T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BÜYÜK LORENTZ UZAYLARINDA ÇARPIM OPERATÖRLERİ VE KARAKTERLERİ

Gökhan IŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BÜYÜK LORENTZ UZAYLARINDA ÇARPIM OPERATÖRLERİ VE KARAKTERLERİ

GÖKHAN IŞIK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SAMSUN
2018

TEZ ONAYI

Gökhan Işık tarafından hazırlanan " Büyük Lorentz Uzaylarında Çarpım Operatörleri ve Karakterleri'' adlı tez çalışması …/…/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman Prof. Dr. İlker ERYILMAZ
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri

Başkan Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Prof. Dr. İlker ERYILMAZ
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Dr. Öğrt. Üyesi Oğuz OĞUR
Giresun Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım. …/…/2018

Prof. Dr. Bahtiyar ÖZTÜRK
Enstitü Müdürü

ETİK BEYANI

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

21/12/2018

Gökhan Işık

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BÜYÜK LORENTZ UZAYLARINDA ÇARPIM OPERATÖRLERİ VE KARAKTERLERİ

Gökhan Işık

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof.Dr. İlker Eryılmaz

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ölçüm uzayının tanımı ve ölçüm fonksiyonuna yer verilmiştir. Ölçülebilir fonksiyonların tanımı yapılarak ölçülebilir fonksiyonların temel özelliklerini içeren teoremlerin ispatları verilmiştir.

İkinci bölümde dağılım ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonlarının tanımları yapılarak temel özellikleri gösterilmiştir. Pozitif fonksiyonların dağılım ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonlarının tanımlı olduğu yerlerde integrallerinin aynı olduğu sonucuna varılmış olup fonksiyonun yerine daha basit ve karekteri belirli olan artmayan yeniden düzenleme ve dağılım fonksiyonlarının kullanılabileği sonucuna varılmıştır.

Üçüncü bölümde herhangi bir ölçülebilir fonksiyonun dağılım ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonlarını kullanarak Lorentz uzayı tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde Lorentz uzayları üzerinde ağırlıklı bileşke operatörü tanımlayarak bu operatörlerin karekteristik özellikleri detaylı biçimde incelenmiştir.

Beşinci bölümde Büyük Lorentz uzayının tanımı ve Banach fonksiyon uzayı olduğunun gösterimi yapılmıştır. Ayrıca Büyük Lorentz uzayı üzerinde tanımlanan çarpım operatörünün sınırlılığı, terslenebilirliği, kompaktlığı ve görüntü kümesinin kapalılığı gibi önemli karakteristik özelliklerine yer verilmiştir.

…2018, 136 sayfa

Anahtar Kelimeler: Dağılım fonksiyonu, Artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu, Maksimal fonksiyon, Ölçüm uzayı, Lorentz uzayı, Büyük Lorentz uzayı, Ağırlıklı bileşke operatörü, Çarpım operatörü

ABSTRACT

Post Graduate Dissertation

MULTIPLICATION OPERATORS AND CHARACTERS ON GRAND LORENTZ SPACE

Gökhan Işık

Ondokuz Mayıs University
Graduate School of Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Prof.Dr. İlker Eryılmaz

This study consists of five sections. In the first section, the definition of the measurement space and the measurement function are given. The proofs of the theorems that contain the basic properties of measurable functions are given by defining the measurable functions.

In the second section, basic properties are given by defining the distribution and non-increasing rearrangement functions. It is concluded that the integrals are the same where the distribution functions of the positive functions and the non-increasing rearrangement functions are defined, and instead of the function, the simpler and character-definable increasing rearrangement and distribution functions can be used.

In the third section, the Lorentz space is defined by using any measurable function distribution and non-increasing rearrangement functions.

In the fourth section, the charateristics of these operators are investigated in detail by defining the weighted composition operator on Lorentz spaces.

In the fifth chapter, the definition of the Grand Lorentz space and the Banach function space are shown. In addition, important characteritics such as bounded, inversibility, compactness and closed range of the multiplication operator defined on the Grand Lorentz space.

…2018, 136 pages

Key Words: Distribution function, Non-increasing rearrangement function, Maxsimal Function, Measure space, Lorentz space, Grand Lorentz space, Weıghted Composition Operators, Multiplication Operators

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Gün geçtikçe matematiğin dalları arasında, matematik ile diğer alanlar arasında sınırlar zayıflamakta ve irtibat artmaktadır. Bu tez dosyası dağılım ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonlarının özelliklerini söylemek, kendi aralarında ilişkilerinin durumlarını tespit etmek, bu fonksiyonları kullanarak Lorentz uzayının tanımının nasıl yapıldığını ve uzayın özelliklerini araştırmak ve en önemli ise büyük Lorentz uzayı üzerinde tanımladığımız çarpım operatörünün karekterlerini irdelemek için hazırlanmıştır.

İlk olarak dağılım fonksiyonunun tanımı yapılarak mantığını anlaşılmaya çalışılacaktır. Bir fonksiyonun büyüklüğü hakkında bilgi veren, ancak noktasal davranış veya yerellik hakkında bilgi vermeyen bir araç olan dağılım fonksiyonu incelenecektir. Daha sonraki adım da ise dağılım fonksiyonuna dayanarak artmayan yeniden düzenlenme incelenip temel özellikleri oluşturulacaktır. Artmayan yeniden düzenleme için alt ek ve alt çarpım tipi eşitsizlikler elde edilecektir.

Aklımıza doğal olarak "Dağılım ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonları ne işimize yarar?'' sorusu gelir. Önemli olan dağılım ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonlarını kullanarak ön Lorentz uzayı, büyük Lorentz uzayının tanımlanmasında bize yardımcı oluşunu görmektir. Maksimal fonksiyonu kullandığımızda Lorentz uzayını ve bu uzayda kullanacağımız normu tanımlamaktadır. Ayrıca uzayın tamlaştırılması ve ayrılabilirliğinin oluşmasında artmayan ve yeniden düzenleme fonksiyonları kullanılmaktadır. Lorentz ve büyük Lorentz uzaylarına bakıldığında temelinde ölçüm uzayının var olmasıdır. Ölçülebilir uzay üzerinde tanımlı olan fonksiyonları norm tanımlanışına göre Lorentz ve büyük Lorentz uzaylarını oluşturmaktadır. Dünyanın her bir noktasında matematiği rastlamamak olasılığı sıfır olan bir olaya benzemektedir. Matematik hemen hemen bütün bilimlere yardım ettiği aşikârdır. İncelediğimiz uzaylarda ölçülebilir fonksiyon temeldir. Fonksiyonlar, değerlendirmeler ve sonuç bulunurken yardımcı olduğu inkâr edilemez. Teknolojinin gelişimiyle birçok parametreye bağlı olarak farklı fonksiyonların tanımlanışına oldukça ihtiyaç vardır.

Bu tezde büyük Lorentz uzayı üzerinde tanımladığımız çarpım operatörü kullanılarak birçok yeni oluşumda farklı bakış açısı kazandıracaktır.

Lisansüstü hayatım boyunca engin bilgi ve tecrübelerini zaman mefhumu gözetmeksizin paylaşan, bilimsel açıdan kendimi geliştirebilmem için her türlü imkanı sunan saygı değer hocam Prof. Dr. İlker Eryılmaz'a en derin saygı ve şükranlarımı sunarım.

Bilimsel anlamda kendileri ile tartışma fırsatı bulduğum ve her birinden önemli derecede bir çok kazanım elde ettiğim başta değerli hocalarım Prof. Dr. Birsen Sağır Duyar, Prof. Dr. Cenap Duyar ve Matematik Bölümü öğretim elemanlarına, yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.

….2018, Samsun

Gökhan Işık

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

SİMGELER

Σ	: $\sigma-$cebir
μ	: Ölçüm fonksiyonu
$D_f(\lambda)$	: f 'nin dağılım fonksiyonu
$M(X,\Sigma)$	: X üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar kümesi
f^*	: f 'nin artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu
χ_E	: E kümesine ait karakteristik fonksiyon
f^{**}	: Maksimal Fonksiyon
(X,Σ,μ)	: Ölçüm uzayı
$L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$	: Lorentz uzayı
$\Vert\cdot\Vert_{(p,q)}$	: Ön Lorentz uzayında norm
$\Vert f\Vert_{pq}$	: Lorentz uzayında norm
S	: Basit fonksiyonların kümesi
$\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^*$	: Lorentz uzayının duali
$W=W_{U,T}$	: Ağırlıklı bileşke operatörü
M_U	: Çarpım operatörü
$v<<\mu$	: v ölçümü μ ölçümüne göre mutlak sürekli
$\Vert\cdot\Vert_{p,q)}$	: Büyük Lorentz uzayında norm
$L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$	: Büyük Lorentz uzayı

KISALTMALAR

h.h.h.	: Hemen hemen heryerde
o.ü.	: Olmak üzere

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

1.1 Tezin Konusu

Bu tezin birinci kısımda kavramsal olarak yardımcı olacak ölçüm uzayı ve ölçüm fonksiyonlarının tanımları yapılarak örnekler verilmiştir.
İkinci kısımda dağılım fonksiyonu ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonlarının tanımları ve özellikleri dikkate alınmıştır. Artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu ve maksimal fonksiyonunun tanımı, özellikleri ve eşitzizlikleri incelenmiştir.
Üçüncü bölümde Lorentz uzayının tanımı ve bu uzay üzerindeki norm ile ilgili özellikleri incelenmiştir.
Dördüncü bölümde Lorentz uzayı üzerinde tanımlanan ağırlıklı bileşke operatörünün sınırlılığı, kompaktlığı ve görüntü kümesinin kapalılığının koşulları irdelenmiştir.
Beşinci bölümde ise tanımlanan Büyük (Grand) Lorentz uzayı araştırılmış ve bu uzay üzerinde tanımlanan çarpım operatörünün karekterinin incelenmesi yapılmıştır.

1.2 Tezin Amacı ve Önemi

Tezde dağılım fonksiyonu yardımıyla artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu oluşturulmuştur. Artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu kullanılarak kendisinin maksimal fonksiyonu inşa edilmiş ve Lorentz, büyük Lorentz uzaylarına geçiş yapılması sağlanmıştır. Bu uzaylar üzerinde ağırlıklı bileşke ve çarpım operatörleri tanımlanıp bazı özellikleri incelenmiştir.

1.3 Tezin Kapsamı ve Yöntemi

Bir fonksiyonun büyüklüğü hakkında bilgi veren, ancak noktasal davranış veya yerellik hakkında bilgi vermeyen bir araç olan dağılım fonksiyonunu, artmayan yeniden düzenleme ve maksimal fonksiyonların Lorentz ve büyük Lorentz uzaylarındaki işlevleri değişik teoremlerle gösterilmiştir. Tezde anlatım, problem çözme (örneklendirme) ve teoriler kullanılarak hazırlanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

2.1 Ölçüm Uzayı, Ölçülebilir Fonksiyonlar ve Lebesgue Uzayları

Tanım 2.1.1: Boş kümeden farklı X kümesinin alt kümelerinin bir sınıfı olan Σ kümesi aşağıdaki üç özelliği sağlarsa, Σ kümesine $\sigma-$cebir denir.

i. $X \in \Sigma$

ii. $S \in \Sigma \Rightarrow S^c \in \Sigma$

iii. $1 \leq k$ olmak üzere $\forall k$ ve $G_k \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \in \Sigma$

Bu durumda (X, Σ) ikilisine bir ölçülebilir uzay ve Σ ailesinin her elemanına ölçülebilir küme denir (Bartle, 2014).

Örnek 2.1.2: X sayılamayan bir küme olmak üzere,

$\Sigma = \left\{ G \subset X : G \text{ sayılabilir veya } G^c \text{ sayılabilir} \right\}$ koleksiyonu X üzerinde $\sigma-$cebiridir.

Çözüm:

i. $X^c = \varnothing$, boş küme sayılabilir olduğundan $X \in \Sigma$.

ii. $\forall S \in \Sigma$ verilsin. $S \in \Sigma$ olduğu için S veya S^c sayılabilirdir. İlk olarak S sayılabilir olsun. $\left(S^c\right)^c = S$ olduğu için Σ kümesi tanımı gereği $S^c \in \Sigma$. S^c sayılabilir ise Σ kümesi tanımı gereği $S^c \in \Sigma$ olur. Böylece $\forall S \in \Sigma$ için $S^c \in \Sigma$ olur.

iii. a) $\forall k \in \mathbb{N}$ için G_k kümeleri sayılabilir o.ü. $\{G_k\}$ ailesi verilsin. Sayılabilir kümelerin sayılabilir birleşimleri sayılabilir olduğu için $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \in \Sigma$ olacaktır.

b) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $(G_k)^c$ kümeleri sayılabilir olsun. $\bigcap_{k=1}^{\infty} G_k{}^c = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \right)^c$ olup bu ise

$\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \in \Sigma$ olduğunu gösterir.

c) $M = \{M_n : M_n \text{ sayılabilir}\}$ ve $F = \left\{F_m : (F_m)^c \text{ sayılabilir}\right\}$ kümelerini tanımlayalım. $\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$ olarak yazılabilir.

$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right)^c = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \cup \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m\right)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (M_n)^c\right) \cap \left(\bigcap_{m=1}^{\infty} (F_m)^c\right) \subset \bigcap_{m=1}^{\infty} (F_m)^c$ ve $(F_m)^c$ kümeleri sayılabilir olduğu için $\bigcap_{m=1}^{\infty} (F_m)^c$ kümeside sayılabilirdir. Sayılabilir kümenin alt kümeleri de sayılabilir olduğu için $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k\right)^c$ sayılabilirdir. Σ tanımı gereği $\bigcup_{k=1}^{\infty} T_k \in \Sigma$ olur. Sonuç olarak her üç durumda da $\forall k \in \mathbb{N}$ ve $G_k \in \Sigma$ olduğunda $\bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \in \Sigma$ olduğundan Σ ailesi bir $\sigma-$ cebiri olacaktır.

Tanım 2.1.3: P bir topolojik uzay, P'nin tüm açık alt kümelerinin ailesi tarafından üretilen B(P) $\sigma-$ cebirine P'nin Borel cebiri denir. Elemanlarına ise Borel kümeleri denir (Emel'yanov, 2014).

Tanım 2.1.4: Σ, X kümesi üzerinde bir $\sigma-$cebiri ve negatif olmayan $\mu : \Sigma \to [0,\infty)$ tanımlı dönüşüm aşağıdaki özellikleri sağlarsa μ fonksiyonuna Σ üzerinde bir ölçüm fonksiyonu denir.

i. $\mu(\varnothing) = 0$

ii. $j \neq k$ ve $A_k \cap A_j = \varnothing$ olmak üzere $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. Bu durumda (X,Σ,μ) üçlüsüne ise ölçüm uzayı denir (Emel'yanov, 2014).

Örnek 2.1.4: (X,Σ) ölçülebilir uzay ve (μ_n) ölçü dizisi o.ü. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(X) = \frac{1}{3}$

olsun. Σ üzerinde $\forall \mathrm{E} \in \Sigma$ için $\beta(\mathrm{E})=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} \mu_{n}(\mathrm{E})$ şeklinde tanımlı β dönüşümünün, ölçüm olduğu gösterilsin? Ayrıca $\beta(X)=?$

Çözüm:

a) $\beta: \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ dönüşümü için

i. $\mathrm{E} \in \Sigma$ için $\beta(\mathrm{E})=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} \mu_{n}(\mathrm{E}) \geq 0$ olacaktır. β dönüşümü negatif değildir.

ii. $\beta(\varnothing)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} \mu_{n}(\varnothing)=0$ { μ_n ölçüm dizisi $\mu_{n}(\varnothing)=0$ olduğu için}

iii. $n \neq m$ için $E_n \cap E_m = \varnothing$ olmak üzere,

$\beta\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} \mu_{n}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{k}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{n}\left(E_{k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} \mu_{n}\left(E_{k}\right)=$ $\sum_{k=1}^{\infty} \beta\left(E_{k}\right)$ buradan β X üzerinde ölçü olduğu görülür.

b) $\beta(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} \mu_{n}(X)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n} \cdot \frac{1}{3}=\frac{1}{3} \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^{n}=\frac{1}{3} \cdot \frac{3/5}{1-3/5}=\frac{1}{2}$ olacaktır.

Tanım 2.1.5: (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı ve $\forall k \in \mathbb{N},\ A_k \in \Sigma$ için $\{\mathrm{A}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ölçülebilir kümeler dizisini alalım. Eğer $X=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{k}$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\mu(A_k)<\infty$ oluyorsa (X, Σ, μ) uzayına $\sigma-$sonlu ölçüm uzayı denir (Emel'yanov, 2014).

Tanım 2.1.6: (X, Σ_1), (Y, Σ_2) ölçülebilir iki uzay ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall S \in \Sigma_2$ için $f^{-1}(S) \in \Sigma_1$ oluyorsa f fonksiyonuna ölçülebilir denir (Bartle, 2014).

Tanım 2.1.7: $\Sigma\ \sigma-$ cebir ve $\xi \subset \Sigma$ olmak üzere, $f: \xi \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ $\{\overline{\mathbb{R}}=(-\infty, \infty) \cup\{-\infty, \infty\}\}$ fonksiyonu $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in \xi : |f(x)|>\alpha\}$ kümesi ölçülebilir küme oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. Bütün ölçülebilir fonksiyonların kümesi $M\left(X,\Sigma\right)$ ile gösterilir. $M\left(X,\Sigma\right)=\left\{f:\xi\to\overline{\mathbb{R}},\xi\subset\Sigma,\forall\alpha\in\mathbb{R};\left\{x\in\xi\ :\left|f\left(x\right)\right|>\alpha\right\}\in\Sigma\right\}$ biçiminde tanımlanır (Bartle, 2014).

Teorem 2.1.8: f, g, ve her $n\in\mathbb{N}$ için f_n Σ ölçülebilir fonksiyonlar $\lambda\in\mathbb{R}$ ve ψ fonksiyonu $G\subset\mathbb{R}$ açık kümesi üzerinde sürekli olmak üzere,

i. λf, $f+g$, $\max\left(f,g\right),\min\left(f,g\right)$, $\left|f\right|$, $f\cdot g$, $\dfrac{f}{g}$;

ii. $\sup\left(f_n\right)$, $\inf\left(f_n\right)$, $\limsup\left(f_n\right),\liminf\left(f_n\right)$ ve $\lim\left(f_n\right)$;

iii. $\psi\circ f$ fonksiyonlarıda ölçülebilirdir (Bartle, 2014; Emel'yanov, 2007).

Lemma 2.1.9: $\left(X,\Sigma\right)$ ölçülebilir uzay ve $G\in\Sigma$ olmak üzere,

$f:G\to\mathbb{R}$ tanımlı herhangi f fonksiyonu için aşağıdaki önermeler denktir (Bartle, 2014; Emel'yanov, 2007).

a) f fonksiyonu $\Sigma,\sigma-$cebirine göre ölçülebilirdir.

b) $\forall U\subset\mathbb{R}$ açık alt kümesi için $f^{-1}(U)\in\Sigma$

c) $\forall F\subset\mathbb{R}$ kapalı alt kümesi için $f^{-1}(F)\in\Sigma$

d) $\forall B\subset\mathbb{R}$ Borel kümesi için $f^{-1}(B)\in\Sigma$.

2.2 Dağılım Fonksiyonu

Tanım 2.2.1: (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı ve $M(X,\Sigma)$, X üzerinde tüm Σ ölçülebilir fonksiyonların kümesi o.ü. $f \in M(X,\Sigma)$ fonksiyonu verilsin.

$\forall\lambda \geq 0$ için $D_f(\lambda) = \mu\{x \in X : |f(x)| > \lambda\}$ biçimde tanımlanan fonksiyona f 'nin dağılım fonksiyonu denir ve D_f biçiminde gösterilir (Castillo ve Rafeiro, 2015).

D_f dağılım fonksiyonu sadece f fonksiyonunun mutlak değerine ve onun davranışına bağlıdır. D_f nin değeri sonsuz varsayılabilir ve $f_*, \mu_f, d_f, \lambda_f$ simgeleriylede gösterilir.

Tanım 2.2.2: (X,Σ,μ) ve (Y,Ω,η) iki ölçüm uzayı, $f \in M(X,\Sigma)$ ve $g \in M(Y,\Omega)$ olsun. f ve g fonksiyonları için $\forall\lambda \geq 0$ alındığında $D_f^{\mu}(\lambda) = D_g^{\eta}(\lambda)$ olması durumunda eşit olarak değerlendirilir. Artık dağılım fonksiyonlarının bazı özelliklerinden bahsedilebilinir.

Teorem 2.2.3: f ve g, $M(X,\Sigma)$da iki fonksiyon olsun. $\forall\lambda,\delta \geq 0$ için

a) D_f artmayan ve sağdan süreklidir.

b) $|g| \leq |f|$ $\mu-$h.h.h. olduğunda $D_g(\lambda) \leq D_f(\lambda)$ olur.

c) $\forall c \in \mathbb{C} - \{0\}$ için $D_{c\cdot f}(\lambda) = D_f\left(\dfrac{\lambda}{|c|}\right)$

d) $D_{f+g}(\lambda+\delta) \leq D_f(\lambda) + D_g(\delta)$

e) $D_{f\cdot g}(\lambda\cdot\delta) \leq D_f(\lambda) + D_g(\delta)$

f) $|f| \leq \liminf |f_n|$ $\mu-$h.h.h. olduğunda, $D_f(\lambda) \leq \liminf\left(D_{f_n}(\lambda)\right)$ eşitsizliği vardır.

g) $|f_n| \to |f|$ olduğunda, $\lim\limits_{n\to\infty} D_{f_n}(\lambda) = D_f(\lambda)$ eşitliği gerçekleşir (Castillo ve Rafeiro, 2015).

2.3 Artmayan Yeniden Düzenleme Fonksiyonu

Tanım 2.3.1: $f \in M(X,\Sigma)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} f^* &: [0,\infty) \to [0,\infty] \\ t &\to f^*(t) = \inf\{\lambda \ge 0 : D_f(\lambda) \le t\} \end{aligned}$$ biçiminde tanımlanan fonksiyona

f 'nin artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu denir (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Örnek 2.3.2: $X = [0,\infty)$; $G = \{X\text{'in tüm Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri}\}$ ve $f : [0,\infty) \to [0,\infty]$ olmak üzere, $f(x) = \begin{cases} 1-(x-1)^2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonun dağılım ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonları bulunsun.

Çözüm: Bir fonksiyonunun dağılım fonksiyonu o fonksiyonunun görüntü kümesini bölerek tanımlanmaktır. Yani fonksiyonun görüntü kümesi o fonksiyonun dağılım fonksiyonunun tanım kümesidir.

Dağılım fonksiyonunun tanımı $D_f(\lambda) = m(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$ olduğu biliniyor.

f 'nin tanım kümesi dikkate alınırsa,

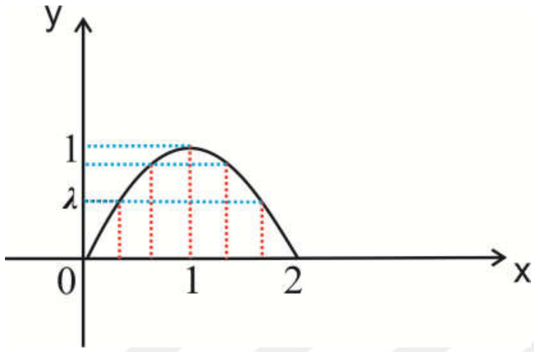
i. $0 \le x \le 2$ için $D_f(\lambda) = m\left(\left\{x \in [0,2] : \left|1-(x-1)^2\right| > \lambda\right\}\right)$, $x \in [0,2]$

olduğunda $1-(x-1)^2 \ge 0$ olduğundan $\left|1-(x-1)^2\right| = 1-(x-1)^2$ olacağı aşikardır. $D_f(\lambda) = m\left(\left\{x \in [0,2] : 1-(x-1)^2 > \lambda\right\}\right)$ olacaktır. Dağılım fonksiyonu λ 'ya bağlı olduğuna göre x değişkeni λ parametresi cinsinden yazılırsa

$$D_f(\lambda) = m\left(\left\{x \in [0,2] : 1-(x-1)^2 > \lambda\right\}\right) = m\left(\left\{x \in [0,2] : (x-1)^2 < 1-\lambda\right\}\right) =$$
$$= m\left(\left\{x \in [0,2] : |(x-1)| < \sqrt{1-\lambda}\right\}\right) = m\left(\left\{x \in [0,2] : 1-\sqrt{1-\lambda} < x < 1+\sqrt{1-\lambda}\right\}\right)$$ elde edilir. Lebesgue ölçümü kullanılırsa $D_f(\lambda) = \left(1+\sqrt{1-\lambda}\right) - \left(1-\sqrt{1-\lambda}\right) = 2\sqrt{1-\lambda}$.

$\forall x \in [0,2]$ için $\lambda \in [0,1]$. Gerçekten $1-(x-1)^2 > \lambda$ olduğundan x 'in değer aralığı dikkate alındığında λ 'nın değer aralığına ulaşılır.

$x>2$ olma durumu irdelenirse, $D_f(\lambda)=m(\{x>2:0>\lambda\})=0$ olduğu apaçıktır. $D_f(\lambda)=\begin{cases}2\sqrt{1-\lambda}, & 0\le\lambda\le 1\\ 0, & \lambda>1\end{cases}$ biçiminde dağılım fonksiyonu oluşturulur. İkinci olarak ise dağılım fonksiyonunun grafiği yardımıyla oluşturulabiliriz.



Şekil 2.1. Örnek 2.3.2'ye ait f fonksiyonunun grafiği

f fonksiyonunun değer kümesini parçaladığımızda λ'ya karşılık gelen x değerleri şekilden de belli olacağı gibi $1+\sqrt{1-\lambda}$ ve $1-\sqrt{1-\lambda}$ olur. Dağılım fonksiyonu o aralığın ölçümü olacağı için λ değeri 0 ile 1 arasını taradığında $D_f(\lambda)=2\sqrt{1-\lambda}$ olacaktır. Eğer λ değeri 1 den büyük olduğunda karşılık gelecek fonksiyon görüntüsü yoktur. Boş kümenin ölçüsü sıfır olduğundan $D_f(\lambda)=0$ olacaktır. Şimdi f fonksiyonunun artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu bulunsun.

$$\begin{aligned} f^*:[0,\infty) &\to [0,\infty] \\ t &\to f^*(t)=\inf\{\lambda\ge 0: D_f(\lambda)\le t\}\end{aligned}$$

biçiminde tanımlandığı biliniyor.

$D_f(\lambda)=\begin{cases}2\sqrt{1-\lambda}, & 0\le\lambda\le 1\\ 0, & \lambda>1\end{cases}$ dağılım fonksiyonu dikkate alınırsa, $\lambda\in[0,1]$ için

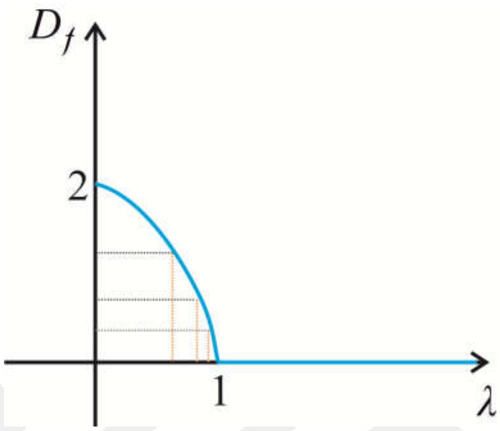
$$f^*(t)=\inf\{\lambda\ge 0: D_f(\lambda)\le t\}=\inf\{\lambda\ge 0: 2\sqrt{1-\lambda}\le t\}=$$

$=\inf\left\{\lambda\ge 0:\lambda\ge 1-\dfrac{t^2}{4}\right\}=1-\dfrac{t^2}{4}$ olduğu görülür. $(\lambda\in[0,1]\Rightarrow t\in[0,2])$

Şimdi ise $\lambda>1$ olduğunda $f^*(t)=\inf\{\lambda\ge 0: 0\le t\}=0$ buradan da $\lambda>1\Rightarrow t>2$ olur. Artık f'nin yeniden düzenleme fonksiyonu yazılırsa,

$$f^*(t)=\begin{cases}1-\dfrac{t^2}{4}, & 0\le t\le 2\\ 0, & t>2\end{cases}$$ olduğu görülür.

İkinci olarak artmayan yeniden düzenleme fonksiyonunu elde etmek için dağılım fonksiyonunun grafiğinden faydalanırsa,



Şekil 2.2. Örnek 2.3.2'deki f fonksiyonuna ait dağılım fonksiyonunun grafiği

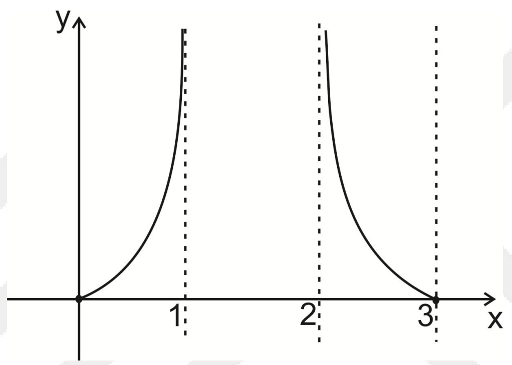
Dağılım fonksiyonunun grafiği incelendiğinde λ değeri 0 ile 1 arasında değiştiğinde, artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu için t değerleri de 0 ile 2 arasında değişecektir. Bu da t parametresine bağlı $1-\dfrac{t^2}{4}$ parabolünden başka bir şey değildir. $\lambda>1$ olduğunda ise dağılım fonksiyonunun değerleri sabitleşir ve sıfır olur. Bu ise yeniden düzenleme fonksiyonunun 0 olduğunu söyler. $\int_0^\infty\left(1-(x-1)^2\right)dx=\dfrac{4}{3}$, $\int_0^\infty\left(2\sqrt{1-\lambda}\right)d\lambda=\dfrac{4}{3}$ ve $\int_0^\infty\left(1-\dfrac{t^2}{4}\right)dt=\dfrac{4}{3}$ olup, f pozitif bir fonksiyon olduğunda $\int_0^\infty f(x)\,dx=\int_0^\infty D_f(\lambda)\,d\lambda=\int_0^\infty f^*(t)\,dt$ olduğu görülür.

Örnek 2.3.3: $\left([0,\infty],L,m\right)$ Lebesgue ölçüm uzayı ve f fonksiyonu

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x=0 \\ \ln\left(\dfrac{1}{1-x}\right), & 0<x<1 \\ \infty, & 1\le x\le 2 \\ \ln\left(\dfrac{1}{x-2}\right), & 2<x<3 \\ 0, & x\ge 3 \end{cases}$$ biçiminde tanımlansın.

Yukarıda tanımlanan f fonksiyonunun dağılım ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonları bulunsun.

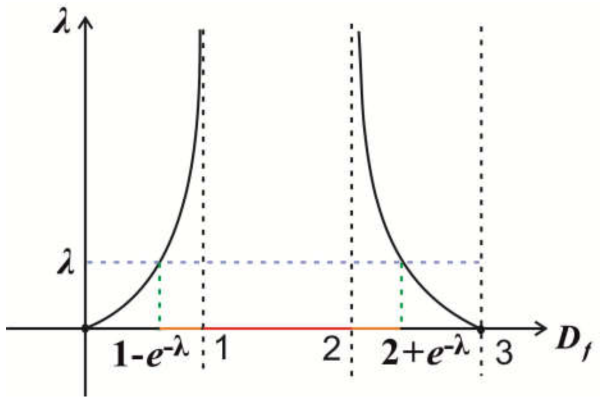
Çözüm: İlk olarak f fonksiyonunun grafiği çizilsin.



Şekil 2.3. Örnek 2.3.3'e ait f fonksiyonunun grafiği

Dağılım fonksiyonu, f fonksiyonun değer kümesini parçalayarak oluşturulursa,

Şekil 2.4. Örnek 2.3.3'e ait f fonksiyonunun değer kümesinin parçalanışı grafiği

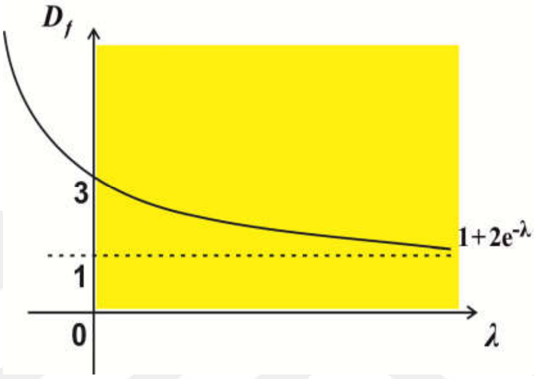


Şekil 2.4. deki grafik dikkate alındığında; $\lambda \ge 0$ olduğunda aralıkların ölçümleri toplamı dağılım fonksiyonunun λ'ya bağlı değeri olacaktır.

$$D_f(\lambda)=\left[1-\left(1-e^{-\lambda}\right)\right]+(2-1)+\left[\left(2+e^{-\lambda}\right)-2\right]=\left[e^{-\lambda}\right]+(1)+\left[e^{-\lambda}\right]=1+2e^{-\lambda}$$

olduğu görülür. Şimdi ise f fonksiyonunun artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu oluşturulursa, $f^*(t)=\inf\left\{\lambda\geq 0: D_f(\lambda)\leq t\right\}=\inf\left\{\lambda\geq 0: 1+2e^{-\lambda}\leq t\right\}$ olduğu biliniyor. Buradan λ değişkeni yalnız bırakılırsa, $f^*(t)=\inf\left\{\lambda\geq 0: 1+2e^{-\lambda}\leq t\right\}=\inf\left\{\lambda\geq 0: \lambda\geq \ln\dfrac{2}{t-1}\right\}$ olduğu bulunur.

Dağılım fonksiyonunun grafiğide aşağıdaki gibidir;



Şekil 2.5. Örnek 2.3.3'deki f fonksiyonuna ait dağılım fonksiyonu grafiği

Şekil 2.5.'deki dağılım fonksiyonunun grafiğini inceleyerek artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu oluşturulur. $f^*(t)=\inf\left\{\lambda\geq 0: D_f(\lambda)\leq t\right\}$ olduğu bilindiğine göre, $0\leq t\leq 1$ olduğunda $D_f(\lambda)=\varnothing \Rightarrow f^*(t)=\inf\left\{\lambda\geq 0: D_f(\lambda)\leq t\right\}=\infty$ olur. $1<t<3$ olduğundan $D_f(\lambda)=1+2e^{-\lambda}$ olacaktır.

$$f^*(t)=\inf\left\{\lambda\geq 0: 1+2e^{-\lambda}\leq t\right\}=\inf\left\{\lambda\geq 0: \lambda\geq \ln\left(\frac{2}{t-1}\right)\right\}=\ln\left(\frac{2}{t-1}\right) \qquad t\geq 3$$

olduğunda; $D_f(\lambda)=1+2e^{-\lambda}$ olacaktır. $f^*(t)=\inf\left\{\lambda\geq 0: 1+2e^{-\lambda}\leq t\right\}=0$ olur.

Sonuç olarak, $f^*(t)=\begin{cases}\infty, & 0\leq t\leq 1\\ \ln\left(\dfrac{2}{t-1}\right), & 1<t<3\\ 0, & t\geq 3\end{cases}$ parçalı fonksiyonu elde edilir.

Örnek 2.3.4: $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ ve $f(x)=\begin{cases} x(1\text{-}x), & x\in[0,1) \\ 0, & x>1 \end{cases}$ biçimindeki f fonksiyonu için dağılım ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonlarını bulunuz?

Çözüm: Dağılım ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonlarının tanımları kullanılırsa,

I. Durum: $x\in[0,1)$ olduğunda, $D_f(\lambda)=m\left(\left\{x\in[0,1):\left|x-x^2\right|>\lambda\right\}\right)$ ve $x\in[0,1)$ için $\left|x\text{-}x^2\right|=x\text{-}x^2$ olup

$$D_f(\lambda)=m\left(\left\{x\in[0,1):x-x^2>\lambda\right\}\right)=m\left(\left\{x\in[0,1):x^2-x<-\lambda\right\}\right)$$

$$=m\left(\left\{x\in[0,1):x^2-x+\frac{1}{4}<\frac{1}{4}-\lambda\right\}\right)=m\left(\left\{x\in[0,1):\left(x-\frac{1}{2}\right)^2<\frac{1}{4}-\lambda\right\}\right)$$

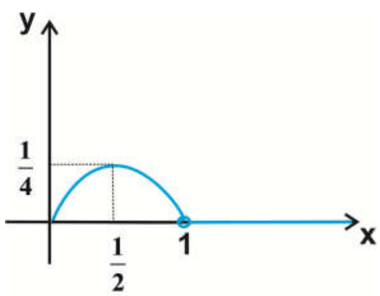
$$=m\left(\left\{x\in[0,1):\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}<\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}\right\}\right)=m\left(\left\{x\in[0,1):\left|x-\frac{1}{2}\right|<\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}\right\}\right)=2\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}$$

elde edilir.

II. Durum: $x>1$ için $f(x)=0$ olduğundan $D_f(\lambda)=m\left(\left\{x>1:\left|f(x)\right|>\lambda\right\}\right)=m\left(\left\{x>1:0>\lambda\right\}\right)=m(\varnothing)=0$. Buna göre,

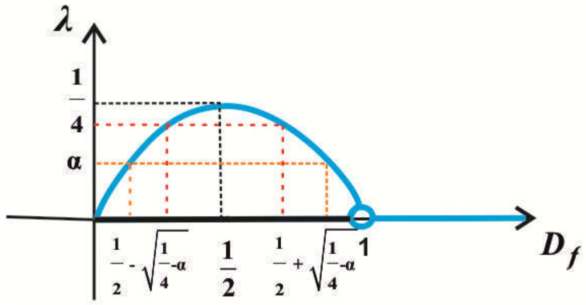
$$D_f(\lambda)=\begin{cases} 2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\text{-}\lambda}, & 0<\lambda\le\frac{1}{4} \\ 0, & \lambda>\frac{1}{4} \end{cases}$$ olur.

İkinci yol olarak da f fonksiyonun grafiği kullanılarak dağılım fonksiyonu bulunabilir.



Şekil 2.6. Örnek 2.3.4'deki f fonksiyonun grafiği

Dağılım fonksiyonunu oluştururken, f'nin görüntü kümesi parçalara ayırıp incelenirse,



Şekil 2.7. Örnek 2.3.4'deki f fonksiyonunun değer kümesinin parçalanışı grafiği

λ değeri $\left(0,\frac{1}{4}\right]$ aralığında olduğu zaman ve dağılım fonksiyonunun tanımı kullanılırsa, aralıkların ölçümü olacaktır. Örneğin α değerine karşılık gelen aralığa dikkat edilirse, $D_f(\alpha)=\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha}\right)-\left(\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha}\right)=2\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha}$ olur. $\lambda>\frac{1}{4}$ olduğunda; $D_f(\lambda)=0$ olduğu söylenir.

$$D_f(\alpha)=\begin{cases}2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}-\alpha}\,, & 0<\lambda\le\frac{1}{4}\\ 0\,, & \lambda>\frac{1}{4}\end{cases}$$ biçiminde tanımlanır.

Şimdi ise artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu oluşturulursa, $f^*(t)=\inf\{\lambda\ge 0: D_f(\lambda)\le t\}$ olduğu biliniyor. Tanıma dikkat edilirse artmayan yeniden düzenleme fonksiyonuda dağılım fonksiyonunu temel almaktadır.

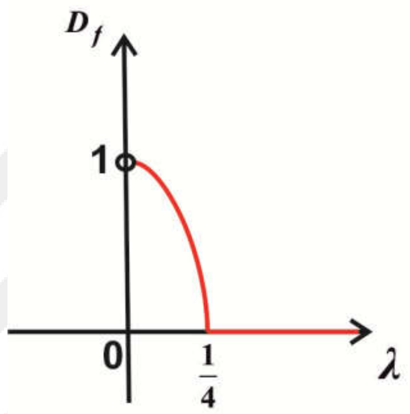
İlk olarak cebirsel işlemler yardımıyla artmayan yeniden düzenleme fonksiyonunu bulmaya çalışılsın.

I. Durum: $0<\lambda\le\frac{1}{4}$ olduğunda, $f^*(t)=\inf\left\{\lambda\ge 0: 2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}\le t\right\}$ ifadesinde λ'yı t parametresi cinsinden çekilirse,

$$f^*(t)=\inf\left\{\lambda\ge 0:\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}\le\frac{t}{2}\right\}=\inf\left\{\lambda\ge 0:\lambda\ge\frac{1}{4}-\left(\frac{t}{2}\right)^2\right\}=\frac{1-t^2}{4}$$ elde edilir.

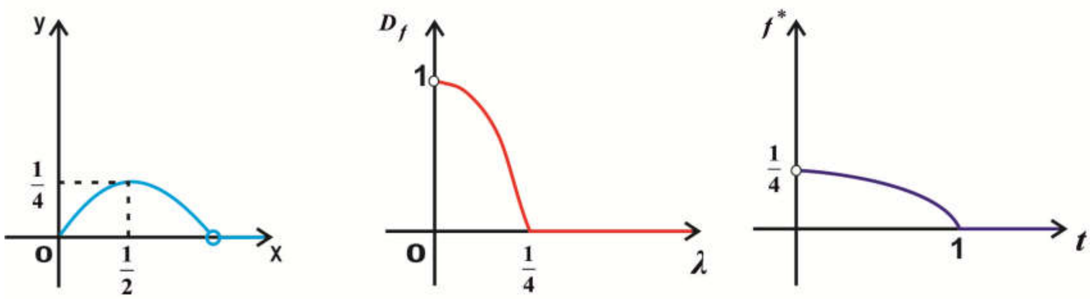
II. Ayrıca $0<\lambda\leq\frac{1}{4}\Rightarrow 0\leq t<1$ bulunur.

III. Durum: $\lambda>\frac{1}{4}$ olduğunda, $f^{*}(t)=\inf\{\lambda\geq 0:0\leq t\}=0$ ve $t>1$ olacaktır. $f^{*}(t)=\begin{cases}\frac{1-t^2}{4}, & 0\leq t<1\\ 0, & t>1\end{cases}$ biçiminde tanımlanır. İkinci yol olarak dağılım fonksiyonunun grafiği kullanılarak artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu oluşturulabilinir.



Şekil 2.8. Örnek 2.3.4'deki f fonksiyonuna ait dağılım fonksiyonun grafiği

$f^{*}(t)=\inf\{\lambda\geq 0:D_f(\lambda)\leq t\}$ ifadesini kullandığımızda t nin 0 ile 1 arasındaki değerlere daha sonra da t nin 1 den büyük değerlerde dağılım fonksiyonuna bakılırsa, $0\leq t<1$ olduğunda $D_f(\lambda)=2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda}$ ve $\lambda\geq\frac{1-t^2}{4}$ elde edilir. f^{*}'ın tanımından $f^{*}(t)=\frac{1-t^2}{4}$ bulunur. $t>1$ olduğun da ise $D_f(\lambda)=0$ olur. Buradan $f^{*}(t)=0$ elde edilir. Şimdi üç fonksiyonunun grafiklerini yan yana konulursa,



Şekil 2.9. Örnek 2.3.4'e ait f , D_f , f^{*} fonksiyonların grafikleri

grafiklere bakıldığı zaman bazı aralıklarda aynı karaktere sahiptirler. Sınırlı fonksiyonlar uzayında tanımlanan norm, $\|f\|_\infty = \inf\left\{\lambda \geq 0 : \mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > \lambda\right\}\right) = 0\right\}$ olduğu bilindiğine göre, $f^*(0) = \inf\left\{\lambda \geq 0 : D_f(\lambda) \leq 0\right\} = \|f\|_\infty$ olduğu açıkça görülür. Ayrıca D_f kesin azalan olduğunda $f^*\left(D_f(t)\right) = \inf\left\{\lambda \geq 0 : D_f(\lambda) \leq D_f(t)\right\} = t$ eşitliği elde edilir. Bu ise f^* fonksiyonunun D_f dağılım fonksiyonunun sol tersi olduğunu söyler. Genel olarak $f^*\left(D_f(\lambda)\right) \leq \lambda$ eşitsizliği vardır. Gerçekten sabit $\lambda \geq 0$ ve $t = D_f(\lambda) < \infty$ değerleri alınırsa, $f^*\left(D_f(\lambda)\right) = f^*(t) = \inf\left\{\lambda^* \geq 0 : D_f\left(\lambda^*\right) \leq D_f(\lambda)\right\} \leq \lambda$ eşitsizliğine ulaşılır. $\lambda = f^*(t) \leq \infty$ olsun, D_f sağdan sürekli olduğu için bir $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır ki $\lambda_n \to \lambda$ ve $D_f(\lambda_n) \leq t$, $D_f\left(f^*(t)\right) = D_f(\lambda) = \lim\limits_{n\to\infty} D_f(\lambda_n) \leq t \Rightarrow D_f\left(f^*(t)\right) \leq t$ olduğu görülür. Sonraki teoremde artmayan yeniden düzenleme fonksiyonuna ait bazı temel özellikleri verelim.

Teorem 2.3.5: f^* artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu olmak üzere;

a) f^* artmayandır.

b) $f^*(t) > \lambda \Leftrightarrow D_f(\lambda) > t$

c) f ve f^* eş ölçülebilirdir yani $\forall \lambda \geq 0$ için $D_f(\lambda) = D_{f^*}(\lambda)$

d) $f \in M(X,\Sigma)$ olduğunda, $\forall t \geq 0$ için $f^*(t) = D_{D_f}(t)$ $\left(f^* \text{ sağdan süreklidir.}\right)$

e) $\alpha \in \mathbb{R}$; $(\alpha \cdot f)^*(t) = |\alpha| \cdot f^*(t)$

f) $|f_n| \to |f| \Rightarrow f_n^* \to f^*$

g) $|f| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf |f_n| \Rightarrow f^* \leq \lim\limits_{n\to\infty} \inf \left|f_n^*\right|$

h) $0<p<\infty$ için $\left(|f|^p\right)^*(t)=\left[f^*(t)\right]^p$

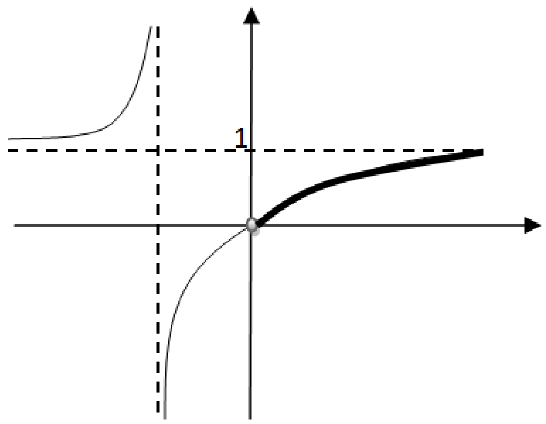
ı) $|f|\le|g| \Rightarrow f^*(t)\le g^*(t)$

i) $E\in\Sigma$ olduğunda; $(\chi_E)^*(t)=\chi_{[0,\mu(E))}(t)$

j) $E\in\Sigma$ olduğunda; $(f\cdot\chi_E)^*(t)=f^*(t)\cdot\chi_{[0,\mu(E))}(t)$

k) $f\in M(X,\Sigma)$, $\lambda>0$ ve $F=\chi_{E_f(\lambda)} \Rightarrow F^*(t)=\chi_{E_{f^*}(\lambda)}(t)$ eşitliği vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Uyarı 2.3.6: Teorem 2.3.5'deki c şıkkında $D_f(\lambda)$ ifadesinde $>$ yerine $\ge$ yazılırsa doğru değildir. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ fonksiyonu düşünülünürse, $\forall x\in[0,\infty)$ için $f^*(t)=1$ olur. Bunun için ilk önce f'nin dağılım fonksiyonu oluşturulsun. $D_f(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in[0,\infty):\left|\dfrac{x}{x+1}\right|>\lambda\right\}\right)=\mu\left(\left\{x\in[0,\infty):\dfrac{x}{x+1}>\lambda\right\}\right)$ ve f nin grafiği çizilirse,



Şekil 2.10. Uyarı 2.3.6'daki f fonksiyonun grafiği

fonksiyonun değer kümesi parçalanırsa, $D_f(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{1-\lambda}, & 0\le\lambda<1\\ 0, & \lambda\ge 1\end{cases}$ dağılım fonksiyonu elde edilir. $f^*(t)=\inf\left\{\lambda\ge 0: D_f(\lambda)\le t\right\}=1$ olup buradan ölçüme geçildiğinde $\mu\left(\left\{x\in[0,1):\left|\frac{x}{x+1}\right|>\lambda\right\}\right)=0\neq\infty=m\left(\{t\geq 0:1\geq 1\}\right)$ elde edilir. Sonuç olarak $D_f(\lambda)\neq D_{f^*}(\lambda)$ olduğu görülür.

Teorem 2.3.7: f ile denk olan yalnızca bir tane sağdan sürekli artmayan f^* fonksiyonu vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Örnek 2.3.8: $x\in(0,\infty)$ ve $f(x)=1-e^{-x}$ fonksiyonuna ait dağılım ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonlarını bulunuz.

Çözüm: $D_f(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in(0,\infty):\left|1-e^{-x}\right|>\lambda\right\}\right)$ foksiyonundaki mutlak değer eşitsizliği çözülürse,

$$\left|1-e^{-x}\right|>\lambda\Rightarrow\begin{cases}1-e^{-x}>\lambda\Rightarrow 1-\lambda>e^{-x}\Rightarrow -x<\ln(1-\lambda)\Rightarrow x>\ln\left(\dfrac{1}{1-\lambda}\right)\\ 1-e^{-x}<-\lambda\Rightarrow 1+\lambda<e^{-x}\Rightarrow -x>\ln(1+\lambda)\Rightarrow x<\ln(\dfrac{1}{1+\lambda})\end{cases},\lambda\in[0,1)$$

$$\mu\left(\left\{x\in(0,\infty):\left|1-e^{-x}\right|>\lambda\right\}\right)=\ln\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)-\ln\left(\frac{1}{1-\lambda}\right)=\ln\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)$$

İkinci olarak ise $\lambda\geq 1$ değer aralığı düşünüldüğünde, $\left|1-e^{-x}\right|>1$ eşitsizliğini sağlayan $x\in(0,\infty)$ değerleri var olmadığı için küme boş olacaktır. Boş kümenin ölçüsü sıfırdır. Sonuç olarak, $D_f(\lambda)=\begin{cases}\ln\left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right), & 0\leq\lambda<1\\ 0, & \lambda\geq 1\end{cases}$ dağılım fonksiyonu elde edilir. Buna bağlı olarak artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu oluşturulursa, $0\leq\lambda<1$ olduğun da $D_f(\lambda)=\ln\left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)$ ve

$f^*(t)=\inf\left\{\lambda\geq 0:\ln\left(\dfrac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)\leq t\right\}=1$ $\lambda\geq 1$ olduğunda da $f^*(t)=1$ dir.

Örnek 2.3.9: Basit fonksiyonların artmayan yeniden düzenleme fonksiyonuda yine bir basit fonksiyondur (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Çözüm: S bir basit fonksiyon ise $\alpha_i>0$ reel sayılar ve χ_{A_j}, $A_j$nin karakteristik fonksiyonu ve $0<\alpha_n<\alpha_{n\text{-}1}<\alpha_{n\text{-}2}<\cdots\alpha_2<\alpha_1, A_j=\left\{x:S(x)=\alpha_j\right\}$ olmak üzere

$S(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\chi_{A_j}(x)$ biçiminde yazıldığı biliniyor.

Eğer $\lambda\geq\alpha_1$ ise $D_S(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:|S(x)|>\lambda\right\}\right)$, $S(x)$ sonuçta α_j lerden birisi olacağı için küme boş olacaktır. Bu ise ölçümün yani $D_S(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:|S(x)|>\lambda\right\}\right)=0$ olmasını gerektirir. $\alpha_2\leq\lambda<\alpha_1$ ise $D_S(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:|S(x)|>\lambda\right\}\right)$ bu durumda $S(x)=\alpha_1$ ve $D_S(\lambda)=\mu(A_1)$ olur. Daha genel düzenleme yapılırsa, $\alpha_j\leq\lambda<\alpha_{j+1}$ olduğunda $D_S(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:|S(x)|>\lambda\right\}\right)\Rightarrow D_S(\lambda)=\mu\left(A_{j+1}\right)$, $D_S(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\chi_{\left[\alpha_{j-1},\alpha_j\right)}(\lambda)$

burada $\beta_j=\sum_{i=1}^{j}\mu(A_i)$ dır. Bu örnek bize gösterir ki basit fonksiyonunun dağılım fonksiyonuda yine basit bir fonksiyondur. Şimdi ise basit fonksiyonunun artmayan yeniden düzenleme fonksiyonuda araştırılınırsa, $S^*(t)=\inf\left\{\lambda\geq 0:D_S(\lambda)\leq t\right\}=$ $\inf\left\{\lambda\geq 0:\sum_{j=1}^{n}\beta_j\chi_{\left[\alpha_{j-1},\alpha_j\right)}(\lambda)\leq t\right\}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\chi_{\left[\beta_{j-1},\beta_j\right)}(t)$ bu ise artmayan yeniden düzenleme fonksiyonun da yine bir basit fonksiyon olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.10 : (X,Σ,μ) ölçüm uzayı ve $f,g\in M(X,\Sigma)$ olmak üzere,

i. $\forall t,u\geq 0;(f+g)^*(t+u)\leq f^*(t)+g^*(u)$

ii. $\forall t,u\geq 0;(f\cdot g)^*(t+u)\leq f^*(t)\cdot g^*(u)$

iii. $\forall t\geq 0;(f+g)^*(2t)\leq f^*(t)+g^*(t)$

iv. $\forall t\geq 0;(f\cdot g)^*(2t)\leq f^*(t)\cdot g^*(t)$ eşitsizlikleri vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Teorem 2.3.11: $\int_0^t f^*(s)\,ds=t\cdot f^*(t)+\int_{f^*(t)}^{\infty}D_{f^*(t)}(\lambda)\,d\lambda$ eşitliği vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Bir sonraki teorem oldukça önemlidir. Bir fonksiyonunun integralinin artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu ile aynı değere sahip olduğunu gösterecektir.

Teorem 2.3.12: (X,Σ,μ) $\sigma-$ sonlu ölçüm uzayı ve φ türevlenebilir, artan ve $\varphi(0)=0$ olan fonksiyon olmak üzere, $\int\limits_X \varphi(|f|)\,d\mu=\int\limits_0^\infty \varphi\left(f^*(t)\right)dt$ eşitliği vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Teorem 2.3.13: (X,Σ,μ) bir $\sigma-$sonlu ölçüm uzayı ve $f,g\in M(X,\Sigma)$ olsun. Bu takdirde $\int\limits_X |f\cdot g|\,d\mu\le \int\limits_0^\infty f^*(t)\cdot g^*(t)\,dt$ (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Teorem 2.3.14: (X,Σ,μ) ölçüm uzayı ve $f\in M(X,\Sigma)$ olmak üzere, $\forall E\in\Sigma$ için $\int\limits_E |f|\,d\mu\le \int\limits_0^{\mu(E)} f^*(t)\,dt$ eşitsizliği vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Tanım 2.3.15: (X,Σ) ölçülebilir uzayı ve bu uzay üzerinde tanımlı bir ölçüm μ olsun. Her hangi $G\in\Sigma$ kümesi,

i. $\mu(G)>0$

ii. $\mu(G)>\mu(A)$ olan G'nin herhangi bir ölçülebilir A alt kümesi için $\mu(A)=0$.

özelliklerini sağlarsa G'ye atom denir. Ayrıca atom içermeyen bir ölçü non-atomic (atomik olmayan) veya atomsuz olarak adlandırılır (Castillo ve Rafeiro, 2015). Yukarıdaki tanıma dikkat edildiğinde μ atomik olmayan ölçüm ve A ölçülebilir küme, $\mu(A)>0$ herhangi b reel sayısı için $0\le b\le\mu(A)$, $B\subset A$ ölçülebilir küme vardır ve $\mu(B)=b$ dir. Aynı zamanda en az bir pozitif değere sahip atomik olmayan bir ölçü, $\mu(A)>0$ olan A kümesi ile başlayan $A=A_1\supset A_2\supset A_3\cdots$ olacak şekilde ölçülebilir kümelerin azalan bir dizi oluşturabilir ve $\mu(A)=\mu(A_1)>\mu(A_2)>\mu(A_3)\cdots>0$ sonsuz sayıda bağımsız değerlere sahiptir.

Teorem 2.3.16: (X,Σ,μ) atomik olmayan bir ölçüm uzayı olmak üzere, $\sup\left\{\int\limits_E |f|\,d\mu:\mu(E)=t\right\}=\int\limits_0^t f^*(s)\,ds$ (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Uyarı 2.3.17: f ve g ölçülebilir iki fonksiyon ve $\mu(E)=t$ olan $\forall E\in\Sigma$ kümesi için $\int_E |f+g|\,d\mu \le \int_E |f|\,d\mu + \int_E |g|\,d\mu = \int_0^t f^*(k)\,dk + \int_0^t g^*(k)\,dk$ (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Teorem 2.3.18: f ve g negatif olmayan $(0,\infty)$ üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonlar olsun. $\forall t>0$ için $\int_0^t f(s)\,ds \le \int_0^t g(s)\,ds$ olduğunda, $\int_0^\infty f(s)\cdot k(s)\,ds \le \int_0^\infty g(s)\cdot k(s)\,ds$ $(0,\infty)$ üzerinde tanımlı negatif olmayan azalan k fonksiyonu vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Sonuç 2.3.19: (X,Σ,μ) atomik olmayan bir ölçüm uzayı ve $f,g,h\in M(X,\Sigma)$ olsun. O zaman $\int_X |f\cdot g\cdot h|\,d\mu \le \int_0^\infty f^*(t)\cdot g^*(t)\cdot h^*(t)\,dt$ (Castillo ve Rafeiro, 2015).

2.4 Maksimal Fonksiyon

Tanım 2.4.1: $f \in M(X,\Sigma)$ olmak üzere $t > 0$ için $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds$ biçiminde tanımlanan fonksiyona f^*'ın maksimal fonksiyonu denir (Bennett ve Sharpley, 1988).

Teorem 2.4.2: f^* ve f^{**} fonksiyonları için aşağıdakiler sağlanır (Castillo ve Rafeiro, 2015; Bennett ve Sharpley, 1988).

i. $f^* \le f^{**}$ yani $\{\forall t > 0, f^*(t) \le f^{**}(t)\}$

ii. f^{**} fonksiyonu artmayandır.

iii. $(f+g)^{**} \le f^{**} + g^{**}$ yani $\{\forall t > 0, (f+g)^{**}(t) \le f^{**}(t) + g^{**}(t)\}$

İspat:

i) $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds \ge f^*(t)\cdot\frac{1}{t}\int_0^t ds = f^*(t)$

ii) f^{**} artmayan fonksiyondur. f^* artmayan fonksiyon olduğu biliniyor. $0 \le t < s$ alındığında ve $\frac{t}{s} \le 1$ olduğundan $\frac{tv}{s} \le v$ olur. Bu yüzden $f^*(v) \le f^*\left(\frac{tv}{s}\right)$ bulunur. Buradan maksimal fonksiyona geçiş yapılırsa, $\frac{tv}{s} = u$ dönüşümünü uygulandığında, $\frac{tv}{s} = u \Rightarrow dv = \frac{s}{t}du$ ve $v = 0$ için $u = 0$, $v = s$ için $u = t$ olacağından $\frac{1}{s}\int_0^s f^*\left(\frac{tv}{s}\right)dv = \frac{1}{s}\int_0^t f^*(u)\frac{s}{t}du = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)\,du = f^{**}(t)$ olur. Sonuç olarak $0 \le t < s$ olduğun da $f^{**}(s) \le f^{**}(t)$, f^{**} artmayandır.

iii) $(f+g)^{**} \le f^{**} + g^{**}$ olduğu gösterilsin.

$t > 0$ için $(f+g)^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (f+g)^*(s)\,ds = \frac{1}{t}\sup\left\{\int_E |f+g|\,d\mu : \mu(E) = t\right\}$

$$\sup\left\{\int_E |f+g|\,d\mu : \mu(E)=t\right\} \le \sup\left\{\int_E \left(|f|+|g|\right)d\mu : \mu(E)=t\right\} \le$$

$$\sup\left\{\int_E |f|\,d\mu : \mu(E)=t\right\} + \sup\left\{\int_E |g|\,d\mu : \mu(E)=t\right\} = \int_0^t f^*(s)\,ds + \int_0^t g^*(s)\,ds$$

sonuç olarak;

$$(f+g)^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (f+g)^*(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(k)\,dk + \frac{1}{t}\int_0^t g^*(k)\,dk = f^{**}(t) + g^{**}(t)$$

olur.

Teorem 2.4.3: (X,Σ,μ) bütünüyle $\sigma-$sonlu ölçüm uzayı, $f \in L_1(X,\Sigma,\mu)$ ve $x^+ = \max\{x,0\}$ olmak üzere, aşağıdaki eşitlikler doğrudur (Castillo ve Rafeiro, 2015).

i. $\forall\lambda > 0$ için $\int_X \left(|f|-\lambda\right)^+ d\mu = \int_0^\infty \left(f^*(t)-\lambda\right)^+ dt$

ii. $D_f(\lambda) = -\frac{d}{d\lambda}\int_X \left(|f|-\lambda\right)^+ d\mu$

iii. $t > 0;\ f^{**}(t) = \inf_{\lambda\ge 0}\left\{\lambda + \frac{1}{t}\int_X \left(|f|-\lambda\right)^+ d\mu\right\}$

Sonuç 2.4.4: $f, g \in L_1(X,\Sigma,\mu)$ olmak üzere,

$\forall t \ge 0$ için $t\cdot\left|f^{**}-g^{**}\right| \le \int_X \big||f|-|g|\big|\,d\mu \le \int_X |f-g|\,d\mu$ eşitsizliği vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Sonuç 2.4.5: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ f fonksiyonu X üzerinde integrallenebilir ve $\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n(x)-f(x)|\,d\mu=0$ olduğunda f^* nin sürekli her noktasında $\lim_{n\to\infty} f_n^*(t)=f^*(t)$ olur (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Teorem 2.4.6: (X,Σ,μ) atomik olmayan ölçüm uzayı, Φ sağdan sürekli ve $[0,\infty)$ üzerinde azalan fonksiyon olmak üzere, X üzerinde $\forall t > 0$ için, $f^*(t) = \Phi(t)$ olacak şekilde ölçülebilir f fonksiyon vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: İkişerli ayrık $\left(j \neq k, E_k \cap E_j = \varnothing\right)$ $E_k \in \Sigma, \mu\left(E_k\right) \geq 0$ ve $c_1 > c_2 > c_3 > c_4 > \cdots > c_{n\text{-}1} > c_n, c_{n+1} = 0$ olmak üzere $\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ fonksiyonu oluşturulsun. Dağılım fonksiyonu, $D_f\left(\lambda\right) = \begin{cases} d_k, & c_{k+1} \leq \lambda \leq c_k \; ve \; 1 \leq k \leq n \\ 0, & c_n \leq \lambda \end{cases}$ formunda olur. Burada $d_k = \mu\left(E_1\right) + \mu\left(E_2\right) + \cdots + \mu\left(E_k\right), 1 \leq k \leq n$ ve $d_0 = 0$. f 'nin artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu yazıldığında, $f^*\left(t\right) = \begin{cases} c_k, & d_{k\text{-}1} \leq t \leq d_k \text{ ve} 1 \leq k \leq n \\ 0, & d_n \leq t \end{cases}$ elde edilir. $\Phi\left(t\right) = \begin{cases} c_k, & d_{k\text{-}1} \leq t \leq d_k \\ 0, & d_n \leq t \end{cases}$ biçiminde tanımlanan $\Phi\left(t\right)$ fonksiyonu sağdan süreklidir. Aynı zamanda artmayandır, $t_0 \leq t$ olduğunda $\Phi\left(t\right)$'nin tanımı gereği $\Phi\left(t\right) \leq \Phi\left(t_0\right)$ olacaktır. Buradan da $\forall t > 0$ için, $f^*\left(t\right) = \Phi\left(t\right)$ olur.

3. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

3.1 Lorentz Uzayları ve Bazı Özellikleri

(X,Σ,μ) $\sigma-$sonlu ölçüm uzayı, φ türevlenebilir, artan bir fonksiyon ve teorem 2.3.12' deki $\int_X \varphi(|f|)\,d\mu = \int_0^t \varphi\left(f^*(t)\right)dt$ eşitlik dikkate alınsın. Özel olarak $\varphi(t)=t^p$ ve $1\le p<\infty$ seçimi yapıldığında, $\int_X |f|^p\,d\mu = \int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^p dt$ olur. Bu eşitlik $\|f\|_{L_p(X,\mu)} = \|f\|_{L_p(\mathbb{R},m)}$ olduğunu verir.

Tanım 3.1.1: (X,Σ,μ) ölçüm uzayı, herhangi $f\in M(X,\Sigma)$ ve $1\le p,q\le\infty$ olmak üzere,

$$\|f\|_{L_{(p,q)}} = \|f\|_{(p,q)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \dfrac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} & ,q<\infty \\ \sup\limits_{t>0}\left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right) & ,q=\infty \end{cases}$$

$\|\cdot\|_{(p,q)}$ fonksiyonu, $M(X,\Sigma)$ üzerinde tanımlı genişletilmiş negatif değer almayan fonksiyondur (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Örnek 3.1.2: $f\in M(X,\Sigma)$ olmak üzere, $\|f\|_{(p,p)} = \|f\|_p$ eşitliği vardır.

Çözüm:

$$\|f\|_{(p,p)}=\begin{cases}\left(\int\limits_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^p\dfrac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{p}} & ,p<\infty\\ \sup\limits_{t>0}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right) & ,p=\infty\end{cases}=\begin{cases}\left(\int\limits_0^\infty\left(f^*(t)\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}} & ,p<\infty\\ \sup\limits_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t) & ,p=\infty\end{cases}=\|f\|_p$$

Örnek 3.1.3: Herhangi $A\in\Sigma$ ve $0<\mu(A)<\infty$, $\|\chi_A\|_{(p,q)}=?$

Çözüm:

I. Durum: $q<\infty$ olsun. Teorem 2.3.5.'de $\chi_A^*(t)=\chi_{[0,\mu(A))}(t)$ olduğu bilindiğine göre,

$$\|\chi_A\|_{(p,q)}=\left(\int\limits_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}\chi_A^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int\limits_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}\chi_{[0,\mu(A))}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\int\limits_0^{\mu(A)}\left(t^{\frac{1}{p}}\cdot 1\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu(A)\right)^{1/p}$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu(A)\right)^{1/p}=\begin{cases}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu(A)\right)^{1/p} & ,1\le p,q<\infty\\ \infty & ,p=\infty,q<\infty\end{cases}$$

II. Durum: $q=\infty$ olsun.

$$\|\chi_A\|_{(p,\infty)}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}\chi_A^*(t)=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}\chi_{[0,\mu(A))}(t)=\left(\mu(A)\right)^{1/p}=\begin{cases}\left(\mu(A)\right)^{1/p} & ,1\le p,q<\infty\\ 1 & ,p=\infty\end{cases}$$

I ve II durumları birleştirilirse,

$$\|\chi_A\|_{(p,q)}=\begin{cases}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu(A)\right)^{1/p} & ,1\le p,q<\infty\\ \infty & ,p=\infty,q<\infty\\ \left(\mu(A)\right)^{\frac{1}{p}} & ,1\le p,q=\infty\\ 1 & ,p=\infty,q=\infty\end{cases}$$ ifadesi elde edilir.

Tanım 3.1.4: (X,Σ,μ) herhangi bir ölçüm uzayı, $1\le p,q\le\infty$ olsun. $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)=\left\{f\in M(X,\Sigma):\|f\|_{(p,q)}<\infty\right\}$ kümesine (X,Σ,μ) ile ilişkili ön-Lorentz uzay denir (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Uyarı 3.1.5: $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayı tanımı gereği $1\le q<\infty, p=\infty$ olduğu duramlar incelenmeyecektir. $f\in M(X,\Sigma), 1\le q<\infty, p=\infty$ ve $\|f\|_{(\infty,q)}<\infty$ olduğunda $L_{(\infty,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayı incelenirse,

$$\|f\|_{(\infty,q)}=\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{\infty}}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_0^\infty\left(f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\ge\left(\int_0^s\left(f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\ge$$

$f^*(s)\left(\int_0^s\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$ ve $0\le t\le s$ olduğunda $f^*(t)\ge f^*(s)$ dir. $\forall s>0$ için $f^*(s)=0$ olacaktır. Bu ise $f=0$ μ- h.h.h. demektir. Bu nedenle, $p=\infty, 1\le q<\infty$ için $L_{(\infty,q)}(X,\Sigma,\mu)=\{0\}$ olacaktır.

Teorem 3.1.6: (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı, p, q ve r genişletilmiş reel sayılar $1\le p<\infty$, $1\le q<r\le\infty$ olmak üzere; $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\subseteq L_{(p,r)}(X,\Sigma,\mu)$ olup

$\forall f\in M(X,\Sigma);\|f\|_{(p,r)}\le\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\|f\|_{(p,q)}$ (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: İlk olarak $r=\infty$ olsun. $\forall f\in M(X,\Sigma)$ için $\|f\|_{(p,\infty)}=\sup\limits_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t)$ ve

$$\left(\|f\|_{(p,q)}\right)^q=\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\geq\int_0^s\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}=\int_0^s t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^*(t)\right)^q dt\geq$$

$\left(\frac{p}{q}\right)s^{\frac{q}{p}}\left(f^*(s)\right)^q$ olduğundan $\|f\|_{(p,q)}\geq\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}s^{\frac{1}{p}}f^*(s)$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikde $s>0$ üzerinden supremum alınırsa,

$$\sup_{s>0}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}s^{\frac{1}{p}}f^*(s)\leq\|f\|_{(p,q)}\Rightarrow\|f\|_{(p,\infty)}\leq\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{(p,q)} \qquad \textbf{(3.1)}$$

eşitsizliği elde edilir.

İkinci olarak ise $1\leq q<r<\infty$ olsun. $\|f\|_{(p,\infty)}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\geq t^{\frac{1}{p}}f^*(t)$ olduğu biliniyor. Buradan

$$\left(\|f\|_{(p,r)}\right)^r=\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^r\frac{dt}{t}=\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^{r\text{-}q}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}$$

$$\leq\int_0^\infty\left(\|f\|_{(p,\infty)}\right)^{r\text{-}q}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}$$

$$\left(\|f\|_{(p,\infty)}\right)^{r\text{-}q}\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\leq\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{(p,q)}\right)^{r\text{-}q}\left(\|f\|_{(p,q)}\right)^q=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1}\left(\|f\|_{(p,q)}\right)^r$$

olup (3.1) kullanılırsa,

$\left(\|f\|_{(p,r)}\right)^r\leq\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1}\left(\|f\|_{(p,q)}\right)^r\Rightarrow\|f\|_{(p,r)}\leq\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\|f\|_{(p,q)}$ eşitsizliği bulunur. Herhangi bir $f\in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ verilsin. O zaman $\|f\|_{(p,q)}<\infty$ olup $\|f\|_{(p,r)}\leq\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\|f\|_{(p,q)}$ olduğundan $f\in L_{(p,r)}(X,\Sigma,\mu)$ bulunur. Bu yüzden $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\subseteq L_{(p,r)}(X,\Sigma,\mu)$ olur.

Teorem 3.1.7: (X,Σ,μ) bir ölçüm uzayı, $1 \le p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ ve $f,g \in M(X,\Sigma)$ olmak üzere; $\|f+g\|_{(p,q)} \le 2^{1/p}\left(\|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}\right)$ eşitsizliği sağlanır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: İlk olarak $q=\infty$ durumunu incelenirse, Teorem 2.3.10. ile $\|f+g\|_{(p,\infty)} = \sup\limits_{t>0} t^{1/p}(f+g)^*(t) \le \sup\limits_{t>0} t^{1/p}\left(f^*\left(\frac{t}{2}\right) + g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)$ yazılır. $t=2m$ değişimi yapılırsa

$$\|f+g\|_{(p,\infty)} \le \sup_{t>0}(2m)^{\frac{1}{p}}\left(f^*(m)+g^*(m)\right) = 2^{\frac{1}{p}}\left(\sup_{m>0} m^{\frac{1}{p}} f^*(m) + \sup_{m>0} m^{\frac{1}{p}} g^*(m)\right)$$

$\|f+g\|_{(p,\infty)} \le 2^{1/p}\left(\|f\|_{(p,\infty)} + \|g\|_{(p,\infty)}\right)$ elde edilir.

İkinci olarak ise $q<\infty$ olsun. Teorem 2.3.10. iii. eşitsizliği kullanılırsa

$$\|f+g\|_{(p,q)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}(f+g)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\left(f^*\left(\frac{t}{2}\right)+g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{(p,q)} &\le \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}\left(f^*\left(\frac{t}{2}\right)+g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &\le \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} + \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}\end{aligned}$$

elde edilir. $\frac{t}{2}=m$ dönüşümü yapılırsa;

$$\|f+g\|_{(p,q)} \le \left(\int_0^\infty \left((2m)^{1/p} f^*(m)\right)^q \frac{d(2m)}{2m}\right)^{1/q} + \left(\int_0^\infty \left((2m)^{1/p} g^*(m)\right)^q \frac{d(2m)}{2m}\right)^{1/q}$$

$$\|f+g\|_{(p,q)} \le 2^{1/p}\left(\|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}\right)$$

eşitsizliğinin varlığı ispatlanır.

Teorem 3.1.8: $1 \le p < \infty$, $1 \le q \le \infty$ olmak üzere $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayı bir vektör uzaydır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayı $M(X,\Sigma)$ fonksiyonlar uzayının bir alt kümesi olduğu açıktır. Fonksiyonlar uzayının toplama ve skalerle çarma işlemleri altında vektör uzayı olduğu biliniyor. Bu yüzden $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayının işlemler altında kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Teorem 2.1.8 i. şıkkında iki ölçülebilir fonksiyonun toplamlarının ve skalerle çarpımınında ölçülebilir fonksiyon olduğu bilindiğine göre, $f,g \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olduğunda $f+g \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ ve $\lambda \cdot f \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\|f+g\|_{(p,q)} \le 2^{1/p}\left(\|f\|_{(p,q)}+\|g\|_{(p,q)}\right)$ olduğu için $f+g \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ dür. Teorem 2.3.5. e) şıkkında $(\lambda \cdot f)^*(t)=|\lambda| \cdot f^*(t)$ eşitliği kullanılırsa,

$$\|\lambda \cdot f\|_{(p,q)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}(\lambda \cdot f)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = |\lambda| \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p}(\lambda \cdot f)^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q}$$
$$= |\lambda| \|f\|_{(p,q)} < \infty$$

elde edilir. $f+g \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ ve $\lambda \cdot f \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ olduğundan alt vektör uzayı dolayısıyla vektör uzayıdır.

Teorem 3.1.9: $f \in M(X,\Sigma)$, $\|f\|_{(p,q)} = 0 \Leftrightarrow f = 0$ $\mu-$h.h.h. (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: $$\|f\|_{(p,q)} = 0 \Rightarrow 0 = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right) \ge \int_0^s \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} \ge \frac{p}{q} s^{\frac{q}{p}} f^*(s) \ge 0$$

ile $\forall s \ge 0$ için $f^*(s)=0$ olur. O zaman

$$\int_X |f|\, d\mu = \int_0^\infty f^*(s)\, ds = 0 \Rightarrow f = 0 \quad (\mu - \text{h.h.h.})$$

Tersine, $f = 0$ ($\mu-$h.h.h.) $\|f\|_{(p,q)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{1/p} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} = 0$

Teorem 3.1.10: $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ atomik olmayan bir ölçüm uzayı olsun.

i. $1 \le p < q \le \infty$

ii. $0 < p < 1$ ve $0 < q \le \infty$

iii. $0 < p < \infty$ ve $0 < q < 1$ koşulları altında $\|\cdot\|_{(p,q)} : L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu) \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü norm değildir (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: Bu şartlar altında norm olmadığını göstermek için örnek vermek yeterlidir.

i) $1 \le p < q \le \infty$, $\alpha, l, \varepsilon > 0$ olmak üzere $f(x) = (1+\varepsilon)\chi_{[0,\alpha+l]}(x) + \chi_{[\alpha+l,\alpha+2l]}(x)$ ve $g(x) = \chi_{[0,l]}(x) + (1+\varepsilon)\chi_{[l,\alpha+2l]}(x)$ fonksiyonlarının dağılım ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonları bulunduğunda, $f^*(t) = g^*(t) = f(t)$ olduğu kolayca görülür. Gerçekten,

$$f(x) = (1+\varepsilon)\chi_{[0,\alpha+l]}(x) + \chi_{[\alpha+l,\alpha+2l]}(x) = \begin{cases} (1+\varepsilon) & ,0 \le x < \alpha+l \\ 1 & ,\alpha+l \le x < \alpha+2l \\ 0 & ,x \ge \alpha+2l \end{cases}$$

$$D_f(\lambda) = \mu\left(\left\{x \in X : |f(x)| > \lambda\right\}\right) = \begin{cases} \alpha+2l & ,0 \le \lambda < 1 \\ \alpha+l & ,1 \le \lambda < 1+\varepsilon \\ 0 & ,\lambda \ge 1+\varepsilon \end{cases}$$

$$f^*(t) = \inf\left\{\lambda \ge 0 : D_f(\lambda) \le t\right\} = \begin{cases} 1+\varepsilon, & 0 \le t < \alpha+l \\ 1, & \alpha+l \le t < \alpha+2l \\ 0, & t \ge \alpha+2l \end{cases} \qquad f^*(t) = f(t) \text{ olur.}$$

$$g(x) = \chi_{[0,l]}(x) + (1+\varepsilon)\chi_{[l,\alpha+2l]}(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \le x < l \\ (2+\varepsilon) & ,x = l \\ (1+\varepsilon) & ,l < x \le \alpha+2l \\ 0 & ,x > \alpha+2l \end{cases}$$

$$D_g(\lambda) = \mu\left(\left\{x \in X : |g(x)| > \lambda\right\}\right) = \begin{cases} \alpha+2l & ,0 \le \lambda < 1 \\ \alpha+l & ,1 \le \lambda < 1+\varepsilon \\ 0 & ,\lambda \ge 1+\varepsilon \end{cases}$$

$$g^*(t) = \inf\left\{\lambda \ge 0 : D_g(\lambda) \le t\right\} = \begin{cases} (1+\varepsilon) & ,0 \le t < \alpha+l \\ 1 & ,\alpha+l \le t < \alpha+2l \\ 0 & ,t \ge \alpha+2l \end{cases}$$

Sonuç olarak $f^*(t)=g^*(t)=f(t)$ olduğu görülür.

$$(f+g)(x)=\begin{cases} 2+\varepsilon & ,0\le x\le l \\ 2+2\varepsilon & ,l\le x\le \alpha+l \\ 2+\varepsilon & ,\alpha+l\le x\le \alpha+2l \end{cases}$$ fonksiyonun da artmayan yeniden

düzenleme fonksiyonu bulunursa,

$$D_{f+g}(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:\left|(f+g)(x)\right|>\lambda\right\}\right)=\begin{cases} \alpha+2l & ,0\le\lambda<2+\varepsilon \\ \alpha & ,2+\varepsilon\le\lambda<2+2\varepsilon \\ 0 & ,\ \lambda\ge 2+2\varepsilon \end{cases}$$

$$(f+g)^*(t)=\inf\left\{\lambda\ge 0: D_{f+g}(\lambda)\le t\right\}=\begin{cases} 2+2\varepsilon & ,0\le t<\alpha \\ 2+\varepsilon & ,\alpha\le t<\alpha+2l \\ 0 & ,t\ge\alpha+2l \end{cases}$$

$(f+g)^*(t)=(2+2\varepsilon)\chi_{[0,\alpha]}(t)+(2+\varepsilon)\chi_{[\alpha,\alpha+2l]}(t)$ karakteristik fonksiyonların toplamı olarak ifade edilir. Buradan

$$\|f\|_{(p,q)}^q=\|g\|_{(p,q)}^q=\int_0^\infty\left(t^{1/p}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}$$

$$=\int_0^{\alpha+l}\left(t^{1/p}(1+\varepsilon)\right)^q\frac{dt}{t}+\int_{\alpha+l}^{\alpha+2l}\left(t^{1/p}\cdot 1\right)^q\frac{dt}{t}+\int_{\alpha+2l}^{\infty}\left(t^{1/p}\cdot 0\right)^q\frac{dt}{t}$$

$$=\frac{p}{q}\left[(1+\varepsilon)^q(\alpha+l)^{q/p}+(\alpha+2l)^{q/p}-(\alpha+l)^{q/p}\right]$$

$$\|f+g\|_{(p,q)}^q=\int_0^\infty\left(t^{1/p}(f+g)^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}$$

$$=\int_0^\alpha\left(t^{1/p}(2+2\varepsilon)\right)^q\frac{dt}{t}+\int_\alpha^{\alpha+2l}\left(t^{1/p}(2+\varepsilon)\right)^q\frac{dt}{t}+\int_{\alpha+2l}^\infty\left(t^{1/p}\cdot 0\right)^q\frac{dt}{t}$$

$$=\frac{p}{q}\left((2+2\varepsilon)^q\alpha^{q/p}+(2+\varepsilon)^{q/p}\left((\alpha+2l)^{q/p}-\alpha^{q/p}\right)\right)$$ bulunur.

$\|f+g\|_{(p,q)}\le\|f\|_{(p,q)}+\|g\|_{(p,q)}$ üçgen eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\frac{p}{q}\left((2+2\varepsilon)^q\alpha^{\frac{q}{p}}+(2+\varepsilon)^q\left((\alpha+2l)^{\frac{q}{p}}-\alpha^{\frac{q}{p}}\right)\right)\le$$

$$2^q \cdot \frac{p}{q}\left[(1+\varepsilon)^q (\alpha+l)^{\frac{q}{p}} + (\alpha+2l)^{\frac{q}{p}} - (\alpha+l)^{\frac{q}{p}}\right]$$

eşitsizliğinin doğru olması gerekir. O zaman

$$2^q (1+\varepsilon)^q \alpha^{\frac{q}{p}} + 2^q \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q \left\{(\alpha+2l)^{\frac{q}{p}} - \alpha^{\frac{q}{p}}\right\} \leq$$

$$2^q \left[(1+\varepsilon)^q (\alpha+l)^{\frac{q}{p}} + (\alpha+2l)^{\frac{q}{p}} - (\alpha+l)^{\frac{q}{p}}\right]$$

$$(1+\varepsilon)^q \alpha^{\frac{q}{p}} + \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q (\alpha+2l)^{\frac{q}{p}} - \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q \alpha^{\frac{q}{p}} \leq$$

$$(1+\varepsilon)^q (\alpha+l)^{\frac{q}{p}} + (\alpha+2l)^{\frac{q}{p}} - (\alpha+l)^{\frac{q}{p}}$$

$$\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q - 1\right](\alpha+2l)^{\frac{q}{p}} + \left[(1+\varepsilon)^q - \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right]\alpha^{\frac{q}{p}} \leq \left[(1+\varepsilon)^q - 1\right](\alpha+l)^{\frac{q}{p}}$$

$$\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q - 1\right](\alpha+2l)^{\frac{q}{p}} + \left[(1+\varepsilon)^q - \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right]\alpha^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq \left[(1+\varepsilon)^q - 1 + \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q - \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right](\alpha+l)^{\frac{q}{p}}$$

$$= \left[(1+\varepsilon)^q - \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right](\alpha+l)^{\frac{q}{p}} + \left[\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q - 1\right](\alpha+l)^{\frac{q}{p}}$$

$$\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q - 1\right](\alpha+2l)^{\frac{q}{p}} - \left[\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q - 1\right](\alpha+l)^{\frac{q}{p}} \leq$$

$$\left[(1+\varepsilon)^q-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right](\alpha+l)^{\frac{q}{p}}-\left[(1+\varepsilon)^q-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right]\alpha^{\frac{q}{p}}$$

$$\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q-1\right]\left\{(\alpha+2l)^{\frac{q}{p}}-(\alpha+l)^{\frac{q}{p}}\right\}\leq\left[(1+\varepsilon)^q-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right]\left\{(\alpha+l)^{\frac{q}{p}}-\alpha^{\frac{q}{p}}\right\}$$

$$\left\{(\alpha+2l)^{\frac{q}{p}}-(\alpha+l)^{\frac{q}{p}}\right\}\leq\frac{\left[(1+\varepsilon)^q-\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q\right]}{\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q-1\right]}\left\{(\alpha+l)^{\frac{q}{p}}-\alpha^{\frac{q}{p}}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $\varepsilon\to 0$ limit alınırsa;

$$\left\{(\alpha+2l)^{\frac{q}{p}}-(\alpha+l)^{\frac{q}{p}}\right\}\leq 1\cdot\left\{(\alpha+l)^{\frac{q}{p}}-\alpha^{\frac{q}{p}}\right\}$$

$$(\alpha+2l)^{\frac{q}{p}}+\alpha^{\frac{q}{p}}\leq(\alpha+l)^{\frac{q}{p}}+(\alpha+l)^{\frac{q}{p}}=2(\alpha+l)^{\frac{q}{p}}$$

elde edilir. $f(x)=\int\limits_0^x t^{\frac{q}{p}-1}\,dt$ biçiminde tanımlanan f fonksiyon sürekli ve konkavdır. f 'nin konkavlık prensibi gereği f 'nin türevi $f'(x)=x^{\frac{q}{p}-1}$ azalan olması gerekir. Bunun sağlanabilmesi için ise $q\leq p$ olması zorunludur. Bu durum $1\leq p<q\leq\infty$ koşuluyla çelişir. Bu ise üçgen eşitsizliğinin sağlanmadığı anlamına gelir. $q=\infty$ olması halinde $\beta=\left(\frac{\mu(B)}{\mu(A)}\right)^{\frac{1}{p}}>1$ ve $\mu(B-A)\leq\mu(A)$ olacak şekilde $A\subset B\subset X$ ölçülebilir kümelerini alalım. X non-atomic olduğundan $0<\mu(A)<\mu(B)$ dır. $f(x)=\beta\chi_A(x)+\chi_{(B-A)}(x)$ ve $g(x)=\chi_A(x)+\beta\chi_{(B-A)}(x)$ fonksiyon seçimleri yapılırsa,

$$D_f(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:\left|f(x)\right|>\lambda\right\}\right)=\begin{cases}\mu(B) & ,0\le\lambda<1\\ \mu(A) & ,1\le\lambda<\beta\\ 0 & ,\lambda\ge\beta\end{cases}$$

$$f^*(t)=\inf\left\{\lambda\ge 0:D_f(\lambda)\le t\right\}=\sup\left\{\lambda\ge 0:D_f(\lambda)>t\right\}=\begin{cases}\beta & ,0\le t<\mu(A)\\ 1 & ,\ \mu(A)\le t<\mu(B)\\ 0 & ,t\ge\mu(B)\end{cases}$$

$f^*(t)=\beta\chi_{[0,\mu(A)]}(t)+\chi_{[\mu(A),\mu(B)]}(t)$ elde edilir. Buradan da

$$D_g(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:\left|g(x)\right|>\lambda\right\}\right)=\begin{cases}\mu(B) & ,0\le\lambda<1\\ \mu(B-A) & ,1\le\lambda<\beta\\ 0 & ,\lambda\ge\beta\end{cases}$$

$$g^*(t)=\inf\left\{\lambda\ge 0:D_g(\lambda)\le t\right\}=\sup\left\{\lambda\ge 0:D_g(\lambda)>t\right\}=\begin{cases}\beta & ,0\le t<\mu(B-A)\\ 1 & ,\ \mu(B-A)\le t<\mu(B)\\ 0 & ,t\ge\mu(B)\end{cases}$$

$g^*(t)=\beta\cdot\chi_{[0,\mu(B-A)]}(t)+\chi_{[\mu(B-A),\mu(B)]}(t)$ artmayan yeniden düzenleme fonksiyonları yazılır. O zaman

$$\|f\|_{(p,\infty)}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}f^*(t)=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}\left\{\beta\cdot\chi_{[0,\mu(A)]}(t)+\chi_{[\mu(A),\mu(B)]}(t)\right\}$$

$$=\max\begin{cases}\beta\left(\mu(A)\right)^{1/p} & ,t\in[0,\mu(A)]\\ \left(\mu(B)\right)^{1/p} & ,t\in[\mu(A),\mu(B)]\end{cases}=\left(\mu(B)\right)^{1/p}$$ ve

$$\|g\|_{(p,\infty)}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}g^*(t)=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}\left\{\beta\cdot\chi_{[0,\mu(B-A)]}(t)+\chi_{[\mu(B-A),\mu(B)]}(t)\right\}$$

$$=\max\begin{cases}\beta\left(\mu(B-A)\right)^{1/p} & ,t\in[0,\mu(B-A)]\\ \left(\mu(B)\right)^{1/p} & ,t\in[\mu(B-A),\mu(B)]\end{cases}=\left(\mu(B)\right)^{1/p}$$ olur.

Şimdi ise $f+g$ fonksiyonu oluşturulursa,

$$(f+g)(x)=\beta\cdot\chi_A(x)+\chi_{(B-A)}(x)+\chi_A(x)+\beta\cdot\chi_{(B-A)}(x)=\begin{cases}\beta+1, & x\in A\\ \beta+1, & x\in B-A\end{cases}$$

$(f+g)(x)=(\beta+1)\chi_B(x)$ olduğu açık olup artmayan yeniden düzenleme fonksiyonun özelliklerini kullanırsak, $\left(f+g\right)^*(t)=\left(\beta+1\right)\chi_B{}^*(t)=\left(\beta+1\right)\chi_{[0,\,\mu(B))}(t)$ ve $\left\|f+g\right\|_{(p,\infty)}=(\beta+1)\left(\mu(B)\right)^{1/p}$ olur. Buradan $\left\|f+g\right\|_{(p,\infty)}=(\beta+1)\left(\mu(B)\right)^{1/p}>2\left(\mu(B)\right)^{1/p}=\left\|f\right\|_{(p,\infty)}+\left\|g\right\|_{(p,\infty)}$ olup bu ise üçgen eşitsizliğini sağlamaz. Sonuç olarak $1\le p<q\le\infty$ koşulu altında, $\left\|\cdot\right\|_{(p,q)}$ fonksiyonu norm oluşturmadığı görülür.

ii) $0<p<1$, $0<q\le\infty$ olmak üzere $A\bigcap B=\varnothing$ olacak şekilde *A, B* ölçülebilir iki küme alınırsa,

$$\left\|\chi_A+\chi_B\right\|_{(p,q)}=\left\|\chi_{(A\bigcup B)}\right\|_{(p,q)}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu(A)+\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left\|\chi_A\right\|_{(p,q)}+\left\|\chi_B\right\|_{(p,q)}=\left\|\chi_{(A\bigcup B)}\right\|_{(p,q)}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\mu(A)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

olup $0<p<1$ olduğunda, $\left(\mu(A)+\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}\ge\left(\mu(A)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}$ olur. Bu yüzden

$$\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu(A)+\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}\ge\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left[\left(\mu(A)\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\mu(B)\right)^{\frac{1}{p}}\right]$$

$$\left\|\chi_A+\chi_B\right\|_{(p,q)}\ge\left\|\chi_A\right\|_{(p,q)}+\left\|\chi_B\right\|_{(p,q)}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak, $0<p<1, 0<q<\infty$ şartı altında $\left\|\cdot\right\|_{(p,q)}$ fonksiyonu norm oluşturmaz. $q=\infty$ olduğunda da aynı eşitsizliğin olduğunu ve bununda norm oluşturmayacağı basitçe görülür.

iii) $0<p<1$, $0<q\le\infty$ koşulu altında $f\left(x\right)=2\cdot\chi_{\left(0,2^{-p}\right)}\left(x\right)$ ve $g(x)=4\chi_{(0,2^{-2p})}(x)$ fonksiyonları seçilirse,

$$D_f(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:\left|f(x)\right|>\lambda\right\}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^p} & ,0\le\lambda<2\\ 0 & ,2\le\lambda\end{cases}$$ ve

$$f^*(t)=\inf\left\{\lambda\ge 0:D_f(\lambda)\le t\right\}=\sup\left\{\lambda\ge 0:D_f(\lambda)>t\right\}=\begin{cases}2 & ,0\le t<\dfrac{1}{2^p}\\ 0 & ,t\ge\dfrac{1}{2^p}\end{cases}$$

$$D_g(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:\left|g(x)\right|>\lambda\right\}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{2p}} & ,0\le\lambda<4\\ 0 & ,4\le\lambda\end{cases}$$

$$g^*(t)=\inf\left\{\lambda\ge 0:D_g(\lambda)\le t\right\}=\sup\left\{\lambda\ge 0:D_g(\lambda)>t\right\}=\begin{cases}4 & ,0\le t<\dfrac{1}{2^p}\\ 0 & ,t\ge\dfrac{1}{2^p}\end{cases}$$ bulunur.

Buradan

$$\left\|f\right\|_{(p,q)}=\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_0^{1/2^p}\left(t^{\frac{1}{p}}\cdot 2\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{1/2^p}^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}\cdot 0\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

ve

$$\left\|g\right\|_{(p,q)}=\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}g^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_0^{1/2^{(2p)}}\left(t^{\frac{1}{p}}4\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{1/2^p}^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}0\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Fonksiyonların toplamı $\left(f+g\right)(x)=6\cdot\chi_{(0,2^{-2p})}(x)+2\cdot\chi_{(2^{-2p},2^{-p})}(x)$

olup

$$D_{f+g}(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:\left|\left(f+g\right)(x)\right|>\lambda\right\}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^p} & ,0\le\lambda<2\\ \dfrac{1}{2^{2p}} & ,2\le\lambda<6\\ 0 & ,6\le\lambda\end{cases}$$

$$\left(f+g\right)^*(t)=\inf\left\{\lambda\ge 0:D_{f+g}(\lambda)\le t\right\}=\sup\left\{\lambda\ge 0:D_{f+g}(\lambda)>t\right\}$$

$$=\begin{cases} 6 & ,0 \le t < 2^{-2p} \\ 2 & ,2^{-2p} \le t < 2^{-p} \\ 0 & ,t \ge 2^{-p} \end{cases}$$

olur. Norma geçilirse

$$\|f+g\|_{(p,q)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (f+g)^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^{2^{-2p}} \left(t^{\frac{1}{p}} 6 \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_{2^{-2p}}^{2^{-p}} \left(t^{\frac{1}{p}} 2 \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \left(\int_{2^{-p}}^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} 0 \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(3^q + 2^q - 1 \right)^{\frac{1}{q}}$$

bulunur. $0 < q < 1$ olduğunda $\frac{1}{2} \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(3^q + 2^q - 1 \right)^{\frac{1}{q}} \le 2 \left(\frac{p}{q} \right)^{\frac{1}{q}} \Rightarrow \left(3^q + 2^q - 1 \right) \le 4^q$ sağlanmadığına göre, $\|f+g\|_{(p,q)} \le \|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}$ eşitsizliği genel olarak doğru değildir. Bu ise $0 < q < 1$ olduğunda, üçgen eşitsizliğinin sağlanmadığı dolayısıyla $\|\cdot\|_{(p,q)}$ fonksiyonunun norm olmadığını gösterir.

Teorem 3.1.11: (X, Σ, μ) $\sigma -$sonlu ölçüm uzayı olsun, $1 < p < \infty, 0 < q \le \infty$ olduğunda $\|f\|_{(p,q)} = p^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^\infty \left(\lambda \left(D_f(\lambda) \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q \frac{d\lambda}{\lambda} \right)^{\frac{1}{q}}$ eşitliği vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: İlk olarak $q = \infty$ olma durumu incelenirse, $\|f\|_{(p,\infty)} = \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t)$ olduğu bilindiğine göre, $G^p = \sup\limits_{t>0} \lambda^p \left(D_f(\lambda) \right)$ alınırsa supremum tanımı gereği,

$\lambda^p\left(D_f(\lambda)\right) \le G^p$ bulunur. Buradan $\left(D_f(\lambda)\right) \le \dfrac{G^p}{\lambda^p} = \left(\dfrac{G}{\lambda}\right)^p$ olup $t = \dfrac{G^p}{\lambda^p}$ seçimi yapılırsa; $\lambda = \dfrac{G}{t^{1/p}}$ bulunur.

$f^*(t) = \inf\left\{\lambda \ge 0 : D_f(\lambda) \le t\right\} = \inf\left\{\lambda \ge 0 : D_f(\lambda) \le \dfrac{G^p}{\lambda^p}\right\}$ için

$f^*(t) > \lambda \Leftrightarrow D_f(\lambda) > t$ yani $D_f(\lambda) \le t \Leftrightarrow f^*(t) \le \lambda$ olduğu bilinmektedir. $f^*(t) \le \lambda \Rightarrow f^*(t) \le \dfrac{G}{t^{1/p}} \Rightarrow t^{1/p} f^*(t) \le G$ eşitsizliğinde supremuma geçilirse,

$$\sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) \le G \tag{3.2}$$

elde edilir. $f^*(D_f(\lambda)) \le \lambda$ ifadesinde $\lambda > 0$ ve $0 < \varepsilon < \lambda$ seçimi yapıldığında $f^*(D_f(\lambda) - \varepsilon) > \lambda$ yazılabilir. O zaman

$\sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \ge (D_f(\lambda) - \varepsilon)^{\frac{1}{p}}$ ve $f^*(D_f(\lambda) - \varepsilon) > (D_f(\lambda) - \varepsilon)^{\frac{1}{p}} \lambda$ olup $\lambda = \dfrac{G}{t^{1/p}}$ olduğu için $f^*(D_f(\lambda) - \varepsilon) > \dfrac{G}{t^{1/p}} \Rightarrow G < t^{1/p} f^*(D_f(\lambda) - \varepsilon)$ bulunur. $\varepsilon \to 0$ iken limit alıp ve $\lambda \ge 0$ üzerinden supremum alınırsa,

$$\sup_{t>0} t^{1/p} f^*(t) \ge \sup_{\lambda>0} \lambda (D_f(\lambda))^{\frac{1}{p}} = \sup_{\lambda>0}\left(\lambda^p D_f(\lambda)\right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.3}$$

bulunur. (3.2) ve (3.3)'den $\|f\|_{(p,\infty)} = \sup\limits_{t>0} t^{1/p} f^*(t) = \sup\limits_{\lambda>0}\left(\lambda^p D_f(\lambda)\right)^{\frac{1}{p}}$ çıkar.

İkinci olarak $0 < q < \infty$ alınırsa.

$$\|f\|_{(p,q)}^q = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left(f^*(t)\right)^q t^{\frac{q}{p}-1} dt = \int_0^\infty \left(\int_0^{f^*(t)} q \cdot \lambda^{q-1} d\lambda\right) t^{\frac{q}{p}-1} dt$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty q\cdot\lambda^{q-1}\chi_{\left\{\lambda>0:\,f^*(t)>\lambda\right\}}(\lambda)d\lambda\right)t^{\frac{q}{p}-1}\,dt$$

$$=\int_0^\infty\left(\int_0^\infty q\cdot\lambda^{q-1}\chi_{\left\{t\geq 0:\,D_f(\lambda)>t\right\}}(t)d\lambda\right)t^{\frac{q}{p}-1}\,dt$$

$$\int_0^\infty\left(\int_0^\infty q\cdot\lambda^{q-1}d\lambda\right)\chi_{\left\{t\geq 0:\,D_f(\lambda)>t\right\}}(t)t^{\frac{q}{p}-1}\,dt=\int_0^\infty q\cdot\lambda^{q-1}\left(\int_0^{D_f(\lambda)} t^{\frac{q}{p}-1}\,dt\right)d\lambda$$

$$=\int_0^\infty q\cdot\lambda^{q-1}\frac{p}{q}t^{\frac{q}{p}}\Bigg|_0^{D_f(\lambda)}=\int_0^\infty p\cdot\lambda^{q-1}\left(D_f(\lambda)\right)^{\frac{q}{p}}d\lambda=p\int_0^\infty \lambda^q\left(D_f(\lambda)\right)^{\frac{q}{p}}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$=p\int_0^\infty\left(\lambda\left(D_f(\lambda)\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q\frac{d\lambda}{\lambda}$$

bulunur. Bu ise $\|f\|_{(p,q)}=p^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^\infty\left(\lambda\left(D_f(\lambda)\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q\frac{d\lambda}{\lambda}\right)^{\frac{1}{q}}$ demektir.

Teorem 3.1.12: (X,Σ,μ) atomik olmayan $\sigma-$ sonlu bir ölçüm uzayı olsun. $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ olmak üzere $1\leq q\leq p<\infty$ olsun. $[0,\infty)$ üzerinde tanımlı negatif olmayan ve artmayan fonksiyonların kümesi F_0 ile gösterilsin. $h\in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ olmak üzere; $\|h\|_{(p,q)}=\sup\left\{\int_0^\infty h^*(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}k(t)dt : k\in F_0 \text{ ve} \|k\|_{L_{q'}(0,\infty)}=1\right\}$ olur (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: q' ve q sayıları eşlenik oldukları için Hölder eşitsizliği uygulandığında

$\int_0^\infty h^*(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}k(t)dt\leq\left(\int_0^\infty\left(h^*(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^\infty\left(k(t)\right)^{q'}dt\right)^{\frac{1}{q'}}$ yazılır.

$\|k\|_{L_{q'}(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty \left(k(t)\right)^{q'} dt \right)^{\frac{1}{q'}}$ olduğu ve bu normun 1 olduğu durumda yukarıdaki eşitsizlikte supremum alınırsa;

$$\sup\left\{ \int_0^\infty h^*(t) t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} k(t) dt : k \in F_0 \text{ ve} \|k\|_{L_{q'}(0,\infty)} = 1 \right\} \le$$

$$\left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}} \left(h^*(t)\right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \|h\|_{(p,q)} \qquad \mathbf{(3.4)}$$

olduğu görülür. Eşitliğin diğer kısmını göstermek için $k(t) = n\left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot h^*(t) \right)^{q-1}$ seçimi yapıldığında, $k \in F_0$ olur. Gerçekten $t \ge 0$ olduğunda k fonksiyonu negatif olmayan değerler alacaktır. $a < b$ olduğunda, h^* artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu için $h^*(a) \ge h^*(b)$ eşitsizliği vardır. Buradan $q \le p \Rightarrow \frac{1}{p} \le \frac{1}{q} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \le 0$ olması gereği $a < b \Rightarrow a^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \ge b^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ bulunur. $q \ge 1$ olduğundan $h^*(b) \cdot b^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \le h^*(a) \cdot a^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \Rightarrow \left(h^*(b) \cdot b^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right)^{q-1} \le \left(h^*(a) \cdot a^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \right)^{q-1}$ yazılır. Sonuç olarak $a < b \Rightarrow k(a) \ge k(b)$ olup k fonksiyonu artmayan fonksiyon yani $k \in F_0$'dır. $n = \|h\|_{(p,q)}^{1-q}$ seçimi yapılırsa

$$\|k\|_{L_{q'}(0,\infty)} = \left(\int_0^\infty \left(n \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot h^*(t) \right)^{q-1} \right)^{q'} dt \right)^{\frac{1}{q'}} = \left(\int_0^\infty n^{q'} \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot h^*(t) \right)^{q'(q-1)} dt \right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$= n\left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot h^*(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q'}} = \|h\|_{(p,q)}^{1-q} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \cdot h^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q'}} = \|h\|_{(p,q)}^{1-q} \|h\|_{(p,q)}^{q/q'} = 1$$

bulunur. O zaman

$$\|h\|_{(p,q)}^q = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot h^*(t)\right)^q dt = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot h^*(t)\right)\left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot h^*(t)\right)^{q-1} dt$$

$$\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot h^*(t)\right)\frac{k(t)}{n} dt = \frac{1}{n}\int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot h^*(t) \cdot k(t)\, dt \Rightarrow n \cdot \|h\|_{(p,q)}^q = \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot h^*(t) \cdot k(t)\, dt$$

$$\|h\|_{(p,q)}^{1-q} \cdot \|h\|_{(p,q)}^q = \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot h^*(t) \cdot k(t)\, dt \Rightarrow \|h\|_{(p,q)} = \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot h^*(t) \cdot k(t)\, dt$$

çıkar. $\|k\|_{L_{q'}(0,\infty)} = 1$ üzerinden supremum alınırsa;

$$\|h\|_{(p,q)} \le \sup\left\{\int_0^\infty h^*(t) t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} k(t) dt : k \in F_0 \text{ ve} \|k\|_{L_{q'}(0,\infty)} = 1\right\} \qquad \mathbf{(3.5)}$$

elde edilir. (3.4) ve (3.5) eşitsizlikleri kullanılırsa;

$\|h\|_{(p,q)} = \sup\left\{\int_0^\infty h^*(t) t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} k(t) dt : k \in F_0 \text{ ve} \|k\|_{L_{q'}(0,\infty)} = 1\right\}$ eşitliği gösterilmiş olur.

Sonuç 3.1.13: (X, Σ, μ) atomik olmayan $\sigma-$ sonlu bir ölçüm uzayı olsun. $1 \le q \le p < \infty, \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ ve $f, g \in L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ olmak üzere, $\|f+g\|_{(p,q)} \le \|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}$ eşitsizliği vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: Hipotez gereği $q \le p$ olduğu için $t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$ fonksiyonu artmayan fonksiyondur. Bu nedenle $t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \cdot k(t)$ artmayan olacaktır. Teorem 2.3.16. ve Uyarı 2.3.17.'deki ifadelerden $\int_0^s (f+g)^*(t)\,dt \le \int_0^s f^*(t)\,dt + \int_0^s g^*(t)\,dt$ olduğu biliniyor. Yine

$$\|f+g\|_{(p,q)} = \sup\left\{ \int_0^\infty (f+g)^*(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}k(t)dt : k \in F_0 \text{ ve} \|k\|_{L_{q'}(0,\infty)} = 1 \right\}$$ olması

kullanılırsa

$$\int_0^\infty (f+g)^*(t)t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}k(t)dt \le \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}f^*(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \|k\|_{q'} + \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}g^*(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \|k\|_{q'}$$

olur. Teorem 3.1.12. ile $\|f+g\|_{(p,q)} \le \|f\|_{(p,q)} + \|g\|_{(p,q)}$ bulunur.

Teorem 3.1.14: (X,Σ,μ) $\sigma-$sonlu ölçüm uzayı ölçüm uzayı, $p,q \in [1,\infty]$ ve p', q' sayıları sırasıyla p ve q'nun eşlenikleri olsun. $f \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ ve $g \in L_{(p',q')}(X,\Sigma,\mu)$ olmak üzere $\|f \cdot g\|_1 \le \|f\|_{(p,q)} \cdot \|g\|_{(p',q')}$ eşitsizliği vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: $\int_X |f \cdot g| \le \int_0^\infty f^*(t) \cdot g^*(t)\,dt$ eşitsizliğinin var olduğu Teorem 2.3.13.'den biliniyor. $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ ve $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\int_X |f \cdot g| \le \int_0^\infty f^*(t) \cdot g^*(t)\,dt = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}f^*(t)\right)\left(t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}}g^*(t)\right)dt$$ yazılır. Hölder eşitsizliği ile

$$\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}f^*(t)\right)\left(t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}}g^*(t)\right)dt \le \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}f^*(t)\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}-\frac{1}{q'}}g^*(t)\right)^{q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$=\left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}} g^*(t)\right)^{q'} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q'}} = \|f\|_{(p,q)} \cdot \|g\|_{(p',q')}$$ çıkar.

3.1.1 Normlu Lorentz Uzayları

$L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ üzerinde $f,g\in M(X,\Sigma)$ olmak üzere; $f\sim g \Leftrightarrow f=g \ (\mu-\text{h.h.h.})$ bağıntısı bir denklik bağıntısı olduğu biliniyor. $\forall f\in M(X,\Sigma)$ için $[f]=\{g\in M(X,\Sigma): f=g\ (\mu-\text{h.h.h.})\}$ kümesi f ile denk olan fonksiyonların kümesini temsil etsin. Bu elemanların yardımıyla Lorentz uzayı tanımlannırsa $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)=\{[f]: f\in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\}$ olur. $\|\cdot\|_{(p,q)}$ fonksiyonunun $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ üzerinde $1\le q\le p<\infty$ olduğu durumda norm olabileceği diğer durumlarda ise olmadığı gösterildi. Herhangi iki ölçülebilir f ve g fonksiyonları için genel olarak; $(f+g)^*\le f^*+g^*$ doğru olmadığı biliniyor. Artmayan yeniden düzenleme operatörü açısından bir norm tanımlayabileceğini tahmin etmemesi gereken durum, üçgenin eşitsizliğinin yeterli olmayacağıdır. Bu amaçla, artmayan yeniden düzenlenme operatörüyle ilişkili ve bir alt-katkı sağlayan ve $p>1$ için $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ üzerinde $\|\cdot\|_{(p,q)}$ denk olan bir norm tanımlar. $M(X,\Sigma)$ üzerinde tanımlı f fonksiyonunun bir başka iki parametre ailesini tanımlamak için f^* yerine f 'nin maksimal fonksiyonu kullanılabilir.

Tanım 3.1.1.1: $1\le p<\infty, 1\le q\le\infty$ olmak üzere $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ Lorentz uzayı;

$L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)=\{f\in M(X,\Sigma): \|f\|_{pq}<\infty\}$ ve $\|f\|_{pq}$ ifadesi

$$\|f\|_{L_{pq}}=\|f\|_{pq}=\begin{cases}\left(\dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t)\right)^q\dfrac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} &, q<\infty\\ \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}}f^{**}(t) &, q=\infty\end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Uyarı 3.1.1.2: (X,Σ,μ) atomik olmayan ölçüm uzayı olduğunda $\forall E\in\Sigma$ için $\mu(E)=t$ olduğunda Teorem 2.3.16. ve Uyarı 2.2.17.'deki ifadelerden

$\int_0^t (f+g)^*(s)\,ds \le \int_0^t f^*(s)\,ds + \int_0^t g^*(s)\,ds$ olduğu bilindiğine göre,

$\left(f+g\right)^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (f+g)^*(s)\,ds \le \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds + \frac{1}{t}\int_0^t g^*(s)\,ds = f^{**}(t) + g^{**}(t)$ olduğu görülür. Bu ise $L_{(p,q)}\left(X,\Sigma,\mu\right) = \left\{ f \in M\left(X,\Sigma\right) : \|f\|_{pq} < \infty \right\}$ uzayının bir vektör uzayı ve $\|\cdot\|_{pq}$ ile bir normlu uzay olacağını gösterir. f^{**} fonksiyonu f^*'a göre daha karmaşıktır. Bu nedenle $\|\cdot\|_{pq}$ ile çalışmak $\|\cdot\|_{(p,q)}$ çalışmaya göre çok zordur. Daha iyi anlamak için bir örnek gösterilsin.

Örnek 3.1.1.3: $G \in \Sigma$ ve $0 < \mu\left(G\right) < \infty$ olmak üzere, $\|\chi_G\|_{pq} = ?$

Çözüm: İlk olarak $1 \le p < \infty, 1 \le q < \infty$ durumu incelenirse,

$$\|\chi_G\|_{pq} = \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \cdot \chi_G^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \cdot \frac{1}{t}\int_0^t \chi_G^*(s)\,ds \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$\chi_G^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \chi_G^*(s)\,ds$ olduğu biliniyor. $0 \le t < \mu(G)$ olduğunda,

$\chi_G^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \chi_G^*(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t \chi_{[0,\mu(G))}(s)\,ds$ ve $0 \le s < t < \mu(G)$ olduğuna göre;

$\chi_G^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t 1 \cdot ds = 1$ elde edilir.

İkinci olarak ise $t \ge \mu(G)$ durumu irdelendiğinde,

$\chi_G^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \chi_{[0,\mu(G))}(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^{\mu(G)} \chi_{[0,\mu(G))}(s)\,ds + \frac{1}{t}\int_{\mu(G)}^t \chi_{[0,\mu(G))}(s)\,ds$

$= \frac{1}{t}\int_0^{\mu(G)} 1\,ds + \frac{1}{t}\int_{\mu(G)}^t 0\,ds = \frac{\mu(G)}{t}$ olduğu görülür. Her iki durum birleştirilirse

$\chi_G^{**}(t) = \begin{cases} \frac{\mu(G)}{t}, & t \ge \mu(G) \\ 1, & 0 \le t < \mu(G) \end{cases}$ ifadesi elde edilir. Buradan

$$\|\chi_G\|_{pq}=\left(\frac{q}{p}\int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\cdot\chi_G^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{q}{p}\left\{\int_0^{\mu(G)}\left(t^{\frac{1}{p}}\cdot 1\right)^q\frac{dt}{t}+\int_{\mu(G)}^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\cdot\frac{\mu(G)}{t}\right)^q\frac{dt}{t}\right\}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\frac{q}{p}\left\{\frac{p}{q}\cdot\left(\mu(G)\right)^{\frac{q}{p}}+\frac{p}{q(1-p)}\cdot\left(0-\left(\mu(G)\right)^{\frac{q}{p}-q}\right)\left(\mu(G)\right)^q\right\}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\frac{p}{(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu(G)\right)^{\frac{1}{p}}$$

$p=1,\ p=\infty$ olduğunda; $\|\chi_G\|_{pq}=\infty$ olup $1\le p<\infty, q=\infty$ olduğunda norm hesaplanırsa,

$$\|\chi_G\|_{p\infty}=\sup_{t>0}t^{\frac{1}{p}}\cdot\chi_G^{**}(t)=\begin{cases}\sup\limits_{t>0}t^{\frac{1}{p}}\cdot\dfrac{\mu(G)}{t}, & t\ge\mu(G)\\ \sup\limits_{t>0}t^{\frac{1}{p}}\cdot 1, & 0\le t<\mu(G)\end{cases}=\begin{cases}1 & ,\ p=\infty\\ \left(\mu(G)\right)^{\frac{1}{p}} & ,\ p\ne\infty\end{cases}$$

olur. Özet olarak, $$\|\chi_G\|_{pq}=\begin{cases}\left(\dfrac{p}{(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu(G)\right)^{1/p}, & \begin{cases}1<p<\infty\\1\le q<\infty\end{cases}\\ \infty & ,\begin{cases}p=1\vee p=\infty\\ 1\le q<\infty\end{cases}\\ \left(\mu(G)\right)^{1/p} & ,\begin{cases}1\le p<\infty\\ q=\infty\end{cases}\\ 1 & ,\ p=q=\infty\end{cases}$$ olduğu görülür. Şimdi $p,q\in[1,\infty]$ genişletilmiş reel sayılar olmak üzere, $\|\cdot\|_{pq}$ ve $\|\cdot\|_{(p,q)}$ fonksiyonları arasında nasıl bir eşitsizliğin var olduğu gösterilsin.

Teorem 3.1.1.4: (G. H. Hardy). *f*, $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olmak üzere, $1\le q<\infty$, $0<r<\infty$ olan sayıları için;

i. $$\int_0^{\infty}\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)^q t^{-r-1}\,dt\le\left(\frac{q}{r}\right)^q\int_0^{\infty}\left(s\cdot f(s)\right)^q s^{-r-1}\,ds$$

ii. $$\int_0^{\infty}\left(\int_t^{\infty} f(s)\,ds\right)^q t^{r-1}\,dt\le\left(\frac{q}{r}\right)^q\int_0^{\infty}\left(s\cdot f(s)\right)^q s^{r-1}\,ds$$ eşitsizlikleri vardır

(Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat:

i) $q=1$ olsun. Fubini'nin teoremi kullanıldığında,

$$\int_0^\infty\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)t^{-r-1}\,dt=\int_0^\infty\int_s^\infty t^{-r-1}\cdot f(s)\,dtds=\int_0^\infty f(s)\frac{t^{-r}}{-r}\bigg|_s^\infty ds=\frac{1}{r}\int_0^\infty\left(s\cdot f(s)\right)s^{-r-1}ds$$

Kabul edelimki $q>1$ ve p sayısı q'nun eşleniği olsun. $s^{\frac{r}{q}-1}\,ds$ ölçümü ile Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)^q=\left(\int_0^t f(s)\cdot s^{1-\frac{r}{q}}\cdot s^{\frac{r}{q}-1}\,ds\right)^q\leq$$

$$\left(\left(\int_0^t\left(f(s)\cdot s^{1-\frac{r}{q}}\right)^q s^{\frac{r}{q}-1}\,ds\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^t 1^p\cdot s^{\frac{r}{q}-1}\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\right)^q$$

$$=\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{q}{p}}t^{\frac{r}{p}}\left(\int_0^t\left(f(s)\right)^q\cdot s^{q-r}\cdot s^{\frac{r}{q}-1}\,ds\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki taraftan sıfırdan sonsuza kadar integrali alınıp, daha sonra Fubini'nin teoremi uygulandığında;

$$\int_0^\infty\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)^q t^{-r-1}dt\leq\int_0^\infty\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{q}{p}}t^{-r-1}\cdot t^{r\cdot\left(1-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_0^t\left(f(s)\right)^q\cdot s^{q-r}\cdot s^{\frac{r}{q}-1}\right)dsdt=$$

$$=\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{q}{p}}\int_0^\infty\left(f(s)\right)^q\cdot s^{q-r}\cdot s^{\frac{r}{q}-1}\left(\int_s^\infty t^{\left(-1-\frac{r}{q}\right)}dt\right)ds=$$

$$=\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{q}{p}}\int_0^\infty\left(f(s)\right)^q\cdot s^{q-r}\cdot s^{\frac{r}{q}-1}\left(\frac{q}{r}s^{-\frac{r}{q}}\right)ds=\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{q}{p}+1}\int_0^\infty\left(f(s)\right)^q\cdot s^q\cdot s^{-r-1}\,ds$$

$=\left(\frac{q}{r}\right)^q\int_0^\infty\left(s\cdot f(s)\right)^q\cdot s^{-r-1}\,ds$ bulunur. Böylece

$$\int_0^\infty \left(\int_0^t f(s)\,ds \right)^q t^{-r-1} dt \le \left(\frac{q}{r} \right)^q \int_0^\infty \left(s \cdot f(s) \right)^q \cdot s^{-r-1}\, ds$$

eşitsizliğinin varlığı gösterilmiş olunur.

ii) $$\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f(s)\,ds \right)^q t^{r-1}\, dt \le \left(\frac{q}{r} \right)^q \int_0^\infty \left(s \cdot f(s) \right)^q s^{r-1}\, ds$$

$q = 1$ olsun. Bir kez daha Fubini'nin teoremi kullanılırsa

$$\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f(s)\,ds \right)^q t^{r-1}\, dt = \int_0^\infty \int_0^s t^{r-1} f(s)\; dt\, ds = \int_0^\infty \frac{1}{r} s^r f(s)\, ds = \frac{1}{r} \int_0^\infty \left(sf(s) \right) s^{r-1} ds$$ elde

edilir. Daha sonra $q > 1$ ve p sayısı q'nun eşleniği olsun. $s^{-\frac{r}{q}-1}\, ds$ ölçümü ile Hölder eşitsizliği kullanılırsa;

$$\left(\int_t^\infty f(s)\,ds \right)^q = \left(\int_t^\infty f(s) \cdot s^{\frac{r}{q}+1} \cdot s^{-\frac{r}{q}-1}\, ds \right)^q \le$$

$$\left(\left(\int_t^\infty \left(f(s) \cdot s^{\frac{r}{q}-1} \right)^q \cdot s^{-\frac{r}{q}-1}\, ds \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_t^\infty 1^p \cdot s^{-\frac{r}{q}-1}\, ds \right)^{\frac{1}{p}} \right)^q$$

$$= \left(\frac{q}{r} \right)^{\frac{q}{p}} t^{-\frac{r}{p}} \left(\int_t^\infty \left(f(s) \cdot s^{\frac{r}{q}+1} \right)^q \cdot s^{-\frac{r}{q}-1}\, ds \right) = \left(\frac{q}{r} \right)^{\frac{q}{p}} t^{-\frac{r}{p}} \left(\int_t^\infty \left(s \cdot f(s) \right)^q \cdot s^{r-\frac{r}{q}-1}\, ds \right)$$

Sıfırdan sonsuza kadar her iki tarafın integralini alıp, daha sonra Fubini'nin teoremi kullanılırsa;

$$\int_0^\infty \left(\int_t^\infty f(s)\,ds \right)^q t^{r-1}\, dt = \int_0^\infty \left(\frac{q}{r} \right)^{\frac{q}{p}} t^{-\frac{r}{p}} \left(\int_t^\infty \left(s \cdot f(s) \right)^q \cdot s^{r-\frac{r}{q}-1}\, ds \right) t^{r-1} dt$$

$$= \int_0^\infty \left(\frac{q}{r} \right)^{\frac{q}{p}} t^{r-\frac{r}{p}-1} \left(\int_t^\infty \left(s \cdot f(s) \right)^q \cdot s^{r-\frac{r}{q}-1}\, ds \right) dt$$

$$=\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{q}{p}}\int_0^\infty t^{\frac{r}{q}-1}\left(\int_t^\infty \left(s\cdot f(s)\right)^q\cdot s^{r-\frac{r}{q}-1}\,ds\right)dt=\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{q}{p}}\int_0^\infty \left(s\cdot f(s)\right)^q\cdot s^{r-\frac{r}{q}-1}\left(\int_0^s t^{\frac{r}{q}-1}\,dt\right)ds$$

$$=\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{q}{p}}\int_0^\infty \left(s\cdot f(s)\right)^q\cdot s^{r-\frac{r}{q}-1}\left(\frac{q}{r}t^{\frac{r}{q}}\right)ds=\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{q}{p}+1}\int_0^\infty \left(s\cdot f(s)\right)^q\cdot s^{r-1}\,ds$$

$$=\left(\frac{q}{r}\right)^{q}\int_0^\infty \left(s\cdot f(s)\right)^q\cdot s^{r-1}\,ds$$

bulunur. Bu ise $\int_0^\infty\left(\int_t^\infty f(s)\,ds\right)^q t^{r-1}\,dt\le\left(\frac{q}{r}\right)^q\int_0^\infty\left(s\cdot f(s)\right)^q\cdot s^{r-1}\,ds$ demektir.

Teorem 3.1.1.5: $1<p<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere; $\|f\|_p\le\|f\|_{pp}\le\frac{p}{p-1}\|f\|_p$ eşitsizliği geçerlidir (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: $f^*\le f^{**}$ olduğu biliniyor. Buna göre;

$$\|f\|_p^p=\int_X|f|^p\,d\mu=\int_0^\infty\left(f^*(x)\right)^p dx=\int_0^\infty\left(x^{\frac{1}{p}}f^*(x)\right)^p\frac{dx}{x}\le\int_0^\infty\left(x^{\frac{1}{p}}f^{**}(x)\right)^p\frac{dx}{x}=\|f\|_{pp}^p$$

$$\|f\|_p\le\|f\|_{pp} \tag{3.6}$$

Diğer taraftan Teorem 3.1.1.4. i.'deki Hardy eşitsizliğinde $r=p-1$ ve $q=p$ alınırsa,

$$\int_0^\infty\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)^p t^{-(p-1)-1}\,dt\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty\left(s\cdot f(s)\right)^p s^{-(p-1)-1}\,ds\Rightarrow$$

$$\int_0^\infty\left(\int_0^t f(s)\,ds\right)^p t^{-p}\,dt\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty\left(s\cdot f(s)\right)^p s^{-p}\,ds\Rightarrow$$

$$\int_0^\infty\left(t^{\left(\frac{1}{p}-1\right)}\int_0^t f(s)\,ds\right)^p\frac{dt}{t}\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty\left(f(s)\right)^p ds\Rightarrow\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}\frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds\right)^p\frac{dt}{t}$$

$$\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\int_0^\infty f(s)^p\,ds$$

$$\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds \right) \right)^p \frac{dt}{t} \le \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty f(s)^p\, ds, \|f\|_{pp}^p \le \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \|f\|_p^p \Rightarrow$$

$$\|f\|_{pp} \le \left(\frac{p}{p-1} \right) \|f\|_p \qquad \mathbf{(3.7)}$$

(3.6) ve (3.7) ’den $\|f\|_p \le \|f\|_{pp} \le \frac{p}{p-1} \|f\|_p$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.1.6: (X,Σ,μ) ölçüm uzayı, $1 < p \le \infty, 1 \le q \le \infty$ p ve q genişletilmiş reel sayılar olmak üzere; $\forall f \in M(X,\Sigma)$ için $\|f\|_{(p,q)} \le \|f\|_{pq} \le \frac{p}{p-1} \|f\|_{(p,q)}$ olur (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: $f^* \le f^{**}$ olduğu biliniyor. Buna göre,

$$\|f\|_{(p,q)}^q = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t) \right)^q \frac{dt}{t} \le \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} = \|f\|_{pq}^q \Rightarrow$$

$$\|f\|_{(p,q)} \le \|f\|_{pq} \qquad \mathbf{(3.8)}$$

yazılır. Eğer $q < \infty, p = \infty$ olduğunda $f = 0$ ($\mu -$h.h.h.) yada $\|f\|_{(p,q)} = \infty$ olduğu daha önce söylendi. Bu durumda eşitsizliğin ikinci kısmının gösterilmesi rahattır. $q, p < \infty$ ise Teorem 3.1.1.4. ile

$$\|f\|_{pq}^q = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s)\, ds \right)^q \frac{dt}{t} = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}-1} \int_0^t f^*(s)\, ds \right)^q \frac{dt}{t}$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^t f^*(s)\, ds \right)^q t^{\frac{q}{p}-q-1} dt \le \left(\frac{q}{q-\frac{q}{p}} \right)^q \int_0^\infty \left(s \cdot f^*(s) \right)^q s^{\frac{q}{p}-q-1} ds \quad \left(r = q - \frac{q}{p}, \text{Hardy.E.} \right)$$

$$= \left(\frac{q}{q-\frac{q}{p}} \right)^q \int_0^\infty \left(s \cdot f^*(s) \right)^q s^{\frac{q}{p}-q-1} ds = \left(\frac{p}{p-1} \right)^q \int_0^\infty \left(s^{\frac{1}{p}} \cdot f^*(s) \right)^q \frac{ds}{s} = \left(\frac{p}{p-1} \right)^q \|f\|_{(p,q)}^q$$

Sonuç olarak,

$$\|f\|_{pq} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{(p,q)} \tag{3.9}$$

olduğu görülür. Son olarak ise $q=\infty$ olduğunda normlara bakılırsa,

$$t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = t^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds\right) = t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t f^*(s)\,ds = t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\, s^{-\frac{1}{p}}\,ds$$

$\|f\|_{p\infty} = \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t), \|f\|_{(p,\infty)} = \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{*}(t)$ olduğu dikkate alınırsa

$$\sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = \sup_{t>0}\left(t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\, s^{-\frac{1}{p}}\,ds\right) \leq t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t\left(\sup_{t>0} s^{\frac{1}{p}} f^*(s)\right) s^{-\frac{1}{p}}\,ds,$$

$$\|f\|_{(p,\infty)}\, t^{\frac{1}{p}-1}\int_0^t s^{-\frac{1}{p}}\,ds = \|f\|_{(p,\infty)}\, t^{\frac{1}{p}-1}\left.\frac{1}{\left(-\frac{1}{p}+1\right)} s^{-\frac{1}{p}+1}\right|_0^t = \left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_{(p,\infty)}$$

$$\|f\|_{p\infty} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)\|f\|_{(p,\infty)} \tag{3.10}$$

olduğu görülür. İrdelemeler sonucunda elde edilen (3.8), (3.9) ve (3.10)'daki eşitsizlikler birleştirildiğinde, $\|f\|_{(p,q)} \leq \|f\|_{pq} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_{(p,q)}$ olur. $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ ve $L_{(p,r)}(X,\Sigma,\mu)$ uzaylarının karşılaştırılması ile ilgili akla soruların gelmesi gayet doğaldır. Bunun için bazı çalışmalar yapılsın.

Lemma 3.1.1.7: $f \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ olmak üzere, $f^{**}(t) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{pq}}{t^{\frac{1}{p}}}$ eşitsizliği vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat:

$$\|f\|_{pq}^q = \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \geq \int_0^t s^{\frac{q}{p}-1}\left(f^{**}(s)\right)^q ds \geq \left(f^{**}(t)\right)^q \int_0^t s^{\frac{q}{p}-1}\,ds = \frac{p}{q}\left(f^{**}(t)\right)^q t^{\frac{q}{p}}$$

$\frac{p}{q}\left(f^{**}(t)\right)^q t^{\frac{q}{p}} \leq \|f\|_{pq}^q \Rightarrow f^{**}(t) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} t^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{pq}$ eşitsizliği açıkça görülür.

Sonuç 3.1.1.8: $f \in L_{(p,q)}(X,\sum,\mu)$ olmak üzere, $\|f\|_{(p,\infty)} \le \|f\|_{p\infty} \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{pq}$ olur (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: $\|f\|_{(p,\infty)} = \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{*}(t) \le \sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = \|f\|_{p\infty}$ olduğundan

$$\|f\|_{(p,\infty)} \le \|f\|_{p\infty} \tag{3.11}$$

yazılır. Lemma 3.1.1.7.'deki $f^{**}(t) \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{pq}}{t^{\frac{1}{p}}}$ eşitsizliği kullanıldığında,

$$f^{**}(t) \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{pq}}{t^{\frac{1}{p}}} \Rightarrow t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{pq} \Rightarrow \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{pq}$$

$$\|f\|_{p\infty} \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{pq} \tag{3.12}$$

olduğu görülür. (3.11) ve (3.12)'deki eşitsizlikleri birleştirildiğinde, $\|f\|_{(p,\infty)} \le \|f\|_{p\infty} \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{pq}$ elde edilir.

Lemma 3.1.1.9: $1 < p < \infty$ ve $1 \le q < r \le \infty$ olduğunda, $\|f\|_{pr} \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{pq}$ olur (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat:

$$\|f\|_{pr}^{r} = \int_{0}^{\infty} \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^{r} \frac{dt}{t} = \int_{0}^{\infty} \left(f^{**}(t)\right)^{r} t^{\frac{r}{p}-1}\, dt = \int_{0}^{\infty} \left(f^{**}(t)\right)^{q} \left(f^{**}(t)\right)^{r-q} t^{\frac{r}{p}-1}\, dt$$

yazılır. Lemma 3.1.1.7.'deki, $f^{**}(t) \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{pq}}{t^{\frac{1}{p}}}$ eşitsizliği kullanıldığında;

$$\int_0^\infty \left(f^{**}(t)\right)^q \left(f^{**}(t)\right)^{r-q} t^{\frac{r}{p}-1}\, dt \le \int_0^\infty \left(f^{**}(t)\right)^q \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \frac{\|f\|_{pq}}{t^{\frac{1}{p}}}\right)^{r-q} t^{\frac{r}{p}-1}\, dt$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{pq}^{r-q} \int_0^\infty \left(f^{**}(t)\right)^q t^{\frac{q}{p}-1}\, dt = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{pq}^{r-q} \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{pq}^{r-q} \|f\|_{pq}^{q} \|f\|_{pr}^{r} \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{pq}^{r-q} \|f\|_{pq}^{q} = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{r}{q}-1} \|f\|_{pq}^{r}$$

$$\|f\|_{pr} \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} \|f\|_{pq}$$

eşitsizliğinin varlığı ispatlanır.

3.1.2 Tam Lorentz Uzayları

$\|\cdot\|_{pq}$ dönüşümünün $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayı üzerinde bir norm olduğu gösterildi. Şimdi Riesz teoremi yardımıyla $\left(L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu),\|\cdot\|_{pq}\right)$ uzayının bir Banach uzay olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.1.2.1: $1<p\le\infty, 1\le q\le\infty$ p ve q genişletilmiş reel sayılar olmak üzere, $\left(L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu),\|\cdot\|_{pq}\right)$ uzayı bir Banach uzaydır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\left(L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu),\|\cdot\|_{pq}\right)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. O halde $\forall\varepsilon\ge 0$ için $\forall n,m>n_0$ olduğunda $\|f_n-f_m\|_{pq}\le\varepsilon$ olacak şekilde $\exists n_0\in\mathbb{N}$ vardır. Başka bir ifadeyle $\left.\begin{matrix} n\to\infty \\ m\to\infty\end{matrix}\right\}\|f_n-f_m\|_{pq}\to 0$ olur.

$\|f_n-f_m\|_{(p,\infty)}\le\left(\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}\|f_n-f_m\|_{pq}$ olduğu Sonuç 3.1.1.8.'den biliniyor. Buna göre;

$\|f_n-f_m\|_{(p,\infty)}=\sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\left(f_n-f_m\right)^*(t)\le\left(\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}}\|f_n-f_m\|_{pq}\to 0$ olur. Sonuç oarak $\sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\left(f_n-f_m\right)^*(t)\to 0$ yakınsaklığı görülür. Teorem 3.1.11.'e göre, $\sup\limits_{t>0} t^{\frac{1}{p}}\left(f_n-f_m\right)^*(t)=\sup\limits_{\lambda>0}\left(\lambda^p D_{(f_n-f_m)}(\lambda)\right)^{1/p}$ olduğundan

$$\sup_{\lambda>0}\left(\lambda^p D_{(f_n-f_m)}(\lambda)\right)^{1/p}=\sup_{\lambda>0}\left(\lambda^p\mu\left(\left\{x\in X:\left|f_n(x)-f_m(x)\right|>\lambda\right\}\right)\right)^{1/p}\to 0$$

bulunur. Bu ise $\forall\lambda>0$ ve $m,n\to\infty$ için $\mu\left(\left\{x\in X:\left|f_n(x)-f_m(x)\right|>\lambda\right\}\right)\to 0$ demektir. Sonuçta $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin μ ölçümüne göre de bir Cauchy dizisi olduğu görülür. F.Riesz'in teoremine göre, f ölçülebilir fonksiyon vardırki $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi μ ölçümüne göre f'ye yakınsaktır. Bir diğer F.Riesz teoremi ile X üzerinde μ ölçümüne göre, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin h.h.h. f'ye yakınsak $\left\{f_{n_k}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır.

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ bir Cauchy dizisi olduğundan $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $n > n_0$ için $\left\| f_n - f_{n_0} \right\|_{pq} < \varepsilon$ ve X üzerinde $f_{n_k} - f_{n_0}$ μ ölçümüne göre $f - f_{n_0}$ fonksiyonuna yakınsak olur. $\forall t > 0$ için $\left(f - f_{n_0}\right)^*(t) \le \liminf\limits_{k\to\infty}\left(f_{n_k} - f_{n_0}\right)^*(t)$ olur. Teorem 2.2.3. g) ve Fatou'nun lemması kullanıldığında, $\forall t > 0; \left(f - f_{n_0}\right)^{**}(t) \le \liminf\limits_{k\to\infty}\left(f_{n_k} - f_{n_0}\right)^{**}(t)$ elde edilir.

$$\left\| f - f_{n_0} \right\|_{pq} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \left(f - f_{n_0}\right)^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \liminf_{k\to\infty} \left(f_{n_k} - f_{n_0}\right)^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le \liminf_{k\to\infty} \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} \left(f_{n_k} - f_{n_0}\right)^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} = \liminf_{k\to\infty} \left\| f_{n_k} - f_{n_0} \right\|_{pq} < \varepsilon \ (n_k > n_0)$$

$f = (f - f_{n_0}) + f_{n_0} \in L_{(p,q)}\left(X, \Sigma, \mu\right)$ olduğu için $L_{(p,q)}\left(X, \Sigma, \mu\right)$ uzayı bir Banach uzaydır.

3.1.3 Ayrılabilir Lorentz Uzayları

$L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayının ayrılabilir olup olmadığını araştırmak için bütün basit fonksiyonların kümesinin $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayında yoğun olduğunu gösterme zorunluluğu vardır.

Teorem 3.1.3.1: $1 < p < \infty, 1 \le q < \infty$ için tüm basit fonksiyonların kümesi S, $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayında yoğundur (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: $q < \infty$ ve $f \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ için genelliği bozmadan f pozitif olsun. O zaman $\forall n \in \mathbb{N}$ için $0 \le s_n \le f$ ve $s_n \to f \ (n \to \infty)$ olacak şekilde integrallenebilir basit fonksiyon dizisi vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(f - s_n)^*(t) \le f^*\left(\frac{t}{2}\right) + s_n^*\left(\frac{t}{2}\right) \le 2f^*\left(\frac{t}{2}\right)$ olması, Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi ve Teorem 3.1.1.5. kullanılırsa, $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n\|_{pq} \le \frac{p}{p-1} \lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n\|_{(p,q)} = 0$ bulunur. Buradan $f \in \overline{S}$ yazılır. Bu ise f 'nin keyfi bir fonksiyon olduğu için $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu) \subset \overline{S}$ kapsamasını sağlar. Sonuç olarak; $\overline{S} = L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ yani S kümesi $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayında yoğundur.

Tanım 3.1.3.2: $\forall A \in \Sigma$ ve μ bir ölçüm olsun. Herhangi $\varepsilon > 0$ için $\mu(A) < \infty$ olmak üzere Σ nin sayılabilir bir $\prod$ alt ailesi için $\mu(A \Delta B) < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists B \in \prod$ varsa μ ölçümüne ayrılabilirdir denir. Burada $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ dır (Emel'yanov, 2014).

Teorem 3.1.3.3: $1 \le p < \infty, 1 \le q \le \infty$ için $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ Lorentz uzayının ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul μ ölçümünün ayrılabilir olmasıdır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: İlk olarak kabul edelimki μ ölçümü ayrılabilir olsun. O zaman $\forall \varepsilon > 0$ için G sonlu ölçüme sahip ölçülebilir kümesi için Σ 'nın sayılabilir bir $\prod$ alt ailesine ait Y kümesi vardır öyleki $\mu(G \Delta Y) < \varepsilon$ dır. Buradan

$$(\chi_G - \chi_Y)^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t (\chi_G - \chi_Y)^*(s)\, ds$$

$$=\frac{1}{t}\int_0^t \inf\left\{\lambda>0:\mu\left(\left\{x\in X:\left|(\chi_G-\chi_Y)(x)\right|>\lambda\right\}\right)\le s\right\}ds$$

$$=\frac{1}{t}\int_0^t \inf\left\{\lambda>0:D_{(\chi_G-\chi_Y)}(\lambda)\le s\right\}ds$$

olur. Buradan $\inf\left\{\lambda>0:D_{(\chi_G-\chi_Y)}(\lambda)\le s\right\}=\begin{cases}1, & 0\le s<\mu(G\Delta Y)\\ 0, & s\ge\mu(G\Delta Y)\end{cases}$ ifadesinin aralıklardaki değerleri integralde yazılsın.

İlk olarak $t<\mu(G\Delta Y)$ ve $0\le s\le t<\mu(G\Delta Y)$ olduğunda;

$\frac{1}{t}\int_0^t \inf\left\{\lambda>0:D_{(\chi_G-\chi_Y)}(\lambda)\le s\right\}ds=\frac{1}{t}\int_0^t 1ds+\frac{1}{t}\int_t^{\mu(G\Delta Y)} 0ds=1$ olur.

İkinci olarak ise $0\le s<\mu(G\Delta Y)<t$ olduğunda,

$$\frac{1}{t}\int_0^t \inf\left\{\lambda>0:D_{(\chi_G-\chi_Y)}(\lambda)\le s\right\}ds=\frac{1}{t}\int_0^{\mu(G\Delta Y)} 1ds+\frac{1}{t}\int_{\mu(G\Delta Y)}^t 0ds=\frac{1}{t}\mu(G\Delta Y)$$

bulunur. Bu ise $(\chi_G-\chi_Y)^{**}=\chi_{G\Delta Y}^{**}$ demektir. O zaman

$$\left\|\chi_G-\chi_Y\right\|_{pq}=\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}(\chi_G-\chi_Y)^{**}(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_0^\infty t^{\frac{q}{p}-1}\chi_{(G\Delta Y)}^{**}(t)dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

$=\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu(G\Delta Y)\right)^{1/p}$; sonuç olarak $\left\|\chi_G-\chi_Y\right\|_{pq}\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{q}}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$ elde edilir. Buradan anlaşılırki $\sum$ kümesinin sonlu ölçüme sahip G kümesinin karekteristik fonksiyonuna karşılık $\prod$'deki Y kümesinin karekteristik fonksiyon vardırki bu iki fonksiyonun arasındaki farkının normunu yeterince küçültülebilir. s basit fonksiyonu $\alpha_1>\alpha_2>\alpha_3\ldots>\alpha_n>0$ ve $A_i=\left\{x\in X:\ s(x)=\alpha_i\right\}$ olmak üzere; $s=\sum_{k=1}^n\alpha_k\chi_{A_k}$ biçiminde tanımlandığı biliniyor. Yukarıda gösterdiğimiz $\sum$'daki her sonlu ölçüme sahip kümenin karekteristik fonksiyonuna karşılık $\prod$'deki bir B kümesinin karekteristik fonksiyon var olduğundan; $\tilde{s}=\sum_{k=1}^n\alpha_k\chi_{B_k}$ biçiminde yeni bir karekteristik fonksiyon tanımlanabilir. $\forall k=1,2,...n$ için $\|s-\tilde{s}\|_{pq}$ normuna bakıldığında,

$$\|s-\tilde{s}\|_{pq}=\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{A_k}-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{B_k}\right\|_{pq}=\left\|\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\left(\chi_{A_k}-\chi_{B_k}\right)\right\|_{pq}$$

$$\leq \max_{1\leq k\leq n}\{\alpha_k\}\left\|\sum_{k=1}^{n}\left(\chi_{A_k}-\chi_{B_k}\right)\right\|_{pq}$$

ve α_k'ların tanımı dikkate alındığında

$$\alpha_1\left\|\sum_{k=1}^{n}\left(\chi_{A_k}-\chi_{B_k}\right)\right\|_{pq}\leq n\alpha_1\left\|\chi_{A_k}-\chi_{B_k}\right\|_{pq}=n\alpha_1\left\|\chi_{(A_k\Delta B_k)}\right\|_{pq}\leq n\alpha_1\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{q}}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliğine rahatlıkla ulaşılır. Sonuç olarak anlaşılırki $\sum$ ölçülebilir $A_1,A_2,A_3\ldots,A_n$ üzerinde tanımlı herhangi s basit fonksiyonu için $\prod$'de tanımlı $B_1,B_2,B_3\ldots,B_n$ ölçülebilir kümeler üzerinde tanımlanan $\tilde{s}$ basit fonksiyonu olacaktır. O zaman tüm basit fonksiyonların kümesinin $L_{(p,q)}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ uzayında yoğun olduğu anlaşılır. $\tilde{S}=\left\{\tilde{s}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{B_k}:B_k\in\prod,\alpha_k\in\mathbb{R},n=1,2,3...\right\}$ kümesi $L_{(p,q)}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ uzayında yoğundur. $\tilde{S}_Q=\left\{\tilde{s}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\chi_{B_k}:B_k\in\prod,\alpha_k\in\mathbb{Q},n=1,2,3...\right\}$ kümesi $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ olduğuna göre $\tilde{S}$ içinde yoğundur. Dolayısıyla $\tilde{S}_{\mathbb{Q}}$ kümesi $L_{(p,q)}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ uzayında yoğundur. $\tilde{S}_{\mathbb{Q}}$ kümesi; sayılabilir tane sayılabilir kümelerin birleşimide sayılabilir olduğu için sayılabilirdir. Bu nedenle $L_{(p,q)}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ uzayı ayrılabilirdir.

Tersine, kabul edelimki μ ölçümü ayrılabilir olmasın. O zaman $\exists\varepsilon>0$ ve sayılamayan $\prod$ ailesi vardırki $A\in\Sigma$ için her $B\in\prod$ alındığında ve $\mu(A\Delta B)\geq\varepsilon$ olur. $G=\left\{g=\chi_K:K\in\prod\right\}$ kümesi sayılabilir olmayıp herhangi iki $f,g\in G$ için

$$\|f-g\|_{pq}=\|\chi_M-\chi_N\|_{pq}=\left\|\chi_{(M\Delta N)}\right\|_{pq}=\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu\left(M\Delta N\right)\right)^{1/p}\geq\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{q}}\varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

olur. $M\neq N$ olduğundan $G\subset L_{(p,q)}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ kümesi sayılabilir değildir. Çünkü

$f, g \in G$, $\|f-g\|_{pq}$ normu yeterince küçülmeyecektir. Buradan $L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ uzayının sayılabilir alt uzayının olmadığı ortaya çıkar. Sonuçta $L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ uzayı ayrılabilir değildir.

3.1.4 Lorentz Uzayların Dual Uzayı

Tanım 3.1.4.1: $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayı üzerinde tanımlı sınırlı ve lineer fonksiyonların oluşturduğu kümeye yani $\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^* = \left\{F \mid F : L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu) \to \mathbb{C}, \text{sınırlı ve lineer dönüşüm}\right\}$ uzayına Lorentz uzayı'nın dual uzayı denir. Doğal olarak parametrelerin değişiminin dual uzayı nasıl etkilediğini düşünmek gayet normaldir. Bunun için aşağıdaki teorem verilecektir.

Teorem 3.1.4.2: (X,Σ,μ) non-atomic $\sigma-$ sonlu bir ölçüm uzayı olmak üzere;

i. $0 < p < 1, 0 < q \leq \infty$ olduğunda, $\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^* = \{0\}$

ii. $p = 1, 0 < q < 1$ olduğunda, $\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^* = L_\infty(X,\Sigma,\mu)$

iii. $p = 1, 1 < q < \infty$ olduğunda, $\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^* = \{0\}$

iv. $p = 1, q = \infty$ olduğunda, $\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^* \neq \{0\}$

v. $1 < p < \infty, 0 < q \leq 1$ olduğunda $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ olmak üzere

$$\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^* = L_{(p',q)}(X,\Sigma,\mu)$$

vi. $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$ olduğunda $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1, \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$ olmak üzere

$$\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^* = L_{(p',q')}(X,\Sigma,\mu)$$

vii. $1 < p < \infty, q = \infty$ olduğunda, $\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^* \neq \{0\}$

viii. $p = \infty, q = \infty$ olduğunda, $\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^* \neq \{0\}$ (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: X $\sigma-$sonlu olduğu için $\forall n \in \mathbb{N}$ için X_n artan küme dizisi olmak üzere vardır ki

$X=\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $\mu(X_n)<\infty$ olacak şekilde $\{X_n\}$ ölçülebilir kümelerin artan bir dizisi vardır.

$0<p,q<\infty$ ve $T\in\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^*$ olsun. T sınırlı lineer dönüşümü yardımıyla $\forall A\in\Sigma$ için $\nu(A)=T(\chi_A)$ biçiminde tanımlanan ν fonksiyonu X üzerinde bir ölçüm ifade eder. Gerçekten;

a) $\nu(\varnothing)=T(\chi_\varnothing)=T(0)=0 \quad \{T(0)=T(0+0)=T(0)+T(0)\Rightarrow T(0)=0\}$

b) $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\in\Sigma$ ve $n\neq m$ olduğun da $A_n\cap A_m=\varnothing$ olsun.

$$\text{i. } \chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}(x)=\begin{cases} 1, & x\in\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Rightarrow x\in A_r \text{ ve } x\notin\{A_n\}_{n\in\{\mathbb{N}-\{r\}\}} \\ 0, & x\notin\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Rightarrow\forall k\in\mathbb{N};\, x\notin A_k \end{cases}=\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{A_k}(x)$$

$$\text{ii. } T\left(\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{A_k}\right)(x)=T\left(\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{A_k}(x)\right)=T\left(\chi_{A_1}\right)(x)+T\left(\chi_{A_2}\right)(x)+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}T\left(\chi_{A_k}(x)\right)$$

$$\nu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\right)=T\left(\chi_{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}\right)=T\left(\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{A_k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}T\left(\chi_{A_k}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\nu(A_k)$$ olduğu rahatlıkla gösterilir. $\nu(A)=T(\chi_A)$ biçiminde tanımlanan ν, X üzerinde bir ölçüm fonksiyonudur. Dahası T sınırlı lineer dönüşüm olduğu için,

$$|\nu(A)|=|T(\chi_A)|\leq\|\chi_A\|_{pq}\,\|T\|\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{q}}(\mu(A))^{1/p}\,\|T\|$$ eşitsizliği rahatlıkla yazılır.

$q=\infty$ olduğunda, $|\nu(A)|=|T(\chi_A)|\leq\|\chi_A\|_{p\infty}\,\|T\|\leq(\mu(A))^{1/p}\,\|T\|$ olur. Sonuç olarak ν ölçümü μ ölçümüne göre mutlak sürekli olur. Çünkü $\forall A\in\Sigma$ için

$$\mu(A)=0\Rightarrow\nu(A)\leq\left(\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{q}}(\mu(A))^{\frac{1}{p}}\,\|T\|\right)\vee\nu(A)\leq\left((\mu(A))^{1/p}\,\|T\|\right)\Rightarrow\nu(A)=0$$

dır. O zaman Radon-Nikodym teoremine göre öyle bir kompleks değerli ölçülebilir fonksiyon vardır ki $\nu(A)=T(\chi_A)=\int_X |g|\cdot\chi_A\, d\mu$ olacaktır. Teorem 3.1.3.1.'de basit fonksiyonların kümesini $q<\infty$ olduğunda $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayında yoğun olduğu bilindiğine göre, $\forall f\in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ için $T(f)=\int_X |g\cdot f|\, d\mu$ biçiminde yazılabilir.

i) $0<p<1, 0<q\le\infty$ olduğunda, $\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^*=\{0\}$ dır.

İlk olarak $0<p<1$ ve f X üzerinde $f=\sum_n a_n\chi_{E_n}$ basit fonksiyondur. X atomic olmayan uzayın her parçalanışı $E_n\left(E_n=\bigcup_{j=1}^{N} E_{jn},\left(j\neq k; E_{jn}\cap E_{kn}=\varnothing\right)\right)$ ve $\mu\left(E_{jn}\right)=\frac{\mu(E_n)}{N}$, $f_j=\sum_n a_n\chi_{E_{jn}}$ biçiminde tanımlansın. O zaman

$$\|f\|_{(p,q)}=\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}\left(\sum_n a_n\chi_{E_n}\right)^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sum_n a_n\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}\left(\chi_{E_n}\right)^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=\left(\sum_n a_n\int_0^{\mu(E_n)} t^{\frac{q}{p}-1}\,dt\right)^{\frac{1}{q}}=\sum_n a_n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu(E_n)\right)^{1/p}=\sum_n a_n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(N\mu\left(E_{jn}\right)\right)^{1/p}$$

$$=N^{\frac{1}{p}}\sum_n a_n\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\mu\left(E_{jn}\right)\right)^{1/p}=N^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}\left(\sum_n a_n\chi_{E_{jn}}\right)^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=N^{\frac{1}{p}}\left\|f_j\right\|_{(p,q)}$$

ve buradan sonuç olarak,

$$\left\|f_j\right\|_{(p,q)}=N^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{(p,q)} \qquad \textbf{(3.13)}$$

eşitliği elde edilir. $\mathrm{F}\in\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^*$ olmak üzere,

$$\left|\mathrm{F}(f)\right|=\left|\mathrm{F}\left(\sum_n a_n\chi_{E_n}\right)\right|=\left|\mathrm{F}\left(\sum_n a_n\chi_{\bigcup_{j=1}^{N} E_{jn}}\right)\right|=\left|\mathrm{F}\left(\sum_n a_n\sum_{j=1}^{N}\chi_{E_{jn}}\right)\right|$$

$$=\left|\mathrm{F}\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{n}a_n\chi_{E_{jn}}\right)\right|=\left|\mathrm{F}\left(\sum_{j=1}^{N}f_j\right)\right|\le\sum_{j=1}^{N}\left|\mathrm{F}\left(f_j\right)\right|\le\sum_{j=1}^{N}\|\mathrm{F}\|\left\|f_j\right\|_{(p,q)}=\|\mathrm{F}\|\sum_{j=1}^{N}\left\|f_j\right\|_{(p,q)}$$

$$=\|\mathrm{F}\|\sum_{j=1}^{N}N^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{(p,q)}=N^{1-\frac{1}{p}}\|\mathrm{F}\|\|f\|_{(p,q)}$$

$$\left|\mathrm{F}(f)\right|\le N^{1-\frac{1}{p}}\|\mathrm{F}\|\|f\|_{(p,q)} \qquad \mathbf{(3.14)}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.14)'de $N\to\infty, p<1$ olduğunda $\left|\mathrm{F}(f)\right|\le 0$ yani $\mathrm{F}=0$ olduğu görülür. Bu nedenle $\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^{*}=\{0\}$ olur.

v) $1<p<\infty, 0<q\le 1$ olduğunda, $g\in L_{\left(p^{\prime},q\right)}(X,\Sigma,\mu)$ olmak üzere,

$$\left|\int_X f\cdot g\,d\mu\right|\le\int_0^{\infty}f^{*}(t)\cdot g^{*}(t)\,dt=\int_0^{\infty}t^{\frac{1}{p}}f^{*}(t)\cdot t^{\frac{1}{p^{\prime}}}g^{*}(t)\frac{dt}{t}\le\int_0^{\infty}t^{\frac{1}{p}}f^{*}(t)\cdot\|g\|_{(p^{\prime},\infty)}\frac{dt}{t}$$
$=\|f\|_{(p,1)}\|g\|_{(p^{\prime},\infty)}$ olur.

Lemma 3.1.1.9.'dan $1<p<\infty$ ve $1\le q<r\le\infty$ olduğunda, $\|f\|_{pr}\le\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\|f\|_{pq}$ olduğu bilinmektedir. $r=1$ alındığında $\|f\|_{p1}\le\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-1}\|f\|_{pq}$ olur. Buna göre,

$$\mathrm{F}(f)=\left|\int_X f\cdot g\,d\mu\right|\le\|f\|_{(p,1)}\|g\|_{(p^{\prime},\infty)}\le\|f\|_{(p,1)}\le\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-1}\|f\|_{(p,q)}\|g\|_{(p^{\prime},\infty)}$$

burada $\|f\|_{(p,q)}=1$ üzerinden supremum alınırsa,

$$\|\mathrm{F}\|\le\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}-1}\|g\|_{(p^{\prime},\infty)} \qquad \mathbf{(3.15)}$$

bulunur. $\mathrm{F}\in\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^{*}$, g kompleks değerli ölçülebilir bir fonksiyon ve

$f = \tilde{g} \cdot |g|^{-1} \cdot \chi_{\{g>\lambda\}}$ olarak tanımlansın. Buradan $\int\limits_X f \cdot g\, d\mu = \int\limits_X \tilde{g} \cdot |g|^{-1} \cdot \chi_{\{g>\lambda\}} \cdot g\, d\mu = \int\limits_{\{g>\lambda\}} |g|\, d\mu \geq \lambda\mu(\{g>\lambda\})$ olup sonuç olarak $\lambda\mu(\{g>\lambda\}) \leq \int\limits_X f \cdot g\, d\mu \leq \left|\int\limits_X f \cdot g\, d\mu\right| = |F(f)| \leq \|F\| \|f\|_{(p,q)}$ ve $|f| = \left|\tilde{g} \cdot |g|^{-1} \cdot \chi_{\{g>\lambda\}}\right| = |\tilde{g}||g|^{-1} \chi_{\{g>\lambda\}}$ elde edilir. Buna göre, $f^*(t) = |f|^*(t) = \chi^*_{\{g>\lambda\}}(t) = \chi_{(0,\mu(\{g>\lambda\}))}(t)$ yazılır. Bu ise

$$\|f\|_{(p,q)} = \left(\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^{\mu(\{g>\lambda\})} t^{\frac{q}{p}-1} dt\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\mu(\{g>\lambda\})\right)^{1/p}$$

$$\lambda\mu(\{g>\lambda\}) \leq \left|\int\limits_X f \cdot g\, \mathrm{d}\mu\right| = |F(f)| \leq \|F\| \|f\|_{(p,q)} \leq \|F\| \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\mu(\{g>\lambda\})\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\lambda\mu(\{g>\lambda\})^{1-\frac{1}{p}} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|F\| \Rightarrow \lambda\mu(\{g>\lambda\})^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|F\|$$

$$\lambda\left(D_g(\lambda)\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|F\|$$

demektir. O zaman

$$\lambda\left(D_g(\lambda)\right)^{1/p'} \leq \|F\| \Rightarrow \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p'}} g^*(t) \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|F\| \Rightarrow$$

$$\|g\|_{(p',\infty)} \leq \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}} \|F\| \qquad \mathbf{(3.16)}$$

olup (3.15) ve (3.16) 'dan $\|F\| \approx \|g\|_{(p',\infty)}$ olur. Yani $\left[L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right]^*$ uzayındaki her bir eleman için $L_{(p',\infty)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayında bir eleman karşılık gelir. Dolayısıyla bu uzaylar arasında eşmetrel eşyapılı bir dönüşüm tanımlanabileceği için

$\left[L_{(p,q)}\left(X,\Sigma,\mu\right)\right]^{*}=L_{(p^{\prime},\infty)}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ olacaktır.

vi) $1<p<\infty, 1<q<\infty$ olduğunda,

$$\left|\mathrm{F}(f)\right|=\left|\int_X f\cdot g\,d\mu\right|\le\int_0^{\infty}f^{*}(t)\cdot g^{*}(t)\,dt=\int_0^{\infty}t^{\frac{1}{p}}f^{*}(t)\cdot t^{\frac{1}{p^{\prime}}}g^{*}(t)\frac{dt}{t}$$

Hölder eşitsizliğini kullanılırsa,

$$\int_0^{\infty}t^{\frac{1}{p}}f^{*}(t)\cdot t^{\frac{1}{p^{\prime}}}g^{*}(t)\frac{dt}{t}\le\left(\int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}f^{*}(t)\right)^{q}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\cdot\left(\int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p^{\prime}}}g^{*}(t)\right)^{q^{\prime}}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q^{\prime}}}$$

$=\|f\|_{(p,q)}\|g\|_{\left(p^{\prime},q^{\prime}\right)}$ ve $\|f\|_{(p,q)}=1$ üzerinden supremum alındığında

$$\|\mathrm{F}\|\le\|g\|_{\left(p^{\prime},q^{\prime}\right)}\tag{3.17}$$

eşitsizliği elde edilir.

Tersine $\mathrm{F}\in\left[L_{(p,q)}\left(X,\Sigma,\mu\right)\right]^{*}$ ve $g\in L_{\left(p^{\prime},q^{\prime}\right)}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ olmak üzere g ile eş ölçülere sahip tüm $\Sigma-$ ölçülebilir $\tilde{g}$ fonksiyonlar üzerinden supremum alındığında, $\forall f\in L_{(p,q)}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ için $\int_0^{\infty}f^{*}(t)\cdot g^{*}(t)\,dt=\sup\left|\int_X f\cdot\tilde{g}\,d\mu\right|\le\|\mathrm{F}\|\|f\|_{(p,q)}$ olur. Teorem 2.4.6. kullanılırsa X üzerinde öyle bir ölçülebilir fonksiyonu $h(s)=s^{\frac{q^{\prime}}{p^{\prime}}-1}\left(g^{*}(s)\right)^{q^{\prime}-1}$ vardırki $f^{*}(t)=\int_{t/2}^{\infty}h(s)\frac{ds}{s}$ dır. Buna göre

$$\|f\|_{(p,q)}=\left(\int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}f^{*}(t)\right)^{q}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_0^{\infty}\left(\int_{t/2}^{\infty}h(s)\frac{ds}{s}\right)^{q}t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{1}{q}}$$ için integral içinde

$\frac{t}{2}=u$ dönüşümü yapılırsa

$$\|f\|_{(p,q)}=2^{\frac{q}{p}}\left(\int_0^\infty\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\int_0^\infty\left(\int_u^\infty h(s)\frac{ds}{s}\right)^q u^{\frac{q}{p}-1}du\right)^{\frac{1}{q}}$$ olur. Hardy eşitsizliği kullanılırsa $r-1=\frac{q}{p}-1$ ve

$$\int_0^\infty\left(\int_u^\infty h(s)\frac{ds}{s}\right)^q u^{\frac{q}{p}-1}du\le\left(\frac{q}{r}\right)^q\int_0^\infty\left(s\cdot\frac{h(s)}{s}\right)^q s^{\frac{q}{p}-1}ds$$ olduğundan,

$$\|f\|_{(p,q)}^q\le 2^{\frac{q}{p}}p^q\int_0^\infty\left(h(s)\right)^q s^{\frac{q}{p}-1}ds$$ elde edilir. Eşitsizlikte $h(s)=s^{\frac{q'}{p'}-1}\left(g^*(s)\right)^{q'-1}$ yazıldığında,

$$\|f\|_{(p,q)}^q\le 2^{\frac{q}{p}}p^q\int_0^\infty\left(s^{\frac{q'}{p'}-1}\left(g^*(s)\right)^{q'-1}\right)^q s^{\frac{q}{p}-1}ds$$

$$=2^{q/p}p^q\int_0^\infty s^{\left(\frac{qq'}{p'}-q+\frac{q}{p}-1\right)}\left(g^*(s)\right)^{q\left(q'-1\right)}ds \text{ olur.}$$

$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ ve $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ olduğundan

$$\frac{qq'}{p'}-q+\frac{q}{p}-1=q\left(\frac{q'}{p'}-1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=q\left(\frac{q'}{p'}-\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)=\frac{q\left(q'-1\right)}{p'}-1=\frac{q'}{p'}-1$$

değerleri yerlerine konulursa,

$$\|f\|_{(p,q)}^q\le 2^{\frac{q}{p}}p^q\int_0^\infty s^{\frac{q'}{p'}-1}\left(g^*(s)\right)^{q'}ds=2^{\frac{q}{p}}p^q\int_0^\infty\left(s^{\frac{1}{p'}}\left(g^*(s)\right)\right)^{q'}\frac{ds}{s}=2^{\frac{q}{p}}p^q\|g\|_{(p',q')}^{q'}$$

$\|f\|_{(p,q)}\le p\cdot 2^{\frac{1}{p}}\|g\|_{(p',q')}^{\frac{q'}{q}}$ elde edilir. Diğer taraftan $\int_0^\infty f^*(t)\cdot g^*(t)\,dt$ integralinde

$f^*(t)=\int\limits_{t/2}^{\infty} h(s)\frac{ds}{s}$ ve $h(s)=s^{\left(\frac{q'}{p'}-1\right)}\left(g^*(s)\right)^{q'-1}$ değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{t/2}^{\infty}\left(s^{\frac{q'}{p'}-1}\left(g^*(s)\right)^{q'-1}\right)\frac{ds}{s}\cdot g^*(t)\,dt \ge \int\limits_0^{\infty}\int\limits_{t/2}^{t}\left(s^{\frac{q'}{p'}-1}\left(g^*(s)\right)^{q'-1}\right)\frac{ds}{s}\cdot g^*(t)\,dt$$

$=\int\limits_0^{\infty}\left(g^*(t)\right)^{q'}\left(\int\limits_{t/2}^{t}\left(s^{\left(\frac{q'}{p'}-2\right)}\right)ds\right)dt=\frac{p'}{q'-p'}\left(1-2^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)}\right)\|g\|_{(p',q')}^{q'}$ elde edilir. Bu ise

$$\|g\|_{(p',q')}\le\left(\frac{q'-p'}{p'\left(1-2^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)}\right)}\right)^{\frac{1}{q'}}\|\|F\|\| \qquad \mathbf{(3.18)}$$

demektir. (3.17) ve (3.18) eşitsizlikleri beraber düşünüldüğünde uzaylar arasında izometrik izomorfizma tanımlanabilir. Bu ise uzayların izomorf olduklarını söyler. Sonuç olarak $\left[L_{(p,q)}\left(X,\Sigma,\mu\right)\right]^*\cong L_{(p',q')}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ olur.

Teorem 3.1.4.3: $1<p<\infty$ ve $1\le q<\infty$ veya $p=q=1$; $L_{pq}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayı $\left[L_{pq}\left(X,\Sigma,\mu\right)\right]^*$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ ve $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ olmak üzere, $\left[L_{pq}\left(X,\Sigma,\mu\right)\right]^*$ uzayı $L_{p'q'}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ uzayına izomorftur (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: İlk olarak $p=q$ ve $1\le p<\infty$ durumu incelendiğinde $L_{pp}\left(X,\Sigma,\mu\right)=L_p\left(X,\Sigma,\mu\right)$ olduğu için ve

$\left[L_p\left(X,\Sigma,\mu\right)\right]^* = L_{p'}\left(X,\Sigma,\mu\right) = L_{p'p'}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ eşitliğinden

$\left[L_{pq}\left(X,\Sigma,\mu\right)\right]^* \cong L_{p'q'}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ olduğu açıktır.

$1 < p < \infty$, $1 < q < \infty$ ve $p \neq q$ olmak üzere, $\left[L_{pq}\left(X,\Sigma,\mu\right)\right]^* \cong L_{p'q'}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ olduğunu göstermek için uzaylar arasında birbirine karşılık gelecek elemanların varlığını göstermek yeterlidir. $g \in L_{p'q'}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ olmak üzere ve $\forall f \in L_{pq}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ için $\mathrm{T}\left(f\right) = \int\limits_X f \cdot g\, d\mu$ olduğu biliniyor.

$$\left|\mathrm{T}\left(f\right)\right| = \left|\int\limits_X f \cdot g\, d\mu\right| \leq \int\limits_X \left|f \cdot g\right| d\mu \leq \int\limits_0^\infty f^*\left(t\right) \cdot g^*\left(t\right) dt \leq \int\limits_0^\infty f^{**}\left(t\right) \cdot g^{**}\left(t\right) dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty f^{**}\left(t\right) \cdot g^{**}\left(t\right) dt = \int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^{**}\left(t\right) \cdot t^{\frac{1}{p'}} g^{**}\left(t\right) \frac{dt}{t} \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}\left(t\right)\right)^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}} g^{**}\left(t\right)\right)^{q'} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q'}}$$

bulunur. Sonuç olarak $\left|\mathrm{T}\left(f\right)\right| \leq \left\|f\right\|_{pq} \left\|g\right\|_{p'q'}$ olur. T sınırlı lineer operatör ve $\left\|f\right\|_{pq} = 1$ üzerinden supremum alınırsa,

$$\left\|\mathrm{T}\right\| \leq \left\|g\right\|_{p'q'} \qquad \mathbf{(3.19)}$$

olduğu görülür. $1 < p < \infty$ ve $q = 1$ olduğunda

$$\left|\mathrm{T}\left(f\right)\right| \leq \int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^{**}\left(t\right) \cdot t^{\frac{1}{p'}} g^{**}\left(t\right) \frac{dt}{t} \leq \int\limits_0^\infty t^{\frac{1}{p}} f^{**}\left(t\right) \cdot \sup_{s>0}\left(s^{\frac{1}{p'}} g^{**}\left(s\right)\right) \frac{dt}{t} = \left\|f\right\|_{p1} \left\|g\right\|_{p'\infty}$$

olur. Buradan $\left\|f\right\|_{p1} = 1$ üzerinden supremum alındığında $\left\|\mathrm{T}\right\| \leq \left\|g\right\|_{p'\infty}$ olduğu açıktır. Bu ise gösterir ki $L_{p'q'}(X,\Sigma,\mu)$ uzayındaki her bir fonksiyona karşılık $\left[L_{pq}(X,\Sigma,\mu)\right]^*$ uzayında bir T operatörü karşılık gelir. $E\in\Sigma$ olmak üzere, $\sigma(E)=T(\chi_E)$ biçiminde tanımlanan σ, bir ölçümdür. $|\sigma(E)|=|T(\chi_E)|\le\|\chi_E\|_{pq}\,\|T\|\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{q}}(\mu(E))^{\frac{1}{p}}\,\|T\|$ olduğundan $\sigma<<\mu$ yani σ ölçümü μ ölçümüne göre mutlak süreklidir. Gerçekten $\mu(E)=0$ ise $\sigma(E)=0$ olduğu açıktır. Radon-Nikodym teoremine göre, en az bir $g\in L_1(X,\Sigma,\mu)=L_{(1,1)}(X,\Sigma,\mu)$ vardır ki $\sigma(E)=\int_X g\cdot\chi_E\,d\mu$ olacaktır. İntegral fonksiyonunun lineerliği ve basit fonksiyonlar kümesinin $L_{pq}(X,\Sigma,\mu)$ uzayında yoğun olması sebebiyle $\forall f\in L_{pq}(X,\Sigma,\mu)$ için $\mathrm{T}(f)=\int_X g\cdot f\,d\mu$ eşitliği rahatlıkla yazılabilir. Teorem 2.4.6. kullanıldığında X üzerinde öyle bir f ölçülebilir fonksiyonu vardır ki $f^*(t)=\int_{t/2}^{\infty}h(s)\frac{ds}{s}$ ve $h(s)=s^{\left(\frac{q'}{p'}-1\right)}\left(g^*(s)\right)^{q'-1}$ dır. Teorem 3.1.1.5 ve Hardy eşitsizlikleri kullanılırsa;

$$\|f\|_{pq}^q=\left(\frac{p}{p-1}\|f\|_{(p,q)}\right)^q=\left(\frac{p}{p-1}\right)^q\int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}f^*(t)\right)^q\frac{dt}{t}=$$

$$=\left(\frac{p}{p-1}\right)^q\int_0^{\infty}\left(\int_{t/2}^{\infty}h(s)\frac{ds}{s}\right)^q t^{\left(\frac{q}{p}-1\right)}dt$$ yazılır. Burada $\frac{t}{2}=u$ dönüşümü yapılırsa;

$$\|f\|_{pq}^q=\left(\frac{p}{p-1}\right)^q\int_0^{\infty}\left(\int_u^{\infty}h(s)\frac{ds}{s}\right)^q(2u)^{\frac{q}{p}-1}2du=2^{\frac{q}{p}}\left(\frac{p}{p-1}\right)^q\int_0^{\infty}\left(\int_u^{\infty}\frac{h(\mathrm{s})}{s}ds\right)^q u^{\frac{q}{p}-1}du$$

olur. Hardy eşitsizliği kullanıldığında,

$$\|f\|_{pq}^q=2^{\frac{q}{p}}\left(\frac{p}{p-1}\right)^q\int_0^{\infty}\left(\int_u^{\infty}\frac{h(s)}{s}ds\right)^q u^{\frac{q}{p}-1}du\le$$

$$\leq 2^{\frac{q}{p}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{q} \left(\frac{q}{q/p} \right)^{q} \int_{0}^{\infty} \left(u \cdot \frac{h(u)}{u} \right)^{q} u^{\frac{q}{p}-1} du =$$

$$= 2^{\frac{q}{p}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{q} p^{q} \int_{0}^{\infty} \left(u^{\left(q^{\prime}/p^{\prime}\right)-1} \left(g^{*}(u) \right)^{q^{\prime}-1} \right)^{q} u^{\frac{q}{p}-1} du$$

$$= 2^{\frac{q}{p}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{q} p^{q} \int_{0}^{\infty} u^{\left(qq^{\prime}/p^{\prime}\right)-q} \left(g^{*}(u) \right)^{q\left(q^{\prime}-1\right)} u^{\frac{q}{p}-1} du$$

$$= 2^{\frac{q}{p}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{q} p^{q} \int_{0}^{\infty} \left(g^{*}(u) \right)^{q\left(q^{\prime}-1\right)} u^{\frac{qq^{\prime}}{p^{\prime}}-q+\frac{q}{p}-1} du$$

bulunur. $\frac{qq^{\prime}}{p^{\prime}}-q+\frac{q}{p}-1 = q\left(\frac{q^{\prime}}{p^{\prime}}-1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q} \right) = q\left(\frac{q^{\prime}}{p^{\prime}}-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{\prime}}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q} \right)$

$= q\left(\frac{q^{\prime}}{p^{\prime}}-\frac{1}{p}-\frac{1}{p^{\prime}}+\frac{1}{p}-\frac{1}{q} \right) = \frac{q\left(q^{\prime}-1\right)}{p^{\prime}}-1 = \frac{q^{\prime}}{p^{\prime}}-1$ ifadeleri yerlerine yazıldığında,

$$\|f\|_{pq}^{q} \leq 2^{\frac{q}{p}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{q} p^{q} \int_{0}^{\infty} \left(g^{*}(u) \right)^{q\left(q^{\prime}-1\right)} u^{\frac{qq^{\prime}}{p^{\prime}}-q+\frac{q}{p}-1} du$$

$$= 2^{\frac{q}{p}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{q} p^{q} \int_{0}^{\infty} \left(g^{*}(u) \right)^{q^{\prime}} u^{\frac{q^{\prime}}{p^{\prime}}-1} du = 2^{\frac{q}{p}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{q} p^{q} \int_{0}^{\infty} \left(u^{\frac{1}{p^{\prime}}} g^{*}(u) \right)^{q^{\prime}} \frac{du}{u}$$

$= 2^{\frac{q}{p}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{q} p^{q} \|g\|_{\left(p^{\prime},q^{\prime}\right)}^{q^{\prime}}$ elde edilir. Sonuç olarak,

$\|f\|_{pq}^{q} \leq 2^{\frac{q}{p}} \left(\frac{p}{p-1} \right)^{q} p^{q} \|g\|_{\left(p^{\prime},q^{\prime}\right)}^{q^{\prime}}$ ve buradan da $\|f\|_{pq} \leq 2^{\frac{1}{p}} \left(\frac{p^{2}}{p-1} \right) \|g\|_{\left(p^{\prime},q^{\prime}\right)}^{q^{\prime}/q}$

olduğu görülür. T sınırlı lineer dönüşümünün normu yazılırsa, $f \neq 0$ o.ü.

$$\|\mathrm{T}\| = \sup_{f \in L_{(p,q)}} \frac{|\mathrm{T}(f)|}{\|f\|_{pq}} = \sup_{f \in L_{(p,q)}} \frac{\int_{0}^{\infty} f^{*}(t) g^{*}(t) dt}{\|f\|_{pq}}$$ ifadesinden

$\int\limits_0^\infty f^*(t)\, g^*(t)\, dt \le \|\mathrm{T}\| \|f\|_{pq}$ yazılır. Buradan

$$\int\limits_0^\infty f^*(t)\, g^*(t)\, dt \ge \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{t/2}^\infty h(s) \frac{ds}{s} \right) g^*(t)\, dt = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_{t/2}^\infty s^{\frac{q'}{p'}-1} \left(g^*(s) \right)^{q'-1} \frac{ds}{s} \right) g^*(t)\, dt \ge$$

$$\ge \int\limits_0^\infty \left(g^*(t) \right)^{q'} \left(\int\limits_{t/2}^t s^{\frac{q'}{p'}-2} ds \right) dt = \left(\frac{p'}{q'-p'} \right) \left(1 - 2^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)} \right) \int\limits_0^\infty \left(g^*(t) \right)^{q'} t^{\frac{q'}{p'}-1} dt$$

$$= \left(\frac{p'}{q'-p'} \right) \left(1 - 2^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)} \right) \|g\|_{(p',q')}^{q'}$$

olması kullanılırsa

$$\|g\|_{p'q'}^{q'} = \int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}} g^{**}(t) \right)^{q'} \frac{dt}{t} = \int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}} \frac{1}{t} \int\limits_0^t g^*(s)\, ds \right)^{q'} \frac{dt}{t} = \int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}-1} \int\limits_0^t g^*(s)\, ds \right)^{q'} \frac{dt}{t}$$

$$\int\limits_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p'}-1} \int\limits_0^t g^*(s)\, ds \right)^{q'} \frac{dt}{t} = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t g^*(s)\, ds \right)^{q'} t^{\frac{q'}{p'}-q'-1} dt \le$$

$$\le \left(\frac{q'}{q'-q'/p'} \right)^{q'} \int\limits_0^\infty \left(s \cdot g^*(s) \right)^{q'} s^{\frac{q'}{p'}-q'-1} ds = p^{q'} \|g\|_{\left(p',\, q'\right)}^{q'}$$

$\|g\|_{\left(p',\, q'\right)}^{q'} \ge \left(\frac{1}{p} \right)^{q'} \|g\|_{p'q'}^{q'}$ elde edilir. Sonuç olarak

$$\int_0^\infty f^*(t)\,g^*(t)\,dt \geq \left(\frac{p'}{q'-p'}\right)\left(1-2^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)}\right)\|g\|_{(p',q')}^{q'} \geq$$

$$\left(\frac{p'}{q'-p'}\right)\left(1-2^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)}\right)\left(\frac{1}{p}\right)^{q'}\|g\|_{p'q'}^{q'}$$

$$\int_0^\infty f^*(t)\,g^*(t)\,dt \geq \left(\frac{p'}{q'-p'}\right)\left(1-2^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)}\right)\left(\frac{1}{p}\right)^{q'}\|g\|_{p'q'}^{q'} \qquad \mathbf{(3.20)}$$

bulunur. $\int_0^\infty f^*(t)\,g^*(t)\,dt \leq \|\mathrm{T}\|\|f\|_{pq}$ eşitsizliğinde (3.20) ifadesi kullanıldığında,

$$\|\mathrm{T}\|\|f\|_{pq} \geq \int_0^\infty f^*(t)\,g^*(t)\,dt \geq \left(\frac{p'}{q'-p'}\right)\left(1-2^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)}\right)\|g\|_{(p',q')}^{q'} \geq$$

$$\left(\frac{p'}{q'-p'}\right)\left(1-2^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)}\right)\left(\frac{1}{p}\right)^{q'}\|g\|_{p'q'}^{q'}$$

yazılır. Son olarak, $\|\mathrm{T}\| \geq \dfrac{\left(\frac{p'}{q'-p'}\right)\left(1-2^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)}\right)\left(\frac{1}{p}\right)^{q'}}{\|f\|_{pq}}\|g\|_{p'q'}^{q'}$ ve

$\|f\|_{pq} \leq 2^{\frac{1}{p}}\left(\dfrac{p^2}{p-1}\right)\|g\|_{p'\,q'}^{q'/q}$ olduğu için

$$\|T\| \geq \left(\frac{p'}{q'-p'}\right)\left(1-2^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)}\right)\left(\frac{1}{p}\right)^{q'} 2^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p^2}\right)\|g\|_{p'q'}^{-q'/q}\|g\|_{p'q'}^{q'}$$

$$= C(p,q)\|g\|_{p'q'}^{q'-q'/q} = C(p,q)\|g\|_{p'q'}$$

$$\|T\| \geq C(p,q)\|g\|_{p'q'} \qquad \textbf{(3.21)}$$

yazılır. Burada $C(p,q)=\left(\frac{p'}{q'-p'}\right)\left(1-2^{\left(1-\frac{q'}{p'}\right)}\right)\left(\frac{1}{p}\right)^{q'} 2^{-\frac{1}{p}}\left(\frac{p-1}{p^2}\right)$ dir. (3.19) ve (3.21)'den $C\|g\|_{p'q'} \leq \|T\| \leq \|g\|_{p'q'}$ olduğu görülür. Bu eşitsizliklerden açıkça her $T \in \left[L_{pq}(X,\Sigma,\mu)\right]^*$ lineer dönüşümüne karşılık $L_{p'q'}(X,\Sigma,\mu)$ uzayında bir ölçülebilir fonksiyonun varlığı garanti altındadır. Böylece $\left[L_{pq}(X,\Sigma,\mu)\right]^*$ ve $L_{p'q'}(X,\Sigma,\mu)$ uzayları birbirine izomorfturlar.

3.2 Lorentz Uzaylarında Ağırlıklı Bileşke Operatörleri

Bu bölümde $1 < p \le \infty, 1 \le q \le \infty$, $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayı üzerinde tanımlı ağırlıklı bileşke operatörlerin sınırlılığı, kompaktlığı, görüntü kümesinin kapalılığı kısacası karakteri incelenecektir.

Tanım 3.2.1: f fonksiyonu (X,Σ,μ) $\sigma-$ sonlu ölçüm uzayı üzerinde tanımlı, ölçülebilir ve kompleks değerli bir fonksiyon olsun. $\lambda \ge 0$ için $D_f(\lambda) = \mu(\{x \in X : |f(x)| > \lambda\})$ fonksiyonuna f 'nin dağılım ve $t \ge 0$ için $f^*(t) = \inf\{\lambda \ge 0 : D_f(\lambda) \le t\}$ f 'nin artmayan yeniden düzenleme fonksiyonları denir. Bu fonksiyonların temel özellikleri bölüm 2.2., 2.3.'de ve aynı zamanda $t > 0$ olmak üzere $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds$ maksimal fonksiyonun özellikleri ve eşitsizlikleride bölüm 2.4.'de gösterildi. Ayrıca f, X üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyon olmak üzere;

$$\|f\|_{pq} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} & , q < \infty \\ \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) & , q = \infty \end{cases}$$

normu tanımlanmıştı (Castillo ve Rafeiro, 2015).

Tanım 3.2.2: $\mathrm{T} : X \to X$ tanımlı bir dönüşüm olmak üzere; her $E \in \Sigma$ için $\mathrm{T}^{-1}(E) \in \Sigma$ oluyorsa T 'ye ölçülebilir dönüşüm denir (Arora vd, 2007).

Tanım 3.2.3: $\mathrm{T} : X \to X$ tanımlı bir dönüşüm olmak üzere; $\forall E \in \Sigma$ için $\mu(E) = 0$ olduğunda $\mu(\mathrm{T}^{-1}(E)) = 0$ oluyorsa T 'ye non-singular dönüşüm denir (Arora vd, 2007; Takagi, 1993).

Tanım 3.2.4: $\mathrm{U}: X \to \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyon olsun. $W = W_{U,T}$, $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ Lorentz uzayından, tüm complex değerli ölçülebilir fonksiyonlar uzayına tanımlanan yani, $W = W_{U,T} : L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu) \to M(X,\Sigma)$ olmak üzere her $f \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ için $W_{U,T}(f) = (U \circ T)\cdot(f \circ T)$ lineer dönüşümü sınırlı olduğunda $W = W_{U,T}$ operatörüne ağırlıklı bileşke operatörü denir (Arora vd, 2007).

$\mathrm{T}: X \to X$, $f: X \to \mathbb{C}$ ve $\mathrm{U}: X \to \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyonlar olduğu için $W_{U,T}(f) = (U \circ T)\cdot(f \circ T)$ fonksiyonu da ölçülebilir fonksiyon olacaktır. Yani $W_{U,T}(f) \in M(X,\Sigma)$ olur. $W_{U,T}(f): X \to \mathbb{C}$ ve bu fonksiyonun belirli bir $x \in X$ noktasındaki görütüsü $W_{U,T}(f)\big|_x = (U \circ T)\cdot(f \circ T)(x) = U(T(x))\cdot f(T(x))$ biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.2.5: Eğer $W_{U,T}$ operatöründe $U \equiv 1$ alınırsa $W_{1,T} = C_T : L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu) \to M(X,\Sigma), C_T(f) = f \circ T$ operatörüne T tarafından indirgenen bileşke operatörü denir (Arora vd, 2007).

Tanım 3.2.6: Eğer $W_{U,T}$ operatöründe $T \equiv \mathrm{I}$ birim dönüşüm olarak düşünüldüğünde $W = M_U : L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu) \to M(X,\Sigma), M_U(f) = U \cdot f$ operatörüne U tarafından üretilen çarpım operatörü denir (Arora vd, 2007).

Şimdi $W = W_{U,T}$ operatörün karekterini incelemeye başlayalım.

Lemma 3.2.7: ν,κ; (X,Σ) uzayı üzerinde tanımlanan iki sonlu ölçüm olsunlar. $\forall E \in \Sigma$ için $\nu(E) \le \kappa(E)$ olduğunda $\nu(E) = \int_E f\, d\kappa$ olacak şekilde $f \ge 0, f \in L_2(\kappa)$ vardır (Emel'yanov, 2007).

İspat: $G: L_2(\kappa) \to \mathbb{R}$ ve $g \in L_2(\kappa)$ olmak üzere $G(g) = \int_X g\, d\nu$ dönüşümü tanımlansın. Riesz temsil teoremi gereği $\forall g \in L_2(\kappa)$ için $G(g) = \int_X f \cdot g\, d\kappa$ olacak şekilde $f \in L_2(\kappa)$ fonksiyonu vardır. Şimdi burada $E \in \Sigma$ olmak üzere $g = \chi_E$

alınırsa $\int\limits_X g\ dv = G(g) = \int\limits_X f \cdot g\ d\lambda$ olduğundan

$\int\limits_X \chi_E\ dv = \int\limits_X f\chi_E\ d\lambda = \int\limits_E f\ d\lambda \Rightarrow \nu(E) = \int\limits_E f\ d\lambda$ olur.

Lemma 3.2.8: ν,κ; (X,Σ) üzerinde tanımlı sonlu iki ölçüm ve $\nu << \kappa$ olsun. O zaman her $E\in\Sigma$ için $\nu(E) = \int\limits_E \Phi\, d\kappa$ olacak şekilde h.h.h. pozitif $\Phi \in L_1(\kappa)$ fonksiyonu vardır (Emel'yanov, 2007).

İspat: $\lambda = \nu + \kappa$ dönüşümüde bir ölçüm fonksiyonudur. Gerçekten;

i. $\lambda(\varnothing) = \nu(\varnothing) + \kappa(\varnothing) = 0 + 0 = 0$

ii. $n \neq m$ ve $A_n \cap A_m = \varnothing$ olmak üzere

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) + \kappa\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\nu+\kappa)(A_n)$$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ λ fonksiyonu i. ve ii. şartlarını sağladığı için ölçüm fonksiyonu olur. $\forall A\in\Sigma$ için $\nu(A) \leq \lambda(A)$ olduğu açıktır. Bu ise Lemma 3.2.7. ile $\nu(A) = \int\limits_A f\, d\lambda$ olacak şekilde $f \geq 0, f \in L_2(\lambda)$ vardır. f fonksiyonunu $0 \leq f \leq 1$ alındığında $0 \leq \nu(A) = \int\limits_A f\, d\lambda \leq \int\limits_A 1 d\lambda = \lambda(A)$ olur. $E = \{x \in X : f(x) = 1\}$ kümesi alındığında $\nu(E) = \int\limits_E f\, d\lambda \leq \int\limits_E 1 d\lambda = \lambda(E)$ olur. $\lambda = \nu + \kappa$ olduğu için $\lambda(E) = \nu(E) + \kappa(E)$ olacaktır. Bu ise $\kappa(E) = 0$ olduğunu gösterir. Hipotezden $\nu << \kappa$ olduğu için $\kappa(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$ sonucuna ulaşılır. Sonuçta $\lambda(E) = \nu(E) + \kappa(E) = 0 + 0 = 0$ olur. Her $A\in\Sigma$ için $\int\limits_X \chi_A \cdot f\, d\kappa = \int\limits_X \chi_A (1-f) d\nu$ ve her $g \geq 0$ ölçülebilir fonksiyonu için $\int\limits_X g \cdot f \cdot d\kappa = \int\limits_X g \cdot (1-f) \cdot d\nu$ elde edilir. $g = \dfrac{\chi_A}{1-f}$ ve $0 \leq f < 1$ alındığında $\int\limits_X \dfrac{\chi_A}{1-f} f\, d\kappa = \int\limits_X \dfrac{\chi_A}{1-f}(1-f) d\nu \Rightarrow \int\limits_A \dfrac{f}{1-f}\, d\kappa = \nu(A) \Rightarrow \nu(A) = \int\limits_A \Phi\ d\kappa$ olacak şekilde $\dfrac{f}{1-f} = \Phi \in L_1(\kappa)$ vardır.

Teorem 3.2.9: (Radon-Nikodym Teoremi): (X,Σ,μ) bir $\sigma-$ sonlu ölçüm uzayı ve v, Σ üzerinde tanımlanan ölçüm olsun. $v<<\mu$ olmak üzere her $A\in\Sigma$ için $v(A)=\int_A f d\mu$ olacak şekilde negatif olmayan ölçülebilir f fonksiyonu vardır (Emel'yanov, 2007).

Radon-Nikodym Teoreminde ölçüm uzayının $\sigma-$ sonlu olması oldukça önem arz etmektedir.

Örnek 3.2.10: $X=[0,1]$ ve Σ, $[0,1]$ aralığının bütün ölçülebilir alt kümelerin sınıfı olsun. v Lebesque ölçümü ve μ sayma ölçümü olarak tanımlansın. v ölçümü μ ölçümüne göre mutlak sürekli yani $v<<\mu$ olacaktır. Gerçekten her $A\in\Sigma$ için $\mu(A)=0$ olduğunda μ sayma ölçümü olduğu için $A=\varnothing$ olmak zorundadır. Dolayısıyla $v(A)=v(\varnothing)=0$ olacaktır. Fakat $v(A)=\int_A f d\mu$ olacak şekilde f fonksiyonu bulunamaz. v Lebesque ölçümü olduğu için $v([0,1])=1$ ve diğer taraftan X kümesi sayılabilir olmadığı için $x\in X=[0,1]$ olmak üzere $\mu(\{x\})=1$ dir. Gerçekten böyle bir f fonksiyonu var olsaydı $\forall A\in\Sigma$ için $v(A)=\int_A f\, d\mu$ olurdu. Tek nokta kümeleri dikkate alınırsa her $x\in X$ için $v(\{x\})=\int_{\{x\}} f\, d\mu \Rightarrow 0=\int_X f\cdot\chi_{\{x\}}\, d\mu = f(x)\mu(\{x\})=f(x)$ olur. Bu ise $f=0$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak $v([0,1])=\int_X 0\, d\mu=0$ olduğunu gösterir. $v([0,1])=1$ olmasıyla çelişecektir. Dolayısıyla $v(A)=\int_A f d\mu$ eşitliğini sağlayacak f ölçülebilir fonksiyonu bulunamaz. Sebebi araştırıldığında X üzerinde tanımlanan μ sayma ölçümüne göre $[0,1]$'in $\sigma-$sonlu olmamasından kaynaklandığı görülür.

Teorem 3.2.11: (X,Σ,μ) bir $\sigma-$ sonlu ölçüm uzayı ve $U:X\to\mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyon olsun. $T:X\to X$ non-singular bir ölçüm ve $L_\infty(\mu)$ uzayı içinde Radon-Nikodym türevi $f_T=\dfrac{d(\mu T^{-1})}{d\mu}$ olmak üzere; Eğer $U\in L_\infty(\mu)$ ise $W=W_{U,T}$

operatörü $1<p\le\infty, 1\le q\le\infty$ için $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayında sınırlıdır (Arora vd, 2007; Jabbarzadeh ve Pourreza; 2003).

İspat: $f_T=\dfrac{d(\mu T^{-1})}{d\mu}\in L_\infty(\mu)$ olduğuna göre $b=\|f_T\|_\infty=\left\|\dfrac{d(\mu T^{-1})}{d\mu}\right\|_\infty<\infty$ olsun. W fonksiyonunun dağılım fonksiyonu, $D_{W_{U,T}(f)}(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:\left|W_{U,T}(f)(x)\right|>\lambda\right\}\right)=\mu\left(\left\{x\in X:\left|U(T(x))\cdot f(T(x))\right|>\lambda\right\}\right)$ olur. $A=\left\{x\in X:\left|W_{U,T}(f)(x)\right|>\lambda\right\}$ ve $B=T^{-1}\left\{x\in X:U(x)\cdot f(x)>\lambda\right\}$ kümeleri alınırsa olmak üzere A ve B kümeleri birbirine eşit kümelerdir. Çünkü $\forall x_0\in A=\left\{x\in X:U(T(x))\cdot f(T(x))>\lambda\right\}$ için $U(T(x_0))\cdot f(T(x_0))>\lambda$ dır. $T(x_0)=y_0\in X$ alınırsa $U(x)\cdot f(x)>\lambda$ bulunur. Bu ise $y_0\in\left\{x\in X: U(x)\cdot f(x)>\lambda\right\}$ demektir. Buradan $T(x_0)=y_0\in\left\{x\in X: \left|U(x)\cdot f(x)\right|>\lambda\right\}$ olup $x_0\in T^{-1}\left\{x\in X:\left|U(x)\cdot f(x)\right|>\lambda\right\}=B$ yani $A\subset B$ bulunur.

$\forall y_1\in B=T^{-1}\left\{x\in X:U(x)\cdot f(x)>\lambda\right\}$ olsun. O zaman $U(x_1)\cdot f(x_1)>\lambda$ olacak şekilde $\exists x_1\in X$ vardır. Burada $y_1=T^{-1}(x_1)$ olduğu için $x_1=T(y_1)$ elde edilir. $U(x_1)\cdot f(x_1)>\lambda$ olduğundan $U(T(y_1))\cdot f(T(y_1))>\lambda$ eşitsizliği oluşur. A kümesinin tanımı ile $y_1\in A$ olur. Bu ise $B\subset A$ kapsaması ve sonuç olarak $A=B$ demektir. Buradan $\mu\left(\left\{x\in X:\left|U(T(x))\cdot f(T(x))\right|>\lambda\right\}\right)=\mu\left(T^{-1}\left\{x\in X:\left|U(x)\cdot f(x)\right|>\lambda\right\}\right)$ olup $\forall x\in X$ için $\left|U(x)\right|\le\|U\|_\infty$ olduğundan $\left\{x\in X:\left|U(x)\cdot f(x)\right|>\lambda\right\}\subset\left\{x\in X:\|U\|_\infty\left|f(x)\right|>\lambda\right\}$ yazılır. μT^{-1} ölçüm olduğundan ve ölçümün monotonluğu gereği; $\mu T^{-1}\left(\left\{x\in X:\left|U(x)\cdot f(x)\right|>\lambda\right\}\right)\le\mu T^{-1}\left(\left\{x\in X:\|U\|_\infty\left|f(x)\right|>\lambda\right\}\right)$ olduğu açıkça görülür. Radon-Nikodym türevi $f_T=\dfrac{d(\mu T^{-1})}{d\mu}$ olduğuna göre; $d(\mu T^{-1})=f_T d\mu$

eşitliği yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafında integral alınırsa $\forall E \in \sum$ için $\int\limits_E d\left(\mu T^{-1}\right) = \int\limits_E f_T d\mu$ ifadesi yazılabilir. $f_T \leq \|f_T\|_\infty$ olduğu için $\mu T^{-1}(E) \leq \|f_T\|_\infty \mu(E)$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik ile $\mu T^{-1}\left(\left\{x \in X : \|U\|_\infty |f(x)| > \lambda\right\}\right) \leq \|f_T\|_\infty \mu\left(\left\{x \in X : \|U\|_\infty |f(x)| > \lambda\right\}\right)$ elde edilir. Sonuç olarak $\mu\left(\left\{x \in X : |U(T(x)) \cdot f(T(x))| > \lambda\right\}\right) \leq \|f_T\|_\infty \mu\left(\left\{x \in X : \|U\|_\infty |f(x)| > \lambda\right\}\right)$ eşitsizliğinin varlığı bulunur. Buradan dağılım fonksiyonuna geçilirse

$$D_{W_{U,T}(f)}(\lambda) \leq \|f_T\|_\infty D_{\|U\|_\infty f}(\lambda) \tag{3.22}$$

eşitsizliği oluşur. Her $t \geq 0$ için $\left\{\lambda \geq 0 : D_{\|U\|_\infty f}(\lambda) \leq \dfrac{t}{\|f_T\|_\infty}\right\} \subseteq \left\{\lambda \geq 0 : D_{W_{U,T}(f)}(\lambda) \leq t\right\}$ olduğundan $\inf\left\{\lambda \geq 0 : D_{W_{U,T}(f)}(\lambda) \leq t\right\} \leq \inf\left\{\lambda \geq 0 : D_{\|U\|_\infty f}(\lambda) \leq \dfrac{t}{\|f_T\|_\infty}\right\}$ bulunur. Buradan $\left(W_{U,T}(f)\right)^*(t) \leq \|U\|_\infty \cdot f^*\left(\dfrac{t}{\|f_T\|_\infty}\right)$ olup maksimal fonksiyona geçilirse $\left(W_{U,T}(f)\right)^{**}(t) \leq \|U\|_\infty \cdot f^{**}\left(\dfrac{t}{\|f_T\|_\infty}\right)$ eşitsizliği elde edilir. O zaman $1 < p < \infty$ ve $1 \leq q < \infty$ olmak üzere

$$\left\|W_{U,T}(f)\right\|_{pq}^q = \frac{q}{p}\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\left(W(f)\right)^{**}(t)\right)^q \frac{dt}{t} \leq \frac{q}{p}\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}}\|U\|_\infty \cdot f^{**}\left(\frac{t}{\|f_T\|_\infty}\right)\right)^q \frac{dt}{t}$$

$= \left(\|U\|_\infty\right)^q \left(\dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}\left(\dfrac{t}{\|f_T\|_\infty}\right)\right)^q \dfrac{dt}{t}\right)$ elde edilir. $\dfrac{t}{\|f_T\|_\infty} = k$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\left\|W_{U,T}(f)\right\|_{pq}^{q} \le \left(\|U\|_\infty\right)^q \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}\left(\frac{t}{\|f_T\|_\infty} \right) \right)^q \frac{dt}{t} \right)$$

$$= \left(\|U\|_\infty\right)^q \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty \left(\left(\|f_T\|_\infty k\right)^{1/p} f^{**}(k) \right)^q \frac{dk}{k} \right)$$

$$\left(\|U\|_\infty\right)^q \left(\|f_T\|_\infty\right)^{q/p} \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty \left(k^{1/p} f^{**}(k) \right)^q \frac{dk}{k} \right)$$

ve $\left\|W_{U,T}(f)\right\|_{pq}^{q} \le \left(\|U\|_\infty\right)^q \left(\|f_T\|_\infty\right)^{q/p} \left(\frac{q}{p} \int_0^\infty \left(k^{1/p} f^{**}(k) \right)^q \frac{dk}{k} \right)$ olur. Sonuç olarak

$$\left\|W_{U,T}(f)\right\|_{pq} \le \|U\|_\infty \left(\|f_T\|_\infty\right)^{1/p} \|f\|_{pq} \qquad \mathbf{(3.23)}$$

eşitsizliği elde edilir.

İkinci olarak $1 < p \le \infty$ ve $q = \infty$ olsun.

$\left\|W_{U,T}(f)\right\|_{p\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \left(W_{U,T}(f)\right)^{**}(t) \le \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \|U\|_\infty f^{**}\left(\frac{t}{\|f_T\|_\infty} \right)$ olup

$\frac{t}{\|f_T\|_\infty} = k$ dönüşümü yapılırsa $\left\|W_{U,T}(f)\right\|_{p\infty} \le \|U\|_\infty \left(\|f_T\|_\infty\right)^{1/p} \|f\|_{p\infty}$ eşitsizliği görülür. Her iki durumda da $W_{U,T}$ operatörü sınırlı olur. Ayrıca operatör norma geçilirse $\left\|W_{U,T}\right\|_{pq} \le \|U\|_\infty \left(\|f_T\|_\infty\right)^{1/p}$ olduğu açıktır.

Teorem 3.2.12: $U : X \to \mathbb{C}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $T : X \to X$ non-singular ölçülebilir bir dönüşüm olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $E_\varepsilon = \{x \in X : |U(x)| > \varepsilon\}$ olmak üzere $T(E_\varepsilon) \subset E_\varepsilon$ kapsaması sağlansın. Bu takdirde $W = W_{U,T}$ sınırlı ise $U \in L_\infty(\mu)$ olur (Arora vd, 2007; Kumar ve Kumar, 2005).

İspat: Kabul edelimki $U \notin L_\infty(\mu)$ olsun. Bu ise her n doğal sayısı için $E_n = \{x \in X : |U(x)| > n\}$ kümelerinin pozitif ölçüye sahip olduğu anlamına gelir.

Hipotez gereği $T(E_n) \subset E_n$ olduğu için $\chi_{E_n} \le \chi_{T^{-1}(E_n)}$ olur.

İlk olarak $x \notin E_n$ düşünüldüğünde $\chi_{E_n}(x)=0$ olduğu için eşitsizlik açıktır. İkinci olarak ise $x \in E_n$ olsun. Bu durumda ise $\chi_{E_n}(x)=1$ dir. $x \in E_n$ olduğundan $T(x) \in T(E_n) \subset E_n$ olacaktır. Buradan $x \in T^{-1}(E_n)$ ve $\chi_{T^{-1}(E_n)}(x)=1$ olacaktır. Sonuç olarak her iki durumdada $\chi_{E_n} \le \chi_{T^{-1}(E_n)}$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik gereği $\left\{x \in X : \left|\chi_{E_n}(x)\right| > \lambda\right\} \subset \left\{x \in X : \left|\chi_{T^{-1}(E_n)}(x)\right| > \lambda\right\}$ ve $x \in T^{-1}(E_n)$ olduğu için $T(x) \in E_n$ olur. Bu ise kümenin tanımı gereği $\left|U(T(x))\right| > n$ eşitsizliğini verir ve $\left\{x \in X : \left|\chi_{T^{-1}(E_n)}(x)\right| > \lambda\right\} \subset \left\{x \in X : \left|U(T(x)) \cdot \chi_{T^{-1}(E_n)}(x)\right| > n\lambda\right\}$ kapsaması elde edilir. Buradan

$$\left(W\left(\chi_{E_n}\right)\right)^*(t) = \inf\left\{\lambda \ge 0 : \mu\left(\left\{x \in X : \left|U(T(x)) \cdot \chi_{E_n}(T(x))\right| > \lambda\right\}\right) \le t\right\} =$$

$$= \inf\left\{\lambda \ge 0 : \mu\left(\left\{x \in X : \left|U(T(x)) \cdot \chi_{T^{-1}(E_n)}(x)\right| > \lambda\right\}\right) \le t\right\}$$ yazılır. $\left|U(T(x))\right| > n$ olduğuna göre, $\chi_{T^{-1}(E_n)}(x) > \frac{\lambda}{n}$ olmak zorundadır. O zaman, $\inf\left\{\lambda \ge 0 : \mu\left(\left\{x \in X : \left|\chi_{T^{-1}(E_n)}(x)\right| > \frac{\lambda}{n}\right\}\right) \le t\right\}$ ifadesinde $\frac{\lambda}{n} = k$ dönüşümü yapıldığında $\inf\left\{\lambda \ge 0 : \mu\left(\left\{x \in X : \left|\chi_{T^{-1}(E_n)}(x)\right| > \frac{\lambda}{n}\right\}\right) \le t\right\}$

$$= n \cdot \inf\left\{k \ge 0 : \mu\left(\left\{x \in X : \left|\chi_{T^{-1}(E_n)}(x)\right| > k\right\}\right) \le t\right\}$$ olduğu görülür. Yine $\chi_{E_n} \le \chi_{T^{-1}(E_n)}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$n \cdot \inf\left\{k \ge 0 : D_{\chi_{T^{-1}(E_n)}}(k) \le t\right\} \ge n \cdot \inf\left\{k \ge 0 : D_{\chi_{E_n}}(k) \le t\right\} = n \cdot \left(\chi_{E_n}\right)^*(t)$$ bulunur ve buradan $\left(W\left(\chi_{E_n}\right)\right)^*(t) \ge n \cdot \left(\chi_{E_n}\right)^*(t)$ eşitsizliği yazılır. Fonksiyonların maksimal fonksiyonlarına geçiş yapıldığında $\left(W\left(\chi_{E_n}\right)\right)^{**}(t) \ge n \cdot \left(\chi_{E_n}\right)^{**}(t)$

olup, norma geçiş yapılırsa $\left\|W\left(\chi_{E_n}\right)\right\|_{pq} \geq n \cdot \left\|\chi_{E_n}\right\|_{pq}$ olduğu görülür. Bu ise W 'nın sınırlı olması ile çelişecektir.

Teorem 3.2.11. ve Teorem 3.2.12. ifadeleri birleştirildiğinde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 3.2.13: $U : X \to \mathbb{C}$ ölçülebilir bir fonksiyon, $T : X \to X$ bir non-singular dönüşüm ve Radon-Nikodym türevi $f_T = \dfrac{d\left(\mu T^{-1}\right)}{d\mu}$ $L_\infty(\mu)$ uzayı içinde ve $\forall \varepsilon > 0$ için $E_\varepsilon = \left\{x \in X : \left|U(x)\right| > \varepsilon\right\}$ olmak üzere $T(E_\varepsilon) \subset E_\varepsilon$ kapsaması sağlansın.

Buna göre, $1 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ parametrelerine bağlı olarak $W = W_{U,T}$ operatörünün $L_{(p,q)}$ uzayı üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $U \in L_\infty(\mu)$ olmasıdır (Arora vd, 2007; Kumar ve Kumar, 2005; Komal ve Gupta, 2001).

Koşulların herbirisi oldukça önemlidir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 3.2.14: (Arora vd, 2007) $X = [0,1]$, μ Lebesque ölçümü $\forall x \in X$ için $T(x) = \sqrt{x}$ düşünelim. $f_T = \dfrac{d\left(\mu T^{-1}\right)}{d\mu} \in L_\infty(\mu)$, $U(x) = \begin{cases} 1/2, & 0 \leq x < 1/2 \\ 1, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$ ve

$E_\varepsilon = \begin{cases} [0,1], & 0 < \varepsilon < 1/2 \\ [1/2,1], & 1/2 \leq \varepsilon < 1 \\ \varnothing, & \varepsilon \geq 1 \end{cases}$ kümesi tanımlansın. T dönüşümünün tanımı gereği $\forall \varepsilon > 0$ için $T(E_\varepsilon) \subset E_\varepsilon$ olduğu açıktır. $U \in L_\infty(\mu)$ olduğu için Teorem 3.2.13. gereği $W = W_{U,T}$ sınırlı operatör olacaktır. Böylece $W = W_{U,T}$ operatörüne ağırlıklı bileşke operatörü denir. Bu örnekte aklımıza, T nin non-singular ölçüm dönüşümü ve $U \in L_\infty(\mu)$ olup olmadıkları incelenebilir. $X = [0,1]$ kümesinin tüm ölçülebilir kümelerinin oluşturduğu $\sigma -$cebiri Σ olsun. Herhangi bir $E \in \Sigma$ için

$E = \begin{cases} \varnothing \\ \{k\}, & k \in [0,1] \\ (a,b), & (a,b) \subset [0,1] \end{cases}$ olmak üzere $T^{-1}(E) = \begin{cases} \varnothing \\ \left\{k^2\right\}, & k^2 \in [0,1] \\ \left(a^2, b^2\right), & \left(a^2, b^2\right) \subset [0,1] \end{cases}$

olup $T^{-1}(E) \in \sum$ demektir. T ölçülebilir olur. Her hangi bir $E \in \sum$ için $\mu(E) = 0$ olsun, Lebesgue ölçümü gereği $E \subset [0,1]$ bir aralık olmayıp bu kümenin ters dönüşüm altındaki görüntüsü aralık olamaz. Yani $\mu T^{-1}(E) = 0$ dır. Bu ise T 'nin non-singular dönüşüm olduğunu söyler. $\|U\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}|U(x)| = \inf\{\lambda \geq 0 : D_U(\lambda) = 0\}$ normu hesaplanırsa $\lambda \geq 1$ ve $\forall x \in X = [0,1]$ olduğunda $|U(x)| > \lambda$ için $\{x \in X : |U(x)| > \lambda\}$ kümesi boş küme olur. $D_U(\lambda) = 0$ olacağı için $\lambda \geq 1$ üzerinden infimum alındığında $\|U\|_{\infty} = 1 < \infty$ bulunur. Sonuç olarak $U \in L_{\infty}(\mu)$ olur.

Örnek 3.2.15: (Arora vd, 2007) $X = \mathbb{R}$ ve $\sum$ Borel kümelerinin $\sigma -$cebiri, μ Lebesgue ölçümü ve $a \in \mathbb{R}^{+}$ sabit sayısı için $T : X \to X$, $T(x) = x + a$ ve $U(x) = x$ dönüşümleri tanımlansın. $\mu T^{-1} << \mu$, $f_T \in L_{\infty}(\mu)$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $T(E_{\varepsilon}) \subset E_{\varepsilon}$ olmak üzere $\|U\|_{\infty}$ ifadesinin değeri

$$\|U\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}|U(x)| = \inf\{\lambda \geq 0 : \mu\{x \in X : |U(x)| > \lambda\} = 0\}$$

$= \inf\{\lambda \geq 0 : \mu\{x \in X : x > \lambda\} = 0\} = \inf(\varnothing) = \infty$ olacağı için $U \notin L_{\infty}(\mu)$ olacaktır. Teorem 3.2.13. gereği $W = W_{U,T}$ operatörü sınırlı operatör değildir.

3.2.1 Kompaktlık ve Görüntü Kümesinin Kapalılığı

Bu bölümde Lorentz uzayında ağırlıklı bileşke operatörlerin kompaktlığı, görüntü kümesinin kapalılığı ve 1-1 olduğu durumlardaki koşulların incelemeleri yapılmıştır. $T: X \to X$ non-singular ölçüm dönüşümü ile $f_T = \dfrac{d\mu T^{-1}}{d\mu}$ Radon-Nikodym türevi verilsin. $U(x) = x$ dönüşümü tanımlansın. Eğer $f_T \in L_\infty(\mu)$ ve $b = \|f_T\|_\infty$ olarak tanımlanırsa herhangi $f \in L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ ve $t > 0$ için,

$$
\begin{aligned}
(W f)^*(bt) &= \inf\left\{\lambda \geq 0 : \mu\left(\left\{x \in X : \left|(W f)(x)\right| > \lambda\right\}\right) \leq bt\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda \geq 0 : \mu\left(\left\{x \in X : \left|((U \circ T)\cdot(f \circ T))(x)\right| > \lambda\right\}\right) \leq bt\right\} \\
&= \inf\left\{\lambda \geq 0 : \mu T^{-1}\left(\left\{x \in X : \left|(U \cdot f)(x)\right| > \lambda\right\}\right) \leq bt\right\}
\end{aligned}
$$

olur. Radon-Nikodym türevi kullanıldığında ve $\forall E \in \Sigma$ için $\mu T^{-1}(E) \leq b \cdot \mu(E)$ olduğu bilindiğine göre $\left\{\lambda \geq 0 : \mu\left(\left\{x \in X : \left|(U \cdot f)(x)\right| > \lambda\right\}\right) \leq t\right\} \subset \left\{\lambda \geq 0 : \mu T^{-1}\left(\left\{x \in X : \left|(U \cdot f)(x)\right| > \lambda\right\}\right) \leq bt\right\}$ olup her iki tarafın infimumu alınırsa $\inf\left\{\lambda \geq 0 : \mu T^{-1}\left(\left\{x : \left|(U \cdot f)(x)\right| > \lambda\right\}\right) \leq bt\right\} \leq \inf\left\{\lambda \geq 0 : \mu\left(\left\{x : \left|(U \cdot f)(x)\right| > \lambda\right\}\right) \leq t\right\}$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak $(W f)^*(bt) \leq (M_U f)^*(t)$ oluşacaktır. Buradan fonksiyonların maksimaline geçip $bt = k$ dönüşümü yapılırsa $(W f)^{**}(k) \leq (M_U f)^{**}\left(\dfrac{k}{b}\right)$ elde edileceği açıktır. O zaman $1 < p \leq \infty$ ve $1 \leq q < \infty$

için $\|W f\|_{pq}^q = \dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (W f)^{**}(t)\right)^q \dfrac{dt}{t} \leq \dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^\infty \left(t^{\frac{1}{p}} (M_U f)^{**}\left(\dfrac{t}{b}\right)\right)^q \dfrac{dt}{t}$ olup $\dfrac{t}{b} = m$

dönüşümü yapıldığında $b^{\frac{q}{p}} \cdot \dfrac{q}{p}\displaystyle\int_0^\infty \left(m^{\frac{1}{p}} (M_U f)^{**}(m)\right)^q \dfrac{dm}{m}$ elde edilir. Yine

$1 < p \leq \infty$ ve $q = \infty$ için

$$\|W f\|_{p\infty} = \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \left(W f\right)^{**}(t) \leq \sup_{t>0} t^{\frac{1}{p}} \left(M_U f\right)^{**}\left(\frac{t}{b}\right) = b^{\frac{1}{p}} \|M_U f\|_{p\infty}$$ bulunur.

Sonuç olarak her iki durumdan da

$$\|W f\|_{pq} \leq b^{\frac{1}{p}} \cdot \|M_U f\|_{pq} \tag{3.24}$$

eşitsizliği oluşur. $S = \{x \in X : U(x) \neq 0\}$ olmak üzere f_T, S üzerinde alttan sıfırla ile sınırlandırılmış olsun. Yani $\forall x \in S$ için $f_T(x) > \delta > 0$ o.ş. $\delta > 0$ vardır. O zaman $\forall E \in \Sigma$, $E \subseteq S$ için $\mu T^{-1}(E) = \int_E f_T d\mu \geq \delta \cdot \mu(E)$ ifadesi elde edilecektir.

Bu koşullar altın da ağırlıklı bileşke operatörün normuna bakılırsa,

$$\|W f\|_{pq} \geq \delta^{\frac{1}{p}} \cdot \|M_U f\|_{pq} \tag{3.25}$$

ifadesinin elde edileceği açıktır.

(3.24) ve (3.25)'deki eşitsizlikleri birleştirdiğimizde $\kappa, \tau > 0$ sayıları için

$$\kappa \cdot \|M_U f\|_{pq} \leq \|W f\|_{pq} \leq \tau \cdot \|M_U f\|_{pq} \tag{3.26}$$

olur.

Teorem 3.2.1.1: $T : X \to X$ non-singular ölçülebilir bir dönüşüm, $f_T \in L_\infty(\mu)$ ve alttan sıfır ile sınırlandırılmış olsun. $U : X \to \mathbb{C}$ bir ölçülebilir fonksiyon ve $W = W_{U,T}$ operatörü $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ için $L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ üzerinde sınırlı olduğun da aşağıda verilen ifadeler birbirine denktirler (Arora vd, 2006; Arora vd, 2007; Hudzik vd, 2006; Soykan, 2012) .

i. $W = W_{U,T}$ kompakt,

ii. M_U kompakt,

iii. $L^{pq}(U, \varepsilon) = \left\{ f \chi_{(U,\varepsilon)} : f \in L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu) \right\}$ ve

$(U, \varepsilon) = \{x \in X : |U(x)| \geq \varepsilon\}$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $L^{pq}(U, \varepsilon)$ uzayı sonlu boyutludur.

İspata geçmeden önce kompakt operatörün tanımını verelim.

Tanım 3.2.1.2: X ve Y normlu uzaylar olmak üzere, $\mathrm{T}:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ dönüşümü için

a) $E\subset\mathrm{X}$ sınırlı kümesi için $\overline{\mathrm{T}(E)}\subset\mathrm{Y}$ kümesi kompakt yani $\mathrm{T}(E)$ relatif kompakt,

b) $\{x_n\}\subset\mathrm{X}$ herhangi sınırlı bir dizi için Y içindeki $\{\mathrm{T}(x_n)\}$ dizisi yakınsak bir alt diziye sahip,

koşullarından herhangi birini sağlayan T operatörüne kompakt operatör denir.

İspat: i. ve ii. ifadeleri (3.26)'daki eşitsizliği kullandığımızda birbirini gerektirdiği açıktır.

ii. $\Rightarrow$ iii. Kabul edelimki M_U operatörü kompakt olsun. $\forall\varepsilon>0$ için $L^{pq}(U,\varepsilon)$ uzayı sonlu boyutlumudur? Herhangi bir $f\in L^{pq}(U,\varepsilon)$ için $L^{pq}(U,\varepsilon)$'nun tanımı gereği $f=\tilde{f}\chi_{(U,\varepsilon)}$ olacak biçimde $\tilde{f}\in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ fonksiyonu vardır. Buradan

$$f(x)=\left(\tilde{f}\chi_{(U,\varepsilon)}\right)(x)=\begin{cases}\tilde{f}(x), & x\in\chi_{(U,\varepsilon)}\\ 0, & x\notin\chi_{(U,\varepsilon)}\end{cases}\qquad(\mathbf{3.27})$$

olduğundan $f\in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ olur. Sonuç olarak $L^{pq}(U,\varepsilon)\subset L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ gösterilmiş olur. Şimdi ise $L^{pq}(U,\varepsilon)$'nun işlemlere göre kapalı olduğunu görelim. $\forall f_a,f_b\in L^{pq}(U,\varepsilon)$ olsun. Kümenin tanımı gereği $f_a=\tilde{f}_a\chi_{(U,\varepsilon_a)}$ ve $f_b=\tilde{f}_b\chi_{(U,\varepsilon_b)}$ olacak şekilde $\tilde{f}_a,\tilde{f}_b\in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ ve $\varepsilon_a,\varepsilon_b>0$ ifadeleri vardır. $f_a+f_b=\tilde{f}_a\chi_{(U,\varepsilon_a)}+\tilde{f}_b\chi_{(U,\varepsilon_b)}$ toplamında ε_a ve ε_b değerlerinin karşılaştırmalarına göre toplam oluşturulduğunda,

$$f_a+f_b=\tilde{f}_a\chi_{(U,\varepsilon_a)}+\tilde{f}_b\chi_{(U,\varepsilon_b)}=\begin{cases}\tilde{f}_a+\tilde{f}_b, & |U(x)|>\varepsilon_a>\varepsilon_b\\ \tilde{f}_b, & \varepsilon_a>|U(x)|>\varepsilon_b\\ 0, & \varepsilon_a>\varepsilon_b>|U(x)|\end{cases}\qquad(\mathbf{3.28})$$

$$f_a+f_b=\tilde{f}_a\chi_{(U,\varepsilon_a)}+\tilde{f}_b\chi_{(U,\varepsilon_b)}=\begin{cases}\tilde{f}_a+\tilde{f}_b, & |U(x)|>\varepsilon_b>\varepsilon_a\\ \tilde{f}_a, & \varepsilon_b>|U(x)|>\varepsilon_a\\ 0, & \varepsilon_b>\varepsilon_a>|U(x)|\end{cases}\qquad(\mathbf{3.29})$$

(3.28) ve (3.29) ifadelerinden açıkça $f_a+f_b\in L^{pq}(U,\varepsilon)$ olduğu görülür.

Yine $\forall k \in \mathbb{C}$ ve $\forall f \in L^{pq}(U,\varepsilon)$ alınırsa,

$$k \cdot f = k \cdot \tilde{f}\chi_{(U,\varepsilon)} = \begin{cases} k \cdot \tilde{f}, & |U(x)| \geq \varepsilon \\ 0, & |U(x)| < \varepsilon \end{cases} \qquad \textbf{(3.30)}$$

olup (3.30) dikkate alınırsa $k \cdot f \in L^{pq}(U,\varepsilon)$ olduğu görülür. İşlemleri koruduğu için $L^{pq}(U,\varepsilon)$, $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayının bir alt uzayıdır. $L^{pq}(U,\varepsilon)$ uzayının bir Banach uzay olup olmadığı için bu uzayın kapalı olup olmadığını araştırmak yeterli olacaktır.

$f \in \overline{L^{pq}(U,\varepsilon)}$ olsun. O zaman $f_n \to f$ olacak şekilde $\exists f_n \in L^{pq}(U,\varepsilon)$ vardır. $f_n \in L^{pq}(U,\varepsilon)$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n = \tilde{f}_n\chi_{(U,\varepsilon)}$ olacak biçimde $\tilde{f}_n \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ dizisi vardır. Buradan $\tilde{f}_n\chi_{(U,\varepsilon)} = \begin{cases} f_n, & |U(x)| \geq \varepsilon \\ 0, & |U(x)| < \varepsilon \end{cases}$ ve $\tilde{f}\chi_{(U,\varepsilon)} = \begin{cases} f, & |U(x)| \geq \varepsilon \\ 0, & |U(x)| < \varepsilon \end{cases}$ biçiminde tanımlanan fonksiyonlara bakıldığında $\tilde{f}_n\chi_{(U,\varepsilon_n)} \to \tilde{f}\chi_{(U,\varepsilon)}$ olacaktır. Gerçekten $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $\forall n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{f}_n\chi_{(U,\varepsilon)} - \tilde{f}\chi_{(U,\varepsilon)} \right\|_{pq} &= \left\| \tilde{f}_n\chi_{(U,\varepsilon)} - \tilde{f}\chi_{(U,\varepsilon)} \right\|_{pq} \\ &= \left\| \left(\tilde{f}_n - \tilde{f} \right)\chi_{(U,\varepsilon)} \right\|_{pq} \leq \left\| (f_n - f) \right\|_{pq} \end{aligned}$$

olup $\left\| (f_n - f) \right\|_{pq} \to 0$ olduğuna göre $f_n = \tilde{f}_n\chi_{(U,\varepsilon)} \to \tilde{f}\chi_{(U,\varepsilon)}$ yakınsaması elde edilir. Dizilerin yakınsaması tek olduğuna göre, $f = \tilde{f}\chi_{(U,\varepsilon)}$ eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $f \in L^{pq}(U,\varepsilon)$ olur. Bundan dolayı $L^{pq}(U,\varepsilon) = \overline{L^{pq}(U,\varepsilon)}$. $L^{pq}(U,\varepsilon)$ uzayı kapalı alt uzay olduğu için aynı zaman da bir Banach uzayı olacaktır. M_U kompakt operatörün $L^{pq}(U,\varepsilon)$ uzayına indirgenen $M_U|_{L^{pq}(U,\varepsilon)}$ operatörüde kompakt olur. Ayrıca $f \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ ve $t > 0$ için

$\left(M_U|_{L^{pq}(U,\varepsilon)}(f) \right)^*(t) = \inf\left\{ \lambda \geq 0 : \mu\left(\left\{ x \in X : \left| \left(U \cdot f\chi_{(U,\varepsilon)} \right)(x) \right| > \lambda \right\} \right) \leq t \right\}$ olup

$x \in (U,\varepsilon)$ olduğunda $|U(x)| \geq \varepsilon$ olduğundan

$\left\{x \in X : \left|\left(\varepsilon \cdot f\chi_{(U,\varepsilon)}\right)(x)\right| > \lambda\right\} \subset \left\{x \in X : \left|\left(U \cdot f\chi_{(U,\varepsilon)}\right)(x)\right| > \lambda\right\}$ ve

$\mu\left(\left\{x \in X : \left|\left(\varepsilon \cdot f\chi_{(U,\varepsilon)}\right)(x)\right| > \lambda\right\}\right) \leq \mu\left(\left\{x \in X : \left|\left(U \cdot f\chi_{(U,\varepsilon)}\right)(x)\right| > \lambda\right\}\right)$ yazılır.

Ayrıca $D_{f\chi_{(U,\varepsilon)}}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \leq D_{U\cdot f\chi_{(U,\varepsilon)}}(\lambda)$ eşitsizliğinden artmayan yeniden düzenleme fonksiyonlarına geçiş yapılırsa

$$\left\{\lambda \geq 0 : D_{U\cdot f\chi_{(U,\varepsilon)}}(\lambda) \leq t\right\} \subset \left\{\lambda \geq 0 : D_{f\chi_{(U,\varepsilon)}}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \leq t\right\}$$

$$\inf\left\{\lambda \geq 0 : D_{U\cdot f\chi_{(U,\varepsilon)}}(\lambda) \leq t\right\} \geq \inf\left\{\lambda \geq 0 : D_{f\chi_{(U,\varepsilon)}}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \leq t\right\}$$

$$\left(M_U\big|_{L^{pq}(U,\varepsilon)}(f)\right)^*(t) \geq \varepsilon\left(f\chi_{(U,\varepsilon)}\right)^*(t)$$

elde edilir. Buradan da maksimal fonksiyonuna geçiş yapılırsa

$$\varepsilon\left(f\chi_{(U,\varepsilon)}\right)^{**}(t) \leq \left(M_U\big|_{L^{pq}(U,\varepsilon)}(f)\right)^{**}(t)$$

$$\varepsilon\left\|f\chi_{(U,\varepsilon)}\right\|_{pq} \leq \left\|M_U\big|_{L^{pq}(U,\varepsilon)}(f)\right\|_{pq} \tag{3.31}$$

olur. (3.31) eşitsizliği $M_U\big|_{L^{pq}(U,\varepsilon)}$ operatörün görüntü kümesinin kapalı olduğunu söyler. $M_U\big|_{L^{pq}(U,\varepsilon)}$ sınırlı lineer operatörü terslenebilir ve kompakt olduğu için $L^{pq}(U,\varepsilon)$ uzayı sonlu boyutlu olacaktır.

iii. $\Rightarrow$ ii. Kabul edelimki $L^{pq}(U,\varepsilon)$ uzayı sonlu boyutlu olsun. Özel olarak $\varepsilon = \frac{1}{n}$ seçimi yapılırsa her $n \in \mathbb{N}$ için $L^{pq}\left(U,\frac{1}{n}\right)$ uzayı sonlu boyutlu olacaktır.

$$U_n(x) = \begin{cases} U(x), & x \in \left(U,\frac{1}{n}\right) \\ 0, & x \notin \left(U,\frac{1}{n}\right) \end{cases} \tag{3.32}$$

alınırsa $U \in L_\infty(\mu)$ iken $U_n \in L_\infty(\mu)$ olacaktır. $f \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ ve $t > 0$ için

$$\left(\left(U_n-U\right)f\right)^*(t)=\inf\left\{\lambda\geq 0: D_{\left(U_n-U\right)f}(\lambda)\leq t\right\}$$

$$=\inf\left\{\lambda\geq 0:\mu\left(\left\{x\in X:\left|\left(\left(U_n-U\right)f\right)(x)\right|>\lambda\right\}\right)\leq t\right\}$$

yazılır. Şimdi $\left|\left(\left(U_n-U\right)f\right)(x)\right|>\lambda$ eşitsizliği incelenirse $x\in\left(U,\frac{1}{n}\right)$ olduğunda (3.32) gereği $U_n(x)=U(x)$ olup $\left\{x\in X:\left|\left(\left(U_n-U\right)f\right)(x)\right|>\lambda\right\}$ kümesi boş küme olur. Yani $\left(\left(U_n-U\right)f\right)^*(t)=\inf\{\lambda\geq 0:0\leq t\}=0$ dır. Eğer $x\notin\left(U,\frac{1}{n}\right)$ ise (3.32) gereği $U_n(x)=0$ ve $\left|U_n(x)-U(x)\right|=\left|U(x)\right|<\frac{1}{n}$ olur. O zaman $\lambda<\left|\left(\left(U_n-U\right)f\right)(x)\right|<\frac{1}{n}\left|f(x)\right|$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left\{x\in X:\left|\left(\left(U_n-U\right)f\right)(x)\right|>\lambda\right\}\subset\left\{x\in X:\frac{1}{n}\left|f(x)\right|>\lambda\right\}$$

$$\mu\left(\left\{x\in X:\left|\left(\left(U_n-U\right)f\right)(x)\right|>\lambda\right\}\right)\leq\mu\left(\left\{x\in X:\frac{1}{n}\left|f(x)\right|>\lambda\right\}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\left\{\lambda\geq 0:\mu\left(\left\{x\in X:\frac{1}{n}\left|f(x)\right|>\lambda\right\}\right)\leq t\right\}\subset\left\{\lambda\geq 0:\mu\left(\left\{x\in X:\left|\left(\left(U_n-U\right)f\right)(x)\right|>\lambda\right\}\right)\leq t\right\}$$

$$\frac{1}{n}\left\{s\geq 0:\mu\left(\left\{x\in X:\left|f(x)\right|>s\right\}\right)\leq t\right\}\subset\left\{\lambda\geq 0:\mu\left(\left\{x\in X:\left|\left(\left(U_n-U\right)f\right)(x)\right|>\lambda\right\}\right)\leq t\right\}$$

$$\frac{1}{n}\inf\left\{\lambda\geq 0:D_f(\lambda)\leq t\right\}\geq\inf\left\{\lambda\geq 0:D_{\left(U_n-U\right)f}(\lambda)\leq t\right\}$$

yazılır. Buradan artmayan yeniden düzenleme fonksiyon tanımı kullanılırsa $\left(\left(U_n-U\right)f\right)^*(t)\leq\frac{1}{n}f^*(t)$ olacaktır. Bu ise $\left(\left(U_n-U\right)f\right)^{**}(t)\leq\frac{1}{n}f^{**}(t)$ eşitsizliğin var olduğunu söyler. Norma geçilirse $\left\|M_{\left(U_n-U\right)}f\right\|_{pq}\leq\frac{1}{n}\left\|f\right\|_{pq}$ ise $\left\|M_{U_n}f-M_U f\right\|_{pq}\leq\frac{1}{n}\left\|f\right\|_{pq}$ olur. Bu eşitsizlik M_{U_n} operatörünün M_U operatörüne düzgün yakınsadığını gösterir. $L^{pq}\left(U,\frac{1}{n}\right)$ sonlu boyutlu uzay olduğu için M_{U_n} sonlu ranka sahip operatördür. Bu yüzden M_{U_n} kompakt operator olur. Kompaktlık düzgün yakınsamayla korunduğu için M_U kompakt operatördür. (3.24) gereği W operatörüde kompakt olacaktır. Böylelikle iii. $\Leftrightarrow$ i. gösterilmiş olur.

Lemma 3.2.1.3: (X,Σ,μ) ölçüm uzayı ve $E\in\Sigma$ bir atom olsun. $f\in M(X,\Sigma)$ ölçülebilir fonksiyon E atomu üzerinde sabittir.

İspat: E atom olduğu için $G\subset E$ altkümeleri için $\mu(G)=0\vee\mu(G)=\mu(E)$ olacaktır. $G=\{x\in E: f(x)\neq s, s\in\overline{\mathbb{R}}\}$ kümesi tanımlansın. $f(E)=s$ olduğu gösterilirse ispat biter. $s=\dfrac{1}{\mu(E)}\int_E f\cdot d\mu$ olsun ve $G_1=\{x\in E: f(x)>s\}\cap E$, $G_2=\{x\in E: f(x)<s\}\cap E$ olacak biçimde G_1 ve G_2 kümeleri tanımlansın. G_1 ve G_2 kümeleri E nin alt kümeleri olduğu için $\mu(G_1)=0\vee\mu(G_1)=\mu(E)$, $\mu(G_2)=0\vee\mu(G_2)=\mu(E)$ olacaktır.

İlk olarak $\mu(G_1)=0=\mu(G_2)$ olduğundaki duruma bakılsın. $G_1\cap G_2=\varnothing$ ve $G=G_1\cup G_2\Rightarrow\mu(G)=\mu(G_1)+\mu(G_2)=0$ sonuç olarak $\mu(G)=\mu(\{x\in E: f(x)\neq s, s\in\overline{\mathbb{R}}\})=0$ olduğu görülür. Bu eşitlik hemen hemen heryerde μ ölçümüne göre, $f(E)=s$ olacağını gösterir.

İkinci olarak $\mu(G_1)=\mu(E)$ olsun. G_1 kümesinin tanımında $f(x)>s$ olduğunu dikkate alınırsa $s\cdot\mu(E)=\int_E f\cdot d\mu=\int_{G_1} f\cdot d\mu>s\cdot\mu(G_1)=s\cdot\mu(E)$ eşitsizliği elde edilir. Bu ise $s>s$ çelişkisini ortaya çıkarır. Aynı şekilde $\mu(G_2)=\mu(E)$ olsun. G_2 kümesinin tanımında $f(x)<s$ olduğunu dikkate alındığında $s\cdot\mu(E)=\int_E f\cdot d\mu=\int_{G_2} f\cdot d\mu<s\cdot\mu(G_2)=s\cdot\mu(E)$ eşitsizliği elde edilir. Bu ise $s<s$ çelişkisini ortaya çıkarır. Her iki çelişki bize gösterirki $\mu(G_1)=0=\mu(G_2)$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak görülürki h.h.h. μ ölçümüne göre, $f(E)=s$ olacaktır.

Teorem 3.2.1.4: $T:X\to X$ non-singular ölçüm dönüşümü, $f_T\in L_\infty(\mu)$ ve

$U \in L_\infty(\mu)$ olacak şekilde $U : X \to \mathbb{C}$ bir ölçülebilir fonksiyon verilsin. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\mu(E_n) > 0$ olmak üzere X 'in bütün atomları $\{E_n\}$ olsun.

Eğer μ kesin (purely) atomik ve $b_n = \dfrac{\mu T^{-1}(E_n)}{\mu(E_n)} \to 0$ olduğunda $W = W_{U,T}$ operatörü Lorentz uzayı üzerinde kompakttır (Arora vd, 2006; Kumar ve Kumar, 2005).

İspat: $U \in L_\infty(\mu)$ ve $b_n \to 0$ olsun. (X,Σ,μ) kesin (purely) atomik olduğundan $n \neq m$ için $E_n \cap E_m = \varnothing$ ve $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$ olacak şekilde $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ölçülebilir atomların bir ailesi vardır. Aynı zamanda Lemma 3.2.1.3. gereği $\forall f \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ için $f = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(E_n)\cdot\chi_{E_n}$ biçiminde yazılabilir. O zaman $\forall m \in \mathbb{N}$ için $W_{U,T}^{m}(f) = \sum\limits_{n\le m} f(E_n)\cdot U(E_n)\chi_{T^{-1}(E_n)}$ olmak üzere $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ üzerinde sonlu ranka sahip ağırlıklı bileşke $W_{U,T}^{m}$ operatörü tanımlanırsa

$$
\begin{aligned}
W_{U,T}^{1}(f) &= f(E_1)\cdot U(E_1)\chi_{T^{-1}(E_1)} + 0 + 0 \cdots + 0 \\
W_{U,T}^{2}(f) &= f(E_1)\cdot U(E_1)\chi_{T^{-1}(E_1)} + f(E_2)\cdot U(E_2)\chi_{T^{-1}(E_2)} + 0 \cdots + 0 \\
\vdots \qquad & \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
W_{U,T}^{N}(f) &= f(E_1)\cdot U(E_1)\chi_{T^{-1}(E_1)} + \cdots\cdots\cdots + f(E_N)\cdot U(E_N)\chi_{T^{-1}(E_N)}
\end{aligned}
\qquad \mathbf{(3.33)}
$$

yazılabilir. Burada E_n ler atom olduğu için Lemma 3.2.1.3. gereği $f(E_n)$ ve $U(E_n)$ ifadelerinin sabit olduğu unutulmamalıdır. Aynı zamanda n değiştikçe karekteristik fonksiyonların değerleri aynı anda 1 olma şansı yoktur. (3.33) ifadesine bakılırsa $W_{U,T}^{N}$ operatörü aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$
W_{U,T}^{N}(f) = \begin{bmatrix} f(E_1)\cdot U(E_1) & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots & 0 \\ 0 & f(E_2)\cdot U(E_2) & 0 \cdots\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots\cdots & f(E_N)\cdot U(E_N) \end{bmatrix}_{N\times N} \begin{bmatrix} \chi_{T^{-1}(E_1)} \\ \chi_{T^{-1}(E_2)} \\ \vdots \\ \chi_{T^{-1}(E_N)} \end{bmatrix}_{N\times 1}
$$

Matrislerin çarpımındanda anlaşılacağı gibi $\text{Rank}\left(\overset{N}{W}_{U,T}\right)=N<\infty$ olacağı görülür.Bundan dolayı $\overset{N}{W}_{U,T}$ sonlu ranka sahip bir operatördür. $\forall\lambda>0$ için $D_{\left(W_{U,T}-\overset{m}{W}_{U,T}\right)f}(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:\left|\left(W_{U,T}-\overset{m}{W}_{U,T}\right)f(x)\right|>\lambda\right\}\right)$ dağılım fonksiyonunda operatörlerin tanımındaki ifadeler yerlerine yazılırsa, $D_{\left(W_{U,T}-\overset{m}{W}_{U,T}\right)f}(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:\left|\sum_{n>m}\left(f(E_n)\cdot U(E_n)\cdot\chi_{E_n}\right)\circ T(x)\right|>\lambda\right\}\right)$ ve $U\in L_\infty(\mu)$ olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}$ için $|U(E_n)|\le\|U\|_\infty$ olduğu açıktır. yine

$$D_{\left(W_{U,T}-\overset{m}{W}_{U,T}\right)f}(\lambda)\le\sum_{n>m}\mu\left\{x\in X:\left|\left(f(E_n)\cdot\|U\|_\infty\cdot\chi_{E_n}\right)\circ T(x)\right|>\lambda\right\}$$

$$=\sum_{\substack{n>m\\ |f(E_n)|>\frac{\lambda}{\|U\|_\infty}}}\mu\left\{x\in X:\chi_{E_n}T(x)\right\}=\sum_{\substack{n>m\\ |f(E_n)|>\frac{\lambda}{\|U\|_\infty}}}\mu T^{-1}(E_n)$$

olup hipotez gereği $b_n=\dfrac{\mu T^{-1}(E_n)}{\mu(E_n)}$ olduğundan $\mu T^{-1}(E_n)=b_n\cdot\mu(E_n)$ eşitliği vardır. Buradan

$$\sum_{\substack{n>m\\ |f(E_n)|>\frac{\lambda}{\|U\|_\infty}}}\mu T^{-1}(E_n)=\sum_{\substack{n>m\\ |f(E_n)|>\frac{\lambda}{\|U\|_\infty}}}b_n\cdot\mu(E_n)\le\sup_{n>m}(b_n)\sum_{\substack{n>m\\ |f(E_n)|>\frac{\lambda}{\|U\|_\infty}}}\mu(E_n)$$

$=\sup\limits_{n>m}(b_n)\cdot D_f\left(\dfrac{\lambda}{\|U\|_\infty}\right)$ bulunur. Sonuç olarak

$$D_{\left(W_{U,T}-\overset{m}{W}_{U,T}\right)f}(\lambda)\le\sup_{n>m}(b_n)\cdot D_f\left(\frac{\lambda}{\|U\|_\infty}\right)\tag{3.34}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan artmayan yeniden düzenleme fonksiyonlarına geçiş yapılırsa, $\left(\left(W_{U,T}-W_{U,T}^{m}\right)f\right)^{*}(t)=\sup\left\{\lambda\geq 0:D_{\left(W_{U,T}-W_{U,T}^{m}\right)f}(\lambda)>t\right\}$ elde edilir. Eğer (3.34) kullanılırsa,

$$\sup\left\{\lambda\geq 0:D_{\left(W_{U,T}-W_{U,T}^{m}\right)f}(\lambda)>t\right\}\leq\sup\left\{\lambda\geq 0:\sup_{n>m}(b_n)\cdot D_f\left(\frac{\lambda}{\|U\|_{\infty}}\right)>t\right\}=$$

$$=\sup\left\{\lambda\geq 0:\cdot D_f\left(\frac{\lambda}{\|U\|_{\infty}}\right)>\frac{t}{\sup\limits_{n>m}(b_n)}\right\}=\|U\|_{\infty}\sup\left\{k\geq 0:\cdot D_f(k)>\frac{t}{\sup\limits_{n>m}(b_n)}\right\}=$$

$$=\|U\|_{\infty}f^{*}\left(\frac{t}{\sup\limits_{n>m}(b_n)}\right)$$

elde edilir. Maksimal fonksiyonlara geçiş yapıldığında $\left(\left(W_{U,T}-W_{U,T}^{m}\right)f\right)^{**}(t)\leq\|U\|_{\infty}f^{**}\left(\frac{t}{\sup\limits_{n>m}(b_n)}\right)$ eşitsizliği elde edilir. Bu ise

$$\left\|\left(W_{U,T}-W_{U,T}^{m}\right)f\right\|_{pq}=\left(\frac{q}{p}\int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\left(\left(W_{U,T}-W_{U,T}^{m}\right)f\right)^{**}(t)\right)^{q}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}\leq$$

$$\left(\frac{q}{p}\int_0^{\infty}\left(t^{\frac{1}{p}}\|U\|_{\infty}f^{**}\left(\frac{t}{\sup\limits_{n>m}(b_n)}\right)\right)^{q}\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}=\left(\sup_{n>m}(b_n)\right)^{\frac{1}{p}}\|U\|_{\infty}\|f\|_{pq}$$

demektir. $m\to\infty$ olduğunda $\sup\limits_{n>m}(b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=0$ eşitliğinin olması $\left\{W_{U,T}^{m}\right\}$ kompakt operatörlerin dizisinin düzgün yakınsamasını ve $W_{U,T}$ operatörününde kompakt olacağını söyler.

Teorem 3.2.1.5: (X,Σ,μ) atomik olmayan ölçüm uzayı ve $W_{U,T}$ operatörü

$1<p\le\infty, 1\le q\le\infty$ için $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ Lorentz uzayında sınırlı olsun. O zaman $W_{U,T}$ operatörünün kompakt olması için gerek ve yeter koşul $U\cdot f_T=0$ (h.h.h.) olmasıdır (Arora vd, 2006).

İspat: $W_{U,T}$ operatörü kompakt fakat $U\cdot f_T\neq 0$(h.h.h.) olsun. O zaman $U\cdot f_T\neq 0$ olduğu için $E=\left\{x\in X:\left|U(x)\right|>\frac{1}{k}\wedge\left|f_T(x)\right|>\frac{1}{k}\right\}$ kümesi pozitif ölçüme sahip olacak şekilde $\exists k\ge 1$ vardır. (X,Σ,μ) atomik olmayan ölçüm uzayı olduğu için E 'nin ölçülebilir alt kümelerinden $E_{n+1}\subseteq E_n$, $\mu(E_n)=\frac{a}{2^n}$ ve $0<a<\mu(E)$ olacak şekilde $\{E_n\}$ dizisi bulunabilir. $e_n=\frac{\chi_{E_n}}{\left\|\chi_{E_n}\right\|_{pq}}$ dizisi seçilirse açıktırki $\{e_n\}$ dizisi $L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayında sınırlıdır ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $\left\|e_n\right\|_{pq}=1$ dir. $m,n\in\mathbb{N}$ için $m=2n$ olarak seçilip $t\ge 0$ için $(We_n-We_m)^*\left(\frac{t}{k}\right)$ incelenirse,

$$(We_n-We_m)^*\left(\frac{t}{k}\right)=\inf\left\{\lambda\ge 0:\mu\left(\left\{x\in X:\left|(We_n-We_m)(x)\right|>\lambda\right\}\right)\le\frac{t}{k}\right\}$$

$$\inf\left\{\lambda\ge 0:\mu\left(\left\{x\in X:\left|\left(U(T(x))e_n(T(x))-U(T(x))e_m(T(x))\right)\right|>\lambda\right\}\right)\le\frac{t}{k}\right\}$$

olur. Burada $m=2n$ ve $E_{n+1}\subseteq E_n$ oldüğna göre,

$$\inf\left\{\lambda\ge 0:\mu T^{-1}\left(\left\{y\in E_n:\left|\left(U(y)e_n(y)-U(y)e_{2n}(y)\right)\right|>\lambda\right\}\right)\le\frac{t}{k}\right\}=$$
$$\inf\left\{\lambda\ge 0:\mu T^{-1}\left(\left\{y\in E_n:\left|U(y)\right|\left|\left(e_n(y)-e_{2n}(y)\right)\right|>\lambda\right\}\right)\le\frac{t}{k}\right\}$$

yazılır. $E=\left\{x\in X:\left|U(x)\right|>\frac{1}{k}\wedge\left|f_T(x)\right|>\frac{1}{k}\right\}$ kümesinin tanımı ve $\mu T^{-1}(E_n)=\int\limits_{E_n} f_T\cdot d\mu>\frac{1}{k}\mu(E_n)$, $\left|U(y)\right|>\frac{1}{k}$ eşitsizlikleri göz önünde bulundurulursa.

$$\left\{\lambda\geq 0:\mu T^{-1}\left(\left\{y\in E_n:\left|U(y)\right|\left|e_n(y)-e_{2n}(y)\right|>\lambda\right\}\right)\leq\frac{t}{k}\right\}\subseteq$$

$$\left\{\lambda\geq 0:\frac{1}{k}\mu\left(\left\{y\in E_n:\left|U(y)\right|\left|e_n(y)-e_{2n}(y)\right|>\lambda\right\}\right)\leq\frac{t}{k}\right\}=$$

$$\left\{\lambda\geq 0:\ \mu\left(\left\{y\in E_n:\left|U(y)\right|\left|e_n(y)-e_{2n}(y)\right|>\lambda\right\}\right)\leq t\right\}\subseteq$$

$$\frac{1}{k}\left\{s\geq 0:\ \mu\left(\left\{y\in E_n:\left|e_n(y)-e_{2n}(y)\right|>s\right\}\right)\leq t\right\}\subseteq$$

$$\frac{1}{k}\left\{s\geq 0:\ \mu\left(\left\{y\in (E_n-E_{2n}):\left|e_n(y)-e_{2n}(y)\right|>s\right\}\right)\leq t\right\}$$

bulunur. Buradan her iki tarafın infimumu alınırsa $(We_n-We_m)^*\left(\frac{t}{k}\right)\geq\frac{1}{k}\inf\left\{s\geq 0:\ \mu\left(\left\{y\in (E_n-E_{2n}):\left|e_n(y)-e_{2n}(y)\right|>s\right\}\right)\leq t\right\}$ elde edilir. Ayrıca

$$s<\left|e_n(y)-e_{2n}(y)\right|=\left|\frac{\chi_{E_n}}{\left\|\chi_{E_n}\right\|_{pq}}(y)-\frac{\chi_{E_{2n}}}{\left\|\chi_{E_{2n}}\right\|_{pq}}(y)\right|\leq\left|\frac{\chi_{E_n}}{\left\|\chi_{E_n}\right\|_{pq}}(y)-\frac{\chi_{E_{2n}}}{\left\|\chi_{E_n}\right\|_{pq}}(y)\right|$$

olduğundan $(We_n-We_m)^*\left(\frac{t}{k}\right)\geq\frac{1}{k}\frac{\left(\chi_{E_n}-\chi_{E_{2n}}\right)^*(t)}{\left\|\chi_{E_n}\right\|_{pq}}$ yazılır. Norma geçilip integral üzerinde gerekli dönüşümler uygulanırsa, $\left\|(We_n-We_m)\right\|_{pq}\geq\left(\frac{1}{k}\right)^{1+\frac{1}{p}}\left(\frac{\mu(E_n-E_m)}{\mu(E_n)}\right)^{\frac{1}{p}}\geq\varepsilon>0$ eşitsizliği elde edilir. Bu ise $\{We_n\}$ operatör dizisinin Cauchy dizisi olmadığını belirtir. Sonuç olarak $\{We_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisinin olamayacağı görülür. Bu ise W'nin kompakt olmasıyla çelişir. Yani $U\cdot f_T=0(\text{ h.h.h.})$ dır.

Tersine, $U\cdot f_T=0(\text{ h.h.h.})$ olsun. O zaman $\mu\left(\left\{x\in X:U(x)\neq 0\right\}\right)=0$ veya $\mu\left(\left\{x\in X:f_T(x)\neq 0\right\}\right)=0$ olur. İlk olarak $U=0$ ise ağırlıklı bileşke operatörün 0 olacağı açıktır. İkinci durumda ise $f_T=0$ ise her $E\in\Sigma$ için $\mu T^{-1}(E)=\int_E f_T\cdot d\mu=0$ olacağı açıktır. $\forall f\in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ için $U(y)\neq 0$ olduğu için $G_U=\left\{x\in X:U(x)\neq 0\right\}=\operatorname{supp}U$ alınırsa

$$\mu\left(\left\{x \in X : (U \cdot f)T(x) \neq 0\right\}\right) = \mu\left(\left\{T^{-1}(y) : (U \cdot f)(y) \neq 0\right\}\right) =$$

$$\mu T^{-1}\left(\left\{y \in \operatorname{supp} U : f(y) \neq 0\right\}\right) \leq \int_{\operatorname{supp} U} f_T \cdot d\mu = 0$$

olur. Bu ise $\mu\left(\left\{x \in X : (U \cdot f)T(x) \neq 0\right\}\right) = 0$ eşitliğinin doğru olacağını gösterir. f keyfi fonksiyon ve $(U \cdot f)T = 0$ $(\mu - \text{h.h.h.})$ olduğu için $W = 0$ olur. Her iki durumdanda ağırlıklı bileşke operatörün sıfır operatörü olacağını gösterir. Dolayısıyla W operatörü kompakt olacaktır.

Teorem 3.2.1.6: $T : X \to X$ non-singular ölçüm dönüşümü, $f_T \in L_\infty(\mu)$ ve alttan sıfır ile sınırlanmış $U : X \to \mathbb{C}$ bir ölçülebilir fonksiyon ve $W = W_{U,T}$ operatörü $1 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ için $L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ uzayında sınırlı olsun. Buna göre, $W = W_{U,T}$ operatörünün görüntü kümesi kapalı olması için gerek ve yeterli koşul $\operatorname{supp} U = S = \{x \in X : U(x) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $|U(x)| \geq \delta$ (h.h.h.) olmasıdır (Arora vd, 2006; Arora vd, 2007; Hudzik vd, 2006; Soykan, 2012).

İspat: Kabul edelimki $W = W_{U,T}$ operatörünün görüntü kümesi kapalı olsun. O zaman her $f \in L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ için

$$\|W f\|_{pq} \geq \varepsilon \|f\|_{pq} \tag{3.35}$$

o.ş. $\exists \varepsilon > 0$ vardır. $L^{pq}(S) = \left\{f \chi_S : f \in L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)\right\}$ kümesi tanımlansın. $b = \|f_T\|_\infty$ ve $b^{1/p}\delta < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçilsin. Eğer $K = \left\{x \in X : |U(x)| < \delta\right\}$ kümesi $0 < \mu(K) < \infty$ olmak üzere (3.24)'deki eşitsizlik kullanılırsa $\|W(\chi_K)\|_{pq} \leq b^{1/p} \|U \cdot \chi_K\|_{pq}$ elde edilir. $\|U \cdot \chi_K\|_{pq} \leq \delta \cdot \|\chi_K\|_{pq}$ olacağı için $\|W(\chi_K)\|_{pq} \leq \varepsilon \cdot \|\chi_K\|_{pq}$ elde edilir. Bu ise (3.35)'deki eşitsizlik ile çeliştiği için kabul yanlıştır. Sonuç olarak $|U(x)| \geq \delta(\text{ h.h.h.})$ olur.

Tersine, kabul edelimki S kümesi üzerinde $|U(x)| \geq \delta$ (h.h.h.) olsun. f_T alttan sıfır ile sınırlanmış olduğu için $\exists k > 0$ için $f_T > k > 0$ olacaktır. Daha önce gösterilen

(3.25)'de bulunan eşitsizlik kullanılırsa $\forall f \in L^{pq}(S)$ için $\|W(f)\|_{pq} \geq k^{1/p}\|U \cdot f\|_{pq} \geq k^{1/p} \cdot \delta \cdot \|f\|_{pq}$ ve $\ker(W) = L^{pq}(X-S)$ olduğu için $W = W_{U,T}$ operatörün görüntü kümesi kapalıdır. Gerçekten $\ker(W) = L^{pq}(X-S)$ dir. $\ker(W) = \{f \in L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu) : W(f) = \theta, \theta : X \to \mathbb{C}, \theta(x) = 0\}$ olmak üzere her hangi $g \in L^{pq}(X-S)$ fonksiyonu seçildiğinde $g = \tilde{g}\chi_{(X-S)}$ olacak şekilde $\tilde{g} \in L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ fonksiyonu vardır ve

$$g(x) = \left(\tilde{g}\chi_{(X-S)}\right)(x) = \begin{cases} \tilde{g}(x), x \in X-S \{x \notin S \text{ yani} U(x) = 0\} \\ 0, \quad x \notin X-S \{x \in S \text{ yani} U(x) \neq 0\} \end{cases} \qquad \mathbf{(3.36)}$$

olur. $Wg : X \to \mathbb{C}$, $Wg(x) = (U \cdot g)(T(x))$ olacaktır. (3.36) ifadesi dikkate alınırsa $Wg = \theta$ olur. O yüzden $g \in \ker(W)$ demektir. Böylece

$$L^{pq}(X-S) \subset \ker(W) \qquad \mathbf{(3.37)}$$

elde edilir. $h \in \ker(W)$ olduğunda operatörün çekirdeği tanımı gereği $W(h) = \theta$ olacaktır. $\forall x \in X$, $Wh(x) = 0 \Rightarrow (U \circ T)(x) \cdot (h \circ T)(x) = 0$ eşitliği dikkate alınırsa $U(T(x)) = 0 \Rightarrow T(x) = y \in X-S$ olur ve $h(y) = \left(h\chi_{(X-S)}\right)(y)$ eşitliği vardır. Dolayısıyla $h \in L^{pq}(X-S)$ olacaktır. Sonuç olarak

$$\ker(W) \subset L^{pq}(X-S) \qquad \mathbf{(3.38)}$$

elde edilir. (3.37) ve (3.38)'deki kapsamaları dikkate alınırsa $\ker(W) = L^{pq}(X-S)$ eşitliği elde edilir.

Sonuç 3.2.1.7: $\forall \varepsilon > 0$ için $T^{-1}(E_\varepsilon) \subseteq E_\varepsilon$ ve $W = W_{U,T}$ operatörünün görüntü kümesi kapalı olsun. Buna göre, bazı $\delta > 0$ için $S = \{x \in X : U(x) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $|U(x)| \geq \delta$ olacaktır (Arora vd, 2006).

Teorem 3.2.1.8: $T : X \to X$ non-singular ölçüm dönüşümü, $f_T \in L_\infty(\mu)$ ve alttan sıfır ile sınılandırılmış olsun. $U : X \to \mathbb{C}$ bir ölçülebilir fonksiyon, $W = W_{U,T}$ operatörü $1 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ için $L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ uzayında sınırlı ise aşağıdaki ifadeler denktirler:

i. $W = W_{U,T}$ operatörünün görüntü kümesi kapalıdır,

ii. M_U operatörünün görüntü kümesi kapalıdır,

iii. $S = \{x \in X : U(x) \neq 0\}$ kümesi üzerinde bazı $\delta > 0$ için $|U(x)| \geq \delta(\text{ h.h.h.})$

olur (Arora vd, 2006).

İspat: i. $\Rightarrow$ ii. Kabul edelimki $W = W_{U,T}$ operatörünün görüntü kümesi kapalı olsun. (3.26) 'daki eşitsizlik kullanılırsa M_U operatörünün görüntü kümesinin kapalı olduğunu görmek oldukça kolaydır.

ii. $\Rightarrow$ iii. M_U operatörünün görüntü kümesi kapalı olsun. $\forall f \in L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ için $\|M_U(f)\|_{pq} \geq k \cdot \|f\|_{pq}$ olacak şekilde $k > 0$ vardır. Tekrar (3.26) 'deki eşitsizlik kullanılırsa $\|W(f)\|_{pq} \geq \beta \cdot \|f\|_{pq}$ elde edilir. Bu ise $W = W_{U,T}$ operatörünün görüntü kümesinin kapalı olmasını gerektirir. Teorem 3.2.1.6.'dan $S = \{x \in X : U(x) \neq 0\}$ kümesi üzerinde bazı $\delta > 0$ için $|U(x)| \geq \delta(\text{ h.h.h.})$ olur.

iii. $\Rightarrow$ i. Teorem 3.2.1.6.'dan gerçekleşir.

Teorem 3.2.1.9. (X, Σ, μ) atomik olmayan ölçüm uzayı ve $W = W_{U,T}$ operatörü $1 < p \leq \infty, 1 \leq q \leq \infty$ için $L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ uzayında sınırlı olsun. O zaman $W = W_{U,T}$ operatörünün birebir olması için gerek ve yeter koşul $U \circ T \neq 0(\text{h.h.h.})$ ve T dönüşümünün örten olmasıdır.

İspat: Kabul edelimki $W = W_{U,T}$ operatörü 1-1 ama T dönüşümü örten olmasın. Bu ise $F \subset X - T(X)$ olacak şekilde $F \in \Sigma$ kümesinin varlığını gösterir. Böylelikle $0 \neq \chi_F \in L_{(p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ karakteristik fonksiyonu vardır ve $W_{U,T}(\chi_F)\big|_x = U(T(x)) \cdot \chi_F(T(x))$, $F \subset X - T(X)$ olduğu için $T(x) \notin F$ dir. Karakteristik fonksiyonun tanımı gereğünce $\chi_F(T(x)) = 0$ olur. Dolayısıyla

$W_{U,T}(\chi_F)\big|_x = U(T(x))\cdot\chi_F(T(x)) = 0$ sonuç olarak χ_F fonksiyonu $\ker\left(W_{U,T}\right)$ kümesinin elemanı olacaktır. Çekirdeğin sıfırdan dan farklı bir elemanı olduğu için $W = W_{U,T}$ operatörü 1-1 olamaz. Bu durum hipotez ile çelişeceğinden kabul yanlıştır yani T dönüşümü örtendir. Diğer koşul için ise $E = \left\{x \in X : \left|(U \circ T)(x)\right| = 0\right\}$ kümesi pozitif ölçüme sahip olsun. Uzay atomik olmayan olduğuna göre, $T^{-1}(K) \subset E$, $\mu(K) < \infty$ olacak şekilde $K \in \Sigma$ kümesi vardır. $\chi_K \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ ve $\forall t > 0$ için

$((U \circ T)(\chi_K \circ T))^*(t) = \inf\left\{\lambda \geq 0 : \mu\left(\left\{x \in X : \left|((U \circ T)(\chi_K \circ T))(x)\right| > \lambda\right\}\right) \leq t\right\}$ ve

$\mu\left(\left\{T(x) \in K : \left|((U \circ T)(\chi_K \circ T))(x)\right| > \lambda\right\}\right) = \mu\left(\left\{x \in T^{-1}(K) : \left|(U \circ T)(x)\right| > \lambda\right\}\right)$,

$T^{-1}(K) \subset E$ olduğu için $((U \circ T)(\chi_K \circ T))^*(t) = 0$ yani $W_{U,T}(\chi_K) = \theta$ olur. Sonuç olarak $\mathrm{Ker}W_{U,T} \neq \{\theta\}$ olacaktırki bu ise $W_{U,T}$ operatörün 1-1 olması ile çelişir. O yüzden $U \circ T \neq 0$ (h.h.h.) olur.

Tersine, $U \circ T \neq 0$ (h.h.h.) ve T dönüşümü örten olsun. Keyfi bir $f \in \mathrm{Ker}W_{U,T}$ fonksiyonunu alalım. $\mathrm{Ker}W_{U,T}(f) = \theta$ ve hipotezden $U \circ T \neq 0$ (h.h.h.) olduğu için $f \circ T = 0$ olmak zorundadır. T örten olduğu için $T(X) = X$ eşitliği vardır. $\forall x \in X$ için $f(T(x)) = 0$ ise $f = \theta$ olacaktır. f keyfi olduğu için $\mathrm{Ker}W_{U,T} = \{\theta\}$ olur. $W_{U,T}$ 1-1 operatördür. Ayrıca $f,g \in L_{(p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ için $W_{U,T}(f) = W_{U,T}(g) \Rightarrow (U \circ T)(f \circ T) = (U \circ T)(g \circ T)$ Hipotezde $U \circ T \neq 0$ olduğu için $(f \circ T) = (g \circ T)$ elde edilir. T örten olduğu için $f = g$ yani $W_{U,T}$ operatörünün 1-1'liği bilinen yollada bulunabilir. Buradaki eşitliklerin ölçüme göre olduğu unutulmamalıdır.

4. MATARYEL VE YÖNTEM

4.1 Büyük (Grand) Lorentz Uzayları ve Bazı Özellikleri

Bu bölümde büyük Lorentz uzaylarının tanımı, başka uzaylarla karşılaştırılması ve bazı örneklere yer verilmiştir. Daha önce kompleks değerli, ölçülebilir fonksiyonların dağılım fonksiyonu ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonların tanımları yapılmıştı. Kısaca tekrar hatırlanırsa (X,Σ,μ) bir $\sigma-$sonlu ölçüm uzayı ve $f\in M(X,\Sigma)$ olmak üzere, $\forall\lambda\geq 0$ için $D_f(\lambda)=\mu\left(\left\{x\in X:\left|f(x)\right|>\lambda\right\}\right)$ şeklinde tanımlanan fonksiyona f 'nin dağılım fonksiyonu denir. $t>0$ olmak üzere $f^*(t)=\inf\left\{\lambda\geq 0:D_f(\lambda)\leq t\right\}=\sup\left\{\lambda\geq 0:D_f(\lambda)>t\right\}$ şeklinde tanımlanan fonksiyona f 'nin artmayan yeniden düzenleme fonksiyonu denir.

f, $X=(0,1)$ üzerinde tanımlanan ölçülebilir bir fonksiyonun normunu aşağıdaki biçimde tanımlansın.

$$\|f\|_{p,q)}=\begin{cases}\displaystyle\sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^*(t)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} & ;1<q<\infty\\ \displaystyle\sup_{0<t<1} t^{\frac{1}{p}}f^*(t) & ;q=\infty\end{cases}\qquad (\mathbf{4.1})$$

$X=(0,1)$ üzerinde tanımlanan kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlarından bu norm altında sonlu değere sahip olanların oluşturduğu uzaya büyük (grand) Lorentz uzayı denir (Jain ve Kumari, 2010).

$L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ sembolü ile gösterilen büyük (grand) Lorentz uzayı

$$L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)=\left\{f\in M(X,\Sigma):\|f\|_{p,q)}<\infty\right\}\qquad (\mathbf{4.2})$$

biçiminde ifade edilir.

Örnek 4.1.1: Büyük Lorentz uzayı $q=p$ olduğunda büyük Lebesgue uzayına döner.

Çözüm: İlk olarak büyük (grand) Lebesgue uzayını tanımlayalım. Ω, $\mathbb{R}^n$ de sınırlı, sonlu ölçüme sahip bir küme ve $f \in M(\Omega,\Sigma)$ olmak üzere,

$$\|f\|_{p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{m(\Omega)} \int_{\Omega} |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}, 1 < p < \infty$$ biçiminde tanımlanan norma göre sonlu değere sahip fonksiyonların oluşturduğu uzaya büyük (grand) Lebesgue uzayı denir (Jain ve Kumari, 2010). Bu uzay $L_{p)}(\Omega,\Sigma,m) = \left\{ f \in M(\Omega,\Sigma) : \|f\|_{p)} < \infty \right\}$ biçiminde ifade edilir. Uzayların eşit olduğunu görmek için normların aynı olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$1 < q = p < \infty$ olduğunda,

$$\|f\|_{p,p)} = \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{p}{p} \varepsilon \int_0^1 t^{\frac{p}{p}-1} f^*(t)^{p-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}}$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<p-1} \left(\frac{\varepsilon}{m(X)} \int_X |f(x)|^{p-\varepsilon} dx \right)^{\frac{1}{p-\varepsilon}} = \|f\|_{p)}$$

$L_{p,p)}(X,\Sigma,\mu) = L_{p)}(X,\Sigma,\mu)$ olacaktır.

Örnek 4.1.2: Klasik Lorentz uzayı ile büyük Lorentz uzayı'nın normları arasında

i) $1 < q < \infty$ ve $f \in M(X,\Sigma)$ olmak üzere, $\|f\|_{p,q)} \le q \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{pq}$

ii) $q = \infty$ ve $f \in M(X,\Sigma)$ olmak üzere, $\|f\|_{p,q)} \le \|f\|_{pq}$ eşitsizlikleri vardır.

Çözüm: i) $1 < q < \infty$ ve $f \in L_{p,q)}$ olmak üzere,

$$\|f\|_{p,q)} = \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left(f^*(t) \right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \le$$

$$\le \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^{q-\varepsilon} t^{\frac{\varepsilon}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

Lemma 3.1.1.7.'de gösterilen $t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \le \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{pq}$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\|f\|_{p,q)} = \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^1 \left(t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) \right)^{q-\varepsilon} t^{\frac{\varepsilon}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \le$$

$$\sup_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^1 \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{pq} \right)^{q-\varepsilon} t^{\frac{\varepsilon}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{pq} \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^1 t^{\frac{\varepsilon}{p}-1} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} = q \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{pq}$$

olup sonuç olarak $\|f\|_{p,q)} \le q \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1}{q}} \|f\|_{pq}$ eşitsizliği elde edilir.

ii) $q = \infty$ olsun. $\|f\|_{p,q)} = \sup\limits_{0<t<1} t^{\frac{1}{p}} f^{*}(t) \le \sup\limits_{0<t<1} t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t) = \|f\|_{pq}$ yani $\|f\|_{p,q)} \le \|f\|_{pq}$ olduğu kolayca görülür.

Örnek 4.1.3. $E \in \Sigma$ ve $0 < \mu(E) < \infty$ olmak üzere, $\|\chi_E\|_{p,q)} = ?$

Çözüm:

$$\|\chi_E\|_{p,q)} = \begin{cases} \sup\limits_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left((\chi_E)^{*}(t) \right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} & ;1<q<\infty \\ \sup\limits_{0<t<1} t^{\frac{1}{p}} (\chi_E)^{*}(t) & ;q=\infty \end{cases}$$

ve $(\chi_E)^{*}(t) = \chi_{[0,\mu(E))}(t)$ ifadesi yerine yazılırsa,

$$\|\chi_E\|_{p,q)} = \begin{cases} \sup\limits_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p}\varepsilon \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left(\chi_{[0,\mu(E))}(t)\right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} & ;1<q<\infty \\ \sup\limits_{0<t<1} t^{\frac{1}{p}} \chi_{[0,\mu(E))}(t) & ;q=\infty \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sup\limits_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p}\varepsilon \int_0^{\mu(E)} t^{\frac{q}{p}-1} 1^{q-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} & ;1<q<\infty \\ \sup\limits_{0<t<1} t^{\frac{1}{p}} \chi_{[0,\mu(E))}(t) & ;q=\infty \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (q-1)\mu(E)^{q/p} & ;1<q<\infty \\ \mu(E)^{1/p} & ;q=\infty \end{cases}$$

olduğu görülür.

Lemma 4.1.4: $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ bir pozitif reel sayı dizisi olmak üzere,

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k)^{\lambda}<\infty$ ve $0\le\lambda\le1$ olduğunda, $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\right)^{\lambda} \le \sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k)^{\lambda}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k<\infty$ ve $\lambda\ge1$ olduğunda, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_k)^{\lambda} \le \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k\right)^{\lambda}$

c) $1\le\lambda$ olduğunda $\left(\sum\limits_{k=1}^{N}x_k\right)^{\lambda} \le N^{\lambda-1}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}(x_k)^{\lambda}\right)$

d) $0\le\lambda\le1$ olduğunda $\sum\limits_{k=1}^{N}(x_k)^{\lambda} \le N^{1-\lambda}\left(\sum\limits_{k=1}^{N}x_k\right)^{\lambda}$ eşitsizlikleri vardır (Castillo ve Rafeiro, 2015).

İspat: a) $0\le\lambda\le1$ olduğunda $\lambda-1\le0$ olur. Ayrıca $x_1+x_2\ge x_1$, $x_1+x_2\ge x_2$ eşitsizlikleri ve $\lambda-1\le0$ olduğu kullanılırsa, $(x_1+x_2)^{\lambda-1}\le(x_1)^{\lambda-1}$,

$\left(x_1+x_2\right)^{\lambda-1} \leq \left(x_2\right)^{\lambda-1}$ eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler sırasıyla x_1 ve x_2 ile çarpılırsa,

$$x_1 \cdot \left(x_1+x_2\right)^{\lambda-1} \leq \left(x_1\right)^{\lambda} \qquad \mathbf{(4.3)}$$

ve

$$x_2 \cdot \left(x_1+x_2\right)^{\lambda-1} \leq \left(x_2\right)^{\lambda} \qquad \mathbf{(4.4)}$$

eşitsizlikleri oluşur. (4.3) ve (4.4) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\left(x_1+x_2\right)^{\lambda} \leq \left(x_1\right)^{\lambda} + \left(x_2\right)^{\lambda} \qquad \mathbf{(4.5)}$$

elde edilir. Kabul edelim ki eşitsizlik n için doğru olsun. O yüzden $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\lambda} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(x_k\right)^{\lambda}$ yazılır. Buradan $\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} \geq x_{n+1}$ ve $\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n} x_k$ ifadelerinin varlığı açıktır. $\lambda - 1 \leq 0$ olduğuna göre $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)^{\lambda-1} \leq \left(x_{n+1}\right)^{\lambda-1}$ ve $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)^{\lambda-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\lambda-1}$ eşitsizlikleri elde edilir. Bu eşitsizlikler sırasıyla, x_{n+1} ve $\sum_{k=1}^{n} x_k$ ifadeleri ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)^{\lambda-1} \cdot \left(x_{n+1}\right) \leq \left(x_{n+1}\right)^{\lambda} \qquad \mathbf{(4.6)}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)^{\lambda-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\lambda} \qquad \mathbf{(4.7)}$$

$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right)^{\lambda} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\lambda} + \left(x_{n+1}\right)^{\lambda} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(x_k\right)^{\lambda} + \left(x_{n+1}\right)^{\lambda} = \sum_{k=1}^{n+1} \left(x_k\right)^{\lambda}$ elde edilir. Bu sebeple eşitsizlik $n+1$ içinde doğruluğu gösterilmiş olunur. Tüme varım ilkesine göre, $\sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k\right)^{\lambda} < \infty$ olduğunda $\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)^{\lambda} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k\right)^{\lambda}$ olacaktır.

b) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k < \infty$ olduğu için dizinin belirli bir teriminden sonraki elemanları sıfıra yaklaşması gerekir. Yani $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ olup $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardırki, $\forall k \geq n_0$ olduğunda $|x_k| < \varepsilon$ dır. Burada $0 < x_k < 1$ alınırsa $1 \leq \lambda$ olduğuna göre, $\forall k \geq n_0$ için $(x_k)^{\lambda} < x_k$ ve bu eşitsizlikte terimleri toplamı düşünüldüğünde $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k)^{\lambda} < \sum_{k=1}^{\infty} x_k < \infty$ olduğu görülür. $\left\{(x_k)^{\lambda}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ve $1 \leq \lambda$ olduğundan $0 < \frac{1}{\lambda} \leq 1$ dir. a)'daki eşitsizliği $\left\{(x_k)^{\lambda}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ ve $0 < \frac{1}{\lambda} \leq 1$ ifadeleri için kullanılırsa

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} (x_k)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left((x_k)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (x_k)^{\lambda} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k\right)^{\lambda}$$ olur.

c) $\sum_{k=1}^{N} x_k$ ifadesinde Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\sum_{k=1}^{N} x_k = \sum_{k=1}^{N} 1 \cdot x_k \leq \left(\sum_{k=1}^{N} (1)^{\lambda/\lambda-1}\right)^{1-1/\lambda} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} (x_k)^{\lambda}\right)^{1/\lambda}$$

$$\sum_{k=1}^{N} x_k \leq N^{1-1/\lambda} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} (x_k)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^{\lambda} \leq N^{\lambda-1} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} (x_k)^{\lambda}\right)$$ elde edilir.

d) $0 \leq \lambda \leq 1$ olduğunda, $\sum_{k=1}^{N} (x_k)^{\lambda}$ üzerinde bir kez daha Hölder eşitsizliği kullanılırsa,

$$\sum_{k=1}^{N} (x_k)^{\lambda} = \sum_{k=1}^{N} 1 \cdot (x_k)^{\lambda} \leq \left(\sum_{k=1}^{N} (1)^{1/1-\lambda}\right)^{1-\lambda} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} \left((x_k)^{\lambda}\right)^{1/\lambda}\right)^{\lambda} = N^{1-\lambda} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^{\lambda}$$

$$\sum_{k=1}^{N} (x_k)^{\lambda} \leq N^{1-\lambda} \cdot \left(\sum_{k=1}^{N} x_k\right)^{\lambda}$$ eşitsizliği elde edilir.

Tanım 4.1.5: $\forall f, g, \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in M(X,\Sigma)$, $a \geq 0$ bir sabit sayı ve X'in tüm $\mu-$ölçülebilir K alt kümeleri için $\rho : M(X,\Sigma) \to [0,\infty]$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa Banach fonksiyon norm ya da sadece fonksiyon norm denir

(Bennet ve Sharpley, 1988).

B1) i. $\rho(f)=0 \Leftrightarrow f=0(\mu$ - h.h.h.$)$, ii. $\rho(a\cdot f)=a\cdot\rho(f)$,

iii. $\rho(f+g)\leq\rho(f)+\rho(g)$

B2) $0\leq g\leq f(\mu$ - h.h.h.$)\Rightarrow\rho(g)\leq\rho(f)$

B3) $0\leq f_n\to f(\mu$ - h.h.h.$)\Rightarrow\rho(f_n)\to\rho(f)$

B4) $\mu(K)<\infty\Rightarrow\rho(\chi_K)<\infty$

B5) $\mu(K)<\infty\Rightarrow\int_K f\,d\mu\leq C_K\rho(f)$ buradaki $0<C_K<\infty$ olup K ve ρ'ya bağlı fakat f'ye bağlı olmayan sabit olmalıdır.

Teorem 4.1.6: (X,Σ,μ) $\sigma-$ sonlu ölçüm uzayı $1<q\leq p<\infty$ olmak üzere $L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ Banach fonksiyon uzayıdır.

İspat: (B1) i. Herhangi $f\in L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ olduğunda $\|f\|_{p,q)}=0\Leftrightarrow f=0\ (\mu-$h.h.h.$)$ ifadesi gösterilsin. $\|f\|_{p,q)}=0$ ise her $t\geq 0$ için $D_{D_f}(t)=f^*(t)=0$ olur. Bu ise $f=0\ (\mu-$h.h.h.$)$ demektir. $f=0(\mu-$h.h.h.$)$ ise $f^*(t)=0$ olup norma geçiş yapılırsa $\|f\|_{p,q)}=0$ olur.

ii. $a>0$ olmak üzere $\|a\cdot f\|_{p,q)}=a\cdot\|f\|_{p,q)}$ eşitliği gösterilsin.

$$\|a\cdot f\|_{p,q)}=\sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left((a\cdot f)^*(t)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

$$=\sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(a\cdot f^*(t)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

$$=a\cdot\sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^*(t)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

bulunur. Sonuç olarak $\|a\cdot f\|_{p,q)}=a\cdot\|f\|_{p,q)}$ eşitliği elde edilir.

iii. Her $f,g \in L_{p,q)}\left(X,\Sigma,\mu\right)$ için $\|f+g\|_{p,q)} \le \|f\|_{p,q)} + \|g\|_{p,q)}$ üçgen eşitsizliğinin varlığı gösterilsin.

$$\|f+g\|_{p,q)} = \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(\left(f+g\right)^*(t)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

$$\|f+g\|_{p,q)} \le \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^*\left(\frac{t}{2}\right)+g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

Lemma 4.1.4.'deki c) eşitsizliği kullanılırsa

$$\le \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(2^{1-q+\varepsilon}\left(f^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}+\left(g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}\right)dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<q-1} 2^{\frac{1-q+\varepsilon}{q-\varepsilon}}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(\left(f^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}+\left(g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}\right)dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<q-1} 2^{\frac{1-q+\varepsilon}{q-\varepsilon}}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}dt+\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

elde edilir. Lemma 4.1.4.'deki a) eşitsizliği kullanılırsa

$$\le \sup_{0<\varepsilon<q-1} 2^{\frac{1-q+\varepsilon}{q-\varepsilon}}\left(\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}+\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\right)$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<q-1} 1\cdot\left(\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}+\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\right)$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} + \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(g^*\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

$$= \|f\|_{p,q)} + \|g\|_{p,q)}$$

bulunur. Sonuç olarak $\|f+g\|_{p,q)} \leq \|f\|_{p,q)} + \|g\|_{p,q)}$ üçgen eşitsizliği vardır.

(B2) $0 \leq g \leq f$ $(\mu - \text{h.h.h.}) \Rightarrow \|g\|_{p,q)} \leq \|f\|_{p,q)}$?

$0 \leq g \leq f$ $(\mu - \text{h.h.h.}) \Rightarrow g^*(t) \leq f^*(t) \Rightarrow \|g\|_{p,q)} \leq \|f\|_{p,q)}$ bulunur.

(B3) $0 \leq g_n \to g$ $(\mu - \text{h.h.h.}) \Rightarrow \| g_n \|_{p,q)} \to \| g \|_{p,q)}$?

$0 \leq g_n \to g$ olduğunda Teorem 2.2.3.'deki f) şıkkı kullanıldığında $g_n^* \to g^*$ olduğu biliniyor ve büyük Lorentz uzayında norma geçilirse

$$\| g_n \|_{p,q)} = \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left((g_n)^*(t) \right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \to$$

$$\sup_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left(g^*(t) \right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} = \| g \|_{p,q)}$$

yakınsaması açıkça görülmektedir.

(B4) Her $K \in \Sigma$ için $\mu(K) < \infty \Rightarrow \|\chi_K\|_{p,q)} < \infty$ olduğu gösterilsin.

$$\|\chi_K\|_{p,q)} = \begin{cases} (q-1)\mu(K)^{q/p} & ;1<q<\infty \\ \mu(K)^{1/p} & ;q=\infty \end{cases}$$ her iki durumdanda anlaşılacağı gibi

$\|\chi_K\|_{p,q)} < \infty$.olur.

(B5) $K \in \Sigma$ ölçülebilir herhangi küme için $\mu(K) < \infty \Rightarrow \int_K f \, d\mu \leq C_K \|f\|_{p,q)}$ eşitsizliğini sağlayan K ve $\|\cdot\|_{p,q)}$ ya bağlı fakat f'ye bağlı olmayan $0 < C_K < \infty$ C_K sabitinin varlığı gösterilsin.

$$\int_K f \, d\mu = \int_X f \chi_K d\mu \leq \int_0^\infty f^*(t) \chi_K^*(t) dt = \int_0^\infty f^*(t) \chi_{[0,\mu(K))}(t) dt = \int_0^{\mu(K)} f^*(t) dt$$

$$\int_0^{\mu(K)} f^*(t) dt = \int_0^{\mu(K)} t^{\frac{q-p}{p(q-\varepsilon)}} f^*(t) t^{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon)}} dt \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{\mu(K)} \left(t^{\frac{q-p}{p(q-\varepsilon)}} f^*(t) \right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{1/q-\varepsilon} \left(\int_0^{\mu(K)} \left(t^{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon)}} \right)^{\frac{q-\varepsilon}{q-\varepsilon-1}} dt \right)^{\frac{q-\varepsilon-1}{q-\varepsilon}} =$$

$$= \left(\int_0^{\mu(K)} t^{\frac{q}{p}-1} \left(f^*(t) \right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{1/q-\varepsilon} \left(\int_0^{\mu(K)} t^{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon-1)}} dt \right)^{\frac{q-\varepsilon-1}{q-\varepsilon}} =$$

$$= \left(\frac{q}{p} \varepsilon \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \left(\frac{p}{q\varepsilon} \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \left(\int_0^{\mu(K)} t^{\frac{q}{p}-1} \left(f^*(t) \right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{1/q-\varepsilon} \left(\left. \frac{t^{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon-1)}+1}}{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon-1)}+1} \right|_0^{\mu(K)} \right)^{\frac{q-\varepsilon-1}{q-\varepsilon}}$$

$$= \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^{\mu(K)} t^{\frac{q}{p}-1} \left(f^*(t) \right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{1/q-\varepsilon} \left(\frac{\left(\mu(K) \right)^{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon-1)}+1}}{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon-1)}+1} \right)^{\frac{q-\varepsilon-1}{q-\varepsilon}} \left(\frac{p}{q\varepsilon} \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \leq$$

$$\leq \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left\{ \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left(f^*(t) \right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{1/q-\varepsilon} \left(\frac{\left(\mu(K) \right)^{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon-1)}+1}}{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon-1)}+1} \right)^{\frac{q-\varepsilon-1}{q-\varepsilon}} \left(\frac{p}{q\varepsilon} \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \right\}$$

$$= \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left(f^*(t) \right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left\{ \left(\frac{\left(\mu(K) \right)^{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon-1)}+1}}{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon-1)}+1} \right)^{\frac{q-\varepsilon-1}{q-\varepsilon}} \left(\frac{p}{q\varepsilon} \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \right\}$$

$$C_K = \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left\{ \left(\frac{\left(\mu(K)\right)^{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon-1)}+1}}{\frac{p-q}{p(q-\varepsilon-1)}+1} \right)^{\frac{q-\varepsilon-1}{q-\varepsilon}} \left(\frac{p}{q\varepsilon} \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \right\} \text{ alınırsa } \int_K f\, d\mu \le C_K \left\| f \right\|_{p,q)}$$

eşitsizliğinin varlığı gösterilir.

5. BULGULAR VE TARTIŞMA

5.1 Büyük Lorentz Uzaylarında Çarpım Operatörleri

Bu bölümde Büyük Lorentz uzaylarında tanımlı olan M_U çarpım operatörünün sınırlılığı ve terslenebilirliğinin U ölçülebilir fonksiyonunun sırasıyla sınırlılığı ve terslenebilirliğine bağlı koşullarının karekteri yapılacaktır.

Örnek 5.1.1: Her $k \in \mathbb{N}$ için $f_k : [-3,1] \to \mathbb{C}, f_k(x) = x^{-\frac{1}{k}}$ biçiminde $[-3,1]$ aralığı üzerinde tanımlı, kompleks değerli ve düzgün integrallenebilir $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi tanımlansın. $\|f_k\|_2 = \frac{k}{k-2}\left[1-(-3)^{k-2/k}\right] < \infty$ olduğuna göre $\forall k \geq 3$ için $f_k \in L_2([-3,1])$ olduğu rahatlıkla söylenebilir. $U : [-3,1] \to \mathbb{C}$ ölçülebilir fonksiyon ve $\forall f \in L_2([-3,1])$ için $M_U : L_2([-3,1]) \to L_2([-3,1])$, $M_U(f) = U \cdot f$ çarpım operatörü tanımlansın. Örnekten de anlaşılacağı gibi M_U çarpım operatörünün terslenebilir olması için U ölçülebilir fonksiyonun tersinin anlamlı olması gerekmektedir. Ayrıca M_U çarpım operatörü $\mathrm{supp}(U) = \{x \in X : U(x) \neq 0\}$ kümesi üzerinde $1-1$ olduğu söylenebilir.

Hatırlatma 5.1.2: Genel olarak ölçüm uzayları üzerinde tanımlanan çarpım operatörleri $1-1$ değildir. Aslında, (X, Σ, μ) ölçüm uzayı ve $G = X - \mathrm{supp}(U) = \{x \in X : U(x) = 0\}$ kümesi pozitif ölçüme sahip yani $\mu(G) > 0$ olur. Buna bağlı olarak ise G kümesinin karakteristik fonksiyonu anlamlıdır. Her $x \in X$ için $\chi_G \cdot U\big|_x = \chi_G(x) \cdot U(x) = 0$ olacaktır. Bu yüzden $M_U(\chi_G) = 0$ dır. Buradan operatörün çekirdeğinin sıfırdan farklı olduğu anlaşılır. $\mathrm{Ker} M_U \neq \{0\}$ dolayısıyla M_U çarpım operatörü $1-1$ değildir.

Aksine, M_U çarpım operatörü $1-1$ olduğunda $\mu(X - \mathrm{supp}(U)) = 0$ olur. Diğer taraftan $\mu(X - \mathrm{supp}(U)) = 0$ ve μ tam ölçüm olsun. $M_U(f) = 0$ yani $\forall x \in X$ için

$U(x)\cdot f(x)=0$ düşündüğümüzde $\{x\in X:\ f(x)\neq 0\}\subseteq X-\operatorname{supp}(U)$ ve X üzerinde $f=0$ $(\mu-\text{h.h.h.})$ olacaktır.

Teorem 5.1.3: M_U çarpım operatörü, $K=L_{p,q)}(\operatorname{supp}(U))=\left\{f\chi_{\operatorname{supp}(U)}:\ f\in L_{p,q)}(X)\right\}$ kümesi üzerinde $1-1$ dir.

İspat: M_U çarpım operatörünün $1-1$ olduğunu göstermek için $\operatorname{Ker}M_U=\{0\}$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\tilde{f}\in K$ ve $M_U(\tilde{f})=0$ olsun. Buna göre, K kümesinin tanımı gereği en az bir $f\in L_{p,q)}(X)$ fonksiyonu vardır öyleki $\tilde{f}=f\chi_{\operatorname{supp}(U)}$ dır. $\forall x\in X$ için $\tilde{f}(x)\cdot U(x)=f(x)\cdot\chi_{\operatorname{supp}(U)}(x)\cdot U(x)=0$ olup bu eşitlik gösterir ki $x\in\operatorname{supp}(U)$ olduğunda $\forall x\in X$, $f(x)=0$ olur. Sonuç olarak $\tilde{f}=f\chi_{\operatorname{supp}(U)}=\theta$ eşitliğinin varlığı gösterilir. Bu ise $\operatorname{Ker}M_U=\{0\}$ olduğunu yani M_U çarpım operatörünün K kümesi üzerinde $1-1$ olduğunu söyler.

Teorem 5.1.4: $1<p,q<\infty$ için $L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ büyük Lorentz uzayı üzerinde tanımlanan $M_U: f\to U\cdot f$ lineer dönüşümün sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşulun U ölçülebilir dönüşümü esas olarak sınırlıdır. Ayrıca $\|M_U\|=\|U\|_\infty$ eşitliği doğrudur.

İspat: Farz edelim ki U ölçüm dönüşümü esas olarak sınırlı olsun. $U\in L_\infty(\mu)$ ve $f\in L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ fonksiyonları alınsın. $U\in L_\infty(\mu)$ olduğuna göre, $\forall x\in X$ için $|U(x)|\leq\|U\|_\infty$ eşitsizliği kullanılırsa, $|(U\cdot f)(x)|\leq\|U\|_\infty|f(x)|$ ifadesi yazılır. Her $\lambda\geq 0$ için

$$\lambda<|(U\cdot f)(x)|\leq\|U\|_\infty|f(x)| \tag{5.1}$$

olup (5.1) 'deki eşitsizlik kullanılırsa

$$\{x\in X:\ |(U\cdot f)(x)|>\lambda\}\subseteq\{x\in X:\ \|U\|_\infty|f(x)|>\lambda\} \tag{5.2}$$

kapsaması yazılır. Buradan ölçüme geçilirse $\mu(\{x\in X:|(U\cdot f)(x)|>\lambda\})\leq\mu(\{x\in X:\|U\|_\infty|f(x)|>\lambda\})$ yani

$$D_{U\cdot f}(\lambda) = D_{M_U\cdot f}(\lambda) \le D_f\left(\frac{\lambda}{\|U\|_\infty}\right) \qquad \textbf{(5.3)}$$

dağılım fonksiyonları arasındaki eşitsizlik elde edilir. (5.3) eşitsizliğiyle her $t>0$ için $D_{M_U\cdot f}(\lambda) \le D_f\left(\frac{\lambda}{\|U\|_\infty}\right) \le t$ yazılır. Buradan

$$\left\{\lambda>0 : D_f\left(\frac{\lambda}{\|U\|_\infty}\right) \le t\right\} \subset \left\{\lambda>0 : D_{M_U\cdot f}(\lambda) \le t\right\} \qquad \textbf{(5.4)}$$

olup (5.4)'deki kapsamasının her iki tarafından infimuma geçilirse,

$$\inf\left\{\lambda>0 : D_f\left(\frac{\lambda}{\|U\|_\infty}\right) \le t\right\} \ge \inf\left\{\lambda>0 : D_{M_U\cdot f}(\lambda) \le t\right\} \qquad \textbf{(5.5)}$$

olur. Artmayan yeniden düzenleme fonksiyonunun tanımı gereği

$$\left(M_U(f)\right)^* \le \|U\|_\infty f^*(t) \qquad \textbf{(5.6)}$$

olduğundan

$$\|M_U(f)\|_{p,q)} = \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(\left(M_U(f)\right)^*(t)\right)^{q-\varepsilon} dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \le$$

$$\le \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(\|U\|_\infty f^*(t)\right)^{q-\varepsilon} dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

$$= \|U\|_\infty \sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(f^*(t)\right)^{q-\varepsilon} dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}$$

olur. Sonuç olarak $\|M_U(f)\|_{p,q)} \le \|U\|_\infty \cdot \|f\|_{p,q)}$ eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlik M_U çarpım operatörünün sınırlı olduğunu gösterir. Ayrıca $q=\infty$ olduğu durumda $\|M_U(f)\|_{p,q)} = \sup_{0<t<1} t^{\frac{1}{p}}\left(M_U(f)\right)^*(t) \le \sup_{0<t<1} t^{\frac{1}{p}}\|U\|_\infty f^*(t) = \|U\|_\infty \cdot \|f\|_{p,q)}$ olup buradan anlaşılacağı gibi her $f\in L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ ve $1<p,q\le\infty$ için

$\left\|M_U(f)\right\|_{p,q)} \le \left\|U\right\|_\infty \cdot \left\|f\right\|_{p,q)}$ eşitsizliği vardır.

Tersine, $1<q<\infty$ olmak üzere M_U çarpım operatörü $L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayında sınırlı fakat U esas olarak sınırlı bir ölçülebilir dönüşüm olmasın. Bu ise $\forall k\in\mathbb{N}$ için $G_k=\{x\in X: |U(x)|>k\}$ biçiminde tanımlanan kümenin pozitif ölçüme sahip olduğunu söyler. Dolayısıyla G_k kümesinin karakteristik fonksiyonu anlamlı olup $\left\{x\in X: k\cdot\chi_{G_k}(x)>\lambda\right\}\subseteq\left\{x\in X:\left(U\cdot\chi_{G_k}\right)(x)>\lambda\right\}$ kapsaması yazılabilir. Buradan ölçüme geçilir ve dağılım fonksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$D_{k\cdot\chi_{G_k}}(\lambda)\le D_{M_U\left(\chi_{G_k}\right)}(\lambda) \qquad \textbf{(5.7)}$$

eşitsizliği elde edilir. $t>0$ için (5.7) ifadesi dikkate alınırsa,

$$\left\{\lambda\ge 0: D_{M_U\left(\chi_{G_k}\right)}(\lambda)\le t\right\}\subseteq\left\{\lambda\ge 0: D_{k\cdot\chi_{G_k}}(\lambda)\le t\right\} \qquad \textbf{(5.8)}$$

kapsaması elde edilir.

(5.8)'de infimuma geçilir ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonunun tanımı kullanılırsa

$$\left(M_U\left(\chi_{G_k}\right)\right)^*(t)\ge k\cdot\left(\chi_{G_k}\right)^*(t) \qquad \textbf{(5.9)}$$

elde edilir. Buradan

$$\left\|M_U\left(\chi_{G_k}\right)\right\|_{p,q)}=\sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(\left(M_U\left(\chi_{G_k}\right)\right)^*\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}\ge$$

$$\ge\sup_{0<\varepsilon<q-1}\left(\frac{q}{p}\varepsilon\int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1}\left(k\cdot\left(\chi_{G_k}\right)^*(t)\right)^{q-\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}}=k\cdot\left\|\chi_{G_k}\right\|_{p,q)}$$

yazılır. Ayrıca, $q=\infty$ olduğu duruma bakılırsa

$$\left\|M_U\left(\chi_{G_k}\right)\right\|_{p,\infty)}=\sup_{0<t<1}t^{\frac{1}{p}}\left(M_U\left(\chi_{G_k}\right)\right)^*(t)\ge\sup_{0<t<1}t^{\frac{1}{p}}\left(k\cdot\left(\chi_{G_k}\right)^*(t)\right)=k\cdot\left\|\chi_{G_k}\right\|_{p,\infty)}$$

olur. Yani her $q\in[1,\infty]$ için $\left\|M_U\left(\chi_{G_k}\right)\right\|_{p,q)}\ge k\cdot\left\|\chi_{G_k}\right\|_{p,q)}$ eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizlik M_U operatörünün sınırlı olmadığını belirtir. Bu durum ise hipotezimizle çelişir. O yüzden U dönüşümü esas olarak sınırlıdır. Şimdi herhangi bir $\delta > 0$ için $S = \left\{ x \in X : \left| U(x) \right| \geq \|U\|_\infty - \delta \right\}$ kümesi tanımlansın. O zaman $\left\{ x \in X : \left(\|U\|_\infty - \delta \right) \chi_S(x) > \lambda \right\} \subseteq \left\{ x \in X : (U \cdot \chi_S)(x) > \lambda \right\}$ olup ölçümüm monotonluğu kullanılırsa $\mu\left(\left\{ x \in X : \left(\|U\|_\infty - \delta \right) \chi_S(x) > \lambda \right\} \right) \leq \mu\left(\left\{ x \in X : (U \cdot \chi_S)(x) > \lambda \right\} \right)$ elde edilir. Her $t > 0$ için $\left\{ \lambda > 0 : D_{U \cdot \chi_S}(\lambda) \leq t \right\} \subseteq \left\{ \lambda > 0 : D_{\left(\|U\|_\infty - \delta \right) \chi_S}(\lambda) \leq t \right\}$ olup her iki tarafta infimuma geçilir ve artmayan yeniden düzenleme fonksiyonunun tanımı kullanılırsa,

$$(U \cdot \chi_S)^*(t) \geq \left(\left(\|U\|_\infty - \delta \right) \chi_S \right)^*(t) \tag{5.10}$$

eşitsizliği elde edilir. Norma geçilir ve (5.10) eşitsizliği kullanılırsa

$$\left\| M_U(\chi_S) \right\|_{p,q)} = \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left(\left(M_U(\chi_S) \right)^* \right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \geq$$

$$\geq \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p} \varepsilon \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left(\left(\left(\|U\|_\infty - \delta \right) \chi_S \right)^*(t) \right)^{q-\varepsilon} dt \right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} = \left(\|U\|_\infty - \delta \right) \cdot \|\chi_S\|_{p,q)}$$

yazılır. Sonuç olarak $\left\| M_U(\chi_S) \right\|_{p,q)} \geq \left(\|U\|_\infty - \delta \right) \cdot \|\chi_S\|_{p,q)}$ eşitsizliği elde edilir. Bu ise

$$\left\| M_U \right\|_{p,q)} \geq \|U\|_\infty \tag{5.11}$$

demektir. $\left\| M_U(f) \right\|_{p,q)} \leq \|U\|_\infty \cdot \|f\|_{p,q)}$ eşitsizliğinde $\|f\|_{p,q)} \leq 1$ üzerinden supremum alınırsa

$$\left\| M_U \right\|_{p,q)} \leq \|U\|_\infty \tag{5.12}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.11) ve (5.12)'deki eşitsizlikler birleştirilir ise $\left\| M_U \right\|_{p,q)} = \|U\|_\infty$ eşitliği elde edilir.

Teorem 5.1.5: X ve Y Banach uzaylar ve $X \to Y$ tanımlı sınırlı lineer fonksiyonların kümesi $B(X,Y)$ olsun.

Buna göre, $F \in B(X,Y)$ lineer dönüşümü alttan sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul F, $1-1$ ve görüntü kümesi kapalıdır.

Sonuç 5.1.6: $M_U : L_{p,q)}(\text{supp}(U)) \to L_{p,q)}(\text{supp}(U))$ çarpım operatörünün görüntü kümesi kapalı olması için gerek ve yeter koşulun M_U çarpım operatörü $L_{p,q)}(\text{supp}(U))$ üzerinde alttan sınırlı olmasıdır.

M_U çarpım operatörü $L_{p,q)}(\text{supp}(U))$ üzerinde $1-1$ olduğunu Teorem 5.1.3. gösterildi. Ayrıca μ bir tam ölçüm, ve X üzerinde $U \neq 0$ $(\mu - \text{h.h.h.})$ olduğunda aşağıdaki teorem verilebilir.

Sonuç 5.1.7: μ tam ölçüm ve X üzerinde $U \neq 0\ (\mu - \text{h.h.h.})$ ve $M_U : L_{p,q)}(\text{supp}(U)) \to L_{p,q)}(\text{supp}(U))$ çarpım operatörü verilsin. M_U operatörünün görüntü kümesinin kapalı olması için gerekli ve yeterli koşul M_U çarpım operatörünün $L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayı üzerinde alttan sınırlı olmasıdır.

Teorem 5.1.8: $1 < p < \infty, 1 < q < \infty$ için $L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ büyük Lorentz uzayı üzerinde tanımlı olan tüm çarpım operatörlerin $B\left(L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right)$ kümesi, Banach Cebir'inin maksimal değişmeli alt cebiridir.

İspat: $H = \{M_U : U \in L_\infty\}$ kümesi, $+ : H\text{x}H \to H$ $(M_U, M_V) \mapsto M_{U+V}$ ve $\cdot : F\text{x}H \to H$ $(k, M_U) \mapsto M_{kU}$ işlemleri altında H vektör uzayıdır. H kümesi $B\left(L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right)$ kümesinin alt cebiridir. $M_U, M_V \in H$ olmak üzere $M_U \circ M_V = M_{U \cdot V}$ operatörlerin bileşkesini düşünelim. $U, V \in L_\infty$ olduğunda $|U| \le \|U\|_\infty$ ve $|V| \le \|V\|_\infty$ eşitsizlikleri var olduğu için $|U \cdot V| \le \|U \cdot V\|_\infty$ ifadesi elde edilir. Tanımlanan klasik fonksiyon çarpımı toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile ilgili olarak birleşme, değişme ve dağılma özelliklerini sağlamaktadır. Böylece H, $B\left(L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right)$ uzayının bir alt cebiri olduğu sonucuna varılabilir. T, $L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayında herhangi bir operatör öyleki $\forall U \in L_\infty(\mu)$ için

$T \circ M_U = M_U \circ T$ olduğu düşünülsün. $e : X \to \mathbb{C}, e(x) = 1$ olacak biçimde sabit fonksiyon ve $V = Te$ tanımlansın. Her $E \in \Sigma$ ve $e(x) = 1$ kullanılırsa $T \circ \chi_E = T \circ M_{\chi_E} e$ olduğu açıktır. $T \circ M_U = M_U \circ T$ eşitliği kullanılırsa $T \circ M_{\chi_E} e = M_{\chi_E} \circ Te$ olur. $V = Te$ kullanılırsa $M_{\chi_E} \circ Te = M_{\chi_E} \circ V = \chi_E \cdot V = V \cdot \chi_E = M_V \circ \chi_E$ olup sonuç olarak $T \circ \chi_E = M_V \circ \chi_E$ dir. Basit fonksiyonların yoğunluğu kullanıldığında ise $T = M_V$ olacaktır. Her $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $G_k = \{x \in X : |V(x)| > k\}$ kümesi pozitif ölçüme sahip olsun. $\left\|T\left(\chi_{G_k}\right)\right\|_{p,q)} = \left\|M_V\left(\chi_{G_k}\right)\right\|_{p,q)} \geq k \cdot \left\|\chi_{G_k}\right\|_{p,q)}$ eşitsizliği T operatörün sınırlı olmadığını gösterir. M_V operatörün sınırlı olmasıyla ters durum oluşturacağı için $G_k = \{x \in X : |V(x)| > k\}$ kümesinin ölçümü sıfır olacaktır. Sonuç olarak görülür ki $V \in L_\infty(\mu)$ olacaktır. $f \in L_{p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ olduğundan ölçülebilir basit fonksiyonların $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = f$ olacak şekilde azalmayan $\{S_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. $T(f) = T\left(\lim\limits_{n \to \infty} S_n\right) = \lim\limits_{n \to \infty} T(S_n) = \lim\limits_{n \to \infty} M_V(S_n) = M_V \lim\limits_{n \to \infty} (S_n) = M_V(f)$ olup $\forall f \in L_{p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ için $T(f) = M_V(f)$ ve bu yüzden $T \in H = \{M_U : U \in L_\infty\}$ elde edilir.

Sonuç 5.1.9: M_U çarpım operatörünün $L_{p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ uzayında terslenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul U dönüşümünün L_∞ uzayında terslenebilir olmasıdır.

İspat: M_U çarpım operatörü $L_{p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ uzayında terslenebilir olsun. Bu durumda I birim operatör olmak üzere

$$T \circ M_U = M_U \circ T = I \tag{5.13}$$

ve

$$M_U \circ M_V = M_V \circ M_U \tag{5.14}$$

olacak şekilde $T \in B\left(L_{p,q)}(X, \Sigma, \mu)\right)$ ve $M_V \in H$ vardır. (5.13) ve (5.14)'deki ifadeler dikkate alınırsa

$$T \circ M_V \circ M_U \circ T = T \circ M_U \circ M_V \circ T \Rightarrow T \circ M_V \circ \left(M_U \circ T \right) = \left(T \circ M_U \right) \circ M_V \circ T$$

$$T \circ M_V \circ I = I \circ M_V \circ T \Rightarrow T \circ M_V = M_V \circ T$$

eşitliği elde edilir. Böylece H kümesi içinde bulunan her elemanın T ile değişmeli olduğu sonucuna varılır. Teorem 5.1.8. ve $T \circ M_V = M_V \circ T$ kullanılırsa $T \in H$ olur. Yani $W \in L_\infty(\mu)$ vardır öyleki $T = M_W$ dir. Bu yüzden $M_U \circ M_W = M_W \circ M_U = I$. $U \cdot W = W \cdot U = e \ \ (\mu - \text{h.h.h.})$ olur. Sonuç olarak U dönüşümü $L_\infty(\mu)$ uzayında terslenebilirdir.

Diğer taraftan U dönüşümü $L_\infty(\mu)$ uzayında terslenebilir olsun. Bu yüzden $\dfrac{e}{U} \in L_\infty(\mu)$ ve $M_U \circ M_{e/U} = M_{e/U} \circ M_U = M_e = I$ olduğundan M_U çarpım operatörü $B\left(L_{p,q)}\left(X, \Sigma, \mu\right)\right)$ uzayında terslenebilirdir.

5.2 Kompakt Çarpım Operatörleri

Bu bölümde çarpım operatörlerinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşullar incelenecektir.

Tanım 5.2.1: T bir operatör ve K, X 'in bir alt uzayı olsun $T(K) \subseteq K$ oluyorsa K 'ya T altında değişmez denir (Castillo vd, 2010).

Lemma 5.2.2: $T : A \to A$ bir operatör olsun. Eğer T kompakt ve N, A 'nın kapalı $T-$değişmez alt uzayı ise $T|_N$ operatörü kompakttır (Castillo vd, 2010).

İspat: $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $N \subseteq A$ içinde sınırlı bir dizi olsun. T kompakt operatör olduğu için $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\left\{g_{k_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır öyleki $\left\{T\left(g_{k_n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi A içinde yakınsak olur. $\left\{g_{k_n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N$ ve $\left\{T\left(g_{k_n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq T(N)$ olup hipotez gereği N, A 'nın kapalı $T-$değişmez alt uzayı olduğundan $\left\{T\left(g_{k_n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin N 'de yakınsak olur. Sonuç olarak T operatörünün N 'ye indirgenmesi kompakt olacaktır.

Teorem 5.2.3: M_U kompakt operatör olsun. $\delta > 0$ olmak üzere $G_\delta(U) = \{x \in X : |U(x)| \geq \delta\}$ ve $L_{p,q)}(G_\delta(U)) = \left\{f\chi_{G_\delta(U)} : f \in L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)\right\}$ kümeleri tanımlansın. $L_{p,q)}(G_\delta(U))$, $L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayının kapalı ve değişmez alt uzayıdır. Ayrıca $M_U|_{L_{p,q)}(G_\delta(U))}$ operatörü kompakttır.

İspat: $L_{p,q)}(G_\delta(U))$ uzayı $L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ 'nin bir alt uzayıdır. $\tilde{f}, \tilde{g} \in L_{p,q)}(G_\delta(U))$ için $L_{p,q)}(G_\delta(U))$ kümesinin tanımına dikkat edilirse, $\tilde{f} = f \cdot \chi_{G_\delta(U)}$, $\tilde{g} = g \cdot \chi_{G_\delta(U)}$ olacak şekilde $f, g \in L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ fonksiyonları vardır. $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$ için

$\mathrm{a} \cdot \tilde{f} + \mathrm{b} \cdot \tilde{g} = \mathrm{a} \cdot f \cdot \chi_{G_\delta(U)} + \mathrm{b} \cdot g \cdot \chi_{G_\delta(U)} = (\mathrm{a} \cdot f + \mathrm{b} \cdot g)\chi_{G_\delta(U)}$ ve $\mathrm{a} \cdot f + \mathrm{b} \cdot g \in L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ olduğu için $\mathrm{a} \cdot \tilde{f} + \mathrm{b} \cdot \tilde{g} \in L_{p,q)}(G_\delta(U))$ elde edilir. Bu yüzden $L_{p,q)}(G_\delta(U))$ uzayı $L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayının bir alt uzayıdır.

Herhangi bir $\tilde{f} \in L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$ için $M_U\left(\tilde{f}\right) = U \cdot f \cdot \chi_{G_\delta(U)} \in L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$ olup $L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$ uzayının M_U altında değişmez alt uzay olduğu görülür. Şimdi ise $\overline{L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)} \subseteq L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$ olduğu gösterilsin. $\tilde{g} \in \overline{L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)}$ olsun. Buna göre, $\exists\{\tilde{g}_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$ vardır ki $\tilde{g}_k \to \tilde{g}$ olacaktır. $L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$ kümesinin tanımına dikkat edilirse $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\tilde{g}_k = g_k \chi_{G_\delta(U)}$ olacak şekilde $g_k \in L_{p,q)}\left(X, \Sigma, \mu\right)$ vardır. Her yakınsak dizi Cauchy dizisi olduğu için $\{\tilde{g}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$ uzayında bir Cauchy dizisidir. Bu ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\forall k, r > k_0$ olduğunda $\left\|\tilde{g}_k - \tilde{g}_r\right\|_{p,q)} < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ var demektir. Aslında bir $\alpha > 0$ vardır böylece $\alpha\left(g_k - g_r\right) \leq \left(g_k - g_r\right)\chi_{G_\delta(U)} \Rightarrow \alpha\left(g_k - g_r\right)^* \leq \left(g_k - g_r\right)^* \chi_{\left[0, \mu G_\delta(U)\right)}$ norma geçiş yapılırsa, $\left\|g_k - g_r\right\|_{p,q)} \leq \alpha \cdot \left\|\tilde{g}_k - \tilde{g}_r\right\|_{p,q)} \to 0$ elde edilir. Bu yüzden $\{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $L_{p,q)}\left(X, \Sigma, \mu\right)$ uzayında Cauchy dizisi olacaktır. $L_{p,q)}\left(X, \Sigma, \mu\right)$ uzayı Banach uzay olduğu için $g_k \to g$ ve $g \in L_{p,q)}\left(X, \Sigma, \mu\right)$. $\left\|g_k \chi_{G_\delta(U)} - g\chi_{G_\delta(U)}\right\|_{p,q)} \leq \left\|g_k - g\right\|_{p,q)} \to 0$ olduğundan ve $\tilde{g}_k \to \tilde{g}$, $\tilde{g}_k \to g\chi_{G_\delta(U)}$ yakınsamalarına dikkat edildiğinde $\tilde{g} = g\chi_{G_\delta(U)}$ elde edilir. Sonuç olarak $\tilde{g} \in L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$. O yüzden $\overline{L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)} \subseteq L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$ olur. Sonuç olarak $\overline{L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)} = L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$ dur. Yani $L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$ uzayı kapalı alt uzaydır. Lemma 5.2.2. kullanılırsa $M_U\big|_{L_{p,q)}\left(G_\delta(U)\right)}$ operatörü kompakt olur.

Teorem 5.2.4: $L_{p,q)}\left(X, \Sigma, \mu\right)$ uzayı üzerinde tanımlı M_U çarpım operatörünün kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul $G_\delta\left(U\right) = \left\{x \in X : \left|U\left(x\right)\right| \geq \delta\right\}$ ve $L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right) = \left\{f \cdot \chi_{G_\delta(U)} : f \in L_{p,q)}\right\}$ olmak üzere $\forall \delta > 0$ için $L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$ uzayının sonlu boyutlu olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki M_U çarpım operatörü kompakt olsun. $L_{p,q)}\left(G_\delta\left(U\right)\right)$,

$L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ uzayının kapalı değişmez alt uzayı olduğu bilinmektedir. Teorem 5.2.3. kullanılırsa $M_U|_{L_{p,q)}(G_\delta(U))}$ operatörü kompakt olur. Herhangi bir $x \in X$ için $x \notin G_\delta(U)$ ise $\forall f \in L_{p,q)}(X,\Sigma,\mu)$ için $\left(M_U|_{L_{p,q)}(G_\delta(U))}(f)\right)^* = \left(U \cdot f \cdot \chi_{G_\delta(U)}\right)^* = \theta$ elde edilir. Bu nedenle $M_U|_{L_{p,q)}(G_\delta(U))} = \theta$ olur.

Herhangi bir $x \in G_\delta(U)$ ise kümenin tanımı gereği $|U(x)| \geq \delta$ olur. Bu yüzden $\left|\left(U \cdot f \cdot \chi_{G_\delta(U)}\right)(x)\right| \geq \delta \left|\left(f \cdot \chi_{G_\delta(U)}\right)(x)\right|$ eşitsizliği elde edilir. Dağılım fonksiyonunun tanımı gereği $D_{f \cdot \chi_{G_\delta(U)}}\left(\frac{\lambda}{\delta}\right) \leq D_{\left(U \cdot f \cdot \chi_{G_\delta(U)}\right)}(\lambda)$ olup her $t > 0$ için $\left\{\lambda > 0 : D_{\left(U \cdot f \cdot \chi_{G_\delta(U)}\right)}(\lambda) \leq t\right\} \subseteq \left\{\lambda > 0 : D_{f \cdot \chi_{G_\delta(U)}}\left(\frac{\lambda}{\delta}\right) \leq t\right\}$ kapsaması açıktır. Her iki tarafta infimuma geçilirse $\delta \cdot \left(f \cdot \chi_{G_\delta(U)}\right)^*(t) \leq \left(U \cdot f \cdot \chi_{G_\delta(U)}\right)^*(t)$ eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$\left\|M_U\left(f \cdot \chi_{G_\delta(U)}\right)\right\|_{p,q)} = \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p}\varepsilon \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left(\left(M_U\left(f \cdot \chi_{G_\delta(U)}\right)\right)^*(t)\right)^{q-\varepsilon} dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \geq$$

$$\geq \sup_{0<\varepsilon<q-1} \left(\frac{q}{p}\varepsilon \int_0^1 t^{\frac{q}{p}-1} \left(\left(\delta\left(f \cdot \chi_{G_\delta(U)}\right)\right)^*(t)\right)^{q-\varepsilon} dt\right)^{\frac{1}{q-\varepsilon}} \geq \delta \cdot \left\|f \cdot \chi_{G_\delta(U)}\right\|_{p,q)}$$

olur. Bu nedenle $M_U|_{L_{p,q)}(G_\delta(U))}$ çarpım operatörünün $L_{p,q)}(G_\delta(U))$ uzayı üzerinde görüntü kümesi kapalıdır ve terslenebilirdir. Bu ise $M_U|_{L_{p,q)}(G_\delta(U))}$ operatörünün kompakt olduğu için $L_{p,q)}(G_\delta(U))$ uzayının sonlu boyutlu olduğunu söyler.

Tersine, kabul edelim ki $\forall \delta > 0$ için $L_{p,q)}(G_\delta(U))$ sonlu boyutlu olsun. Özel olarak $\forall n \in \mathbb{N}$ için $L_{p,q)}\left(G_{1/n}(U)\right)$ sonlu boyutludur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n : X \to \mathbb{C}$ ölçülebilir ve $U_n(x) = \begin{cases} U(x) & , |U(x)| \geq 1/n \\ 0 & , |U(x)| < 1/n \end{cases}$ biçiminde tanımlansın. $U \in L_\infty$ olduğuna göre, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $U_n \in L_\infty$ olduğu kolayca gösterilir. Ayrıca herhangi bir $f \in L_{p,q)}(X, \Sigma, \mu)$ fonksiyonu ve $\lambda > 0$ için

$$D_{(U_n - U)\cdot f}(\lambda) = \mu\left(\left\{x \in X : \left|\left((U_n - U)f\right)(x)\right| > \lambda\right\}\right)$$

ve

$$\left((U_n - U)f\right)^*(t) = \inf\left\{\lambda > 0 : D_{(U_n - U)\cdot f}(\lambda) \leq t\right\}$$

elde edilir. $x \in G_{1/n}(U)$ olursa $t > 0$ için $\left((U_n - U)f\right)^*(t) = 0$ ve $(U_n - U)f = \theta$

İkinci olarak $x \notin G_{1/n}(U)$ ve $G_{1/n}(U)$ kümesinin tanımı dikkate alınırsa $\left((U_n - U)f\right)^*(t) \leq \frac{1}{n} f^*(t)$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılır ve norma geçilirse

$$\left\| M_{(U_n - U)}(f) \right\|_{p,q)} \leq \frac{1}{n} \cdot \|f\|_{p,q)} \qquad \mathbf{(5.15)}$$

bulunur. (5.15)'deki eşitsizlik M_{U_n} operatörü'nün M_U operatörüne düzgün yakınsak olduğunu söyler ve $L_{p,q)}\left(G_{1/n}(U)\right)$ uzayı sonlu boyutlu olduğuna göre M_{U_n} sonlu rank operatörüdür. Dolayısıyla M_{U_n} kompakt operatörler dizisidir. Kompakt operatörlerin düzgün limiti de kompakt olacağı için M_U operatörü de kompakt olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Büyük Lorentz uzayı tanımlanmış olup üzerinde tanımlanan dönüşümün bir Banach fonksiyon normu olduğu gösterilmiştir. Büyük Lorentz uzayları ile büyük Lebesgue uzayların karşılaştırılması yapılmıştır. Uzaylar üzerinde tanımlanan ağırlıklı bileşke operatörü ve çarpım operatörlerin karekterlerinin hangi koşullar altında gerçekleşeceği gösterilerek değişik örnekler verilmiştir.

Büyük Lorentz uzaylarında tanımlanan çarpım operatörlerin sınırlılığı, görüntü kümesinin kapalılığı, kompaktlığı ve terslenebilirliği gibi karekteristik yapıları incelenmiştir.

Çarpım operatörü üzerinde tanımlandığı büyük Lorentz uzayları farklı olduğunda özelliklerindeki farklılıklar araştırılabilir. Ayrıca uzaylardaki ölçümün değişimi ile çarpım operatörlerin karekterlerindeki değişim şartları incelenebilir.

KAYNAKLAR

Abrahamese, MB. 1978. *Multiplication Operators*, Lecture Notes in Math. 693, Springer-Verlag, 17-36.

Adams, RA. and Fournier, JF. 2003. *Sobolev Spaces*, second edition, Pure and Applied Math. Series, 140, Academic press, New York.

Arora, SC., Datt, G. and Verma, S. 2006. *Multiplication Operators on Lorentz Spaces*, Indian Journal of Mathematics Vol. 48, No. 3, 317-329.

Arora, SC., Datt, G. and Verma, S. 2007a. *Composition Operators on Lorentz Spaces*, Bull. Austral. Math. Soc. Vol. 76, 205-214.

Arora, SC., Datt, G. and Verma, S. 2007b. *Weighted Composition Operators on Lorentz Spaces*, Bull. Korean Math. Soc. 44(4), 701-708.

Arora, SC., Datt, G. and Verma, S. 2008. *Multiplication and Composition Operators on Lorentz Bochner Spaces*, Osaka J. Math. 45(3), 629-641.

Bartle, R.G. (2014). *The elements of integration and Lebesgue measure*. John Wiley & Sons.

Bennett, C., Sharpley, R. 1988. *Interpolation of operators*, vol. 129, Pure and Applied Mathematics. Academic Press Inc., Boston, MA.

Castillo, R.E., Chaparro, H.C. and Fernandez, J.C.R. (2010). *Orlicz-Lorentz Spaces and their Multiplication Operators* Math.S.C.P. 47B33, 47B38

Castillo, R.E., Rafeiro, H. (2015). *An Introductory Course in Lebesque Spaces.* Dilcher ve Taylor, Springer, Canada

Carro, MJ., Martin, J. 2004. *A useful estimate for the decreasing rearrangement of the sum of functions*, Quart. J. Math., vol. 55, no.1, 41-45.

Chong, K.M. and Rice, N.M. (1971). *Equimeasurable rearrangements of functıons*. Queen's University, Kingston, Ont. Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, No.28

Day, M.M. 1940. *The spaces L^p with $0 < p < 1$*. Bull. Am. Math. Soc., 46:816-823,

Day, PW. 1970. *Rearrangements of measurable functions*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, Thesis (Ph.D.)-California Institute of Technology.

Diening, L. 2004. *Maximal function on generalized Lebesque spaces $L^{p(.)}$*.Math. Inequal.Appl.,7(2):245-253,

Emel'yanov, E. (2007). *Introduction to measure theory and Lebesgue integration.* Ankara

Halmos, PR. 1961. *A Hilbert Space Problem Book*, Van Nostrand Princeton, N.J.

Hardy, GH., Littlewood, JE. and Polya, G. 1952. *Inequalities*. Cambridge, at the University Press, seconded.

Hudzik, H., Kumar, R. and Kumar, R. 2006. *Matrix multiplication operators on Banach function spaces*, Proc. Indian Acad. Sci, (Math Sci.), 71-81.

Hunt, RA. 1964. *An extension of Marcinkiéwicz interpolation theorem to Lorentz spaces*. Bull. Am. Math. Soc., 70:803-807.

Hunt, RA. 1966. *On L(p,q) spaces*, Ensign. Math. (2), 12:249-276.

Jabbarzadeh, M.R. and Pourreza, E.(2003). *A note on weighted composition operators on L^p – spaces*, Bull. Iranian Math. Soc. 29, no. 1, 47-54.

Jain, P., Kumari, S. (2012). *On grand Lorentz spaces and the maximal operatör.* Georgian Math. J. 19, 235-246

Komal, BS., Gupta, S. (2001). *Multiplication operators between Orlicz spaces*, Integral Equations and Operator Theory, 41, 324-330.
Köthe, G. 1969. *Topological vector spaces* I. Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag, 15, 456 p.
Kumar, R. and Kumar, R. 2005. *Composition operators on Banach function spaces*,
Proc. Amer. Math. Soc. 133, no. 7, 2109-2118
Lorentz, GG. 1950. *Some new function spaces*, Ann. Math. 51(1), 37-55.
Lorentz, GG. 1951. *On the theory of Spaces* Λ ,Pacific J. Math., 1, 411-429
Nakai, E. 1996. *Pointwise multipliers on the Lorentz spaces*, Mem. Osaka Kyoiku Univ., Natur. Sci. Appl. 45, No. 1, 1-7.
O'Neil, R. 1963. *Convolution operators and L(p,q) spaces*, Duke Math. J. 30,129-142
Singh, RK. , Manhas, JS. 1993. *Composition operators on function spaces*, North Holland Math. Studies 179, Elsevier Science Publications Amsterdam, New York.
Soykan, Y. (2012). *Fonksiyonel Analiz*. (İkinci baskı). NOBEL Yayınevi, Türkiye.
Stein, EM., Weiss, G. 1971. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton N.J.
Takagi, H. 1993. *Fredholm weighted composition operators*, Integral Equations and Operators and Operator Theory, 16, 267-276.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı	:	Gökhan Işık
Doğum Yeri	:	Samsun
Doğum Tarihi	:	11.05.1976
Yabancı Dili	:	İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	:	Ondokuz Mayıs Lisesi (1994)
Lisans	:	Cumhuriyet Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (1998)
Yüksek Lisans	:	Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü (2015-)

Çalıştığı Kurum

Yeşilkent Anadolu Lisesi