	2.336.318,7	2.346.936,6	2.516.895,4	1.806.781,2	2.973.374,3	360.905,7	812.755,7	1.796.213,5
)a(R15	1.632.418,3	1.629.798,3	1.626.385,3	1.624.412,7	1.616.479,0	1.611.427,5	1.609.558,8	1.618.237,6	1.731.521,3	1.212.018,5	2.022.178,2	248.925,7	493.443,6	1.128.049,0
)b(L30 r12	1.587.779,7	1.585.220,3	1.581.891,6	1.579.977,8	1.572.294,2	1.567.550,1	1.565.867,6	1.574.919,6	1.690.069,0	1.173.804,9	1.978.744,7	239.336,9	468.129,4	1.080.965,5
)c(L30 r09	1.551.841,3	1.549.332,9	1.546.076,1	1.544.214,2	1.536.751,8	1.532.298,5	1.530.803,8	1.540.275,3	1.657.924,0	1.142.590,9	1.946.565,2	231.534,5	447.081,1	1.041.373,8
)d(L30 r06	1.522.204,4	1.519.736,9	1.516.538,6	1.514.720,5	1.507.447,1	1.503.257,2	1.501.930,5	1.511.827,0	1.631.938,1	1.116.502,6	1.920.805,1	224.955,2	428.963,7	1.007.065,1
)e(L30 r03	1.498.936,7	1.496.507,0	1.493.361,8	1.491.582,5	1.484.476,8	1.480.519,2	1.479.351,5	1.489.625,7	1.611.744,7	1.095.448,4	1.900.470,5	219.825,8	414.089,9	978.008,0
)f(L30	1.483.727,9	1.481.315,7	1.478.198,7	1.476.444,0	1.469.451,6	1.465.688,8	1.464.655,0	1.475.352,0	1.600.177,8	1.080.773,6	1.890.454,4	216.456,4	403.486,7	958.628,3

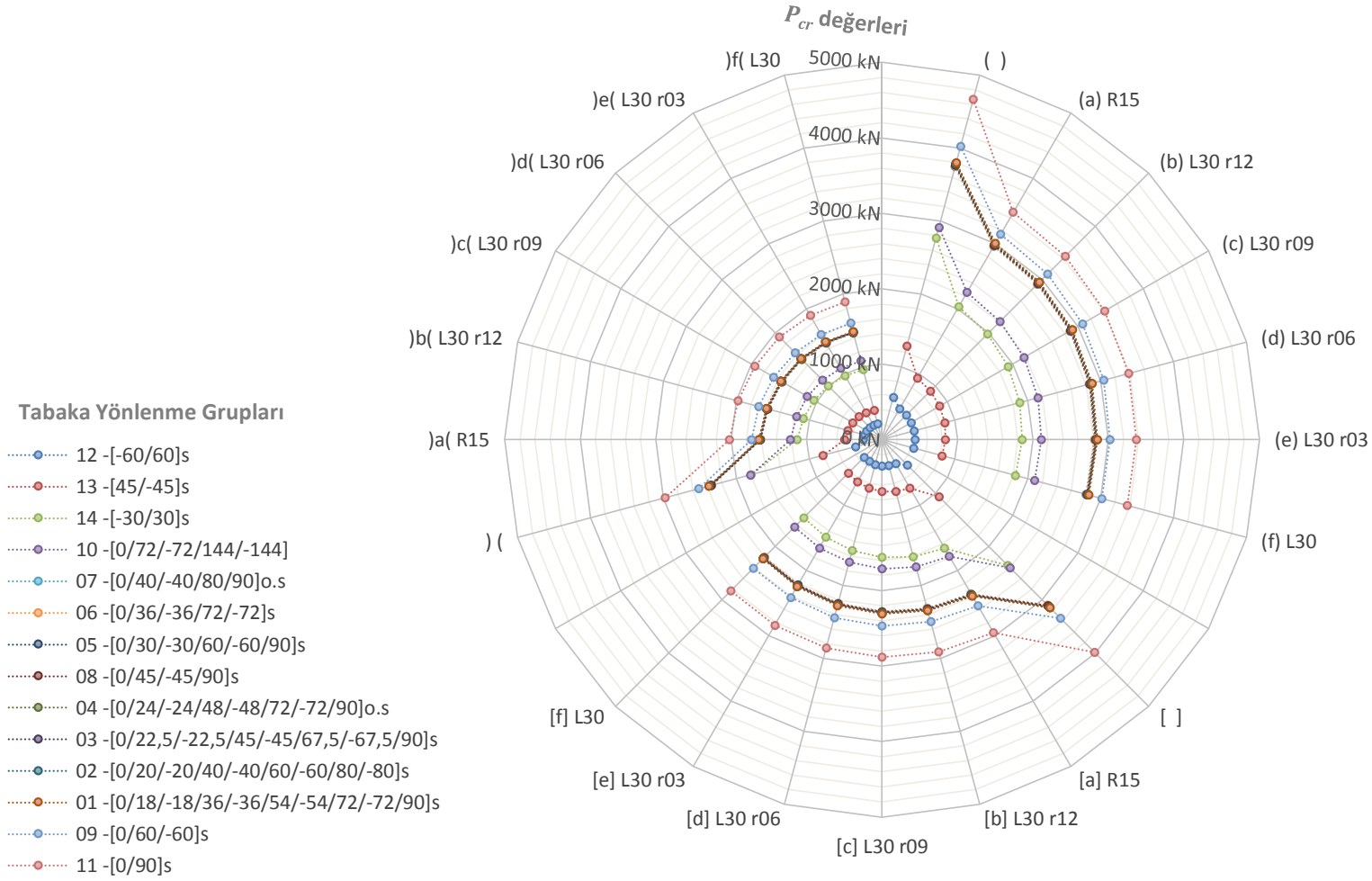


Şekil 6.4. P_{cr} değerlerinin oluşturduğu üç-boyutlu (3D) yüzey grafiği [kN]

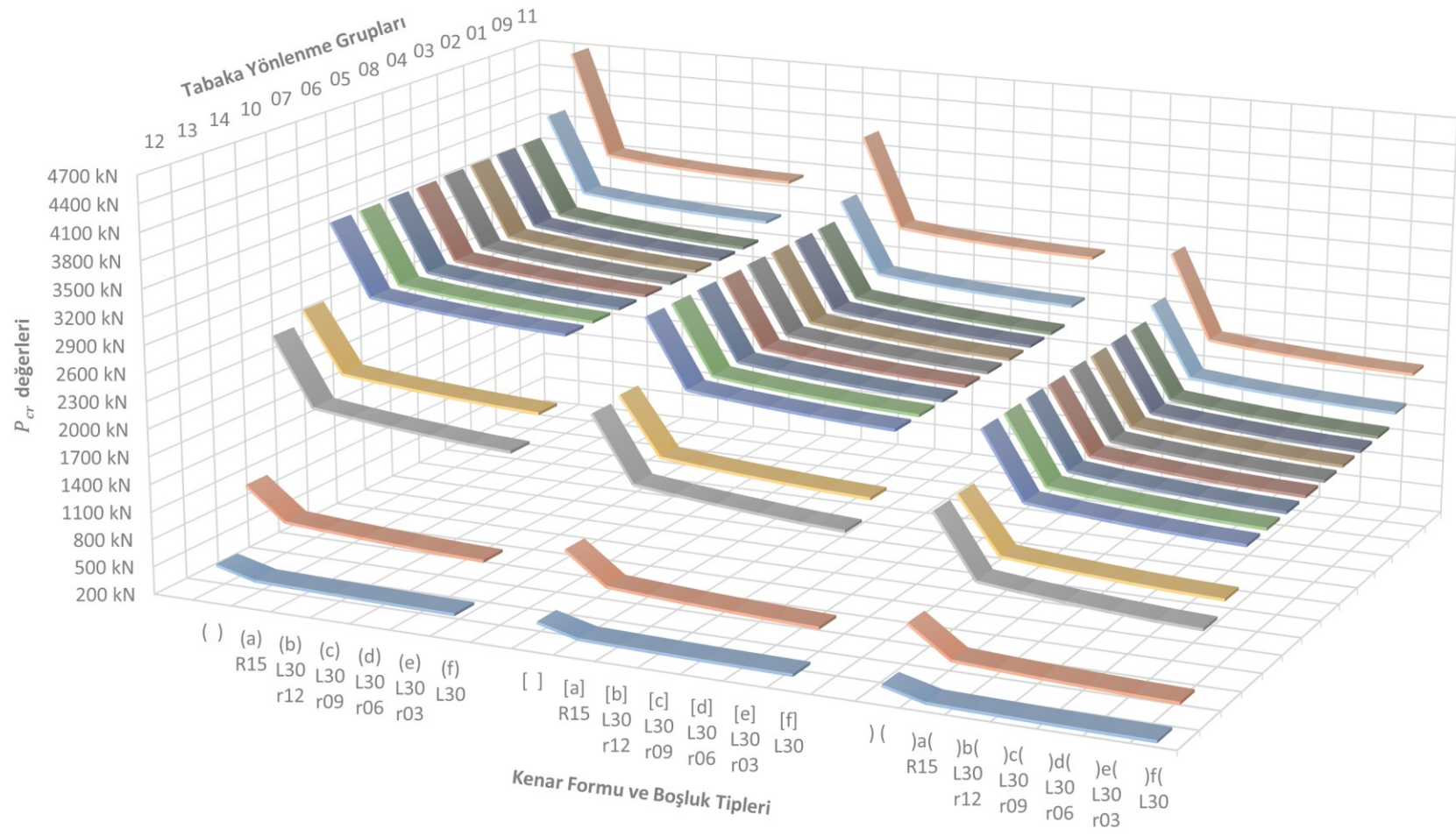
6.2.1 Tabaka yönlenme etkisi

Oluşturulan analiz kombinasyon dizileri içerisinde tabaka yönlenmelerine göre lineer kritik-burkulma-yük (P_{cr}) değişimleri Şekil 6.5 - Şekil 6.9'daki grafikler üzerinde incelenecek olursa;

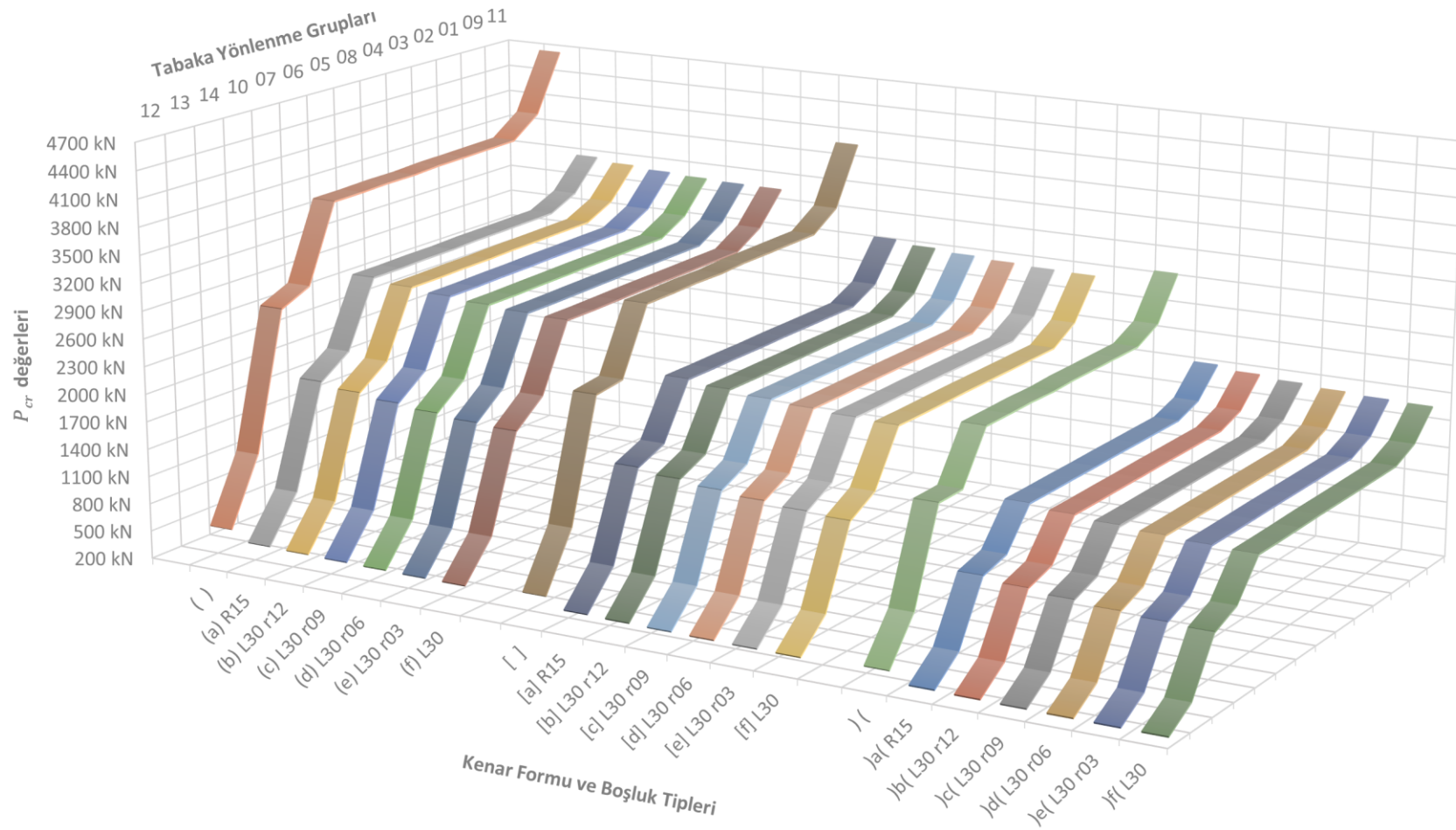
- Tabaka yönlenmesine bağlı değer değişiminde 3 kenar formu için de büyüklüklerin farklı olmasına karşın oransal **azalmalarda benzer eğimler** ortaya çıkmaktadır (Şekil 6.8).
- **1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 nolu** tabaka yönlenmeleri, **11 nolu** tabaka yönlenmesine göre **ortalama %19** değer kaybı ve grafiklerde neredeyse **çakışık** ve **%1** oransal azalma farkı ile **en düşük eğimli** değerleri oluşturmaktadır (Şekil 6.8).
- **9 nolu** tabaka yönlenmesi, **1,...,8 nolu** tabaka yönlenmelerinin toplandığı bölgeden küçük bir farkla ayrılmaktadır (Şekil 6.6).
- **11 nolu** tabaka yönlenmesi, **en büyük değerler** kümesini oluşturmaktadır (Şekil 6.6).
- **12 nolu** tabaka yönlenmesi, 11 nolu tabaka yönlenmesine göre ortalama **%88** değer kaybı ile **en düşük değerleri** vermektedir (Şekil 6.8). Ayrıca, boşluksuzdan boşluklu plaklara geçişte gerçekleşen değer düşüş eğilimleri diğer tabaka yönlenmelerine kıyasla oldukça azdır (Şekil 6.6).



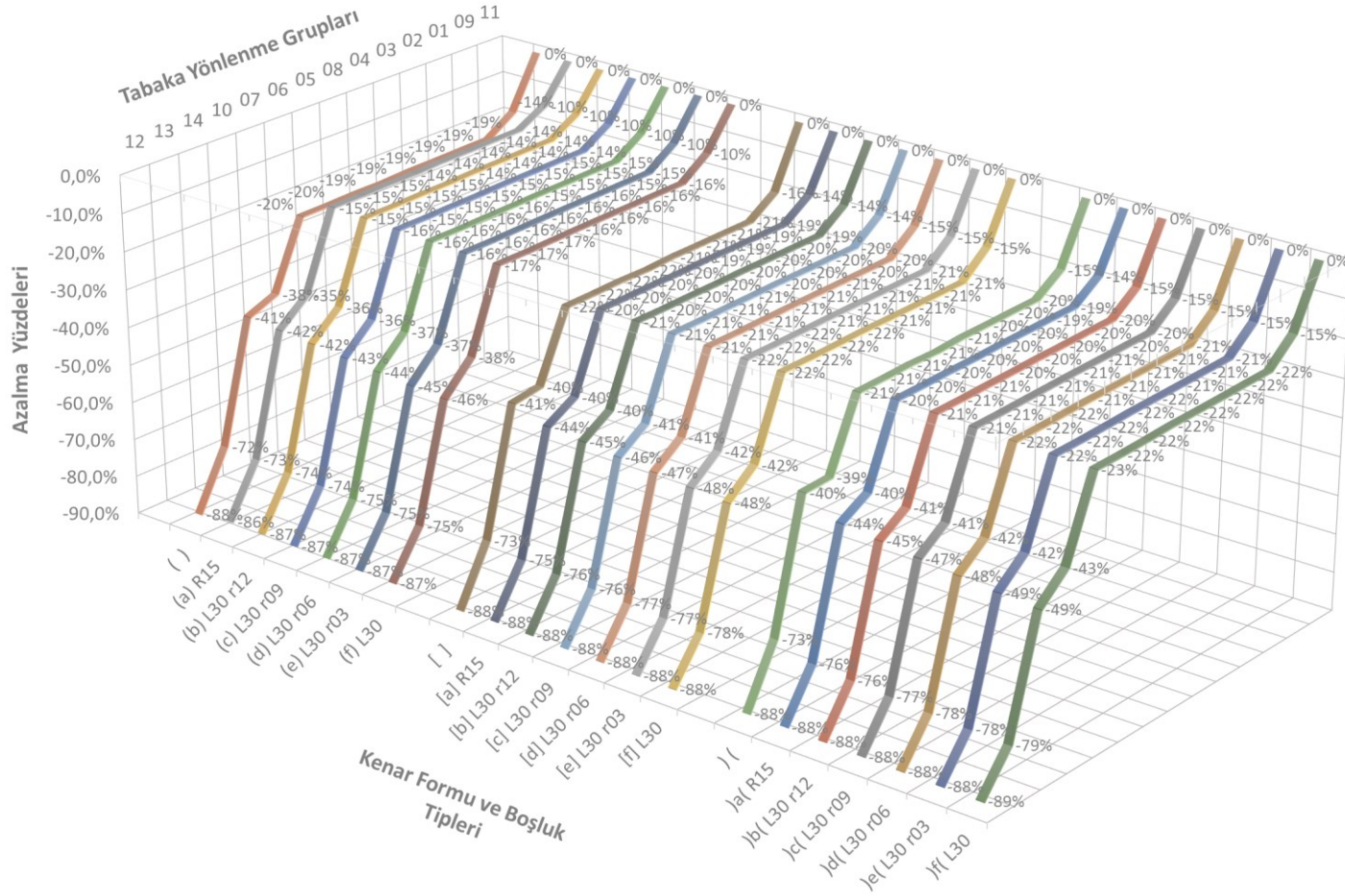
Şekil 6.5. Boşluk tipi değişimine göre P_{cr} değerleri [kN] – radar grafik



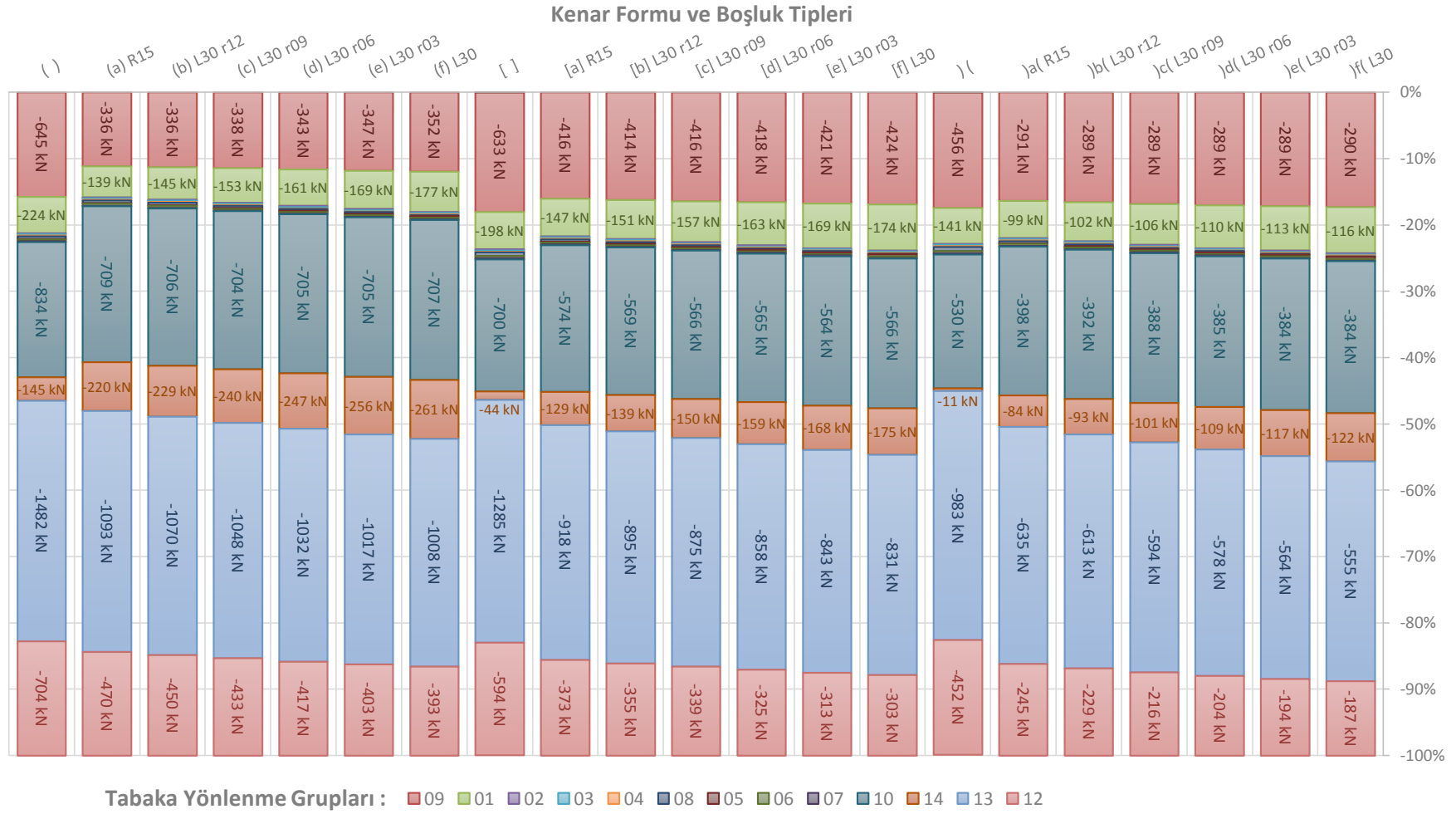
Şekil 6.6. Boşluk tipi değişimine göre P_{cr} değerleri [kN] – 3D grafik



Şekil 6.7. Tabaka yönlenme gruplarına göre P_{cr} değerleri [kN] – 3D grafik



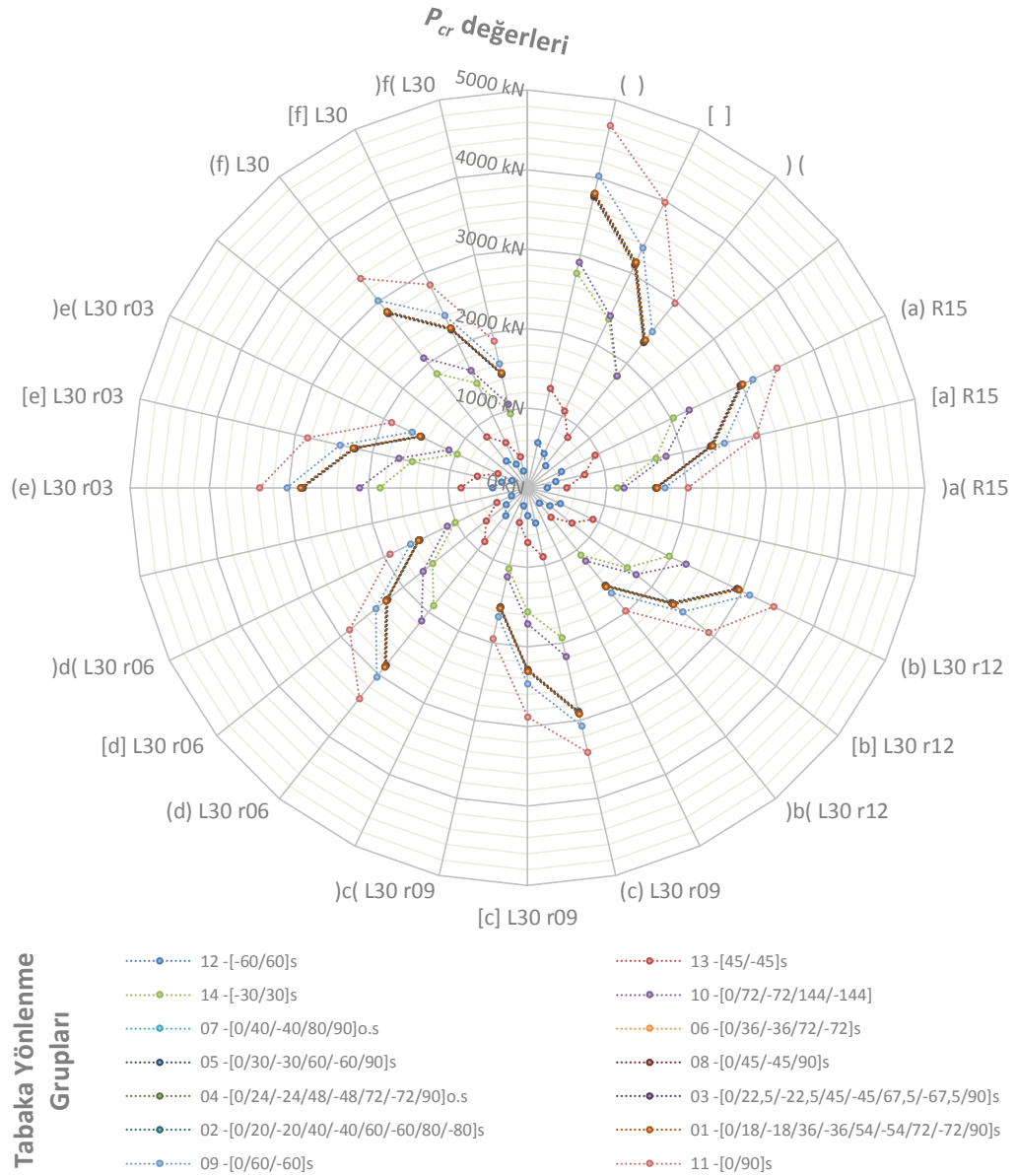
Şekil 6.8. Tabaka yönlenme gruplarına göre P_{cr} değerlerinin oransal [%] değişimi – 3D grafik



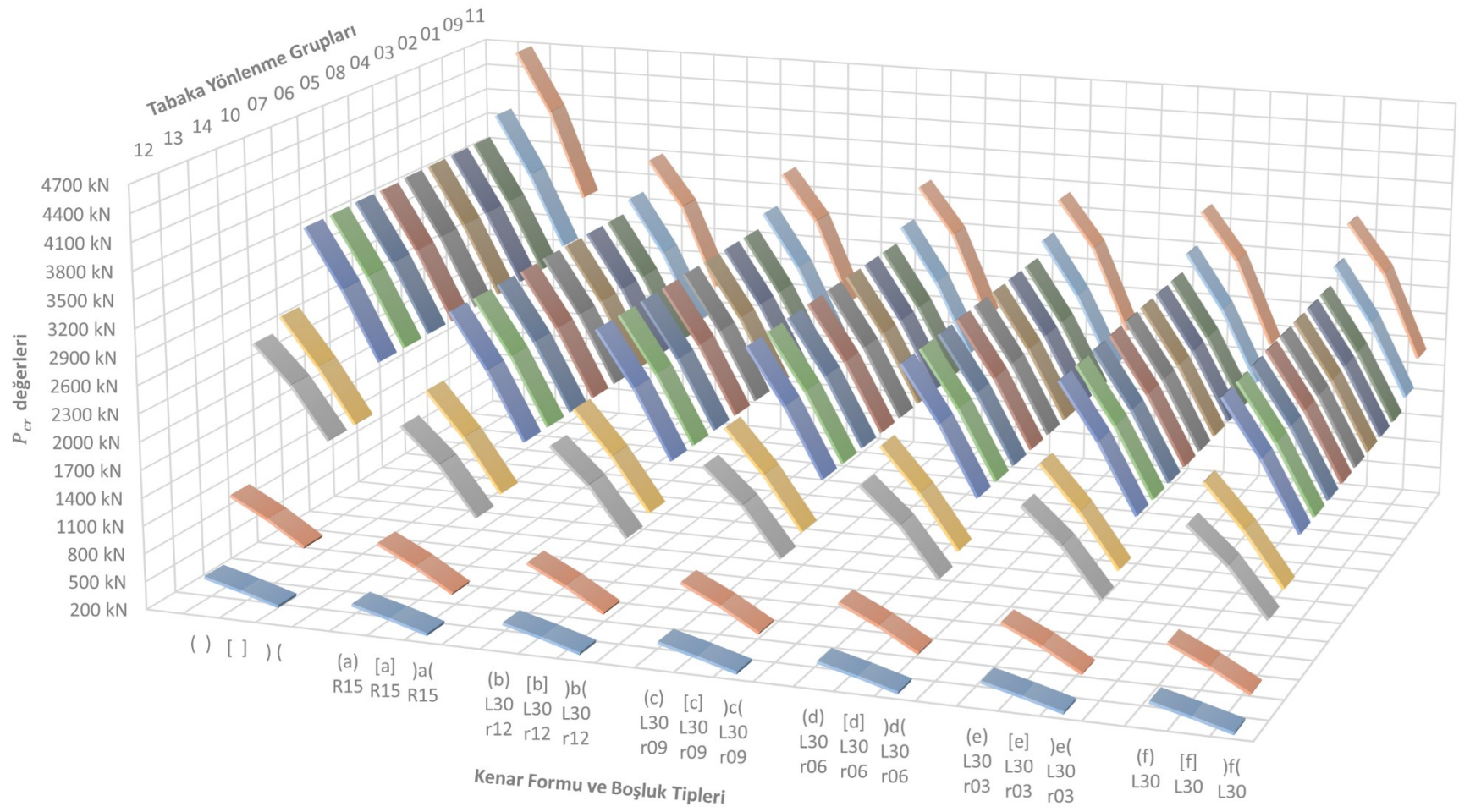
Şekil 6.9. Tabaka yönlenme gruplarına göre P_{cr} değişim farkları [kN] ve oranları [%] – çubuk grafik

6.2.2 Kenar formu etkisi

Plak kenar formlarının sırasıyla eğrisel geniş (), düz [] ve eğrisel dar) (kenar formlarına göre değişiminde meydana gelen lineer kritik-burkulma-yükü (P_{cr}) değişimi grafikleri Şekil 6.10 ve Şekil 6.11’de verilmektedir. Düz kenar formundan ([]’den) eğrisel dar kenar formuna () (’a) geçişte meydana gelen oransal azalmalar, eğrisel geniş kenar formundan ()’den) düz kenar formuna ([]’e) geçişteki azalmalardan daha büyüktür. Bu eğim farkları **boşluksuz** durumda ortalama **%3,6**; **boşluklu** durumlarda ise ortalama **%5,7** oranında daha fazladır.



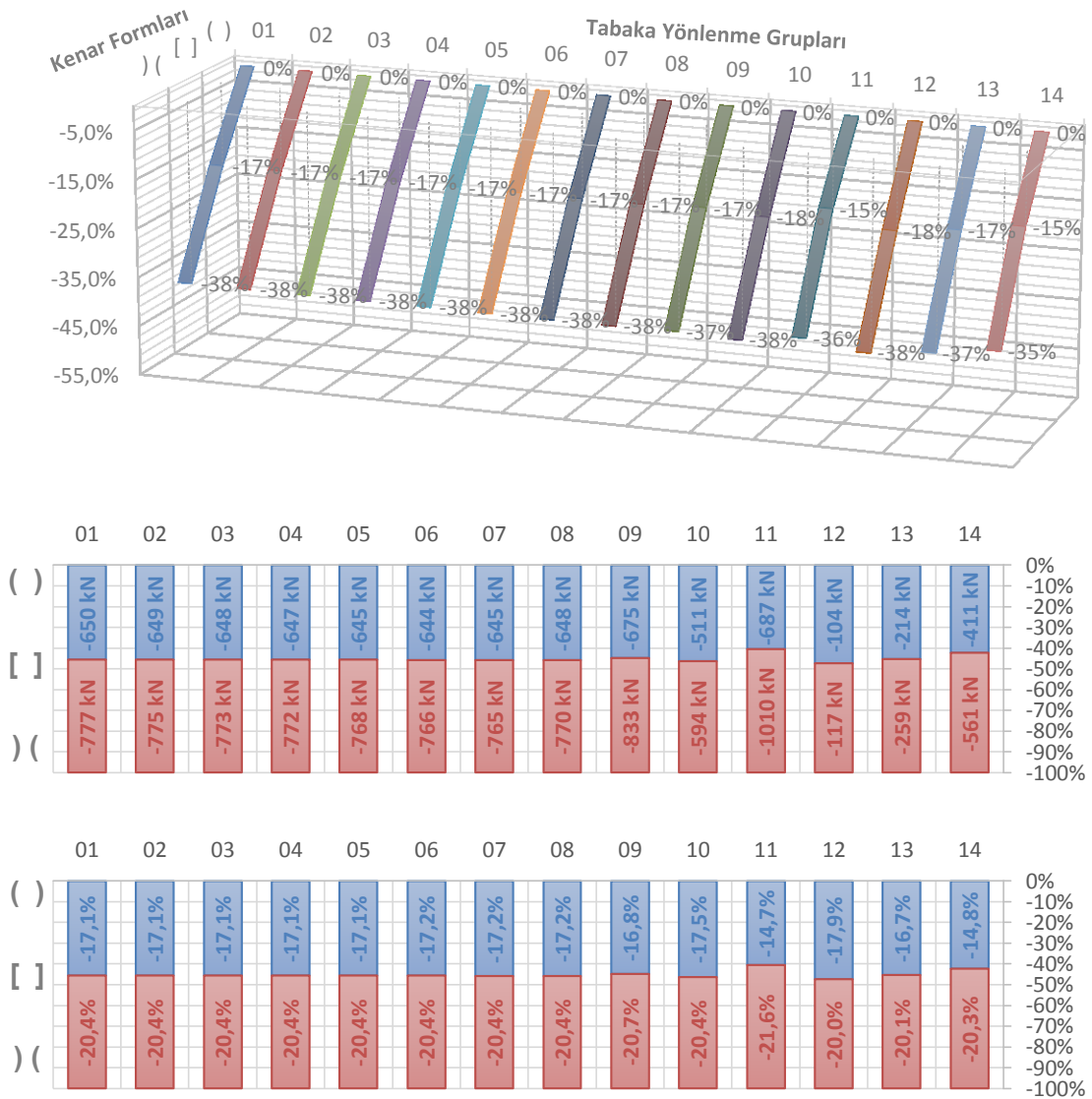
Şekil 6.10. Kenar formu değişimine göre P_{cr} değerleri [kN] – radar grafik



Şekil 6.11. Kenar formu değişimine göre P_{cr} değerleri [kN] – 3D grafik

6.2.2.1 Boşluksuz durumda

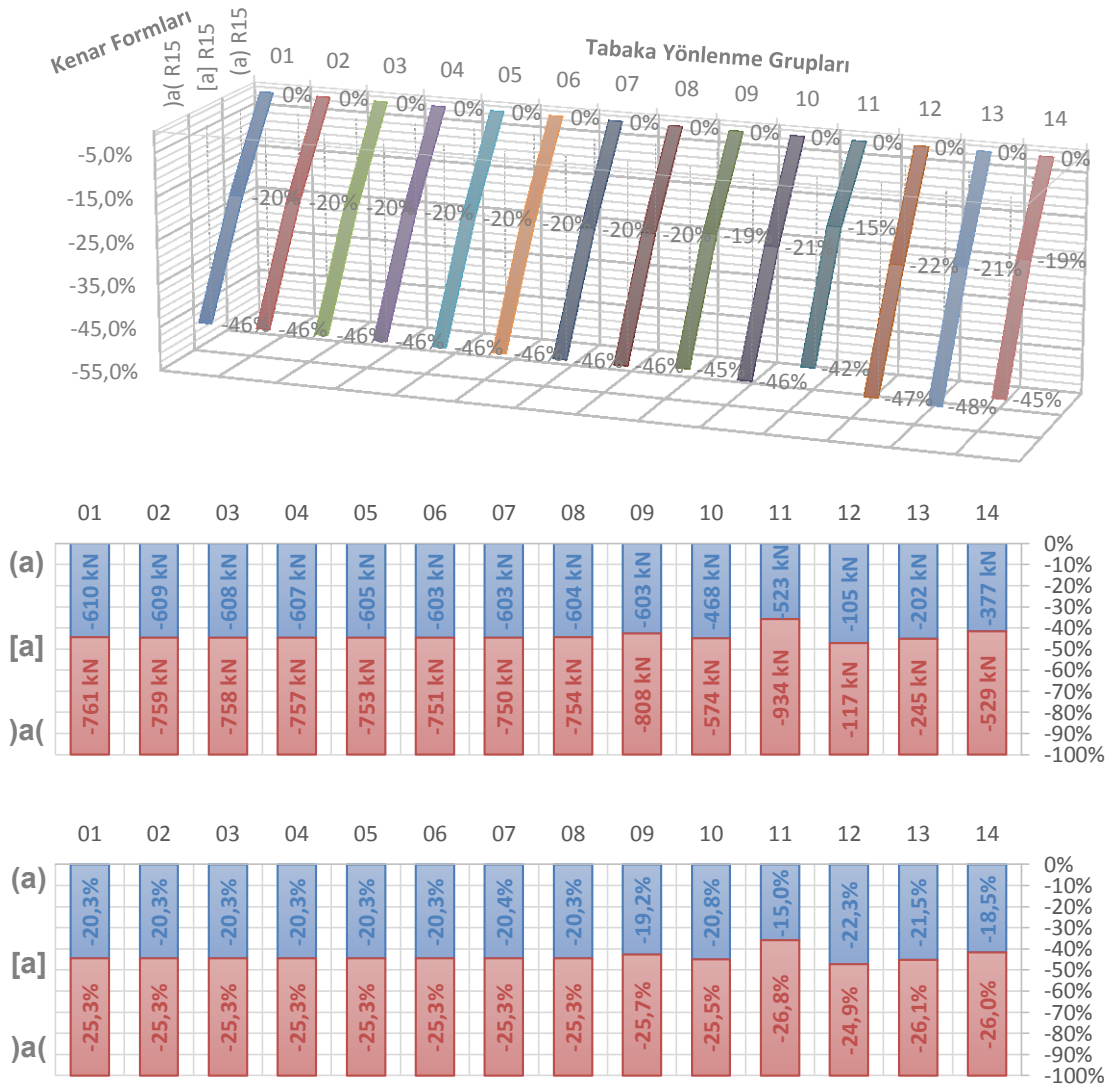
- **1, ..., 8 nolu** tabaka yönlenmelerinin ()'den []'e ve []'den) ('a değer geçişinde **%17,1** ve **%20,4 azalma** olmuştur (Şekil 6.12-grafik3).
- **11 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den []'e değer geçişinde **%14,7** düşüşle **azalmaların en küçük olduğu** değerdir. Buna karşın []'den) ('a değer geçişinde **%21,6** düşüşle **azalmaların en büyük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.12-3).
- **12 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den []'e değer geçişinde **%17,9** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir. Buna karşın []'den) ('a değer geçişinde **%20** düşüşle **azalmanın en küçük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.12-grafik3).
- **14 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den) ('a değer geçişinde **%35,1** düşüşle **azalmanın en küçük olduğu** değerdir (Şekil 6.12-grafik1).



Şekil 6.12. Boşluksuz durumda kenar formuna göre P_{cr} değişim farkları [%] ve [kN] – 3D ve çubuk grafik

6.2.2.2 “a” tipi boşluk durumunda

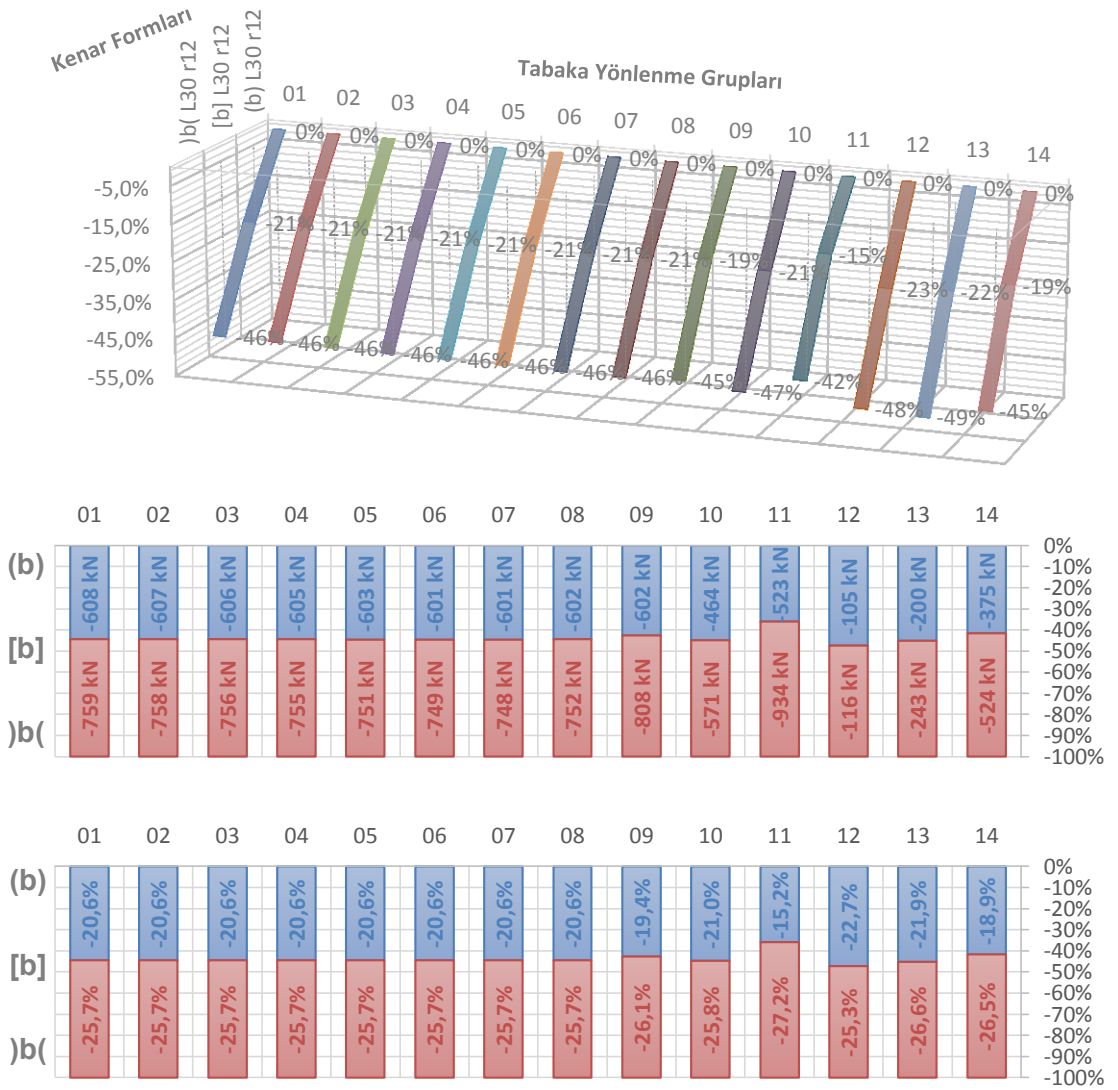
- **1, ..., 8 nolu** tabaka yönlenmelerinin ()'den []'e ve []'den) ('a değer geçişinde **%20,3** ve **%25,3 azalma** olmuştur (Şekil 6.13-grafik3).
- **11 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den []'e değer geçişinde **%15** düşüşle **azalmaların en küçük olduğu** değerdir. Buna karşın []'den) ('a değer geçişinde **%26,8** düşüşle **azalmaların en büyük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.13-3).
- **12 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den []'e değer geçişinde **%22,3** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir. Buna karşın []'den) ('a değer geçişinde **%24,9** düşüşle **azalmanın en küçük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.13-grafik3).
- **13 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den) ('a değer geçişinde **%47,5** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir (Şekil 6.13-grafik1).



Şekil 6.13. “a” tipi boşluk durumunda kenar formuna göre P_{cr} değişim farkları [%] ve [kN] – 3D ve çubuk grafik

6.2.2.3 “b” tipi boşluk durumunda

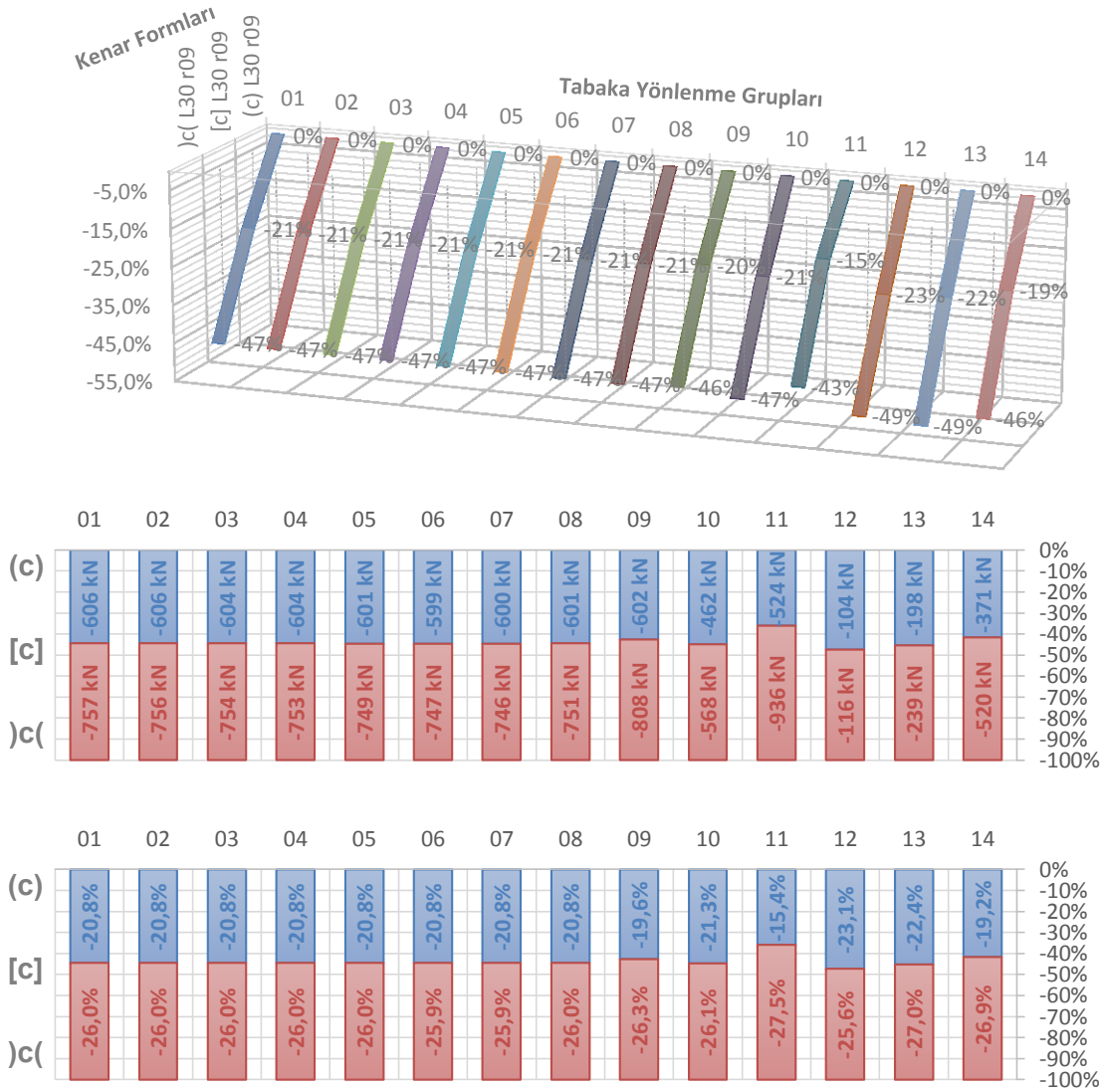
- **1, ..., 8 nolu** tabaka yönlenmelerinin ()'den []'e ve []'den) ('a değer geçişinde **%20,6** ve **%25,7 azalma** olmuştur (Şekil 6.14-grafik3).
- **11 nolu** tabaka yönlenmesi ()'den []'e değer geçişinde **%15,2** düşüşle **azalmaların en küçük olduğu** değerdir. Buna karşın []'den) ('a değer geçişinde **%27,2** düşüşle **azalmaların en büyük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.14-3).
- **12 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den []'e değer geçişinde **%22,7** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir. Buna karşın []'den) ('a değer geçişinde **%25,3** düşüşle **azalmanın en küçük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.14-grafik3).
- **13 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den) ('a değer geçişinde **%48,6** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir (Şekil 6.14-grafik1).



Şekil 6.14. “b” tipi boşluk durumunda kenar formuna göre P_{cr} değişim farkları [%] ve [kN] – 3D ve çubuk grafik

6.2.2.4 “c” tipi boşluk durumunda

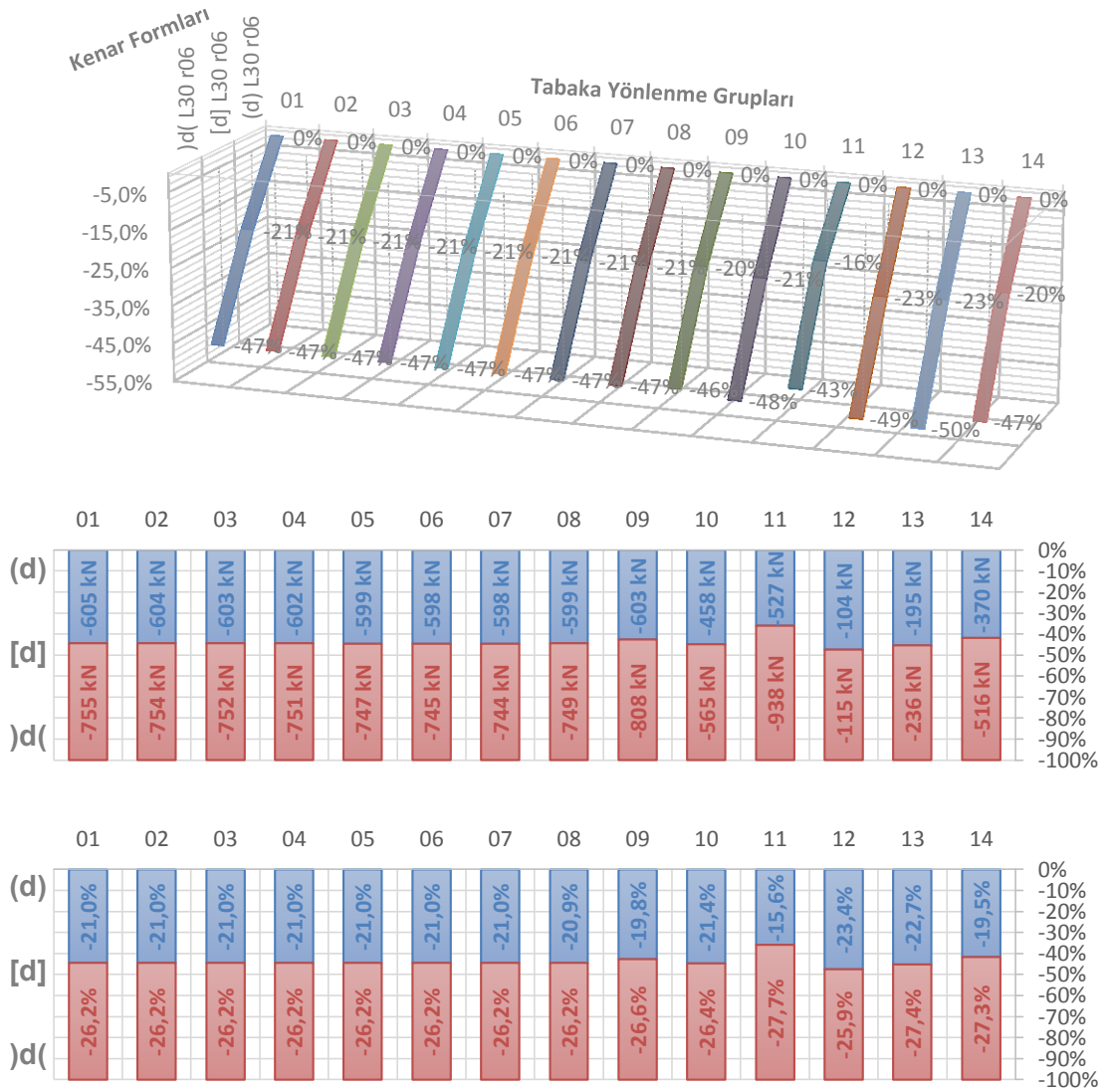
- **1, ..., 8 nolu** tabaka yönlenmelerinin ()'den []'e ve []'den) ('a değer geçişinde **%20,8** ve **%26 azalma** olmuştur (Şekil 6.15-grafik3).
- **11 nolu** tabaka yönlenmesi ()'den []'e değer geçişinde **%15,4** düşüşle **azalmaların en küçük olduğu** değerdir. Buna karşın []'den) ('a değer geçişinde **%27,5** düşüşle **azalmaların en büyük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.15-3).
- **12 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den []'e değer geçişinde **%23,1** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir. Buna karşın []'den) ('a değer geçişinde **%25,6** düşüşle **azalmanın en küçük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.15-grafik3).
- **13 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den) ('a değer geçişinde **%49,5** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir (Şekil 6.15-grafik1).



Şekil 6.15. “c” tipi boşluk durumunda kenar formuna göre P_{cr} değişim farkları [%] ve [kN] – 3D ve çubuk grafik

6.2.2.5 “d” tipi boşluk durumunda

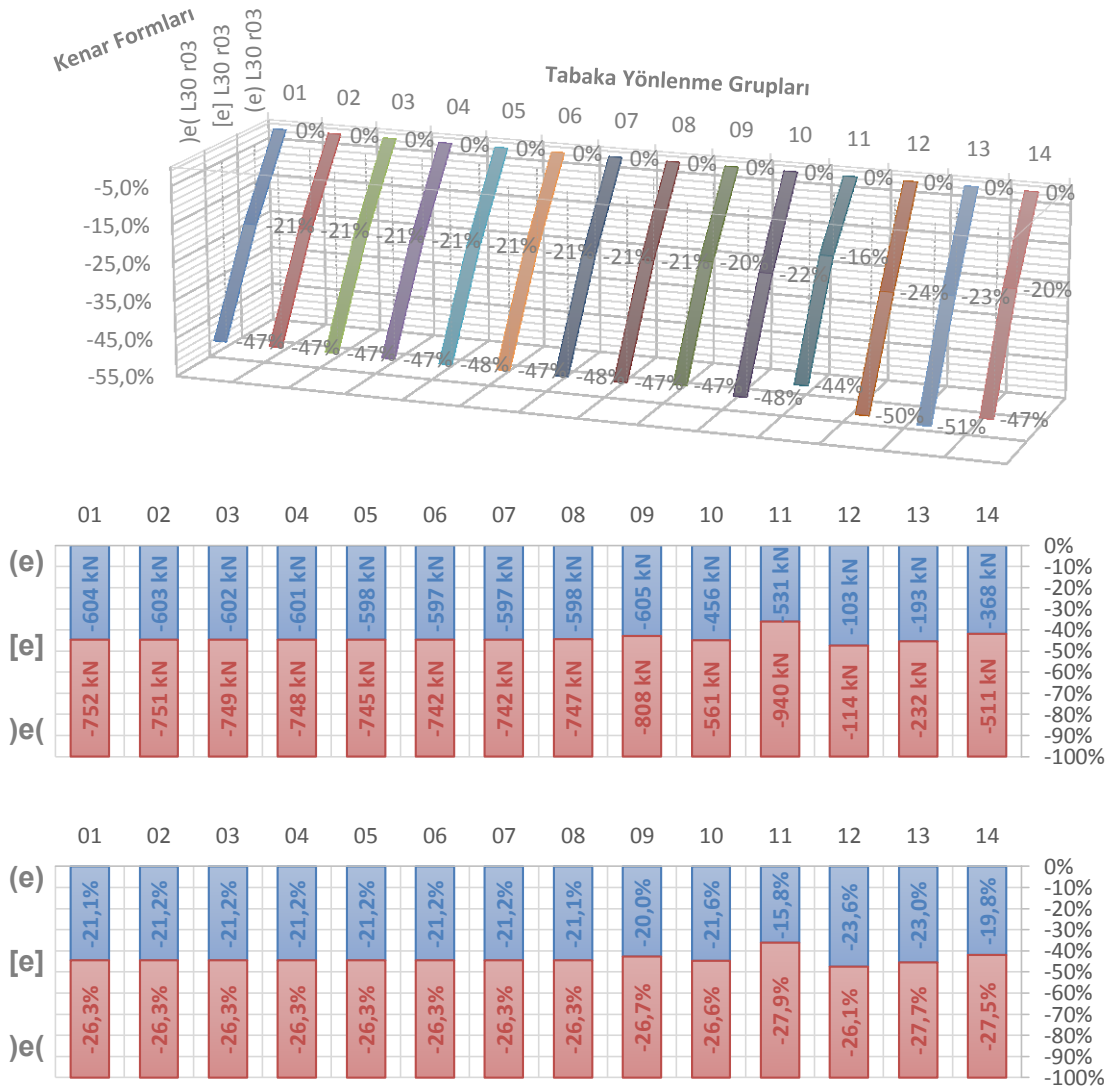
- **1, ..., 8 nolu** tabaka yönlenmelerinin ()'den []'e ve []'den) ('a değer geçişinde **%21** ve **%26,2 azalma** olmuştur (Şekil 6.16-grafik3).
- **11 nolu** tabaka yönlenmesi ()'den []'e değer geçişinde **%15,6** düşüşle **azalmaların en küçük olduğu** değerdir. Buna karşın []'den) ('a değer geçişinde **%27,7** düşüşle **azalmaların en büyük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.16-3).
- **12 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den []'e değer geçişinde **%23,4** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir. Buna karşın []'den) ('a değer geçişinde **%25,9** düşüşle **azalmanın en küçük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.16-grafik3).
- **13 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den) ('a değer geçişinde **%50,1** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir (Şekil 6.16-grafik1).



Şekil 6.16. “d” tipi boşluk durumunda kenar formuna göre P_{cr} değişim farkları [%] ve [kN] – 3D ve çubuk grafik

6.2.2.6 “e” tipi boşluk durumunda

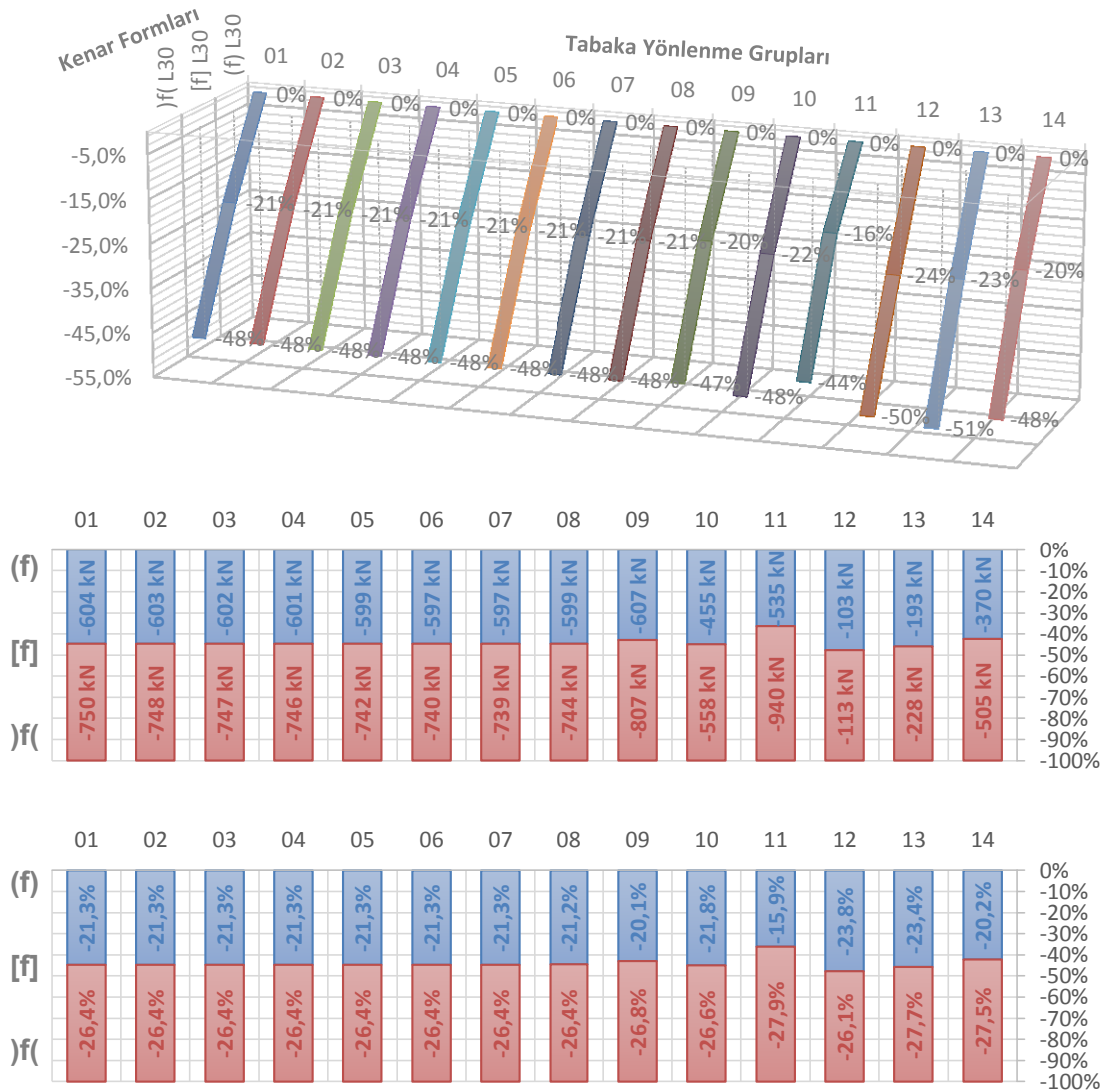
- **1, ..., 8 nolu** tabaka yönlenmelerinin ()’den []’e ve []’den) (‘a değer geçişinde **%21,2** ve **%26,3 azalma** olmuştur (Şekil 6.17-grafik3).
- **11 nolu** tabaka yönlenmesi ()’den []’e değer geçişinde **%15,8** düşüşle **azalmaların en küçük olduğu** değerdir. Buna karşın []’den) (‘a değer geçişinde **%27,9** düşüşle **azalmaların en büyük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.17-3).
- **12 nolu** tabaka yönlenmesinin ()’den []’e değer geçişinde **%23,6** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir. Buna karşın []’den) (‘a değer geçişinde **%26,1** düşüşle **azalmanın en küçük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.17-grafik3).
- **13 nolu** tabaka yönlenmesinin ()’den) (‘a değer geçişinde **%50,7** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir (Şekil 6.17-grafik1).



Şekil 6.17. “e” tipi boşluk durumunda kenar formuna göre P_{cr} değişim farkları [%] ve [kN] – 3D ve çubuk grafik

6.2.2.7 “f” tipi boşluk durumunda

- **1, ..., 8 nolu** tabaka yönlenmelerinin ()'den []'e ve []'den) ('a değer geçişinde **%21,3** ve **%26,4 azalma** olmuştur (Şekil 6.18-grafik3).
- **11 nolu** tabaka yönlenmesi ()'den []'e değer geçişinde **%15,9** düşüşle **azalmaların en küçük olduğu** değerdir. Buna karşın []'den) ('a değer geçişinde **%27,9** düşüşle **azalmaların en büyük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.18-3).
- **12 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den []'e değer geçişinde **%23,8** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir. Buna karşın []'den) ('a değer geçişinde **%26,1** düşüşle **azalmanın en küçük olduğu** değere sahiptir (Şekil 6.18-grafik3).
- **13 nolu** tabaka yönlenmesinin ()'den) ('a değer geçişinde **%51,1** düşüşle **azalmanın en büyük olduğu** değerdir (Şekil 6.18-grafik1).

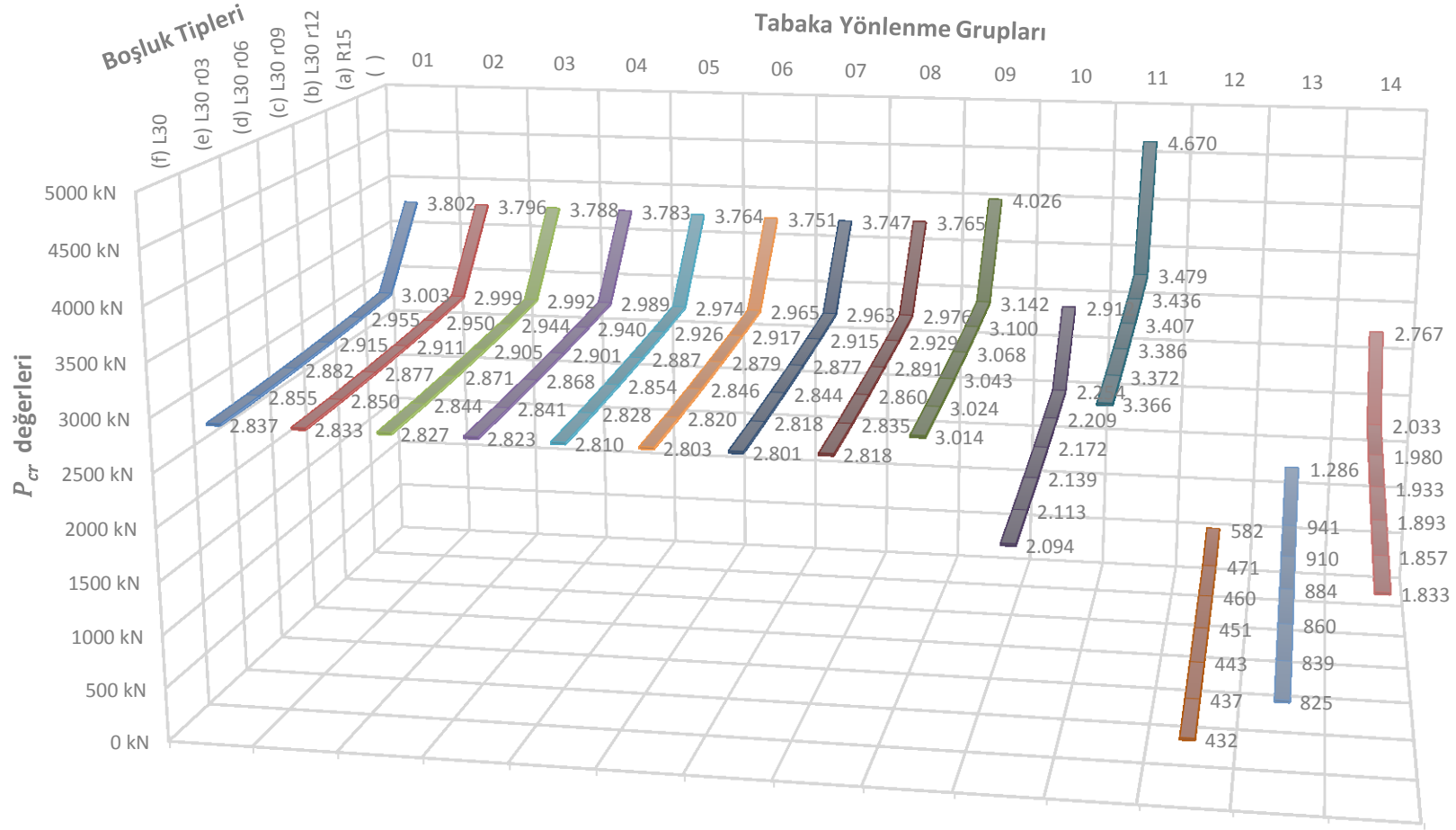


Şekil 6.18. “f” tipi boşluk durumunda kenar formuna göre P_{cr} değişim farkları [%] ve [kN] – 3D ve çubuk grafik

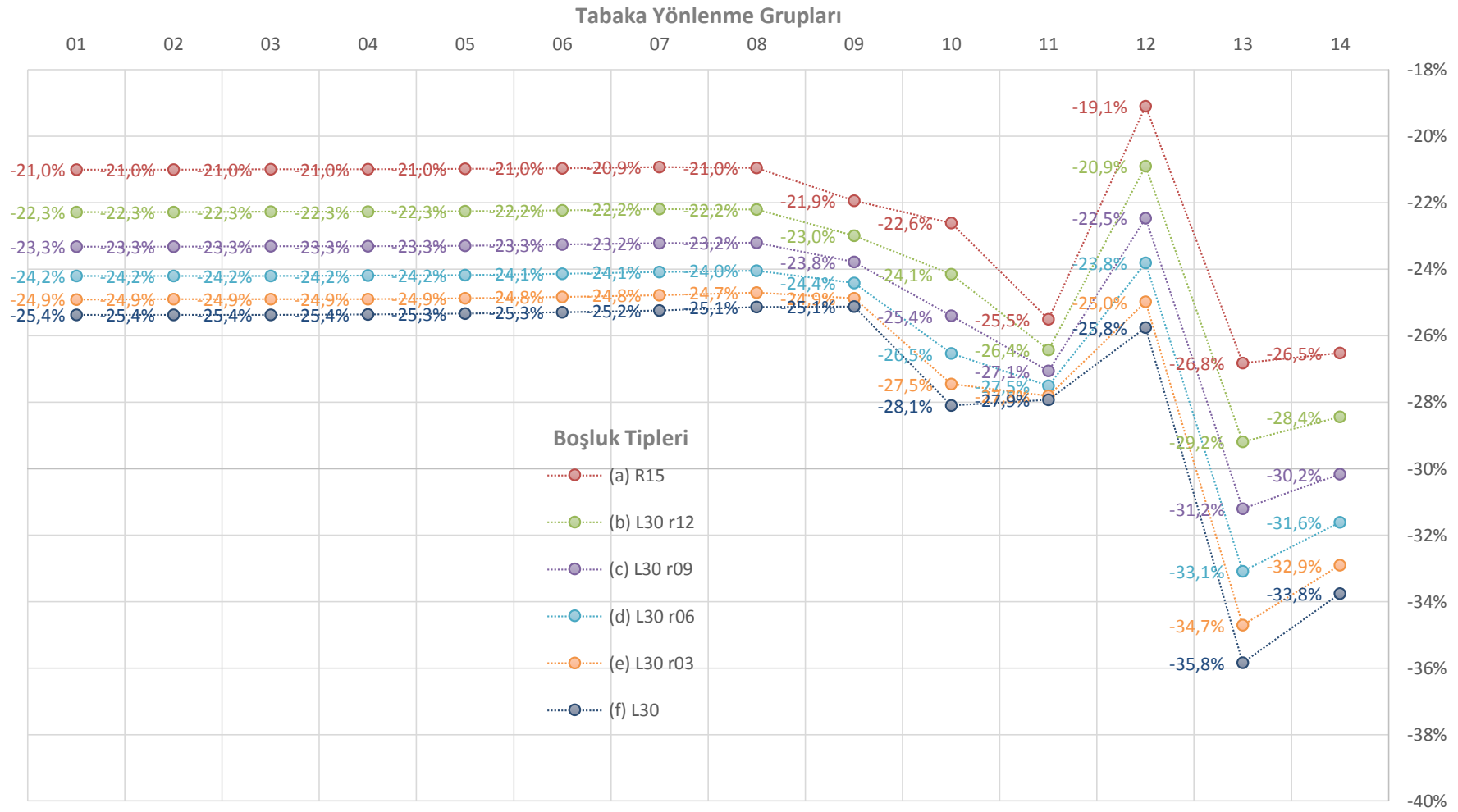
6.2.3 Boşluk tipi etkisi

6.2.3.1 Geniş () kenar formu için

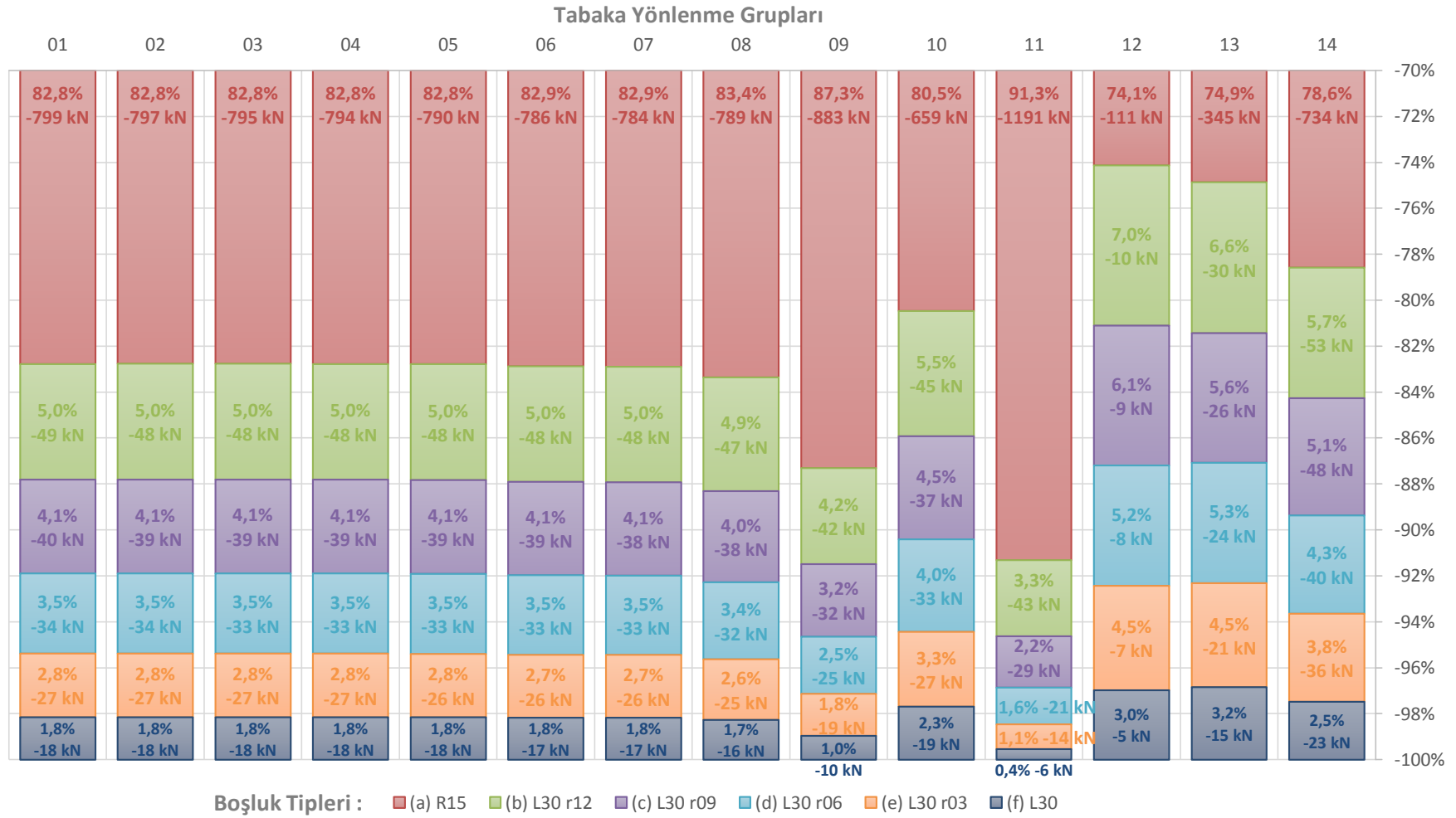
- **1, ..., 8 nolu** tabaka yönlenmelerindeki boşluk tiplerine göre oransal azalmalar **birbirleriyle** neredeyse **çakışık** olarak **%21 - %25,4** aralığındadır (Şekil 6.20).
- **11 nolu** tabaka yönlenmesinde en yüksek ve en düşük oransal azalmalar arasındaki fark **%2,5** ile **en küçük eğimi** oluşturmaktadır (Şekil 6.20).
- **12 nolu** tabaka yönlenmesinin **(a), (b), (c)** ve **(d)** boşluk tiplerinde **%19,1 - %23,8** düşüş aralığı ile oransal **azalmanın en küçük olduğu** değerlerdir (Şekil 6.20).
- **13 nolu** tabaka yönlenmesi, **%26,8 - %35,8** düşüş aralığı ile oransal **azalmanın en büyük olduğu** değer grubudur. Bu **%9** azalma farkı ile **en büyük eğimi** oluşturmaktadır (Şekil 6.20).



Şekil 6.19. Geniş () kenar formunda boşluk tipine göre P_{cr} değerleri [kN] – 3D grafik



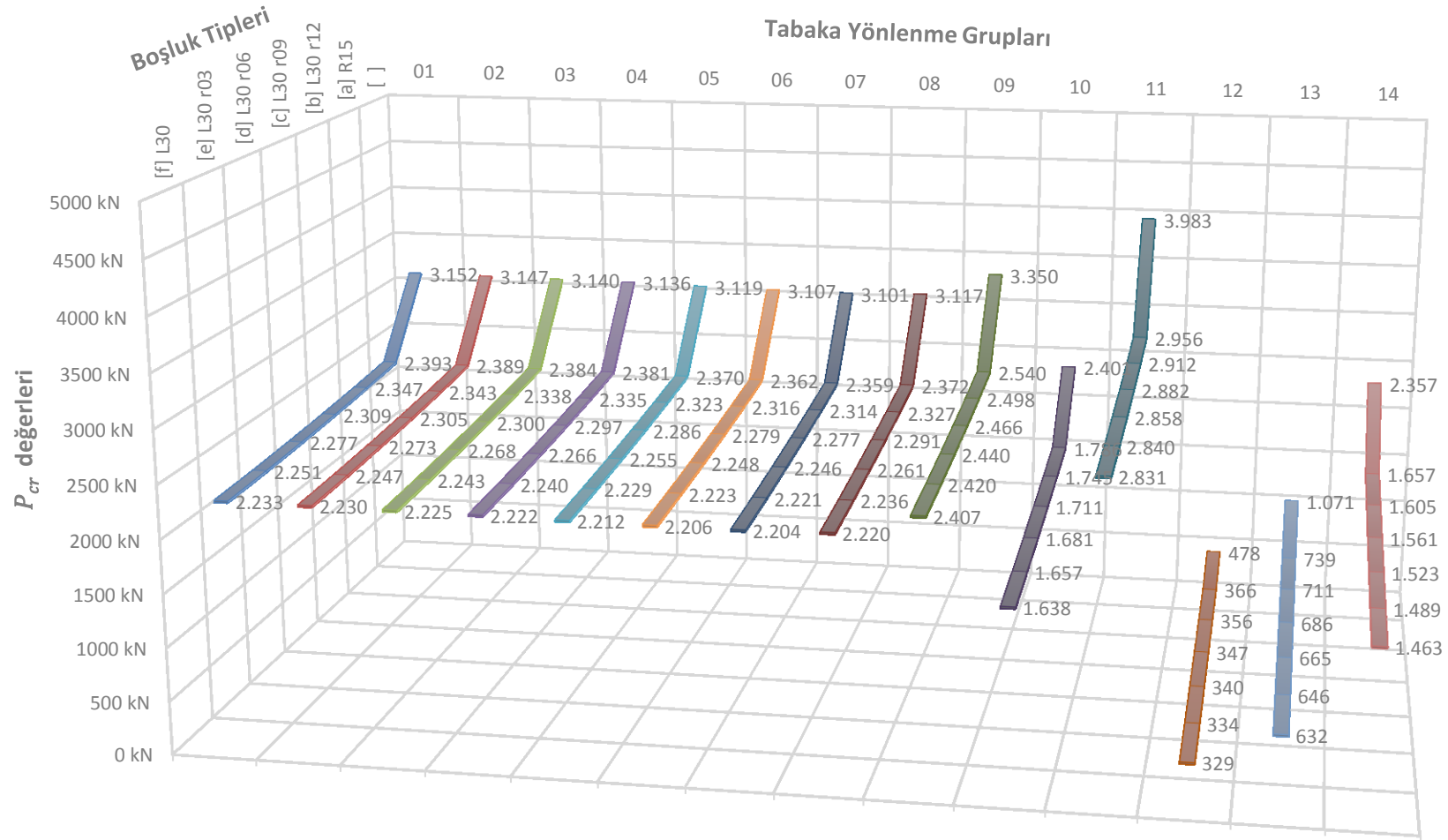
Şekil 6.20. Geniş () kenar formunda boşluksuz duruma oranla P_{cr} değişimi [%] – çizgi grafik



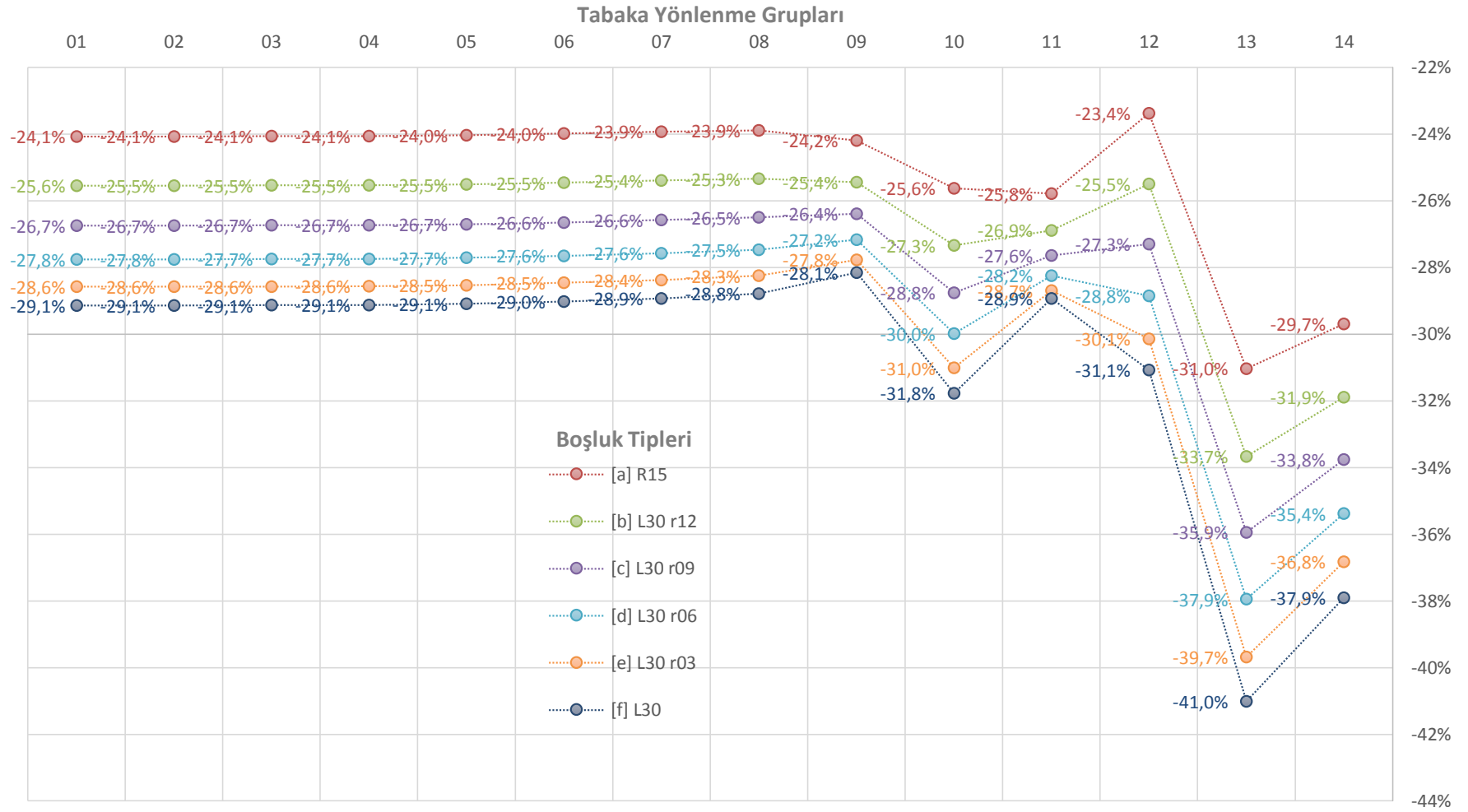
Şekil 6.21. Geniş () kenar formunda boşluk tipine göre P_{cr} değişim farkları [kN] ve oranları [%] – çubuk grafik

6.2.3.2 Düz [] kenar formu için

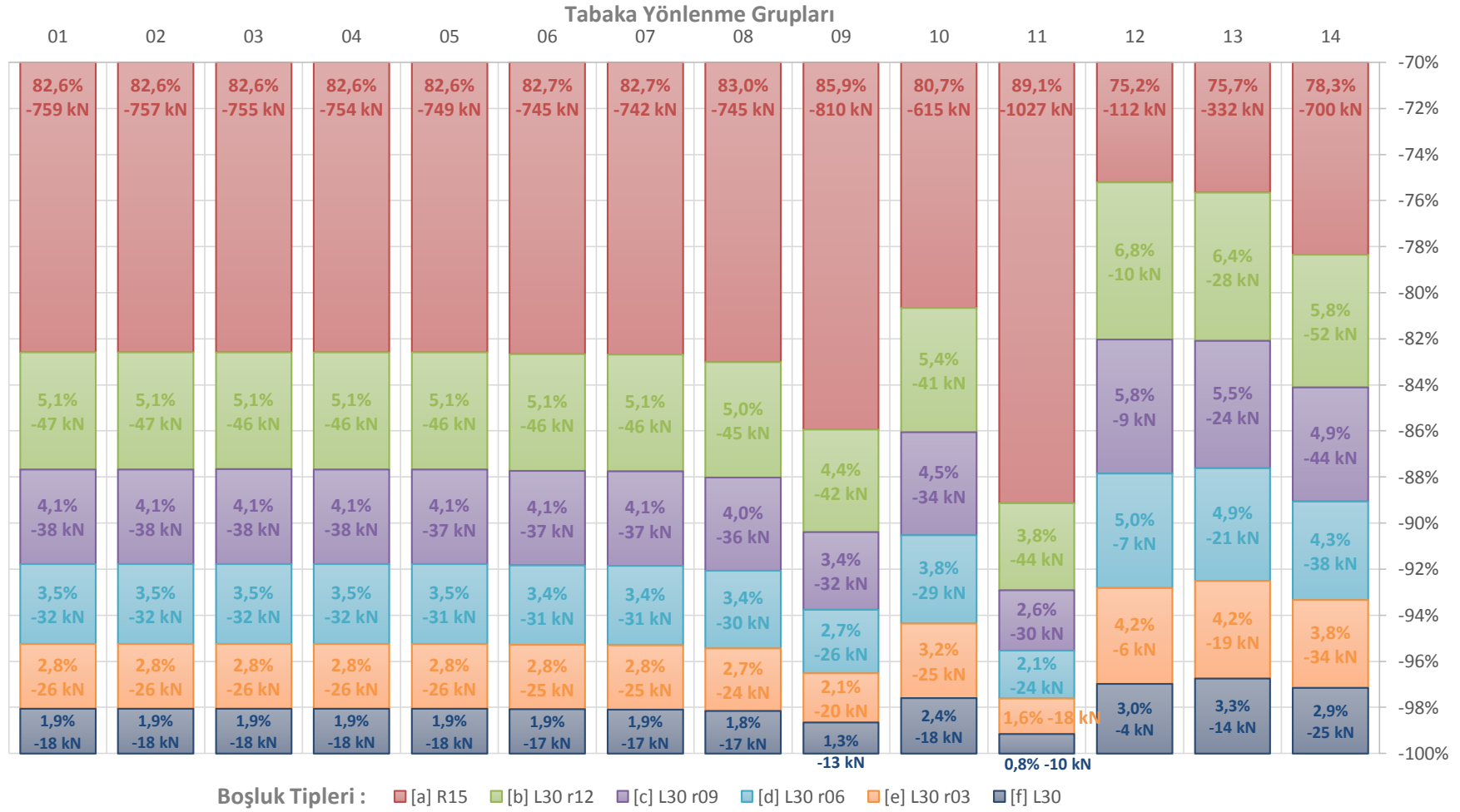
- **1,...,8 nolu** tabaka yönlenmelerindeki boşluk tiplerine göre oransal azalmaları **birbirleriyle** neredeyse **çakışık** olarak **%24 - %29** aralığındadır (Şekil 6.23).
- **11 nolu** tabaka yönlenmesinde en yüksek ve en düşük oransal azalmalar arasındaki fark **%3,1** ile **en küçük eğimi** oluşturmaktadır (Şekil 6.23).
- **12 nolu** tabaka yönlenmesinin sadece **[a]** boşluk tipinde **%23,4** düşüş ile oransal **azalmanın en küçük olduğu** değerdir (Şekil 6.23).
- **13 nolu** tabaka yönlenmesi, **%31 - %41** düşüş aralığı ile oransal **azalmanın en büyük olduğu** değer grubudur. Bu **%10** azalma farkı ile **en büyük eğimi** oluşturmaktadır (Şekil 6.23).



Şekil 6.22. Düz [] kenar formunda boşluk tipine göre P_{cr} değerleri [kN] – 3D grafik



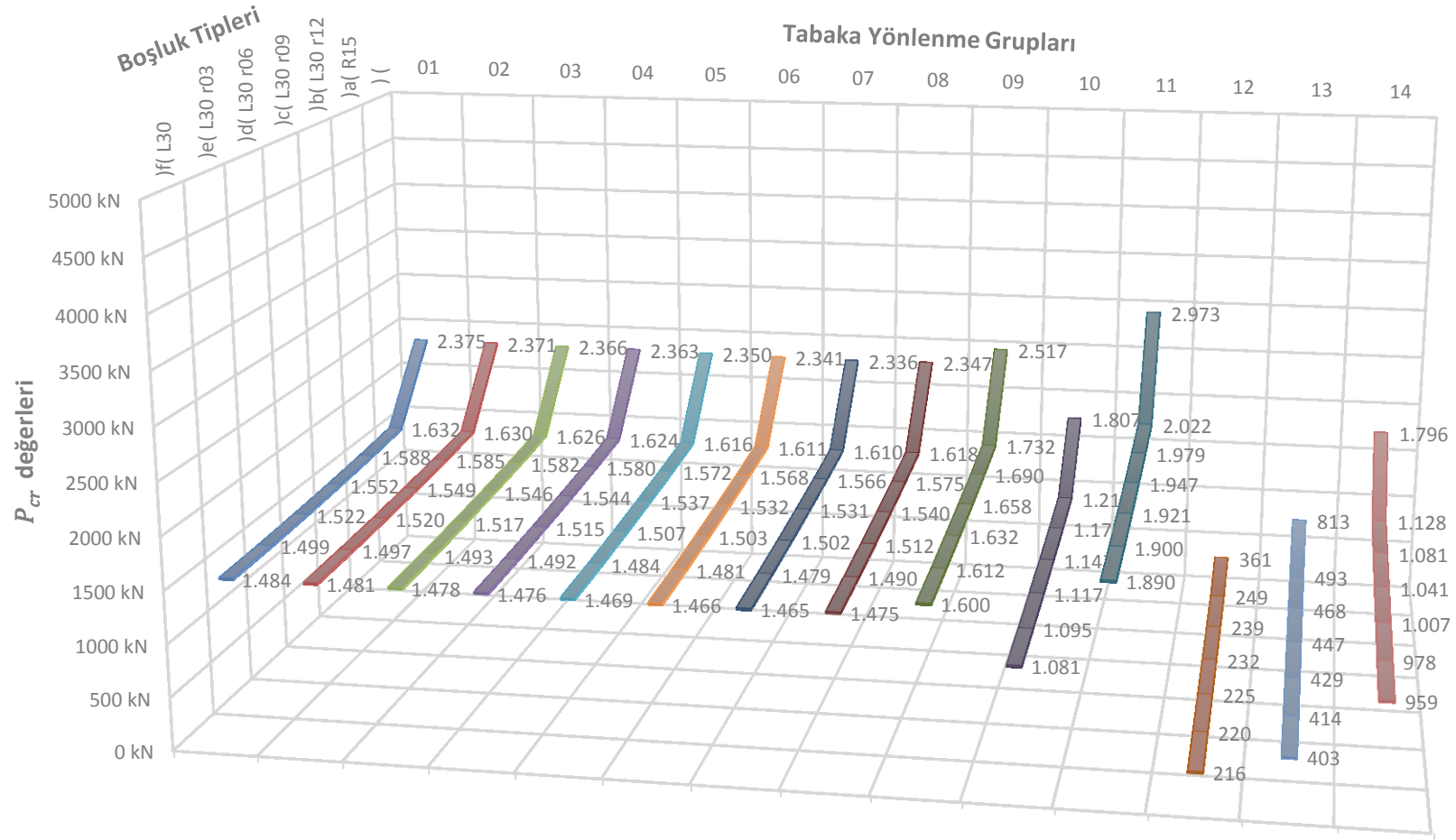
Şekil 6.23. Düz [] kenar formunda boşluksuz duruma oranla P_{cr} değişimi [%] – çizgi grafik



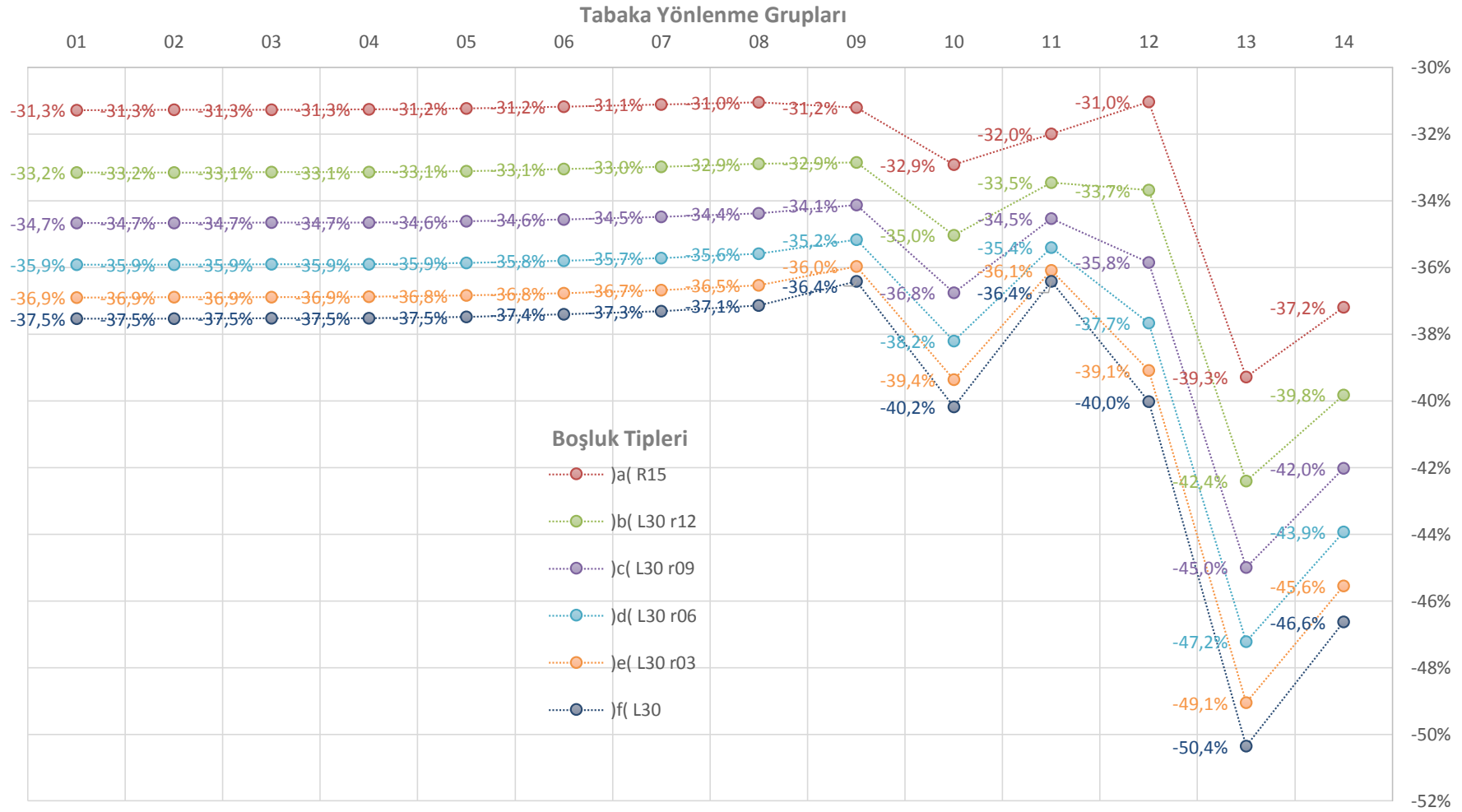
Şekil 6.24. Düz [] kenar formunda boşluk tipine göre P_{cr} değişim farkları [kN] ve oranları [%] – çubuk grafik

6.2.3.3 Dar) (kenar formu için

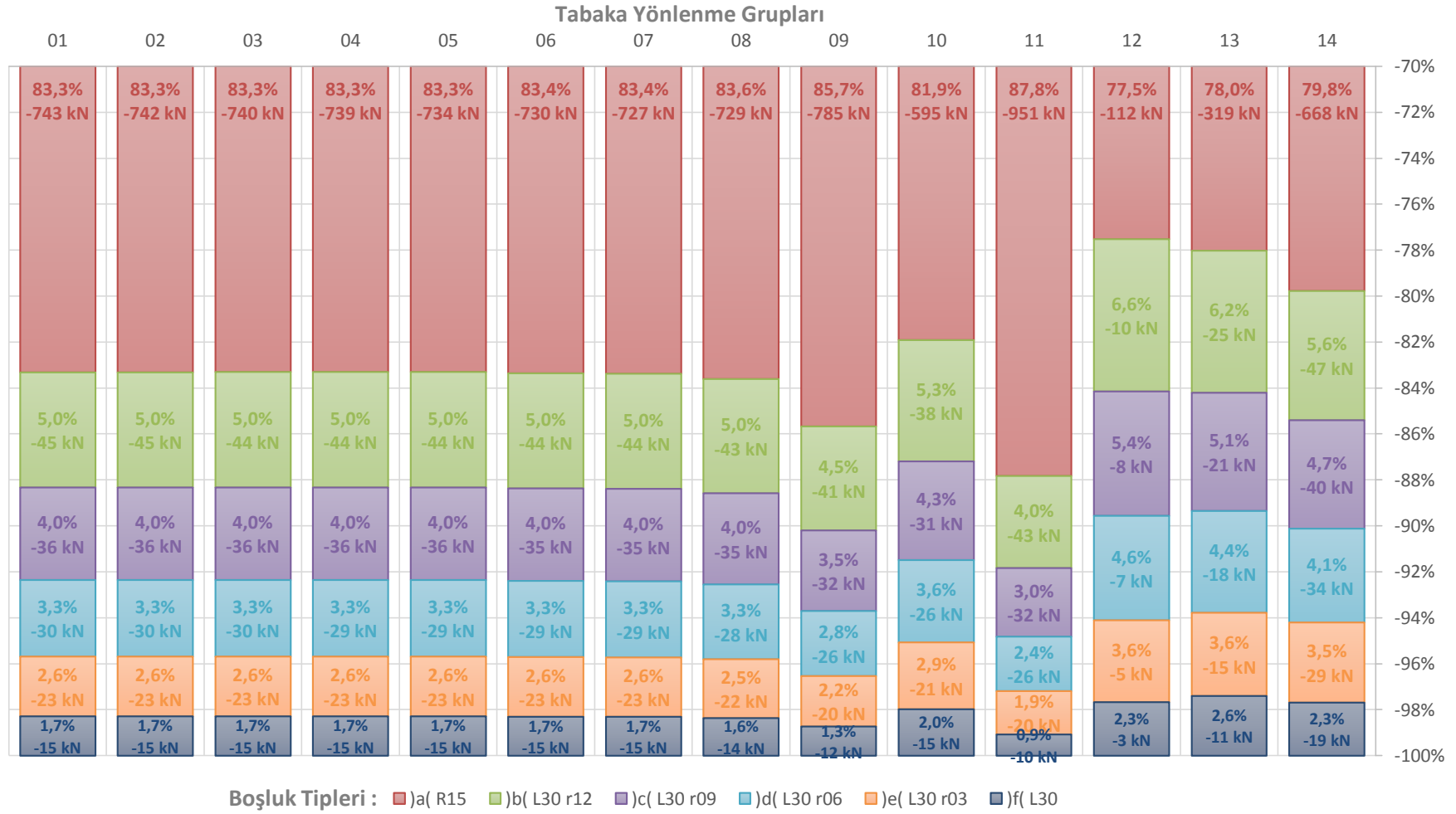
- **1,...,8 nolu** tabaka yönlenmelerindeki boşluk tiplerine göre oransal azalmaları **birbirleriyle** neredeyse **çakışık** olarak **%31 - %37,5** aralığındadır (Şekil 6.26).
- **11 nolu** tabaka yönlenmesinde en yüksek ve en düşük oransal azalmalar arasındaki fark **%4,4** ile **en küçük eğimi** oluşturmaktadır (Şekil 6.26).
- **13 nolu** tabaka yönlenmesi, **%39,3 - %50,4** düşüş aralığı ile oransal **azalmanın en büyük olduğu** değer grubudur. Bu **%11,1** azalma farkı ile **en büyük eğimi** oluşturmaktadır (Şekil 6.26).



Şekil 6.25. Dar) (kenar formunda boşluk tipine göre P_{cr} değerleri [kN] – 3D grafik



Şekil 6.26. Dar) (kenar formunda boşluksuz duruma oranla P_{cr} değişimi [%] – çizgi grafik



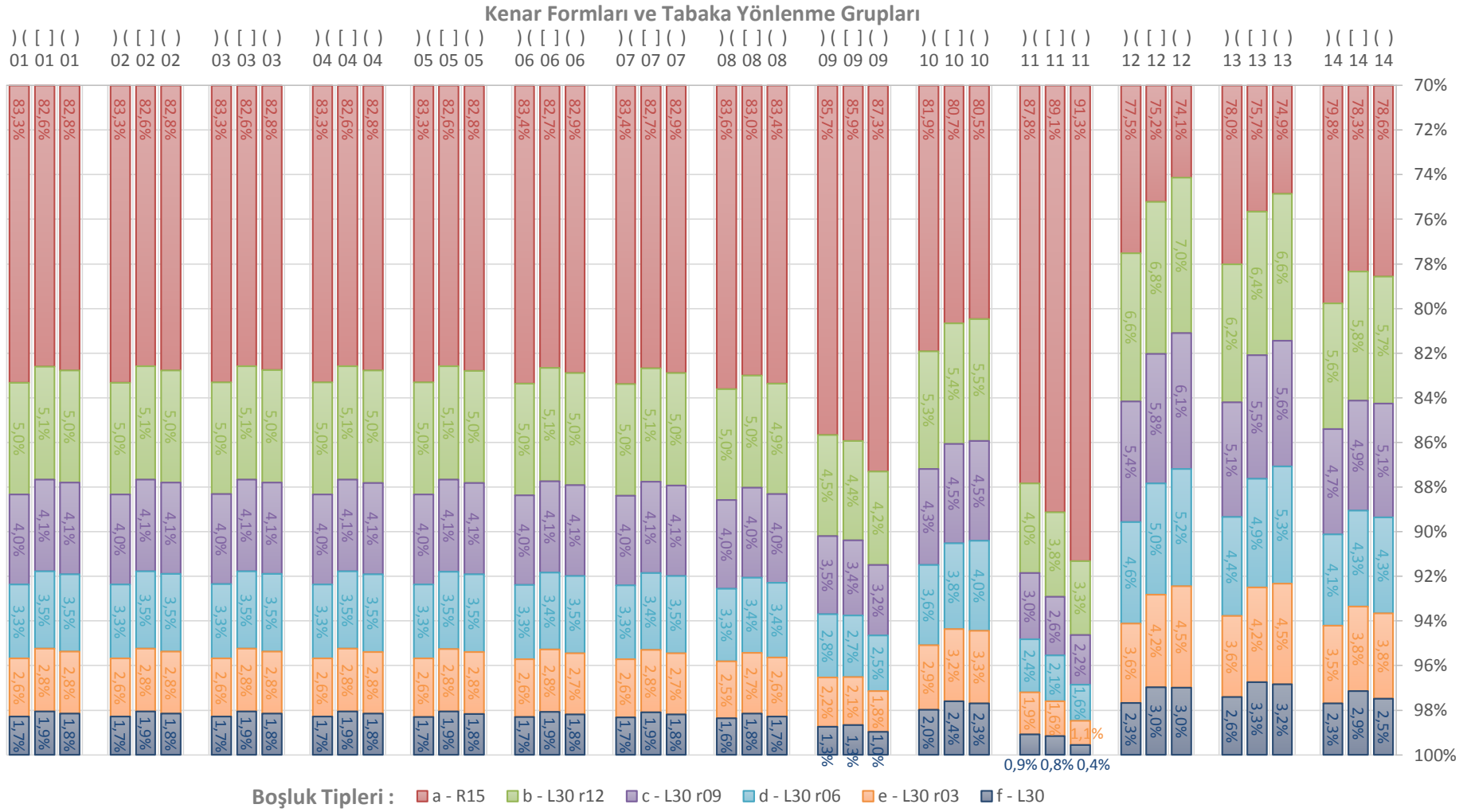
Şekil 6.27. Dar) (kenar formunda boşluk tipine göre P_{cr} değişim farkları [kN] ve oranları [%] – çubuk grafik

7. SONUÇ ve ÖNERİLER

Son yıllarda literatürde tabakalı kompozit plakların burkulma analizi ile ilgili birçok çalışmaya rastlanmaktadır. Yalnız bu çalışmaların içinde boşluk tipi ve eğrisel kenar formunun birlikte eşlik ettiği durumlara ait çalışmalar daha sınırlı sayıdadır.

Bu çalışmada da tabakalanma, boşluk tipi ve kenar formu olmak üzere üç farklı koşulun kombinasyonu ile oluşturulan analiz dizisinde lineer kritik-burkulma-yükü (P_{cr}) değerleri ANSYS® [6] sonlu eleman analiz paket programı ile gerçekleştirilmiş ve elde edilen değerler irdelenerek aşağıdaki neticelere ulaşılmıştır;

- Tabaka yönlenmelerine bağlı değişimler, seçilen kenar formları ve boşluklanma tiplerine bağlı değişimlerden daha keskin değişen grafikler ortaya koymaktadır. Buda kullanılan malzemenin ve plak kalınlığının aynı olmasına rağmen tabakalanmanın çok daha önemli bir rol oynadığını göstermektedir. (Şekil 6.5)
- Analizlerde yakın sonuçlara sahip olan **1,...,8 nolu** tabakalanma gruplarının en belirgin ortak özelliği, plak dış yüzeylerinden ortalama **10mm** derinlik içerisinde kalan tabakaların yüklemeye doğrultusu (0°) ile yaptıkları yönlenme açısı değerleri 0° ile 45° aralığında kalmasıdır. Buda yüklemeye doğrultusu ile 45° 'den küçük açı yapan tabaka yönlenmelerinin en dış katmanlarda yoğun olmasının etkinliğini göstermektedir.
- **9 nolu** tabaka yönlenmesi, **1,...,8 nolu** yönlenme gruplarından ortalama **%5** daha büyük değerlere sahiptir (Şekil 6.6). Tabaka yönlenme ve adetleri incelendiğinde, yüklemeye doğrultusunda (0°) tabaka yönlenmelerinin **kalınlıklarının daha fazla** olması ve en dış katmanlarda konumlanmasından kaynaklandığı sonucuna varılmaktadır.
- **11** ve **12 nolu** tabaka yönlenmelerinin arasında ortalama **%88** ile en büyük oransal değer kaybı oluşmaktadır (Şekil 6.6). İki tabakalanma grubunun da **4 katmanlı simetrik** tabaka dizilimleri ortak özellikleri olmasına karşın **tek fark** tabaka **yönlenme açıları**ndadır. Açılar incelendiğinde düşük olan (**12 nolu**) tabaka yönlenmesinin diğerinden (**11 nolu**) en belirgin farkı yüklemeye doğrultusunda (0°) tabaka yönlenmesinin olmamasıdır. Bu da yüklemeye doğrultusundaki tabaka yönlenmesinin etkinliğini belirgin şekilde gösteren bir bulgudur.



Şekil 7.1. Boşluk tipine göre P_{cr} değişim fark oranları [%] – çubuk grafik

- Boşluksuz durum için kenar formunun ()'den ()'a geçişinde **%35,1** düşüşle (en büyük değere oranla) **en küçük azalmanın 14 nolu** grupta meydana gelişi (Şekil 6.12), yönlenmelerin yüklemeye doğru eğilimi (0°) civarında yoğunlaşmış olması, yüklemeye dik doğrultuda plak enindeki daralmanın diğer yönlenmelere kıyasla oransal olarak daha az değer kaybına sebep olduğu çıkarılmaktadır.
- Kenar formunun []'den ()'den []'e geçişlerinde, ()'den []'e geçişlerine kıyasla **boşluksuz** durum için ortalama **%3,6**; **boşluklu** durumlarda ise ortalama **%5,7** daha fazla değer kaybı meydana gelmektedir (Şekil 6.12). Burada, kenar formu değişimindeki azalmalarda boşluk tiplerinden ziyade boşluğun varlığı veya yokluğunun belirgin bir etkisi kendini göstermektedir.
- Boşluk tiplerinin “a”dan “f”ye doğru geçişinde gerçekleşen değer düşüşlerinin, toplam değer kaybına göre yüzdelerinin ortalama ve maks./min. genlik aralıkları;

Boşluksuzdan “a” boşluk durumuna geçişte toplam kaybın	%82,2 ± 8,6 'sının
“a”dan “b” boşluk durumuna geçişte toplam kaybın	% 5,2 ± 1,8'inin
“b”dan “c” boşluk durumuna geçişte toplam kaybın	% 4,2 ± 1,9'unun
“c”dan “d” boşluk durumuna geçişte toplam kaybın	% 3,6 ± 1,8'inin
“d”dan “e” boşluk durumuna geçişte toplam kaybın	% 2,9 ± 1,7'sinin
“e”dan “f” boşluk durumuna geçişte toplam kaybın	% 1,9 ± 1,4'ünün

 gerçekleştiği görülmektedir (Şekil 7.1). Ortalama ve genlikler, tabaka yönlenme grubuna bağlı olarak belirgin değişiklikler göstermektedir. Buradan boşluk tipleri ile meydana getirdikleri oransal azalmalar arasında çok kuvvetli olmasa da bir ilişkinin varlığından söz edilebilmektedir.

Özetle bu çalışmadan çıkarılabilecek netice; tabakalı kompozit plakların lineer kritik-burkulma-yükü (P_{cr}) performansları, tabaka yönlenme/dizilimlerinden ve herhangi boşluğun varlığı veya yokluğu durumlarından belirgin bir şekilde (%88'lere varan kayıplarla) etkilenmektedir. Bunlara kıyasla kenar formları ve boşluk tipleri etkileri daha düşük mertebede kalmaktadır.

Çalışmayı daha ileriye taşıyabilmek adına;

- Yapışma kusurlarının (delaminasyon) mevcudiyeti,
- Plâğın orta yüzeyinin eğrisel bir forma sahip olması (bir küre yüzey diferansiyel elemanı gibi),
- Non-lineer analizi değerlendirmesi,
- İki doğrultuda yüklemeye hali,
- Bölgesel güçlendirmeler,
- Delik iç yüzeyine basınç etkisi,

gibi alternatif koşul, form ve yöntemler açısından ele alınabilir.

KAYNAKLAR

- [1] Ochoa O.O. & Reddy J.N., 1992. *Finite Element Analysis of Composite Laminates*, Kluwer Academic Publishers, Netherland.
- [2] Ventsel E. & Krauthammer T., 2001. *Thin Plates and Shells : Theory, Analysis, and Applications*, Marcel Dekker, New York.
- [3] <https://statgisesi.files.wordpress.com/2014/04/melbourne-rectangular-9.jpg>, (Ziyaret Tarihi: 20 Mayıs 2015).
- [4] http://wikiarquitectura.com/es/images/8/8e/CET_2.jpg, (Ziyaret Tarihi: 20 Mayıs 2015).
- [5] <http://www.archdaily.com/520897/landesgartenschau-exhibition-hall-icd-itke-iigs-university-of-stuttgart/>, (Ziyaret Tarihi: 20 Mayıs 2015).
- [6] ANSYS® Mechanical, *Release 14*
- [7] Ugural A.C., 1981. *Stresses in Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York.
- [8] Al-Qablan H., Katkhuda H. & Dwairi H., 2009. Assessment of the buckling behavior of square composite plates with circular cutout subjected to in-plane shear, *Jordan Journal of Civil Engineering*, vol. 3, no. 2.
- [9] Baba B.O., 2007. Buckling behavior of laminated composite plates, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 26, no. 16, pp. 1637-1655.
- [10] Baba B.O. & Baltaci A., 2007. Buckling characteristics of symmetrically and antisymmetrically laminated composite plates with central cutout, *Applied Composite Materials*, vol. 14, no. 4, pp. 265-276.
- [11] Baltaci A., Sarikanat M. & Yildiz H., 2006. Buckling analysis of laminated composite circular plates with holes, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 25, no. 7, pp. 733-744.
- [12] Ghannadpour S., Najafi A. & Mohammadi B., 2006. On the buckling behavior of cross-ply laminated composite plates due to circular/elliptical cutouts, *Composite Structures*, vol. 75, no. 1, pp. 3-6.
- [13] Joshi A., Reddy P.R., Krishnareddy V.N. & Sushma C.V., 2013. Buckling analysis of thin carbon/epoxy plate with circular cut-outs under biaxial compression by using fea, *International Journal of Research in Engineering and Technology*, vol. 2, no. 10, pp. 296-301.
- [14] Narayana A.L., Rao K. & Kumar R.V., 2014. Buckling analysis of rectangular composite plates with rectangular cutout subjected to linearly varying in-plane loading using fem, *Sadhana*, vol. 39, no. 3, pp. 583-596.

- [15] Özben T., 2009. Analysis of critical buckling load of laminated composites plate with different boundary conditions using fem and analytical methods, *Computational Materials Science*, vol. 45, no. 4, pp. 1006-1015.
- [16] Tekin M. & Altan M., 1996. The finite element analysis of buckling of laminated rectangular reinforced concrete plates with circular hole, *Mathematical and Computational Applications*, vol. 1, no. 2, pp. 164-168.
- [17] Yazici M., 2009. Influence of cut-out variables on buckling behavior of composite plates, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, vol. 28, no. 19, pp. 2325-2339.
- [18] Yazici M., Ozcan R., Ulku S. & Okur I., 2003. Buckling of composite plates with u-shaped cutouts, *Journal of Composite Materials*, vol. 37, no. 24, pp. 2179-2195.
- [19] Al-Jameel S.e.S. & Albazzaz R.K., 2014. Buckling analysis of composite plate with central elliptical cut out, *Al-Rafidain Engineering Journal*, vol. 22, no. 1, pp. 14-25.
- [20] Al-Qablan H., Dwairi H., Shatarat N., Rosan T. & Al-Qablan T., 2010. Stability analysis of composite panels with stiffeners and circular cutouts, *Jordan Journal of Civil Engineering*, vol. 4, no. 2.
- [21] Guo S., Zhou L. & Cheung C., 2008. Cutout reinforcements for shear loaded laminate and sandwich composite panels, *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, vol. 4, no. 2, pp. 157-171.
- [22] Yıldız Y.O., 2007. Desteklenmiş kompozit plakların sonlu elemanlar yöntemi ile burkulma analizi, Yüksek Lisans, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 212840.
- [23] Majeed M.A., 2005. Deformations of in-plane loaded unsymmetrically laminated composite plates, Doctor of Philosophy, Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia.
- [24] Szilard R., 2004. *Theories and Applications of Plate Analysis : Classical, Numerical, and Engineering Methods*, John Wiley & Sons, Hoboken, N.J.
- [25] Sokolnikoff I.S. & Specht R.D., 1956. *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd. ed., McGraw-Hill, New York.
- [26] Lekhnitskii S., 1965. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Hoden-Day, San Francisco.
- [27] Ambartsumyan S.A., 1970. *Theory of Anisotropic Plates*, Technomic, Westport, CT.
- [28] Whitney J.M., 1987. *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, Technomic, Lancaster, PA.
- [29] Reddy J.N., 1984. *Energy and Variational Methods*, John Wiley, New York.
- [30] Reddy J.N., 1984. A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 20, no. 9, pp. 881-896.

- [31] Reddy J.N., 1984. A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, no. 4, pp. 745-752.
- [32] Reddy J.N., 1990. A general non-linear third-order theory of plates with transverse shear deformations, *Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 25, no. 6, pp. 667-686.
- [33] Reddy J.N., 1990. On refined theories of composite laminates, *Meccanica*, vol. 25, no. 4, pp. 230-238.
- [34] Reddy J.N., 1987. A generalization of two-dimensional theories of laminated composite plates, *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 3, no. 3, pp. 173-180.
- [35] Robbins D.H. & Reddy J.N., 1993. The effects of kinematic assumptions on computed strain energy release rates for delaminated composite plates, *Modeling and Scientific Computing*.
- [36] Robbins D.H. & Reddy J.N., 1993. Modelling of thick composites using a layerwise laminate theory, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, no. 4, pp. 655-677.
- [37] Robbins D.H. & Reddy J.N., 1992. On the modeling of free-edge stress fields and delaminations in thick composite laminates, *Springer-Verlag Gmbh & Co. Kg, Composite Structures: Testing, Analysis and Design(Germany)*, 1992, pp. 33-74.
- [38] Reddy J.N., 1984. *An Introduction to the Finite Element Method*, 1st. ed., McGraw-Hill, New York.
- [39] Reddy J.N., 1986. *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill, New York.
- [40] Averill R. & Reddy J., 1990. On behaviour of plate elements based on the first-order shear deformation theory, *Engineering Computations*, vol. 7, no. 1, pp. 57-74.
- [41] Barlow J., 1989. More on optimal stress points—reduced integration, element distortions and error estimation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, no. 7, pp. 1487-1504.
- [42] Barlow J., 1976. Optimal stress locations in finite element models, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10, no. 2, pp. 243-251.
- [43] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. & Zhu J.Z., 2005. *The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics*, Butterworth-heinemann, Oxford.
- [44] Bathe K.J., 1996. *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, New Jersey.
- [45] Ahmad S., Irons B.M. & Zienkiewicz O.C., 1968. Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems, *Defense Technical Information Center, ADA447743*, pp. 539-572.
- [46] Liao C.L. & Reddy J., 1990. Analysis of anisotropic, stiffened composite laminates using a continuum-based shell element, *Computers & Structures*, vol. 34, no. 6, pp. 805-815.

- [47] Chao W. & Reddy J., 1984. Analysis of laminated composite shells using a degenerated 3-d element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 20, no. 11, pp. 1991-2007.
- [48] Ferruh T., 2014. Fiber takviyeli tek ve çift doğrultuda çalışan döşeme plaklarının mekanik davranışlarının karşılaştırmalı olarak incelenmesi, Yüksek Lisans, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 374122.
- [49] Goel S., 2014. Analysis of segmented shell structures, Master of Science, Universitat Stuttgart, Stuttgart.
- [50] Chajes A., 1974. *Principles of Structural Stability Theory*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [51] Cook R.D., Malkus D.S. & Plesha M.E., 1989. *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd. ed., John Wiley & Sons, New York.
- [52] Kollár L.P. & Springer G.S., 2003. *Mechanics of Composite Structures*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [53] Liu G.-R. & Quek S.S., 2003. *The Finite Element Method: A Practical Course*, Butterworth-Heinemann, Oxford.
- [54] Morozov E.V. & Vasiliev V.V., 2007. *Advanced Mechanics of Composite Materials*, 2nd. ed., Elsevier, Oxford.
- [55] Reddy J.N., 2004. *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells : Theory and Analysis*, 2nd ed., CRC Press, Washington.
- [56] Segerlind L.J., 1984. *Applied Finite Element Analysis*, 2nd. ed., John Wiley & Sons, New York.
- [57] Timoshenko S. & Woinowsky-Krieger S., 1959. *Theory of Plates and Shells*, 2nd. ed., McGraw-Hill, New York.
- [58] Kollár L.P. & Springer G.S., "Mechanics of Composite Structures," Cambridge University Press,, 2003, pp. xvii, 480.
- [59] Chen Q. & Qiao P., 2014. Post-buckling analysis of composite plates under combined compression and shear loading using finite strip method, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 83, pp. 33-42.
- [60] Gomes V.S., Lopes C.S., Pires F.F.A., Gürdal Z. & Camanho P.P., 2014. Fibre steering for shear-loaded composite panels with cutouts, *Journal of Composite Materials*, vol. 48, no. 16, pp. 1917-1926.
- [61] Grover N., Maiti D.K. & Singh B.N., 2014. An efficient c0 finite element modeling of an inverse hyperbolic shear deformation theory for the flexural and stability analysis of laminated composite and sandwich plates, *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 80, pp. 11-22.
- [62] Guo S.J., 2007. Stress concentration and buckling behaviour of shear loaded composite panels with reinforced cutouts, *Composite Structures*, vol. 80, no. 1, pp. 1-9.

- [63] Gupta A., Patel B. & Nath Y., 2014. Postbuckling response of composite laminated plates with evolving damage, *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 23, no. 2, pp. 222-244.
- [64] Jadhav S.S. & Chavan D.S., 2013. Fem & experimental analysis of composite laminate with elliptical cut out using reflection polariscope, *Int J Adv Engg Tech/lv/lil/July-Sept*, vol. 67, pp. 67-71.
- [65] Reddy J.N., Arciniega R.A. & Moleiro F., 2010. Finite element analysis of composite plates and shells, *Encyclopedia of Aerospace Engineering*.
- [66] Sahoo S., 2012. Behaviour and optimization aids of composite stiffened hyper shell roofs with cutout under free vibration, *International Scholarly Research Notices*, vol. 2012.
- [67] Sahoo S., 2014. Laminated composite stiffened shallow spherical panels with cutouts under free vibration—a finite element approach, *Engineering Science and Technology, an International Journal*, vol. 17, no. 4, pp. 247-259.
- [68] Sahu S. & Datta P., 2003. Dynamic stability of laminated composite curved panels with cutouts, *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 129, no. 11, pp. 1245-1253.
- [69] Shokrieh M. & Askari A., 2012. Similitude study of impacted composite laminates under buckling loading, *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 139, no. 10, pp. 1334-1340.
- [70] Shukla K., Nath Y., Kreuzer E. & Kumar K., 2005. Buckling of laminated composite rectangular plates, *Journal of Aerospace Engineering*, vol. 18, no. 4, pp. 215-223.
- [71] Singh S.K. & Chakrabarti A., 2012. Buckling analysis of laminated composite plates using an efficient c0 fe model, *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 9, no. 3, pp. 1-13.
- [72] Thai H.-T. & Choi D.-H., 2014. Finite element formulation of a refined plate theory for laminated composite plates, *Journal of Composite Materials*, vol. 48, no. 28, pp. 3521-3538.
- [73] Yazdani S., Rahimi G. & Ghanbari M., 2013. Experimental and numerical stress analysis of fml plates with cutouts under in-plane loading, *Mechanics*, vol. 19, no. 2, pp. 128-134.

ÖZGEÇMİŞ

- Ad Soyad** : Muhammed Fatih BAŞOĞLU
- Doğum Yeri ve Tarihi** : Erzurum, 1982
- E-Posta** : fatihbasoglu@gmail.com
- Lisans** : Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü
- Yüksek Lisans** : Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı
- Mesleki Deneyim** : OMÜ İnşaat Müh. Bölümü, Samsun – (Şub2013-...)
Araştırma Görevlisi (Mekanik Bilim Dalı)
- Caddedesign, Samsun – (Eki2011-Şub2013)
Proje, Tasarım, Uygulama
- Aktürk Yapı AŞ, İstanbul – (Ara2009-Ağu2010)
Kalite Kontrol
- Beta-Tek AŞ, İstanbul – (Eyl2008-Nis2009)
Metraj, Maliyet analizi, Teklif hazırlama
- Beyaş AŞ, İstanbul – (Ağu2007-Ağu2008)
Metraj, Hakediş, Maliyet analizi