T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

HER DUAL SONLU GENİŞLEMESİNDE δ-TÜMLEYENE SAHİP MODÜLLER

ESRA ÖZTÜRK SÖZEN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SAMSUN
2018

TEZ ONAYI

Esra Öztürk Sözen tarafından hazırlanan "Her Dual Sonlu Genişlemesinde δ-Tümleyene Sahip Modüller" adlı tez çalışması 20/12/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman Prof. Dr. Şenol EREN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri

Başkan Prof. Dr. Ali PANCAR
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Prof. Dr. Şenol EREN
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Prof. Dr. A. Göksel AĞARGÜN
Yıldız Teknik Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Doç. Dr. Hamza ÇALIŞICI
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Yrd. Doç. Dr. Ercan MASAL
Sakarya Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım. …/…/2017

Prof. Dr. Bahtiyar ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

15/01/2018

Esra Öztürk Sözen

ÖZET

Doktora Tezi

HER DUAL SONLU GENİŞLEMESİNDE δ-TÜMLEYENE SAHİP MODÜLLER

Esra ÖZTÜRK SÖZEN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Şenol EREN

Bu tezde; her dual sonlu genişlemesinde δ-tümleyene sahip modüller (kısaca $(\delta - CE)$ özelliğine sahip modüller) ve her dual sonlu genişlemesinde zayıf δ-tümleyene sahip modüller (kısaca $(\delta - CWE)$ sahip modüller) tanımlanarak bu cebirsel yapıların özelliklerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bir M modülünün $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul M nin her alt modülünün $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olmasıdır. $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip bir modül bol dual sonlu δ-tümlenmiştir ve her alt modülü de dual sonlu δ-tümlenmiştir. Basit modüller $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. Bununla birlikte, projektif yarı basit modüller de $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. $\delta - V$ halka üzerindeki bir M modülünün $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul M nin dual sonlu injektif olmasıdır. M bir modül, N de M nin M/N bölüm modülü Noetherian olacak şekilde bir alt modülü olmak üzere N ve M/N $(\delta - CE)$ özelliğine sahip ise M de $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. M singüler modülü $(\delta - CE)$ özelliğine sahip ise M (CE) özelliğine sahiptir. Bir R halkasının δ-yarı mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her sol R-modülün $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olmasıdır. Kompozisyon serisine sahip her modül $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. M modülünün her alt modülü $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip ise M $(\delta - CWEE)$ özelliğine sahiptir. M $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip bir modül ise her direkt toplam terimi de $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir. Bir R halkasının δ-yarı lokal olması için gerek ve yeter koşul her R-modülün $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olmasıdır. Bunun bir sonucu olarak, bir R halkası üzerindeki her R-modülün dual sonlu zayıf δ-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul modülün $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olmasıdır. δ-oyuk ve δ-lokal modüller de $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir. Diğer taraftan yarı basit bir M modülü üzerinde $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olma ile $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olma ifadeleri birbirine denktir.

Aralık 2017, 85 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dual sonlu alt modül, δ-Tümleyen, Zayıf δ-tümleyen, Dual sonlu zayıf δ-tümleyen, δ-yarı mükemmel halka, δ-yarı lokal halka.

ABSTRACT

Doctoral Dissertation

MODULES THAT HAVE A δ-SUPPLEMENT IN EVERY COFINITE EXTENSION

Esra ÖZTÜRK SÖZEN

Ondokuz Mayıs University
Graduate School of Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Şenol EREN

In this thesis concepts of modules that have a δ-supplement in every cofinite extension (briefly modules with the property $(\delta - CE)$) and modules that have a weak δ-supplement in every cofinite extension (briefly modules with the property $(\delta - CWE)$) are introduced and determining of algebraic structure of these modules are purposed. A module M has the property $(\delta - CEE)$ if and only if every submodule of M has the property $(\delta - CE)$. A module with the property $(\delta - CEE)$ is ample cofinitely δ-supplemented and also every submodule is cofinitely δ-supplemented. Simple modules and projective semisimple modules have the property $(\delta - CE)$. For a module M that is over a $\delta - V$ ring has the property $(\delta - CE)$ if and only if M is cofinitely injective. Let M be a module and N be a submodule of M such that M/N is Noetherian. If N and M/N have the property $(\delta - CE)$ then so does M. If a singular module M has the property $(\delta - CE)$, then M has the property (CE). A ring R is δ-semiperfect if and only if every left R-module has the property $(\delta - CE)$. Every module that has a composition series has the property $(\delta - CE)$. If every submodule of M has the property $(\delta - CWE)$ then M has the property $(\delta - CWEE)$. Every direct summand of a module with the property $(\delta - CWE)$ has the property $(\delta - CWE)$. A ring R is δ-semilocal if and only if every R-module has the property $(\delta - CWE)$. If M is a δ-hollow module (or a δ-local module) then M has the property $(\delta - CWE)$. And it is shown that the concepts of modules that have a δ-supplement and weak δ-supplement in every cofinite extension coincide on semisimple modules.

December 2017, 85 pages

Key Words: Cofinite submodule, δ-supplement, Weak δ-supplement, Cofinite weak δ-supplement, δ-semiperfect ring, δ-semilocal ring.

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim süresince ilminden faydalandığım, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek aldığım, birlikte çalışmaktan onur duyduğum kıymetli hocam, akademik danışmanım sayın Prof. Dr. Şenol EREN' e tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı teşekkürlerimi ve minnettarlığımı arz ederim.

Yine bu süreçte hem akademisyenlik mesleğine hem de hayata bakış şekliyle bizlere örnek olan, bilgisini ve deneyimlerini cömertçe paylaşan çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Ali PANCAR' a şükranlarımı sunarım.

Tez problemimizin belirlenmesinde, tezin biçimsel ve bilimsel olarak hazır hale gelmesi sürecinde önemli katkıları olan, özenle inceleyen, en doğru şekle ulaşmasında en büyük pay sahibi olan, akılcılığını, detaycılığını ve tevazusunu örnek edindiğim saygıdeğer hocam Doç. Dr. Hamza ÇALIŞICI' ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında her koşulda maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, ömrüme bahşedilmiş en büyük lütuf olan canım annem ve canım babam… Bütün emeklerinize müteşekkirim.

Son olarak en büyük manevi desteğim sevgili eşim Yusuf SÖZEN' e ve gözbebeğimiz oğlumuz Taha Yusuf SÖZEN' e varlıklarıyla gücüme güç, hayatıma renk kattıkları için sonsuz teşekkür ederim.

Aralık 2017, Samsun

Esra Öztürk Sözen

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$1 = 1_R$	: Birimli R halkasının birimi
$0 = 0_R$	: Birimli R halkasının sıfırı
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: Tamsayılar halkasının kesir cismi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\emptyset$	: Boş küme
$\subseteq$	: Alt küme
$\leq$	: Alt modül
$\lneqq$	: Öz alt modül
$\ll$	: Küçük alt modül
$\ll_\delta$	: δ-küçük alt modül
$\trianglelefteq$	: Büyük alt modül
$K(R)$	: R tamlık bölgesinin kesir cismi
$RA =< A >$	: A kümesi tarafından üretilen alt modül
$Rm =< m >$	: $m \in M$ elemanı tarafından üretilen devirli alt modül
$\sum_{i\in I} M_i$	: Bir M modülünün $\{M_i\}_{i\in I}$ alt modüller ailesinin toplamı
$\underset{i\in I}{\oplus} M_i$	: Bir M modülünün $\{M_i\}_{i\in I}$ alt modüller ailesinin iç direkt toplamı
$\overset{w}{\underset{i\in I}{\oplus}} M_i$	: $\{M_i\}_{i\in I}$ alt modüller ailesinin dış direkt toplamı
$\Pi_{i\in I} M_i$	: $\{M_i\}_{i\in I}$ alt modüller ailesinin dış direkt çarpımı
$Gör(f)$	: Bir f homomorfizmasının görüntü kümesi
$Çek(f)$	: Bir f homomorfizmasının çekirdeği
$\cong$	:İzomorfizma
Π_j	: j-yinci izdüşüm homomorfizması
I_j	: j-yinci gömme homomorfizması
I_M	: M modülünün birim homomorfizması

M / N	: M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$Ann_R(M)$	: M R-modülünün sıfırlayanı
$ann(M)$	: m elemanının sıfırlayanı
$T(M)$	: M modülünün burulma alt modülü
$Rad(M)$	: M modülünün radikali
$\delta(M)$	: M modülünün δ-radikali
$E(M)$	: M modülünün injektif bürümü

1. GİRİŞ

Her abel grup bir $\mathbb{Z}$-modül, her R halkası, üzerinde tanımlı çarpma işlemine göre bir sol R-modül ve bir F cismi üzerindeki her V vektör uzayı bir sol F-modül yapısına sahip olduğundan bir cebirsel yapı olarak modül kavramı grup ve vektör uzayı kavramlarının bir genelleştirmesi olarak görülebilir. Günümüze kadar Modül Teorisi çok sayıda çalışmalar yapılmıştır ve halen de devam etmektedir. 1890’ lı yıllarda D. Hilbert tarafından ortaya konan Modül Teorisi 1940’ lı yıllarda E. Noether tarafından geliştirilmiştir.

R birimli bir halka ve M üniter sol R-modül olmak üzere $M = U + V$ ve $U \cap V = 0$ ise M modülüne U ve V alt modüllerinin direkt toplamı; U ve V alt modüllerine de M nin direkt toplam terimleri denir. Bir vektör uzayının her alt uzayının aynı zamanda bir direkt toplam terimi olduğu bilinirken bu durum modüller için doğru değildir. Böylelikle Modül Teorisinin temel problemlerinden biri de keyfi bir modülün, alt modüllerinin direkt toplamı şeklinde yazılışı olmuştur.

U bir M modülünün keyfi bir alt modülü olmak üzere $M = U + V$ ve $V,\ M$ nin bu koşulu sağlayan alt modüllerinin içinde minimal olanı ise yani $M = U + V_1$ ve $V_1 \leq V$ olması $V_1 = V$ olmasını gerektiriyorsa V alt modülüne U alt modülünün M de toplamaya göre tümleyeni denir. Diğer taraftan $U \cap V = 0$ ve V bu koşula göre maksimal ise yani $U \cap V_1 = 0$ ve $V \leq V_1$ olması durumunda $V_1 = V$ ise bu kez V alt modülüne U nun M de kesişime göre tümleyeni denir. Buradan yola çıkarak, V alt modülünün M modülünün direkt toplam terimi olması için gerek ve yeter koşul V alt modülünün U nun hem kesişim hem de toplamaya göre tümleyen olmasıdır. Dolayısıyla tümleyen kavramına direkt toplam terimi kavramının genelleştirilmesi gözüyle de bakmak mümkündür.

R birimli bir halka ve M üniter sol R-modül olmak üzere M nin alt modüllerinin M de tümleyene sahip olması önemli bir araştırma problemidir. K, M nin bir alt modülü olmak üzere bir $X \leq M$ için $M = K + X$ olması $X = M$ olmasını gerektiriyorsa K ya M nin bir küçük alt modülü denir ve "$K \ll M$" ile gösterilir. V alt modülünün U nun M içinde tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olması ile verilir. Eğer $U \cap V \ll M$ ise U ya V nin (benzer şekilde V ye de U nun) zayıf tümleyeni denir. M modülünün her alt modülü M de bir tümleyene sahipse M ye tümlenmiş modül; M nin her alt modülü M de zayıf tümleyene sahipse M ye zayıf tümlenmiş modül denir. M modülünün her U alt modülü, $M = U + V$ koşulunu gerçekleyen M nin her V alt modülün için U nun M de V tarafından kapsanan en az bir tümleyeni varsa U ya M de bol tümleyene sahiptir denir. Eğer M nin her alt modülü M de bir bol tümleyene sahipse M ye bol tümlenmiş modül denir.

Zhou 2000 yılında yayımlanan “Generalizations of perfect, semiperfect and semiregular rings” adlı çalışmasında küçük alt modüllerin genelleştirilmesi olarak δ-küçük alt modülleri tanımlamış ve bundan yola çıkarak 2006 yılında Koşan tarafından tümlenmiş modüller genelleştirilerek δ-tümlenmiş modül kavramı literatüre kazandırılmıştır. Şöyle ki;

M bir modül ve $N \leq M$ olsun. $K \trianglelefteq L$ olacak şekildeki bir $K \leq L$ alt modülü için $N \cong L \,/\, K$ oluyorsa N ye M de singülerdir denir (Goodearl, 1976). M nin bir N alt modülü için M nin $M \,/\, X$ singüler olacak şekildeki her X alt modülü için $N + X = M$ olması $X = M$ olmasını gerektiriyorsa N ye M de δ-küçüktür denir ve "$N \ll_{\delta} M$" ile gösterilir. Tanımdan da anlaşılacağı üzere her küçük alt modül aynı zamanda δ-küçüktür.

Eğer N ve L bir M modülünün $N + L = M$ ve $N \cap L \ll_{\delta} L$ koşullarını gerçekleyen alt modülleri iseler L ye N nin M de δ-tümleyeni denir ve M nin her alt modülü M de bir δ-tümleyene sahipse M ye δ-tümlenmiş modül adı verilir. Buna göre her tümlenmiş modülün δ-tümlenmiş olduğu açıktır. Diğer taraftan $N \cap L \ll_{\delta} M$ ise L ye N nin (benzer şekilde N ye de L nin) M zayıf δ-tümleyeni denir. M nin her alt modülü M de zayıf δ-tümleyene sahipse M ye zayıf δ-tümlenmiş modül denir.

M bir modül ve $M \leq N$ ise N ye M nin bir genişlemesi ve $N \,/\, M$ sonlu üretilmiş ise N ye M nin dual sonlu genişlemesi denir. Bir M modülü her genişlemesinde (bol) tümleyene sahipse ((EE)) (E) özelliğine sahip modül olarak adlandırılır. Bu tanımdan hareketle, her dual sonlu genişlemesinde bir (bol) tümleyene sahip M modülüne ((CEE)) (CE) özelliğine sahip modül denir. Benzer şekilde, eğer M modülü her dual sonlu genişlemesinde bir (bol) zayıf tümleyene sahipse modüle ($(CWEE)$) (CWE) özelliğine sahip modül denir.

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Genel bilgiler bölümünde bulgular kısmında kullanılacak olan, halka ve modül teorilerinin temel tanım ve teoremlerine yer verildi. Materyal ve metod bölümünde singüler modül, δ-küçük alt modül ve δ-tümlenmiş modül kavramları verilerek bunlara ilişkin bilinen teoremlerin açık ve ayrıntılı ispatlarına yer verildi. Bulgular ve tartışma bölümü iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda (δ-CE) ve (δ-CEE) özelliğine sahip modüller, ikinci kısımda ise (δ-CWE) ve (δ-$CWEE$) özelliğine sahip modüller tanımlandı ve bu modüllere ait karakterizasyonlar ile bu özelliğe sahip modül örnekleri verildi.

1.1. Literatür Özeti

B. Eckmann ve A. Schopf' un (1953) "Über injective moduln" adlı çalışmalarında tanımlanan injektif bürüm kavramını, ilk olarak E. Matlis (1958) "Injective modules over noetherian rings" isimli çalışmasında kullanmıştır. Bu kavramın duali olan projektif örtü kavramı, H. Bass tarafından (1960) "Finistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings" adlı çalışmada verilmiştir. Her modül injektif bürüme sahiptir ancak buna karşılık projektif örtüye sahip olmayabilir. Bass, her sol modülü projektif örtüye sahip halkaları sol mükemmel halka; her sonlu üretilmiş modülü projektif örtüye sahip halkaları yarı mükemmel halka olarak tanımlamış ve bunların karakterizasyonlarını vermiştir. E. A. Mares (1963) "Semiperfect modules" adlı çalışmasında halkalar üzerinde tarif edilen mükemmellik ve yarı-mükemmellik kavramlarını modüller üzerine aktarmıştır. Ayrıca F. Kasch ve E. A. Mares (1966) "Eine kennzeichonung semi-perfekter moduln" adlı çalışmalarında projektif bir modülün yarı mükemmel olması için gerek ve yeter koşulun modülün tümlenmiş olması olduğunu ispatlamışlardır. H. Zöschinger (1974a) "Komplementierte moduln über Dedekindringen" adlı çalışmasında (lokal) Dedekind bölgeleri üzerinde tümlenmiş modüllerin yapısını belirlemiş ve tümlenmiş modülleri zayıflatarak zayıf tümlenmiş modüllerin karakterizasyonlarını elde etmiştir. P. Rudlof 1991 yılındaki çalışmasında değişmeli halkalar üzerinde zayıf tümlenmiş, tamamen tümlenmiş modülleri ele almış ve tümlenmiş modüllerin genişlemelerde kapalı olması için bazı şartlar elde etmiştir. R. Alizade, G. Bilhan ve P. F. Smith 2001 yılındaki "Modules whose maximal submodules have supplements" adlı çalışmalarında dual sonlu tümlenmiş modülleri tanımlamışlar ve sağladığı özellikleri vermişlerdir. Sonrasında R. Alizade ve E. Büyükaşık 2003' de yayınladıkları "Cofinitely weakly supplemented modules" adlı makalede dual sonlu zayıf tümlenmiş modül kavramını tanımlayarak özelliklerini vermişlerdir. Ardından E. Büyükaşık 2009' da "On cofinitely weak supplemented modules" adlı çalışmasıyla bu modülleri daha da detaylandırmıştır. 2010 Yılında E. Türkmen Rad tümlenmiş ve eş sonlu rad tümlenmiş modüllerin karakterizasyonu başlıklı doktora tezini vermiştir.

Zhou' nun (2000) "Generalizations of perfect, semiperfect and semiregular rings" adlı çalışmasında küçük alt modül kavramı genelleştirilerek δ-küçük alt modül kavramı tanımlanmış ve bunun yardımı ile δ-mükemel ve δ-yarı mükemmel halkaları tanımlamıştır. Bundan hareketle 2006 yılında Koşan, tümlenmiş modül ve lifting modül kavramlarını genelleştirerek δ-tümlenmiş ve δ-lifting modülleri tanımlamıştır. Aynı çalışmasında bu tanımlarını Zhou'nun δ-mükemmel ve δ-yarı mükemmel halkalarıyla ilişkilendirerek çeşitli karakterizasyonlar elde etmiştir. Ayrıca 2009 yılında Talebi ve Hamzekolaei "Closed weak δ-supplemented modules" isimli çalışmalarında zayıf tümlenmiş modülleri genelleştirerek zayıf δ-tümlenmiş modül kavramını literatüre kazandırmışlar ve özelliklerini sunmuşlardır.

H. Zöschinger (1975) "Moduln die in jeder Erweiterung ein Komplement haben" adlı çalışmasında (E) ve (EE) özelliğine sahip modülleri tanımlamıştır. H. Çalışıcı ve E. Türkmen (2012) "Modules that have a supplement in every cofinite extension" adlı çalışmalarında her dual sonlu genişlemesinde tümleyene sahip modülleri ele alarak tez çalışmamıza ışık tutan ve temel referansımız olan (CE) ve (CEE) özellikli modüllerin karakterizasyonlarını vermişlerdir. Sonrasında 2012 yılında Özdemir tarafından, "Rad-supplementing modules"; 2013 yılında Nişancı Türkmen tarafından, "Modules that have a rad-supplement every in every cofinite extension"; 2014 yılında Göçer ve Türkmen tarafından, "Modules that have a supplement in every torsion extension"; 2015 yılında Nişancı Türkmen tarafından, "Modules that have a supplement in every coatomic extension"; 2015 yılında Polat, Çalışıcı ve Önal tarafından, "Modules that have a weak supplement in every cofinite extension"; 2016 yılında Önal ve Çalışıcı tarafından, "Modules that have a weak supplement in every extension"; 2017 yılında Öztürk Sözen, Eryılmaz, Eren tarafından "Modules that have a weak δ-supplement in every torsion extension"; Öztürk Sözen, Eren tarafından "Modules that have a δ-supplement in every extension"; isimli makaleler bu konu üzerine ortaya konulan başlıca çalışmalardır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Halkalar

Tanım 2.1.1: R boş kümeden farklı bir küme ve R üzerinde tanımlı iki ikili işlem $"+"$ ve $"\bullet"$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $(R,+,\ \bullet)$ cebirsel yapısına halka denir:

i. $(R,+)$ bir değişmeli gruptur,
ii. $"\bullet"$ işleminin R de birleşme özelliği vardır,
iii. $"\bullet"$ işleminin $"+"$ işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır (Hungerford, 1973).

Bu çalışmada $(R,+,\ \bullet)$ halkası R ile gösterilecektir.

Ayrıca R halkasında her $a,b \in R$ için $a \bullet b$ yerine ab yazılışı kullanılacaktır.

Tanım 2.1.2: R halkasında $\bullet$ işleminin değişme özelliği varsa, yani her $a,b \in R$ için $ab = ba$ ise R ye değişmeli halka denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.3: R bir halka olsun. $(R,+)$ abel grubunun birim elemanına R halkasının sıfırı denir ve "0_R" ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.4: R halkasında $\bullet$ işleminin birim elemanı varsa, yani her $a \in R$ için $a1_R = 1_R a = a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ var ise R ye birimi halka denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.5: R birimli bir halka olmak üzere $r \in R$ sıfırdan farklı bir eleman olsun. $rs = 1_R$ $(sr = 1_R)$ olacak şekilde bir $s \in R$ elemanı mevcut ise r elemanına R halkasının sağ (sol) terslenebilir elemanı denir. Eğer r sağ ve sol terslenebilir ise r terslenebilirdir denir (Hungerford, 1973).

Bu çalışmada bütün halkalar birimli halka olarak ele alınacaktır.

Tanım 2.1.6: Birimli ve değişmeli bir halkanın, sıfırdan farklı her elemanının tersi varsa bu halkaya cisim denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.1.7: R bir halka ve $0_R \neq r \in R$ olsun. $rs = 0_R$ $(sr = 0_R)$ olacak şekilde sıfırdan farklı en az bir $s \in R$ elemanı mevcut ise r ye R nin bir sol (sağ) sıfır bölen eleman denir. R halkası hiçbir sol (sağ) sıfır bölen eleman içermiyorsa halkaya bölge; birimli değişmeli ve sıfır bölensiz bir halkaya ise tamlık bölgesi denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.8: R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. I, R halkasının bir alt grubu ve her $a, b \in I$ için $ab \in I$ ise I alt grubuna R halkasının bir alt halkası ve her $r \in R$, her $a \in I$ için $ra \in I(ar \in I)$ ise, I alt halkasına R halkasının bir sol (sağ) ideali denir. I, R halkasının hem sol hem de sağ ideali ise, I alt halkasına R nin bir ideali denir. R ve $\{0_R\}$, R halkasının birer idealidir. Bu ideallere R halkasının aşikar idealleri denir. R halkasının kendisinden farklı sol (sağ) ideallerine bir öz sol (sağ) ideal denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.9: R değişmeli bir halka ve P, R halkasının bir öz ideali olsun. $a, b \in R$ olmak üzere $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa P idealine R halkasının bir asal ideali denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.10: R bir halka ve P, R halkasının öz (sol) ideali olsun. R halkasında I idealini kapsayan R halkasının kendisinden başka bir öz (sol) ideali yoksa I idealine R halkasının bir (sol) maksimal ideali denir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.1.11: A, R halkasının bir alt kümesi olsun. R nin A yı kapsayan tüm ideallerinin arakesitine A nın ürettiği ideal denir ve " $< A >$ " ile gösterilir. Eğer $A = \{a\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise A nın ürettiği ideale esas ideal denir ve " $< a >$ " ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.1.12: Her ideali esas ideal olan tamlık bölgesine bir esas ideal bölgesi denir (Hungerford, 1973).

Tanım 2.1.13: R bir halka, $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. Eğer her $a, b \in S$ için $ab \in S$ ise S kümesine R nin çarpımsal alt kümesi denir. R değişmeli bir halka ve S, R nin çarpımsal bir alt kümesi olsun. Bu durumda $R \times S$ üzerinde her $(r, s), (r', s') \in R \times S$ için

$$(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow \text{en az bir } s_1 \in S \text{ için } s_1(rs' - r's) = 0$$

şeklinde tanımlanan "$\sim$" bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Eğer R sıfır bölensiz ve $0_R \notin S$ ise bu durumda $(r, s) \sim (r', s') \Leftrightarrow rs' - r's = 0$ şeklini alır. Bu durumda bir $(r, s) \in R \times S$ nin denklik sınıfı $\frac{r}{s}$ ile, $R \times S$ nin tüm denklik sınıflarının kümesi de

$S^{-1}R$ ile gösterilir. Diğer taraftan $S^{-1}R$, her $\frac{r}{s}, \frac{r'}{s'} \in S^{-1}R$ elemanları için $\frac{r}{s} + \frac{r'}{s'} = \frac{rs'+r's}{ss'}, \left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{r'}{s'}\right) = \frac{rr'}{ss'}$ şeklinde tanımlanan toplama ve çarpma işlemlerine göre birimli ve değişmeli bir halkadır. $S^{-1}R$ halkasına R nin S ye göre kesir halkası denir. Eğer R bir tamlık bölgesi ve S de R nin sıfırdan farklı bütün elemanlarının kümesi ise $S^{-1}R$ bir cisimdir. Bu cisme R tamlık bölgesinin kesir cismi denir ve "$K(R)$" ile gösterilir (Larsen ve Mc Carthy, 1971).

2.2. Modüller

Tanım 2.2.1: R bir halka ve $(M, +)$ bir abel grup olsun. Her $r \in R$ ve her $m \in M$ için $. : R \times M \longrightarrow M$ fonksiyonu altında $(r, m) \in R \times M$ nin görüntüsünü $r.m$ ile göstermek şartıyla eğer bu fonksiyon her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ için

i. $r.(m+n) = r.m + r.n$
ii. $(r+s).m = r.m + s.m$
iii. $(r.s).m = r.(s.m)$

koşullarını gerçekliyorsa M ye bir sol R-modül denir. R birimli bir halka olmak üzere her $m \in M$ için $1_R.m = m$ oluyorsa M ye bir üniter sol R-modül denir (Wisbauer, 1991).

Bu çalışma boyunca R birimli bir halka ve tüm modüller de üniter sol R-modül olarak alınacaktır. Ayrıca bir M R-modülü için $r \in R$ ve $m \in M$ olmak üzere "$r.m$" yerine "rm" notasyonu kullanılacaktır.

Tanım 2.2.2: M bir modül $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. N, M modülünün bir alt grubu olmak üzere her $r \in R$ ve her $n \in N$ elemanları için $rn \in N$ oluyorsa N ye M modülünün alt modülü denir ve $N \leq M$ ile gösterilir. $\{0\}$ ve M modülünün kendisi M nin birer alt modülüdür. Özel olarak $\{0\}$ alt modülünü 0 ile göstereceğiz. Bu alt modüllere M nin aşikar alt modülleri denir. N, M modülünün kendisinden farklı bir alt modülü ise N ye M nin bir öz alt modülü denir ve $N \lneqq M$ ile gösterilir. M modülünün keyfi sayıdaki alt modüllerinin arakesiti de M modülünün bir alt modülüdür (Hungerford, 1973).

Yukarıda yapılan tanımlardan açıkça görülmektedir ki bir K cismi üzerindeki her V vektör uzayı bir üniter K-modül yapısına sahiptir. Ayrıca her birimli R halkası da bir üniter sol R-modüldür ve bu modül ${}_RR$ ile gösterilir. ${}_RR$ modülünün alt modülleri ise R halkasının sol idealleridir.

Tanım 2.2.3: M bir R-modül ve $X,\ M$ nin bir altkümesi olsun. M nin X i kapsayan tüm alt modüllerin arakesitine X in üretttiği alt modül denir ve $< X >$ ile gösterilir. Şu halde

$$< X >= \bigcap_{X \subseteq K} \{K \leq M\}$$

dir. Tanımdan $< X >$ in X alt kümesini kapsayan en küçük alt modül olduğu açıktır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.2.4: Eğer $M =< X >$ olacak şekilde en az bir X alt kümesi varsa M ye X tarafından üretilen modül denir. X in elemanlarına ise M nin üreteçleri denir. Eğer X sonlu elemanlı ise M ye sonlu üretilmiş modül denir ve bir $n \in \mathbb{N}$ için $X = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ ise $M =< m_1, m_2, \dots, m_n >$ ile gösterilir. Bu durumda M nin her elemanı $i = 1, 2, \dots, n$ için $r \in R$ olmak üzere $r_1m_1 + r_2m_2 + \cdots + r_nm_n$ formundadır ve $M = Rm_1 + Rm_2 + \cdots + Rm_n$ şeklinde gösterilir. Özel olarak $M =< \{m\} >$ olacak şekilde bir $m \in M$ varsa M ye m tarafından üretilen devirli modül denir ve bu $M =< m \geq Rm$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

I, R nin bir ideali ve $m \in M$ olmak üzere $Im = \{rm \mid r \in I\}$ M nin Rm tarafından kapsanan bir alt modülüdür.

Önerme 2.2.5: M sonlu üretilmiş modül ise her bölüm modülü de sonlu üretilmiştir.

İspat: M sonlu üretilmiş modül ise $M =< m_1, m_2, \dots, m_n >$ olacak şekilde $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere $m_i \in M$ elemanları ve bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Bu durumda her $m \in M$ için $m = r_1m_1 + r_2m_2 + \cdots + r_nm_n$ olacak şekilde $r_i \in R,\ i = 1, 2, \dots, n$ vardır. $N,\ M$ bir alt modül olmak üzere her $m + N \in M / N$ elemanı için

$$\begin{aligned} m + N &= (r_1m_1 + r_2m_2 + \cdots + r_nm_n) + N \\ &= (r_1m_1 + N) + (r_2m_2 + N) + \cdots + (r_nm_n + N) \\ &= r_1(m_1 + N) + r_2(m_2 + N) + \cdots + r_n(m_n + N) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabileceğinden $M / N =< m_1 + N, m_2 + N, \dots, m_n + N >$ dir. Sonuç olarak M / N bölüm modülü sonlu üretilmiştir.

Önerme 2.2.6: M bir modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M modülünün alt modüllerinin bir ailesi olsun. $A = \bigcup_{i \in I} N_i$ olmak üzere, A nın ürettiği alt modül

$$RA = \{\sum_{j=1}^{k} n_{i_j} \mid j = 1, 2, \dots, k \text{ için } n_{i_j} \in N_{i_j}, k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$$

şeklindedir bu alt modüle M modülünün $\{N_i\}_{i\in I}$ alt modüllerinin ailesinin toplamı denir ve $\sum_{i\in I} N_i$ ile gösterilir.

Eğer $I = \{1, 2\}$ ise $RA = N_1 + N_2 = \{n_1 + n_2 \mid n_1 \in N_1, n_2 \in N_2\}$ dir (Hungerford, 1973).

Önerme 2.2.7 (Modüler Kural): M bir modül olsun. K, L ve N, M nin birer alt modülü ve $K \subseteq N$ olsun. Bu takdirde,

$$K + (L \cap N) = (K + L) \cap N$$

dir.

İspat: $K + (L \cap N) \subseteq K + L$ ve $K \subseteq N$ olduğundan $K + (L \cap N) \subseteq K + N \subseteq N$ dir. Buradan, $K + (L \cap N) \subseteq (K + L) \cap N$ bulunur. Tersine, $x \in (K + L) \cap N$ alalım. Böylece $x \in N$ olup $x = y + z$ olacak şekilde bir $y \in K$ ve bir $z \in L$ bulunabilir. $K \subseteq N$ olduğundan $y \in N$ olduğu göz önüne alınarak $z = x - y \in L \cap N$ bulunur. $x = y + z \in K + (L \cap N)$ olup $(K + L) \cap N \subseteq K + (L \cap N)$ bulunur. Her iki kapsamadan eşitlik elde edilir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.2.8: R değişmeli bölge ve M bir R-modül olsun. $m \in M$ olmak üzere sıfırdan farklı en az bir $r \in R$ için $rm = 0$ ise m elemanına M modülünün burulmalı elemanı denir.

M nin tüm burulmalı elemanlarının kümesi $T(M)$ ile gösterilir ve $T(M)$, M nin bir alt modülüdür. $T(M)$ ye M nin burulma kısmı denir. $T(M) = M$ ise M modülüne burulmalı modül ve $T(M) = 0$ ise M modülüne burulmasız modül denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

2.3. Modül Homomorfizmaları ve İzomorfizmalar

Tanım 2.3.1: R bir halka, M ve N birer R-modül ve $f: M \longrightarrow N$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $m, m' \in M$ ve her $r \in R$ için,

$$f(m + m') = f(m) + f(m')$$
$$f(rm) = rf(m)$$

koşullarını sağlarsa, f ye bir R-modül homomorfizması ya da kısaca homomorfizma denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.3.2: Birebir homomorfizmaya monomorfizma, örten homomorfizmaya epimorfizma ve bire bir örten homomorfizmaya ise izomorfizma denir. M den M ye bir homomorfizmaya endomorfizma, M den M ye bir izomorfizmaya da otomorfizma denir. M modülünün tüm endomorfizmalarının kümesi $End(M)$ ile gösterilir. Bir modülün $End(M)$ nin her elemanı tarafından korunan alt modüllerine tam değişmezdir denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Önerme 2.3.3: M ve N birer modül olmak üzere $f: M \longrightarrow N$ bir homomorfizma olsun. Bu durumda;

i. $A \leq M$ ise $f(A) \leq N$ dır. Özel olarak f nin görüntü kümesi $Gör(f)$ de N nin bir alt modülüdür.
ii. $B \leq N$ ise $f^{-1}(B) \leq M$ dir. Böylece $f^{-1}(0) = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$ kümesi de M nin bir alt modülüdür. Bu alt modüle f homomorfizmasının çekirdeği denir ve $Çek(f)$ ile gösterilir.
iii. f nin monomorfizma olması için gerek ve yeter koşul $Çek(f) = 0$ olmasıdır.
iv. $A \leq M$ ise $f^{-1}(f(A)) = A + Çek(f)$ dir.
v. $B \leq N$ ise $f\big(f^{-1}(B)\big) = B \cap Gör(f)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.3.4: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. $M \,/\, N$ bölüm grubu her $r \in R$ ve her $m + N \in M \,/\, N$ için $r.(m+N) = rm + N$ ile tanımlı $.: R \times M/N \longrightarrow M/N$ işlemine göre bir sol R-modül yapısına sahiptir. Bu modüle M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü denir.

Önerme 2.3.5: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Her $m \in M$ keyfi elemanı için $p(m) = m + N$ ile tanımlı $p: M \longrightarrow M \,/\, N$ dönüşümü bir epimorfizmadır ve $Çek(p) = N$ dir. Bu epimorfizmaya doğal (kanonik) epimorfizma denir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.3.6: (Homomorfizma Teoremi) M ve K birer R-modül ve $f: M \longrightarrow K$ bir homomorfizma olsun. Bu takdirde $p: M \longrightarrow M \,/\, Çek(f)$ doğal epimorfizma olmak üzere $f = gp$ olacak şekilde bir tek g: $M \,/\, Çek(f) \longrightarrow K$ monomorfizması vardır ve $M \,/\, Çek(f) \cong Gör(f)$ dir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: Her $m + Çek(f) \in M \,/\, Çek(f)$ için $g\big(m + Çek(f)\big) = f(m)$ ile tanımlı $g: M \,/\, Çek(f) \longrightarrow K$ dönüşümü $f = gp$ koşulunu gerçekleyen teklikle belli bir monomorfizmadır ve $Gör(g) = Gör(f)$ dir.

Teorem 2.3.7: (1. İzomorfizma Teoremi) M bir modül ve $N, L \leq M$ olsun. Bu takdirde $(N + L) \,/\, N \cong L \,/\, (N \cap L)$ dir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: Her $m \in L$ keyfi elemanı için $f(m) = m + N$ ile tanımlı $f: L \longrightarrow (N + L) / N$ dönüşümü bir epimorfizma olup $Çek(f) = N \cap L$ dir. Homomorfizma Teoreminden $(N + L) / N \cong L / (N \cap L)$ elde edilir.

Teorem 2.3.8: (2. İzomorfizma Teoremi)M bir modül ve $N \leq L \leq M$ olsun. Bu takdirde $M / L \cong (M / N) / (L / N)$ dir (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: Her $m + N \in M / N$ için $f(m + N) = m + L$ ile tanımlı $f: M / N \longrightarrow M / L$ dönüşümü bir epimorfizmadır ve $Çek(f) = L/N$ dir.

Tanım 2.3.9: M bir R-modül ve $U \leq M$ olsun. M / U bölüm modülü sonlu üretilmiş ise U ya M nin dual sonlu alt modülü denir (Alizade ve ark., 2001).

Tanım 2.3.10: M bir modül $N,\ M$ nin bir bir öz alt modülü olsun. M nin N yi kapsayan N den başka hiç bir öz alt modülü yoksa N ye M nin bir maksimal alt modülü denir (Anderson ve Fuller, 1992).

Teorem 2.3.11: M bir modül olmak üzere M nin bir N öz alt modülünün maksimal olması için gerek ve yeter koşul her $m \in M \backslash N$ için $N + Rm = M$ olmasıdır (Kasch, 1982).

İspat: $(\Rightarrow)$ Her $m \in M \backslash N$ için $N \subsetneqq N + Rm$ ve N maksimal alt modül olduğundan $N + Rm = M$ bulunur.
$(\Leftarrow) N \subsetneqq K \leq M$ olsun. $N \neq K$ olduğundan $\exists\ m \in K \backslash N$ elemanı vardır. Bu durumda, $m \in M \backslash N$ olup hipotez gereği $N + Rm = M$ olur. $m \in K$ olduğundan $Rm \leq K$ olup $M = N + Rm \leq K$ olur. Dolayısıyla $K = M$ dir.

Teorem 2.3.12: M ve K birer R-modül olmak üzere $f: M \longrightarrow K$ bir epimorfizma olsun. Bu takdirde K modülünün alt modülleriyle M nin $Çek(f)$ yi kapsayan alt modülleri arasında bire bir bir eşleme yapılabilir. Böylece bir $N \leq M$ için $p: M \longrightarrow M/N$ doğal epimorfizması yardımı ile M / N nin her alt modülü $K,\ M$ nin N yi kapsayan bir alt modülü olmak üzere K / N şeklindedir. Ayrıca N yi içeren $K \leq M$ alt modülünün M de maksimal olması için gerek ve yeter koşul K / N alt modülünün M / N de maksimal olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.3.13: Bir S kümesi üzerinde tanımlanan bağıntı yansıma, ters simetri ve geçişme özelliklerini sağlarsa S ye sıralı küme adı verilir. Sıralı bir kümede bir elemanın kendisinden kesin büyük hiçbir eleman yoksa bu elemana maksimal eleman denir. Benzer şekilde minimal eleman da tanımlanabilir. Sıralı bir kümenin her elemanı, küme üzerinde tanımlanan bağıntıya göre karşılaştırılabilir ise bu kümeye tam sıralıdır denir. Sıralı bir kümenin tam sıralı bir alt kümesine zincir denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Lemma 2.3.14 (Zorn Lemma): Boş olmayan bir S sıralı kümesinin her zincirinin S de bir üst sınırı varsa S kümesinin en az bir maksimal elemanı vardır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Teorem 2.3.15: M sonlu üretilmiş bir R-modül ise M modülünün her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanır (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: N, M nin keyfi bir öz alt modülü olsun. Ω ile M nin N yi içeren bütün öz alt modüllerinin ailesini gösterelim. $N \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ olur. Ω kümelerdeki kapsama bağıntısına göre sıralı bir kümedir. Λ, Ω nın boş kümeden farklı bir zinciri olsun. N_0 ile Λ nin bütün elemanlarının birleşimini gösterelim. Λ tam sıralı olduğundan Λ elemanları kümelerdeki kapsama bağıntısına göre karşılaştırılabilir olup N_0, M nin N yi kapsayan bir alt modülüdür. M sonlu üretilmiş olduğundan $M = Rm_1 + Rm_2 + \cdots + Rm_n$ olacak şekilde $m_1, m_2, \dots, m_n \in M$ ve $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ elemanları vardır. Eğer $N_0 = M$ olursa her $i = 1, 2, \dots, n$ için $m_i \in N_0 = \bigcup_{L\in\Lambda} L$ yazılır. Bu durumda Λ tam sıralı olduğundan en az bir $L \in \Lambda$ vardır ki her $i = 1, 2, \dots, n$ için $m_i \in L$ olup $M = L$ olur. Bu ise $L \in \Omega$ olmasıyla çelişir. Böylece N_0, M nin N yi kapsayan bir öz alt modülüdür. Yani $N_0 \in \Omega$ dır. N_0 alt modülünün Λ nın bir üst sınırı olduğu açıktır. O halde Zorn Lemması gereği Ω bir maksimal elemana sahiptir. Bu maksimal eleman M nin N öz alt modülünü kapsayan bir maksimal alt modüldür.

Sonuç 2.3.16: M bir R-modül ve N, M nin bir öz alt modülü olmak üzere M / N sonlu üretilmiş ise N, M nin bir maksimal alt modülü tarafından kapsanır.

İspat: Teorem 2.3.15 ile M / N, P / N maksimal alt modülüne sahiptir. Teorem 2.3.12 den P, M nin N yi kapsayan bir maksimal alt modülüdür.

2.4. Direkt Toplamlar ve Direkt Çarpımlar

Tanım 2.4.1: M bir R-modül ve $\{N_i\}_{i\in I}$ M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $\sum_{i\in I} N_i$ alt modülünün elemanlarının yazılışı tek türlü ise $\sum_{i\in I} N_i$ toplamına, $\{N_i\}_{i\in I}$ alt modüller ailesinin iç direkt toplamı denir ve bu alt modül $\bigoplus_{i\in I} N_i$ ile gösterilir.

$I = \{1, 2\}$ ise iç direkt toplam $N_1 \oplus N_2$ ile gösterilir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.4.2: M bir R-modül ve $\{N_i\}_{i\in I}$ M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $M = \bigoplus_{i\in I} N_i$ olması için gerek ve yeter koşul $M = \sum_{i\in I} N_i$ ve her $i \in I$ için $N_i \cap (\sum_{j\neq i} N_j) = 0$ olmasıdır (Hungerford, 1973).

Özel olarak $I = \{1, 2\}$ alınırsa $M = N_1 \oplus N_2$ olması için gerek ve yeter koşul $M = N_1 + N_2$ ve $N_1 \cap N_2 = 0$ olmasıdır.

Önerme 2.4.3: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. $M = N \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq M$ alt modülü mevcut ise N ye M nin bir direkt toplam terimi denir. M ve 0, M nin aşikar direkt toplam terimleridir. M modülünün aşikar direkt toplam terimlerinden başka direkt toplam terimi yoksa M ye parçalanamaz modül, M nin aşikar direkt toplam terimleri dışında direkt toplam terimleri mevcut ise M modülüne parçalanabilir modül denir (Hungerford, 1973).

R bir halka ve I boş kümeden farklı bir indis kümesi olmak üzere, $\{M_i\}_{i\in I}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. $\{\alpha | \alpha: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} M_i,\ \forall i \in I \text{ için } \alpha(i) \in M_i\}$ dönüşümler kümesine $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin çarpımı denir ve bu küme $\prod_{i\in I} M_i$ ile gösterilir. Her $i \in I$ için $\alpha(i) = m_i$ ile tanımlı α dönüşümünü ve $\alpha = (m_i)_{i\in I}$ olarak alalım. Burada m_i ye α nın i-yinci bileşeni denir. Eğer I indis kümesi sayılabilir ise $\alpha = (m_i)_{i\in I} = (m_1, m_2, \dots, m_i, \dots)$ şeklindedir. Tanımlanan bu α elemanının sadece sonlu tane bileşeni sıfırdan farklı ise α ya sonlu desteklidir denir. $\alpha = (m_i)_{i\in I},\ \beta = (n_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ olmak üzere,

i. $\alpha = \beta \Leftrightarrow$ her $i \in I$ için $m_i = n_i$,
ii. $\alpha + \beta = (m_i + n_i)_{i\in I}$,
iii. $-\alpha = (-m_i)_{i\in I}$ ve
iv. $r \in R$ olmak üzere $r\alpha = (rm_i)_{i\in I}$

şeklinde tanımlıdır. Bu cebirsel işlemlere göre $\prod_{i\in I} M_i$ bir sol R-modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin dış direkt çarpımı denir.

$\prod_{i\in I} M_i$ modülünde sıfır elemanı sonlu destekli kabul edilerek bütün sonlu destekli elemanların kümesi $\prod_{i\in I} M_i$ modülünün bir alt modülüdür. Bu alt modüle $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin dış direkt toplamı denir ve $\bigoplus_{i\in I}^{w} M_i$ ile gösterilir. Eğer I kümesi sonlu ise $\prod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I}^{w} M_i$ olacağı açıktır.

$j \in I$ olmak üzere $m_j \in M_j$ keyfi elemanları için $\varepsilon_j(m_j) = \begin{cases} m_j, & i = j \\ 0_{M_i}, & i \neq j \end{cases}$ ile tanımlı $\varepsilon_j: M_j \longrightarrow \prod_{i\in I} M_i$ dönüşümü bir monomorfizma ve $(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i$ keyfi elemanı için $\pi_j((m_i)_{i\in I}) = m_j$ ile tanımlı $\pi_j: \prod_{i\in I} M_i \longrightarrow M_j$ dönüşümü bir epimorfizma yapısına sahiptir. Bu homomorfizmalara sırasıyla j-yinci gömme monomorfizması ve j-yinci izdüşüm epimorfizması denir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.4.4: Bir dış direkt toplam bir iç direkt toplama ve bir iç direkt toplam bir dış direkt toplama izomorftur (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.4.5: M bir R-modül olsun. I boş kümeden farklı bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için $M_i = M$ alınırsa $\bigoplus_{i\in I}^{w} M_i$ dış direkt toplamına M modülünün kopyalarının toplamı denir ve $M^{(I)}$ ile gösterilir. Eğer $M = R$ alınırsa $F = R^{(I)}$ modülüne serbest modül denir ve her modül bir serbest modülün epimorfik görüntüsüdür (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 2.4.6: M ve K, R-modüller ve I boş kümeden farklı bir indis kümesi olsun. $f: M^{(I)} \longrightarrow K$ epimorfizması mevcut ise K modülüne M-üretilmiş modül denir.

2.5. Basit ve Yarı Basit Modüller

Tanım 2.5.1: M sıfırdan farklı bir modül olsun. M modülü sıfır alt modülünden başka öz alt modüle sahip değilse M modülüne basit modül denir (Kasch, 1982).

Önerme 2.5.2: M bir basit modül ise $\{0\}$, M modülünün maksimal alt modülüdür ve sıfırdan farklı her $m \in M$ elemanı için $Rm = M$ olup M devirlidir (Kasch, 1982).

İspat: M basit modül olduğundan $\{0\}$ alt modülünü kapsayan M modülünün kendisinden başka alt modülü yoktur. Dolayısıyla tanım gereği $\{0\}$, M modülünün maksimal alt modülüdür. $0 \neq m \in M$ keyfi elemanı için Rm, M modülünün bir alt modülüdür. $Rm \neq \{0\}$ ve M basit olduğundan $Rm = M$ olup M devirlidir.

Yardımcı Teorem 2.5.3: K, M ve N bir R-modülünün alt modülleri ve $K \leq N$, $K \leq M$ olsun. Bu takdirde, $N \,/\, K = M \,/\, K$ olması için gerek ve yeter koşul $N = M$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: $n \in N$ olsun. Hipotez gereği $n + K = m + K$ olacak şekilde $\exists\, m \in M$ elemanı bulunabilir. Buradan $n - m = k$ olacak şekilde $\exists\, k \in K$ elemanı mevcut olup $K \leq M$ olduğundan $n = k + m \in M$ bulunur. Yani $N \leq M$ olur. Benzer şekilde, N ve M nin rolleri değiştirilerek $M \leq N$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla her iki kapsamadan $N = M$ bulunur. Tersi açıkır.

Teorem 2.5.4: M bir modül olsun. $N \subsetneqq M$ öz alt modülünün maksimal alt modül olması için gerek ve yeter koşul M / N bölüm modülünün basit modül olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: N, M modülünün bir maksimal alt modülü ve $K / N \leq M / N$ keyfi bir alt modül olsun. Hipotez gereği N, M nin maksimal alt modülü olduğundan $K = N$ veya $K = M$ olmalıdır. Bu durumda M / N basittir.
Tersine, M / N nin basit olduğunu kabul edelim. $N \nleq K \leq M$ olacak şekildeki bir K alt modülü için $K / N \leq M / N$ olup $K / N \neq \{N\}$ dir. M / N basit olduğundan $K / N = M / N$ olup Yardımcı teorem 2.5.3 gereği $K = M$ dir. Sonuç olarak N, M modülünün maksimal alt modülüdür.

Tanım 2.5.5: R bir halka ve M bir R-modül olsun.

$$(0{:}\, M) = \{r \in R \mid \text{her } m \in M \text{ için } rm = 0\}$$

idealine M modülünün sıfırlayanı denir ve $Ann(M)$ ile gösterilir. $Ann(M) = 0$ ise M ye sadık modül denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Özel olarak bir $m \in M$ için $(0{:}\, m) = \{r \in R \mid rm = 0\}$ kümesine m elemanının sıfırlayanı denir ve $Ann(m)$ ile gösterilir. $Ann(M)$ ve $An(m)$ R halkasının $Ann(M) \subseteq Ann(m)$ şartını sağlayan iki sol idealidir. Hatta $Ann(M), R$ nin bir idealidir.

Önerme 2.5.6: R bir halka, M bir R-modül ve I, R nin bir ideali olsun. $I \subseteq Ann(M)$ olmak üzere $R/I \times M \longrightarrow M$ çarpımı $(r + I, m) \longmapsto rm$ şeklinde tanımlanırsa M R-modülü bir R/I-modül yapısına sahip olur. Ayrıca M nin bir alt kümesinin R-alt modül olması için gerek ve yeter koşul bir R/I-alt modül olmasıdır. Böylece bir M R-modülü $I = Ann_R(M)$ olmak üzere R/I-modüldür. Çünkü $\overline{R} = R/Ann_R(M)$ olmak üzere $Ann_{\overline{R}}(M) = 0$ dır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Önerme 2.5.7: R bir halka ve M bir R-modül olsun. Bu durumda

i. Her $0 \neq m \in M$ için $M = Rm$ ise M basittir.
ii. M basit ise her $0 \neq m \in M$ için $Ann(m)$, R nin bir maksimal idealidir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

İspat:

i. $0 \neq N \subseteq M$ bir alt modül olsun. Her $0 \neq m \in N$ için $M = Rm \leq N$ olduğundan $M = N$ olmalıdır, yani M basittir.

ii. M bir basit R-modül ise $M \neq 0$ dır ve her $0 \neq m \in M$ için $M = Rm$, $Ann(m) \neq R$ dir. $g_m: R \longrightarrow Rm$, $g_m(r) = rm$ ile tanımlı fonksiyonun $Çek(f) = Ann(m)$ eşitliğini gerçekleyen bir R-modül epimorfizması olduğu göz önüne alınırsa Homomorfizma Teoremi gereği $R \,/\, Ann(m) \cong Rm = M$ olur ki M basit modül olduğundan Teorem 2.5.4 gereği $Ann(m)$, R R-modülünün maksimal alt modülüdür. Böylece $ann(m)$, R nin bir maksimal idealidir.

Tanım 2.5.8: M bir modül olsun. M modülünün her alt modülü bir direkt toplam terimi ise M ye yarı basit modül denir. Bir M modülünün tüm basit alt modüllerinin toplamını "$Des(M)$" ile gösterilir (Kasch, 1982).

Teorem 2.5.9: Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

i. M nin her N alt modülü için $N = Des(N)$ dir.
ii. $M = Des(M)$ dir.
iii. M basit alt modüllerin direkt toplamıdır.
iv. M yarı basittir.

O halde, bir M modülünün basit alt modüllerinin toplamı $Des(M)$, M modülünün en büyük yarı basit alt modülüdür (Kasch, 1982).

Teorem 2.5.10: Yarı basit modüllerin alt modülleri, bölüm modülleri ve direkt toplamları yarı basittir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 2.5.11: İzomorfizma sınıfı birbirine izomorf matematiksel objelerin topluluğudur. Ω basit R-modüllerin izomorfizma sınıflarının kümesi olsun. R bir halka, M yarı basit R-modül ve $\omega \in \Omega$ olmak üzere, M_ω, ile ω sınıfındaki M nin tüm basit alt modüllerinin toplamını gösterelim. Bu durumda M_ω ya M nin izotopik ω-bileşeni denir ve $\omega \in \Omega$ için $M = M_\omega$ ise M yarıbasit modülüne izotopiktir denir (Nastasescu ve Oystaeyen, 2012).

Önerme 2.5.12: R bir halka, M yarı basit R-modül ise bu takdirde $M = \bigoplus_{\omega \in \Omega} M_\omega$ dır (Nastasescu ve Oystaeyen, 2012).

2.6. Noetherian ve Artinian Modüller

Tanım 2.6.1: R bir halka ve M bir R-modül olsun. M nin alt modüllerinin her artan $M_1 \geq M_2 \geq \cdots \leq M_n \geq \cdots$ zinciri sonlu bir adımda durursa M ye Noetherian modül denir (Çallıalp ve Tekir, 2009). Ayrıca bir R halkası sol R-modülü ${}_R R$ olarak Noetherian ise R halkasına sol Noetherian halka denir (Wissbauer, 1991).

Önerme 2.6.2: Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

i. M Noetherian modüldür.

ii. M nin her alt modülü sonlu üretilmiştir.

iii. M nin alt modüllerinin herhangi bir boştan farklı her ailesinin en az bir maksimal elemanı vardır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Teorem 2.6.3: M bir modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. M nin Noetherian modül olması için gerek ve yeter koşul N ve M/N nin Noetherian modül olmasıdır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.6.4: R bir halka ve M bir R-modül olsun. M nin alt modüllerinin her azalan $M_1 \leq M_2 \leq \cdots \leq M_n \leq \cdots$ zinciri sonlu bir adımda durursa M ye Artinian modül denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Önerme 2.6.5: Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir

i. M Artinian modüldür.

ii. M nin alt modüllerinin herhangi bir boştan farklı her ailesinin en az bir minimal elemanı vardır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Teorem 2.6.6: M bir modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. M nin Artinian modül olması için gerek ve yeter koşul N ve M/N nin Artinian modül olmasıdır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Teorem 2.6.7: R değişmeli bir Noetherian halka olsun. R nin Artininan olması için gerekli ve yeterli koşul her asal idealinin maksimal olmasıdır (Goodearl ve Warfield, 1989).

2.7. Kompozisyon Serileri

Tanım 2.7.1: R bir halka olsun M bir R-modül olsun. M nin alt modüllerinin $0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_{n-1} \subsetneqq M_n = M$ kesin artan zincirine n-uzunluğunda bir kesin zincir denir. Eğer bu kesin zincirde her M_i/M_{i-1} $(i = 1, 2, \dots, n)$ bölüm modülü bir basit modül ise bu kesin zincire n-uzunluğunda bir kompozisyon serisi denir. M_i/M_{i-1} bölüm modüllerine kompozisyon serisinin bölüm modülleri denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.7.2: Sıfırdan farklı bir M modülünün bir kompozisyon serisine sahipse M nin tüm kompozisyon serilerinin uzunluklarının en küçüğüne M nin uzunluğu denir ve $\ell(m)$ ile gösterilir. Eğer M nin kompozisyon serisi yoksa $\ell(m) = \infty$ ile gösterilir. Sıfır modülünün uzunluğu 0 alınır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Teorem 2.7.3: R bir halka ve M bir R-modül olsun. M nin n-uzunluğunda bir kompozisyon serisi varsa,

i. M nin uzunluğu n den daha büyük bir kesin zinciri yoktur.
ii. M nin her kompozisyon serisinin uzunluğu n dir.
iii. M nin uzunluğu n den daha küçük her kesin zinciri, uzunluğu n olan bir kompozisyon serisine tamamlanabilir.
iv. M nin uzunluğu n olan her kesin zinciri bir kompozisyon serisidir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Önerme 2.7.4: Bir modülün bir kompozisyon serisinin mevcut olması yani sonlu uzunlukta olması için gerek ve yeter koşul bu modülün hem Noetherian hem Artinian olmasıdır (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.7.5: $0 = M_0 \subsetneqq M_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq M_{n-1} \subsetneqq M_n = M$ ve $0 = M_0{}' \subsetneqq M_1{}' \subsetneqq \cdots \subsetneqq M'_{(n-1)} \subsetneqq M_n{}' = M$ bir M modülünün iki kompozisyon serisi olsun. σ, $\{1, 2, \dots, n\}$ in bir permütasyonu olmak üzere her $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $M_i/M_{i-1} \cong M'_{\sigma(i)}/M'_{(\sigma(i)-1)}$ ise bu iki kompozisyon serisi denktir denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Teorem 2.7.6 (Jordan-Hölder Teoremi): Bir M modülünün bir kompozisyon serisi varsa tüm kompozisyon serileri ona denktir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

Tanım 2.7.7: R bir halka ve $P_0, P_1, \dots, P_n$ ler de R nin asal idealleri olsun. $P_0 \subsetneqq P_1 \subsetneqq \cdots \subsetneqq P_n$ kesin zincirine n-uzunluğunda bir asal ideal zincir denir. R

halkasının tüm asal ideal zincirlerinin uzunluklarının en küçük üst sınırına R nin Krull boyutu denir (Çallıalp ve Tekir, 2009).

2.8. Projektif ve İnjektif Modüller

Tanım 2.8.1: $\boldsymbol{R}$ bir halka olmak üzere $\{\boldsymbol{M_i}\}_{\boldsymbol{i\in I}}$ $\boldsymbol{R}$-modüller topluluğundan ve bunların $\boldsymbol{f_{i+1}}: \boldsymbol{M_{i+1}} \longrightarrow \boldsymbol{M_i}$ homomorfizmalarından oluşan

$$\ldots \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_i \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow \cdots$$

dizisinde her $i \in I$ için $Gör(f_{i+1}) = Çek(f_i)$ ise bu diziye tam dizi denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.8.2: N, M ve K birer R-modül olmak üzere $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$ şeklindeki tam diziye kısa tam dizi denir. Bu durumda f homomorfizması bire bir, g homomorfizması örten ve $Gör(f) = Çek(g)$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.8.3: $f: M \longrightarrow N$ ve $g: N \longrightarrow M$ homomorfizmaları için $gf = I_M$ olsun. Bu takdirde $N = Gör(f) \oplus Çek(g)$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $n \in N$ keyfi elemanı için $g(n) \in M$ olup $gf = I_M$ olduğundan $g\Big(f\big(g(n)\big)\Big) = g(n)$ yazılır. g bir homomorfizma olduğundan $f(g(n)) - n \in Çek(g)$ olup $n \in Gör(f) + Çek(g)$ dir. Buradan $N = Gör(f) + Çek(g)$ elde edilir. $n \in Gör(f) \cap Çek(g)$ olsun. Bir $m \in M$ elemanı için $f(m) = n$ olup $m = g\big(f(m)\big) = g(n) = 0$elde edilir. Dolayısıyla $n = f(m) = f(0) = 0$ olup $Gör(f) \cap Çek(g) = 0$ olur. Böylece $N = Gör(f) \oplus Çek(g)$ elde edilmiş olur.

Önerme 2.8.4: $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki ifadeler denktir:

i. $hf = I_N$ olacak şekilde $h: M \longrightarrow N$ homomorfizması vardır.

ii. $Gör(f)$, M modülünün direkt toplam terimidir.

iii. $gk = I_K$ olacak şekilde $k: K \longrightarrow M$ homomorfizması vardır. Bu durumda $M \cong N \oplus K$ dır.

Yukarıda verilen denk şartlardan birini sağlayan kısa tam diziye parçalanabilir kısa tam dizi denir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: (i) $\Longrightarrow$ (ii): Önerme 2.8.3 ten görülür.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): $U \leq M$ olmak üzere $M = Gör(f) \oplus U$ olsun. Verilen dizinin tamlığı gereği $Gör(f) = Çek(g)$ ve $Gör(f) \cap U = 0$ olduğundan $Çek(g) \cap U = 0$ olup $g|_U$ kısıtlanışı bir monomorfizma yapısına sahiptir. Şimdi bu fonksiyonun bir izomorfizma olduğunu gösterelim. $x \in K$ keyfi elemanı için g bir epimorfizma olduğundan $x = g(m)$ olacak şekilde bir $m \in M$ elemanı vardır. Ayrıca $M = Gör(f) \oplus U$ olduğundan bir $n \in N$ ve bir $u \in U$ elemanı için $m = f(n) + u$ şeklinde yazılabilir. Buradan $x = g(m) = g(f(n) + u) = g\big(f(n)\big) + g(u)$ bulunur. Diğer taraftan dizinin tamlığı gereği $g\big(f(n)\big) = 0$ olup $x = g(u)$ olur. Yani $g|_U$ bir epimorfizmadır. $u_1, u_2 \in U$ için $g(u_1) = g(u_2)$ olsun. Buradan $u_1 - u_2 \in Çek(g) = Gör(f)$ dir. $u_1 - u_2 \in U$ ve $U \cap Gör(f) = 0$ olduğundan $u_1 = u_2$ olup $g|_U$ bire birdir. Böylece $g|_U : U \longrightarrow K$ bir izomorfizmadır. Bu izomorfizmanın tersine k denirse $k : K \longrightarrow U$ homomorfizması elde edilmiş olur. $k,\ g|_U$ izomorfizmasının tersi olduğu için $gk = I_K$ olduğu açıktır.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): $m \in M$ olsun. $g\big(m - kg(m)\big) = g(m) - (gk)\big(g(m)\big) = g(m) - g(m) = 0$ olup $Gör(f) = Çek(g)$ olduğundan bir $n \in N$ elemanı için $f(n) = m - (kg)(m)$ dir. Dizinin tamlığı gereği f bir monomorfizma olup n teklikle bellidir. $m \in M$ olmak üzere $h(m) = n$ ile tanımlı $h : M \longrightarrow N$ fonksiyonu bir homomorfizmadır. $n \in N$ keyfi elemanı için $f(n) - (kg)\big(f(n)\big) = f(n) - k((gf)(n)) = f(n) - k(0) = f(n)$ olup h ın tanımından $(hf)(n) = n$ ve $hf = I_N$ elde edilir.

Ayrıca f monomorfizma olduğundan $N \cong Gör(f)$ dir. Ve üstten $M = Gör(f) \oplus U$ dur. $g|_U$ izomorfizma olduğundan $N \cong K$ dır. Böylece $M = N \oplus K$ dır.

Tanım 2.8.5: N bir modül olsun. Verilen her $g : M \longrightarrow K$ epimorfizması ve her $f : N \longrightarrow K$ homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli ise yani $gh = f$ olacak şekilde bir $h : N \longrightarrow M$ homomorfizması varsa N modülüne projektiftir denir (Wisbauer, 1991).

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "f"] \\ M \arrow[r, "g"] & K \end{tikzcd}$$

R bir halka ve M bir R-modül olsun. $M = U + V$ koşulunu sağlayan her U ve V alt modülleri için $Gör(f) \leq U$ ve $Gör(I_M - f) \leq V$ olacak şekilde bir $f \in End(M)$ varsa M modülüne π-projektif modül denir. Her projektif modül π-projektiftir. Ayrıca her serbest modül projektiftir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.8.6: R bir halka $\{P_i\}_{i\in I}$ kümesi R-modüllerin bir ailesi olsun. $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ direkt toplamının projektif olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ için P_i nin projektif olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: ($\Longrightarrow$): $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ projektif olsun. $f: M \longrightarrow N$ bir epimorfizma ve $g: P_i \longrightarrow N$ homomorfizma olsun. $\pi_i: P \longrightarrow P_i$, i-yinci projeksiyon ve $\varepsilon_i: P_i \longrightarrow P$, i-yinci injeksiyon olmak üzere P projektif olduğundan $g\pi_i: P \longrightarrow N$ için $fh = g\pi_i$ olacak şekilde $h: P \longrightarrow M$ homomorfizması vardır. $e = h\varepsilon_i$ olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \\
 & P_i \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dotted, "e"'] \arrow[d, dotted, bend right, "\varepsilon_i"'] & \\
 & P \arrow[u, bend right, "\pi_i"'] \arrow[uul, dotted, "h"] &
\end{tikzcd}$$

$fe = fh\varepsilon_i = g\pi_i\varepsilon_i = gI_{P_i} = g$ olup her $i \in I$ için P_i modülleri projektiftir.

($\Longleftarrow$): $f: M \longrightarrow N$ örten homomorfizma ve $g: P \longrightarrow N$ bir homomorfizma olsun. Her $i \in I$ için P_i projektif olduğundan $g\varepsilon_i = fh_i$ olacak şekilde $h: P_i \longrightarrow M$ homomorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \arrow[r] & 0 \\
 & P \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dotted, "h"'] & \\
 & P_i \arrow[u, "\varepsilon_i"'] \arrow[uul, dotted, "h_i"] &
\end{tikzcd}$$

Her $(m_i)_{i\in I} \in P$ için $h\left((m_{i)}{}_{i\in I}\right) = \sum_{i\in I} h_i(m_i)$ ile tanımlı $h: P \longrightarrow M$ fonksiyonunu ele alalım. h nın bir homomorfizma olduğu gösterilebilir. Bu durumda her $i \in I$ için $g \circ \varepsilon_i = f \circ h_i$ eşitliği yardımı ile

$(fh)\left((m_{i)}{}_{i\in I}\right) = f(\sum_{i\in I} h_i(m_i)) = \sum_{i\in I}(fh_i)(m_i) = \sum_{i\in I}(g\varepsilon_i)(m_i) = g(\sum_{i\in I}\varepsilon_i(m_i)) = g((m_i)_{i\in I})$

elde edilir. Böylece $fh = g$ bulunur. O halde P projektiftir.

Teorem 2.8.7: Bir K modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

i. K projektiftir.

ii. $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$ şeklinde olan her kısa tam dizi parçalanabilirdir.

iii. K bir serbest modülün direkt toplam terimidir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: (i) $\Longrightarrow$ (ii): $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} K \longrightarrow 0$ bir kısa tam dizi olsun. Bu durumda $g: M \longrightarrow K$ bir epimorfizmadır. I_K, K modülünün birim homomorfizması olmak üzere K projektif olduğundan $gk = I_K$ olacak şekilde $k: K \longrightarrow M$ homomorfizması vardır. Önerme 2.8.4 ten verilen dizi parçalanandır.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Her modül bir serbest modülün epimorfik görüntüsü olduğundan F bir serbest modül olmak üzere bir $g: F \longrightarrow K$ epimorfizması vardır. Bu durumda $0 \longrightarrow Çek(g) \longrightarrow F \longrightarrow K \longrightarrow 0$ tam dizisi parçalanabilirdir. Dolayısıyla K, F serbest modülünün direkt toplam terimidir.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Teorem 2.8.6 dan açıktır.

Tanım 2.8.8: R bir halka ve M bir R-modül olsun. Her $x \in M$ için $x = f_1(x)y_1 + f_2(x)y_2 + \cdots + f_n(x)y_n$ olacak şekilde sonlu sayıda $f_i: M \longrightarrow R$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ homomorfizmaları ve $y_i \in M$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ elemanları bulunabiliyorsa M ye yerelimsi projektif modül denir. Projektif her modül aynı zamanda yerelimsi projektiftir (Zimmermann-Huisgen, 1976).

Tanım 2.8.9: R bir halka, M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. R halkasının her I ideali için $IN = N \cap IM$ oluyorsa N ye M nin pür alt modülü denir (Lam, 1998). Bir modülün direkt toplam terimleri pür alt modüllere örnek gösterilebilir.

Önerme 2.8.10: N bir P projektif modülünün sonlu üretilmiş bir pür alt modülü ise N, P nin bir direkt toplam terimidir (Oneto ve Angel, 1996).

Önerme 2.8.11: Projektif bir modülün pür alt modülü de projektiftir (Zimmermann-Huisgen, 1976).

Tanım 2.8.12: M bir modül olsun. M modülünün her alt modülü projektif ise, M modülüne kalıtsal modül denir. Bir R halkası için ${}_RR$ sol R-modülü kalıtsal ise R halkasına sol kalıtsal halka denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.8.13: M, N ve K birer R-modül olsun. Her $g: K \longrightarrow M$ epimorfizması ve her $f: K \longrightarrow N$ homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde yani $hg = f$ şartını sağlayan bir $h: M \longrightarrow N$ homomorfizması varsa N ye injektif modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dotted, "h"] \\ N & \end{tikzcd}$$

Önerme 2.8.14: Kalıtsal bir halka üzerindeki injektif bir modülün tüm bölüm modülleri de injektiftir (Wisbauer, 1991).

Yardımcı Teorem 2.8.15: M injektif bir modül ise her direkt toplam terimi de injektiftir (Alizade ve Pancar, 1999).

Yardımcı Teorem 2.8.16: Her modül bir injektif modül içine gömülebilirdir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.8.17: M bir modül olsun. M nin injektif olması için gerek ve yeter şart M nin her genişlemesinde direkt toplam terimi olmasıdır (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: $(\Longrightarrow)$: M injektif ve N, M nin herhangi bir genişlemesi olsun. i gömme fonksiyonu ve I_M birim dönüşüm olmak üzere aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "I_M"'] & N \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Bir $n \in N$ elemanı için $h(n) \in M$ olup $hi = I_M$ olduğundan $h(n) = h(i(n))$ dir. Buradan $n - h(n) \in Çek(h)$ olur. $n = h(n) + \big(n - h(n)\big) \in M + Çek(h)$ olup $N \leq M + Çek(h) \leq N$ ifadesinde $N = M + Çek(h)$ elde edilir. $n \in M \cap Çek(h)$

olmak üzere $hi = I_M$ olduğundan $n = h(n) = 0$ olup $n = 0$ bulunur. Böylece $N = M \oplus Çek(h)$ olup istenen elde edilmiş olur.

($\Longrightarrow$): Yardımcı Teorem 2.8.15 ve Yardımcı Teorem 2.8.16 dan istenen elde edilir.

Tanım 2.8.18: M bir modül $N \leq M$ oldun. Eğer M nin sıfırdan farklı her alt modülü ile N nin kesişimi sıfırdan farklı ise, N ye M nin bir büyük alt modülü denir ve $N \trianglelefteq M$ ile gösterilir. $f: K \longrightarrow L$ bir modül monomorfizması olmak üzere $f(K) \trianglelefteq L$ ise f ye büyük monomorfizma denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.8.19:

i. $A \leq B \leq M \leq N$ ve A, N nin büyük alt modülü ise B de M nin büyük alt modülüdür.

ii. Sonlu sayıda büyük alt modülün kesişimi de büyüktür.

iii. Büyük alt modüllerin homomorfizma altındaki ters görüntüleri de büyüktür.

iv. $A \leq B \leq C$ için $A \trianglelefteq B$ ve $B \trianglelefteq C$ ise $A \trianglelefteq C$ dir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat:

i. $U \leq M$ ve $B \cap U = 0$ ise $A \leq B$ olduğundan $A \cap U \leq B \cap U = 0$ bulunur. Böylece $A \cap U = 0$ ve $A \trianglelefteq N$ olduğundan $U = 0$ dır. Dolayısıyla $B \trianglelefteq M$ elde edilir.

ii. M bir modül ve her $i = 1, 2, \dots, k$ için $A_i \trianglelefteq M$ olsun. Tümevarımla $\bigcap_{i=1}^{k} A_i$ nin M nin büyük alt modülü olduğunu gösterelim. $k = 1$ için iddianın doğruluğu açıktır. İddianın k için doğru olduğunu kabul edelim ve $k + 1$ için doğruluğunu gösterelim. Bir $U \leq M$ için $(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i) \cap U = 0$ olsun. Böylece $\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap (A_{k+1} \cap U) = 0$ yazılır. Kabulden $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \trianglelefteq M$ olduğundan $A_{k+1} \cap U = 0$ dır. $A_{k+1} \trianglelefteq M$ olduğundan $U = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i \trianglelefteq M$ elde edilir.

iii. $f: M \longrightarrow N$ bir homomorfizma, $B \trianglelefteq N$ olsun. $f^{-1}(B) \cap U = 0$ olacak şekilde bir $U \leq M$ alalım. $x \in B \cap f(U)$ olsun. Bu takdirde $x = f(u) \in B$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır. Buradan $u \in f^{-1}(B) \cap U$ olup $u = 0$ bulunur. Dolayısıyla $x = 0$ olup $B \cap f(U) = 0$ bulunur. $B \trianglelefteq N$ olduğundan $f(U) = 0$ dır. O halde $U \leq Çek(f)$ elde edilir. Ayrıca $Çek(f) \leq f^{-1}(B)$ olduğundan $U = f^{-1}(B) \cap U = 0$ olup $f^{-1}(B) \trianglelefteq M$ bulunur.

iv. $A \trianglelefteq B$ ve $B \trianglelefteq C$ olsun. $A \cap U = 0$ koşulunu sağlayan her $U \leq C$ alt modülü için $A \cap (U \cap B) \leq A \cap U = 0$ olduğundan $A \cap (U \cap B) = 0$ dır. $U \cap B \leq B$ ve $A \trianglelefteq B$ olduğundan $U \cap B = 0$ elde edilir. $B \trianglelefteq C$ olduğundan $U = 0$ dır. O halde $A \trianglelefteq C$ dir.

Yardımcı Teorem 2.8.20: M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. $N \trianglelefteq M$ olması için gerek ve yeter koşul her $0 \neq m \in M$ için $0 \neq rm \in N$ olacak şekilde en az bir $r \in R$ elemanının bulunmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat:($\Longrightarrow$): $N \trianglelefteq M$ olsun. $0 \neq m \in M$ için $Rm \neq 0$ olduğundan $N \cap Rm \neq 0$ dır. O halde $0 \neq rm \in N$ olacak şekilde en az bir $r \in R$ vardır.
($\Longleftarrow$): $0 \neq U \leq M$ olsun. Dolayısıyla en az bir $0 \neq m \in U$ vardır. Hipotezden $0 \neq rm \in N$ olacak şekilde bir $r \in R$ vardır. $m \in U$ iken $rm \in U$ olduğundan $0 \neq rm \in N \cap U$ dir. Böylece M nin her $0 \neq U$ alt modülü için $N \cap U \neq 0$ olduğundan $N \trianglelefteq M$ bulunur.

Önerme 2.8.21: $M = \sum_{k\in K} M_k,\ A = \sum_{k\in K} A_k = \bigoplus_{k\in K} A_k$ ve her $k \in K$ için A_k, M_k nın büyük alt modülü olsun. Bu durumda $A,\ M$ nin büyük alt modülüdür ve $M = \bigoplus_{k\in K} M_k$ dır (Alizade ve Pancar, 1999).

Sonuç 2.8.22: $M = \bigoplus_{k\in K} M_k$ ve her $k \in K$ için $A_k,\ M_k$ nın büyük alt modülü ise $\sum_{k\in K} A_k = \bigoplus_{k\in K} A_k,\ M$ nin büyük alt modülüdür (Alizade ve Pancar, 1999).

Sonuç 3.1.6: $M = \bigoplus_{k\in K} M_k$ve $B \leq M$ olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.

i. Her $k \in K$ için $B \cap M_k$, M_k nın büyük alt modülüdür.
ii. $\bigoplus_{k\in K} (B \cap M_k)$, M nin büyük alt modülüdür.
iii. $B,\ M$ nin büyük alt modülüdür (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.8.23: I injektif bir modül $f: M \leftrightarrow I$ büyük monomorfizma ise I injektif modülüne M modülünün injektif bürümü denir ve "$E(M)$" ile gösterilir (Sharpe ve Vamos, 1972).

Tanım 2.8.24: R bir halka ve M bir R-modül olsun. M modülünün tüm maksimal alt modüllerinin arakesitine M nin radikali denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir. Eğer M modülünün maksimal alt modülü yoksa $Rad(M) = M$ ile tanımlıdır. Bu takdirde M modülüne radikal modül denir. (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.8.25: R bir halka olsun. Her basit sol R-modül injektif ise R halkasına V-halka denir. R halkasının V-halka olması için gerek ve yeter koşul her M sol R-modülü için $Rad(M) = 0$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.8.26: M ve B birer modül ve $A,\ B$ nin bir pür alt modülü olsun. A dan M ye tanımlı her homomorfizma B ye genişletilebilir ise M ye pür injektif modül denir (Warfield, 1970).

Tanım 2.8.27: R bir halka, M bir sol R-modül olsun. I ve J indis kümeleri olmak üzere her $i \in I$ ve her $j \in J$ için sadece sonlu çoklukta r_{ij} elemanı sıfırdan farklı ve $m_i \in M$ olmak üzere $\sum_{j \in J} r_{ij} x_j = m_i$, M de bir lineer denklem sistemidir. Bu şekilde tanımlı sonlu çözülebilir olan her lineer denklem sistemi çözülebilir ise M ye cebirsel kompakttır denir(Warfield, 1970). İnjektif modüller cebirsel kompakttır. Ayrıca bir M modülünün cebirsel kompakt olması için gerek ve yeter koşul pür injektif olmasıdır.

2.9. Küçük Alt Modüller

Tanım 2.9.1: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. N nin sadece M ile toplamı M ye eşit ise yani $N + K = M$ olması $K = M$ olmasını gerektirirse N ye M nin küçük alt modülü denir ve $N \ll M$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Önerme 2.9.2: M bir modül ve N, M nin küçük alt modülü ise N nin her alt modülü M nin küçük alt modülüdür (Wisbauer, 1991).

İspat: N, M nin küçük alt modülü ve $U \leq N$ olsun. Bir $K \leq M$ için $U + K = M$ olsun. $U \leq N$ olduğundan $N + K = M$ yazılabilir. $N \ll M$ olduğundan $K = M$ elde edilir.

Önerme 2.9.3: M bir modül ve N, M nin küçük alt modülü ise N, M nin her genişlemesinde bir küçük alt modüldür (Wisbauer, 1991).

İspat: $M \leq L$ ve bir $K \leq L$ için $N + K = L$ olsun. Buradan $(N + K) \cap M = L \cap M = M$ olup modüler kuraldan $N + (K \cap M) = M$ bulunur. $N \ll M$ olduğundan $K \cap M = M$ dir. Böylece $N \subseteq M \subseteq K$ olup $K = N + K = L$ elde edilir.

Önerme 2.9.4: $K \ll M$ ve $L \ll N$ ise $K + L \ll M + N$ dir (Kasch, 1982).

İspat: Bir $U \leq M + N$ için $(K + L) + U = M + N$ olsun. $K \ll M$ olduğundan Önerme 2.9.2 ile $K \ll M + N$ olup $L + U = M + N$ bulunur. Benzer şekilde $L \ll N$ olduğundan $L \ll M + N$ dir ve böylece $U = M + N$ elde edilir.

Önerme 2.9.5: M bir modül, N, M nin direkt toplam terimi ve $K \leq N$ olsun. K nın N de küçük olması için gerek ve yeter koşul K nın M de küçük olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: (⇒): Önerme 2.9.2 den görülür.

(⇐): Bir $U \leq N$ için $K + U = N$ olsun. N, M nin bir direkt toplam terimi olduğundan $N \oplus N' = M$ olacak şekilde $N' \leq M$ vardır. O halde, $(K + U) \oplus N' = M$ ve $K \ll M$ olduğundan $U \oplus N' = M$ dir. Böylece modüler kural gereği $N = N \cap M = U + N \cap N' = U$ elde edilir.

Teorem 2.9.6: $f: M \longrightarrow N$ homomorfizması için $K \ll M$ ise $f(K) \ll f(M)$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: Bir $U \leq f(M)$ alt modülü için $f(K) + U = f(M)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f^{-1}(f(K) + U) = f^{-1}\big(f(M)\big) = M$ olup $K + Çek(f) + f^{-1}(U) = M$ elde edilir. $Çek(f) = f^{-1}(0) \leq f^{-1}(U)$ olduğundan $K + f^{-1}(U) = M$ ve $K \ll M$ olduğundan $f^{-1}(U) = M$ bulunur. Bu takdirde $U = U \cap f(M) = f\big(f^{-1}(U)\big) = f(M)$ dir.

Önerme 2.9.7: M bir modül ve K, M nin bir direkt toplam terimi olsun. $K \ll M$ ise $K = 0$ dır (Wisbauer, 1991).

İspat: K bir direkt toplam terim olduğundan $M = K \oplus N$ olacak şekilde M nin bir N alt modülü vardır. $K \ll M$ olduğundan $N = M$ olur. Ayrıca $K \cap N = 0$ olduğundan $K = K \cap M = K \cap N = 0$ bulunur.

Teorem 2.9.8: M bir R-modül olsun. Bu takdirde $Rad(M) = \sum_{L \ll M} L$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $L \ll M$ alt modülünü ele alalım. Eğer M nin bir K maksimal alt modülü L yi içermezse $K + L = M$ olup $K = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla L, M nin bütün maksimal alt modüllerinde içerilir ki $L \subseteq Rad(M)$ olur. Buradan da $\sum_{L \ll M} L \subseteq RadM$ bulunur. Şimdi de ters kapsamayı gösterelim. Her $m \in Rad(M)$ için $Rm \ll M$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $m \in RadM$ için Rm nin M de küçük olmadığını kabul edelim. Bu durumda $Rm + L = M$ olacak şekilde M nin en az bir L alt modülü vardır. Bu durumda $S = \{L < M \mid Rm + L = M\}$ kümesi boştan farklıdır. Bu küme kümelerdeki kapsama bağıntısına göre bir sıralı kümedir. K, S nin bir zinciri ve $C = \bigcup_{B \in K} B$ olsun. Bu takdirde C, M nin bir alt modülüdür. $M \neq C$ olduğunu gösterelim. $M = C$ olduğunu kabul edelim. $m \in C = \bigcup_{B \in K} B$ için $m \in B$ olacak şekilde en az bir $B \in K \subseteq S$ mevcuttur. Buradan $B = Rm + B = M$ olur. Bu ise

$B \in S$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $M \neq C$ dir. C nin S de K nın bir üst sınırı olduğu açıktır. Dolayısıyla Zorn lemması gereği S en az bir P maksimal elemanı içerir. Burada P, M nin bir maksimal alt modülüdür. $P \in S$ olduğundan $Rm + P = M$ ve P maksimal olduğundan $m \notin P$ dir. Bu ise $m \in Rad(M)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $Rm \ll M$dir.

Sonuç 2.9.9: $Rad(M) = 0$ ise, M nin 0 dan başka küçük alt modülü yoktur.

Önerme 2.9.10: M bir modül olsun. Eğer M nin her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanırsa $Rad(M) \ll M$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $Rad(M) + L = M$ olacak şekilde M nin bir L alt modülünü alalım. Hipotez gereği $L \subseteq K$ olacak şekilde bir K maksimal alt modülü mevcut olup, $M = Rad(M) + K = K$ çelişkisi elde edilir. O halde $L = M$ olmalıdır. Sonuç olarak, $Rad(M) \ll M$ dir.

Sonuç 2.9.11: M sonlu üretilmiş bir modül ise $\mathrm{Rad(M)} \ll \mathrm{M}$ dir (Wisbauer, 1991).

Sonuç 2.9.12: M sonlu üretilmiş bir modül ise M nin herhangi sayıdaki küçük alt modülünün toplamı da M de küçüktür (Wisbauer, 1991).

2.10. Tümlenmiş Modüller

Tanım 2.10.1: M bir modül ve U, M nin bir alt modülü olsun. Eğer V alt modülü $U + L = M$ olacak şekildeki L alt modüllerinin ailesinin bir minimal elemanı ise V ye U nun M de bir tümleyeni denir (Wisbauer, 1991).

Önerme 2.10.2: $U, V \leq M$ alt modülleri için V nin U nun M de bir tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: (⇒) V, U nun M de bir tümleyeni olsun. O halde $U + V = M$ dir. Bir $X \leq V$ için $U \cap V + X = V$ olsun. Bu durumda $U + (U \cap V + X) = U + V = M$ olup buradan $U + X = M$ bulunur. $X \leq V$ olduğundan V nin gereği $X = V$ elde edilir. Böylece $U \cap V \ll V$ dir.
(⇐) $U + V = M$ ve $U \cap V \ll V$ olsun. $U + X = M$ koşulunu sağlayan her $X \leq V$ alt modülü için $X = V$ olduğunu gösterelim. $U + X = M$ eşitliğinin her iki tarafının V ile arakesiti alınırsa modüler kuraldan

$$\mathrm{V} = M \cap V = (U + X) \cap V = \mathrm{X} + (\mathrm{U} \cap \mathrm{V})$$

elde edilir. $U \cap V \ll V$ olduğundan $X = V$ bulunur.

Önerme 2.10.3: $\boldsymbol{M}$ bir modül olsun. $U, V \leq M$ için V, U nun M de bir tümleyeni ve $W \leq U$ olmak üzere $W + V = M$ ise V, W nın da bir tümleyenidir (Wisbauer, 1991).

İspat: Bir $X \leq V$ alt modülü için $W + X = M$ olsun. $W \leq U$ olduğundan $U + X = M$ olur. V, U nun M de bir tümleyeni olduğundan V nin minimalliği gereği $X = V$ bulunur.

Önerme 2.10.4: M bir modül ve V, U nun M de bir tümleyeni olsun. $K \ll M$ ise V, $U + K$ nın da M de bir tümleyenidir (Wisbauer, 1991).

İspat: V, U nun M de bir tümleyeni ise $U + V = M$ dir ve dolayısıyla $U + K + V = M$ dir. Bir $X \leq V$ için $(U + K) + X = M$ olsun. $K + (U + X) = M$ ve $K \ll M$ olduğundan $U + X = M$ bulunur. V, U nun M de bir tümleyeni olduğundan V nin minimalliği gereği $X = V$ olmalıdır.

Önerme 2.10.5: V, U nun M de bir tümleyeni ve $K \ll M$ ise $K \cap V \ll V$ dir (Wisbauer, 1991).

İspat: Bir $X \leq V$ için $K \cap V + X = V$ olsun. Buradan $U + K \cap V + X = U + V = M$ olup ve $K \ll M$ olduğundan Önerme 2.9.2 ile $K \cap V \ll M$ olup $U + X = M$ yazılabilir. V nin minimalliği gereği $X = V$ elde edilir. Dolayısıyla $K \cap V \ll V$ dir.

Tanım 2.10.6: M bir modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ koşulunu gerçekleyen M nin her V alt modülü için U nun M de V tarafından kapsanan bir tümleyeni varsa U ya M de bir bol tümleyene sahiptir denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.10.7: Bir M modülünün her alt modülü M de bir tümleyene sahipse, M ye tümlenmiş modül, M nin her alt modülü M de bol tümleyene sahipse M ye bol tümlenmiş modül denir (Wisbauer, 1991).

Ayrıca M nin her dual sonlu alt modülü M de bir tümleyene sahip ise M ye dual sonlu tümlenmiş modül denir (Alizade vd, 2001).

M bol tümlenmiş bir modül ise tümlenmiş olacağı açıktır. Ayrıca her tümlenmiş modül de dual sonlu tümlenmiştir. Sonlu üretilmiş bir modülün her alt modülü dual sonlu olduğundan her sonlu üretilmiş dual sonlu tümlenmiş modül tümlenmiştir.

Yardımcı Teorem 2.10.8: M bir modül, M_1 ve U, M nin alt modülleri ve M_1 tümlenmiş olsun. $M_1 + U$ nun M de bir tümleyeni varsa U nun da bir tümleyeni vardır (Wisbauer, 1991).

İspat: $X,\ M_1+U$ nun M de bir tümleyeni; $Y,\ M_1\cap(U+X)$ alt modülünün M_1 deki tümleyeni olsun. Bu takdirde $M=M_1+U+\mathrm{X},\quad (M_1+U)\cap X\ll X$ ve $M_1=\big(M_1\cap(U+X)\big)+\mathrm{Y},\ \big(M_1\cap(U+X)\big)\cap\mathrm{Y}\ll\mathrm{Y}$ elde edilir. Buradan $M=M_1+U+\mathrm{X}=\big(M_1\cap(U+X)\big)+\mathrm{Y}+\mathrm{U}+\mathrm{X}=\mathrm{U}+(\mathrm{X}+\mathrm{Y})$ ve Önerme 2.9.2 yardımıyla

$U\cap(X+Y)\le X\cap(U+Y)+Y\cap(U+X)\le X\cap(U+M_1)+Y\cap(U+X)\ll X+Y$ olduğundan $X+Y,\ U$ nun M de bir tümleyenidir.

Teorem 2.10.9: M bir modül ve $M_1,\ M_2\le M$ için $M=M_1+M_2$ olsun. M_1 ile M_2 tümlenmiş ise M de tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: $U,\ M$ nin bir alt modülü olsun. 0, M nin açıkça bir tümleyenidir ve $M=M_1+M_2+U$ eşitliği ile M_1 in tümlenmiş olduğu göz önüne alınırsa Yardımcı Teorem 2.10.8 gereği $M_2+U,\ M$ de bir tümleyene sahiptir. M_2 tümlenmiş ve $M_2+U,\ M$ de bir tümleyene sahip olduğundan Yardımcı Teorem 2.10.8 den U da tümlenmiştir.

Teorem 2.10.10: M modülü tümlenmiş ise M nin her bölüm modülü de tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

İspat: $M/N,\ M$ nin bir bölüm modülü ve $U/N\le M/N$ olsun. M tümlenmiş olduğundan $U\le M$ nun M de bir V tümleyeni vardır. $M=U+V$ olduğundan $M/N=(V/N)+(V+N)/N$ dir. Ayrıca bir $K/N\le(V+N)/N$ için $(U/N)\cap((V+N)/N)+(K/N)=(V+N)/N$ olsun Modüler kural gereği $(V+N)/N=(U\cap(V+N))/N+(K/N)=(N+U\cap V+K)/N$ olduğundan $N+U\cap V+K=V+N$ elde edilir. $U\cap V\ll V$ olduğundan Önerme 2.9.3 ile $N+K=V+N$ ve $N\le K$ olduğundan $K=V+N$ olur. Böylece $K/N=(V+N)/N$ olup $(V+N)/N$, U/N nin M/N de bir tümleyenidir.

Sonuç 2.10.11: Tümlenmiş bir modülün homomorfik görüntüsü de tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.10.12: Bir M modülünün her dual sonlu alt modülü M nin bir direkt toplam terimi olacak şekilde tümleyene sahip ise M ye $\oplus$-dual sonlu tümlenmiş modül denir (Çalışıcı ve Pancar, 2004).

2.11. Yarı Mükemmel ve Mükemmel Halkalar ve Modüller

Tanım 2.11.1: M ve N R-modüller olmak üzere $f: M \longrightarrow N$ bir epimorfizma ve $Çek(f) \ll M$ ise f epimorfizmasına küçük epimorfizma denir. Bu durumda M modülüne $f: M \longrightarrow N$ küçük epimorfizması ile birlikte N modülünün bir küçük örtüsü denir. Eğer M projektif ise M modülüne $f: M \longrightarrow N$ küçük epimorfizması ile birlikte N modülünün projektif örtüsü denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.11.2: M bir modül olsun. M nin her bölüm modülü bir projektif örtüye sahip ise M ye yarı-mükemmel modül denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.11.3: R bir halka olsun. ${}_R R$ sol R-modülü yarı-mükemmel ise R halkasına yarı-mükemmel halka denir (Wisbauer, 1991).

Herhangi bir halkanın yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her sonlu üretilmiş modülün projektif örtüye sahip olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.11.4: M bir projektif modül olsun. M nin yarı-mükemmel olması için gerek ve yeter koşul M nin tümlenmiş olmasıdır (Harmancı vd, 1999).

Sonuç 2.11.5: R bir halka olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i. R, yarı-mükemmeldir.

ii. ${}_R R$ sol R-modülü tümlenmiştir.

iii. Her sonlu üretilmiş R-modül tümlenmiştir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.11.6: Birimli bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

i. R yarı mükemmeldir.

ii. Her sonlu üretilmiş serbest R-modül $\oplus$-tümlenmiştir.

iii. ${}_R R$ modülü $\oplus$-tümlenmiştir.

iv. ${}_R R$ modülü $\oplus$-dual sonlu tümlenmiştir.

v. Her serbest R-modül $\oplus$-dual sonlu tümlenmiştir (Çalışıcı ve Pancar, 2004).

Sonuç 2.11.7: R yarı mükemmel bölme halkası olsun. Bu takdirde her R-modül $\oplus$-dual sonlu tümlenmiştir (Çalışıcı ve Pancar, 2004).

Tanım 2.11.8: R bir halka olsun. Her sol R-modül projektif örtüye sahipse R ye sol mükemmel halka denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.11.9: R halkasının sol mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her sol R-modülün (bol) tümlenmiş olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.11.10: Noetherian bir R halkasının sol mükemmel olması için gerek ve yeter koşul sol Artinian olmasıdır (Kasch, 1982).

Tanım 2.11.11: M bir modül olsun. Eğer M tüm öz alt modüllerini içeren bir en büyük öz alt modüle sahipse M modülüne lokal modül denir. R halkası sol R-modül olarak lokal ise R halkasına lokal halka denir (Wisbauer, 1991).

Önerme 2.11.12: M lokal modül olsun. Bu takdirde M nin tek maksimal alt modülü $Rad(M)$ dir ve $Rad(M) \ll M$ dir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.11.13: M bir modül olsun. Eğer $M \,/\, Rad(M)$ yarı basit ise M modülüne yarı-lokal modül denir. R halkası sol R-modül olarak yarı lokal ise R halkasına yarı lokal halka denir (Facchini, 1998).

Bu bölümün sonunda bir R halkası için aşağıdaki diyagram oluşturulabilir.

$$\begin{array}{ccc} & & \text{Sol mükemmel halka} \\ & & \Downarrow \\ \text{Lokal halka} & \Longrightarrow & \text{Yarı-mükemmel halka} \\ & & \Downarrow \\ & & \text{Yarı-lokal halka} \end{array}$$

2.12. Dedekind Bölgeleri

Tanım 2.12.1: R değişmeli bölge olsun. R halkasının her öz ideali sonlu sayıda asal ideallerin çarpımı şeklinde tek türlü olarak yazılabilirse R halkasına dedekind bölgesi denir. Her esas ideal bölgesi bir dedekind bölgesidir (Hungerford, 1973).

Teorem 2.12.2: R bir dedekind bölgesi olsun. R deki sıfırdan farklı her asal ideal maksimaldir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.12.3: R bir dedekind bölgesi olsun. Bu takdirde R Noetheriandır (Wisbauer, 1999).

Tanım 2.12.4: R lokal dedekind bölgesi olsun. Eğer $_{R}R$ sol R-modülünün her pür alt modülü R nin bir direkt toplam terimi ise, R ye tam yerel Dedekind bölgesi denir (Krylov ve Tuanbaev, 2008).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Singüler Modüller

Tanım 3.1.1: M bir R-modül olmak üzere

$Z(M) = \{x \in M \mid$ en az bir $I \trianglelefteq {}_RR$ için $Ix = 0\}$

kümesi (yani sıfırlayanları ${}_RR$ sol R-modülünde büyük olan M nin elemanlarının kümesi) M nin bir alt modülü olup bu alt modüle M nin singüler alt modülü denir (Goodearl, 1972).

Tanım 3.1.2: M bir modül olsun.
$Z(M) = M$ ise M ye singüler modül;
$Z(M) = 0$ ise M ye non-singüler modül denir (Goodearl, 1976).

Önerme 3.1.3: $N \trianglelefteq M$ ise M / N bölüm modülü singülerdir (Goodearl, 1976).

Böylece, $E(M)$, M modülünün injektif bürümü olmak üzere $E(M) / M$ bölüm modülü daima singülerdir.

Bu önermenin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $M = Z / 6Z$ modülü $N = 2Z / 6Z$, $\mathbb{Z}$-alt modülü için M / N bölüm modülü singülerdir ama $N = 3Z / 6Z$ için $N \cap K = 0$ olduğundan N, M nin büyük alt modülü değildir.

Önerme 3.1.4: M non-singüler bir modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde M / N nin singüler olması için gerek ve yeter koşul $N \trianglelefteq M$ olmasıdır (Goodearl, 1976).

İspat: ($\Leftarrow$): Önerme 3.1.3 den açıktır.
($\Rightarrow$): M / N singüler ve $x \in M$ sıfırdan farklı keyfi bir eleman olsun. Bu takdirde M / N nin singülerliği gereği $Z(M / N) = M / N$ olduğundan her $\bar{x} = x + N \in M / N$ için $I\bar{x} = 0 = N$ olacak şekilde bir $I \trianglelefteq {}_RR$ ideali vardır. Bu ise $Ix \leq N$ olması demektir. M non-singüler olduğundan $Ix \neq 0$ dır. (Aksi takdirde, $I \trianglelefteq {}_RR$ için $Ix = 0$ olsa $x \in Z(M)$ olup $Z(M) \neq 0$ elde edilir. Bu ise M nin non-singüler olması ile çelişir.) Yardımcı Teorem 2.8.20 ile $N \cap Rx \neq 0$ dır. Sonuç olarak $N \trianglelefteq M$ dir.

Önerme 3.1.5: R bir halka olsun. Bu takdirde

i. Bir M R-modülünün singüler olması için gerek ve yeter koşul her non-singüler N R-modülü için $Hom_R(M, N) = 0$ olmasıdır.

ii. Non-singüler sol R-modüllerin sınıfı alt modüller, direkt çarpımlar, büyük genişlemeler ve genişlemeler altında kapalıdır.

iii. Singüler sol R-modüllerin sınıfı alt modüller, bölüm modülleri ve direkt toplamları ve genişlemeler altında kapalıdır (Goodearl, 1976).

Önerme 3.1.6: M basit bir R-modül olsun. Bu takdirde M singülerdir ya da projektiftir. Ancak ikisi birden olamaz (Goodearl, 1976).

İspat: M basit bir R-modül olduğundan R nin bir P maksimal ideali için $M \cong R \,/\, P$ şeklinde yazılabilir. Kabul edelim ki M singüler olmasın. Bu durumda M nin projektif olduğunu gösterelim. M singüler değilse izomorfu olan $R \,/\, P$ de singüler olamayacağından Önerme 3.1.3 ile $P \ntrianglelefteq R$ dir. Yani $P \cap K = 0$ olacak şekilde R nin sıfır idealinden farklı bir K ideali vardır. Bu durumda P nin maksimalliği göz önüne alınarak $P \oplus K = R$ yazılır. R projektif R-modül olduğundan direkt toplam terimi olan K dolayısıyla $K \cong R \,/\, P \cong M$ projektiftir. Şimdi de M nin projektif iken singüler olamayacağını gösterelim. M projektif ise $M \cong R \,/\, P$ ve $0 \longrightarrow P \longrightarrow R \longrightarrow R \,/\, P \longrightarrow 0$ kısa tam dizisinin parçalanabilir olduğu göz önüne alınırsa $R = P \oplus K$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir K ideali vardır. O halde $P \cap K = 0$ olacağından $P \ntrianglelefteq R$ dir. Dolayısıyla $R \,/\, P \cong M$ singüler değildir.

Sonuç 3.1.7: Her non-singüler yarı basit modül projektiftir.

İspat: M yarı basit bir R-modül olsun. Tanım gereği M basit modüllerin bir toplamı olarak yazılacağından her $\alpha \in I$ için S_α lar basit alt modül olmak üzere $M = \oplus S_\alpha$ şeklindedir. M non-singüler olduğundan Önerme 3.1.5 ile her bir direkt toplam terimi olan S_α lar da non-singülerdir ve dolayısıyla Önerme 3.1.6 dan projektiftir. Sonuç olarak $M = \oplus S_\alpha$ projektiftir.

Önerme 3.1.8: Bir N modülünün non-singüler olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir M singüler modülü için $Hom_R(M, N) = 0$ olmasıdır (Goodearl, 1976).

İspat: ($\Longrightarrow$): M singüler ve N non-singüler birer modül olmak üzere $f\colon M \longrightarrow N$ bir modül homomorfizması olsun. M singüler olduğundan $Z(M) = M$ ve N non-singüler olduğundan $Z(N) = 0$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $f(M) = f\big(Z(M)\big) \leq Z(N) = 0$ dır. Yani $f(M) = 0$ elde edilir ki bu durumda $f = 0$ olup $Hom_R(M, N) = 0$ dır.

($\Longleftarrow$): Herhangi bir M singüler modülü için $Hom_R(M, N) = 0$ olsun. Bu durumda özel olarak $Z(N) \leq N$ singüler alt modülü için de $Hom_R(Z(N), N) = 0$ dır.

$i: Z(N) \longrightarrow N$ içerme dönüşümü göz önüne alınırsa bu dönüşüm sıfır homomorfizma olacağından $i\big(Z(N)\big) = Z(N) = 0$ olup N nin non-singülerliği elde edilmiş olur.

3.2. $\boldsymbol{\delta}$-Küçük Alt Modüller

Teorem 3.2.1: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer M nin $M \,/\, X$ singüler olacak şekildeki her X alt modülü olmak üzere $N + X = M$ olması $X = M$ olmasını gerektiriyorsa N ye M de δ-küçüktür denir ve bu durum $N \ll_\delta M$ ile gösterilir (Zhou, 2000).

Örnekler:

- M nin her küçük alt modülü M de δ-küçüktür.
- M nin non-singüler yarı basit her alt modülü M de δ-küçüktür:

$N \leq M$ non-singüler yarı basit bir alt modül ve $M \,/\, X$ singüler olacak şekildeki bir $X \leq M$ alt modülü için $N + X = M$ olsun. Bu takdirde, $M \,/\, X = (N + X) \,/\, X \cong N \,/\, (N \cap X)$ bölüm modülü de singülerdir. Önerme 3.1.4 gereği N non-singüler olduğundan $N \cap X \trianglelefteq N$ dir. $N \cap X \leq N$ alt modülü için N yarı basit olduğundan $(N \cap X) \oplus K = N$ yani $(N \cap X) + K = N$ ve $(N \cap X) \cap K = \{0\}$ olacak şekilde bir $K \leq N$ vardır. Ancak, $N \cap X \trianglelefteq N$ olduğundan $K = 0$ olup $N \cap X = N$ elde edilir. Böylece $N \leq X$ olur bu ise $X = M$ olması demektir. Sonuç olarak $N \ll_\delta M$ dir.

- Singüler bir modülün δ-küçük alt modülleri küçük alt modüllerdir:

M singüler bir modül, $N \leq M$ δ-küçük alt modülü ve bir $X \leq M$ için $N + X = M$ olsun. Singüler bir modülün bölüm modülü de singüler olduğundan $M \,/\, X$ singüler olup $N \ll_\delta M$ olduğundan $X = M$ olmalıdır. $N \ll M$ dir.

- $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ Prüfer grubunu göz önüne alalım. M nin her öz alt modülü δ-küçüktür.
- R yarı basit halka ve M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. M nin sıfırdan farklı her N alt modülü δ-küçük olmasına karşılık sıfır alt modül haricinde hiçbir alt modülü küçük değildir.

Yardımcı Teorem 3.2.2: $N \leq M$olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

i. $N \ll_\delta M$.

ii. Bir $X \leq M$ alt modülü için $X + N = M$ ise bu takdirde projektif yarı basit bir $Y \leq N$ alt modülü için $M = X \oplus Y$ dir.

iii. $X + N = M$ ise M / X projektiftir (Tribak, 2012).

Lemma 3.2.3: M bir R-modül olsun.

i. $K \leq N$ olmak üzere M nin N, K ve L alt modülleri için

a. $N \ll_\delta M \Leftrightarrow K \ll_\delta M$ ve $N / K \ll_\delta M / K$.

b. $N + L \ll_\delta M \Leftrightarrow N \ll_\delta M$ ve $L \ll_\delta M$.

ii. $K \ll_\delta M$ ve $f: M \longrightarrow N$ bir homomorfizma ise $f(K) \ll_\delta N$ dir. Özel olarak, $K \ll_\delta M \subseteq N$ ise $K \ll_\delta N$.

iii. $K_1 \leq M_1 \leq M$, $K_2 \leq M_2 \leq M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. $K_1 \oplus K_2 \ll_\delta M \Leftrightarrow K_1 \ll_\delta M_1$ ve $K_2 \ll_\delta M_2$.

iv. $K \leq N \leq M$ ve N, M nin bir direkt toplam terimi olsun. $K \ll_\delta M$ ise $K \ll_\delta N$ (Zhou, 2000.; Kızılaslan, 2014; Al-Takhman, 2007).

İspat:

i. a) ($\Longrightarrow$): $N \ll_\delta M$ olsun. M / X singüler olacak şekildeki bir $X \leq M$ alt modülü için $K + X = M$ olsun. $K \leq N$ olduğundan $N + X = M$ yazılabilir. M / X singüler ve $N \ll_\delta M$ olduğundan $X = M$ dir. Dolayısıyla $K \ll_\delta M$ elde edilir. Diğer taraftan, $(M / K) / (X / K) \cong M / X$ singüler olacak şekildeki bir $X / K \leq M / K$ için $(N / K) + (X / K) = M / K$ olsun. Bu durumda $N + X = M$ olup M / X singüler ve $N \ll_\delta M$ olduğundan $X = M$ olur. Bu durumda $X / K = M / K$ olup ${}^{N}/_{K} \ll_\delta {}^{M}/_{K}$ dır.

($\Longleftarrow$): $K \ll_\delta M$ ve $N / K \ll_\delta M / K$ olsun. M / X singüler olacak şekildeki bir $X \leq M$ alt modülü için $N + X = M$ ise $(N + X) / K = M / K$ olup buradan $N / K + (X + K) / K = M / K$ yazılabilir. M / X singüler olduğundan $(M/X) / (X + K)/X \cong M / X + K$ bölüm modülü de singüler olup $N / K \ll_\delta M / K$ olduğundan $(X + K) / K = M / K$ yani $X + K = M$ dir. Ayrıca $K \ll_\delta M$ ve M / X singüler olduğundan $X = M$ dir. Dolayısıyla $N \ll_\delta M$ dir.

b) ($\Longrightarrow$): $N + L \ll_\delta M$ olsun. M / X singüler olacak şekildeki bir $X \leq M$ alt modülü için $N + X = M$ ise $N + L + X = M$ olup $N + L \ll_\delta M$ olduğundan $X = M$ dir. Dolayısıyla $N \ll_\delta M$ dir. Benzer şekilde $L \ll_\delta M$ olduğu gösterilebilir.

($\Longleftarrow$): $N \ll_\delta M$ ve $L \ll_\delta M$ olsun. M / X singüler olacak şekildeki bir $X \leq M$ alt modülü için $(N + L) + X = M$ ise $N + (L + X) = M$ yazılabilir. M / X singüler olduğundan $(M/X) / (X + L)/X \cong M / X + L$ bölüm modülü de singüler olup

$N \ll_\delta M$ olduğundan $L + X = M$ elde edilir. Ayrıca $L \ll_\delta M$ olduğundan $X = M$ dir. Dolayısıyla $N + L \ll_\delta M$ dir.

ii. $K \ll_\delta M$ ve $f: M \longrightarrow N$ bir homomorfizma olsun. $N\,/\,X$ singüler olacak şekildeki bir $X \leq N$ alt modülü için $f(K) + X = N$ ise her $m \in M$ için $f(m) \in N$ olduğundan $\exists\, k \in K$ ve $\exists\, x \in X$ için $f(m) = f(k) + x$ olup $m - k \in f^{-1}(X)$ dolayısıyla $m \in K + f^{-1}(X)$ olur. Buradan $M = K + f^{-1}(X)$ dir. $K \ll_\delta M$ olduğundan $K' \leq K$ olacak şekilde projektif yarı basit K' alt modülü için $M = K' \oplus f^{-1}(X)$ dir. Bu durumda $K' \cong M/f^{-1}(X)$ non-singülerdir. $N\,/\,X$ singüler ve $M/f^{-1}(X)$ non-singüler olduğundan $Hom(\,N\,/\,X\,, M/f^{-1}(X)\,) = 0$ dır.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] & N \arrow[r] & N/X \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & f^{-1}(X) \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r, "0"] \arrow[u] & M/f^{-1}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dolayısıyla yukarıdaki diyagram da göz önüne alınırsa $M = f^{-1}(X)$ olmalıdır. Böylece $f(K) \subseteq f(M) \subseteq X \cap Gör(f) \subseteq X$ olup $X = N$ elde edilir. Ayrıca, $f: M \longrightarrow N$ içerme dönüşümü olsun. $K \ll_\delta M$ ise $f(K) = K \ll_\delta N$ dir.

iii. ($\Longrightarrow$): $K_1 \subseteq M_1 \subseteq M,\ K_2 \subseteq M_2 \subseteq M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ ve $K_1 \oplus K_2 \ll_\delta M$ olsun. $\Pi_1: M = M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_1$ kanonik projeksiyon olmak üzere $K_1 \oplus K_2 \ll_\delta M$ ve homomorfizma altında δ-küçüklük korunuyor olduğundan $\Pi_1(K_1 \oplus K_2) = K_1 \ll_\delta M_1$ elde edilir. Benzer şekilde, $\Pi_2: M = M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2$ kanonik projeksiyonu göz önüne alınırsa $K_2 \ll_\delta M_2$ elde edilir.

($\Longleftarrow$): $K_1 \ll_\delta M_1$ ve $K_2 \ll_\delta M_2$ olsun. Bu durumda $K_1 \ll_\delta M$ ve $K_2 \ll_\delta M$ dir. Sonuç olarak $i.$ koşulu (b) şıkkından, $K_1 \oplus K_2 = K_1 + K_2 \ll_\delta M$ elde edilir.

iv. $M = N \oplus S,\ N = K + L$ ve $N\,/\,L$ singüler olsun. Bu durumda $M = (K + L) \oplus S$ dir. Diğer taraftan $M\,/\,(L \oplus S) = (N \oplus S)/(L \oplus S) = N\,/\,L$ singüler ve $K \ll_\delta M$ olduğundan $M = L \oplus S$ dir. Buradan $N = L$ olup $K \ll_\delta N$ elde edilir.

Tanım 3.2.4: φ tüm singüler basit modüllerin ailesi olmak üzere bir M modülü için $\delta(M) = \cap\,\{N \leq M \mid M\,/\,N \in \varphi\}$ şeklinde tanımlanır (Zhou, 2000).

Lemma 3.2.5: M ve N modülleri verilsin.

i. $\delta(M) = \sum\{L \leq M \mid L <<_\delta M\}$.

ii. $f: M \longrightarrow N$ modül homomorfizması için $f(\delta(M)) \subseteq \delta(N)$ dir. Dolayısıyla $\delta(M)$, M nin tam değişmez alt modülüdür ve $M\delta(R) \subseteq \delta(M)$ dir.

iii. $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise bu takdirde $\delta(M) = \bigoplus_{i \in I} \delta(M_i)$ dir.

iv. Eğer M nin her öz alt modülü M nin bir maksimal alt modülünde içeriliyorsa bu takdirde $\delta(M)$, M nin en büyük δ-küçük alt modülüdür (Zhou, 2000).

Not 3.2.6: M sonlu üretilmiş bir modül ise $\delta(M) \ll_\delta M$ dir.

Önerme 3.2.7: M, $\delta(M) = M$ koşulunu gerçekleyen bir yerelimsi projektif modül ise M projektif yarı basittir (Aydoğdu, 2013).

Önerme 3.2.8: M sıfırdan farklı bir modül olsun. M nin basit projektif direkt toplam terimi yoksa δ-küçük alt modülleri ile küçük alt modülleri çakışır (Tribak, 2015).

Önerme 3.2.9: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

i. M R-modülünün her N alt modülü için $N \ll_\delta M \Leftrightarrow N \ll M$.

ii. R nin her I ideali için $I \ll_\delta {}_R R \Leftrightarrow I \ll {}_R R$.

iii. Her basit R-modül singülerdir.

iv. R nin her maksimal ideali büyüktür (Tribak, 2015).

Sonuç 3.2.10: R her basit modülü singüler olan bir halka olsun. M bir R-modül, $N \leq M$ ve K, M de N nin bir δ-tümleyeni ise K, M de N nin bir tümleyenidir (Tribak, 2015).

Sonuç 3.2.11: R her maksimal ideali R de büyük olan bir halka olsun. Bu takdirde her δ-tümlenmiş modül tümlenmiştir (Tribak, 2015).

Tanım 3.2.12: M bir modül olsun. M nin her öz alt modülü M de δ-küçük ise M ye δ-oyuk modül denir (Üngör ve ark., 2012).

Tanım 3.2.13: M bir modül olsun. $\delta(M) \ll_\delta M$ ve $\delta(M), M$ nin maksimal alt modül ise M ye δ-lokal modül denir (Tribak, 2012; Tribak, 2013).

3.3. Projektif δ-Örtüler

Tanım 3.3.1: M bir modül, P bir projektif modül ve $f: P \longrightarrow M$ homomorfizması $Çek(f) \ll_\delta P$ koşulunu gerçekleyen bir epimorfizma ise (P, f) ikilisine M modülünün projektif δ-örtüsü denir (Zhou, 2000).

Bir M modülünün her projektif örtüsü aynı zamanda projektif δ-örtüdür.

Lemma 3.3.2: $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ ve her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $p_i : P_i \longrightarrow M_i$ birer projektif δ-örtü olsun. $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$ olmak üzere $p = \oplus\, p_i : P \longrightarrow M$ bir projektif δ-örtüdür (Zhou, 2000).

İspat: Her i için p_i ler birer küçük epimorfizma olduğundan $Çek(p_i) \ll_\delta P_i$ olup $Çek(p) = \oplus\, Çek(p_i) \ll_\delta \oplus\, P_i = P$ dir. Ayrıca her $i = 1, 2, \ldots, n$ için P_i ler birer projektif R-modül olduğundan $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \ldots \oplus P_n$ de projektif R-modüldür. Sonuç olarak $p = \oplus\, p_i : P \longrightarrow M$, M nin bir projektif δ-örtüsüdür.

Yardımcı Teorem 3.3.3: $p : P \longrightarrow M$ projektif δ-örtü, Q bir projektif modül, $q : Q \longrightarrow M$ epimorfizma olsun. Bu durumda P ve Q nun aşağıdaki koşulları gerçekleyen $P = A \oplus B$ ve $Q = X \oplus Y$ ayrışımları vardır

i. $A \cong X$,

ii. $p|_A : A \longrightarrow M$ projektif δ-örtüdür,

iii. $q|_X : X \longrightarrow M$ projektif δ-örtüdür,

iv. B projektif yarı basit modül olmak üzere $B \subseteq Çek(p)$ ve $Y \subseteq Çek(q)$ (Zhou, 2000).

Lemma 3.3.4: P bir projektif modül ve $N \leq P$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i. $P\,/\,N$ projektif δ-örtüye sahiptir.

ii. $P_1 \leq N$, $P_2 \cap N \ll_\delta P$ ve $P = P_1 \oplus P_2$ olacak şekildeki $P_1, P_2 \leq P$ alt modülleri vardır (Zhou, 2000).

İspat: $(i) \Longrightarrow (ii)$: $q : Q \longrightarrow P\,/\,N$ projektif δ-örtü ve $p : P \longrightarrow P\,/\,N$ kanonik epimorfizma olsun. Q projektif olduğundan aşağıdaki

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "q"] & \\ P \arrow[r, "p"] & P\,/\,N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli kılacak şekilde bir h homomorfizması vardır. $q : Q \longrightarrow P\,/\,N$ projektif δ-örtü, P bir projektif modül, $p : P \longrightarrow P\,/\,N$ kanonik epimorfizma olmak üzere Yardımcı teorem 3.3.3 gereği P nin $p|_{P_1} : P_1 \longrightarrow P\,/\,N$ projektif δ-örtü ve $P_2 \subseteq Çek(p)$ olacak şekilde $P = P_1 \oplus P_2$ ayrışımı mevcuttur. Üstelik $Çek\big(p|_{P_1}\big) = P_1 \cap N \ll_\delta P_1 \leq P$ yani $P_1 \cap N \ll_\delta P$ ve $P_2 \subseteq Çek(p) = N$ olup istenen elde edilir.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: $P = P_1 \oplus P_2$ ve P projektif olduğundan direkt toplam terimi olan P_2 de projektif olup $p|_{P_2}: P_2 \longrightarrow P\ /\ N$ kanonik epimorfizması için $Çek(p|_{P_2}) = P_2 \cap N \ll_\delta P$ ve P_2 direkt toplam terimi olduğundan $Çek(p|_{P_2}) \ll_\delta P_2$ dir. Sonuç olarak $(P_2, p|_{P_2})$ ikilisi $P\ /\ N$ nin projektif δ-örtüsüdür.

Tanım 3.3.5: R bir halka olsun. Her R-modül projektif δ-örtüye sahipse R ye δ-mükemmel halka denir. Eğer her basit R-modül projektif δ-örtüye sahipse R ye δ-yarı mükemmel halka denir (Zhou, 2000). Her mükemmel halka δ-mükemmeldir. Yarı mükemmel halkalar ve δ-mükemmel halkalar δ-yarı mükemmeldir.

Teorem 3.3.6: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

i. R δ-yarı mükemmel halkadır.
ii. Her sonlu üretilmiş R-modül projektif δ-örtüye sahiptir.
iii. R nin her I sağ ideali $e = e^2 \in R$ ve $S \subseteq \delta(R)$ olmak üzere $I = eR \oplus S$ şeklinde yazılır.
iv. $R\ /\ \delta(R)$ yarı basit halkadır ve idempotentler $\delta(R)$ moduna yükseltgenir.
v. $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ idempotentlerinin tam ortogonel bir sistemi mevcuttur öyle ki; her bir $i = 1, 2, \ldots, n$ için $e_i R$ basit R-modüldür ya da $e_i R$ bir tek büyük maksimal alt modüle sahiptir.
vi. I, R nin sayılabilir çoklukta üretilmiş sağ ideali olmak üzere $R\ /\ I$ bölüm modülü projektif δ-örtüye sahiptir (Zhou, 2000).

Teorem 3.3.7: Bir R halkası aşağıdaki ifadeler denktir:

i. R δ-mükemmel halkadır.
ii. Her yarı basit R-modül bir projektif δ-örtüye sahiptir.
iii. R δ-yarı mükemmel halkadır ve her M R-modülü için $\delta(M) \ll_\delta M$.
iv. $R\ /\ Soc(R)$ sağ mükemmel halkadır ve idempotentler $\delta(R)$ moduna yükseltgenir (Zhou, 2000).

Yardımcı Torem 3.3.8: R bir halka, $J = Jac(R)$ ve $S = Soc(R)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i. R yarı mükemmeldir.
ii. R δ-yarı mükemmeldir ve yarı lokaldir.
iii. R δ-yarı mükemmeldir ve $S\ /\ (S \cap J)$ sonlu üretilmiştir (Büyükaşık ve Lomp, 2010).

3.4. δ-Tümlenmiş ve δ-Lifting Modüller

Lemma 3.4.1: M bir modül, N ve L, M nin birer alt modülü olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

1. $M = N + L$ ve $N \cap L \ll_\delta L$ dir.
2. $M = N + L$ olsun. Bu durumda L nin $L\,/\,K$ singüler olacak şekildeki herhangi bir K öz alt modülü için $M \neq N + K$ dır(Koşan, 2006).

İspat: $(1 \Longrightarrow 2)$: K, L nin $L\,/\,K$ singüler olacak şekilde herhangi bir alt modülü olmak üzere $M = N + K$ olsun. Bu durumda eşitliğin her iki yanının L ile arakesiti alınarak modüler kuralı uygulanırsa $M \cap L = (N + K) \cap L$ buradan da $L = K + (N \cap L)$ elde edilir. $L\,/\,K$ singüler ve $N \cap L \ll_\delta L$ olduğundan $K = L$ bulunur.

$(2 \Longrightarrow 1)$: T, L nin $L\,/\,T$ singüler olacak şekildeki bir alt modülü olmak üzere $L = (N \cap L) + T$ olsun. Bu durumda $M = N + L = N + T$ olup hipotez gereği $T = L$ bulunur. Dolayısıyla $N \cap L \ll_\delta L$ dir.

Tanım 3.4.2: Eğer N ve L bir M modülünün Lemma 3.4.1 deki denk koşulları gerçekleyen alt modülleri iseler L ye N nin M de δ-tümleyeni denir. Eğer M nin her alt modülü M de bir δ-tümleyene sahipse M ye δ-tümlenmiştir denir (Koşan, 2006).

Açıktır ki, her tümlenmiş modül δ-tümlenmiştir ve her singüler δ-tümlenmiş modül de tümlenmiştir.

Aşağıdaki tanım lifting modül (Clark ve diğ., 2006) kavramının bir genelleştirmesi olarak düşünülebilir.

Tanım 3.4.3: M bir modül, $N \leq M$ herhangi bir alt modülü olsun. $A \leq N$ ve $N \cap B \ll_\delta M$ olmak üzere M nin $M = A \oplus B$ şeklinde bir ayrışımı bulunabiliyorsa M ye δ-lifting modül denir (Koşan, 2006).

Önerme 3.4.4: M bir modül $U, V \leq M$ olmak üzere V, U nun M de bir δ-tümleyeni olsun. Bu takdirde

i. $W \leq U$ için $W + V = M$ ise V, W nın M de bir δ-tümleyenidir.
ii. $K \ll_\delta M$ ise $V, U + K$ nın M de bir δ-tümleyenidir.
iii. $K \ll_\delta M$ ise $K \cap V \ll_\delta V$ ve $\delta(V) = V \cap \delta(M)$ dir.
iv. $L \leq U$ için $(V + L)/L$, U/L nin M/L de bir δ-tümleyenidir.

v. $\delta(M) \ll_\delta M$ ve $p: M \longrightarrow M/\delta(M)$ kanonik epimorfizma olmak üzere $M/\delta(M) = p(U) + p(V)$ dir (Nematollahi, 2009).

Lemma 3.4.5: M bir modül, K, L ve H, M nin birer alt modülü olsun. K, L nin M de bir δ-tümleyeni ve L, H ın M de bir δ-tümleyeni ise L, K nın M de bir δ-tümleyenidir (Koşan, 2006).

İspat: K, L nin M de δ-tümleyeni olduğundan $K + L = M$ ve $K \cap L \ll_\delta K$ dır. Buna göre $K \cap L \ll_\delta L$ olduğunu göstermek yeterlidir. L / X singüler olacak şekildeki bir $X \leq L$ için $K \cap L + X = L$ olsun. L, H nın δ-tümleyeni olduğundan $M = L + H = [(K \cap L) + X] + H$ olup $K \cap L \ll_\delta M$ olduğundan Lemma 3.2.2 gereği bir $Y \leq K \cap L$ projektif yarı basit alt modülü için $M = Y \oplus (X + H)$ dır. Eşitliğin her iki yanının L ile arakesiti alınarak Modüler kuralından faydalanılırsa $L = (Y \oplus X) + (L \cap H)$ yazılabilir. $L / (X + Y)$ singüler ve $L \cap H \ll_\delta L$ olduğundan $L = X \oplus Y$ bulunur. L / X singüler ve Y projektif yarı basit olduğundan $L = X$ elde edilir.

Lemma 3.4.6: M δ-tümlenmiş bir modül olsun. Bu durumda $M / \delta(M)$ yarı basittir (Koşan, 2006).

İspat: $\delta(M) \leq N \leq M$ olacak şekildeki M nin bir N alt modülü için M δ-tümlenmiş olduğundan $M = N + X$ ve $N \cap X \ll_\delta X$ olacak şekilde bir $X \leq M$ δ-tümleyeni mevcuttur. Buradan

$$M / \delta(M) = N / \delta(M) + (X + \delta(M)) / \delta(M) \text{ ve}$$

$$(N / \delta(M)) \cap (X + \delta(M)) / \delta(M) = ((N \cap X) + \delta(M)) / (\delta(M)) = \{\delta(M)\}$$

bulunur ki bu $M / \delta(M)$ nin her alt modülünün bir direkt toplam terimi olması demektir. Dolayısıyla, $M / \delta(M)$ yarı basittir.

Teorem 3.4.7: M δ-tümlenmiş bir modül olsun. Bu takdirde M nin $M = M_1 \oplus M_2$ koşulunu gerçekleyen M_1 yarı basit alt modülü ve $\delta(M_2) \trianglelefteq M_2$ olan bir M_2 alt modülü mevcuttur (Koşan, 2006).

İspat: M_1, M nin $\delta(M) \oplus M_1 \trianglelefteq M$ koşulunu gerçekleyen bir alt modülü olsun. Bu takdirde, M δ-tümlenmiş olduğundan $M = M_1 + M_2$ ve $M_1 \cap M_2 \ll_\delta M_2$ olacak şekilde bir $M_2 \leq M$ alt modülü mevcuttur. Aynı zamanda $\delta(M_2) \leq \delta(M)$ olacağından $M_1 \cap M_2 \leq \delta(M)$ dir. Buradan $M = M_1 \oplus M_2$ olduğu görülebilir. Ayrıca, $\delta(M) = \delta(M_2) \trianglelefteq M_2$ dir. Diğer taraftan, M δ-tümlenmiş olduğundan

$M \,/\, \delta(M) = M \,/\, \delta(M_2)$ yarı basittir. Yarı basit bir modülün her bölüm modülü de yarı basit olacağından ve $M_1 \cong M \,/\, M_2 \leq (M/\delta(M)) \,/\, (M_2/\delta(M))$ izomorfluğundan faydalanılarak M_1 in yarı basit olduğu gösterilmiş olur.

Lemma 3.4.8: M π-projektif bir modül olsun. N ve K, M de birbirinin δ-tümleyenleri iseler $N \cap K$ projektif ve yarı basittir. Ayrıca, M projektif ise N ve K da projektiftir (Koşan, 2006).

İspat: M π-projektif R-modül olduğundan her $(n, k) \in N \oplus K$ elemanı için $f\big((n,k)\big) = n + k$ ile tanımlı $f: N \oplus K \longrightarrow N + K = M$ endomorfizması için $Ker(f) = \{(n, -n) \mid n \in N \cap K\}$ olup f ayrışabilir olduğundan $U \cong M$ için $N \oplus K = Ker(f) \oplus U$ şeklinde yazılabilir. $N \cap K \ll_\delta N$, $N \cap K \ll_\delta K$, $Ker(f) \cong N \cap K$ durumları göz önüne alınırsa $Ker(f) \ll_\delta N \oplus K$ olur. O halde, $N \oplus K = Y \oplus U$ olacak şekilde bir $Y \leq Ker(f)$ projektif yarı basit bir alt modül mevcuttur. $Y = Ker(f) \cong N \cap K$ ilişkisi göz önüne alınırsa $N \cap K$ nın projektif yarı basit olduğu gösterilmiş olur.

Lemma 3.4.9: $M = A + B$ olsun. $M \,/\, A$ bir projektif δ-örtüye sahipse B, A nın bir δ-tümleyenini içerir (Koşan, 2006).

İspat: $f: P \longrightarrow M \,/\, A$ projektif δ-örtü ve p$: B \longrightarrow M \,/\, A$ doğal homomorfizma olsun. P projektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dotted, "g"'] & M/A \\ & B \arrow[u, "\mathrm{p}"'] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli yani p$og = f$ olacak şekilde $g: P \longrightarrow B$ homomorfizması vardır. $(\mathrm{p}og)(P) = f(P)$ olduğundan $A + g(P) = M$ ve $A \cap g(P) = g(Çek(f)\,)$ eşitlikleri elde edilebilir. f projektif δ-örtü oduğundan $Çekf \ll_\delta P$ olup buradan g homomorfizması için $g(Çek(f)\,) \ll_\delta g(P)$ olacağından $A \cap g(P) \ll_\delta g(P)$ bulnur. O halde $g(P)$, A nın B içinde bir δ-tümleyenidir.

Önerme 3.4.10: P bir projektif modül olsun. P nin δ-tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul P nin δ-lifting modül olmasıdır (Koşan, 2006).

İspat: ($\Longleftarrow$): Açık.

($\Longrightarrow$): Kabul edelim ki P bir projektif δ-tümlenmiş modül olsun. P nin δ-lifting olduğunu gösterelim. Bunun için (Zhou, 2000, Lemma 2.4) $N \leq P$ keyfi bir alt modül olmak üzere P / N nin projektif δ-örtüye sahip olduğunu göstermek yeterlidir. P nin δ-tümlenmişliği gereği $N + X = P$ ve $N \cap X \ll_\delta X$ olacak şekilde bir $X \leq P$ alt modülü vardır. $\Pi: P \longrightarrow P / N$ doğal homomorfizma ve $\Pi|_X: X \longrightarrow P / N$ kısıtlanış homomorfizması olmak üzere P projektif olduğundan $\Pi|_X\, og = \Pi$ olacak şekilde $g: P \longrightarrow X$ homomorfizması vardır. Buradan kısıtlanış fonksiyonunun tanımı gereği $g(P) + N = P$ olduğu kolaylıkla elde edilebilir. Her iki tarafın X ile arakesiti alınarak modüler kuralı uygulanırsa $X = g(P) + (X \cap N)$ bulunur. $N \cap X \ll_\delta X$ olduğundan projektif yarı basit bir $Y \leq N \cap X$ alt modülü için $X = g(P) \oplus Y$ dir.
Şimdi, $g(P) \cap N \ll_\delta g(P)$ olduğunu gösterlim. P / Z singüler olacak şekildeki her hangi bir $Z \leq P$ için $(g(P) \cap N) + Z = g(P)$ olsun. $g(P) \cap N \leq X \cap N$ ve $N \cap X \ll_\delta X$ olduğundan $X = g(P) \oplus Y = (g(P) \cap N) + Z \oplus Y = \big((X \cap N) + Z\big) \oplus Y = (X \cap N) + (Z \oplus Y)$ olup $X / (Z \oplus Y) \cong ((g(P) \cap N) + Z) / Z = g(P) / Z \leq P / Z$ singülerliği gereği $X = Z \oplus Y = g(P) \oplus Y$ elde edilir ki buradan $Z = g(P)$ bulunur. Sonuç olarak $g(P)$, N nin P de δ-tümleyenidir. Son olarak, $g(P)$ nin projektif olduğunu gösterelim. P δ-tümlenmiş olduğundan $g(P) \leq P$ alt modülü P de bir Q δ-tümleyenine sahiptir. Lemma 3.4.5 gereği $g(P)$, Q nun P de δ-tümleyenidir. Lemma 3.4.8 gereği P projektif ve $g(P)$ ile Q karşılıklı (mutual) δ-tümleyenler olduğundan $g(P)$ projektiftir. $g(P) \cap N \ll_\delta g(P)$ olduğundan $g(P)$, P / N nin projektif δ-örtüsüdür. Dolayısıyla, P nin her bölüm modülü projektif δ-örtüye sahiptir. P modülü δ-liftingdir.

Teorem 3.4.11: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

i. R δ-yarımükemmel bir halkadır.
ii. Her sonlu üretilmiş modül δ-tümlenmiştir.
iii. Her sonlu üretilmiş projektif modül δ-tümlenmiştir.
iv. Her sonlu üretilmiş projektif modül δ-liftingdir.
v. R nin her ideali R de bir δ-tümleyene sahiptir (Koşan, 2006).

İspat: (1) $\Longrightarrow$ (2): M sonlu üretilmiş bir modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde $M = N + M$ ve M / N bir projektif δ-örtüye sahiptir. Böylece Lemma 3.4.9 gereği M, N nin bir δ-tümleyenini içerir. Sonuç olarak, M δ-tümlenmiştir.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Açık.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$: Önerme 3.4.10 dan açık.

$(iv) \Longrightarrow (v)$: Açık.

$(v) \Longrightarrow (i)$: Hipotez gereği, $_RR$ sol R-modülü δ-tümlenmiştir. Önerme 3.4.10 kullanılarak $_RR$ modülünün δ-lifting olduğu kolayca söylenilebilir. Her devirli modül bir projektif δ-örtüye sahiptir. R δ-yarı mükemmel halkadır.

Teorem 3.4.12: Bir R halkası için aşağıdakiler denktir:

i. R δ-mükemmel bir halkadır.
ii. Her R-modül δ-tümlenmiştir.
iii. Her projektif modül δ-tümlenmiştir.
iv. Her projektif modül δ-liftingdir (Koşan, 2006).

Örnekler

- ❖ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modülü için yanızca 0 ve $\mathbb{Z}$ bu modülün δ-tümleyen alt modülleridir ve tek δ-küçük alt modülü, 0 alt modülünün kendisidir.
- ❖ $\mathbb{Z}_8$ δ-mükemmel halka olduğundan üzerindeki her $\mathbb{Z}_8$-modül δ-tümlenmiştir.

Tanım 3.4.13: M bir modül olsun. M nin dual sonlu her alt modülü M de bir δ-tümleyene sahipse M ye dual sonlu δ-tümlenmiş modül denir (Al-Takhman, 2007).

Tanımlarından da kolayca anlaşılacağı üzere her δ-tümlenmiş modül aynı zamanda dual sonlu δ-tümlenmiş olup M sonlu üretilmiş olduğunda tersinin de doğruluğunu söylemek mümkündür.

3.5. Zayıf δ-Tümlenmiş Modüller

Tanım 3.5.1: M bir modül, $U, V \leq M$ olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \ll_\delta M$ ise V ye U nun M de bir zayıf δ-tümleyeni denir.

Eğer M nin her alt modülü M de bir zayıf δ-tümleyene sahipse M ye zayıf δ-tümlenmiş modül denir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

Tanım 3.5.2: M bir modül, $U \leq M$ olsun. $U + V = M$ şartını sağlayan her V alt modülü için U nun $V' \leq V$ olacak şekilde M de bir V' zayıf δ-tümleyeni varsa U ya M de bol zayıf δ-tümleyene sahiptir denir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009). Eğer M nin her alt modülü M de bol zayıf δ-tümleyene sahipse M ye bol zayıf δ-tümlenmiş modül denir.

Yardımcı Teorem 3.5.3: $f: M \longrightarrow N$ bir homomorfizma ve M nin $Çek(f)$ yi kapsayan bir L alt modülü M de zayıf δ-tümleyen ise $f(L)$ de $f(M)$ de bir zayıf δ-tümleyendir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: L, M de K nın zayıf δ-tümleyeni olsun. Bu durumda $M = L + K$ ve $L \cap K \ll_\delta M$ dir. f homomorfizma olduğundan $f(M) = f(L + K) = f(L) + f(K)$ ve Lemma 3.2.3 (ii) özelliği gereği $f(L \cap K) \ll_\delta f(M)$ dir. $Çek(f) \subseteq L$ olduğundan $f(L \cap K) = f(L) \cap f(K) \ll_\delta f(M)$ olup $f(L)$, $f(M)$ de $f(K)$ nın zayıf δ-tümleyenidir.

Önerme 3.5.4: Zayıf δ-tümlenmiş bir modülün homomorfik görüntüsü de zayıf δ-tümlenmiştir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: $f: M \longrightarrow N$ bir homomorfizma ve M zayıf δ-tümlenmiş modül olsun. $X, f(M)$ nin bir alt modülü olmak üzere M zayıf δ-tümlenmiş olduğundan $f^{-1}(X)$, M de bir zayıf δ-tümleyene sahiptir. Yardımcı teorem 3.5.3 den $f(f^{-1}(X)) = X \cap f(M) = X$, $f(M)$ de bir zayıf δ-tümleyene sahiptir.

Sonuç 3.5.5: Zayıf δ-tümlenmiş bir modülün bölüm modülü de zayıf δ-tümlenmiştir.

Tanım 3.5.6: M ve N birer R-modül ve $f: M \longrightarrow N$ bir epimorfizma olsun. Eğer $Çek(f) \ll_\delta M$ ise f ye bir δ-küçük örtü denir (Zhou, 2000).

Lemma 3.5.7: $f: M \longrightarrow N$ δ-küçük örtü ve $L \ll_\delta N$ ise $f^{-1}(L) \ll_\delta M$ dir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: M/T singüler olacak şekilde bir $T \leq M$ için $f^{-1}(L) + T = M$ olsun. Bu durumda $f(f^{-1}(L) + T) = f\left(f^{-1}(L)\right) + f(T) = L \cap Gör(f) + f(T) = L \cap N + f(T) = L + f(T) = N$ dir. $N/f(T)$ singüler ve $L \ll_\delta N$ olduğundan $f(T) = N$ olup buradan $f^{-1}\left(f(T)\right) = f^{-1}(N)$ yani $T + Çek(f) = M$ elde edilir. $f: M \longrightarrow N$ δ-küçük örtü olduğundan $Çek(f) \ll_\delta M$ olup M/T nin singülerliği gereği $T = M$ bulunur.

Lemma 3.5.8: $f: M \longrightarrow N$ δ-küçük örtü ve $f(L)$ N de zayıf δ-tümleyene sahip olacak şekilde M nin bir alt modülü olsun. Bu takdirde L, M de zayıf δ-tümleyene sahiptir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: $f(L), N$ de zayıf δ-tümleyene sahip olduğundan bir $T \leq N$ alt modülü için $f(L) + T = N$ ve $f(L) \cap T \ll_\delta N$ dir. Buradan $f^{-1}(f(L) + T) = f^{-1}(f(L)) + f^{-1}(T) = L + Çek(f) + f^{-1}(T) = L + f^{-1}(T) = M$ ve Lemma 3.5.7 gereği

$L \cap f^{-1}(T) \leq f^{-1}(f(L) \cap T) \ll_\delta f^{-1}(N) = M$ olup $f^{-1}(T)$, L de M nin zayıf δ-tümleyenidir.

Sonuç 3.5.9: Zayıf δ-tümlenmiş bir modülün her δ-küçük örtüsü de zayıf δ-tümlenmiştir.

Lemma 3.5.10: $f: M \longrightarrow N$ ve $g: N \longrightarrow K$ modül homomorfizmaları birer δ-küçük örtü ise $gf: M \longrightarrow K$ bir δ-küçük örtüdür (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: M nin M/T singüler olacak şekilde bir T alt modülü için $Çek(gf) + T = M$ olsun. $f(Çek(gf) + T) = f(M) = N$ olup $f(Çek(gf)) \subseteq Çek(g)$ olduğundan $Çek(g) + f(T) = N$ yazılır. $N/f(T)$ singüler ve $Çek(g) \ll_\delta N$ olduğundan $f(T) = N = f(M)$ dir. Buradan $T + Çek(f) = M + Çek(f) = M$ olmak üzere $Çek(f) \ll_\delta M$ ve M/T singüler olduğundan $T = M$ elde edilir.

Önerme 3.5.11: M bir modül, K, M nin bir alt modülü olsun. K, M de bir N alt modülünün zayıf δ-tümleyeni ve $T \ll_\delta M$ ise K, M de $N + T$ nin de bir zayıf δ-tümleyenidir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: f ve g homomorfizmaları $f: M \longrightarrow M/N \oplus M/K$, $f(m) = (m + N, m + K)$ ve g: $M/N \oplus M/K \longrightarrow M/(N \oplus T) \oplus M/K$, $g(m + N, m' + K) = (m + N \oplus T, m + K)$ şeklinde tanımlansın. $M = N + K$ olduğundan f bir epimorfizmadır. K, M de N nin zayıf δ-tümleyeni olduğu için $Çek(f) = N \cap K \ll_\delta M$ dir. Dolayısıyla f bir δ-örtüdür. Diğer taraftan $Çek(g) = (N + T)/N \oplus 0$ dır ve $\pi: M \longrightarrow M/N$ doğal epimorfizması için $T \ll_\delta M$ olduğundan $(N + T)/N = \pi(T) \ll_\delta \pi(M) = M/N \oplus M/K$ dır. Bu yüzden g bir δ-örtüdür. Lemma 3.5.10 dan gf de δ-örtü olup $(N + T) \cap K = Çek(gf) \ll_\delta M$ dir. Ayrıca $M = N + K = (N + T) + K$ olduğundan K, M de $N + T$ nin bir zayıf δ-tümleyenidir.

Yardımcı Teorem 3.5.12: M bir modül ve $K, M_1 \leq M$ olsun. M_1 zayıf δ-tümlenmiş ve $M_1 + K$, Mde zayıf δ-tümleyene sahip ise K, M de bir zayıf δ-tümleyene sahiptir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: $M_1 + K, M$ de bir $N \leq M$ zayıf δ-tümleyene sahip ise $M_1 + K + N = M$ ve $(M_1 + K) \cap N \ll_\delta M$ dir. M_1 zayıf δ-tümlenmiş olduğundan $(K + N) \cap M_1$ alt modülü de M_1 de bir L zayıf δ-tümleyenine sahiptir. Buradan $M = M_1 + K + N = M_1 \cap L + (K + N) + K + N = K + L + N$ dir. Ayrıca $(K + N) \cap L = [(K + N) \cap M_1] \cap L \ll_\delta M_1$ olup

$K \cap (L+N) \leq [(K+L) \cap N] + [(K+N) \cap L] \leq [(K+M_1) \cap N] + [(K+N) \cap L] \ll_\delta M$ elde edilir. Sonuç olarak $N+L,\ K$ nın M de bir zayıf δ-tümleyenidir.

Önerme 3.5.13: M_1 ve M_2 zayıf δ-tümlenmiş modül ve $M = M_1 + M_2$ ise M de zayıf δ-tümlenmiştir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: M nin her N alt modülü için $M_1 + (M_2 + N), M$ de 0 aşikar zayıf δ-tümleyenine sahiptir. M_1 zayıf δ-tümlenmiş olduğundan Yardımcı teorem 3.5.12 gereği $M_2 + N, M$ de bir zayıf δ-tümleyene sahiptir. M_2 zayıf δ-tümlenmiş olduğundan yine Yardımcı teorem 3.5.12 gereği N, M de bir zayıf δ-tümleyene sahiptir.

Sonuç 3.5.14: Zayıf δ-tümlenmiş modüllerin her sonlu toplamı da zayıf δ-tümlenmiştir.

Önerme 3.5.15: Zayıf δ-tümlenmiş bir modülün her tümleyen alt modülü ve her direkt toplam terimi de zayıf δ-tümlenmiştir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: M zayıf δ-tümlenmiş bir modül ve $N \leq M$ tümleyen alt modülü olsun. O halde $K \leq M$ alt modülü için $N + K = M$ ve $N \cap K \ll_\delta N$ dir. M zayıf δ-tümlenmiş olduğundan ikinci izomorfizma teoremi gereği $M/K \cong N + K/K \cong N/N \cap K$ bölüm modülü de zayıf δ-tümlenmiştir. $N \cap K \ll_\delta N$ olduğundan $\pi: N \longrightarrow N/N \cap K$ doğal epimorfizması bir δ-küçük epimorfizma olup N küçük örtüsü de zayıf δ-tümlenmiştir.Ayrıca her direkt toplam terimi δ-tümleyen olduğundan zayıf δ-tümlenmiştir.

Teorem 3.5.16: M bir modül, K singüler ve M nin bir N maksimal alt modülünün zayıf δ-tümleyeni olacak şekilde bir alt modülü olsun. Eğer $K + U,\ M$ de bir zayıf δ-tümleyene sahip ise U da M de bir zayıf δ-tümleyene sahiptir (Talebi ve Hamzekolaei, 2009).

İspat: $X,\ K + U$ nun M de bir zayıf δ-tümleyeni olsun. O halde $M = (K + U) + X = (K + X) + U$ ve $X \cap (K + U) \ll_\delta M$ dir. Eğer $K \cap (X + U) \subseteq K \cap N \ll_\delta M$ ise bu takdirde $U \cap (K + X) \leq X \cap (K + U) + K \cap (X + U) \ll_\delta M$ olup sonuçta $K + X, U$ nun M de bir zayıf δ-tümleyenidir. Kabul edelim ki $K \cap (X + U) \nsubseteq K \cap N$ olsun. $K/K \cap N \cong K + N/N = M/N$ olduğundan $K \cap N,\ K$ nın bir maksimal alt modülüdür. Dolayısıyla $K \cap N + K \cap (X + U) = K$ olup $K \cap N \ll_\delta M$ ve $M/(X + U) \cong K/[K \cap (X + U)]$ singüler olduğundan $M = X + U + K = X + U +$

$(K \cap N) + K \cap (X + U) = X + U + K \cap N$ ifadesinden $M = X + U$ elde edilir. $X \cap U \leq X \cap (K + U) \ll_\delta M$ olduğundan X, U nun M de zayıf δ-tümleyenidir.

Tanım 3.5.17: M bir modül olsun. M nin her dual sonlu alt modülü M de bir zayıf δ-tümleyene sahipse M ye dual sonlu zayıf δ-tümlenmiş modül denir ve bu modül kısaca "$\delta - cws$" modül olarak adlandırılır(Eryılmaz, 2017).

Yardımcı Teorem 3.5.18: $f: M \to N$ bir homomorfizma, L, M nin $Çekf$ yi kapsayan ve M de zayıf δ-tümleyen olan bir alt modülü olsun. Bu takdirde $f(L), f(M)$ de bir zayıf δ-tümleyendir (Eryılmaz, 2017).

İspat: L, M de bir K alt modülünün zayıf δ-tümleyeni ise $L + K = M$ ve $L \cap K \ll_\delta M$ dir. Buradan $f(L + K) = f(L) + f(K) = f(M)$ ve $Çek(f) \subseteq L$ olduğundan $f(L) \cap f(K) = f(L \cap K) \ll_\delta f(M)$ dir. Dolayısıyla $f(L)$, $f(M)$ de $f(K)$ nın bir zayıf δ-tümleyenidir.

Önerme 3.5.19: Bir $\delta - cws$ modülün homomorfik görüntüsü de $\delta - cws$ modüldür (Eryılmaz, 2017).

İspat: $f: M \to N$ bir homomorfizma ve M bir $\delta - cws$ modül olsun. $U \leq f(M)$ dual sonlu alt modülü olmak üzere $\psi: M \to f(M)/U$ her $m \in M$ için $\psi(m) = f(m) + U$ ile tanımlı ψ fonksiyonu bir epimorfizma olup $Çek\psi = f^{-1}(U)$ dur. $M/Çek\psi \cong f(M)/U$ olduğundan $M/f^{-1}(U) \cong f(M)/U$ dur. Böylece $M/f^{-1}(U)$ sonlu üretilmiş olup M δ-cws olduğundan $f^{-1}(U), M$ de bir zayıf δ-tümleyendir. Yardımcı teorem 3.5.18 dan $U = f\left(f^{-1}(U)\right)$, $f(M)$ de bir zayıf δ-tümleyendir.

Sonuç 3.5.20: Bir $\delta - cws$ modülün bölüm modülü de $\delta - cws$ dir.

Yardımcı Teorem 3.5.21: M bir R-modül, $U \leq M$ dual sonlu alt modülü ve $N \leq M$ dual sonlu zayıf δ-tümlenmiş alt modülü olsun. $N + U, M$ de zayıf δ-tümleyene sahip ise U da M de zayıf δ-tümleyene sahiptir (Eryılmaz, 2017).

İspat: $X, N + U$ nun M de zayıf δ-tümleyeni olsun. Bu durumda $(N + U) + X = M$ ve $(N + U) \cap X \ll_\delta M$ dir. Ayrıca $U \leq M$ dual sonlu alt modül olduğundan M/U sonlu üretilmiş olup bölüm modülü olan $(M/U)/((X + U)/U)$ sonlu üretilmiştir. $(M/U)/((X + U)/U) \cong M/(X + U) = (N + X + U)/(X + U) \cong N/(N \cap (X + U))$ izomorfluğu gereği $N/(N \cap (X + U))$ da sonlu üretilmiş olup $N \leq M$ dual sonlu zayıf δ-tümlenmiş olduğundan $N \cap (X + U), N$ de bir Y zayıf δ-tümleyenine sahiptir. Yani $N \cap (X + U) + Y = N$ ve $N \cap (X + U) \cap Y = Y \cap (X + U) \ll_\delta N \leq$

M dir. Buradan $M = U + X + N = U + X + [N \cap (X + U)] + Y = U + X + Y$ ve $U \cap (X + Y) \leq [X \cap (Y + U)] + [Y \cap (X + U)] \leq [X \cap (N + U)] + [Y \cap (X + U)] \ll_\delta M$ dir. Sonuç olarak, $X + Y, U$ nun Mde zayıf δ-tümleyenidir.

Teorem 3.5.22: Keyfi sayıda dual sonlu zayıf δ-tümlenmiş modülün toplamı da dual sonlu zayıf δ-tümlenmiştir (Eryılmaz, 2017).

İspat: R bir halka, $\{M_i\}_{i\in I}, M = \sum_{i\in I} M_i$ olacak şekilde dual sonlu zayıf δ-tümlenmiş modüllerin bir ailesi ve $N \leq M$ dual sonlu alt modül olsun. Bu durumda M/N sonlu üretilmiştir ve dolayısıyla $M/N =< \{x_1 + N, x_2 + N, \ldots, x_k + N\} >$ olacak şekilde $x_i \in M, 1 \leq i \leq k$ vardır. Buradan $M = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_k + N$ yazılabilir. Her bir x_i elemanı için $x_i \in \sum_{j\in F_i} M_j$ olacak şekilde I kümesinin F_i sonlu alt kümesi bulunabileceğinden $Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_k \leq \sum_{j\in F} M_j$ olacak şekilde I nın $F = \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ sonlu alt kümesi vardır. O halde $M = \sum_{t=1}^{r} M_{i_t} + N$ yazılabilir. $M = M_{i_1} + (\sum_{t=2}^{r} M_{i_t} + N)$ nin M de 0 (sıfır) zayıf δ-tümleyenine sahip olduğu açıktır. M_{i_1} dual sonlu zayıf δ-tümlenmiş olduğundan $(\sum_{t=2}^{r} M_{i_t} + N)$ Yardımcı Teorem 3.5.21 gereği M de bir zayıf δ-tümleyene sahiptir. Benzer şekilde devam edilerek Yardımcı Teorem 3.5.21 r-defa uygulandığında N nin M de bir zayıf δ-tümleyene sahip olduğu elde edilir.

Önerme 3.5.19 ve Teorem 3.5.22 nin bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.5.23: M $\delta - cws$ modül ise her M-üretilmiş modül de $\delta - cws$ modüldür (Eryılmaz, 2017).

Teorem 3.5.24: M bir $\delta - cws$ modül ve $\delta(M) \leq N$ olsun. Bu takdirde M/N nin her dual sonlu alt modülü bir direkt toplam terimidir (Eryılmaz, 2017).

İspat: $U/N \leq M/N$ dual sonlu alt modül olsun. $(M/N)/(U/N) \cong M/U$ olduğundan U M nin dual sonlu alt modülüdür. M $\delta - cws$ olduğundan U M de bir V zayıf δ-tümleyenine sahiptir. Yani $U + V = M$ ve $U \cap V \ll_\delta M$ dir. $f: M \to M/N$ kanonik epimorfizma olmak üzere $(V + N)/N, U/N$ nin M/N de zayıf δ-tümleyenidir. Ayrıca $U \cap V \ll_\delta M$ olduğundan $U \cap V \leq \delta(M) \leq N$ olup $U/N, M/N$ nin bir direkt toplam terimidir.

Sonuç 3.5.25: M bir $\delta - cws$ modül olsun. $M/\delta(M)$ nin her dual sonlu alt modülü bir direkt toplam terimidir.

Teorem 3.5.26: M bir modül ve $N \ll_{\delta} M$ olsun. M/N bir $\delta - cws$ modül ise M de $\delta - cws$ modülür (Eryılmaz, 2017).

İspat: U, M nin dual sonlu alt modülü olsun. M/U sonlu üretilmiş ve $M/(U+N) \cong (M/U)/((U+N)/U)$ olduğundan $U+N,\ M$ nin dual sonlu alt modülüdür. $(U+N)/N,\ M/N$ nin dual sonlu alt modülü ve $M/N\ \delta - cws$ modül olduğundan bir $X/N \leq M/N$ alt modülü için $(U+N)/N + X/N = M/N$ ve $(U+N)/N \cap X/N = (U \cap X + N)/N \ll_{\delta} M/N$ dir. Buradan $U + X = M$ olup $N \ll_{\delta} M$ olduğundan $U \cap X \leq U \cap X + N \ll_{\delta} M$ dir. Dolayısıyla X, M de U nun zayıf δ-tümleyenidir.

Lomp (1999, Sonuç 3.2), R halkasının yarı lokal olması için gerekli ve yeterli koşulu ${}_{R}R$ sol R-modülünün zayıf tümlenmiş R-modül olması şeklinde ifade etmiştir.

Sonuç 3.5.27: R halkasının δ-yarı lokal olması için gerek ve yeter koşul ${}_{R}R$ sol R-modülünün $\delta - cws$ modül olmasıdır.

İspat: R halkası δ-yarı lokal olsun. Bu durumda $R/\delta(R)$ yarı basittir. Yani her alt modülü bir direkt toplam terimi yani bir δ-tümleyen dolayısıyla zayıf δ-tümleyendir. Buna göre $R/\delta(R)\ \delta - cws$ modüldür. Üstelik $\delta(R) \ll_{\delta} R$ olduğundan Teorem 3.5.26 gereği R de $\delta - cws$ modüldür. Tersine R de $\delta - cws$ modül olsun. Buradan Teorem 3.5.24 gereği $\delta(R) \leq R$ olduğundan $R/\delta(R)$ nin her alt modülü bir direkt toplam terimidir. Yani $R/\delta(R)$ yarı basittir. Bu durumda R halkası δ-yarı lokaldir.

Sonuç 3.5.23 gereği her R-modül ${}_{R}R$-üretilmiş olduğundan aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.5.28: R halkasının δ-yarı lokal olması için gerek ve yeter koşul her R-modülün $\delta - cws$ modül olmasıdır.

3.6. Her Dual Sonlu Genişlemesinde Tümleyene Sahip Modüller

Bir M R-modülü için aşağıdakileri göz önüne alalım.

(E): M her genişlemesinde bir tümleyene sahiptir.

(EE): M her genişlemesinde bol tümleyene sahiptir.

Bu özellikli modüllerin gösterimi ilk olarak 1974 yılında Zöschinger tarafından ortaya konmuş ve aynı çalışma içerisinde (E) ve (EE) özelliğine sahip modüllerin yapısı belirlenmiştir.

Tanım 3.6.1: M bir modül, $m \in M, N \leq M$ ve $m + N = \{m + x \mid x \in N\}$ kümesi M nin bir yan sınıfı olmak üzere $\{C_i\}_{i \in I}$, M nin yan sınıflarının boş kümeden farklı bir ailesi olsun. Eğer I nın boş kümeden farklı her sonlu F alt kümesi için $\bigcap_{i \in F} C_i$ boş kümeden farklı ise $\{C_i\}_{i \in I}$ ailesi sonlu kesişim özelliğine sahiptir denir. Yan sınıflarının sonlu kesişim özelliğine sahip boş kümeden farklı her $\{C_i\}_{i \in I}$ ailesi için $\bigcap_{i \in I} C_i$ boş kümeden farklı ise M modülüne lineer kompakttır denir (Smith, 2000).

Lineer kompakt modüller (EE) özelliğine sahiptir (Zöschinger, 1975).

Lemma 3.6.2: R bir halka, I, R nin bir ideali ve $\bar{R} = R/I$ olsun.

a) M (E) özelliğine sahip bir R-modül ve $MI = 0$ ise M (E) özelliğine sahip bir $\bar{R}$-modüldür.

b) $\bar{R}$ sağ mükemmel halka ve M R-modülü için $MI = 0$ ise M (E) özelliğine sahiptir (Zöschinger, 1975).

Sonuç 3.6.3: Krull boyutu bir olan Noetherian integral bölgesi üzerindeki sınırlı her modül (E) özelliğine sahiptir (Zöschinger, 1975).

Teorem 3.6.4: R değişmeli ve Noetherian bir halka olsun. Yarı basit bir R-modül için aşağıdakiler denktir:

i. M (E) özelliğine sahiptir.
ii. M cebirsel kompakttır.
iii. M nin hemen hemen tüm izotopik bileşenleri sıfırdır (Zöschinger, 1975).

(E) ve (EE) özelliğine sahip modüllerin tanımından yola çıkarak Çalışıcı ve Türkmen bu tip modüllerin bir genelleştirmesi olarak (CE) ve (CEE) özelliğine sahip modülleri şu şekilde tanımlamıştır.

Tanım 3.6.5: M ve N birer R-modül ve $M \leq N$ olsun. Eğer $N \,/\, M$ bölüm modülü sonlu üretilmiş ise N ye M nin dual sonlu genişlemesi denir (Çalışıcı ve Türkmen, 2012).

Tanım 3.6.6: M modülü her dual sonlu genişlemesinde bir tümleyene sahipse M ye (CE) özelliğine sahiptir denir (Çalışıcı ve Türkmen, 2012).

Eğer M her dual sonlu genişlemesinde bol tümleyene sahipse M ye (CEE) özelliğine sahiptir denir.

Teorem 3.6.7: Bir M modülünün (CEE) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul M nin her alt modülünün (CE) özelliğine sahip olmasıdır (Çalışıcı ve Türkmen, 2012).

Sonuç 3.6.8: (CEE) özelliğine sahip bir modülün her alt modülü dual sonlu tümlenmiştir. Ayrıca, (CEE) özelliğine sahip bir modül bol dual sonlu tümlenmiştir.

Teorem 3.6.9: M bir modül olsun. M (CE) özelliğine sahip ise her direkt toplam terimi de (CE) özelliğine sahiptir (Çalışıcı ve Türkmen, 2012).

Teorem 3.6.10: $0 \longrightarrow K \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi verilsin. K ve L, (CE) özelliğine sahip modüller ise M modülü de (CE) özelliğine sahiptir. Ayrıca verilen kısa tam dizi parçalanabilir ise ifadenin tersi de gerçeklenir yani; M (CE) özelliğine sahip bir modül ise bu takdirde K ve L modülleri de de (CE) özelliğine sahiptir (Çalışıcı ve Türkmen, 2012).

Sonuç 3.6.11: $\{M_i \mid i \in I = \{1, 2, \dots, n\}\}$ modüllerinin sonlu sayıdaki ailesi için $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ olsun. M modülünün (CE) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul her $i = 1, 2, \dots, n$ için M_i modüllerinin (CE) özelliğine sahip olmasıdır.

Teorem 3.6.12: Bir R halkasının yarı mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her sol R-modülün (CE) özelliğine sahip olmasıdır (Çalışıcı ve Türkmen, 2012).

Teorem 3.6.13: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

i. R yarı mükemmeldir.
ii. R sol R-modülü (CEE) özelliğine sahiptir.
iii. R sol R-modülü, her sonlu üretilmiş genişlemesinde bol tümleyene sahiptir.
iv. Her sol R-modül (CE) özelliğine sahiptir.
v. Her sol R-modül (CEE) özelliğine sahiptir (Çalışıcı ve Türkmen, 2012).

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Her Dual Sonlu Genişlemesinde δ-Tümleyene Sahip Modüller

Zöschinger 1975 yılında yayımlanan her genişlemesşnde tümleyene sahip modüller adlı çalışmasında aslında bir anlamda injektif modülleri genellemiştir. Zira bir injektif modülün her genişlemesinde bir direkt toplam terimi olduğu bilinen bir gerçektir. Bu çalışma bir modülün tüm alt modülleri üzerinde verilen bir özelliğinin o modülün her genişlemesi için de düşününlüp düşünülemeyeceği problemini beraberinde getirmiştir. Buna dayanarak Çalışıcı ve Türkmen 2012 de tezimizde temel referansımız olan "Her Dual Sonlu Genişlemesinde Tümleyene Sahip Modüller" başlıklı çalışmaları ile (CE) ve (CEE) özelliğine sahip modülleri literatüre kazandırmışlardır. Bunların ışığında bu bölümde $(\delta - CE)$ ve $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip modüller tanımlanacaktır. Devamında ise bu cebirsel yapıların temel özellikleri, örneklemeleri ve halka karakterizasyonları ele alınacaktır.

Tanım 4.1.1: Bir M modülü her dual sonlu genişlemesinde bir δ-tümleyene sahipse M ye $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir denir.

Eğer M her dual sonlu genişlemesinde bol δ-tümleyene sahipse M ye $(\delta - CEE)$ özelliğine sahiptir denir.

(CE) özelliğine sahip modüllerin $(\delta - CE)$ ve (CEE) özelliğine sahip modüllerin $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip olduğu açıktır. Böylece aşağıdaki geçiş her zaman mevcuttur:

$$(EE) \Rightarrow (CE) \Rightarrow (\delta - CE)$$

Lineer kompakt modüllerin (EE) özelliğine sahip olduğu bilinmektedir (Zöschinger, 1975). Artin her modül linner kompakt olduğundan Artin modüller $(\delta - CEE)$ özelliğine sahiptirler.

${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ modülü dual sonlu injektif modül (Çalışıcı ve Türkmen, 2012) olduğundan her dual sonlu genişlemesinin bir direkt toplam terimi olup dual sonlu genişlemelerinde bir tümleyene dolayısıyla δ-tümleyene sahiptir. Ancak alt modülü olan $2\mathbb{Z}$ nin $\mathbb{Z}$ dual sonlu genişlemesinde bir δ-tümleyene sahip olmadığı açıktır. Öyleyse $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir modülün her alt modülü $(\delta - CE)$ özelliğine sahip değildir.

Zöschinger bir modülün (EE) özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşulu tüm alt modüllerinin (E) özelliğine sahip olması ile vermiştir. Benzer ilişkinin $(\delta - CE)$ ve $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip modüller üzerinde de var olduğu aşağıdaki teoremde gösterilmiştir.

Teorem 4.1.2: Bir M modülünün $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul M nin her alt modülünün $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$: M modülünün her alt modülü $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olsun. M modülünün $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip olduğu gösterilmelidir. Yani N, M nin herhangi bir dual sonlu genişlemesi olmak üzere $N = M + V$ koşulunu gerçekleyen bir $V \leq N$ alt modülü için M nin N içinde V de kapsanan bir δ-tümleyeninin varlığı görülmelidir. N, M nin dual sonlu genişlemesi olduğundan $N \,/\, M = (M + V) \,/\, M \cong V \,/\, (M \cap V)$ sonlu üretilmiş olup V, $M \cap V \leq M$ alt modülünün dual sonlu genişlemesidir. Buna göre hipotez gereği $M \cap V$, V de bir $K \leq V$ δ-tümleyenine sahiptir. Yani, $M \cap V + K = V$ ve $(M \cap V) \cap K \ll_{\delta} K$ dır. Buradan, $N = M + V = M + [M \cap V + K] = M + K$ olduğu görülebilir ve $(M \cap V) \cap K = M \cap (V \cap K) = M \cap K \ll_{\delta} K$ elde edilir. Bu da K nın N içinde M nin V de kapsanan δ-tümleyeni olduğunu gösterir. Sonuç olarak, M $(\delta - CEE)$ özelliğine sahiptir.

$(\Rightarrow)$: M modülü $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip olsun. $M_1 \leq M$ keyfi bir alt modül ve N de M_1 in dual sonlu herhangi bir genişlemesi olmak üzere M_1 in N de bir δ-tümleyeninin varlığını görülmelidir. Bunun için $H = \{(m_1, -m_1) \mid m_1 \in M_1\}$ ve $F = (M \oplus N)/H$ olmak üzere sırasıyla her $m \in M$ için $\alpha(m) = (m, 0) + H$, her $n \in N$ için $\beta(n) = (0, n) + H$ ile tanımlı α ve β monomorfizmaları için aşağıdaki diyagram göz önüne alınırsa

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\mu_2"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\
M \arrow[r, "\alpha"] & F
\end{tikzcd}$$

$F = Gör(\alpha) + Gör(\beta)$ olduğu kolayca gösterilebilir. Her $(m, n) + H \in F$ için $\gamma\big((m, n) + H\big) = n + M_1$ olacak şekilde tanımlı $\gamma: F \longrightarrow N \,/\, M_1$ epimorfizması için $Çek(\gamma) = Gör(\alpha)$ dır. Gerçekten de, $(m, n) + H \in Çek(\gamma) \Leftrightarrow \gamma\big((m, n) + H\big) = n + M_1 = M_1 \Leftrightarrow n \in M_1$ olup $M_1 \leq M$ olduğundan $(m, n) + H = [(m + n, 0) + H] + [(-n, n) + H] \in Gör(\alpha)$ bulunur. Tersine $(m, 0) + H \in Gör(\alpha)$ için $\gamma\big((m, 0) + H\big) = 0 + M_1 = M_1$ olduğundan $(m, 0) + H \in Çek(\gamma)$ dır. Ayrıca, $F \,/\, Çek(\gamma) = F \,/\, Gör(\alpha) \cong N \,/\, M_1$ sonlu üretilmiş olduğundan F, $Gör(\alpha)$ nın dual sonlu genişlemesidir. α, monomorfizma olduğundan $M \,/\, Çek(\alpha) = M \,/\, 0 \cong Gör(\alpha) \cong$ M olup hipotez gereği $Gör(\alpha)$, F içinde bir V, δ-tümleyenine sahiptir. Yani, $F = Gör(\alpha) + V$ ve $Gör(\alpha) \cap V \ll_{\delta} V$ dir. Buradan $N = \beta^{-1}(F) = \beta^{-1}\big(Gör(\alpha)\big) + \beta^{-1}(V) = M_1 + \beta^{-1}(V)$ elde edilir. Ayrıca, $Gör(\alpha) \cap V \ll_{\delta} V$ olduğundan $M_1 \cap \beta^{-1}(V) \ll_{\delta} \beta^{-1}(V)$ dir. Gerçekten de $\beta^{-1}(V)/K$ singüler olacak şekildeki $K \leq \beta^{-1}(V)$ için $[M_1 \cap \beta^{-1}(V)] + K = \beta^{-1}(V)$ olsun. Bu durumda $\beta\big(M_1 \cap \beta^{-1}(V)\big) + \beta(K) = \beta\big(\beta^{-1}(V)\big) = V \cap Gör(\beta) = V$ dir. Özel olarak belirtilmelidir ki, $x \in \beta\big(M_1 \cap \beta^{-1}(V)\big)$ için $x = \beta(a)$ olacak şekilde bir $a \in M_1 \cap \beta^{-1}(V)$ vardır. $a \in M_1$ ve $a \in \beta^{-1}(V)$ olduğundan $\beta(a) = x \in V$ yazılabilir. $x = \beta(a) = (0, a) + H = (a - a, a) + H = (a, 0) + H + (-a, a) + H \in Gör(\alpha)$ olduğundan $x \in Gör(\alpha) \cap V$ olup $\beta\big(M_1 \cap \beta^{-1}(V)\big) = Gör(\alpha) \cap V$ elde edilir. $[Gör(\alpha) \cap V] + \beta(K) = V$, $V \,/\, (\beta(K))$ singüler ve $Gör(\alpha) \cap V \ll_{\delta} V$ olduğundan $V = \beta(K)$ bulunur ki buradan β, monomorfizma olduğundan $\beta^{-1}(\beta(K)) = K + Çek(\beta) = K + 0 = K = \beta^{-1}(V)$ olup bunun sonucunda $M_1 \cap \beta^{-1}(V) \ll_{\delta} \beta^{-1}(V)$ bulunur. Sonuç olarak, $\beta^{-1}(V)$, M_1 in N içinde bir δ-tümleyenidir.

Sonuç 4.1.3: $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip bir modülün her alt modülü dual sonlu δ-tümlenmiştir.

İspat: M $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip bir modül olsun. A, M nin bir alt modülü olsun. $U \leq A$ dual sonlu herhangi bir alt modül olmak üzere $U \leq M$ ve M $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip olduğundan Teorem 4.1.2 gereği $U\,(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. Yani A, U nun dual sonlu genişlemesi olmak üzere U, A içinde bir δ-tümleyene sahiptir. Dolayısıyla A dual sonlu δ-tümlenmiştir.

Sonuç 4.1.4: $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip bir modül bol dual sonlu δ-tümlenmiştir.

İspat: M $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip bir modül ve $A \leq M$ dual sonlu keyfi bir alt modülü olsun. $M = A + B$ olacak şekildeki her $B \leq M$ alt modülünün A nın bir δ-tümleyenini kapsadığı gösterilmelidir. M / A sonlu üretilmiş olduğundan $M / A \cong B / (B \cap A)$ sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla $B \cap A \leq M$ alt modülü M $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip olduğundan Teorem 4.1.2 gereği B dual sonlu genişlemesinde bir $T \leq B$ δ-tümleyenine sahiptir. Yani $B \cap A + T = B$ ve $B \cap A \cap T = A \cap T \ll_\delta T$ dir. Ayrıca, $M = A + B = A + B \cap A + T = A + T$ olduğu da göz önüne alınırsa istenen elde edilmiş olur.

Aşağıdaki yardımcı teorem basit modüllerin $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olduğunu göstermek için kullanılacaktır.

Yardımcı Teorem 4.1.5: M bir modül, $S \leq M$ basit alt modülü olsun. Bu durumda S, M nin bir direkt toplam terimidir veya δ-küçük alt modülüdür.

İspat: S nin M de δ-küçük alt modül olmadığını kabul edelim. $S \leq M$ alt modülünün direkt toplam terimi olduğu gösterilmelidir. Hipotez gereği, $K \neq M$ olmak üzere M / K singüler olacak şekildeki bir $K \leq M$ alt modülü için $M = S + K$ olur. $M / K = (S + K) / K \cong S / (S \cap K)$ dır. $S \cap K \leq S$ ve S basit olduğundan $S \cap K = 0$ veya $S \cap K = S$ dir. $S \cap K = S$ ise $M / K \cong 0$ bulunur ki bu durum $K = M$ çelişkisini doğurur. Dolayısıyla $S \cap K = 0$ olmalıdır. Bu durumda S, M nin bir direkt toplam terimidir.

Önerme 4.1.6: M bir basit modül olsun. Bu takdirde M $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: M bir basit modül ve N, M nin herhangi bir dual sonlu genişlemesi olsun. Bu durumda Yardımcı Teorem 4.1.5 gereği $M \ll_\delta N$ veya $N = M \oplus D$ olacak şekilde bir $D \leq N$ vardır. $M \ll_\delta N$ ise N, M nin δ-tümleyenidir. İkinci durumda, D, M nin direkt toplam terimi ise D, M nin N içinde δ-tümleyenidir. Dolayısıyla M $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

Teorem 4.1.7: M projektif yarı basit bir modül olsun. Bu takdirde M $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: N, M nin herhangi bir dual sonlu genişlemesi olsun. Bir $T \leq N$ sonlu üretilmiş alt modülü için $M + T = N$ dir. N / T nin projektif olduğunu göstermek yeterlidir.

$N\ /\ T = (M+T)\ /\ T \cong M\ /\ (M \cap T)$, M yarı basit ve $M \cap T \leq M$ olduğundan $M = M \cap T \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq M$ direkt toplam terimi vardır ve üstelik M nin projektifliği gereği her bir direkt toplam terimi de projektif olacağından $K \cong M\ /\ (M \cap T) \cong N\ /\ T$ projektiftir. O halde Yardımcı Teorem 3.2.2 gereği $M \ll_\delta N$ dir. $M + N = N$ ve $M \cap N = M \ll_\delta N$ olduğundan N, M nin N de δ-tümleyeni olup M $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

Sonuç 4.1.8: M, $\delta(M) = M$ koşulunu gerçekleyen yerelimsi projektif bir modül ise M $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: Önerme 3.2.7 den açıktır.

Aşağıdaki önerme $(\delta - CE)$ özelliğinin direkt toplam terimleri üzerinde de korunduğunu göstermektedir.

Önerme 4.1.9: M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir modül ise her direkt toplam terimi de $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: $M_1 \leq M$ alt modülü M nin herhangi bir direkt toplam terimi olsun. Bu durumda $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde bir $M_2 \leq M$ alt modülü mevcuttur. N, M_1 in keyfi dual sonlu bir genişlemesi olmak üzere M_1 in N de bir δ-tümleyeninin varlığı gösterilmelidir. $N' = N \oplus M_2$ olmak üzere $\varphi: M = M_1 \oplus M_2 \longrightarrow N' = N + M_2$ gömme homomorfizması için $M \cong \varphi(M) \leq N' = N \oplus M_2$ olup $N'\ /\ \varphi(M) \cong (N \oplus M_2)\ /\ (M_1 \oplus M_2\ ) \cong N\ /\ M_1$ sonlu üretilmiş olduğundan $N', \varphi(M)$ nin dual sonlu genişlemesidir. $M \cong \varphi(M)$ ve M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olduğundan izomorfu olan $\varphi(M)$ için de $\varphi(M) + V = N'$ ve $\varphi(M) \cap V \ll_\delta V$ olacak şekilde bir $V \leq N'$ δ-tümleyeni mevcuttur. $\pi: N' \longrightarrow N$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere $N = \pi(N') = \pi(\varphi(M) + V) = \pi\big(\varphi(M)\big) + \pi(V) = M_1 + \pi(V)$ ve $Çek(\pi) \leq \varphi(M)$ olduğundan $\pi(\varphi(M) \cap V) = \pi\big(\varphi(M)\big) \cap \pi(V) = M_1 \cap \pi(V) \ll_\delta \pi(V)$ bulunur. Sonuç olarak, $\pi(V)$, $M_1 \leq M$ direkt toplam teriminin N dual sonlu genişlemesi içinde bir δ-tümleyenidir. M_1 $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

Tanım 4.1.10: Bir M modülü her dual sonlu genişlemesinin bir direkt toplam terimi ise M ye dual sonlu injektif modül denir (Çalışıcı ve Türkmen, 2012).

Tanım 4.1.11: R bir halka olsun. Her M R-modülü için $\delta(M) = 0$ ise R ye δ-V- halka adı verilir (Üngör vd, 2012).

Zöschinger değişmeli bir R halkası üzerindeki yarıbasit bir M modülünün (E) özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşulu M nin pür injektif olması ile vermiştir.

Önerme 4.1.12: R değişmeli bir halka ve M $\delta(M) = 0$ koşulunu gerçekleyen $(\delta - E)$ özelliğine sahip bir R-modül olsun. Bu takdirde M pür injektiftir.

İspat:N, M nin pür genişlemesi olsun. Hipotez gereği M $(\delta - E)$ özelliğine sahip olduğundan $M + V = N$ ve $M \cap V \ll_\delta V$ olacak şekilde bir $V \leq N$ alt modülü mevcuttur. $M \cap V \leq \delta(V) \leq \delta(N)$ olup R halkası değişmeli ve M, N nin pür alt modülü olduğundan $\delta(M) = M \cap \delta(N)$ olup $M \cap V \leq M \cap \delta(N) = \delta(M) = 0$ elde edilir. Bu durumda $M \oplus V = N$ olur. Yani M her pür genişlemesinin bir direkt toplam terimidir. Buna göre M pür injektiftir.

Önerme 4.1.13: R bir δ-V-halka ve M bir R-modül olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

i. M $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.
ii. M dual sonlu injektiftir.

İspat: $(i) \Longrightarrow (ii)$: N, M nin herhangi bir dual sonlu genişlemesi olsun. M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olduğundan $M + V = N$ ve $M \cap V \ll_\delta V$ olacak şekilde bir $V \leq N$ alt modülü mevcuttur. $M \cap V \subseteq \delta(V)$ ve R bir $\delta - V$-halka olduğundan $\delta(V) = 0$ olup $M \cap V = 0$ elde edilir. Bu da $M \oplus V = N$ olması demektir. Sonuç olarak M dual sonlu injektiftir.
$(ii) \Longrightarrow (i)$: N, M nin herhangi bir dual sonlu genişlemesi olsun. M dual sonlu injektif olduğundan N nin bir direkt toplam terimidir. Yani $N = M \oplus D$ olacak şekilde bir $D \leq N$ alt modülü vardır. $N = M + D$ ve $M \cap D = 0 \ll_\delta D$ olacağından D, M nin N de bir δ-tümleyenidir. M $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

Önerme 4.1.14: M bir modül ve K, M nin projektif yarı basit alt modülü olsun. Bu takdirde $M \,/\, K$ bölüm modülü $(\delta - CE)$ özelliğine sahip ise M modülü de $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: U, M nin keyfi bir dual sonlu genişlemesi olsun. Bu durumda genelliği bozmadan $K \leq M \leq U$ ilişkisi göz önüne alınırsa $U \,/\, M \cong (U \,/\, K) \,/\, (M \,/\, K)$ izomorfizmi gereği $U \,/\, M$ sonlu üretilmiş olduğundan $U \,/\, K, M \,/\, K$ nın dual sonlu genişlemesidir ve $M \,/\, K$ $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olduğundan bir $V \,/\, K \leq U \,/\, K$

için $(M\ /\ K) + (V\ /\ K) = U\ /\ K$ ve $(M\ /\ K) \cap (V\ /\ K) = (M \cap V)\ /\ K \ll_{\delta} V\ /\ K$ gerçeklenir. Buradan $M + V = U$ olduğu kolayca görülebilir.

Ayrıca $M \cap V \ll_{\delta} V$ olduğu gösterilmelidir. $V\ /\ T$ singüler olacak şekildeki bir $T \leq V$ alt modülü için $M \cap V + T = V$ olsun. $(M \cap V)\ /\ K + (T + K)\ /\ K = V\ /\ K$ ve $(V/T)/(T+K)/T \cong V/(T+K)$ singüler; ayrıca $(M \cap V)\ /\ K \ll_{\delta} V\ /\ K$ olduğundan $(T + K)\ /\ K = V\ /\ K$ dolayısıyla $T + K = V$ elde edilir. $K = K + 0$ için açıkça $K = K \oplus 0$ yazılabileceği bilinmektedir. Hipotezden K projektif yarı basit olduğundan Yardımcı Teorem 3.2.2 gereği $K \ll_{\delta} K$ dır. Buradan $K \ll_{\delta} V$ olup $V\ /\ T$ singüler olduğundan $T = V$ bulunur ki bu da $M \cap V \ll_{\delta} V$ olması demektir. Böylelikle M nin her U dual sonlu genişlemesinde bir V δ-tümleyenine sahip olduğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla M $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

Aşağıdaki önerme ile $(\delta - CE)$ özelliğine sahip modüllerin sınıfının genişlemeler altında kapalı olduğu gösterilmektedir.

Önerme 4.1.15: B bir modül ve A, B nin B/A Noetherian olacak şekilde bir alt modülü olsun. A ve B/A $(\delta - CE)$ özelliğine sahip ise B de $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: N, B nin dual sonlu genişlemesi olsun. Bu durumda $A \leq B \leq N$ olmak üzere $(N/A)/(B/A) \cong N/B$ sonlu üretilmiş olduğundan hipotez gereği $(B/A) + (V/A) = N/A$ ve $(B/A) \cap (V/A) \ll_{\delta} V/A$ olacak şekilde $V/A \leq N/A$ δ-tümleyen alt modülü vardır. Diğer taraftan, $N/B = (B+V)/B \cong V/(B \cap V)$ $\cong (V/A)/((B \cap V)/A)$ dır. N/B sonlu üretilmiş ve B/A Noetherian olduğundan $(B \cap V)/A \leq B/A$ sonlu üretilmiş olup buradan V/A sonlu üretilmiştir. A $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olduğundan $A + K = V$ ve $A \cap K \ll_{\delta} K$ olacak şekilde $K \leq V$ alt modülü vardır. Ayrıca $N = B + V = B + A + K = B + K$ olduğu açıktır. Diğer taraftan $f: K \longrightarrow K\ /\ (A \cap K) \cong (A + K)\ /\ A = V\ /\ A$ doğal homomorfizması ile $g: V\ /\ A \longrightarrow (V\ /\ A)\ /\ ((B \cap V)\ /\ A) \cong V\ /\ (B \cap V) \cong (B + V)\ /\ B = N\ /\ B$ doğal homomorfizmasını göz önüne alalım. $Çek(f) = A \cap K \ll_{\delta} K$ ve $Çek(g) = (B \cap V)\ /\ A \ll_{\delta} V\ /\ A$ olduğundan f ve g birer δ-küçük epimorfizmadırlar. Dolayısıyla bileşkeleri olan $g \circ f: K \longrightarrow N\ /\ B \cong (K + B)\ /\ B \cong K\ /\ (K \cap B)$ δ-küçük epimorfizma olup $Çek(g \circ f) = K \cap B \ll_{\delta} K$ olur. Sonuç olarak, K, B nin N de δ-tümleyenidir.

Sonuç 4.1.16: M_2 bir Noetherian modül olsun. M_1 ve M_2 $(\delta - CE)$ özelliğine sahip ise $M_1 \oplus M_2$ de $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için $M_2 \cong (M_1 \oplus M_2)/M_1$ olduğundan Önerme 4.1.15 gereği istenen açıkça görülür.

Aşağıdaki Yardımcı Teorem daha önce bilinen bir gerçektir fakat ispatında kullanılan yapı bir sonraki önermede kullanılacağı için ispatı ile birlikte verilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.1.17: C bir modül ve $A \leq B \leq C$ olsun. $C\ /\ A$ bölüm modülü injektif ve $N,\ B\ /\ A$ yı içeren bir modül olmak üzere aşağıdaki tam satırlı diyagram mevcuttur. (Özdemir, 2016; Fuchs ve Salce, 2001).

(Hatırlatma: Burada, $N\,' = (C\ /\ A) \oplus (N\ /\ (B\ /\ A))$ şeklinde tanımlanmak üzere $g: N \longrightarrow N'$, $\sigma: C \oplus (N\ /\ (B\ /\ A)) \longrightarrow N'$ homomorfizmaları için $P = \sigma^{-1}(g(N))$ dir)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, hook] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[r] \arrow[d] & B\ /\ A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & P \arrow[r] & N \cong g(N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

İspat: $C\ /\ A$ injektif olduğundan $\psi: N \longrightarrow C\ /\ A$ homomorfizması var olur ve

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B\ /\ A \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & N \arrow[r] \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dotted, "\psi"'] & N\ /\ (B\ /\ A) \arrow[r] \arrow[d, "i"] \arrow[dl, dotted, "\alpha"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & C\ /\ A \arrow[r, "\beta"] & N\,' \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "(2)"] & N\ /\ (B\ /\ A) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramı mevcuttur. (1) üçgeni değişmeli olduğundan (2) üçgenini değişmeli kılan $\alpha: N\ /\ (B\ /\ A) \longrightarrow N\,'$ homomorfizması mevcuttur [Fuchs ve Salce, 2001, Lemma I.8.4]. Dolayısıyla ikinci satır ayrışabilirdir. Bu durumda $N\,' = C\ /\ A \oplus (N\ /\ (B\ /\ A))$ ve $\beta: C\ /\ A \longrightarrow N\,'$ içerme dönüşümü olacak şekilde alınabilirler. $B\ /\ A = \beta(B\ /\ A) = g(B\ /\ A) \subseteq N\,'$ olduğundan aşağıdaki değişmeli diyagram oluşturulabilir.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & B / A \arrow[r] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\gamma"] & C \oplus {}^{N}\!/_{B/A} \arrow[r, "\sigma"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Burada γ, her $a \in A$ için $\gamma(a) = (a, 0)$; ϕ, her $b \in B$ için $\phi(b) = (b, 0)$; σ, her $c \in C$ için ve her $\bar{x} \in N / (B / A)$ için $\sigma(c, \bar{x}) = (c + A, \bar{x})$ şeklinde tanımlıdır. Sonuç olarak $P = \sigma^{-1}(g(N))$ ve σ bir epimorfizma olduğundan her $x \in P$ için $\tilde{\sigma}(x) = \sigma(x)$ şeklinde tanımlı $\tilde{\sigma}: P \longrightarrow g(N)$ epimorfizması alınarak

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, hook] \arrow[d, "I"'] & B \arrow[r] \arrow[d] & B / A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & P \arrow[r] & g(N) \cong N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

istenen değişmeli diyagram elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.1.17 sayesinde özel bir koşul altında $(\delta - E)$ özelliğine sahip bir modülün bölüm modülünün de $(\delta - E)$ özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir (Öztürk Sözen ve Eren, 2017). Aşağıdaki teoremde ise yine Yardımcı Teorem 4.1.17 kullanılarak özel bir halka üzerinde $(\delta - CE)$ özelliğine sahip sonlu üretilmiş bir modülün bölüm modülünün de $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olduğu gösterilmektedir.

Teorem 4.1.18: R sol kalıtsal bir halka ve M sonlu üretilmiş bir R-modül olsun. M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir modül ise M nin her bölüm modülü de $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: U, M nin bir alt modülü ve $N, M/U$ nun bir dual sonlu genişlemesi olsun. Bu takdirde, $N/(M/U)$ bölüm modülü sonlu üretilmiştir. Ayrıca hipotez gereği M/U bölüm modülü de sonlu üretilmiş olduğundan N sonlu üretilmiştir. $E(M), M$ nin injektif bürümü olmak üzere R kalıtsal halka olduğundan $U \leq M \leq E(M)$ için $E(M)/U$ bölüm modülü injektif olup aşağıdaki değişmeli diyagram mevcuttur.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "I"] & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"] & M/U \arrow[r] \arrow[d, "i_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r, "f"] & K \arrow[r, "\sigma"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Burada $\varphi: M \longrightarrow K$ monomorfizma ve dolayısıyla $\varphi(M) \cong M$ olduğundan $\varphi(M)$ $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. $K/\varphi(M) = K/Çek(\sigma) \cong N$ sonlu üretilmiş olduğundan K, $\varphi(M)$ nin dual sonlu genişlemesi olup $\varphi(M) + V = K$ ve $\varphi(M) \cap V \ll_\delta V$ olacak şekilde bir $V \leq K$ δ-tümleyeni mevcuttur. Diyagramın değişmeliliğinden ve $fI = \varphi i_1$, $\sigma\varphi = i_2\pi$ olmak üzere

$N = \sigma(K) = \sigma(\varphi(M) + V) = \sigma(\varphi(M)) + \sigma(V) = (i_2\pi)(M) + \sigma(V) = (M/U) + \sigma(V)$ ve $(M/U) \cap \sigma(V) = i_2(\pi(M)) \cap \sigma(V) = \sigma[\varphi(M) \cap V] \ll_\delta \sigma(V)$

olduğundan $\sigma(V)$, M/U nun N dual sonlu genişlemesinde bir δ-tümleyeni olur. Buna göre M/U $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

Önerme 4.1.19: R bir halka, I R nin bir ideali ve $\overline{R} = R/I$ olsun. $\overline{R}$ mükemmel halka ve bir M R-modülü için $IM = 0$ ise M $((C)E)$ özelliğine sahiptir (Zöschinger, 1975).

İspat: N, M modülünün (dual sonlu) genişlemesi olsun. R/I mükemmel halka olduğundan her R/I-modülü de tümlenmiş olup $(M + IN)/IN \leq N/IN$ alt modülü bir $V/IN \leq N/IN$ tümleyenine sahiptir. Yani $(M + IN)/IN + V/IN = N/IN$ ve $((M + IN)/IN) \cap (V/IN) = ((M \cap V) + IN)/IN \ll V/IN$ gerçeklenir. Buradan $M + V = N$ olduğu açıktır. Bir $T \leq V$ için $M + T = N$ olsun. Bu durumda $(T + IN)/IN + (M + IN)/IN = N/IN$ olup V/IN tümleyen alt modülünün minimalliği gereği $V/IN \leq (T + IN)/IN$ olup $V \leq T + IN = T + I(T + M) \leq T + IT + IM = T + IT + 0 = T + IT = T$ olduğundan $V \leq T$ elde edilir. Sonuçta $V = T$ olup V, M nin N dual sonlu genişlemesinde bir tümleyendir. Sonuç olarak M modülü (CE) özelliğine sahiptir.

Önerme 4.1.20: R bir halka, I R nin bir ideali ve $\overline{R} = R/I$ olsun. $\overline{R} = R/I$ δ-mükemmel halka ve bir M R-modülü için $IM = 0$ ise M her genişlemesinde δ-tümleyene sahiptir.

İspat:N, M R-modülünün bir genişlemesi olsun. $\overline{R}$ δ-mükemmel olduğundan her $\overline{R}$-modül δ-tümlenmiştir. Dolayısıyla N/IN $\overline{R}$-modülü de δ-tümlenmiş olup $(M + IN)/IN \leq N/IN$ alt modülü bir $V/IN \leq N/IN$ δ-tümleyenine sahiptir. Yani $(M + IN)/IN + V/IN = N/IN$ ve $((M + IN)/IN) \cap V/IN =$

$((M \cap V) + IN)/IN \ll_\delta V/IN$ gerçeklenir. Buradan $M + V = N$ olduğu açıktır. Şimdi $M \cap V \ll_\delta V$ olduğunu gösterelim. Bunun için V/T singüler olacak şekildeki bir $T \leq V$ için $(M \cap V) + T = V$ olsun. Bu durumda $((M \cap V) + IN/IN) + (T + IN)/IN = V/IN$ ve $(V/T)/(T + IN)/T \cong V/(T + IN)$ singüler ve $((M \cap V) + IN)/IN \ll_\delta V/IN$ olduğundan $(T + IN)/IN = V/IN$ dolayısıyla $T + IN = V$ bulunur. Diğer taraftan $(M \cap V) + T = V$ eşitliğinden $M + (M \cap V) + T = M + V = N$ yani $M + T = N$ olup $IN = I(M + T) \leq IM + IT = IT \leq T$ olduğundan $T + IN = V$ eşitliğinden $T = V$ elde edilir.

Sonuç 4.1.21: $\overline{R} = R/I$ δ-mükemmel halka ve M R-modülü için $IM = 0$ olsun. M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir modüldür.

Sonuç 4.1.22: R bir halka M bir R-modül olsun. $R/Ann(M)$ bölüm halkasın δ-mükemmel ise M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir modüldür.

Sonuç 4.1.23: R Krull boyutu 1 olan Noetherian bir bölge ve M sınırlı bir R-modül olsun. Bu takdirde R nin her I deali için R/I bölüm halkası Artinian halkadır (Bland, 2011). Özel olarak, M sınırlı olduğundan $Ann(M) \neq 0$ olup $R/Ann(M)$ Artinian halkadır dolayısıyla δ-mükemmeldir. Sonuç olarak M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir modüldür.

Sıfırdan farklı her öz ideali ile oluşturulan bölüm halkaları mükemmel olan değişmeli halkalara hemen hemen mükemmel halka denir (Bazzoni ve Salce, 2002). Hemen hemen mükemmel halka üzerindeki sınırlı bir modülün (E) özelliğine sahip olduğu açıktır. Bu tanım genelleştirilerek hemen hemen δ-mükemmel halka kavramı şu şekilde verilebilir:

Tanım 4.1.24: Sıfırdan farklı her öz ideali ile oluşturulan bölüm halkaları δ-mükemmel olan değişmeli halkalara hemen hemen δ-mükemmel halka denir. δ-mükemmel halkaların ve hemen hemen mükemmel halkaların hemen hemen δ-mükemmel olduğu açıktır.

Hemen hemen δ-mükemmel halka üzerindeki sınırlı her modül $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

Önerme 4.1.25: R değişmeli, Noetherian bir halka ve M hemen hemen tüm izotopik bileşenleri sıfır olan yarı basit bir R-modül ise M $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: N, M nin dual genişlemesi olsun. Sıfırdan farklı bir $m \in M$ için $f: R \longrightarrow Rm$ dönüşümü bir epimorfizma olup $Çek(f) = Ann(m)$ dir. $R/Ann(m) \cong Rm$ ve R halkası Noetherian olduğundan $R/Ann(m)$ bölüm halkası sonlu üretilmiş yarı basit Noetherian bir halka olup aynı zamanda Artiniandır. Bu durumda R nin $I = Ann(m)$ ideali için $\overline{R} = R/I$ bölüm halkası δ-mükemmel olup her $j \in J$ ($J \subseteq \mathbb{Z}^+$) için M_j ler M nin izotopik bileşenleri olmak üzere yarı basit M modülü için $M = \underset{j \in J}{\oplus} M_j$ dir. I sonlu üretilmiş olduğundan $IM = \underset{j \in J}{\oplus} (IM_j) = 0$ olur. Buna göre Sonuç 4.1.21 den M, N de bir V δ-tümleyenine sahiptir.

Önerme 4.1.26: M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir modül olsun. M singüler ise (CE) özelliğine sahiptir.

İspat: N, M nin herhangi bir dual sonlu genişlemesi olmak üzere M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir modül olduğundan bir $T \leq N$ için $M + T = N$ ve $M \cap T \ll_\delta T$ dir. $M \cap T \ll T$ olduğunu gösterelim. Bir $K \leq T$ için $M \cap T + K = T$ olsun. Bu durumda $M \cap T \ll_\delta T$ olduğundan projektif yarı basit bir $Y \leq M \cap T$ alt modülü için $Y \oplus K = T$ dir. Ayrıca M singüler olduğundan $T/K \cong Y \leq M$ singüler olup $M \cap T \ll_\delta T$ olduğundan $K = T$ elde edilir. Sonuç olarak M (CE) özelliğine sahip bir modüldür.

Teorem 4.1.27: Bir R halkasının δ-yarı mükemmel olması için gerek ve yeter koşul her sol R-modülün $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olmasıdır.

İspat: ($\Longrightarrow$): Kabul edelim ki R, δ-yarı mükemmel halka, M bir R-modül ve N, M nin dual sonlu genişlemesi olsun. Bu takdirde N nin sonlu üretilmiş bir K alt modülü için $N = M + K$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca R halkası δ-yarı mükemmel ve N / M sonlu üretilmiş sol R-modül olduğundan N / M bir projektif δ-örtüye sahiptir. Bu durumda Lemma 3.4.9 gereği M, N de bir δ-tümleyene sahiptir. Sonuç olarak M modülü $\delta - (CE)$ özelliğine sahiptir.
($\Longleftarrow$): Her sol R-modül $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olsun. Bu durumda R halkasının her I idealine bir alt modül gözüyle bakılacak olursa her biri R içinde bir δ-tümleyene sahiptir. Bu ise R sol R-modülünün δ-tümlenmiş olması demektir ki buna denk olarak R δ-yarı mükemmel halkadır.

Teorem 4.1.28: Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i. R δ-yarı mükemmel halkadır.

ii. ${}_RR$ modülü (δ-CEE) özelliğine sahiptir.

iii. ${}_RR$ modülü her sonlu üretilmiş genişlemesinde bol δ-tümleyene sahiptir.

iv. Her sol R-modül $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

v. Her sol R-modül $(\delta - CEE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: $(i) \Leftrightarrow (iv)$: Önerme 4.1.27 den açıktır.

$(v) \Longrightarrow (iii)$: N, ${}_RR$ modülünün sonlu üretilmiş bir genişlemesi olsun. Her bölüm modülü de sonlu üretilmiş olacağından N, ${}_RR$ modülünün aynı zamanda dual sonlu genişlemesi olur ki hipotez gereği, ${}_RR$ modülü N içinde bol δ-tümleyene sahiptir.

$(iii) \Longrightarrow (ii)$: N, ${}_RR$ modülünün dual sonlu genişlemesi ise $N \,/\, R$ sonlu üretilmiş ve aynı zamanda R nin kendisi de sonlu üretilmiş olduğundan N de sonlu üretilmiş bir genişleme olup hipotez gereği N, R sol R-modülünün bol δ-tümleyenlerini içerir. Dolayısıyla, ${}_RR$ modülü $(\delta - CEE)$ özelliğine sahiptir.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: ${}_RR$ modülü δ-(CEE) özelliğine sahipse R nin her I ideali alt modül olarak düşünülürse Teorem 4.1.2 den I $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir yani R içinde bir δ-tümleyene sahiptir. Bu da ${}_RR$ sol R-modülünün δ-tümlenmiş olması demektir. Sonuç olarak R δ-yarı mükemmel halkadır.

$(\delta - E)$ özelliğine sahip bir modülün $(\delta - CE)$ özelliğine de sahip olduğu açıktır. Aşağıda verilen iki örnekle bu ifadenin tersinin her zaman gerçeklenemeyeceği gösterilmektedir.

Örnek 4.1.29: R tam olmayan lokal Dedekind bölgesi ve K, R nin kesir cismi olsun. S, R nin kapanışı olmak üzere $M = S \oplus K \oplus R$ modülü göz önüne alınırsa M modülü (CE) özelliğine sahip olduğundan (Çalışıcı ve Türkmen, 2012) $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir modüldür. Diğer taraftan R lokal halka ve M (E) özelliğine sahip olmadığından $(\delta - E)$ özelliğine de sahip değildir.

Örnek 4.1.30: F bir cisim olsun. $n \in \mathbb{N}$ sayılabilir çokluktaki x_n bilinmeyenli $F[x_1, x_2, \ldots]$ polinomlar halkasında her bir $n \in \mathbb{N}$ için ${x_1}^2$ ve ${x_{n+1}}^2 - x_n$ tarafından üretilen $I = \langle {x_1}^2, {x_2}^2 - x_1, {x_3}^2 - x_2, \ldots \rangle$ ideali için $R = F[x_1, x_2, \ldots]/I$ tek maksimal ideali $J = J^2 = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle / I$ olan lokal halkadır. Kabul edelim ki $M = J^{(\mathbb{N})}$ olsun. M, $R^{(\mathbb{N})}$ de tümleyene sahip olmadığından (aksi takdirde R

mükemmel halka olurdu) (Özdemir, 2012) M (E) özelliğine sahip değildir. R halkası lokal olduğundan M $(\delta - E)$ özelliğine de sahip değildir. Bununla birlikte R δ-yarı mükemmel halka olduğundan M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir modüldür.

Açıkça (E) özellikli her modül (CE) özelliğine sahip; ve (CE) özelliğine sahip her modülün $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olduğu söylenebilir. Aşağıdaki örnek ise bu ifadenin tersinin mevcut olmayabileceğini göstermektedir.

Örnek 4.1.31: Her $i \in \mathbb{Z}^+$ için $F_i = \mathbb{Z}_2$ olmak üzere Q halkası $Q = \prod_{i=1}^{\infty} F_i$ ve onun bir R alt halkası $\bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i$ ile 1_Q in ürettiği halka olsun. $F_0 = R/\bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i$, $F_1, F_2, \ldots$ basit R-modüller olmak üzere F_0 tek singüler basit R-modüldür. Yani $\delta(R) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i = Soc(R)$ dir. Ayrıca $F_i \cong F_0 = R/\bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i = R/Soc(R) = R/\delta(R)$ ve F_i cisim olduğundan $Soc(R), R$ nin bir büyük maksimal idealidir. Öyleyse R halkası δ-lokal dolayısıyla δ-yarı mükemmeldir. Bununla birlikte yarı mükemmel olmayan bir halka örneğidir (Zhou, 2000). Dolayısıyla (CE) özelliğine sahip olmayan bir M R modülü mevcuttur. R δ-yarı mükemmel olduğundan M modülü $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. Bununla birlikte $_R R$ modülü (CEE) özelliğine sahip olmayan ancak $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip olan bir halka örneğidir.

Örnek 4.1.32: Noetherian bir R halkasının yarı mükemmel olması için gerekli ve yeterli koşul δ-yarı mükemmel olmasıdır (Büyükaşık ve Lomp, 2010). Diğer taraftan her dedekind bölgesi Noetherian tamlık bölgesi olduğundan (Çallıalp ve Tekir, 2009) Dedekind bölgesi üzerindeki her modülün $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul her modülün (CE) özelliğine sahip olmasıdır.

Önerme 4.1.33: Kompozisyon serisine sahip her modül $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: M bir modül ve $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \cdots \subsetneq M_n = M$ de M nin kompozisyon serisi olsun. n üzerine tümevarım ile ispatı yapalım.
$n = 1$ ise $M = M_1$ olup M basit modüldür. Basit her modül $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olduğundan M de $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. $k \leq n - 1$ olacak şekilde her k için iddianın doğruluğunu kabul edelim. Bu takdirde M_{n-1} $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. M_n/M_{n-1} bölüm modülü de basit olduğundan $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. M_n/M_{n-1} Noetherian olduğundan Önerme 4.1.15 gereği $M = M_n$ $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

Sonuç 4.1.34: Sonlu üretilmiş yarı basit her modül $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: M sonlu üretilmiş yarı basit bir modül olsun. Dolayısıyla M sonlu sayıda basit modülün direkt toplamı olarak yazılabilir. Yarı basit M modülü hem Noetherian hem de Artin olduğundan sonlu uzunlukta bir kompozisyon serisi mevcuttur. Teorem 4.1.33 gereği M $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

Örnek 4.1.35: R Krull boyutu bir olan Noetherian bölge ve S, R ile R nin kesir cismi olan $K(R)$ arasında $K(R)$ den farklı bir halka olsun. Bu durumda S Noetheriandır ve Krull boyutu 1 dir. Ayrıca R yarı lokal olduğundan S de yarı lokaldir ve A, S nin sıfır idealinden farklı bir ideali olmak üzere S/A R-modül olarak bir kompozisyon serisine sahiptir (Bland, 2011). Bu durumda Önerme 4.1.33 gereği S/A $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir modüldür.

(CE) özelliğine sahip bir modülün $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olduğu bilinmektedir. Aşağıda verilen önerme ve beraberindeki örnekler ile özel halkalar üzerindeki modüller için bu özelliklerin çakışacağı gösterilmiştir.

Önerme 4.1.36: R her basit modülü singüler olan bir halka olsun. M R-modülü $(\delta - CE)$ özelliğine sahip ise M (CE) özelliğine sahiptir.

İspat: N, M nin dual sonlu genişlemesi olsun. $N = M + K$, $M \cap K \ll_\delta K$ olacak şekilde bir $K \leq N$ δ-tümleyeni mevcuttur. Sonuç 3.2.10 gereği K aynı zamanda M nin N de tümleyeni olacağından M (CE) özelliğine sahiptir.

Önerme 4.1.37: R her maksimal ideali R de büyük olan bir halka olsun. M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir R-modül ise M (CE) özelliğine sahiptir.

İspat: N, M nin dual sonlu genişlemesi olsun. $N = M + K, M \cap K \ll_\delta K$ olacak şekilde bir $K \leq N$ δ-tümleyeni vardır. Sonuç 3.2.11 K δ-tümleyeni aynı zamanda tümleyen olduğundan bu gereği M (CE) özelliğine sahiptir.

Örnek 4.1.38: R lokal bir halka M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip bir R-modül olsun. Eğer R bir bölme halkası ise her R-modül dual sonlu $\oplus$-tümlenmiş olduğundan N, M nin keyfi bir dual sonlu genişlemesi olmak üzere M, N de (direkt toplam terimi olan) bir tümleyene sahip olup (Çalışıcı ve Pancar (2004), Teorem 2.9). Sonuç olarak M modülü (CE) özelliğine sahiptir. Farzedelim ki, R bir bölme halkası olmasın. R nin bir I maksimal ideali direkt toplam terimi olamayacağından R/I projektif değildir (Anderson ve Fuller, Önerme 17.2). Bu takdirde R/I singülerdir. Ayrıca $I \trianglelefteq R$

olduğundan Sonuç 3.2.11 gereği M R-modülünün (dual sonlu) genişlemelerindeki her δ-tümleyeni aynı zamanda tümleyen olup M R-modülü aynı zamanda (CE) özelliğine sahiptir. Sonuç olarak lokal bir halka üzerinde $(\delta - CE)$ özelliğine sahip her modül (CE) özelliğine sahiptir.

Örnek 4.1.39: R cisim olmayan değişmeli bir bölge ve I, R nin maksimal ideali olsun. Bu takdirde R/I singüler olacağından Sonuç 3.2.11 gereği bu halka üzerinde $(\delta - CE)$ özelliğine sahip her modül aynı zamanda (CE) özelliğine sahiptir.

Yardımcı Teorem 4.1.40: $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip bir modülün her alt modülü de $(\delta - CEE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: M $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip bir modül ve $K \leq M$ olsun. Teorem 4.1.2 gereği K nın her alt modülünün $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olduğunu göstermek yeterlidir. $T \leq K$ keyfi alt modülü aynı zamanda da M nin de alt modülü olacağından hipotez gereği T $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. Sonuç olarak M nin her alt modülü $(\delta - CEE)$ özelliğine sahiptir.

Teorem 4.1.41: R δ-yarı lokal olmayan değişmeli bir bölge ve M bir R-modül olsun. Eğer M modülü $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip ise M burulmalıdır.

İspat: Kabul edelim ki M burulmalı olmasın. Bu durumda $T(M) \neq M$ yani bir $m \in M$ için $rm = 0$ olacak şekilde bir $0 \neq r \in R$ bulunamaz. Öyleyse $Ann(m) = 0_R$ dir ve $R \,/\, Ann(m) \cong Rm$ olduğundan $R \cong Rm$ dir. M $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip olduğundan Yardımcı Teorem 4.1.40 gereği $Rm \leq M$ alt modülü ve dolayısıyla izomorfu olan ${}_R R$ modülü $(\delta - CEE)$ özelliğine sahiptir. O halde Teorem 4.1.28 gereği R δ-yarı mükemmeldir. Bu durumda $R \,/\, \delta(R)$ yarı basit olacağından R nin δ-yarı lokal olduğu çelişkisine düşülür. Dolayısıyla her $m \in M$ için $Ann(m) \neq 0_R$ olup M burulmalıdır.

4.2. Her Dual Sonlu Genişlemesinde Zayıf δ-Tümleyene Sahip Modüller

Tanım 4.2.1: M modülü her dual sonlu genişlemesinde bir zayıf δ-tümleyene sahip ise M ye $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir denir.

M her dual sonlu genişlemesinde bol zayıf δ-tümleyene sahip ise M ye $(\delta - CWEE)$ özelliğine sahiptir denir.

Örnek 4.2.2: ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ sol $\mathbb{Z}$-modülü ve ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ sol $\mathbb{Z}$-modülü $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip modüllerdir.

Örnek 4.2.3: $(\delta - CE)$ özelliğine sahip modüller $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

Benzer şekilde $(\delta - CEE)$ özelliğine sahip her modül $(\delta - CWEE)$ özelliğine sahiptir. Ayrıca (CWE) özelliğine sahip her modül $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip iken modül singülerse tersi de gerçeklenir.

Teorem 4.2.4: M bir modül olsun. M nin her alt modülü $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip ise M $(\delta - CWEE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: M nin her alt modülü $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olsun. N, M nin herhangi bir dual sonlu genişlemesi olmak üzere $N = M + V$ olacak şekilde N nin her $V \leq N$ alt modülü için $N/M = (M + V)/M \cong V/(M \cap V)$ yazılabilir. N/M sonlu üretilmiş olduğundan $V/(M \cap V)$ sonlu üretilmiş olup $M \cap V$, V nin dual sonlu alt modülü yani diğer bir deyişle V, $M \cap V$ nin dual sonlu genişlemesidir. Hipotezden, $M \cap V \leq V$ $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olduğundan, $M \cap V$ nin V de bir zayıf δ-tümleyeni mevcuttur. Yani $V = M \cap V + K$ ve $(M \cap V) \cap K = M \cap K \ll_\delta V$ olacak şekilde bir $K \leq V$ alt modülü vardır. Buradan, $N = M + V = M + (M \cap V + K) = M + K$ dır. Ayrıca, $M \cap K \ll_\delta V$ ve $V \leq N$ olduğundan $M \cap K \ll_\delta N$ dir. Böylece $K \leq V$, M nin N de bir bol zayıf δ-tümleyenidir. O halde M $(\delta - CWEE)$ özelliğine sahiptir.

Teorem 4.2.5: M bir modül olsun. M $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip ise M nin her direkt toplam terimi de $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: $M_1 \leq M$ alt modülü M nin herhangi bir direkt toplam terimi ve N, M_1 in herhangi bir dual sonlu genişlemesi olsun. Bu takdirde, $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde bir $M_2 \leq M$ alt modülü vardır. $N' = N \oplus M_2$ ve $\varphi: M = M_1 \oplus M_2 \longrightarrow N' = N \oplus M_2$ gömme homomorfizması olmak üzere $M \cong \varphi(M)$ olduğundan $\varphi(M)$, $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir. M_1, N nin dual sonlu alt modülü olduğundan $N / M_1 \cong (N \oplus M_2)/\varphi(M) = N'/\varphi(M)$ sonlu üretilmiştir. $\varphi(M)$ $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olduğundan $\varphi(M) + V = N'$ ve $\varphi(M) \cap V \ll_\delta N'$ olacak şekilde bir $V \leq N'$ alt modülü vardır. $\pi: N' \longrightarrow N$ projeksiyon dönüşümü olmak üzere $M_1 + \pi(V) = N$ olup $\text{Çek}(\pi) \subseteq \varphi(M)$ ve $\varphi(M) \cap V \ll_\delta N'$ olduğundan Lemma 3.2.3 (ii) özelliği gereği

$\pi(\varphi(M) \cap V) = \pi(\varphi(M)) \cap \pi(V) = M_1 \cap \pi(V) \ll_\delta \pi(N') = N$ yani $\pi(V)$, M_1 in N de bir zayıf δ-tümleyenidir. Sonuç olarak M_1 modülü $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

Önerme 4.2.6: N, M nin dual sonlu genişlemesi ve M, N de V zayıf δ-tümleyenine sahip olsun. Bu durumda M nin N de $W \leq V$ olacak şekilde sonlu üretilmiş bir W zayıf δ-tümleyeni vardır.

İspat: N, M nin dual sonlu genişlemesi olsun. V, M nin N de zayıf δ-tümleyeni olduğundan $N = M + V, M \cap V \ll_\delta N$ dir. 1. İzomorfizma Teoreminden $N/M = (M + V)/M \cong V/(M \cap V)$ olduğundan $V/(M \cap V)$ sonlu üretilmiştir. $V/(M \cap V) =< \{x_1 + (M \cap V), x_2 + (M \cap V), \dots, x_n + (M \cap V)\} >$ olsun. O halde sonlu üretilmiş $W = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n \leq V$ alt modülü için $W + M = W + V \cap M + M = M + V = N$ ve $W \cap M \leq V \cap M \ll_\delta N$ olduğundan W, M nin N de V tarafından kapsanan zayıf δ-tümleyenidir.

Teorem 4.2.7: R bir halka olsun. R nin δ-yarı lokal olması için gerek ve yeter koşul her R-modülün $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olmasıdır.

İspat:$(\Rightarrow)$: R δ-yarı lokal olsun. M bir R-modül ve N, M nin keyfi dual sonlu genişlemesi olmak üzere R δ-yarı lokal bir halka olduğundan Sonuç 3.5.28 gereği her R-modül dual sonlu zayıf δ-tümlenmiş modül olup N dual sonlu zayıf δ-tümlenmiştir. M, N nin dual sonlu alt modülü olduğundan M nin N de zayıf δ-tümleyeni vardır. O halde M $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.
$(\Leftarrow)$: M bir R-modül, U M nin dual sonlu alt modülü olsun. O halde M, U nun dual sonlu genişlemesidir. Kabul gereği U, M de zayıf δ-tümleyene sahiptir. Böylece M dual sonlu zayıf δ-tümlenmiş modül olup Sonuç 3.5.28 den R halkası δ-yarı lokaldir.

Sonuç 4.2.8: R bir halka olmak üzere her R-modülün dual sonlu zayıf δ-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul her R-modülün $\delta - (CWE)$ özelliğine sahip olmasıdır.

İspat: Sonuç 3.5.28 ve Teorem 4.2.7 den açıktır.

$(\delta - CE)$ özelliğine sahip olan her halkanın $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olduğu bilinmektedir. Aşağıda bu ifadenin tersinin her zaman gerçeklenmediğini gösteren bir örneğe yer verilmiştir.

Örnek 4.2.9: $R = \mathbb{Z}_{p,q} = \left\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0, (p, b) = 1, (q, b) = 1\right\}$ halkası için $(R \,/\, Rad(R)) \,/\, ((\delta(R)) \,/\, Rad(R)) \cong R/\delta(R)$ yarıbasit olduğundan $\mathbb{Z}_{p,q}$ δ-yarı lokal halkadır (Wisbauer, 1991). Dolayısıyla her R-modül $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir. Diğer taraftan, R halkası her ideali büyük olan Noetherian bir halka olup pR ve qR şeklinde yalnızca iki maksimal ideale sahiptir. pR ve qR birbirinin δ-tümleyenleri olmadığından R halkası δ-tümlenmiş olamaz. Bu durumda R halkası δ-yarı mükemmel değildir. Buna göre $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olmayan bir M R-modülü mevcuttur. Dolayısıyla bu M R-modülü $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olan ancak $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olmayan bir modül örneğidir.

Önerme 4.2.10: C bir modül ve $A \leq B \leq C$ olsun. $C \,/\, A$ bölüm modülü injektif ve B her genişlemesinde zayıf δ-tümleyene sahip bir modül ise $B \,/\, A$ bölüm modülü de her genişlemesinde zayıf δ-tümleyene sahiptir.

İspat: $N, B \,/\, A$ nın herhangi bir genişlemesi olsun. Yardımcı Teorem 4.1.17 gereği $C \,/\, A$ injektif olduğundan tam satırlı aşağıdaki değişmeli diyagram mevcuttur.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, hook] \arrow[d, "i"] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "h"] & B \,/\, A \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & P \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

h monomorfizma ve B her genişlemesinde zayıf δ-tümleyene sahip olduğundan $B \cong h(B)$, P de bir V zayıf δ-tümleyenine sahiptir. Yani $h(B) + V = P$ ve $h(B) \cap V \ll_\delta P$ olacak şekilde $V \leq P$ alt modülü vardır. Diğer taraftan $N = g(P) = g(h(B) + V) = g\big(h(B)\big) + g(V) = gh(B) + g(V) = f\sigma(B) + g(V) = f\big(\sigma(B)\big) + g(V) = f(B \,/\, A) + g(V) = B \,/\, A + g(V)$ ve $\left({}^{B}/_{A}\right) \cap g(V) = f\big(\sigma(B)\big) + g(V) = f\sigma(B) \cap g(V) = g(h(B) \cap V) \ll_\delta g(P) = N$ olduğundan $g(V)$, $B \,/\, A$ nın N genişlemesinde bir zayıf δ-tümleyeni olur.

Sonuç 4.2.11: R sol kalıtsal halka ve M her genişlemesinde zayıf δ-tümleyene sahip bir R-modül ise M nin her bölüm modülü de her genişlemesinde zayıf δ-tümleyene sahiptir.

Sonuç 4.2.12: R sol kalıtsal halka, M sonlu üretilmiş bir R-modül ve $L \leq M$ olsun. M $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip bir modül ise M/L bölüm modülü de $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

M bir modül $L \leq M$ olmak üzere M/L bölüm modülü $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip bir modül iken M modülü $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olmayabilir. Örneğin $R = \mathbb{Z}$ halkası ve $M = 2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ R-modülü göz önüne alınırsa M bir basit modül olduğundan $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir. Ancak $2\mathbb{Z}$ alt modülü $\mathbb{Z}$ dual sonlu genişlemesinde bir δ-tümleyene sahip değildir.

Aşağıdaki teoremde bölüm modülü $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip bir modülün özel bir koşul altında kendisinin de $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir.

Teorem 4.2.13: M bir modül ve $L \ll_\delta M$ olsun. M/L bölüm modülü $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip ise M de $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: N M nin dual sonlu genişlemesi olsun. Bu durumda N/M sonlu üretilmiş olup $N/M \cong (N/L)/(M/L)$ izomorfizmi gereği M/L, N/L nin dual sonlu alt modülüdür. M/L bölüm modülü $\delta - (CWE)$ özelliğine sahip olduğundan $M/L + K/L = N/L$ ve $M/L \cap K/L \ll_\delta N/L$ olacak şekilde bir $K/L \leq N/L$ alt modülü vardır. Buradan $M + K = N$ olduğu açıktır. Şimdi $M \cap K \ll_\delta N$ olduğunu gösterelim. N/S singüler olacak şekildeki her $S \leq N$ için $M \cap K + S = N$ olsun. Bu durumda $(M \cap K)/L + (S + L)/L = N/L$ olu. Ayrıca $(N/S)/((S + L)/S) \cong N/(S + L)$, singüler ve $(M \cap K)/L \ll_\delta N/L$ olduğundan $(S + L)/L = N/L$ olup buradan $S + L = N$ elde edilir. $L \ll_\delta M \leq N$ ve N/S singüler olduğundan $S = N$ elde edilir. Sonuç olarak, K, M nin N de zayıf δ-tümleyenidir.

Sonuç 4.2.14: M sonlu üretilmiş modül ve $M/\delta(M)$ bölüm modülü $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip ise M de $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: M sonlu üretilmiş modül ise $\delta(M) \ll_\delta M$ olduğundan Teorem 4.2.13 gereği istenen açıktır.

Sonuç 4.2.15: M δ-lokal bir modül olsun. Bu takdirde M $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: M δ-lokal modül olduğundan $\delta(M) \ll_\delta M$ ve $\delta(M) \leq M$ maksimal alt modüldür. Bu durumda $M/\delta(M)$ basit olup $(\delta - CE)$ dolayısıyla $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir. Böylece Teorem 4.2.13 gereği M $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

Sonuç 4.2.16: M modülü $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip ise M nin her δ-küçük örtüsü de $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

İspat: N, M modülünün δ-küçük örtüsü olsun. Bu takdirde $Çek(f) \ll_\delta N$ olacak şekilde bir $f: N \longrightarrow M$ epimorfizması vardır. Homomorfizma Teoremi gereği $N/Çek(f) \cong M$ olduğundan $N/Çek(f)$ $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir. Sonuç olarak Teorem 4.2.13 gereği N $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

Teorem 4.2.17: R bir $\delta - V$ halka olsun. Bir M R-modülünün $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul M nin dual sonlu injektif olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$: M $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip bir modül ve N, M nin dual sonlu bir genişlemesi olsun. Bu durumda $N = M + K$ ve $M \cap K \ll_\delta N$ olacak şekilde $K \leq N$ vardır. R bir $\delta - V$ halka olduğundan $\delta(N) = 0$ olup $M \cap K = 0$ bulunur. Dolayısıyla $N = M \oplus V$ dir ve M dual sonlu injektiftir.

$(\Leftarrow)$: M dual sonlu injektif modül, N de M nin dual sonlu genişlemesi olsun. Bu durumda $N = M \oplus V$ olacak şekilde bir $V \leq N$ vardır ve V alt modülü N de M nin zayıf δ-tümleyenidir. O halde M $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

Sonuç 4.2.18: $\delta - V$ halkası üzerindeki bir M modülünün $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul M nin $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olmasıdır.

İspat: Önerme 4.1.13 den açıktır.

Teorem 4.2.19: M bir δ-oyuk modül ise M $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.
İspat: N, M nin dual sonlu genişlemesi olsun. Bu takdirde $M + N = N$ olduğu açıktır. Diğer taraftan M δ-oyuk modül olduğundan $M \cap N = M \ll_\delta M \leq N$ olup N M nin N de bir zayıf δ-tümleyenidir.

R δ-yarı mükemmel bir halka ise üzerindeki her R-modül $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. Diğer taraftan R δ-yarı mükemmel bir bölme halkası ise üzerindeki her R-modül dual sonlu $\oplus$-δ-tümlenmiş olduğundan (Al-Takhman, 2007) $_RR$ modülü her dual sonlu genişlemesinde direkt toplam terimi olan bir δ-tümleyene sahiptir. Dolayısıyla $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir. Hatta $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip olduğu da açıktır. Aşağıdaki teoremle bu üç kavramın üzerinde çakışık olduğu bir modül örneği verilmektedir.

Teorem 4.2.20: M yarıbasit bir modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:

i. M $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.
ii. M her dual sonlu genişlemesinde direkt toplam terimi olan bir δ-tümleyene sahiptir.
iii. M $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

İspat:$(i \Longrightarrow ii)$: N, M nin herhangi bir dual sonlu genişlemesi olsun. Hipotez gereği M $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olduğundan $N = M + K$ ve $M \cap K \ll_\delta K$ olacak şekilde bir $K \leq N$ alt modülü vardır. M yarıbasit olduğundan $M \cap K \leq M$ bir direkt toplam terimi olup $(M \cap K) \oplus X = M$ olacak şekilde bir $X \leq M$ vardır. Buradan $(M \cap K) \cap X = K \cap X = 0$ bulunur. Dolayısıyla $N = M + K = \big((M \cap K) \oplus X\big) + K = K \oplus X$. Sonuç olarak K, M nin N de direkt toplam terimi olan bir δ-tümleyenidir.

$(ii \Longrightarrow iii)$: N, M nin dual sonlu genişlemesi olmak üzere hipotez gereği $N = M + K$, $M \cap K \ll_\delta K$ ve $K \oplus X = N$ olacak şekilde bir $K, X \leq N$ vardır. $M \cap K \ll_\delta N$ olduğundan M, $(\delta - CWE)$ özelliğine sahiptir.

$(iii \Longrightarrow i)$: N, M herhangi bir dual sonlu genişlemesi olsun. Hipotez gereği M nin $N = M + K$, $M \cap K \ll_\delta N$ olacak şekilde bir $K \leq N$ zayıf δ-tümleyeni vardır. $M \cap K \leq M$ ve M yarı basit olduğundan her alt modülü bir direkt toplam terimi olup $(M \cap K) \oplus T = M$ olacak şekilde bir $T \leq M$ alt modülü mevcuttur. Bu takdirde $N = M + K = [(M \cap K) \oplus T] + K = K \oplus T$ olur. K, N nin bir direkt toplam terimi ve $M \cap K \ll_\delta N$ olduğundan $M \cap K \ll_\delta K$ dır (Talebi ve Hamzakolaei, 2009). Dolayısıyla M $(\delta - CE)$ özelliğine sahiptir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde (CE) ve (CWE) özelliğine sahip modüller genelleştirilerek $(\delta - CE)$ ve $(\delta - CWE)$ özelliğine sahip modüller tanımlandı. Bu modüllerin temel özellikleri, halka karakterizasyonları, örneklemeleri üzerine çalışıldı. (CE) özelliğine sahip bir modülün $(\delta - CE)$ özelliğine sahip olduğu açık iken tersinin her zaman gerçeklenemeyeceğine ilişkin örneklere yer verildi. Bununla birlikte, üzerine kurulu modüllerin üzerinde bu özelliklerin çakışabilir olduğu özel halkalardan bahsedildi.

Tezin sonunda her dual sonlu genişlemesinde direkt toplam terimi olacak şekilde δ-tümleyene sahip olan modül kavramına yer verilmiştir. Bundan yola çıkarak $(\oplus\text{-}\delta\text{-}E)$ ve $(\oplus\text{-}\delta\text{-}CE)$ özelliğine sahip modüller tanımlanabilir. Örneklemeleri ve halka karakterizasyonları ile ilgilenilebilir. Benzer şekilde her (dual sonlu) genişlemesinde güçlü δ-tümleyene sahip modüller tanımlanabilir ve incelenebilir.

M bir modül ve $K \leq M$ olsun. Herhangi bir $T \trianglelefteq M$ büyük alt modülü için $K + T = M$ olması yalnızca $T = M$ ile sağlanıyorsa K ya M nin e-küçük alt modülü denir (Zhou and Zhang, 2011) ve " $\ll_e$ " ile gösterilir. Ayrıca $K + N = M$ ve $K \cap N \ll_e N$ olacak şekilde bir $N \leq M$ alt modülü varsa N ye K nın M de e-tümleyeni denir (Quynh and Tin, 2013) . Açıktır ki, her δ-küçük alt modül e-küçük ve her δ-tümleyen bir e-tümleyendir. Bu bilgiye dayanarak $(e - E), (e - WE), (e - CE), (e - CWE)$ özelliğine sahip modüller tanımlanabilir ve cebirsel yapıları irdelenebilir. Böylece sırasıyla $(\delta - CE), (\delta - CWE)$ özelliğine sahip modüllerden daha genel bir yapıya ulaşılabilir. Bu özelliğe sahip modüllerin örneklemeleri, halka karakterizasyonları, aralarındaki ilişkinin yönünü belirleyen karşıt örneklemeleri ve üzerine kurulan modüller üzerinde özelliklerin çakışabilir olacağını gösteren özel halka tipleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Alizade, R. and Pancar, A. 1999. *Homoloji cebire giriş.* Ondokuz Mayıs Üniversitesi, 177s, Samsun.

Alizade, R., Bilhan, G. and Smith, P. F. 2001. Modules whose maximal submoduls have supplements. *Communication Algebra,* 29(6), 2389-2405.

Alizade, R. and Büyükaşık, E. 2003. Cofinitely weakly supplemented modules. *Communications in Algebra*, 31, 11, 5377-5390.

Al-Takhman, K. 2007. Cofinitely δ-supplemented and cofinitely δ-semiperfect modules. *International Journal of Algebra,* 12, 601-613.

Anderson, F. and Fuller, K.R. 1992. *Rings and categories of modules.* Springer-Verlag, 376s, New-York.

Aydoğdu, P. 2013. Rings over which every module has a flat δ-cover.*Turkish Journal of Mathematics*, 37:1, 182-194.

Bass, H. 1960. Finistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings. *Transactions of the American Mathematical Society,* 95, 466-488.

Bazzoni, S. and Salce, L. 2003. Strongly flat covers. *Journal of the London Mathematical Society,* 66(2), 276-294.

Büyükaşık, E. and Lomp, C. 2001. On a recent generalization of semiperfect rings. *Turkish Journal of Mathematics,* vol. 78, no. 2, pp. 317-325.

Büyükaşık, E. and Lomp, C. 2010. When δ-semiperfect rings are semiperfect. *Turkish Journal of Mathematics,* 33, 1-8.

Büyükaşık, E. 2009. On cofinitely weak supplemented modules. *The Arabian Journal for Science and Engineering,* 34(1A), 159-164.

Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N. and Wisbauer, R. 2006. *Lifting modules.* Frontiers In Mathematics, Birkhauser, 394s, Verlag-Basel.

Çalışıcı, H. and Pancar, A. 2004. $\oplus$-Cofinitely supplemented modules. *Czechoslovak Mathematical Journal,* vol. 54, no. 129, pp. 1083-1088.

Çalışıcı, H. and Türkmen, E. 2012. Modules that have a supplement in every cofinite extension. *Georgian Mathematical Journal,* vol. 19, no. 2, pp. 209-216.

Çallıalp, F. and Tekir, Ü. 2009. *Değişmeli halkalar ve modüller.* Birsen Yayınevi.

Eckmann, B. and Schopf, A. 1953. Über injective moduln. *Archive der Mathematic,* 4(2): 75-78.

Eryılmaz, F. (In press). Cofinitely weak δ-supplemented modules. *Miskolc Mathematical Notes.*

Facchini, A. 1998. *Module theory, Progress ın mathematics.* 167, Birkhauser, 281s, Verlag, Basel.

Fuchs, L. and Salce, L. 2001. *Modules over non-Noetherian domains*. American Mathematical Society, No. 84.

Goldsmith, B. and Goebel, R. 2008. Models, Modules and Abelian Groups.

Goodearl, K. R. and Warfield, R. B. 1989. *An introduction to Noncommutative Noetherian Rings,* Cambridge University Press: Cambridge, Great Britain.

Goodearl, K. R. 1976. *Ring theory, nonsingular rings and modules.* Marcel Dekker, INC. New York and Basel.

Göçer, F. and Türkmen, E. 2014. Modules that have a supplement in every torsion extension. *Palestine Journal of Mathematics*, *4*(1), 515-518.

Harmancı, A., Keskin, D. and Smith, P. F. 1999. On $\oplus$-supplemented modules. *Acta Mathematica Hungarica,* 83(1-2), 161-169.

Hilbert, D. 1890. Uber die theorie der algebraischen formen. *Mathematische Annalen*, 36(4), 473-534.

Hungerford, T.W. 1973. *Algebra.* Springer-Verlag, New York.

Kasch, F. 1982. *Modules and rings.* Published for the London Mathematical Society by Academic Press, 372s, Teubner.

Kasch, F. and Mares, E. 1966. Eine Kennzeichnung semiperfekter moduln. *Nagoya Mathematical Journal,* 27, 525-529.

Kızılaslan, G. 2014. On δ-perfect and δ-semiperfect rings. Master's Thesis, İzmir Institute of Technology, 52, İzmir.

Koşan, M. T. 2007. δ-Lifting and δ-supplemented modules. *Algebra Colloquium,* 14(1), 53-60.

Krylov, P. A. And Tuganbaev, A. A 2008. Modules over discrete valuation domains, *De Gruyter Exposition in Mathematics,* 43, Deutsche National Bibliografie.

Lam, T. Y. 1998. *Lectures on modules and rings.* Springer-Verlag, New-York.

Larsen, M. D. and Mc Carthy, P. J. 1971. *Multiplicative theory of ideals.* Pure and Applied Mathematics, 43.

Lomp, C. 1999. On semilocal modules and rings. *Communications in Algebra,* 27(4), 1921-1935.

Mares, E.A, 1963. Semi-perfect modules. *Mathematische Zeitschrift*, 82(4), 347-360.

Matlis, E. 1958. Injective modules over Noetherian rings. *Pacific Journal of Mathematics,* 8, 511-528.

Matlis, E. 1958. Some properties of Noetherian domains of dimension one. *Canadian Journal of Mathematics*, 13, 569-586.

Nastasescu, C. and Oystaeyen, F. V. 2012. *Mathematics and ıts applications. Dimensions of ring theory.* Springer Science and Business Media.

Nematollahi, M. J. 2009. On δ-supplemented modules. Tarbiat Muallem University, 20 th In seminar on Algebra, (Apr. 22-23, 2009) (pp. 155-158).

Nişancı Türkmen, B. 2016. On generalizations of injective modules. *Publications de I'Institut Mathematique,* 99(113), 249-255.

Nişancı Turkmen, B. 2013. Modules that have a rad-supplement in every cofinite extension. *Miskolc Mathematical Notes*, 14(3), 1059-1066.

Nişancı Turkmen, B. 2015. Modules that have a supplement in every coatomic extension. *Miskolc Mathematical Notes*, 16(1), 543-551.

Oneto, R. and Angel, V. 1996. Purity and direct summands. *Divulgaciones Matematicas* 4 (1-2), 49-53.

Önal, E. and Çalışıcı, H. 2016. Modules that have a weak supplement in every extension. *Miskolc Mathematical Notes*, 17(1), 471-481.

Özdemir, S. 2016. Rad-supplementing modules. *Journal of the Korean Mathematical Society*, vol. 53(2), 403-414.

Öztürk Sözen, E. and Eren, Ş. 2017. Modules that have a δ-supplement in every extension. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 10(4), 730-738.

Öztürk Sözen, E., Eryımaz, F. and Eren, Ş. 2017. Modules that have a weak δ-supplement in every torsion extension. Journal of Science and Arts, (2), 269-274.

Polat, M. N., Çalışıcı, H. and Önal, E. 2015. Modules that have a weak supplement in every cofinite extension. *Palestine Journal of Mathematics*, 4(1), 553-556.

Quynh, T. C. and Tin, P. H. 2013. Some properties of e-supplemented and e-lifting modules. *Vietnam Journal of Mathematics*, 35, 1051-1062.

Rudlof, P. 1991. On the structure of couniform and complemented modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 74(3), 281-305.

Sharpe, D.W. and Vamos, P. 1972. *Injective modules*. Lectures in Pure Mathematics University of Sheffield, The Great Britain.

Smith, P. F. 2000. Finitely generated supplemented modules are amply supplemented, *Arabian Journal of Science and Engineering*, 25(2), 69-79.

Talebi, Y. and Hamzekolaei, A. 2009. Closed weak δ-supplemented modules. *Journal of Algebra, Number Theory and Applications,* vol.13(2), 193-208.

Tribak, R. 2012. Finitely generated δ-supplemented modules are amply δ-supplemented. *Bulletin Australian of Mathematical Society,* 86, 430-439.

Tribak, R. 2013. On δ-local modules and amply δ-supplemented modules. *Journal of Algebra and Its Applications,* 12(2), 1250144, (14 pages).

Tribak, R. 2015. When finitely generated δ-supplemented modules are supplemented. *Algebra Colloquium, Academy of Mathematics and System Science, Chinese Academy of Sciences and Suzhou University*, 22(1), 119-130.

Türkmen, E. 2010. Radikal tümlenmiş ve eş-sonlu radikal tümlenmiş modüllerin karakterizasyonları. Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilimdalı, Samsun.

Ungor, B., Halıcıoğlu, S. and Harmancı, A. 2012. On a class of $\bigoplus$-supplemented modules. *Deformation Theory of Algebras and Their Diagrams,* 116, 123.

Warfield, R. B., 1970. Decomposability of finitely presented modules. *Proceedings of the American Mathematical Society,* 25, 167-172.

Wisbauer, R. 1991. *Foundations of module and ring theory.* Revised and Updated English edition, Gordon and Breach, Philedelphia.

Zhou, Y. 2000. Generalizations of perfect, semiperfect and semiregular rings. *Algebra Colloquium,* 7(3), 305-318.

Zhou, D. X. and Zhang, X. R. 2011. Small-essential submodules and Morita duality. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 35, 1051-1062.

Zimmermann-Huisgen, B. 1976. Pure submodules of direct products of free modules. *Mathematische Annalen*, 224, 233-245.

Zöschinger, H. 1974a. Komplementierte moduln über Dedekindringen. *Journal of Algebra,* 29, 42-56, 606p.

Zöschinger, H. 1975. Moduln die in jeder Erweiterung ein Komplement haben. *Mathematica Scandinavica,* 35, 267-287.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı:Esra ÖZTÜRK SÖZEN
Doğum Yeri: Havza
Doğum Tarihi: 17.11.1985
Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu
Lise: Samsun Ondokuz Mayıs Süper Lisesi (2004)
Lisans: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2009)
Yüksek Lisans: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü (Eylül 2009-Şubat 2012)

Çalıştığı Kurumlar:
Araştırma Görevlisi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü (2010-2011)
Araştırma Görevlisi, Ordu Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2011-2012)
Araştırma Görevlisi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Bölümü (2012-2018)

Yayınlar

Öztürk Sözen, E. and Eren, Ş. 2017. Modules that have a δ-supplement in every extension. European Journal of Pure and Applied Mathematics, 10(4), 730-738.

Öztürk Sözen, E., Eryımaz, F. and Eren, Ş. 2017. Modules that have a weak δ-supplement in every torsion extension. Journal of Science and Arts, (2), 269-274.

Öztürk Sözen, E. and Eren, Ş. 2017. Modules that have a weak δ-supplement in every cofinite extension. COSTAS 2017, 9-11 November, Samsun/TURKEY. (Uluslararası-Sözlü Bildiri)