T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

G_*-TÜMLENMİŞ VE G_*-YÜKSELTİLEBİLİR KAFESLER

DOKTORA TEZİ

Hasan Hüseyin ÖKTEN
08210549

Tez Savunma Tarihi : 12/02/2016

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Celil NEBİYEV

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Hasan Hüseyin ÖKTEN Tarafından Hazırlanan

G_*-TÜMLENMİŞ VE G_*-YÜKSELTİLEBİLİR KAFESLER

başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından 12/02/2016 tarihinde yapılan sınav ile DOKTORA tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	**:**	**Prof. Dr. Ali PANCAR** Ondokuz Mayıs Üniversitesi	....
Jüri Üyeleri	**:**	**Doç. Dr. Celil NEBİYEV** Ondokuz Mayıs Üniversitesi	....
		Doç. Dr. Hamza ÇALIŞICI Ondokuz Mayıs Üniversitesi	....
		Doç. Dr. Ayten PEKİN İstanbul Üniversitesi	....
		Doç. Dr. Hacı AKTAŞ Erciyes Üniversitesi	....

... / ... / 2016

Prof. Dr. Hüseyin DEMİR

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında; bilgi ve deneyimlerini benden hiç esirgemeyen, ihtiyacım olduğu her anda bana yol göstermek için elinden geleni yapan, fikirleriyle önümü aydınlatan değerli danışman hocam Doç. Dr. Celil NEBİYEV'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, tecrübelerini bizle paylaşmaktan büyük zevk duyan ve akademik olarak gelişimimize büyük katkı sağlayan değerli hocam Prof. Dr. Ali PANCAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu uzun ve zorlu süreçte her zaman yanımda olan ve sonsuz sabır gösteren değerli eşim Nezrin ÖKTEN'e de teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGE VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\emptyset$	:	Boş küme
$\subseteq$	:	Alt küme
$\leq$	:	Bir kısmi sıralama bağıntısı
$x < y$	:	$x \leq y$ ve $x \neq y$
$x \prec y$	:	y, x'i örter.
$x \parallel y$	:	x ile y karşılaştırılamaz
$sup\{x,y\}$	:	x ve y'nin en küçük üst sınırı
$x \vee y$	:	x ve y'nin en küçük üst sınırı
$inf\{x,y\}$	:	x ve y'nin en büyük alt sınırı
$x \wedge y$	:	x ve y'nin en büyük alt sınırı
$\bigvee D$	:	D kümesinin en küçük üst sınırı
$\bigwedge D$	:	D kümesinin en büyük alt sınırı
b/a	:	Bölüm alt kafesi
$I(L)$	:	L'nin tüm ideallerinin kümesi
$A(L)$	:	L'nin tüm atomlarının kümesi
$\cong$	:	İzomorfizma
$\ll$	:	Küçük eleman
$\oplus$	:	Direkt toplam

G_*-TÜMLENMİŞ VE G_*-YÜKSELTİLEBİLİR KAFESLER

ÖZET

Bu tezde, modül teoresinde tanımlanmış olan β^* bağıntısı ve bu bağıntı ile ilgili olarak tanımı yapılan; G^*-tümlenmiş, G^*-yükseltilebilir, eş sonlu G^*-tümlenmiş, eş sonlu G^*-yükseltilebilir modüller hakkında bilinen sonuçların kafes teoresine genelleştirilmesi üzerine çalışılmıştır.

Bulgular bölümünün birinci kısmında, kafeslerde β_* bağıntısı tanımlandı ve bağıntının genel özellikleri incelendi.

İkinci kısmında, G_*-tümlenmiş ve G_*-yükseltilebilir kafesler tanımlandı. Her G_*-yükseltilebilir kafesin G_*-tümlenmiş olduğu açıktır. Tersine eğer L kafesi G_*-tümlenmiş ve güçlü $\oplus$-tümlenmiş ise G_*-yükseltilebilirdir. L bol tümlenmiş kafes ise G_*-tümlenmiştir. L kafesi G_*-yükseltilebilir ise G_*-tümlenmiş ve $\oplus$-tümlenmiştir.

Üçüncü kısmında eş sonlu G_*-tümlenmiş ve eş sonlu G_*-yükseltilebilir kafesler tanımlandı. Her G_*-tümlenmiş kafesin eş sonlu G_*-tümlenmiş olduğu ve her eş sonlu G_*-yükseltilebilir kafesin eş sonlu G_*-tümlenmiş olduğu açıktır. L bir kompakt kafes ise L'nin G_*-tümlenmiş (G_*-yükseltilebilir) olması için gerek ve yeter koşul eş sonlu G_*-tümlenmiş (eş sonlu G_*-yükseltilebilir) olmasıdır.

Anahtar Kelimeler : β_* Bağıntısı; G_*-tümlenmiş Kafesler; G_*-yükseltilebilir Kafesler; Eş Sonlu G_*-tümlenmiş Kafesler; Eş Sonlu G_*-yükseltilebilir Kafesler.

G_*-SUPPLEMENTED AND G_*-LIFTING LATTICES

ABSTRACT

In this thesis, some known results about β_* relation and its related definitions such as G^*-supplemented, G^*-lifting, cofinitely G^*-supplemented, cofinitely G^*-lifting modules are generalized to lattices.

In the first section of the Findings chapter, we define β_* relation in lattices and investigate general properties of this relation.

In the second section, we define G_*-supplemented and G_*-lifting lattices. It is clear that every G_*-lifting lattice is G_*-supplemented. Conversely, if L is G_*-supplemented and strongly $\oplus$-supplemented, then L is G_*-lifting. If L is an amply supplemented lattice, then L is G_*-supplemented. If L is G_*-lifting, then L is G_*-supplemented and $\oplus$-supplemented.

In the third section, we define cofinitely G_*-supplemented and cofinitely G_*-lifting lattices. It is clear that every G_*-supplemented lattice is a cofinitely G_*-supplemented lattice and every cofinitely G_*-lifting lattice is a G_*-supplemented lattice. If L is a compact lattice, then L is G_*-supplemented (G_*-lifting) if and only if L is cofinitely G_*-supplemented (cofinitely G_*-lifting).

Key Words : β_* Relation; G_*-supplemented Lattices; G_*-lifting Lattices; Cofinitely G_*-supplemented Lattices; Cofinitely G_*-lifting Lattices.

1. GİRİŞ

Bir M R-modülünün tüm alt modüllerinden oluşan küme, alt modüllerin kesişimi ve toplamı işlemlerine göre bir kafes oluşturur. Dolayısıyla kafesler ve modüller arasında bir irtibat kurmak mümkündür. Bu ise modüllerde sağlanan bazı özellikleri kafeslere taşıma olanağının varlığını gösterir. Bu çalışmamızda modül teorisi için sağlanan bazı yeni özellikleri kafesler teorisine genelleştirmeye çalıştık. F. Kasch ve E. A. Mares 1966 yılında yapmış oldukları "Eine kennzeichonung semi-perfekter moduln" isimli çalışmalarında tümleyen modülleri ilk defa tanımlamışlardır. J. Golan 1971 yılındaki "Quasiperfect modules" isimli çalışmasında bu modülleri tümlenmiş modül olarak adlandırmıştır. Zöschinger 1979 yılında çalışmasında, zayıf tümlenmiş modülleri tanımlamıştır. G. Călugăreanu 2000 yılında yayınlamış olduğu "Lattice Concepts of Module Theory" kitabında, tümlenmiş modüllerin kafesler teoresine genelleştirilmesi üzerine çalışmalar yapmıştır. R. Alizade ve E. Toksoy 2009 yılında yaptıkları "Cofinitely Weak Supplemented Lattices" ve 2011 yılında yaptıkları "Cofinitely Supplemented Modular Lattices" isimli çalışmalarında eş sonlu tümlenmiş ve eş sonlu zayıf tümlenmiş kafesleri incelemişlerdir.

Nurhan Sökmez 2011 yılında doktora tez çalışmasında bir modülün alt modülleri arasında β^* bağıntısını, M bir R-modül ve X,Y M'nin alt modülleri olmak üzere, "$X\beta^*Y \Leftrightarrow (X+Y)/Y \ll M/Y$ ve $(X+Y)/X \ll M/X$" şeklinde tanımlamış ve bazı sonuçlara ulaşmıştır. Biz de bu çalışmamızda, bu sonuçları kafesler teorisine taşıyıp genelleştirmeye çalıştık. Çalışmamızda bir kafesin elemanları arasında, modüllere benzer olarak bir β_* bağıntısı tanımladık. Yine modüllerdeki tanımlarına benzer olarak tanımlanmış tümleyenlik, zayıf tümleyenlik, bütünleyenlik ve radikal kavramları yardımıyla, modüllerde elde edilen β^* bağıntısının birtakım özellikleri kafeslere genelleştirilmiştir. Kafeslerde tanımlanan β_* bağıntısı yardımı ile G_*-tümlenmiş, G_*-yükseltilebilir, eş sonlu G_*-tümlenmiş ve eş sonlu G_*-yükseltilebilir kafesler tanımlanarak bunların genel özellikleri incelenmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Sıralı Kümeler

Tanım 2.1.1. P boştan farklı bir küme ve "$\leq$", P üzerinde bir bağıntı olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa "$\leq$" bağıntısına P üzerinde bir *kısmi sıralama bağıntısı* denir.

(i) Her $x \in P$ için $x \leq x$.

(ii) $x, y \in P$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$.

(iii) $x, y, z \in P$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$ (Davey ve Priestley, 2002, s. 2).

Tanım 2.1.2. Üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olan bir P kümesine, *kısmi sıralı küme* denir ve $(P, \leq)$ ile gösterilir (Davey ve Priestley, 2002, s. 2).

Not. $(P, \leq)$ bir sıralı küme olmak üzere, $x, y \in P$ için $x \leq y$ ise bu durum bazen $y \geq x$ ile de ifade edilir.

Tanım 2.1.3. A bir kısmi sıralı küme olsun. $\emptyset \neq K \subseteq A$ olmak üzere K da bir kısmi sıralı küme olarak düşünülebilir. K kısmi sıralı kümesine, A'nın bir *alt kısmi sıralı kümesi* denir (Călugăreanu, 2000, s. 2).

Tanım 2.1.4. A bir kısmi sıralı küme olsun. $x, y \in A$ olmak üzere, eğer $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise x ve y elemanları *karşılaştırılabilirdir*, aksi takdirde *karşılaştırılamaz* (*karşılaştırılabilir değildir*) denir. x ile y karşılaştırılamaz ise bu durum $x \parallel y$ ile gösterilir. $\emptyset \neq C \subseteq A$ olmak üzere, eğer her $x, y \in C$ için x ve y karşılaştırılabilir ise C kümesine bir *zincir* denir (Călugăreanu, 2000, s. 2).

Tanım 2.1.5. A bir kısmi sıralı küme ve $x, y \in A$ olsun. Bu takdirde $x \leq y$ ve $x \neq y$ olması durumu $x < y$ (veya $y > x$) ile ifade edilir (Călugăreanu, 2000, s. 2).

Tanım 2.1.6. A bir kısmi sıralı küme olsun. $x, y \in A$ için $x < y$ ve $x \leq z < y$ iken $x = z$ oluyorsa veya buna denk olarak A'nın $x < z < y$ olacak şekilde hiçbir z elemanı yoksa *x, y tarafından örtülür* veya *y, x'i örter* denir ve $x \prec y$ ile gösterilir (Călugăreanu, 2000, s. 3).

Tanım 2.1.7. A bir kısmi sıralı küme ve $\emptyset \neq X \subseteq A$ olsun. $m \in X$ olmak üzere eğer her $x \in X$ için $x \leq m$ ise bu m elemanına A kısmi sıralı kümesinin X alt kümesindeki *en büyük elemanı* denir. X'in bir en büyük elemanı varsa tektir (Călugăreanu, 2000, s. 2).

Tanım 2.1.8. A bir kısmi sıralı küme ve $\emptyset \neq X \subseteq A$ olsun. $m \in X$ olmak üzere eğer her $x \in X$ için $m \leq x$ ise bu m elemanına A kısmi sıralı kümesinin X alt kümesindeki *en küçük elemanı* denir. X'in bir en küçük elemanı varsa tektir (Călugăreanu, 2000, s. 2).

Tanım 2.1.9. A bir kısmi sıralı küme, $\emptyset \neq X \subseteq A$ ve $m \in X$ olsun. X içinde m elemanından daha büyük (küçük) eleman yok ise, yani her $x \in X$ için $m \leq x$ $(x \leq m)$ iken $m = x$ oluyorsa, m elemanına X'de *maksimal (minimal) eleman* denir (Călugăreanu, 2000, s. 2).

Sonuç olarak, bir en büyük (en küçük) eleman varsa her zaman maksimal (minimal) elemandır, ancak maksimal (minimal) elemanlar, en büyük (en küçük) eleman olmak zorunda değildir (Călugăreanu, 2000, s. 2).

Tanım 2.1.10. P bir kısmi sıralı küme, $\emptyset \neq S \subseteq P$ ve $x \in P$ olsun. Her $s \in S$ için $s \leq x$ ise x elemanına S'nin bir *üst sınırı* denir. Benzer şekilde, her $s \in S$ için $x \leq s$ ise x elemanına S'nin bir *alt sınırı* denir (Călugăreanu, 2000, s. 2).

Tanım 2.1.11. A bir kısmi sıralı küme ve $\emptyset \neq X \subseteq A$ olsun. $a \in A$ elemanı X için bir üst sınır ve X'in üst sınırı olan her b elemanı için $a \leq b$ ise, $a \in A$ elemanına X'in bir *en küçük üst sınırı* (veya *supremumu*) denir (Călugăreanu, 2000, s. 2).

Benzer şekilde, $a \in A$ elemanı X için bir alt sınır ve X'in alt sınırı olan her b elemanı için $b \leq a$ ise $a \in A$ elemanına X'in bir *en büyük alt sınırı* (veya *infumumu*) denir (Călugăreanu, 2000, s. 2).

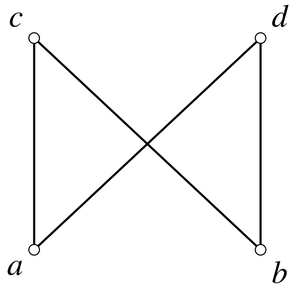
X'in üst sınırlarının en küçüğü $sup X$ veya $\bigvee X$ ile gösterilir. Benzer şekilde X'in alt sınırlarının en büyüğü de $inf X$ veya $\bigwedge X$ ile gösterilir. Özel olarak $X = \{x, y\}$ ise, $sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $inf\{x, y\} = x \wedge y$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 2.1.12 (**Zorn Lemması**). Boş olmayan bir kısmi sıralı küme içindeki boş olmayan her zincirin o küme içinde bir üst sınırı varsa, bu kısmi sıralı kümenin en az bir maksimal elemanı vardır (Călugăreanu, 2000, s. 3).

Tanım 2.1.13. A kısmi sıralı bir küme ve $\emptyset \neq D \subseteq A$ olsun. D'nin boştan farklı her sonlu alt kümesi, D içinde bir üst (alt) sınıra sahipse D'ye bir *üstten (alttan) yönlü küme* denir (Călugăreanu, 2000, s. 4).

Bir çok kısmi sıralı küme (özellikle sonlu olanlar) diyagramlar aracılığıyla ifade edilebilirler. Kısmi sıralı kümenin her bir elemanı diyagramda bir küçük çember ile gösterilir. Kısmi sıralı kümenin a ve b elemanları için $a \prec b$ ise, diyagramda b elemanı a elemanının üstünde yer alır ve bunlar düz bir çizgi ile birleştirilir (Davey ve Priestley, 2002, s. 11).

Örnek 2.1.1. $P = \{a,b,c,d\}$; $a \leq c$, $a \leq d$, $b \leq c$ ve $b \leq d$ ile tanımlanan bir kısmi sıralı küme ise diyagramı Şekil 2.1'deki gibidir.



Şekil 2.1: $(P, \leq)$ diyagramı

Tanım 2.1.14. A ve B birer kısmi sıralı küme ve $f : (A, \leq) \to (B, \leq)$, $a \leq b$ koşulunu sağlayan her $a, b \in L$ için $f(a) \leq f(b)$ olacak şekilde bir fonksiyon ise f'ye bir *sıralama morfizması* denir. Ayrıca, birebir sıralama morfizmasına *sıralama gömme morfizması* denir (Călugăreanu, 2000, s. 4).

Tanım 2.1.15. A ve B birer kısmi sıralı küme ve $f : (A, \leq) \to (B, \leq)$, tersi de sıralama morfizması olan birebir ve örten bir sıralama morfizması ise f'ye *sıralama izomorfizması* denir. Eğer A'dan B'ye tanımlı bir sıralama izomorfizması varsa, A ve B'ye *sıralı izomorfik kümeler* denir (Călugăreanu, 2000, s. 4).

Yardımcı Teorem 2.1.16. P ve Q sonlu kısmi sıralı kümeler, $\varphi : P \to Q$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) φ bir sıralama izomorfizmasıdır.

(ii) $x, y \in P$ olmak üzere, $x < y$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(x) < \varphi(y)$ olmasıdır.

(iii) $x, y \in P$ olmak üzere, $x \prec y$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(x) \prec \varphi(y)$ olmasıdır (Davey ve Priestley, 2002, s. 13).

İspat. (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Sıralama izomorfizması tanımı gereği açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $(\Rightarrow)$: $x, y \in P$ ve $x \prec y$ olsun. Bu durumda $x < y$ ve hipotez gereği

$\varphi(x) < \varphi(y)$ olur. $w \in Q$ olmak üzere $\varphi(x) \leq w \leq \varphi(y)$ olsun. φ dönüşümü örten olduğundan, $\varphi(u) = w$ olacak şekilde bir $u \in P$ vardır. Hipotez gereği $x \leq u \leq y$ olup $x \prec y$ olduğundan $u = x$ veya $u = y$ olur. Eğer burada $u = x$ olsa $w = \varphi(u) = \varphi(x)$ olur. Eğer $u = y$ olsa $w = \varphi(u) = \varphi(y)$ olur. O halde $\varphi(x) \prec \varphi(y)$ olur.

$(\Leftarrow)$: $x, y \in P$ ve $\varphi(x) \prec \varphi(y)$ olsun. Bu durumda $\varphi(x) < \varphi(y)$ olup hipotezden $x < y$ olur. Bir $u \in P$ için $x < u < y$ olsa, hipotezden $\varphi(x) < \varphi(u) < \varphi(y)$ olur ki bu da $\varphi(x) \prec \varphi(y)$ olması ile çelişir. O halde $x \prec y$ olup istenen elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) $(\Rightarrow)$: $x, y \in P$ ve $x < y$ olsun. Bu durumda P sonlu elemanlı olduğundan $x = x_0 \prec x_1 \prec x_2 \prec ... \prec x_n = y$ olacak şekilde bir n doğal sayısı ve $x_0, x_1, x_2, ..., x_n \in P$ elemanları vardır. Hipotez gereği, $\varphi(x) = \varphi(x_0) \prec \varphi(x_1) \prec \varphi(x_2) \prec ... \prec \varphi(x_n) = \varphi(y)$ bulunur. O halde $\varphi(x) < \varphi(y)$ olur.

$(\Leftarrow)$: $x, y \in P$ ve $\varphi(x) < \varphi(y)$ olsun. Eğer $\varphi(x) \prec \varphi(y)$ ise hipotezden $x \prec y$ olup $x < y$ olur. $\varphi(x) \not\prec \varphi(y)$ olsun. Bu durumda Q sonlu elemanlı olduğundan, $\varphi(x) \prec w_1 \prec w_2 \prec ... \prec w_n \prec \varphi(y)$ olacak şekilde $w_1, \ldots, w_n \in Q$ elemanları vardır. φ örten olduğundan $1 \leq i \leq n$ için $\varphi(u_i) = w_i$ olacak şekilde bir $u_i \in P$ vardır. Burada $\varphi(x) \prec \varphi(u_1) \prec \varphi(u_2) \prec \cdots \prec \varphi(u_n) \prec y$ olup hipotezden $x \prec u_1 \prec u_2 \prec \cdots \prec u_n \prec y$ olur. O halde $x < y$ olup istenen elde edilir.

Önerme 2.1.17. İki sonlu kısmi sıralı kümenin sıralı izomorfik olması için gerek ve yeter koşul aynı diyagram ile gösterilebilmeleridir (Davey ve Priestley, 2002, s. 14).

İspat. $(\Rightarrow)$: P ve Q iki kısmi sıralı küme ve $\varphi : P \to Q$ bir sıralama izomorfizması olsun. Yardımcı Teorem 2.1.16'de, (i) ile (iii) ifadelerinin denkliği dikkate alınırsa diyagramların aynı olduğu görülür.

$(\Leftarrow)$: Yardımcı Teorem 2.1.16'dan açıktır.

2.2 Kafesler

Tanım 2.2.1. L boş olmayan bir kısmi sıralı küme olsun.

(i) Her $x, y \in L$ için L'de $x \vee y$ ve $x \wedge y$ varsa L'ye bir *kafes*,

(ii) Her $\emptyset \neq S \subseteq L$ için L'de $\bigvee S$ ve $\bigwedge S$ varsa L'ye bir *tam kafes*

denir (Roman, 2009, s. 53).

Yardımcı Teorem 2.2.2. L bir kafes ve $a, b \in L$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

(i) $a \leq b$

(ii) $a \vee b = b$

(iii) $a \wedge b = a$ (Davey ve Priestley, 2002, s. 39).

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) $a \leq b$ ve $b \leq b$ olduğundan, b elemanı $\{a,b\}$ kümesinin bir üst sınırı olup $a \vee b \leq b$ olur. Ayrıca $b \leq a \vee b$ olduğundan $a \vee b = b$ bulunur.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) $a \vee b = b$ ve $a \leq a \vee b$ olduğundan $a \leq b$ olur. $a \leq b$ ve $a \leq a$ olduğundan, a elemanı $\{a,b\}$ kümesinin bir alt sınırı olup $a \leq a \wedge b$ olur. Ayrıca $a \wedge b \leq a$ olduğundan $a \wedge b = a$ olur.
(iii) $\Rightarrow$ (i) $a \wedge b = a$ ve $a \wedge b \leq b$ olduğundan $a \leq b$ olup istenen elde edilir.

Teorem 2.2.3. L bir kafes olsun. Bu durumda her $a,b,c \in L$ için aşağıdakiler sağlanır.

(i) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$;

(ii) $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$;

(iii) $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$;

(iv) $a \vee a = a$, $a \wedge a = a$ (Cohn, 2002, s. 53).

İspat. (i) $(a \vee b) \vee c = x$ ve $a \vee (b \vee c) = y$ diyelim. $(a \vee b) \vee c = x$ olduğundan $a \vee b \leq x$ ve $c \leq x$ olur. $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$ ve $a \vee b \leq x$ olduğundan $a \leq x$ ve $b \leq x$ olur. $b \leq x$ ve $c \leq x$ olduğundan $b \vee c \leq x$ olur. $a \leq x$ ve $b \vee c \leq x$ olduğundan $y = a \vee (b \vee c) \leq x$ olur. Benzer şekilde, $a \vee (b \vee c) = y$ olduğundan $a \leq y$ ve $b \vee c \leq y$ olur. $b \leq b \vee c$, $c \leq b \vee c$ ve $b \vee c \leq y$ olduğundan $b \leq y$ ve $c \leq y$ olur. $a \leq y$ ve $b \leq y$ olduğundan $a \vee b \leq y$ olur. $a \vee b \leq y$ ve $c \leq y$ olduğundan $x = (a \vee b) \vee c \leq y$ olur. $x \leq y$ ve $y \leq x$ olduğundan $x = y$ olup $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ bulunur. $(a \wedge b) \wedge c = k$ ve $a \wedge (b \wedge c) = t$ olsun. $(a \wedge b) \wedge c = k$ olduğundan $k \leq a \wedge b$ ve $k \leq c$ olur. $k \leq a \wedge b$, $a \wedge b \leq a$ ve $a \wedge b \leq b$ olduğundan $k \leq a$ ve $k \leq b$ olur. $k \leq b$ ve $k \leq c$ olduğundan $k \leq b \wedge c$ olup ayrıca $k \leq a$ olduğundan $k \leq a \wedge (b \wedge c) = t$ olur. $a \wedge (b \wedge c) = t$ olduğundan $t \leq a$ ve $t \leq b \wedge c$ olur. $t \leq b \wedge c$, $b \wedge c \leq b$ ve $b \wedge c \leq c$ olduğundan $t \leq b$ ve $t \leq c$ olur. $t \leq a$ ve $t \leq b$ olduğundan $t \leq a \wedge b$ olup ayrıca $t \leq c$ olduğundan $t \leq (a \wedge b) \wedge c = k$ olur. $k \leq t$ ve $t \leq k$ olduğundan $k = t$ olup $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ bulunur.
(ii) En küçük üst sınır ve en büyük alt sınır tanımları gereği açıktır.
(iii) $a \leq (a \vee b)$ ve $(a \wedge b) \leq a$ olduğundan, Yardımcı Teorem 2.2.2 gereği eşitlikler sağlanır.
(iv) $a \leq a$ olduğundan, Yardımcı Teorem 2.2.2 gereği eşitlikler sağlanır.

Not. L bir kafes ve $a,b,c \in L$ olmak üzere, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$ olduğundan $(a \vee b) \vee c$ ve $a \vee (b \vee c)$ yerine genellikle $a \vee b \vee c$ yazılır. $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ olduğundan $(a \wedge b) \wedge c$ ve $a \wedge (b \wedge c)$ yerine genellikle $a \wedge b \wedge c$ yazılır.

Tanım 2.2.4. L bir kafes olsun. $1 \in L$ olmak üzere, her $a \in L$ için $a \leq 1$ ise 1 elemanına L'nin *biri* denir. Benzer olarak $0 \in L$ olmak üzere, her $a \in L$ için $0 \leq a$ ise 0 elemanına L'nin *sıfırı* denir. Biri ve sıfırı olan bir L kafesine *sınırlı kafes* denir. Birli bir L kafesinde boş kümenin infumumu $inf\emptyset = 1$ olarak tanımlanır. Sıfırlı bir L kafesinde boş kümenin supremumu $sup\emptyset = 0$ olarak tanımlanır (Călugăreanu, 2000, s. 5).

Bir L tam kafesinde; $sup L$, $sup\emptyset$, $inf L$, $inf\emptyset$ elemanlarının varlığı aşikardır. Bu durumda $1 = sup L = inf\emptyset$ ve $0 = sup\emptyset = inf L$ olur.

Teorem 2.2.5. Bir L kısmi sıralı kümesinin tam kafes olması için gerek ve yeter koşul L'nin her alt kümesinin (boş küme de dahil) bir en büyük alt sınıra sahip olmasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 5).

İspat. $(\Rightarrow)$: Tam kafes tanımından açıktır.
$(\Leftarrow)$: A, L'nin boştan farklı bir alt kümesi ve $B = \{x \in L \mid \forall a \in A \text{ için } a \leq x\}$ olsun. $1 = inf\emptyset$ mevcut olduğundan, her $a \in A$ için $a \leq 1$ olup $1 \in B$ olur. O halde B kümesi boş kümeden farklıdır. $x \in A$ alalım. Bu durumda her $b \in B$ için $x \leq b$ olur. O halde x elemanı, B kümesi için bir alt sınırdır. Yani A'nın her elemanı B'nin bir alt sınırı olur. Burada $infB$ mevcut olduğundan her $x \in A$ için $x \leq infB$ olup $inf B$, A kümesinin bir üst sınırıdır. $k \in L$, A'nın bir üst sınırı olsun. $k \in B$ olduğundan $inf B \leq k$ olur. O halde, A'nın supremumu var ve $sup A = inf B$ olur.
Bu teoremin duali aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.2.6. Bir L kısmi sıralı kümesinin tam kafes olması için gerek ve yeter koşul L'nin her alt kümesinin (boş küme de dahil) bir en küçük üst sınıra sahip olmasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 5).

Tanım 2.2.7. Bir L kafesinin boştan farklı bir S alt kümesi; L'deki $\vee$, $\wedge$ işlemleri altında kapalıysa, yani her $a,b \in S$ için $a \vee b, a \wedge b \in S$ ise S, L'nin bir *alt kafesidir* denir. Bu durumda S de bir kafestir (Davey ve Priestley, 2002, s. 41).

Benzer şekilde, bir L tam kafesinin boştan farklı bir B alt kümesi, her $X \subseteq B$ için $inf_L X \in B$ ve $sup_L X \in B$ koşulunu sağlıyorsa, B'ye L'nin bir *tam alt kafesi* denir (Călugăreanu, 2000, s. 6).

Tanım 2.2.8. L bir kafes $a,b \in L$ ve $a \leq b$ olmak üzere, L kafesinin $\{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$ alt kafesi *bölüm alt kafesi* olarak adlandırılır ve b/a şeklinde gösterilir. Sıfırı olmayan bir L kafesi için $a/0 = \{x \in L \,|x \leq a\}$ olarak tanımlanır. Eğer $a \prec b$ ise, b/a bölüm alt kafesine *basittir* denir (Călugăreanu, 2000, s. 6).

Tanım 2.2.9. L kafesinin boştan farklı bir I alt kümesi için;

(i) Her $x,y \in I$ için $x \vee y \in I$;

(ii) $t \in L$ olmak üzere, bir $x \in I$ için $t \leq x$ ise $t \in I$;

koşulları sağlanıyorsa, I'ya L'nin bir *ideali* denir (Davey ve Priestley, 2002, s. 44).

Bu tanımda (ii) koşulu "$x \in I$ ve $y \in L \Rightarrow x \wedge y \in I$" ile denktir.

L bir kafes ve $a \in L$ olmak üzere, tanım gereği $a/0$ bölüm alt kafesi L'nin bir ideali olur. L'nin tüm ideallerinin kümesi $I(L)$ ile gösterilir (Călugăreanu, 2000, s. 6).

Teorem 2.2.10. L bir kafes ve $I \subseteq L$ olsun. I'nın L kafesinin bir ideali olması için gerek ve yeter koşul her $x,y \in I$ için $(x \vee y)/0 \subseteq I$ olmasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 6).

İspat. $(\Rightarrow)$: I, L'nin bir ideali, $x,y \in I$ ve $a \in (x \vee y)/0$ keyfi bir eleman olsun. Bu durumda $x \vee y \in I$ ve $a \leq x \vee y$ olduğundan, ideal tanımı gereği $a \in I$ olur. O halde $(x \vee y)/0 \subseteq I$ bulunur.
$(\Leftarrow)$: $x,y \in I$ keyfi elemanlarını alalım. Hipotez gereği $(x \vee y)/0 \subseteq I$ olur, yani $x \vee y \in I$ elde edilir. $t \leq x$ olacak şekilde bir $t \in L$ için $t \leq x \leq x \vee y$ olduğundan $t \in (x \vee y)/0$ olup $(x \vee y)/0 \subseteq I$ olduğundan $t \in I$ olur. O halde I, L'nin bir idealidir.

2.3 Kafes Homomorfizmaları

Tanım 2.3.1. K ve L iki kafes ve f, K'dan L'ye bir fonksiyon olsun. Her $a,b \in K$ için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa f'ye bir *kafes homomorfizması* denir.

(i) $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$

(ii) $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$

Bijektif (birebir ve örten) kafes homomorfizmasına bir *kafes izomorfizması* denir. K ve L kafesleri arasında bir kafes izomorfizması varsa, *K ile L izomorfik kafeslerdir* denir ve $K \cong L$ şeklinde gösterilir (Călugăreanu, 2000, s. 6).

Bir kafes izomorfizmasının tersi de kafes izomorfizması olur (Călugăreanu, 2000, s. 6).

Teorem 2.3.2. İki kafes arasında tanımlanan bir fonksiyonun sıralama izomorfizması olması için gerek ve yeter koşul bu fonksiyonun bir kafes izomorfizması olmasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 7).

İspat. $(\Rightarrow)$: K,L birer kafes ve $f : K \to L$ bir sıralama izomorfizması olsun. $a,b \in K$ keyfi elemanlarını alalım. Bu durumda $a \wedge b \leq a$ ve $a \wedge b \leq b$ olduğundan, f'nin sıralama izomorfizması olması gereği $f(a \wedge b) \leq f(a)$ ve $f(a \wedge b) \leq f(b)$ bulunur. O halde $f(a \wedge b)$, $\{f(a), f(b)\}$ kümesinin bir alt sınırıdır. $k^{'} \in L$, $\{f(a), f(b)\}$ kümesinin bir alt sınırı ve $f(k) = k^{'}$ olsun. f^{-1} de sıralama izomorfizması olduğundan, $k = f^{-1}(k^{'}) \leq f^{-1}(f(a)) = a$ ve $k = f^{-1}(k^{'}) \leq f^{-1}(f(b)) = b$ elde edilir. O halde $k \leq a \wedge b$ olur. f'nin sıralama izomorfizması olması gereği $k^{'} = f(k) \leq f(a \wedge b)$ bulunur. Dolayısıyla $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ olur. Benzer şekilde, $a \leq a \vee b$ ve $b \leq a \vee b$ olduğundan, f'nin sıralama izomorfizması olması gereği $f(a) \leq f(a \vee b)$ ve $f(b) \leq f(a \vee b)$ bulunur. O halde $f(a \vee b)$, $\{f(a), f(b)\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. $t^{'} \in L$ elemanı $\{f(a), f(b)\}$ kümesinin bir üst sınırı ve $t \in K$ olmak üzere $f(t) = t^{'}$ olsun. f^{-1} de bir sıralama izomorfizması olduğundan, $a = f^{-1}(f(a)) \leq f^{-1}(t^{'}) = t$ ve $b = f^{-1}(f(b)) \leq f^{-1}(t^{'}) = t$ elde edilir. O halde $a \vee b \leq t$ olur. f'nin bir sıralama izomorfizması olması gereği $f(a \vee b) \leq f(t) = t^{'}$ bulunur. Dolayısıyla $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ olur. O halde f bir kafes izomorfizmasıdır.

$(\Leftarrow)$: K,L birer kafes ve $f : K \to L$ bir kafes izomorfizması olsun. $a,b \in K$ keyfi elemanları için $a \leq b$ koşulu sağlansın. $a \vee b = b$ ve f kafes izomorfizması olduğundan, $f(b) = f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$ bulunur. Buradan $f(a) \leq f(b)$ bulunur. O halde f bir sıralama morfizmasıdır. $f^{-1} : L \to K$ bir kafes izomorfizması olduğundan, bu fonksiyonun da bir sıralama morfizması olduğu gösterilebilir. O halde f bir sıralama izomorfizmasıdır.

2.4 Modüler Kafesler

Tanım 2.4.1. L bir kafes olsun. Her $a,b,c \in L$ için, *modüler kural* adı verilen

$$c \leq a \Rightarrow a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee c$$

koşulu sağlanıyorsa, L'ye bir *modüler kafes* denir (Călugăreanu, 2000, s. 7).

Modüler bir kafesin her alt kafesi de modülerdir.

Yardımcı Teorem 2.4.2. L bir kafes ve $a,b,c \in L$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$

(ii) $c \leq a$ ise $(a \wedge b) \vee c \leq a \wedge (b \vee c)$

(iii) $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$ (Davey ve Priestley, 2002, s. 85).

İspat. (i) $a \wedge b \leq a$ ve $a \wedge c \leq a$ olduğundan $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a$ bulunur. Benzer şekilde $a \wedge b \leq b \leq b \vee c$ ve $a \wedge c \leq c \leq b \vee c$ olduğundan $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq b \vee c$ bulunur. O halde $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \wedge (b \vee c)$ elde edilir.
(ii) (i) gereği açıktır.
(iii) $a \wedge b \leq a \leq a \vee b$, $a \wedge b \leq b \leq b \vee c$ ve $a \wedge b \leq a \leq c \vee a$ olduğundan $a \wedge b \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$ olur. $b \wedge c \leq b \leq a \vee b$, $b \wedge c \leq b \leq b \vee c$ ve $b \wedge c \leq c \leq c \vee a$ olduğundan $b \wedge c \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$ olur. $c \wedge a \leq a \leq a \vee b$, $c \wedge a \leq c \leq b \vee c$ ve $c \wedge a \leq c \leq c \vee a$ olduğundan $c \wedge a \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$ olur. O halde $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee (c \wedge a) \leq (a \vee b) \wedge (b \vee c) \wedge (c \vee a)$ olup istenen elde edilir.

Teorem 2.4.3. Bir L kafesinin modüler olması için gerek ve yeter koşul her $a, b, c \in L$ için

$$c \leq a \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$$

koşulunun sağlanmasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 7).

İspat. Modüler kafes tanımı ve Yardımcı Teorem 2.4.2 (ii) gereği açıktır.

Yardımcı Teorem 2.4.4. L bir modüler kafes olsun. Her $b, c, d \in L$ için

$$(c \vee d) \wedge b \leq [c \wedge (b \vee d)] \vee [d \wedge (b \vee c)]$$

sağlanır.

İspat. $c \wedge (b \vee d) \leq b \vee c$ olduğundan modüler kural gereği

$$[c \wedge (b \vee d)] \vee [d \wedge (b \vee c)] = [(c \wedge (b \vee d)) \vee d] \wedge (b \vee c)$$

olur. Buradan, $d \leq b \vee d$ olduğu dikkate alınırsa modüler kural gereği

$$(c \wedge (b \vee d)) \vee d = (c \vee d) \wedge (b \vee d)$$

bulunur. Yukarıdaki iki eşitlikten

$$[c \wedge (b \vee d)] \vee [d \wedge (b \vee c)] = [(c \wedge (b \vee d)) \vee d] \wedge (b \vee c) = (c \vee d) \wedge (b \vee d) \wedge (b \vee c)$$

elde edilir. $b \leq (b \vee d) \wedge (b \vee c)$ olduğundan

$$(c \vee d) \wedge b \leq (c \vee d) \wedge (b \vee d) \wedge (b \vee c)$$

olur. O halde buradan

$$(c \vee d) \wedge b \leq [c \wedge (b \vee d)] \vee [d \wedge (b \vee c)]$$

bulunur.

Teorem 2.4.5. Bir L kafesinin modüler olması için gerek ve yeter koşul $a \leq c$, $a \wedge b = c \wedge b$ ve $a \vee b = c \vee b$ koşullarını sağlayan her $a, b, c \in L$ için $a = c$ olmasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 7).

İspat. $(\Rightarrow)$: L bir modüler kafes ve $a, b, c \in L$ elemanları için $a \leq c$, $a \wedge b = c \wedge b$ ve $a \vee b = c \vee b$ olsun. Bu durumda $a \vee (b \wedge c) = a \vee (a \wedge b) = a$ ve $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c = (c \vee b) \wedge c = c$ bulunur. O halde $a = c$ olur.
$(\Leftarrow)$: $a, b, c \in L$ elemanları için $a \leq c$ olsun. $a' = a \vee (b \wedge c)$ ve $c' = (a \vee b) \wedge c$ alınırsa $a \leq a' \leq c' \leq c$ elde edilir. $a \leq a'$ olduğundan

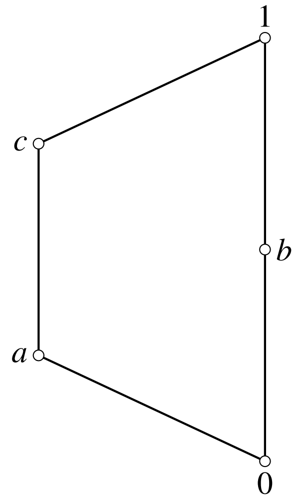
$$c' = (a \vee b) \wedge c \leq a \vee b \leq a' \vee b$$

bulunur. Bu durumda $b \leq a' \vee b$ olduğu da dikkate alınırsa $c' \vee b \leq a' \vee b$ elde edilir. Ayrıca $a' \leq c'$ olması gereği $a' \vee b \leq c' \vee b$ bulunur. O halde $a' \vee b = c' \vee b$ olur. Benzer şekilde, $b \leq a \vee b$ olduğundan $(a \vee b) \wedge b = b$ olup $c' \wedge b = (a \vee b) \wedge c \wedge b = (a \vee b) \wedge b \wedge c = b \wedge c \leq a \vee (b \wedge c) = a'$ olur. Ayrıca $c' \wedge b \leq b$ olduğundan $c' \wedge b \leq a' \wedge b$ olur. $a' \leq c'$ olduğundan $a' \wedge b \leq c' \wedge b$ olur. O halde $a' \wedge b = c' \wedge b$ olur. Hipotez gereği

$$a \vee (b \wedge c) = a' = c' = (a \vee b) \wedge c$$

bulunur. O halde L bir modüler kafestir.

Teorem 2.4.6. Bir L kafesinin modüler olması için gerek ve yeter koşul Şekil 2.2'deki diyagram ile temsil edilen *beşgen* (N_5) kafesine izomorf bir alt kafesinin olmamasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 8).



Şekil 2.2: Beşgen(N_5) kafes diyagramı

İspat. $(\Rightarrow)$: L bir modüler kafes olsun. Bu durumda L'nin her alt kafesi modülerdir. Beşgen kafeste; $a \leq c$, $a \wedge b = c \wedge b$, $a \vee b = c \vee b$ iken $a \neq c$ olur. O halde Teorem 2.4.5 gereği beşgen kafes modüler değildir. Sonuç olarak, L'nin hiç bir alt kafesi beşgen kafese izomorf olamaz.
$(\Leftarrow)$: L kafesi modüler olmasın. Bu durumda Teorem 2.4.5 gereği $d < e$, $d \wedge f = e \wedge f$, $d \vee f = e \vee f$ olacak şekilde $d, e, f \in L$ elemanları vardır. Bu durumda

$$S = \{d, e, f, d \wedge f, d \vee f\}$$

kümesi L'nin bir alt kafesidir ve beşgen kafese izomorftur. O halde varsayım yanlış olup L bir modüler kafes olur.

Teorem 2.4.7. *L bir modüler kafes ve $a, b \in L$ olsun. Bu durumda, L'nin $(a \vee b)/b$ ve $a/(a \wedge b)$ bölüm alt kafesleri izomorftur (Călugăreanu, 2000, s. 8).*

İspat. Her $x \in (a \vee b)/b$ için $a \wedge b \leq b \leq x$ ve $a \wedge b \leq a$ olduğundan $a \wedge b \leq x \wedge a$ bulunur ve $f : (a \vee b)/a \to a/(a \wedge b), f(x) = x \wedge a$ fonksiyonu tanımlanabilir. Her $x, y \in (a \vee b)/b$ için $f(x \vee y) = (x \vee y) \wedge a = ((x \wedge (a \vee b)) \vee (y \wedge (a \vee b))) \wedge a = ((x \wedge a) \vee b \vee (y \wedge a) \vee b) \wedge a = ((x \wedge a) \vee (y \wedge a) \vee b) \wedge a = (x \wedge a) \vee (y \wedge a) \vee (a \wedge b) = (x \wedge a) \vee (y \wedge a) = f(x) \vee f(y)$ ve $f(x \wedge y) = x \wedge y \wedge a = (x \wedge a) \wedge (y \wedge a) = f(x) \wedge f(y)$ olup f bir kafes homomorfizmasıdır. $x, y \in (a \vee b)/b$ ve $f(x) = x \wedge a = y \wedge a = f(y)$ olsun. Bu durumda modülerlik gereği;

$$x = x \wedge (a \vee b) = (x \wedge a) \vee b = (y \wedge a) \vee b = y \wedge (a \vee b) = y$$

bulunur. O halde f birebirdir.
$k \in a/(a \wedge b)$ keyfi elemanı alalım. $k \leq a$ ve modülerlik gereği;

$$k = (a \wedge b) \vee k = a \wedge (b \vee k) = f(b \vee k)$$

bulunur. O halde f örtendir. Böylece f bir kafes izomorfizması olup $(a \vee b)/b \cong a/(a \wedge b)$ olur.

Yardımcı Teorem 2.4.8. *L bir modüler kafes olsun. L'nin a, b ve p elemanları için $p \wedge a = p \wedge b = 0$ ve $(p \vee a) \wedge (p \vee b) = p$ ise $p \wedge (a \vee b) = 0$ olur (Călugăreanu, 2000, s. 9).*

İspat. L'nin a, b, p elemanları için $p \wedge a = p \wedge b = 0$ ve $(p \vee a) \wedge (p \vee b) = p$ olsun. Buradan, $0 = p \wedge a = ((p \vee a) \wedge (p \vee b)) \wedge a = a \wedge (p \vee b)$ bulunur. Bu durumda; $b \leq p \vee b$, $b \leq a \vee b$ ve L'nin modülerliği gereği;

$$b = b \vee (a \wedge (p \vee b)) = (a \vee b) \wedge (p \vee b) = b \vee (p \wedge (a \vee b))$$

elde edilir. O halde $p \wedge (a \vee b) \leq b$ olur. $p \wedge (a \vee b) \leq p$ olduğu da dikkate alınırsa, $p \wedge (a \vee b) \leq p \wedge b = 0$ bulunur.

Tanım 2.4.9. L bir kafes olsun. Eğer her $a, b, c \in L$ için

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

ise L'ye bir *dağılımlı kafes* denir (Călugăreanu, 2000, s. 9).

Dağılımlı kafesin her alt kafesi de dağılımlıdır.

Önerme 2.4.10. Her dağılımlı kafes modülerdir. (Călugăreanu, 2000, s. 9).

İspat. L bir dağılımlı kafes ve $a, b, c \in L$ için $c \leq a$ olsun. $c \leq a$ olduğundan $a \wedge c = c$ olup, L dağılımlı olduğundan $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee c$ bulunur. O halde L modülerdir.

Teorem 2.4.11. Bir L kafesinin dağılımlı olması için gerek ve yeter koşul her $a, b, c \in L$ için $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: L bir dağılımlı kafes olsun. L dağılımlı kafes olduğundan,
$(a \vee c) \wedge (b \vee c) = ((a \vee c) \wedge b) \vee ((a \vee c) \wedge c) = (b \wedge (a \vee c)) \vee c = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \vee c$
$= (a \wedge b) \vee c$
bulunur.
$(\Leftarrow)$: Hipotez gereği, $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \vee (a \wedge c)) \wedge (b \vee (a \wedge c)) = a \wedge (a \vee b) \wedge (c \vee b) = a \wedge (b \vee c)$ olur. O halde L dağılımlıdır.

Teorem 2.4.12. Bir L kafesinin dağılımlı olması için gerek ve yeter koşul $a \wedge c = b \wedge c$ ve $a \vee c = b \vee c$ olan her $a, b, c \in L$ için $a = b$ olmasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 9).

İspat. $(\Rightarrow)$: L bir dağılımlı kafes ve $a, b, c \in L$ elemanları için $a \wedge c = b \wedge c$, $a \vee c = b \vee c$ olsun. Bu durumda;
$a = a \wedge (a \vee c) = a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$
$= b \wedge (b \vee c) = b$
bulunur.
$(\Leftarrow)$: $a, b, c \in L$ olsun. Hipotez ve Teorem 2.4.5 gereği L bir modüler kafestir. $a \wedge b \leq a \vee b$ olduğundan modülerlik gereği,

$$(a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b)) = ((a \wedge b) \vee c) \wedge (a \vee b)$$

benzer şekilde $b \wedge c \leq b \vee c$ olduğundan

$$(b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee c)) = ((b \wedge c) \vee a) \wedge (b \vee c)$$

bulunur. $u = (a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b))$ ve $v = (b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee c))$ alalım. $a \wedge b \leq b$ olduğundan modüler kural gereği

$$u \wedge b = ((a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b))) \wedge b = (a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b) \wedge b) = (a \wedge b) \vee (c \wedge b)$$

ve benzer şekilde $b \wedge c \leq b$ olduğundan

$$v \wedge b = ((b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee c))) \wedge b = (b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee c) \wedge b) = (b \wedge c) \vee (a \wedge b)$$

bulunur. O halde $u \wedge b = v \wedge b$ olur. Benzer biçimde $u \vee b = v \vee b$ olduğu görülebilir. O halde hipotez gereği $u = v$ olur.

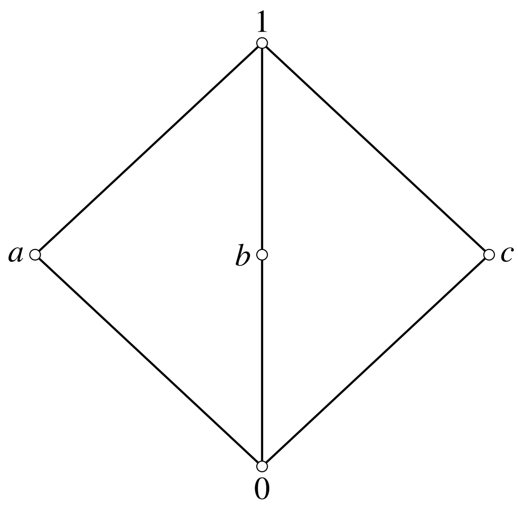
$$u \wedge a = ((a \wedge b) \vee c) \wedge (a \vee b) \wedge a = ((a \wedge b) \vee c) \wedge a = (a \wedge b) \vee (c \wedge a)$$

ve

$$v \wedge a = a \wedge ((b \wedge c) \vee a) \wedge (b \vee c) = a \wedge (b \vee c)$$

eşitlikleri ve $u \wedge a = v \wedge a$ olduğu dikkate alınırsa $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ bulunur. O halde L dağılımlıdır.

Teorem 2.4.13. Bir L kafesinin dağılımlı olması için gerek ve yeter koşul L'nin modüler olması ve Şekil 2.3'deki diyagram ile temsil edilen M_5 kafesine izomorf bir beş elemanlı alt kafesinin olmamasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 10).



Şekil 2.3: M_5 kafesinin diyagramı

İspat. $(\Rightarrow)$: L dağılımlı bir kafes olsun. O halde L modülerdir. L'nin M_5 kafesine izomorf bir S alt kafesi olduğunu varsayalım. Dağılımlı bir kafesin her alt kafesi de dağılımlı olduğundan S dağılımlıdır. Diyagram gereği, $a \wedge c = b \wedge c$, $a \vee c = b \vee c$ ve $a \neq$

b olacak şekilde $a,b,c \in S \subseteq L$ elemanları vardır. Bu ise Teorem 2.4.12 gereği, S'nin dağılımlı olması ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. L'nin M_5 kafesine izomorf hiç bir alt kafesi yoktur.

$(\Leftarrow)$: L'nin dağılımlı kafes olmadığını varsayalım. Bu durumda Teorem 2.4.12 gereği, $a \wedge c = b \wedge c$, $a \vee c = b \vee c$ ve $a \neq b$ olacak şekilde $a,b,c \in L$ elemanları vardır. Buradan, Teorem 2.4.5 gereği $a \parallel b$ bulunur. Eğer $a \leq c$ ise $c = a \vee c = b \vee c$ yani $b \leq c$ bulunur. Buradan $a = a \wedge c = b \wedge c = b$ elde edilir. Bu ise $a \neq b$ olması ile çelişir. O halde $a \nleq c$ olur. Eğer $c \leq a$ ise $a = a \vee c = b \vee c$ olup $b \leq a$ olur ki bu da $a \parallel b$ olması ile çelişir. O halde $c \nleq a$ olur. Dolayısıyla $a \parallel c$ olur. Benzer şekilde $b \parallel c$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda $a,b,c \in L$ elemanları ikişer ikişer karşılaştırılamazlardır ve L'nin $P = \{a,b,c,a \wedge c = b \wedge c, a \vee c = b \vee c\}$ alt kafesi, Şekil 2.3'deki diyagram ile temsil edilen M_5 kafesine izomorftur. Bu ise hipotez ile çelişir. O halde varsayım yanlış olup L dağılımlı bir kafestir.

2.5 Kompakt Üretilmiş Kafesler

Tanım 2.5.1. Bir L tam kafesinin bir p elemanı 0'ı örtüyor ise $(0 \prec p)$ p'ye bir *atom* denir. L kafesinin bütün atomlarının kümesi $A(L)$ ile gösterilir (Davey ve Priestley, 2002, s. 113).

Tanım 2.5.2. Bir L tam kafesinin 1'i atomların supremumu ise L'ye bir *yarıatomik kafes* denir (Călugăreanu, 2000, s. 71).

Tanım 2.5.3. L bir tam kafes olsun. Her $a \in L$ ve L'deki her C üstten yönlü alt kümesi için

$$a \wedge (\bigvee C) = \bigvee_{x \in C} (a \wedge x)$$

oluyorsa, L'ye *üstten sürekli kafes* denir (Călugăreanu, 2000, s. 11).

Tanım 2.5.4. Bir L tam kafesinin $c \leq \bigvee S$ koşulunu sağlayan her S alt kümesinin $c \leq \bigvee F$ olacak şekilde sonlu bir F alt kümesi varsa, $c \in L$ elemanına *kompakt eleman* denir (Călugăreanu, 2000, s. 17).

Tanım 2.5.5. Bir L tam kafesinin $c \leq \bigvee D$ koşulunu sağlayan her D üstten yönlü alt kümesi için $c \leq d_0$ olacak şekilde bir $d_0 \in D$ varsa, $c \in L$ elemanına *S-kompakt eleman* denir (Călugăreanu, 2000, s. 17).

Teorem 2.5.6. Bir tam kafeste bir elemanın kompakt olması için gerek ve yeter koşul S-kompakt olmasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 17).

İspat. $(\Rightarrow)$: L bir tam kafes, $c \in L$ kompakt ve bir $D \subseteq L$ üstten yönlü kümesi için $c \leq \bigvee D$ olsun. c kompakt olduğundan $c \leq \bigvee F$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq D$ kümesi vardır. Üstten yönlü bir kümenin her sonlu alt kümesi D içinde bir üst sınıra sahiptir. O halde $\bigvee F = d_0$ dersek $d_0 \in D$ ve $c \leq d_0$ olur. Yani c elemanı S-kompakttır.
$(\Leftarrow)$: L bir tam kafes, $c \in L$ S-kompakt ve bir $X \subseteq L$ kümesi için $c \leq \bigvee X$ olsun. $K = \{\bigvee F : F \subseteq X, F sonlu\}$ kümesini alalım. Burada, K'nın üstten yönlü ve $\bigvee K = \bigvee X$ olduğu açıktır. O halde, c elemanı S-kompakt ve $c \leq \bigvee X = \bigvee K$ olduğundan $c \leq \bigvee F$ olacak şekilde bir $\bigvee F \in K$ vardır. K kümesinin tanımı gereği F sonlu olduğundan c kompakt olur.

Tanım 2.5.7. Bir L tam kafesinde $1 \in L$ kompakt ise L'ye bir *kompakt kafes* denir (Călugăreanu, 2000, s. 22).

Tanım 2.5.8. L bir tam kafes ve $a \in L$ olmak üzere, L'nin $1/a$ bölüm alt kafesi kompakt ise a'ya bir *eş sonlu eleman* denir. (Toksoy, 2008, s. 51).

Tanım 2.5.9. Bir L tam kafesinde, her eleman kompakt elemanların supremumu ise L'ye *kompakt üretilmiş kafes* denir (Călugăreanu, 2000, s. 19).

Yardımcı Teorem 2.5.10. L bir tam kafes ve $c_1, c_2 \in L$ kompakt iki eleman olsun. Bu durumda $c_1 \vee c_2$ elemanı da kompakttır (Dilworth ve Crawley, 1960).

İspat. C, L'nin bir alt kümesi ve $c_1 \vee c_2 \leq \bigvee C$ olsun. O halde $c_1 \leq \bigvee C$ ve $c_2 \leq \bigvee C$ olur. c_1 ve c_2 kompakt olduğundan $c_1 \leq \bigvee F_1$ ve $c_2 \leq \bigvee F_2$ olacak şekilde $F_1, F_2 \subseteq C$ sonlu alt kümeleri vardır. Bu durumda

$$c_1 \vee c_2 \leq (\bigvee F_1) \vee (\bigvee F_2) = \bigvee (F_1 \cup F_2)$$

olur. $F_1 \cup F_2 \subseteq C$ sonlu olduğundan $c_1 \vee c_2$ kompakttır.

Sonuç 2.5.11. Bir L kafesinde sonlu sayıda kompakt elemanların en küçük üst sınırı da kompakttır (Dilworth ve Crawley, 1960).

Yardımcı Teorem 2.5.12. Bir L kompakt üretilmiş kompakt kafesinde, $a, b \in L$ için $a \vee b = 1$ ise $a' \leq a$, $b' \leq b$ ve $a' \vee b' = 1$ olacak şekilde $a', b' \in L$ kompakt elemanları vardır (Călugăreanu, 2000, s. 131).

İspat. L kompakt üretilmiş olduğundan $a = \bigvee_{i\in I} a_i$ ve $b = \bigvee_{j\in J} b_j$ olacak şekilde, kompakt elemanlardan oluşan $\{a_i\}_{i\in I}$ ve $\{b_j\}_{j\in J}$ aileleri vardır. Bu durumda

$$1 = a \vee b = \left(\bigvee_{i\in I} a_i\right) \vee \left(\bigvee_{j\in J} b_j\right)$$

elde edilir. L kompakt olduğundan $1 = \left(\bigvee_{i\in I'} a_i\right) \vee \left(\bigvee_{j\in J'} b_j\right)$ olacak şekilde sonlu $I' \subseteq I$ ve $J' \subseteq J$ kümeleri vardır. Sonuç 2.5.11 gereği, sonlu sayıda kompakt elemanın en küçük üst sınırı kompakt olur. O halde $a' = \bigvee_{i\in I'} a_i$ ve $b' = \bigvee_{j\in J'} b_j$ alınırsa, a' ve b' kompakt ve $a' \vee b' = 1$ bulunur.

Teorem 2.5.13. (i) L bir tam kafes ve c, L'nin bir kompakt elemanı ise $c \vee a$ elemanı da $1/a$ bölüm alt kafesinin bir kompakt elemanıdır.

(ii) L bir kompakt kafes ve $a \in L$ ise $1/a$ da kompakt bir kafestir.

(iii) L bir kompakt üretilmiş kafes ise her $a \in L$ için $1/a$ da kompakt üretilmiştir (Toksoy, 2008, s. 19).

İspat. (i) $c \in L$ kompakt ve $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq 1/a$ için $c \vee a \leq \bigvee_{i\in I} a_i$ olsun. Bu durumda $c \leq \bigvee_{i\in I} a_i$ bulunur. c elemanı L'de kompakt olduğundan, $c \leq \bigvee_{i\in F} a_i$ olacak şekilde sonlu bir $F \subseteq I$ vardır. Buradan

$$c \vee a \leq \left(\bigvee_{i\in F} a_i\right) \vee a = \bigvee_{i\in F} a_i$$

elde edilir. O halde $c \vee a$, $1/a$ içinde kompakttır.

(ii) (i) şıkkında $c = 1$ alınırsa istenen elde edilir.

(iii) $x \in 1/a$ olsun. L kompakt üretilmiş bir kafes ve $x \in L$ olduğundan, $x = \bigvee_{i\in I} c_i$ olacak şekilde L'nin kompakt elemanlarının bir $\{c_i\}_{i\in I} \subseteq L$ alt kümesi vardır. Buradan

$$x = x \vee a = \left(\bigvee_{i\in I} c_i\right) \vee a = \bigvee_{i\in I} (c_i \vee a)$$

bulunur. Her $i \in I$ için c_i elemanı L'de kompakt olduğundan, (i) şıkkından dolayı $c_i \vee a$ elemanı da $1/a$ bölüm alt kafesinde kompakttır. O halde $1/a$ kompakt üretilmiştir.

Teorem 2.5.14. L bir kompakt kafes ve $1 \neq a \in L$ olsun. Bu durumda, $1/a$ alt kafesinin 1'den farklı bir maksimal elemanı vardır.

İspat. Hipotez gereği, $S = 1/a - \{1\} \neq \emptyset$ olur. C, S içinde bir zincir ve $\bigvee C = 1$ olsun. 1 kompakt olduğundan, sonlu bir $F \subseteq C$ zinciri için $\bigvee F = 1$ olur. Bu ise çelişkidir. Buradan $1 \neq \bigvee C \in S$ bulunur. O halde S kümesinin boştan farklı her zincirinin bir üst sınırı vardır. Zorn Lemması gereği, S kümesi bir maksimal elemana sahiptir.

Önerme 2.5.15. Üstten sürekli bir L kafesinde her atom kompakttır (Călugăreanu, 2000, s. 19).

İspat. L üstten sürekli bir kafes ve a, L içinde bir atom olsun. Keyfi bir D üstten yönlü kümesi için $a \leq \bigvee D$ olsun. a bir atom olduğundan her $d \in D$ için $a \wedge d = 0$ veya $a \wedge d = a$ olur. Eğer burada, her $d \in D$ için $a \wedge d = 0$ olsa, $a = a \wedge (\bigvee D) = \bigvee\limits_{d \in D} (a \wedge d) = \bigvee 0 = 0$ bulunur ki bu da $a \neq 0$ olması ile çelişir. O halde bir $d \in D$ için $a \leq d$ olur. Sonuç olarak a kompakttır.

Yardımcı Teorem 2.5.16. L kompakt üretilmiş bir kafes olsun. L'nin b/a bölüm alt kafesi içinde bir k elemanının kompakt olması için gerek ve yeter koşul $k = a \vee c \leq b$ olacak şekilde, L içinde kompakt bir c elemanının bulunmasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 19).

İspat. $(\Rightarrow)$: k, b/a içinde kompakt bir eleman olsun. L kompakt üretilmiş olduğundan $k = \bigvee\limits_{i \in I} c_i$ olacak şekilde, L'nin kompakt elemanlarının bir $\{c_i\}_{i \in I}$ alt kümesi vardır. Buradan, $k = a \vee k = a \vee (\bigvee\limits_{i \in I} c_i) = \bigvee\limits_{i \in I} (a \vee c_i)$ elde edilir. Her $i \in I$ için $c_i \leq \bigvee\limits_{i \in I} c_i = k \leq b$ olduğundan, her $i \in I$ için $a \vee c_i \in b/a$ bulunur. k, b/a içinde kompakt olduğundan, $k = \bigvee\limits_{i \in J} (a \vee c_i)$ olacak şekilde bir $J \subseteq I$ sonlu kümesi vardır. $c = \bigvee\limits_{i \in J} c_i$ alınırsa, sonlu sayıda kompakt elemanın en küçük üst sınırı da kompakt olduğundan c kompakt olur ve ayrıca $k = \bigvee\limits_{i \in J} (a \vee c_i) = a \vee (\bigvee\limits_{i \in J} c_i) = a \vee c \leq b$ bulunur.
$(\Rightarrow)$: $k \in b/a$ alalım ve $k = a \vee c \leq b$ olacak şekilde L içinde kompakt bir c elemanı mevcut olsun. $X \subseteq b/a$ ve $a \vee c = k \leq \bigvee X$ ise $c \leq \bigvee X$ olur ve c, L içinde kompakt olduğundan $c \leq \bigvee F$ olacak şekilde bir $F \subseteq X$ sonlu kümesi vardır. $F \subseteq b/a$ olduğu dikkate alınırsa, $a \vee c \leq \bigvee F$ bulunur. O halde $k = a \vee c$ elemanı b/a içinde kompakttır.

Yardımcı Teorem 2.5.17. L kompakt üretilmiş bir kafes ve $x, y \in L$ olsun. $c \leq x$ şartını sağlayan her c kompakt elemanı için $c \leq y$ ise $x \leq y$ olur.

İspat. L kompakt üretilmiş olduğundan, $x = \bigvee\limits_{i \in I} c_i$ olacak şekilde L'nin kompakt elemanlarının bir $\{c_i\}_{i \in I}$ alt kümesi vardır. Bu durumda her $i \in I$ için $c_i \leq \bigvee\limits_{i \in I} c_i = x$ olur ve hipotez gereği her $i \in I$ için $c_i \leq y$ bulunur. O halde $x = \bigvee\limits_{i \in I} c_i \leq y$ olur.

Teorem 2.5.18. Her kompakt üretilmiş kafes üstten süreklidir (Călugăreanu, 2000, s. 20).

İspat. L kompakt üretilmiş bir kafes, $D \subseteq L$ üstten yönlü bir küme ve $a \in L$ olsun. Her $d \in D$ için $a \wedge d \leq a$ olup $\bigvee\limits_{d\in D} (a \wedge d) \leq a$ bulunur. Benzer şekilde, her $d \in D$ için $a \wedge d \leq d \leq \bigvee D$ olup $\bigvee\limits_{d\in D} (a \wedge d) \leq \bigvee D$ bulunur. O halde

$$\bigvee_{d\in D} (a \wedge d) \leq a \wedge (\bigvee D)$$

olur. Tersi için, L'nin $c \leq a \wedge (\bigvee D)$ olacak şekilde bir kompakt elemanını alalım. Bu durumda $c \leq \bigvee D$ olur ve c kompakt olduğundan $c \leq d_0$ olacak şekilde bir $d_0 \in D$ vardır. $c \leq a$ ve $c \leq d_0$ olduğundan $c \leq a \wedge d_0 \leq \bigvee\limits_{d\in D} (a \wedge d)$ bulunur. O halde Yardımcı Teorem 2.5.17 gereği, $a \wedge (\bigvee D) \leq \bigvee\limits_{d\in D} (a \wedge d)$ olur. Böylece $a \wedge (\bigvee D) = \bigvee\limits_{d\in D} (a \wedge d)$ olup L üstten süreklidir.

2.6 Küçük Elemanlar

Tanım 2.6.1. L bir birli kafes ve $a \in L$ olsun. Eğer $b \neq 1$ olan her $b \in L$ için $a \vee b \neq 1$ oluyorsa (diğer bir ifadeyle $a \vee b = 1$ olan her $b \in L$ için $b = 1$ oluyorsa), a'ya L'nin bir *küçük elemanı* denir ve $a \ll L$ ile gösterilir (Călugăreanu, 2000, s. 77).

Tanım 2.6.2. Bir L tam kafesinin bütün maksimal ($\neq 1$) elemanlarının en büyük alt sınırı, L nin *radikali* olarak tanımlanır ve $Rad(L)$ ile gösterilir. L'nin 1'den farklı hiçbir maksimal elemanı olmaması durumunda $Rad(L) = 1$ olarak tanımlanır (Călugăreanu, 2000, s. 77).

Tanım 2.6.3. L bir birli kafes olsun. L'nin 1'den farklı her elemanı L içinde küçükse L'ye *oyuk kafes* denir (Călugăreanu, 2000, s. 134).

Yardımcı Teorem 2.6.4. L bir sınırlı modüler kafes, $a, b \in L$ ve $a \leq b$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) $a \ll b/0$ ise her $c \in L$ için $a \vee c \ll (b \vee c)/c$ olur.

(ii) $b \ll L$ olması için gerek ve yeter koşul $a \ll L$ ve $b \ll 1/a$ olmasıdır.

(iii) $a \ll b/0$ ise $a \ll L$ dir (Călugăreanu, 2000, s. 77).

İspat. (i) $c \in L$ ve $t \in (b \vee c)/c$ için $(a \vee c) \vee t = 1_{(b\vee c)/c} = b \vee c$ olsun. $t \in (b \vee c)/c$ olduğundan $c \leq t$ dir. Bu durumda $a \vee t = a \vee (c \vee t) = (a \vee c) \vee t = b \vee c$ elde edilir. $a \vee t = b \vee c$ eşitliğinin her iki tarafı, sağdan b ile $\wedge$ işlemine tabi tutulursa $(a \vee t) \wedge b = (b \vee c) \wedge b = b$ elde edilir. $a \leq b$ olduğundan modüler kural gereği $a \vee (t \wedge b) = (a \vee t) \wedge b = b$ bulunur. $t \wedge b \leq b$ olduğundan $t \wedge b \in b/0$ dır. Bu durumda $a \ll b/0$

ve $a \vee (t \wedge b) = b = 1_{b/0}$ olduğu dikkate alınırsa $b \wedge t = 1_{b/0} = b$ bulunur. Bu ise $b \leq t$ olmasını gerektirir. O halde $b \vee c \leq t \vee c = t$ olur. Aynı zamanda $t \in (b \vee c)/c$ olduğundan $t \leq b \vee c$ dir. Buradan $t = b \vee c$ bulunur. Böylece $a \vee c \ll (b \vee c)/c$ olur.

(ii) $(\Rightarrow)$: $b \ll L$, $t \in L$ ve $a \vee t = 1$ olsun. Buradan $b \vee a \vee t = b \vee 1 = 1$ yazılabilir. $a \leq b$ olduğu dikkate alınırsa $b \vee t = b \vee a \vee t = 1$ elde edilir. $b \ll L$ olduğundan $t = 1$ dir. O halde $a \ll L$ dir. $s \in 1/a$ ve $b \vee s = 1$ olsun. Burada $b \ll L$ olduğundan $s = 1$ olur. O halde $b \ll 1/a$ dır.

$(\Leftarrow)$: $a \ll L$, $b \ll 1/a$ ve $t \in L$ için $b \vee t = 1$ olsun. Burada eşitliğin her iki tarafına sağdan a elemanı ile $\vee$ işlemi uygulanırsa $b \vee t \vee a = 1 \vee a = 1$ bulunur. $t \vee a \in 1/a$ ve $b \ll 1/a$ olduğundan $t \vee a = 1$ dir. $a \ll L$ olduğunu da dikkate alırsak $t = 1$ bulunur. O halde $b \ll L$ dir.

(iii) $a \ll b/0$ ve $t \in L$ için $a \vee t = 1$ olsun. Eşitliğin her iki tarafına sağdan b ile $\wedge$ işlemi uygulanırsa $(a \vee t) \wedge b = 1 \wedge b = b$ eşitliği elde edilir. $a \leq b$ olduğundan modüler kural gereği $a \vee (t \wedge b) = (a \vee t) \wedge b = b$ bulunur. O halde $a \ll b/0$ olduğundan $t \wedge b = b$ yani $b \leq t$ dir. Buradan $t = b \vee t = a \vee b \vee t = 1$ bulunur. O halde $a \ll L$ olur.

Yardımcı Teorem 2.6.5. L bir sınırlı modüler kafes ve $c, d \in L$ olsun. $c^{'} \ll c/0$ ve $d^{'} \ll d/0$ ise $c^{'} \vee d^{'} \ll (c \vee d)/0$ olur (Călugăreanu, 2000, s. 78).

İspat. $c/0$ kafesini, $(c \vee d)/0$ kafesinin bir bölüm alt kafesi olarak düşünebiliriz. $c^{'} \leq c$ ve $c^{'} \ll c/0$ olduğundan, Yardımcı Teorem 2.6.4 (iii) gereği $c^{'} \ll (c \vee d)/0$ bulunur. Benzer şekilde $d^{'} \ll (c \vee d)/0$ olduğu gösterilebilir. $c^{'} \vee d^{'} \vee t = c \vee d$ olan herhangi bir $t \in (c \vee d)/0$ alalım. $c^{'} \vee d^{'} \vee t = c \vee d$ ve $c^{'} \ll (c \vee d)/0$ olduğundan $d^{'} \vee t = c \vee d$ olup $d^{'} \ll (c \vee d)/0$ olduğundan $t = c \vee d$ olur. O halde $c^{'} \vee d^{'} \ll (c \vee d)/0$ elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.6.6. L kompakt ise $Rad(L) \ll L$ olur.

İspat. $a \in L$ ve $a \vee Rad(L) = 1$ olsun. $a \neq 1$ olduğunu varsayalım. $A = \{b \in L \,|\, a \leq b < 1\}$ kümesini alalım. $a \in A$ olduğundan A boş kümeden farklıdır. C, A içinde bir zincir ise, 1 kompakt olduğundan $\bigvee C \in A$ olur. O halde Zorn Lemması gereği, A'nın $a \leq m \neq 1$ olacak şekilde bir maksimal elemanı vardır. m aynı zamanda L'nin de bir maksimal elemanı $(\neq 1)$ olur ve buradan $Rad(L) \leq m$ bulunur. O halde $1 = a \vee Rad(L) \leq m$ olur ki bu $m \neq 1$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlış olup $a = 1$ olur. Buradan $Rad(L) \ll L$ bulunur.

Önerme 2.6.7. L bir kompakt üretilmiş kafes ve $a \ll L$ olsun. Bu durumda L'nin kompakt olması için gerek ve yeter koşul $1/a$ bölüm alt kafesinin kompakt olmasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 79).

İspat. $(\Rightarrow)$: L kompakt olsun. L kompakt üretilmiş olduğundan $\bigvee_{i\in I} c_i = 1$ olacak şekilde L'nin kompakt elemanlarının bir $\{c_i\}_{i\in I}$ alt kümesi vardır. $1 = \bigvee_{i\in I} c_i$ ve 1 kompakt olduğundan $1 = \bigvee_{i\in F} c_i$ olacak şekilde I'nın bir F sonlu alt kümesi vardır. Buradan $1 = 1 \vee a = \bigvee_{i\in F} (c_i \vee a)$ elde edilir. Her $i \in F$ için c_i kompakt olduğundan Teorem 2.5.13 (i) gereği $c_i \vee a$ elemanı $1/a$ içinde kompakt olup Sonuç 2.5.11 gereği $1/a$ kompakttır.
$(\Leftarrow)$: $1/a$ bölüm alt kafesi kompakt olsun. L kompakt üretilmiş olduğundan $\bigvee_{i\in I} k_i = 1$ olacak şekilde L kafesinin kompakt elemanlarının bir $\{k_i\}_{i\in I}$ alt kümesi vardır. $1 = \bigvee_{i\in I} k_i = \bigvee_{i\in I} a \vee k_i$ ve 1 elemanı $1/a$ da kompakt olduğundan, $1 = \bigvee_{i\in F} a \vee k_i = a \vee \left(\bigvee_{i\in F} k_i \right)$ olacak şekilde I'nın bir F sonlu alt kümesi vardır. $1 = a \vee \left(\bigvee_{i\in F} k_i \right)$ ve $a \ll L$ olduğundan $1 = \bigvee_{i\in F} k_i$ olur. O halde Sonuç 2.5.11 gereği 1 elemanı dolayısıyla da L kompakt olur.

Yardımcı Teorem 2.6.8. L bir tam kafes olsun. $a \ll L$ ise $a \leq Rad(L)$ olur. a'nın kompakt olması durumunda tersi de doğrudur (Călugăreanu, 2000, s. 78).

İspat. $(\Rightarrow)$: $a \ll L$ ve m, L'de maksimal $(\neq 1)$ bir eleman olsun. Bu durumda $m \vee a \neq 1$ yani $m \vee a = m$ bulunur. O halde $a \leq m$ dir. Böylece $a \leq Rad(L)$ bulunur.
$(\Leftarrow)$: $a \leq Rad(L)$ ve a kompakt olsun. Kabul edelim ki, a elemanı L içinde küçük olmasın. O halde $a \vee b = 1$ olacak şekilde L'nin bir $b \neq 1$ elemanı vardır. $D = \{x \in L : a \nleq x, a \vee x = 1\}$ kümesini oluşturalım. $a \nleq b$ ve $a \vee b = 1$ olduğundan $b \in D$, yani $D \neq \emptyset$ olur. C, D içinde keyfi bir zincir ise a kompakt olduğundan $a \nleq \bigvee C$ bulunur. Buradan $\bigvee C \in D$ elde edilir. O halde Zorn Lemması gereği, D'nin bir b maksimal $(\neq 1)$ elemanı vardır. b aynı zamanda L'nin de bir maksimal $(\neq 1)$ elemanıdır. Gerçekten, $c \in L$ ve $b < c$ ise b, D'nin bir maksimal $(\neq 1)$ elemanı olduğundan $a \leq c$ olur ve buradan $1 \leq a \vee b \leq c$ yani $c = 1$ bulunur. b, L'nin bir maksimal $(\neq 1)$ elemanı olduğundan, $a \leq Rad(L) \leq b$ elde edilir. Fakat bu $b \in D$ olması ile çelişir. O halde varsayım yanlıştır. $a \ll L$ bulunur.

Sonuç 2.6.9. L bir kompakt üretilmiş kafes ise $Rad(L)$, L'nin küçük elemanları kümesinin supremumudur.

İspat. Yardımcı Teorem 2.6.8 gereği açıktır.

Önerme 2.6.10. *L bir modüler kafes ve $a \in L$ ise $Rad(a/0) \leq Rad(L)$ olur.*

İspat. m, L'nin birden farklı bir maksimal elemanı olsun. $a \leq m$ ise $Rad(a/0) \leq m$ olur. $a \nleq m$ ise $a \vee m > m$ ve m maksimal olduğundan $a \vee m = 1$ olur. Buradan Teorem 2.4.7 gereği, $1/m \cong (a \vee m)/m \cong a/(a \wedge m)$ olur. Böylece $a \wedge m$, $a/0$ bölüm alt kafesinde maksimal ($\neq a$) elemandır ve $Rad(a/0) \leq a \wedge m \leq m$ olur. Böylece $Rad(a/0)$, L kafesinin birden farklı her maksimal elemanından küçük veya eşit olup $Rad(a/0) \leq Rad(L)$ olur.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümden itibaren, aksi belirtilmedikçe her kafes tam modüler kafes olarak alınacaktır.

3.1 Bütünlenmiş Kafesler

Tanım 3.1.1. L bir kafes ve $a,b \in L$ olmak üzere $a \vee b = 1$ ve $a \wedge b = 0$ ise a elemanına b'nin bir *bütünleyeni* denir. Bu durum $a \oplus b = 1$ şeklinde gösterilir ve bu gösterime *direkt toplam*, a ile b'ye de *direkt toplam terimleri* denir. L'nin 0 ve 1'den başka hiç bir direkt toplam terimi yoksa L'ye bir *ayrıştırılamaz kafes* denir. L'deki her elemanın bir bütünleyeni var ise L'ye bir *bütünlenmiş kafes* denir. Ayrıca L'nin her elemanı, kendisini içeren her bölüm alt kafesi içinde bir bütünleyene sahipse, L'ye bir *kısmi bütünlenmiş kafes* denir. (Davey ve Priestley, 2002).

Teorem 2.4.5'ün bir sonucu olarak görülür ki, modüler bir kafeste bir elemanın karşılaştırılabilir bütünleyenleri varsa bunlar eşittir. Benzer şekilde Teorem 2.4.12 gereği, dağılımlı bir kafeste bir elemanın bütünleyeni varsa tektir.

Teorem 3.1.2. L bir kafes olsun. Bu durumda L'nin bütünlenmiş olması için gerek ve yeter koşul kısmi bütünlenmiş olmasıdır (Călugăreanu, 2000).

İspat. $(\Rightarrow)$: L kafesi bütünlenmiş ve $b \in L$ olsun. L bütünlenmiş olduğundan $b \vee k = 1$ ve $b \wedge k = 0$ olacak şekilde bir $k \in L$ vardır. $c,a \in L$ için c/a, L'nin bir bölüm alt kafesi ve $b \in c/a$ olsun. O halde $a \leq b \leq c$ olur ve $a \leq c$ olduğundan modülerlik gereği $(a \vee k) \wedge c = a \vee (k \wedge c)$ bulunur. $(a \vee k) \wedge c = a \vee (k \wedge c) = t$ alırsak $a \leq t \leq c$ olduğu görülür. Yani $t \in c/a$ olur. t'nin, c/a içinde b'nin bir bütünleyeni olduğunu gösterelim. L'nin modülerliği gereği;

$$b \vee t = b \vee [a \vee (k \wedge c)] = b \vee (k \wedge c) = (b \vee k) \wedge c = 1 \wedge c = c$$

ve benzer şekilde,

$$b \wedge t = b \wedge [(a \vee k) \wedge c] = b \wedge (a \vee k) = (b \wedge k) \vee a = a$$

bulunur. Buradan, t'nin c/a içinde b'nin bir bütünleyeni olduğu sonucu çıkar. O halde L kısmi bütünlemiş kafestir.

$(\Leftarrow)$: Açıktır.

Teorem 3.1.3. L bir bütünlenmiş kafes olsun. L'nin üstten sürekli olması için gerek ve yeter koşul "öyle bir $0 \neq a \in L$ vardır ki her $d \in D$ için $a \wedge d = 0$ olur" koşulunu sağlayan her D üstten yönlü kümesi için $\bigvee D \neq 1$ olmasıdır (Călugăreanu, 2000, s. 12).

İspat. $(\Rightarrow)$: $D \subseteq L$ üstten yönlü, $0 \neq a \in L$ ve her $d \in D$ için $a \wedge d = 0$ olsun. L üstten sürekli olduğundan $a \wedge (\bigvee D) = \bigvee_{d \in D} (a \wedge d) = 0$ bulunur. O halde $\bigvee D \neq 1$ olur.
$(\Leftarrow)$: $D \subseteq L$ üstten yönlü kümesini ve herhangi bir $a \in L$ elemanını alalım. Her $d \in D$ için $a \wedge d \leq a$ ve $a \wedge d \leq d \leq \bigvee D$ olduğundan her $d \in D$ için $a \wedge d \leq a \wedge (\bigvee D)$ bulunur. O halde $\bigvee_{d \in D} (a \wedge d) \leq a \wedge (\bigvee D)$ olur. L kafesi bütünlenmiş olduğundan, Teorem 3.1.2 gereği kısmi bütünlenmiştir. $b \in [a \wedge (\bigvee D)]/0$, $\bigvee_{d \in D} (a \wedge d)$ elemanının $[a \wedge (\bigvee D)]/0$ içinde bir bütünleyeni olsun. Buradan $\left[\bigvee_{d \in D} (a \wedge d)\right] \vee b = a \wedge (\bigvee D)$ ve $\left[\bigvee_{d \in D} (a \wedge d)\right] \wedge b = 0$ bulunur. Diğer taraftan c, $\bigvee D$ elemanının L içinde bir bütünleyeni olsun. $b \leq a \wedge (\bigvee D) \leq \bigvee D$ olduğundan, her $d' \in D$ için $(d' \vee c) \wedge b = (d' \vee c) \wedge (\bigvee D) \wedge b = \left[((\bigvee D) \wedge c) \vee d'\right] \wedge b = d' \wedge b = d' \wedge a \wedge b \leq \left[\bigvee_{d \in D} (a \wedge d)\right] \wedge b = 0$ bulunur. Hipotez gereği, $b \neq 0$ ise $\{d \vee c : d \in D\}$ üstten yönlü kümesi için $\bigvee_{d \in D} (d \vee c) \neq 1$ olur. Bu durumda $1 = (\bigvee D) \vee c = \bigvee_{d \in D} (d \vee c) \neq 1$ bulunur. O halde $b = 0$ olmalıdır. Buradan $\bigvee_{d \in D} (a \wedge d) = a \wedge (\bigvee D)$ olur. O halde L üstten süreklidir.

Teorem 3.1.4. Bir L kafesi bütünlenmiş ise L'nin her a elemanı için $a/0$ da bütünlenmiştir (Toksoy, 2008, s. 23).

İspat. $x \in a/0$ olsun. L bütünlenmiş olduğundan L içinde $x \vee y = 1$ ve $x \wedge y = 0$ olacak şekilde bir y elemanı vardır. Bu durumda $x \wedge (a \wedge y) = a \wedge (x \wedge y) = 0$ olduğu açıktır. Modüler kural gereği

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (x \vee y) = x \vee (a \wedge y)$$

bulunur. O halde $a \wedge y$, x'in $a/0$ içinde bir bütünleyenidir.

Tanım 3.1.5. L kafesinin, 1'den farklı tüm elemanlarının kümesi bir en büyük elemana sahip ise, L'ye bir *yerel* (*lokal*) *kafes* denir. Ayrıca bir L kafesinin l elemanı için, $l/0$ bölüm alt kafesi yerel ise, l elemanına L'nin bir *yerel* (*lokal*) *elemanı* denir (Călugăreanu, 2000, s. 134).

Tanım 3.1.6. L bir kafes olsun. $1/Rad(L)$ bütünlenmiş kafes ise L'ye *yarı yerel* (*lokal*) *kafes* denir (Toksoy, 2008, s. 43).

Teorem 3.1.7. L kafesinin, $1 \neq a \in L$ olacak şekilde her elemanı için, $a \leq m$ olacak şekilde L'nin bir maksimal ($\neq 1$) m elemanı varsa $Rad(L) \ll L$ olur (Călugăreanu, 2000).

İspat. $Rad(L) \vee t = 1$ olan herhangi $t \in L$ alalım. Eğer $t \neq 1$ olsa hipotezden $t \leq m$ olacak şekilde L'nin bir m maksimal ($\neq 1$) elemanı bulunabilir. Bu durumda, ayrıca $Rad(L) \leq m$ olacağından $1 = Rad(L) \vee t \leq m \vee m = m$ olup $m = 1$ olur ki bu da $m \neq 1$ olmasıyla çelişir. O halde $t = 1$ olup $Rad(L) \ll L$ olur.

3.2 Tümlenmiş Kafesler

Tanım 3.2.1. L bir kafes ve $a, b \in L$ olmak üzere, $a \vee b = 1$ ve a bu koşula göre minimal eleman ise a'ya, b'nin L'de bir *tümleyeni* denir. Eğer L'nin her elemanının L'de bir tümleyeni varsa L'ye bir *tümlenmiş kafes* denir (Toksoy, 2008).

Önerme 3.2.2. Bir a elemanının, L içinde b nin bir tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $a \vee b = 1$ ve $a \wedge b \ll a/0$ olmasıdır (Toksoy, 2008).

İspat. $(\Rightarrow)$: L'nin, $(a \wedge b) \vee c = a$ koşulunu sağlayan $c \leq a$ olacak şekilde bir c elemanını alalım. Bu durumda

$$1 = a \vee b = (a \wedge b) \vee c \vee b = c \vee b$$

olur. Burada $c \leq a$ ve a, L'de b'nin bir tümleyeni olduğundan tanım gereği $c = a$ olur. O halde $a \wedge b \ll a/0$ bulunur.

$(\Leftarrow)$: $a \vee b = 1$ ve $a \wedge b \ll a/0$ olsun. $c \vee b = 1$ olacak şekilde herhangi bir $c \leq a$ elemanı için modüler kural gereği

$$a = a \wedge 1 = a \wedge (c \vee b) = (a \wedge b) \vee c$$

eşitliği yazılabilir. $a \wedge b \ll a/0$ olduğundan $c = a$ olur. Sonuç olarak a, b'nin L içinde bir tümleyenidir.

Tanım 3.2.3. L bir kafes ve $a, b \in L$ olsun. Eğer $a \vee b = 1$ ve $a \wedge b \ll L$ ise b elemanına a elemanının L'de bir *zayıf tümleyeni* denir. Eğer L'nin her elemanı L'de bir zayıf tümleyene sahipse L'ye bir *zayıf tümlenmiş kafes* denir (Toksoy, 2008)

Önerme 3.2.4. L bir kafes, $b, c \in L$ ve c, b'nin L içinde bir tümleyeni olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) $a \leq b$ ve $a \vee c = 1$ ise c, a'nın da L içinde bir tümleyenidir.

(ii) b, L içinde maksimal eleman ($\neq 1$) ise $b \wedge c = Rad(c/0)$ olur ve $b \wedge c$ elemanı $c/0$ bölüm alt kafesinin tek maksimal ($\neq c$) elemanıdır.

(iii) $a \ll L$ ise c elemanı $a \vee b$ elemanının da L içinde bir tümleyenidir (Călugăreanu, 2000, s. 132).

İspat. (i) $c' \in L$, $c' \leq c$ ve $a \vee c' = 1$ olsun. $a \leq b$ olduğundan $b \vee c' = 1$ olur. c elemanının minimalliğinden $c' = c$ bulunur.
(ii) Teorem 2.4.7 gereği, $c/(b \wedge c) \cong (c \vee b)/b = 1/b$ olur. b'nin maksimalliği gereği, $b \wedge c$ elemanı da $c/0$ bölüm alt kafesinde maksimal ($\neq c$) eleman olur ve $Rad(c/0) \leq b \wedge c$ elde edilir. Diğer taraftan, Önerme 3.2.2 gereği $b \wedge c \ll c/0$ olup Yardımcı Teorem 2.6.8 gereğince $b \wedge c \leq Rad(c/0)$ elde edilir. Buradan da $b \wedge c = Rad(c/0)$ olup, $b \wedge c$ $c/0$ bölüm alt kafesinin tek maksimal ($\neq c$) elemanıdır.
(iii) $c' \in L$ için $c' \leq c$ ve $(a \vee b) \vee c' = 1$ olsun. $a \ll L$ olduğundan $b \vee c' = 1$ olur ve c elemanının minimalliği gereği $c' = c$ bulunur. O halde c, $a \vee b$ elemanının L içinde bir tümleyenidir.

Önerme 3.2.5. L kompakt üretilmiş bir kafes ve c, b elemanının L içinde bir tümleyeni olsun. L kompakt ise c elemanı da kompakttır (Călugăreanu, 2000, s. 132).

İspat. Yardımcı Teorem 2.5.12 gereği, kompakt bir $c' \leq c$ elemanı için $b \vee c' = 1$ olur. c'nin minimalliğinden $c' = c$ bulunur. O halde c kompakttır.

Önerme 3.2.6. c, kompakt bir L kafesinde b elemanının bir tümleyeni olsun. $a \ll L$ ise $a \wedge c \ll c/0$ ve $Rad(c/0) = c \wedge Rad(L)$ olur (Călugăreanu, 2000, s. 132).

İspat. L bir modüler kafes olduğundan Önerme 2.6.10 gereği $Rad(c/0) \leq c \wedge Rad(L)$ olur. $c' \leq c$ ve $(a \wedge c) \vee c' = c$ olsun. $a \wedge c \leq a$ ve $a \ll L$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.6.4 (ii) gereği $a \wedge c \ll L$ olur. Bu takdirde $1 = b \vee c = b \vee [(a \wedge c) \vee c'] = b \vee c'$ ve dolayısıyla $c' = c$ olur. O halde $a \wedge c \ll c/0$ olur. L kafesi kompakt olduğundan Yardımcı Teorem 2.6.6 gereği $Rad(L) \ll L$ olur. Önerme 3.2.4 (iii) gereği, c elemanı $Rad(L) \vee b$ elemanının da L içinde bir tümleyenidir. Önerme 3.2.2 gereği $(Rad(L) \vee b) \vee c = 1$ ve $(Rad(L) \vee b) \wedge c \ll c/0$ olur. Buradan $Rad(L) \wedge c \leq (Rad(L) \vee b) \wedge c \leq Rad(c/0)$ bulunur. O halde $Rad(c/0) = Rad(L) \wedge c$ olur.

Önerme 3.2.7. L bir kafes olsun. $a, b \in L$ için $a/0$ tümlenmiş ve $a \vee b$, L içinde bir tümleyene sahipse b de L içinde bir tümleyene sahiptir (Călugăreanu, 2000, s. 134).

İspat. c elemanı $a \vee b$ elemanının L içinde bir tümleyeni ve d elemanı $(b \vee c) \wedge a$ elemanının $a/0$ içinde bir tümleyeni olsun. Bu takdirde Önerme 3.2.2 gereği

$$(a \vee b) \vee c = 1, \quad (a \vee b) \wedge c \ll c/0$$

ve

$$[(b \vee c) \wedge a] \vee d = a, \quad [(b \vee c) \wedge a] \wedge d \ll d/0$$

bulunur. $a \vee b \vee c = 1$ ve $a = [(b \vee c) \wedge a] \vee d$ olduğundan

$$1 = a \vee b \vee c = [(b \vee c) \wedge a] \vee d \vee b \vee c = b \vee c \vee d$$

olur. Ayrıca $c \wedge (b \vee d) \leq (a \vee b) \wedge c \ll c/0$ ve $d \wedge (b \vee c) = [(b \vee c) \wedge a] \wedge d \ll d/0$ olduğundan Yardımcı Teorem 2.4.4 ve Yardımcı Teorem 2.6.5 gereği

$$b \wedge (c \vee d) \leq [c \wedge (b \vee d)] \vee [d \wedge (b \vee c)] \ll (c \vee d)/0$$

olur. O halde $c \vee d$, L içinde b'nin bir tümleyenidir.

Önerme 3.2.8. L bir kafes olsun. $a, b \in L$ için $1 = a \vee b$ ve $a/0, b/0$ bölüm alt kafesleri tümlenmiş ise L de tümlenmiştir. (Călugăreanu, 2000, s. 134)

İspat. $b \in L$ olsun. 0, $a \vee (b \vee c) = 1$ elemanının L içinde bir tümleyenidir. $a/0$ tümlenmiş olduğundan Önerme 3.2.7 gereği, $b \vee c$ elemanının L içinde bir tümleyeni vardır. $b/0$ tümlenmiş olduğundan yine Önerme 3.2.7 gereği, c'nin L içinde bir tümleyeni vardır. O halde L tümlenmiştir.

Sonuç 3.2.9. L bir kafes olsun. $a, b \in L$ için $a/0$ ve $b/0$ bölüm alt kafesleri tümlenmiş ise $(a \vee b)/0$ bölüm alt kafesi de tümlenmiştir.

İspat. $a/0$ ve $b/0$ bölüm alt kafesleri, $(a \vee b)/0$ kafesinin bölüm alt kafesleri olarak düşünülebilir. Bu durumda $a \vee b = 1_{(a \vee b)/0}$ ve $a/0, b/0$ bölüm alt kafesleri tümlenmiş olduklarından Önerme 3.2.8 gereği $(a \vee b)/0$ bölüm alt kafesi de tümlenmiş olur.

Sonuç 3.2.10. L bir kafes ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ için $x_1/0, x_2/0, \ldots, x_n/0$ bölüm alt kafesleri tümlenmiş olsun. Bu durumda $(x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_n)/0$ bölüm alt kafesi de tümlenmiştir.

İspat. Sonuç 3.2.9 gereği açıktır.

Tanım 3.2.11. L kafesinin her eş sonlu elemanı bir zayıf tümleyene sahipse, L'ye bir *eş sonlu zayıf tümlenmiş kafes* denir (Toksoy, 2008, s. 36).

Tanım 3.2.12. L bir kafes ve $a \in L$ olsun. $a \vee t = 1$ koşulunu sağlayan her $t \in L$ elemanı için a'nın $t' \leq t$ olan bir t' tümleyeni varsa a elemanı L'de *bol tümleyene sahiptir* denir.

L'nin her elemanı bol tümleyene sahipse L'ye *bol tümlenmiş kafes* denir (Toksoy, 2008, s. 44).

Tanım 3.2.13. L bir kafes olsun. L'nin her elemanının L içinde direkt toplam terimi olan bir tümleyeni var ise L'ye $\oplus$-*tümlenmiş kafes* denir.

Tanım 3.2.14. L bir tümlenmiş kafes olsun. L'nin her tümleyen elemanı, L'de bir direkt toplam terimi ise L'ye güçlü $\oplus$-*tümlenmiş kafes* denir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 Kafeslerde β_* Bağıntısı

Bu bölümde, bir modülün alt modülleri kümesi üzerinde tanımlanan β^* bağıntısı kafesler teorisine genelleştirilmiştir. Bölüm boyunca aksi belirtilmedikçe, kafes olarak tam modüler kafesleri kastedeceğiz. Maksimal eleman olarak ise 1'den farklı maksimal elemanlar anlaşılacaktır.

Tanım 4.1.1. L bir kafes olsun. $a,b \in L$ olmak üzere, L üzerinde β_* bağıntısı;
"$a\beta_*b \Leftrightarrow a \vee t = 1$ eşitliğini sağlayan her $t \in L$ için $b \vee t = 1$ dir ve $b \vee k = 1$ eşitliğini sağlayan her $k \in L$ için $a \vee k = 1$ dir" şeklinde tanımlanır.

Yardımcı Teorem 4.1.2. L kafesi üzerinde tanımlanan β_* bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat. Yansıma ve simetri özellikleri açıktır. $a,b,c \in L$ olmak üzere $a\beta_*b$ ve $b\beta_*c$ olsun. $a \vee t = 1$ eşitliğini sağlayan bir $t \in L$ alalım. $a\beta_*b$ olduğundan $b \vee t = 1$ dir. $b\beta_*c$ denkliği de dikkate alınırsa $c \vee t = 1$ bulunur. Benzer şekilde $c \vee k = 1$ eşitliğini sağlayan her $k \in L$ için de $a \vee k = 1$ olduğu gösterilebilir. O halde geçişme özelliği sağlanır. β_* bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 4.1.3. L bir kafes ve $a,b \in L$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

(i) $a\beta_*b \Leftrightarrow a \vee b \vee c = 1$ koşulunu sağlayan her $c \in L$ için $a \vee c = 1$ ve $b \vee c = 1$ dir.

(ii) $a\beta_*b \Leftrightarrow a \vee b \ll 1/a$ ve $a \vee b \ll 1/b$ dir.

İspat. (i) $(\Rightarrow)$: $a\beta_*b$ olsun. $a \vee b \vee c = 1$ olacak şekilde $c \in L$ alalım. $a \vee (b \vee c) = 1$ ve $a\beta_*b$ olduğundan $b \vee (b \vee c) = 1$ bulunur. O halde $b \vee c = 1$ dir. Benzer şekilde $a \vee c = 1$ olduğu da gösterilebilir.
$(\Leftarrow)$: $a \vee t = 1$ koşulunu sağlayan $t \in L$ alalım. Bu takdirde $a \vee b \vee t = 1$ olur ve hipotezden $b \vee t = 1$ elde edilir. Benzer şekilde $b \vee k = 1$ koşulunu sağlayan her $k \in L$ için $a \vee k = 1$ olduğu gösterilebilir. O halde $a\beta_*b$ dir.
(ii) $(\Rightarrow)$: $a \vee b \vee t = 1$ olacak şekilde $t \in 1/a$ alalım. Bu durumda $(a \vee t) \vee b = 1$ olur. $a\beta_*b$ olduğundan $a \vee t = (a \vee t) \vee a = 1$ elde edilir. $a \leq t$ olduğu dikkate alınırsa

$t = a \vee t = 1$ bulunur. O halde $a \vee b \ll 1/a$ dır. Benzer şekilde $a \vee b \ll 1/b$ olduğu gösterilebilir.
$(\Leftarrow)$: $a \vee t = 1$ olacak şekilde $t \in L$ alalım. Bu durumda $(a \vee b) \vee (b \vee t) = a \vee b \vee t = 1$ olur. $b \vee t \in 1/b$ ve $a \vee b \ll 1/b$ olduğundan $b \vee t = 1$ elde ederiz. Benzer şekilde $b \vee k = 1$ eşitliğini sağlayan her $k \in L$ için $a \vee k = 1$ olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.1.4. L bir kafes ve $a, b \in L$ olsun.

(i) $a \ll L$ ve $a\beta_* b$ ise $b \ll L$ dir.

(ii) L içinde küçük olan bütün elemanlar β_* bağıntısına göre birbirlerine denktir.

İspat. (i) $a, b \in L$, $a\beta_* b$ ve $a \ll L$ olsun. $b \vee t = 1$ eşitliğini sağlayan bir $t \in L$ alalım. $a\beta_* b$ olduğundan $a \vee t = 1$ dir. $a \ll L$ olduğu dikkate alınırsa $t = 1$ bulunur. O halde $b \ll L$ dir.
(ii) $a, b \in L$, $a \ll L$ ve $b \ll L$ olsun. $a \ll L$ olduğundan, $a \vee t = 1$ eşitliğini sağlayan her $t \in L$ için $t = 1$ dir. Bu durumda $b \vee t = 1$ bulunur. $b \vee k = 1$ eşitliğini sağlayan her $k \in L$ için $a \vee k = 1$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. O halde $a\beta_* b$ dir.

Sonuç 4.1.5. L bir kafes olsun. Bu durumda L'nin oyuk olması için gerek ve yeter koşul L'nin 1'den farklı tüm elemanlarının β_* bağıntısına göre birbirine denk olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: L oyuk kafes olsun. Bu takdirde L'nin 1'den farklı her elemanı L içinde küçüktür. Teorem 4.1.4 (ii) gereği L'nin 1'den farklı tüm elemanları birbirine denktir.
$(\Leftarrow)$: L nin 1'den farklı tüm elemanları birbirine denk olsun. $1 \neq a \in L$ için $a \vee t = 1$ olacak şekilde $t \in L$ alalım. Eğer $t \neq 1$ olsaydı hipotez gereği $a\beta_* t$ olduğundan $t = t \vee t = a \vee t = 1$ çelişkisi elde edilir. O halde $t = 1$ dir. Bu durumda $a \ll L$ olup L oyuk kafestir.

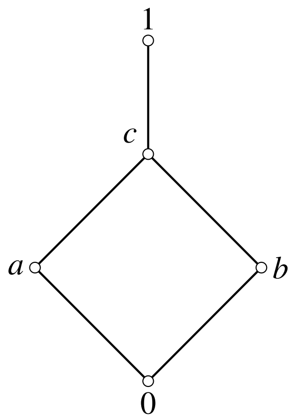
Tanım 4.1.6. L bir kafes, $a, b \in L$ ve $a \leq b$ olsun. $b \vee t = 1$ eşitliğini sağlayan her $t \in L$ için $a \vee t = 1$ ise, *b elemanı a'nın üzerindedir* denir.

Teorem 4.1.7. L bir kafes olsun. $a, b \in L$ ve $a \leq b$ olmak üzere b elemanı a'nın üzerinde ise $a\beta_* b$ dir.

İspat. b elemanı a'nın üzerinde olduğundan tanım gereği $b \vee t = 1$ eşitliğini sağlayan her $t \in L$ için $a \vee t = 1$ dir. $a \vee k = 1$ eşitliğini sağlayan her $k \in L$ için $a \leq b$ olduğundan $b \vee k = 1$ dir. Sonuç olarak $a\beta_* b$ olur.

Aşağıdaki örnek, Teorem 4.1.7'nin tersinin her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.1.1. $\mathcal{P}$, Şekil 4.1 diyagramı ile temsil edilen kafes olsun. Diyagrama dikkat edilirse $a\beta_* b$ olduğu görülür fakat ne a elemanı b'nin üzerindedir, ne de b elemanı a'nın üzerindedir.



Şekil 4.1: $\mathcal{P}$ kafesinin diyagramı

Tanım 4.1.8. L kafesinin her elemanı, L'nin bir direkt toplam terimi üzerinde ise L'ye *yükseltilebilir kafes* denir.

Yardımcı Teorem 4.1.9. L bir kafes ve $a,b,c \in L$ olsun. Eğer $a \vee b = 1$ ve $(a \wedge b) \vee c = 1$ ise $a \vee (b \wedge c) = b \vee (a \wedge c) = 1$ olur.

İspat. $a,b,c \in L$ için $a \vee b = 1$ ve $(a \wedge b) \vee c = 1$ olsun. $(a \wedge b) \vee c = 1$ olduğundan $a = a \wedge 1 = a \wedge [(a \wedge b) \vee c] = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ olur. Bu durumda $b \vee (a \wedge c) = b \vee (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee a = 1$ bulunur. $a \vee (b \wedge c) = 1$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 4.1.10. L bir kafes ve $a,b \in L$ olsun. $a\beta_* b$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) a ve b elemanlarının varsa tümleyenleri aynıdır.

(ii) a ve b elemanlarının varsa zayıf tümleyenleri aynıdır.

İspat. (i) $c \in L$, a'nın bir tümleyeni olsun. Bu takdirde $a \vee c = 1$ dir. $a\beta_* b$ olduğundan $b \vee c = 1$ bulunur. $b \vee d = 1$ eşitliğini sağlayan $d \leq c$ alalım. Bu durumda $a\beta_* b$ olduğundan $a \vee d = 1$ dir. c elemanı a'nın bir tümleyeni ve $d \leq c$ olduğundan $d = c$ dir. Dolayısıyla c, b'nin de bir tümleyeni olur. a ve b nin rolleri değiştirilirse b'nin tümleyenleri ile a'nın tümleyenlerinin aynı olduğu görülebilir.

(ii) $a\beta_* b$ ve $c \in L$, a'nın bir zayıf tümleyeni olsun. Bu durumda $a \vee c = 1$ ve $a \wedge c \ll L$ dir. $a\beta_* b$ ve $a \vee c = 1$ olduğundan $b \vee c = 1$ dir. $t \in L$ için $(b \wedge c) \vee t = 1$ olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 4.1.9 gereği $b \vee (c \wedge t) = 1$ ve $c \vee (b \wedge t) = 1$ olur. $a\beta_* b$ olduğu dikkate alınırsa $a \vee (c \wedge t) = 1$ elde edilir. $c \vee (b \wedge t) = 1$ eşitliğinin her iki tarafının t ile supremumu alınırsa $c \vee t = 1$ bulunur. $a \vee (c \wedge t) = 1$ ve $c \vee t = 1$ olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.9 gereği $t \vee (a \wedge c) = 1$ dir. Burada $a \wedge c \ll L$ olduğundan $t = 1$ dir. O halde $b \wedge c \ll L$ dir. Sonuç olarak c, b nin de bir zayıf tümleyenidir. a ile b nin rolleri değiştirilerek b'nin her zayıf tümleyeninin a'nın da bir zayıf tümleyeni olduğu gösterilebilir.

Teorem 4.1.11. L bol tümlenmiş kafes ve $a, b \in L$ olsun. a ve b'nin tümleyenleri aynı ise $a\beta_* b$ dir.

İspat. $a \vee t = 1$ eşitliğini sağlayan $t \in L$ alalım. L bol tümlenmiş olduğundan $r \leq t$ olacak şekilde a'nın L içinde bir r tümleyeni vardır. Hipotezden r, b'nin de bir tümleyenidir. O halde $b \vee r = 1$ dir. $r \leq t$ olduğundan $b \vee t = 1$ elde edilir. a ile b nin rolleri değiştirilirse $b \vee k = 1$ eşitliğini sağlayan her $k \in L$ için de $a \vee k = 1$ olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $a\beta_* b$ olur.

Sonuç 4.1.12. L bir kafes $x, y, c \in L$ olmak üzere $x \leq y$ ve c elemanı x'in bir zayıf tümleyeni olsun. Bu takdirde $x\beta_* y$ olması için gerek ve yeter koşul $y \wedge c \ll L$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: Teorem 4.1.10 (ii) gereği açıktır.
$(\Leftarrow)$: $x \leq y$ olduğundan $x \vee t = 1$ eşitliğini sağlayan her $t \in L$ için $y \vee t = 1$ dir. $k \in L$ ve $y \vee k = 1$ olsun. c, x'in bir zayıf tümleyeni olduğundan $x \vee c = 1$ ve $x \wedge c \ll L$ dir. Bu durumda $y \wedge (x \vee c) = 1 \wedge y$ olur ve $y = x \vee (y \wedge c)$ bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının k ile supremumu alınırsa $k \vee x \vee (y \wedge c) = k \vee y = 1$ elde edilir. $y \wedge c \ll L$ olduğundan $x \vee k = 1$ bulunur. Sonuç olarak $x\beta_* y$ dir.

Teorem 4.1.13. L bir kafes ve $x, y, z, a, b \in L$ için $a \oplus b = 1$ ve y, x'in L içinde bir tümleyeni olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(i) $z\beta_* y$ ise $z/(z \wedge x) \cong y/(y \wedge x)$ dir.

(ii) $z\beta_* b$ ise $z/(z \wedge a) \cong b/0$ dır.

(iii) $z \leq b$ olsun. Bu durumda $z\beta_* b$ olması için gerek ve yeter koşul $z = b$ olmasıdır.

(iv) $b \leq z$ olsun. Bu durumda $z\beta_* b$ olması için gerek ve yeter koşul $z \wedge a \ll L$ olmasıdır.

İspat. (i) y, x'in bir tümleyeni ve $z\beta_* y$ olduğundan $x \vee z = x \vee y = 1$ bulunur. Bu eşitlik ve $z/(z \wedge x) \cong (z \vee x)/x$, $(y \vee x)/x \cong y/(y \wedge x)$ izomorfizmaları dikkate alınırsa

$$z/(z \wedge x) \cong (z \vee x)/x = (y \vee x)/x \cong y/(y \wedge x)$$

elde edilir. O halde $z/(z \wedge x) \cong y/(y \wedge x)$ olur.

(ii) $z\beta_* b$ olduğundan (i) gereği $z/(z \wedge a) \cong b/(a \wedge b)$ bulunur. Burada $a \oplus b = 1$ olduğundan $a \vee b = 1$ ve $a \wedge b = 0$ olur. O halde $z/(z \wedge a) \cong b/0$ elde edilir.

(iii) $(\Rightarrow)$: $a \oplus b = 1$ olduğundan $a \vee b = 1$ dir. $z\beta_* b$ olduğundan $a \vee z = 1$ olur. b, a'nın bir tümleyeni ve $z \leq b$ olduğundan tümleyen tanımı gereği $z = b$ dir.

$(\Leftarrow)$: β_* bağıntısının yansıma özelliği gereği açıktır.

(iv) $(\Rightarrow)$: a, b'nin bir zayıf tümleyeni ve $z\beta_* b$ olduğundan Teorem 4.1.10 (ii) gereği a, z'nin de bir zayıf tümleyenidir. O halde $z \wedge a \ll L$ dir.

$(\Leftarrow)$: Sonuç 4.1.12 gereği açıktır.

Teorem 4.1.14. *L dağılımlı bir kafes ve $a, b \in L$ olsun. $a \oplus b = 1$ ve $a\beta_* x$ ise $a \leq x$ ve $b \wedge x \ll L$ olur.*

İspat. $a \oplus b = 1$ ve $a\beta_* x$ olduğundan $x \vee b = 1$ dir. Buradan $a \wedge (x \vee b) = a \wedge 1$ elde edilir. L dağılımlı olduğundan $(a \wedge x) \vee (a \wedge b) = a$ bulunur. $a \wedge b = 0$ olduğundan $a \wedge x = a$ yani $a \leq x$ elde edilir. $a \leq x$ ve $x\beta_* a$ olduğundan Teorem 4.1.13 (iv) gereği $b \wedge x \ll L$ olur.

Yardımcı Teorem 4.1.15. *L bir dağılımlı kafes ve $a, b, x, y \in L$ için $a \oplus b = 1$, $a \leq x$ ve $b \wedge x \ll L$ olsun. Bu durumda $x\beta_* y$ ise $a \leq y$ ve $b \wedge y \ll L$ olur.*

İspat. $a \leq x$ ve $b \wedge x \ll L$ olduğundan Teorem 4.1.13 (iv) gereği $a\beta_* x$ olur. $a\beta_* x$ ve $x\beta_* y$ olduğundan $a\beta_* y$ dir. L dağılımlı kafes ve $a\beta_* y$ olduğundan, Teorem 4.1.14 gereği $a \leq y$ ve $b \wedge y \ll L$ bulunur.

Teorem 4.1.16. *L bir kafes, $x \in L$ ve k, L'nin bir maksimal elemanı olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır.*

(i) $a \vee b = 1$, $b \neq 1$ ve $x\beta_* a$ koşullarını sağlayan $a, b \in L$ için $x \nleq b$ dir.

(ii) $x\beta_* y$ ve $x \leq k$ ise $y \leq k$ dır.

(iii) $x\beta_* k$ ise $x \leq k$ dır.

(iv) $x\beta_* k$ ve w, x'in L içinde bir zayıf tümleyeni ise $k = x \vee (k \wedge w)$ ve $k \wedge w \ll L$ olur.

İspat. (i) Kabul edelim ki $x \leq b$ olsun. $a \vee b = 1$ ve $x\beta_* a$ olduğundan $x \vee b = 1$ bulunur. $x \leq b$ olduğundan $b = 1$ elde edilir. Bu ise b'nin 1'den farklı olmasıyla çelişir. O halde $x \nleq b$ dir.
(ii) $y \nleq k$ olsun. Bu durumda $k \vee y = 1$ bulunur. $x\beta_* y$ olduğundan $k = k \vee x = 1$'dir. Bu ise çelişkidir. O halde $y \leq k$ olur.
(iii) (ii)'den kolayca görülür.
(iv) $x\beta_* k$ ve w, x'in bir zayıf tümleyeni ise Teorem 4.1.10 (ii) gereği w, k'nın da bir zayıf tümleyeni olur. O halde $k \vee w = 1$ ve $k \wedge w \ll L$ dir. $x\beta_* k$ olduğundan (iii) gereği $x \leq k$ dır. $x \vee w = 1$ ve $x \leq k$ olduğundan modüler kural gereği $k = k \wedge 1 = k \wedge (x \vee w) = x \vee (k \wedge w)$ elde edilir.

Teorem 4.1.17. *L bir kafes, $a, b \in L$ ve $a \oplus b = 1$ olsun. $x, s \in a/0$ için eğer L kafesinde $x\beta_* s$ ise $a/0$ bölüm alt kafesinde de $x\beta_* s$ olur.*

İspat. $x \vee k = a$ olacak şekilde $k \in a/0$ alalım. Bu durumda $(x \vee k) \oplus b = 1$ olur. O halde $x \vee (k \vee b) = 1$ bulunur. L içinde $x\beta_* s$ olduğundan $s \vee (k \vee b) = 1$ dir. Bu durumda

$$[(s \vee k) \vee b] \wedge a = a \Rightarrow (s \vee k) \vee (b \wedge a) = a \Rightarrow s \vee k = a$$

elde edilir. Benzer işlemler x ve s'nin rolleri değiştirilerek yapılırsa $s \vee t = a$ olan her $t \in a/0$ için $x \vee t = a$ olduğu gösterilebilir. O halde $a/0$ bölüm alt kafesi içinde $x\beta_* s$ dir.

Teorem 4.1.18. *L bir kafes olsun. $x, y, k \in L$ için $x \vee k = y \vee k = 1$, $k \wedge y \leq k \wedge x$ ve $x \vee y \ll 1/y$ koşulları sağlanıyorsa $x \vee y \ll 1/x$ dir.*

İspat. $(x \vee y) \vee t = 1$ olacak şekilde $t \in 1/x$ alalım. $x \vee k = 1$ olduğundan

$$t \wedge (x \vee k) = t \wedge 1 \Rightarrow x \vee (t \wedge k) = t \Rightarrow x \vee y \vee (t \wedge k) = 1 \Rightarrow x \vee y \vee [y \vee (t \wedge k)] = 1$$

bulunur. $x \vee y \ll 1/y$ olduğundan $y \vee (t \wedge k) = 1$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} y \vee (t \wedge k) = 1 &\Rightarrow k \wedge [y \vee (t \wedge k)] = k \\ &\Rightarrow (t \wedge k) \vee (k \wedge y) = k \\ &\Rightarrow x \vee (t \wedge k) \vee (k \wedge y) = 1 \\ &\Rightarrow t \vee (k \wedge y) = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. $k \wedge y \leq k \wedge x$ olduğu dikkate alınırsa $t = t \vee (k \wedge x) = 1$ bulunur. O halde $x \vee y \ll 1/x$ dir.

Teorem 4.1.19. *L bir kafes ve $x, y, a, b \in L$ için $a, b \ll L$, $x \leq y \vee b$ ve $y \leq x \vee a$ olsun. Bu durumda $x\beta_* y$ dir.*

İspat. $x \vee y \vee k = 1$ olacak şekilde $k \in L$ alalım. $x \leq y \vee b$ olduğundan $y \vee b \vee k = 1$ dir. $b \ll L$ olduğu dikkate alınırsa $y \vee k = 1$ bulunur. Benzer şekilde $y \leq x \vee a$ olduğundan $x \vee a \vee k = 1$ yazılabilir. $a \ll L$ den $x \vee k = 1$ bulunur. Teorem 4.1.3 (i) gereği $x\beta_* y$ olur.

Teorem 4.1.20. L bir kafes ve $x_1, x_2, y_1, y_2 \in L$ olsun. $x_1\beta_* y_1$ ve $x_2\beta_* y_2$ ise $(x_1 \vee x_2)\beta_*(y_1 \vee y_2)$ dir.

İspat. $k \in L$ ve $(x_1 \vee x_2) \vee (y_1 \vee y_2) \vee k = 1$ olsun. $x_1\beta_* y_1$ olduğundan $y_1 \vee x_2 \vee y_2 \vee k = 1$ ve $x_1 \vee x_2 \vee y_2 \vee k = 1$ bulunur. $x_2\beta_* y_2$ olduğundan ise $y_1 \vee y_2 \vee k = 1$ ve $x_1 \vee x_2 \vee k = 1$ elde edilir. Bu durumda Teorem 4.1.3 (i) gereği $(x_1 \vee x_2)\beta_*(y_1 \vee y_2)$ olur.

Sonuç 4.1.21. L bir kafes ve $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n \in L$ olsun. Her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $x_i\beta_* y_i$ ise $\bigvee_{i=1}^{n} x_i \; \beta_* \bigvee_{i=1}^{n} y_i$ olur.

Sonuç 4.1.22. L bir kafes ve $x, y_1, y_2, ..., y_n \in L$ olsun. Her $i = 1, 2, ..., n$ için $x\beta_* y_i$ ise $x\beta_* \bigvee_{i=1}^{n} y_i$ olur.

Teorem 4.1.23. L bir kafes, $x, y \in L$ ve $j \ll L$ olsun. Bu takdirde $x\beta_* y$ olması için gerek ve yeter koşul $x\beta_*(y \vee j)$ olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: $k \in L$ ve $x \vee k = 1$ olsun. $x\beta_* y$ olduğundan $y \vee k = 1$ dir. O halde $y \vee j \vee k = 1$ olur. $t \in L$ ve $(y \vee j) \vee t = 1$ olsun. $j \ll L$ olduğundan $y \vee t = 1$ dir. $x\beta_* y$ olduğu dikkate alınırsa $x \vee t = 1$ bulunur. O halde $x\beta_*(y \vee j)$ dir.
$(\Leftarrow)$: $k \in L$ ve $x \vee k = 1$ olsun. $x\beta_*(y \vee j)$ olduğundan $y \vee j \vee k = 1$ bulunur. $j \ll L$ olduğu da dikkate alınırsa $y \vee k = 1$ olur. $t \in L$ ve $y \vee t = 1$ olsun. Buradan $y \vee j \vee t = 1$ bulunur. $x\beta_*(y \vee j)$ olduğundan $x \vee t = 1$ olur. O halde $x\beta_* y$ dir.

Teorem 4.1.24. L bir kafes, $Rad(L) = 0$ ve $a \oplus b = 1$ olsun. Bu takdirde bir $x \in L$ için $x\beta_* a$ ise $x \oplus b = 1$ dir.

İspat. $a \oplus b = 1$ olduğundan b, a'nın bir tümleyenidir. $x\beta_* a$ denkliği ve Teorem 4.1.10 (i) gereği b, x'in de bir tümleyenidir. Bu durumda $b \vee x = 1$ ve $b \wedge x \ll b/0$ olur. Yardımcı Teorem 2.6.8 gereği $x \wedge b \leq Rad(L)$ olur. O halde $Rad(L) = 0$ olduğundan $x \wedge b = 0$ olur. Sonuç olarak $x \oplus b = 1$ dir.

Teorem 4.1.25. L bir kafes olsun. L'nin zayıf tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul L'nin her elemanının L'de β_* bağıntısına göre bir zayıf tümleyene denk olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: $x \in L$ olsun. L zayıf tümlenmiş olduğundan $x \vee z = 1$ ve $x \wedge z \ll L$ olacak şekilde bir $z \in L$ vardır. Burada x, z'nin bir zayıf tümleyeni olup zayıf tümleyen bir elemandır. β_* bağıntısının yansıma özelliğini göz önüne alırsak $x\beta_* x$ olur. O halde L'nin her elemanı, L'nin bir zayıf tümleyen elemanına denktir.
$(\Leftarrow)$: L'nin her elemanı, L içinde bir zayıf tümleyene denk olsun. Bu takdirde bir $x \in L$ için $x\beta_* z$ olacak şekilde bir $z \in L$ zayıf tümleyen elemanı vardır. O halde $a \vee z = 1$ ve $a \wedge z \ll L$ koşullarını sağlayan bir $a \in L$ bulunabilir. Burada a elemanı da z'nin L içinde bir zayıf tümleyenidir. $x\beta_* z$ olduğundan Teorem 4.1.10 (ii) gereği a, x'in de L içinde bir zayıf tümleyenidir. Sonuç olarak L zayıf tümlenmiştir.

Teorem 4.1.26. Bir L kafesinin zayıf tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her $x \in L$ için $x \vee h = z \vee h = x \vee z$ eşitliklerini sağlayan L'nin bir $h \ll L$ elemanının ve L içinde zayıf tümleyen olan bir z elemanının bulunabilmesidir.

İspat. $(\Rightarrow)$: L zayıf tümlenmiş ve $x \in L$ olsun. Bu durumda x, L'de bir zayıf tümleyen eleman olup, $h = 0$ ve $z = x$ alırsak istenen elde edilir.
$(\Leftarrow)$: $x, t \in L$ ve $x \vee t = 1$ olsun. Hipotez gereği $x \vee h = z \vee h = x \vee z$ olacak şekilde $h \ll L$ ve $z \in L$ zayıf tümleyen elemanları vardır. Bu durumda $x \vee h \vee t = 1$ olur ve $z \vee h \vee t = 1$ yazılabilir. $h \ll L$ olduğundan $z \vee t = 1$ bulunur. Benzer şekilde $z \vee k = 1$ eşitliğini sağlayan her $k \in L$ için $x \vee k = 1$ olduğu gösterilebilir. O halde $x\beta_* z$ dir. Sonuç olarak Teorem 4.1.25 gereği L zayıf tümlenmiştir.

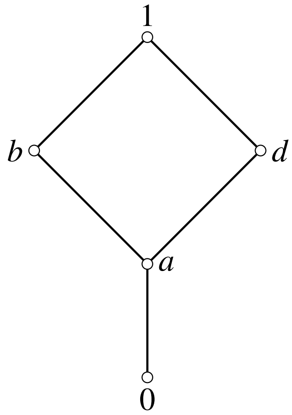
4.2 G_*-Yükseltilebilir ve G_*-Tümlenmiş Kafesler

Tanım 4.2.1. L bir kafes olsun. Her $x \in L$ için $x\beta_* d$ olacak şekilde L'nin bir d direkt toplam terimi varsa L kafesine *G_*-yükseltilebilirdir* denir.

Tanım 4.2.2. L bir kafes olsun. Her $x \in L$ için $x\beta_* s$ olacak şekilde bir $s \in L$ tümleyen elemanı varsa L kafesine *G_*-tümlenmiştir* denir.

Her direkt toplam terimi bir tümleyen eleman olduğundan, her G_*-yükseltilebilir kafesin G_*-tümlenmiş kafes olduğu açıktır. Aşağıdaki örnek tersinin her zaman doğru olmadığını göstermektedir.

Örnek 4.2.1. $\mathcal{T}$, Şekil 4.2 diyagramı ile temsil edilen bir kafes olsun. $\mathcal{T}$ kafesi G_*-tümlenmiştir ancak G_*-yükseltilebilir değildir.



Şekil 4.2: $\mathcal{T}$ kafesinin diyagramı

Teorem 4.2.3. *L bir kafes olsun. L'nin G_*-tümlenmiş (G_*-yükseltilebilir) olması için gerek ve yeter koşul her $x \in L$ için $x \vee h = s \vee h = x \vee s$ ($x \vee h = d \vee h = x \vee d$) eşitliklerini sağlayan L kafesinin en az bir küçük h elemanı ve s tümleyen elemanının (d direkt toplam teriminin) bulunabilmesidir.*

İspat. $(\Rightarrow)$: L, G_*-tümlenmiş olsun. Bu durumda $x \in L$ için $x\beta_* s$ olacak şekilde L'nin bir s tümleyen elamanı vardır. Bu takdirde $s \vee w = 1$ ve $s \wedge w \ll s/0$ olacak şekilde bir $w \in L$ bulunabilir. Teorem 4.1.20 gereğince $s\beta_*(s \vee x)$ olur. Teorem 4.1.10 (ii) gereğince w elemanı $x \vee s$ için bir zayıf tümleyendir. $h = (s \vee x) \wedge w \ll L$ seçilirse modüler kural yardımıyla

$$x \vee h = x \vee [(s \vee x) \wedge w] = (s \vee x) \wedge (x \vee w) = (s \vee x) \wedge 1 = s \vee x$$
$$s \vee h = s \vee [(s \vee x) \wedge w] = (s \vee x) \wedge (s \vee w) = (s \vee x) \wedge 1 = s \vee x$$

eşitlikleri elde edilir. Sonuç olarak $x \vee h = s \vee h = x \vee s$ olur.

$(\Leftarrow)$: $x \in L$ elemanı için $x \vee h = s \vee h = x \vee s$, $h \ll L$ ve s, L'de tümleyen olacak şekilde $\exists h, s \in L$ bulunabilsin. $x \vee t = 1$ eşitliğini sağlayan bir $t \in L$ alalım. Buradan $x \vee h \vee t = 1$ eşitliği vardır. $x \vee h = s \vee h$ olduğundan $s \vee h \vee t = 1$ elde edilir. $h \ll L$ olduğundan da $s \vee t = 1$ sonucuna ulaşılır. Tersine $s \vee a = 1$ eşitliğini sağlayan herhangi bir $a \in L$ alalım. Bu durumda $s \vee h \vee a = 1$ eşitliği vardır. $x \vee h = s \vee h$ olduğundan $x \vee h \vee a = 1$ elde edilir. $h \ll L$ olduğundan da $x \vee a = 1$ sonucuna ulaşılır. O halde L, G_*-tümlenmiştir. G_*-yükseltilebilir durumu da benzer şekilde gösterilebilir.

Sonuç 4.2.4. (i) L bir kafes olsun. Eğer her $x \in L$ için $x = s \vee h$ olacak şekilde bir $s \in L$ tümleyen elemanı ve $h \ll L$ elemanı varsa L kafesi G_*-tümlenmiştir. L'nin dağılımlı olması durumunda tersi de doğrudur.

(ii) L, G_*-tümlenmiş ve $Rad(L) \leq x$ olmak üzere $x \in L$ olsun. Bu takdirde $x = s \vee h$ olacak şekilde bir s tümleyen elemanı ve $h \ll L$ elemanı vardır.

İspat. (i) Teorem 4.1.19 gereği L, G_*-tümlenmiştir. Tersine L kafesi G_*-tümlenmiş ve dağılımlı olsun. Bu durumda bir $x \in L$ elemanı için $x\beta_* s$ olacak şekilde $s \in L$ tümleyen elemanı vardır. O halde $s \vee t = 1$ ve $s \wedge t \ll s/0$ olacak şekilde $\exists t \in L$ vardır. $x\beta_* s$ olduğundan $x \vee t = 1$ bulunur. Bu eşitliğin her iki yanınına s ile $\wedge$ işlemi uygularsak, L dağılımlı olduğundan $s = s \wedge (x \vee t) = (s \wedge x) \vee (s \wedge t) = s \wedge x$ eşitliği elde edilir. O halde $s \leq x$ bulunur. Buradan $x = x \wedge 1 = x \wedge (s \vee t) = s \vee (x \wedge t)$ olur. Ayrıca $x\beta_* s$ olduğundan Teorem 4.1.10 (ii) gereği t, x'in bir zayıf tümleyenidir. Böylece $x \wedge t \ll L$ olur.

(ii) L kafesi G_*-tümlenmiş ve $Rad(L) \leq x$ olmak üzere $x \in L$ olsun. Bu takdirde Teorem 4.2.3 gereği $x \vee h = s \vee h = x \vee s$ olacak şekilde L'nin bir h küçük elemanı ve bir s tümleyen elemanı vardır. $h \leq Rad(L)$ ve $Rad(L) \leq x$ olduğundan $h \leq x$ bulunur. Dolayısıyla $x = s \vee h$ olur.

Teorem 4.2.5. L bir kafes ve $Rad(L) \ll L$ olsun. Bu takdirde L kafesinin G_*-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her $x \in L$ için $s \vee Rad(L) = x \vee Rad(L)$ olacak şekilde L kafesinin bir s tümleyen elemanının bulunmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$: L kafesi G_*-tümlenmiş olsun. Bu takdirde Teorem 4.2.3 gereği $x \vee h = s \vee h = x \vee s$ olacak şekilde L kafesinin küçük bir h elemanı ve s tümleyen elemanı vardır. $h \leq Rad(L)$ olduğundan $x \vee Rad(L) = s \vee Rad(L)$ eşitliği elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $x \in L$ alalım. Bu durumda hipotezden $x \vee Rad(L) = s \vee Rad(L)$ olacak şekilde L'nin bir s tümleyen elemanı vardır. $Rad(L) \ll L$, $x \leq s \vee Rad(L)$ ve $s \leq x \vee Rad(L)$ olduğundan Teorem 4.1.19 gereği $x\beta_* s$ bulunur. Dolayısıyla L kafesi G_*-tümlenmiştir.

Teorem 4.2.6. L bir G_*-tümlenmiş kafes ve $x \in L$ olsun. Eğer L'nin her s tümleyen elemanı için $(x \vee s)$ elemanı da $1/x$ içinde tümleyen ise $1/x$ bölüm alt kafesi de G_*-tümlenmiştir.

İspat. $n \in 1/x$ alalım. Bu durumda $n \geq x$ olur. $n \in L$ ve L, G_*-tümlenmiş olduğundan $n\beta_* s$ olacak şekilde L içinde s tümleyen elemanı vardır. $x \vee s \in 1/x$ elemanını alalım. $k \in 1/x$ ve $n \vee k = 1$ olsun. Bu durumda $n\beta_* s$ olduğundan $s \vee k = 1$ olur. Buradan $(x \vee s) \vee k = 1$ bulunur. Diğer taraftan $m \in 1/x$ ve $(x \vee s) \vee m = 1$ olsun. $n\beta_* s$ olduğundan

$n \vee m = n \vee (x \vee m) = 1$ bulunur. Bu durumda $n\beta_*(x \vee s)$ olur. Hipotezden $x \vee s$, $1/x$ içinde tümleyen elemandır. O halde $1/x$ bölüm alt kafesi G_*-tümlenmiştir.

Sonuç 4.2.7. *L dağılımlı bir kafes olsun. Eğer L kafesi G_*-tümlenmiş ise her $x \in L$ için $1/x$ bölüm alt kafesi de G_*-tümlenmiştir.*

İspat. s, L de tümleyen bir eleman olsun. O halde $s \vee p = 1$ ve $s \wedge p \ll s/0$ olacak şekilde bir $p \in L$ vardır. Herhangi $x \in L$ alalım. $s \vee p = 1$ olduğundan $(s \vee x) \vee (p \vee x) = 1$ olur. L dağılımlı olduğundan $(s \vee x) \wedge (p \vee x) = (s \wedge p) \vee x$ olur. Burada $s \wedge p \ll s/0$ olduğundan $(s \wedge p) \vee x \ll (s \vee x)/x$ olur. O halde $s \vee x$, $p \vee x$ elemanının $1/x$ içinde bir tümleyenidir. Teorem 4.2.6 gereği $1/x$ bölüm alt kafesi G_*-tümlenmiş olur.

Teorem 4.2.8. *L bir kafes ve $u \in L$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

(i) $x \leq u$, $x^{'} \wedge u \ll x^{'}/0$ olacak şekilde L'nin bir $x \oplus x^{'} = 1$ ayrışımı vardır.

(ii) $x \leq u$, $u = x \vee y$ ve $y \ll L$ olacak şekilde L'nin bir x direkt toplam terimi ve y elemanı vardır.

(iii) u, x'in üzerinde olacak şekilde L'nin bir x direkt toplam terimi vardır.

(iv) $u \wedge k$, $u/0$ içinde bir direkt toplam terimi olacak şekilde, u'nun L içinde bir k tümleyeni vardır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) $x^{'} \wedge u \ll x^{'}/0$, $x \leq u$ olacak şekilde L'nin bir $x \oplus x^{'} = 1$ ayrışımının varlığını kabul edelim. Modüler kural gereği $u = x \vee (u \wedge x^{'})$ alınırsa koşulların sağlandığı kolayca görülebilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $u \in L$ için, (ii)'deki koşulları sağlayan L'nin bir x direkt toplam terimi ve $y \ll L$ elemanının varlığını kabul edelim. u elemanının x direkt toplam teriminin üzerinde olduğunu gösterelim. $k \in L$ ve $u \vee k = 1$ olsun. $u = x \vee y$ olduğundan $y \vee (x \vee k) = 1$ elde edilir. $y \ll L$ olduğundan $x \vee k = 1$ bulunur. O halde u, x direkt toplam teriminin üzerindedir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) x, L'nin bir direkt toplam terimi, $x \leq u$ ve u, x'in üzerinde olsun. x, L'nin bir direkt toplam terimi olduğundan $x \oplus k = 1$ olacak şekilde bir $k \in L$ vardır. $x \leq u$ olduğundan modüler kural gereği $u = x \oplus (u \wedge k)$ bulunur. $1 = x \oplus k$ olduğundan, k elemanı x'in L'de bir tümleyeni olup $u\beta_* x$ olduğundan Teorem 4.1.10 (i) gereği k, u'nun da L içinde bir tümleyeni olur. O halde istenen elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ (i) $u \wedge k$, $u/0$ içinde bir direkt toplam terimi olacak şekilde, u'nun L içinde bir k tümleyeninin varlığını kabul edelim. Bu durumda $u \vee k = 1$ ve $u \wedge k \ll k/0$ olur.

$u \wedge k$ elemanı $u/0$ içinde bir direkt toplam terimi olduğundan $x \oplus (u \wedge k) = u$ olacak şekilde bir $x \in u/0$ vardır. Bu durumda $x \vee (u \wedge k) = u$ ve $x \wedge (u \wedge k) = 0$ olur. Buradan $x \vee k = x \vee (u \wedge k) \vee k = u \vee k = 1$ elde edilir. $x \leq u$ ve $x \wedge (u \wedge k) = 0$ olduğundan $x \wedge k = 0$ bulunur. O halde $1 = x \oplus k$ olur.

Yardımcı Teorem 4.2.9. L bol tümlenmiş bir kafes olsun. L'nin her tümleyen v elemanı için $v/0$ bölüm alt kafesi de bol tümlenmiştir.

İspat. v, L içinde bir u elemanının tümleyeni ve $x, y \in v/0$ için $x \vee y = v$ olsun. v, L içinde u elemanının bir tümleyeni olduğundan $u \vee v = 1$ ve $u \wedge v \ll v/0$ olur. Buradan $(u \vee x) \vee y = u \vee (x \vee y) = u \vee v = 1$ elde edilir. L bol tümlenmiş olduğundan $u \vee x$ elemanının $y' \leq y$ olacak şekilde L içinde bir y' tümleyeni vardır. O halde $(u \vee x) \vee y' = 1$ ve $(u \vee x) \wedge y' \ll y'/0$ olur. $x \wedge y' \leq (u \vee x) \wedge y' \ll y'/0$ olduğundan $x \wedge y' \ll y'/0$ bulunur. Diğer taraftan $u \vee (x \vee y') = 1$ olduğundan $(x \vee y) \wedge \left[u \vee (x \vee y')\right] = v$ elde edilir. $x \vee y' \leq x \vee y$ olduğundan modüler kural gereği $(u \wedge v) \vee (x \vee y') = v$ bulunur. $u \wedge v \ll v/0$ olduğundan $x \vee y' = v$ elde edilir. O halde y', x elemanının $v/0$ içinde bir tümleyenidir. Böylece $v/0$ bol tümlenmiş olur.

Teorem 4.2.10. Bir L kafesi için aşağıdaki özellikler denktir.

(i) L bol tümlenmiştir.

(ii) Her $u \in L$ için, $u = x \vee y$ olacak şekilde L'nin bir $x/0$ tümlenmiş alt kafesi ve $y \ll L$ elemanı vardır.

(iii) Her $u \in L$ için, u elemanı x'in üzerinde olacak şekilde bir $x/0$ tümlenmiş alt kafesi vardır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) L bol tümlenmiş olduğundan tümlenmiştir. $u \in L$ ve v, u'nun L içinde bir tümleyeni olsun. O halde $u \vee v = 1$ ve $u \wedge v \ll v/0$ olur. L bol tümlenmiş ve $u \vee v = 1$ olduğundan v'nin $x \leq u$ olacak şekilde L içinde bir x tümleyeni vardır. Bu durumda $x \vee v = 1$ ve $x \wedge v \ll x/0$ olur. Buradan modüler kural gereği $u = 1 \wedge u = (x \vee v) \wedge u = x \vee (u \wedge v)$ elde edilir. $u \wedge v \ll v/0$ olduğundan $u \wedge v \ll L$ bulunur. L bol tümlenmiş ve x elemanı L içinde bir tümleyen eleman olduğundan Yardımcı Teorem 4.2.9 gereği, $x/0$ bölüm alt kafesi de bol tümlenmiştir. O halde $x/0$ bölüm alt kafesi tümlenmiştir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) $u \in L$ alalım. Hipotez gereği $u = x \vee y$ olacak şekilde L'nin bir $x/0$ tümlenmiş bölüm alt kafesi ve $y \ll L$ elemanı vardır. u'nun x elemanının üzerinde olduğunu gösterelim. $k \in L$ ve $u \vee k = 1$ olsun. $u = x \vee y$ olduğundan $y \vee (x \vee k) = 1$ bulunur. $y \ll L$ olduğundan $x \vee k = 1$ olur. O halde u, x'in üzerindedir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $u, v \in L$ ve $u \vee v = 1$ olsun. Hipotez gereği $x \leq v$ ve v, x'in üzerinde olacak şekilde L'nin bir $x/0$ tümlenmiş bölüm alt kafesi vardır. Bu durumda $u \vee x = 1$ olur. $u \wedge x \in x/0$ ve $x/0$ tümlenmiş kafes olduğundan, $u \wedge x$ elemanının $x/0$ içinde bir $v^{'}$ tümleyeni vardır. $(u \wedge x) \vee v^{'} = x$ ve $(u \wedge x) \wedge v^{'} \ll v^{'}/0$ olur. $v^{'}$ elemanının u'nun bir tümleyeni olduğunu gösterelim. $u \vee v^{'} = [u \vee (u \wedge x)] \vee v^{'} = u \vee \left[(u \wedge x) \vee v^{'}\right] = u \vee x = 1$ elde edilir. $v^{'} \in x/0$ olduğundan $v^{'} \wedge x = v^{'}$ bulunur. Bu durumda $u \wedge v^{'} = u \wedge (v^{'} \wedge x) = (u \wedge x) \wedge v^{'} \ll v^{'}/0$ bulunur. Böylece $v^{'}$, u elemanının L içinde bir tümleyeni olur. O halde L bol tümlenmiştir.

Teorem 4.2.11. Bir L kafesi için aşağıdakiler denktir.

(i) L bol tümlenmiştir ve L'nin her tümleyen elemanı, L'nin bir direkt toplam terimidir.

(ii) L'nin her elemanı, L'nin direkt toplam terimi olan bir elemanın üzerindedir.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) $u \in L$ olsun. L bol tümlenmiş olduğundan tümlenmiştir. Bu durumda u elemanının L içinde bir v tümleyeni vardır. O halde $u \vee v = 1$ ve $u \wedge v \ll v/0$ olur. Ayrıca L bol tümlenmiş olduğundan v elemanının $x \leq u$ olacak şekilde L içinde bir x tümleyeni vardır. x tümleyen olduğundan hipotez gereği L'nin bir direkt toplam terimi olur. u elemanının x'in üzerinde olduğunu gösterelim. $k \in L$ ve $u \vee k = 1$ olsun. Bu durumda modüler kural gereği $(u \wedge v) \vee x \vee k = [u \wedge (x \vee v)] \vee k = u \vee k = 1$ olur. $u \wedge v \ll L$ olduğundan $x \vee k = 1$ bulunur. O halde u, L'nin bir direkt toplam terimi olan x elemanının üzerindedir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Teorem 4.2.8 gereği, L tümlenmiş kafestir ve her $u \in L$ için $u = x \vee y$ olacak şekilde L'nin bir x direkt toplam terimi ve $y \ll L$ elemanı vardır. Burada x, L'nin bir direkt toplam terimi olduğundan $x/0$ kafesinin tümlenmiş olduğu gösterilebilir. Bu durumda Teorem 4.2.10 gereği L bol tümlenmiştir. L'nin her tümleyen elemanının bir direkt toplam terimi olduğunu gösterelim. x, y'nin L içinde bir tümleyeni olsun. Hipotez gereği x bir t direkt toplam teriminin üzerindedir. Bu durumda $x \vee y = 1$ olduğundan $y \vee t = 1$ bulunur. $t \leq x$, $y \vee t = 1$ olduğundan x tümleyeninin minimalliği gereği $x = t$ bulunur. O halde x bir direkt toplam terimidir.

Teorem 4.2.12. L bir kafes olsun. Bu durumda;

(i) L yükseltilebilirdir.

(ii) L G_*-yükseltilebilirdir.

(iii) L G_*-tümlenmiştir.

(iv) L tümlenmiştir.

koşulları için (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) geçişleri sağlanır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) L yükseltilebilir ise her elemanı L'nin bir direkt toplam terimi üzerindedir. Bu durumda L kafesinin her elemanı Teorem 4.1.7 gereği bir direkt toplam terimine denk olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Her direkt toplam terimi bir tümleyen olduğundan açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $x \in L$ alalım. L kafesi G_*-tümlenmiş olduğundan $x\beta_* s$ olacak şekilde L içinde bir s tümleyen elemanı vardır. s, L içinde w elemanının bir tümleyeni olsun. $w \in L$ ve L, G_*-tümlenmiş olduğundan $w\beta_* t$ olacak şekilde L içinde bir t tümleyen elemanı vardır. Teorem 4.1.10 (i) gereği s, t elemanının da bir tümleyenidir. Burada t tümleyen eleman olduğundan, t de s'nin bir tümleyenidir. Teorem 4.1.10 (i) gereği t elamanı x'in de bir tümleyenidir. O halde L tümlenmiştir.

Sonuç 4.2.13. L bir kafes olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar sağlanır.

(i) L'nin yükseltilebilir olması için gerek ve yeter koşul L'nin bol tümlenmiş ve güçlü $\oplus$-tümlenmiş olmasıdır.

(ii) L kafesi G_*-yükseltilebilir ise G_*-tümlenmiş ve $\oplus$-tümlenmiştir.

(iii) L kafesi G_*-tümlenmiş ve güçlü $\oplus$-tümlenmiş ise G_*-yükseltilebilirdir.

İspat. (i) Teorem 4.2.11 gereği açıktır.

(ii) L kafesi G_*-yükseltilebilir olsun. Teorem 4.2.12 gereği L kafesi G_*-tümlenmiştir. Ayrıca L kafesi G_*-yükseltilebilir olduğundan her $x \in L$ için $x\beta_* d$ olacak şekilde L'nin bir d direkt toplam terimi vardır. Bu durumda $d \oplus d^{'} = 1$ olacak şekilde $d^{'} \in L$ vardır. $d^{'}$ elemanı d direkt toplam teriminin L içinde bir tümleyeni ve $x\beta_* d$ olduğundan $d^{'}$ elemanı x'in de bir tümleyenidir. Dolayısıyla L'nin her elemanının, L'de direkt toplam terimi olan bir tümleyeninin olduğu görülür. O halde L, $\oplus$-tümlenmiş kafestir.

(iii) L kafesi G_*-tümlenmiş ve güçlü $\oplus$-tümlenmiş olsun. L kafesi G_*-tümlenmiş olduğundan her $x \in L$ için $x\beta_* s$ olacak şekilde L'de bir s tümleyen elemanı vardır. Ayrıca L güçlü $\oplus$-tümlenmiş olduğundan s aynı zamanda bir direkt toplam terimidir. O halde L kafesi G_*-yükseltilebilirdir.

Teorem 4.2.14. L bir kafes olsun. Bu durumda;

(i) L bol tümlenmiştir.

(ii) Her $x \in L$ için $s \vee l = x \vee l = 1$, $s \wedge l \leq x \wedge l$ ve $x \vee s \ll 1/s$ koşullarını sağlayan L içinde bir s tümleyen elemanı ve l elemanı vardır.

(iii) L G_*-tümlenmiştir.

koşulları için (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) geçişleri sağlanır.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) L bol tümlenmiş, $x \in L$ ve $x \ll L$ olsun. $s = 0$ ve $l = 1$ alınırsa, $s \vee l = 0 \vee 1 = 1 = x \vee 1 = x \vee l$ elde edilir. Diğer taraftan $x \ll L$ olduğundan $x \vee 0 \ll L = 1/0$ bulunur. $x \in L$ ve x, L içinde küçük olmayan bir eleman olsun. L bol tümlenmiş olduğundan zayıf tümlenmiştir. Bu takdirde $x \vee l = 1$ ve $x \wedge l \ll L$ olacak şekilde bir $l \in L$ vardır. L bol tümlenmiş ve $x \vee l = 1$ olduğundan, l elemanının L içinde $s \leq x$ olacak şekilde bir s tümleyeni vardır. O halde $s \vee l = 1$ ve $s \wedge l \ll s/0$ olur. Bu durumda $s \vee l = x \vee l = 1$ ve $s \leq x$ olduğundan $s \wedge l \leq x \wedge l$ koşulları sağlanır. $s \leq x$ ve $l \wedge x \ll L$ olduğundan Sonuç 4.1.12 gereği $s\beta_*x$ bulunur. $t \in 1/s$ ve $(x \vee s) \vee t = 1$ olsun. $s\beta_*x$ olduğundan $t = 1$ elde edilir. O halde $x \vee s \ll 1/s$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Teorem 4.1.18 gereği $x \vee s \ll 1/x$ olur. $x \vee s \ll 1/s$ ve $x \vee s \ll 1/x$ olduğundan Teorem 4.1.3 (ii) gereği $x\beta_*s$ olur. O halde L kafesi G_*-tümlenmiştir.

4.3 Eş Sonlu G_*-Tümlenmiş ve Eş Sonlu G_*-Yükseltilebilir Kafesler

Tanım 4.3.1. L bir kafes olsun. L'nin her eş sonlu a elemanı için $a\beta_*d$ olacak şekilde, L kafesinin bir d direkt toplam terimi varsa, L'ye *eş sonlu G_*-yükseltilebilir kafes* denir.

Tanım 4.3.2. L bir kafes olsun. L'nin her eş sonlu a elemanı için $a\beta_*s$ olacak şekilde L kafesinde bir s tümleyen elemanı varsa L'ye bir *eş sonlu G_*-tümlenmiş kafes* denir.

Tanımdan her G_*-tümlenmiş kafesin eş sonlu G_*-tümlenmiş olduğu açıktır. Her direkt toplam terimi bir tümleyen olduğundan, her eş sonlu G_*-yükseltilebilir kafes eş sonlu G_*-tümlenmiş olur. O halde aşağıdaki şema mevcuttur.

$$\begin{tikzcd} & G_*\text{-yükseltilebilir} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ \text{Eş sonlu } G_*\text{-yükseltilebilir} \arrow[dr] & & G_*\text{-tümlenmiş} \arrow[dl] \\ & \text{Eş sonlu } G_*\text{-tümlenmiş} & \end{tikzcd}$$

Örnek 4.3.1. $\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$-modülünün alt modüllerinin kümesi L olsun. L kapsama bağıntısına göre tümlenmiş olmayan bir kafestir (Clark ve diğ. 2006, s. 238). L tümlenmiş olmadığından ne G_*-tümlenmiştir ne de G_*-yükseltilebilirdir. Ancak L'nin eş sonlu elemanı sadece $\mathbb{Q}$'dur. Burada $\mathbb{Q}\beta_*\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Q}$ L'nin bir direkt toplam terimi olduğundan L eş sonlu G_*-yükseltilebilirdir.

Bu örnekte görüldüğü gibi her eş sonlu G_*-yükseltilebilir kafes G_* yükseltilebilir olmayabilir. Yine bu örnek dikkate alınırsa her eş sonlu G_*-tümlenmiş kafesin G_*-tümlenmiş olmayabileceği anlaşılır.

Örnek 4.2.1'deki $\mathcal{T}$ kafesi sonlu elemanlı olduğundan her elemanı eş sonludur. Burada $\mathcal{T}$ kafesi G_*-tümlenmiş olduğu halde G_*-yükseltilebilir olmadığından $\mathcal{T}$ kafesi eş sonlu G_*-tümlenmiştir ancak eş sonlu G_*-yükseltilebilir değildir.

Teorem 4.3.3. L bir kompakt kafes olsun.

(i) L'nin G_*-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul eş sonlu G_*-tümlenmiş olmasıdır.

(ii) L'nin G_*-yükseltilebilir olması için gerek ve yeter koşul eş sonlu G_*-yükseltilebilir olmasıdır.

İspat. L kompakt olduğundan Teorem 2.5.13 (ii) gereği, her $a \in L$ için $1/a$ bölüm alt kafesi kompakt olup a elemanı eş sonlu olur. O halde ilgili tanımlardan istenen elde edilir.

Teorem 4.3.4. L bir kafes olsun.

(i) L kafesinin her eş sonlu elemanı bir direkt toplam terimi üzerinde ise L kafesi eş sonlu G_*-yükseltilebilirdir.

(ii) L kafesinin her eş sonlu elemanı bir tümleyen üzerinde ise L kafesi eş sonlu G_*-tümlenmiştir.

İspat. (i) a, L'nin bir eş sonlu elemanı olsun. Hipotez gereği a, L'nin bir d direkt toplam teriminin üzerindedir. O halde $d \leq a$ ve $a \vee k = 1$ koşulunu sağlayan her $k \in L$ için $d \vee k = 1$ bulunur. Diğer taraftan $d \leq a$ olduğundan, $d \vee h = 1$ koşulunu sağlayan her $h \in L$ için $a \vee h = 1$ bulunur. O halde L eş sonlu G_*-yükseltilebilirdir.
(ii) (i) şıkkına benzer yolla yapılabilir.

Teorem 4.3.5. L bir eş sonlu zayıf tümlenmiş kafes ve x, L'nin $Rad(L) \leq x$ olacak şekilde bir elemanı olsun. Bu durumda $1/x$ bölüm alt kafesinin her eş sonlu elemanı $1/x$ kafesinin bir direkt toplam terimidir.

İspat. k, $1/x$ bölüm alt kafesinin bir eş sonlu elemanı olsun. k, L kafesi içinde de eş sonludur. L eş sonlu zayıf tümlenmiş bir kafes olduğundan, k elemanının L içinde bir s zayıf tümleyeni vardır. Yani $k \vee s = 1$ ve $k \wedge s \ll L$ olur. Yardımcı Teorem 2.6.8 gereği, $k \wedge s \leq Rad(L) \leq x$ bulunur. Buradan $k \wedge (s \vee x) = (k \wedge s) \vee x = x$ elde edilir. O halde $k \oplus (s \vee x) = 1$ olur. k, $1/x$ içinde bir direkt toplam terimidir.

Sonuç 4.3.6. L bir eş sonlu zayıf tümlenmiş kafes olsun. Bu durumda L'nin, $Rad(L) \leq x$ olacak şekilde her x elemanı için $1/x$ bölüm alt kafesi eş sonlu G_*-yükseltilebilirdir.

İspat. x, L kafesinin $Rad(L) \leq x$ olacak şekilde bir elemanı ve $k \in 1/x$ eş sonlu olsun. Bu durumda Teorem 4.3.5 gereği k, $1/x$ içinde bir direkt toplam terimi olup $k\beta_* k$ olduğundan istenen elde edilir.

Teorem 4.3.7. L ayrıştırılamaz bir kafes olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

(i) L eş sonlu G_*-yükseltilebilir bir kafestir.

(ii) $Rad(L) = 1$ veya L yerel kafestir.

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) $Rad(L) \neq 1$ olsun. O halde, L içinde bir maksimal s elemanı vardır. Bu durumda s eş sonlu elemandır. Hipotez gereği, $s\beta_* k$ olacak şekilde L'nin bir k direkt toplam terimi vardır. L ayrıştırılamaz olduğundan $k = 0$ elde edilir. Burada $0 \ll L$ olduğundan Teorem 4.1.4 (i) gereği $s \ll L$ olur. s maksimal ve $s \ll L$ olduğundan her $1 \neq x \in L$ elemanı için $x \leq s$ olur. Dolayısıyla, L bir yerel kafestir.
(ii) $\Rightarrow$ (i) L yerel bir kafes olsun. Bu durumda Teorem 3.1.7 gereği $Rad(L) \ll L$ ve $Rad(L)$, L'nin 1'den farklı tüm elemanlarından büyük veya eşittir. s, L'nin bir eş sonlu elemanı olsun. Eğer $s = 1$ ise $s\beta_* 1$ olur. Eğer $s \neq 1$ ise $s \leq Rad(L)$ olup $Rad(L) \ll L$ olduğundan $s \ll L$ olur. Bu durumda Teorem 4.1.4 (ii) gereği $s\beta_* 0$ olur. O halde L

eş sonlu G_*-yükseltilebilirdir. $Rad(L) = 1$ olsun. Bu durumda L'nin hiç bir maksimal elemanı yoktur. $1 \neq a \in L$ eş sonlu bir eleman olsun. Teorem 2.5.14 gereği, $1/a$ bölüm alt kafesinin 1'den farklı bir m maksimal elemanı vardır. m, L'de de bir maksimal eleman olur. Bu ise L'nin hiç maksimal elemanı olmaması ile çelişir. O halde L'nin 1'den başka eş sonlu elemanı yoktur. $1\beta_*1$ ve 1 direkt toplam terimi olduğundan L eş sonlu G_*-yükseltilebilir kafestir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, modül teoresinde tanımlanmış olan β^* bağıntısı ve bu bağıntı ile ilgili olarak tanımı yapılan; G^*-tümlenmiş, G^*-yükseltilebilir, eş sonlu G^*-tümlenmiş, eş sonlu G^*-yükseltilebilir modüller hakkında bilinen sonuçların kafes teoresine genelleştirilmesi üzerine çalışılmıştır.

β_* bağıntısına benzer olarak, bir L kafesinde $x, y \in L$ olmak üzere "$x\beta_{**}y \Leftrightarrow x \vee y \leq Rad(1/x)$ ve $x \vee y \leq Rad(1/y)$" bağıntısı tanımlanarak bu bağıntı ile ilgili birtakım özellikler incelenebilir.

KAYNAKLAR

Alizade, R. ve Büyükaşık, E., 2003. Cofinitely weak supplemented modules, *Comm. Algebra*, 31, 5377–5390.

Alizade, R. ve Toksoy, E., 2009. Cofinitely Weak Supplemented Lattices, *Indian Journal of Pure*, 40:5, 337–346.

Birkenmeier, G. F., Mutlu, F. T., Nebiyev, C., Sökmez, N., ve Tercan, A., 2010. Goldie Supplemented Modules, *Glasgow Mathematical Journal*, 52A, 41–52.

Clark, John, Lomp, Christian, Vanaja, N., ve Wisbauer, Robert, 2006. *Lifting Modules: Supplements and Projectivity in Module Theory (Frontiers in Mathematics)*, 2006 ed. Birkhäuser.

Cohn, P. M., 2002. *Basic Algebra: Groups, Rings and Field*, Springer-Verlag, London.

Călugăreanu, G., 2000. *Lattice Concepts of Module Theory*, Kluwer Academic Publisher, London.

Davey, B. A. ve Priestley, H. A., 2002. *Introduction to Lattice and Order*, Second ed. Cambridge University Press, Cambridge.

Dilworth, R. P. ve Crawley, P., 1960. Decomposition theory for lattices without chain conditions, *Trans.Amer.Math.Soc*, 96, 1–22.

Head, T.J., 1966. Purity in compactly generated modular lattices, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar*, 17, 55–59.

Roman, Steven, 2009. *Lattices and Ordered Sets*, 2009 ed. Springer.

Stenström, B., 1969. Radicals and socles of lattices, *Arch. Math.* XX, 258–261.

Sökmez, N., 2011. Goldie*-Tümlenmiş ve Goldie*-Radikal Tümlenmiş Modüller, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, 299251.

Talebi, Y., Tribak, Y., ve Moniri Hamzekolaee, A. R., 2013. On H-Cofinitely Supplemented Modules, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 39, 325–346.

Toksoy, S. E., 2008. Kafeslerde Tümleyenler, Doktora Tezi, Ege Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir, 213957.

Walendziak, A., 2000. On characterization of atomistic lattice, *Algebra Universalis*, 43, 31–39.

Wisbauer, Robert, 1991. *Foundations of module and ring theory : a handbook for study and research*, Gordon and Breach Science Publishers, Philadelphia.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad :	**Hasan Hüseyin ÖKTEN**
Doğum Yeri ve Tarihi :	**Denizli-31.10.1980**
Adres :	**Akbilek Mahallesi Muhsin Yazıcıoğlu Caddesi Özge Apartmanı A Blok Kat 3 No 9 Merkez-AMASYA**
E-Posta :	**hokten@gmail.com**
Lisans :	**Balıkesir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2003)**

Mesleki Deneyim ve Ödüller

Öğretim Görevlisi(2003-..)