

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**ÇOK DEĞİŞKENLİ ENERJİ ETKİNLİK ANALİZİNDE KAPULA
YAKLAŞIMI**

MERVENUR PALA

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

**SAMSUN
2019**

Her hakkı saklıdır.

TEZ ONAYI

Mervenur Pala tarafından hazırlanan “Çok Değişkenli Enerji Etkinlik Analizinde Kapula Yaklaşımı” adlı tez çalışması 05/04/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı’nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Danışman Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ
İstatistik Anabilim Dalı

Jüri Üyeleri

Başkan Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
İstatistik Anabilim Dalı

Üye Prof. Dr. Yüksel TERZİ
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
İstatistik Anabilim Dalı

Üye Prof. Dr. Selahattin MADEN
Ordu Üniversitesi
Matematik Anabilim Dalı

Üye Doç. Dr. Nesrin ALKAN
Sinop Üniversitesi
İstatistik Anabilim Dalı

Üye Dr. Öğr. Üyesi Tolga ZAMAN
Çankırı Karatekin Üniversitesi
İstatistik Anabilim Dalı

Yukarıdaki sonucu onaylarım. / / 2019

Prof. Dr. Bahtiyar ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü

ETİK BEYAN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

05.04.2019

Mervenur PALA

ÖZET

Doktora Tezi

ÇOK DEĞİŞKENLİ ENERJİ ETKİNLİK ANALİZİNDE KAPULA YAKLAŞIMI

Mervenur PALA

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ

Değişkenler arasındaki ilişkinin anlaşılabilmesi için değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının bilinmesi gerekir. Bunun için istatistikte birçok yöntem geliştirilmiştir. Ancak bu yöntemlerin varsayımlarının sağlanması, her veri seti için mümkün olmayabilir. Kapula, marjinal olasılık dağılımları için herhangi bir varsayım gerektirmeyen bir yaklaşım olup, lineer olmayan bağımlılığın da modellenmesini sağlar. Bu sayede kapula, iki ya da çok değişkenli dağılımları oluştururken, bağımlılık yapısını da ortaya koyan parametreler elde etmemizi sağlar. Kapula diğer bir ifadeyle, değişkenlerin ortak dağılım fonksiyonu ile marjinalleri arasında bağıntı kuran çok değişkenli bir dağılım fonksiyonudur.

Bu çalışmada, etkinlik analizinde kullanılan geleneksel VZA ve Network VZA yöntemleri hakkında bilgi verilmiştir. Daha sonra, iki ve çok değişkenli kapula tanımları yapılmış ve matematiksel özelliklerinden bahsedilmiştir. Bazı arşimedyen ve eliptik kapula aileleri tanıtılmıştır. Ayrıca bağımlılık yapıları, bağımlılık ölçülerinin kapula ile ifadesi, kapula tahmin yöntemleri, kapula seçimi için kullanılan kriterlerden söz edilmiştir.

Bu çalışmanın uygulama kısmında ise OECD ülkelerinin yapı, sanayi, güç ve ulaşım sektörlerindeki enerji etkinlikleri, uygun girdi-çıktı değişkenleri ile parametrik olmayan veri zarflama analizi yöntemi ile elde edilmiştir. Çalışmanın ikinci aşamasında, elde edilen etkinlik değerleri arasındaki bağımlılık yapısı en uygun kapula modeli ile belirlenmiştir. Bağımlılık parametreleri ve etkinlik değerleri uygun kapula modelinde ele alınıp, her bir ülke için tek bir etkinlik skoruna ulaşılmıştır. Daha sonra ülkeler, alt sektörlerle birlikte bir ağ yapısı olarak düşünülerek, network VZA ile hem sistem hem de alt süreçlerin etkinlikleri hesaplanmıştır. Bu sayede, kapula ile birleştirilen etkinlik skorları ile network VZA'dan elde edilen sistem etkinlik skorları ülke bazında sıralanmıştır. Son olarak bu iki etkinlik skoru arasında karşılaştırmalar yapıp, sonuçlar değerlendirilmiştir.

Nisan 2019, 114 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kapula, Bağımlılık, Network VZA, Enerji etkinliği

ABSTRACT

Doctoral Dissertation

COPULA APPROACH TO MULTIVARIATE EFFICIENCY ANALYSIS

Mervenur PALA

Ondokuz Mayıs University

Institute of Science

Department of Statistics

Supervisor: Prof. Dr. Mehmet Ali CENGİZ

In order to understand the relationship among the variables, the structure of the dependence among variables need to be known. There are several methods developed to handle this. However, it may not be possible to meet the assumptions of these methods for all the data sets. Copula is an approach which does not require an assumption for marginal probability distribution and allows to model the non-linear dependence. Thus, while copula form bivariate and multivariate distributions and obtain parameters which reflect the structure of dependence at the same time. In other words, copula is a multivariate distribution function which links the joint and marginal distribution functions of variables.

In this study, we explained the traditional DEA and Network DEA methods used in efficiency analysis. Then, definitions and mathematical properties of bivariate and multivariate copula are given. Some of the archimedean and elliptical copula families are explained. Also, the structures of the dependences, copula representations of dependence measures, copula estimation methods, and some of the criterias used in selection of copula are mentioned.

In the first stage of the application, the energy efficiencies of OECD countries in the building, industry, power and transport are obtained with non-parametric data envelopment analysis with the appropriate input and output variables. In the second stage, the structure of the dependence among the obtained efficiency measures is determined using the most appropriate copula model. Dependency parameters and efficiency measures are incorporated into the appropriate copula model and only one efficiency score is obtained for each country. Then, the efficiencies of both system and also sub-processes are calculated using network DEA by considering the countries as a network structures together with sub-sectors. Thus, the efficiency scores combined with copula and system efficiency scores obtained through network DEA are sorted by countries. Finally, these two efficiency scores are compared and the results are interpreted.

April 2019, 114 pages

Keywords: Copula, Dependence, Network DEA, Energy efficiency

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Akademik eğitim sürecimin bir üst noktası olan doktora tez çalışmalarım boyunca yardım ve desteğini benden esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Mehmet Ali Cengiz'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bugünlere gelmemde en büyük paya sahip olan, gerek manevi gerekse maddi olarak her zaman destekleriyle yanımda olan, hayattaki en değerli varlıklarım başta annem ve babam olmak üzere tüm aileme sonsuz teşekkür ederim.

Doktora eğitimim boyunca benden desteklerini esirgemeyen Arş. Gör. Dr. Serpil Aydın'a, Arş. Gör. Emre Yıldırım'a, Arş. Gör. Fatih Sağlam'a ve tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Bu tez çalışması, PYO.FEN.1904.18.016 nolu Bilimsel Araştırma Projesi olarak Ondokuz Mayıs Üniversitesi tarafından desteklenmiştir.

Nisan 2019, Samsun

Mervenur PALA

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
KISALTMALAR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1. VZA ile İlgili Yapılan Çalışmalar	5
1.2. Network VZA ile İlgili Yapılan Çalışmalar	6
1.3. Kapula ile İlgili Yapılan Çalışmalar	8
1.4. Enerji Etkinliği ile İlgili Çalışmalar	10
2. VERİ ZARFLAMA ANALİZİ	14
2.1. Veri Zarflama Analizi Modelleri	15
2.1.1. Ölçeğe göre sabit getiri (CRS) altında girdiye yönelik modeller	16
2.1.2. Ölçeğe göre sabit getiri (CRS) altında çıktıya yönelik modeller	19
2.1.3. Ölçeğe göre değişken getiri altında (VRS) girdiye yönelik modeller	21
2.1.4. Ölçeğe göre değişken getiri altında (VRS) çıktıya yönelik modeller	22
2.2. VZA Yönteminde İstenmeyen Çıktı Faktörü	24
2.2.1. Veri dönüşümü	24
3. NETWORK VERİ ZARFLAMA ANALİZİ	26
3.1. Temel Network (Ağ) Yapıları	27
3.1.1. Seri yapılar	28
3.1.2. Paralel yapılar	30
3.1.3. İlişkisel (Karma) yapılar	32
4. KAPULALAR	36
4.1. İki Boyutlu Kapulalar	39
4.1.1. Sklar Teoremi	40
4.1.2. Frechet-Hoeffding Sınırları	41
4.1.3. Bağımsızlık	41
4.1.4. Kapula Modelleri	42

4.2. Çok Boyutlu Kapulalar	46
4.2.1. Sklar Teoremi (n –boyutlu)	48
4.2.2. Gaussian Kapula (n –boyutlu)	49
4.2.3. Student's t Kapula (n –boyutlu).....	50
4.3. Bağımlılık Yapıları ve Kapulalar	50
4.3.1. Uyum	51
4.3.2. Kendall Tau (τ).....	52
4.3.3. Spearman Rho (ρ)	54
4.3.4. Kendall Tau ve Spearman Rho arasındaki ilişki.....	55
4.3.5. Gini Katsayısı (g).....	56
4.3.6. Blomqvist Katsayısı (β)	56
4.3.7. Bağımlılık	57
4.3.8. Pearson Korelasyon Katsayısı (r).....	58
4.3.9. Schweizer ve Wolff Katsayısı (σ).....	58
4.3.10. Bölge Bağımlılığı.....	58
4.3.11. Kuyruk Bağımlılığı	60
4.4. Kapula Tahmin Yöntemleri	61
4.4.1. Parametrik tahmin yöntemleri	61
4.4.2. Yarı-parametrik tahmin yöntemleri.....	63
4.4.3. Parametrik olmayan tahmin yöntemleri	64
4.4.4. Diğer tahmin yöntemleri.....	67
4.4.5. Tahmin yöntemlerinin özellikleri	67
4.5. Kapula Seçimi	68
4.5.1. Seçim kriterleri.....	68
5. ENERJİ ETKİNLİKLERİNİN TAHMİN EDİLMESİ	71
5.1. Genel Bilgi	71
5.2. Veri Seti	74
5.3. Yöntem.....	81
5.4. Bulgular.....	82
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	102
KAYNAKLAR.....	104
ÖZGEÇMİŞ.....	114

KISALTMALAR

VZA	:	Veri Zarflama Analizi
KVB	:	Karar Verme Birimi
CCR	:	Charnes, Cooper ve Rhodes
OECD	:	The Organisation for Economic Co-operation and Development (Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Teşkilatı)
NBA	:	National Basketball Association
SSA	:	Stokastik Sınır Analizi
AIC	:	Akaike Information Criterion
GSYH	:	Gayrisafi Yurtiçi Hasıla
BCC	:	Banker, Charnes ve Cooper
CRS	:	Constant Returns to Scale (Ölçeğe göre sabit getiri)
VRS	:	Variable Returns to Scale (Ölçeğe göre değişken getiri)
TE	:	Teknik Etkinlik
ÖE	:	Ölçek Etkinliği
STE	:	Salt Teknik Etkinlik
MLE	:	Maximum Likelihood Estimation (En Çok Olabilirlik Yöntemi)
IFM	:	Inference Function for Margins (Marjinalere İlişkin Çıkarsama Yöntemi)
PMLE	:	Pseudo Maximum Likelihood Estimation (Sözde En çok Olabilirlik yöntemi)
BIC	:	Bayesian Information Criterion
PQD	:	Positive Quadrant Dependence (Pozitif Bölge Bağımlı)
NQD	:	Negative Quadrant Dependence (Negatif Bölge Bağımlı)
FGM	:	Farlie-Gumbel- Morgenstern
IEA	:	International Energy Agency
ODYSSEE	:	A Decision-Support Tool For Energy Efficiency Policy Evaluation
EIA	:	Energy Information Administration
WDI	:	World Development Indicators
BP	:	British Petroleum
ETY	:	Enerji Tüketimi-Yapı
İY	:	İş gücü-Yapı
GSYHY	:	Gayrisafi Yurtiçi Hasıla-Yapı
KEY	:	Karbondiyoksit Emisyonu-Yapı
ETS	:	Enerji Tüketimi-Sanayi
İS	:	İş gücü-Sanayi
GSYHS	:	Gayrisafi Yurtiçi Hasıla-Sanayi

KES	:	Karbondioksit Emisyonu-Sanayi
ETG	:	Enerji Tüketimi-Güç
İG	:	İş gücü-Güç
GSYHG	:	Gayrisafi Yurtiçi Hasıla-Güç
KEG	:	Karbondioksit Emisyonu-Güç
ETU	:	Enerji Tüketimi-Ulaşım
İU	:	İş gücü-Ulaşım
GSYHU	:	Gayrisafi Yurtiçi Hasıla-Ulaşım
KEU	:	Karbondioksit Emisyonu-Ulaşım
ET	:	Enerji Tüketimi
İ	:	İşgücü
KE	:	Karbondioksit Emisyonu



ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1. İki aşamalı sistem	27
Şekil 3.2. Genel iki aşamalı sistem	27
Şekil 3.3. Seri yapı	30
Şekil 3.4. Paralel yapı	32
Şekil 3.5. Üç süreçli bir ağ yapısı	33
Şekil 3.6. Her aşaması paralel yapıya sahip, eşdeğer bir Tandem Sistemi	35
Şekil 5.1. Paralel ağ yapısı	98
Şekil 5.2. Network VZA'dan ve kapuladan elde edilen etkinlik skorları	101



ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. Bazı kapula ailelerine ilişkin parametre aralıkları ve ilişki katsayıları	66
Çizelge 5.1. Yapı sektörü için girdi ve çıktı değerleri	75
Çizelge 5.2. Yapı sektörünün girdi ve çıktı değişkenlerinin tanımlayıcı istatistikleri.....	75
Çizelge 5.3. Sanayi sektörü için girdi ve çıktı değerleri	77
Çizelge 5.4. Sanayi sektörünün girdi ve çıktı değişkenlerinin tanımlayıcı istatistikleri..	77
Çizelge 5.5. Güç sektörü için girdi ve çıktı değerleri	79
Çizelge 5.6. Güç sektörünün girdi ve çıktı değişkenlerinin tanımlayıcı istatistikleri.....	79
Çizelge 5.7. Ulaşım sektörü için girdi ve çıktı değerleri	81
Çizelge 5.8. Ulaşım sektörünün girdi ve çıktı değişkenlerinin tanımlayıcı istatistikleri .	81
Çizelge 5.9. VZA'dan elde edilen etkinlik değerleri	83
Çizelge 5.10. İkili sektör etkinlikleri için uygun kapula aileleri	85
Çizelge 5.11. Yapı-Sanayi sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları	86
Çizelge 5.12. Yapı-Güç sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları	87
Çizelge 5.13. Yapı-Ulaşım sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları	88
Çizelge 5.14. Sanayi-Güç sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları	89
Çizelge 5.15. Sanayi-Ulaşım sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları.....	90
Çizelge 5.16. Güç-Ulaşım sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları	91
Çizelge 5.17. Kapula etkinlik ve network etkinlik sıralamaları arasındaki korelasyon değerleri.....	91
Çizelge 5.18. Üçlü sektör etkinlikleri için elde edilen parametre ve AIC değerleri.....	92
Çizelge 5.19. Yapı-Sanayi-Güç sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları.....	93
Çizelge 5.20. Yapı-Sanayi-Ulaşım sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları ..	94
Çizelge 5.21. Yapı-Ulaşım-Güç sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları	95
Çizelge 5.22. Sanayi-Ulaşım-Güç sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları ...	96
Çizelge 5.23. Kapula etkinlik ve network etkinlik sıralamaları arasındaki korelasyon değerleri.....	96
Çizelge 5.24. Yapı-Sanayi-Güç-Ulaşım sektör etkinlikleri için elde edilen parametre ve AIC değerleri	97
Çizelge 5.25. Network VZA'dan elde edilen etkinlik skorları.....	99
Çizelge 5.26. Yapı-Sanayi-Güç-Ulaşım sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları	100

1. GİRİŞ

Küreselleşen dünya ile birlikte artan nüfus, kaynakların sınırlı olması, olumsuz çevresel koşullar gibi unsurların yanısıra ekonomik gelişmenin hız kazanması, teknolojinin ilerlemesi gibi nedenlerden dolayı ülkeler, ekonomik, çevresel ve toplumsal açıdan kalkınma modelleri oluşturmaktadırlar. Ülkeler içinde bulunduğu süreci analiz ederek ileriye yönelik planlama faaliyetlerini daha etkin bir biçimde oluşturabilmek, yaşam koşullarına ayak uydurmak, çağı yakalamak amacıyla gerek küresel gerekse yerel olarak, her alanda etkinlik analizleri yaparak sürdürülebilir kalkınma hedefleri belirlemektedirler.

Etkinlik, bir karar verme biriminin üretim kaynaklarından ne düzeyde yararlandığı ya da bu üretim kaynaklarını nasıl kullandığını gösteren bir performans boyutu olarak tanımlanmaktadır (Sarıca ve Or, 2007). Eldeki kaynakları kullanarak maksimum çıktıyı üretmek olarak adlandırılan etkinlik, başta enerji olmak üzere tüm sektörler üzerinde büyük bir öneme sahiptir. Bu bağlamda enerji etkinliği, başta gelişmekte olan ülkeler olmak üzere tüm dünya ülkeleri için önemli bir gündem maddesidir. Son yıllarda kaynakların sınırlı olmasıyla artan enerji fiyatları ve buna bağlı olarak gelişen olumsuz çevresel koşullar sonucu tüm dünya ülkeleri, enerji etkinlik ölçümleri yaparak, ileriye yönelik stratejik planlama faaliyetleri oluşturmaktadırlar. Ancak enerji etkinliğini ölçecek en uygun göstergenin bulunması ve karar vericilerin tüm alt sektörlerdeki enerji etkinliğini bütüncül olarak değerlendirememesi gibi sorunlarla karşılaşmaktadır.

Ekonomide etkinlik ölçümü için kullanılan oran analizleri, parametrik yöntemler ve parametrik olmayan yöntemler olmak üzere üç temel yaklaşım vardır. Oran analizleri, tek girdili ve tek çıktılı durumlarda kullanılabilen çok az bilgi gerektiren oldukça kolay bir yöntemdir. Oran analizleri birimlerin performans iyileştirmesine yönelik bir teknik değil yalnızca durum değerlendirmesidir.

Parametrik yaklaşım, bağımlı değişkenin bağımsız değişkene ilişkin belirli bir fonksiyonel formunun (regresyon denklemi ve üretim fonksiyonu gibi) uygulanmasını gerektirir. Ayrıca seçilen fonksiyonel form, hata terimlerinin dağılımı hakkında belirli varsayımlar gerektirir (Luptacik, 2010). Parametrik yöntemlerde üretim fonksiyonunun analitik bir yapıya sahip olduğu varsayımı yapılır ve bu fonksiyonun

parametrelerinin belirlenmesine çalışılır (Yeşilyurt ve Alan, 2003). Stokastik Sınır Analizi (SSA) etkinlik sınırının tahmini için en çok kullanılan parametrik yöntemlerden biridir.

Parametrik olmayan yaklaşım, doğrusal programlama tekniklerini (kısıt altında optimizasyon) kullanarak etkinlik sınırına uzaklığı ölçer. Parametrik olmayan yöntemler etkin sınırdan sapmaları etkinsizlik olarak değerlendirirler. Parametrik olmayan yöntemlerden en yaygın olarak kullanılanı matematiksel programlama tabanlı etkinlik ölçüm yöntemi olan veri zarflama analizidir.

Veri Zarflama Analizi (VZA), fonksiyonel form hakkında herhangi bir varsayım gerektirmez. Diğer yöntemlere göre daha esnek olup, çoklu girdi ve çoklu çıktı durumunda da tek bir etkinlik ölçüsü sağlar. VZA, karar verme birimlerinin (KVB) görelî etkinliğini ölçer. KVB'leri etkin ve etkin olmayan olmak üzere iki gruba ayırır. Etkin olmayan KVB'lerin etkin hale gelmesi için, etkin KVB'lerden oluşan referans kümesi oluşturur.

Farrell'in (1957) etkinliği değerlendirmeye yönelik çalışması VZA'nın başlangıcı olarak kabul edilmektedir. İlk VZA modeli Charnes, Cooper ve Rhodes (CCR) (1978) tarafından, ürettikleri mal ya da hizmet açısından birbirine benzer KVB'lerin görelî etkinliklerinin ölçülmesi amacıyla geliştirilmiştir (Bal ve Örkcü, 2005). İlk önceleri VZA yöntemi ölçeğe göre sabit getiri varsayımı altında sadece teknik etkinliği ölçmede kullanılırken daha sonra yapılan bazı değişikliklerle, ölçek etkinliğinin ölçülmesinde kullanılmıştır.

VZA üç aşamada uygulanmaktadır. İlk olarak uygun karar verme birimleri belirlenir. Daha sonra karar verme birimlerinin bağıl etkinlik ölçümü için girdi ve çıktılar belirlenir. Son olarak bağıl etkinliklerin ölçümü için en uygun VZA modeli seçilip, sonuçlar değerlendirilir (Altun, 2006).

Veri zarflama analizinde, etkinlik hesaplanırken girdileri çıktılarına dönüştüren tek bir süreç söz konusudur. Kara kutu olarak adlandırılan bu yaklaşımda, sistem bir bütün olarak görülmekte ve KVB içerisindeki süreç ve bağlantılar ihmal edilmektedir.

Etkinliği hesaplanan KVB'lerin çoğunun üretim sisteminin alt süreçlerden oluşması, bu süreçler arasındaki ilişkilerin karmaşık yapıya sahip olması, bir alt sürecin çıktılarının diğer bir alt sürecin girdileri olabilmesi gibi nedenlerden dolayı, ağ yapısını dikkate alan network VZA modelleri geliştirilmiştir. Network VZA'da,

tüketilen ve üretilen ara ürünlere ek olarak, kendi girdilerine sahip ve kendi çıktılarını üreten çok sayıda aşama söz konusudur. Bu ara ürünler bazı aşamalar için girdiyken, diğerleri için çıktı olarak tanımlanır (Lozano vd, 2013).

Sistem ve süreçlerin etkinliğini ölçmek için Färe ve Grosskopf (1996) tarafından tanımlanan network VZA daha sonra birçok araştırmacı tarafından geliştirilmiş ve ağ yapısını ortaya koyan farklı modeller elde edilmiştir. Geleneksel VZA'nın aksine network VZA'nın belirli bir formu yoktur. Ağ yapısına bağlı olarak, basitten karmaşığa birçok farklı model oluşturulabilir.

Bir ağ sistemi için temelde seri ve paralel yapılar mevcuttur. Seri yapılar, birbirine bağlı bir dizi süreçten oluşur. Seri yapının aksine paralel yapı, bir dizi girdi tüketen ve bir dizi nihai çıktı üreten paralel süreçlerden oluşur. İlişkisel modelde ise sistem içerisinde aynı anda çok sayıda seri ve paralel yapı bulunur. Paralel yapının iki ya da daha fazla seviyeye sahip olması olarak tanımlanan hiyerarşik modeller ya da zaman değişkenini içine alan dinamik modeller gibi pek çok sınıflamalar mevcuttur. Ayrıca etkinlik ölçümünde, radyal tabanlı modellerin yanısıra ara ürünlerin olduğu sistemlerde aylak tabanlı modeller de kullanılır. Eczaneler, şirketler, banka şubeleri, tedarik zincirleri, demiryolu taşımacılığı ve üniversiteler gibi çeşitli alanlarda etkinliği hesaplayan network VZA, son yıllarda daha çok ilerleme kaydetmiştir.

İstatistikte değişkenler arasındaki ilişkiyi anlamak ve yorumlamak için korelasyon ölçümleri, regresyon analizleri gibi birçok yöntem geliştirilmiştir. Ancak, yaygın olarak kullanılan bu yöntemler birçok varsayıma sahiptir. Kapulalar, marjinal olasılık dağılımları için herhangi bir varsayım gerektirmeyen bir yaklaşım olup, bağımlı ve bağımsız değişken arasındaki lineer olmayan bağımlılığın modellenmesini sağlar. Ayrıca hiçbir korelasyon ölçüsü bu özelliğe sahip değildir. Dolayısıyla kapulalar, bağımlılık açısından ölçüden bağımsız olarak çalışmaya olanak sağlaması ve iki ya da daha fazla değişkene sahip dağılım ailelerini inşa etmede başlangıç noktası olması nedeniyle uygulamada önemli bir yere sahiptir (Nelsen, 2003).

Değişkenler arasındaki ilişkinin anlaşılabilmesi için değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının bilinmesi gerekir. Kapulalar bu bağımlılık yapısını modelleyen fonksiyonlardır. Kapulalar marjinal dağılımları, onların çok değişkenli dağılımlarıyla ilişkilendiren fonksiyonlardır.

Kapular en basit ifadeyle, tek değişkenli marjinalleri $[0,1]$ üzerinde düzgün dağılıma sahip ve çok değişkenli dağılımları bu tek değişkenli marjinallere bağlayan fonksiyonlardır. Kapula fonksiyonunun asıl amacı, gözlenen verilere en uygun düşen çok değişkenli dağılımı bağımlılık yapısını da ortaya koyarak elde etmektir (Alhan, 2008).

İlk defa Sklar (1959) tarafından kapulanın varlığı ortaya konmuştur. Aralarında özel bir bağımlılık yapısına sahip düzgün dağılımlı değişkenleri birleştirerek, ortak dağılım elde eden bir fonksiyon için "kapula" terimi kullanılmıştır (Habiboellah, 2007).

Kapula ile değişkenler arasında bağımlılık yapısını belirlerken, değişkenlere uygun kapula tahmin yöntemi ile iki ya da çok değişkenli dağılımın bağımlılık yapısı, parametrelerle ortaya konulmalıdır. Uyum iyiliği testleriyle, bağımlılık yapısına uygun elde edilen kapula modellerinden seçim yapılarak çok değişkenli dağılım, uygun kapula fonksiyonu ile belirlenmelidir.

Bu tez çalışmasının birinci bölümünde VZA, Network VZA, kapula ve enerji etkinliği ile ilgili literatürde yapılan çalışmalara yer verilmiştir. İkinci bölümde VZA genel hatlarıyla anlatılmış, ölçeğe göre sabit ve ölçeğe göre değişken getiri varsayımı altında girdiye ve çıktıya yönelik modellerden söz edilmiştir. VZA'da istenmeyen çıktı durumunda kullanılan veri dönüşümlerinden de bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde Network VZA'nın tanımı ve temel ağ yapılarından seri, paralel ve ilişkiyel yapılardan söz edilmiştir. Dördüncü bölümde iki ve çok boyutlu kapuların tanımları, temel özellikleri ve Arşimedyen kapulalardan Clayton, Gumbel, Frank, Joe ve eliptik kapulalardan Gaussian ve Student's t kapulaları anlatılmıştır. Bağımlılık yapıları, bağımlılık ölçülerinin kapula ile ifadesi, kapula tahmin yöntemleri, kapula seçimi için kullanılan testlerden söz edilmiştir. Tez çalışmasının beşinci bölümünde ise ilk olarak OECD (The Organisation for Economic Co-operation and Development-Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Teşkilatı) ülkelerinin yapı, sanayi, güç ve ulaşım sektörlerindeki enerji etkinlikleri, uygun girdi-çıkta değişkenleri ile parametrik olmayan veri zarflama analizi yöntemi ile elde edilmiştir. Çalışmanın ikinci aşamasında, elde edilen etkinlik değerleri arasındaki bağımlılık yapısı en uygun kapula modeli ile belirlenmiştir. Bağımlılık parametreleri ve etkinlik değerleri uygun kapula modelinde ele alınıp, her bir ülke için tek bir etkinlik skoruna ulaşılmıştır. Daha sonra ülkeleri alt sektörlerle birlikte bir ağ yapısı olarak düşünerek, network VZA ile hem sistem hem de alt

süreçlerin etkinlikleri hesaplanmıştır. Bu sayede, kapula ile birleştirilen etkinlik skorları ile network VZA'dan elde edilen sistem etkinlik skorları ülke bazında sıralanmıştır. Tezin son bölümünde ise, bu iki etkinlik skoru arasında karşılaştırmalar yapıp, sonuçlar değerlendirilmiştir.

1.1. VZA ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Cao ve Yang (2011) çalışmalarında, internet üzerinden satış yapan 40 firmanın, ticari faaliyetlerini araştırmak ve performanslarını değerlendirmek amacı ile VZA yöntemini kullanmışlardır.

Taşköprü (2014) çalışmasında, Avrupa Birliği'ne üye 28 ülke ve aday ülke Türkiye'nin enerji verimliliklerini, klasik veri zarflama ve kategorik veri zarflama yöntemleriyle incelemiştir. Klasik veri zarflama analizinde ihracat, birincil enerji üretimi/nüfus ve yenilenebilir enerji/nüfus girdi olarak alınırken; ithalat ve enerji tüketimi/nüfus ise çıktı olarak alınmıştır. Kategorik veri zarflama analizinde girdi ve çıktılara ilaveten kategorik değişken olarak "Standard and Poor's un ülkelere verdiği kredi notları kullanılmıştır. Sonuç olarak klasik VZA ile etkin olmayan KVB'lerin, KVB'leri alt gruplara ayırarak inceleyen kategorik VZA'ya göre etkin oldukları görülmüştür.

Saka (2015) çalışmasında, Türk Hava Yolları'nın 2011 yılındaki uluslararası uçuş rotalarının performansını ölçmeyi amaçlamıştır. Performans değerlendirmesinde, VZA yöntemi ile bu yöntemin ölçeye göre değişken getiri altındaki modeli ile çıktıları arttırmak hedeflenmiştir. Farklı bölgelerde bulunan 125 direkt uçuş noktasının her biri birer KVB olarak alınmıştır. Analizde girdi değişkenleri olarak arz edilen koltuk-kilometre, arz edilen koltuk-kilometre başına değişken maliyet ve konma sayısı, çıktı değişkenleri olarak da ücretli yolcu kilometre ve arz edilen koltuk-kilometre başına elde edilen gelir seçilmiştir.

Öztürk (2016) çalışmasında; Beveridge, Bismarck, National Health Insurance System, Out-of-Pocket sağlık sistemlerinin hangilerinin, ülkelerin sağlık sistemleri performansı üzerinde daha etkili olduğunu belirlemeyi amaçlamıştır. Veri zarflama analizi ile ülkelerin etkililik seviyeleri açıklanmıştır. OECD ülkeleri üzerinde yapılan çalışmada; beklenen yaşam süresi ve bebek kurtulma oranı çıktı verileri olarak alınırken, kamu sağlık harcamaları, özel sağlık harcamaları, gayri safi yurtiçi hasıla ve

doktor sayısı girdi verileri olarak alınmıştır. Tüm veriler 2000 yılından 2014 yılına kadar ki 15 yılı kapsamaktadır. Veri zarflama analizi sonuçlarına göre, hangi sağlık sistemi modelinin diğerlerine göre daha iyi olduğu tartışılmıştır.

Rosenthal ve Weiss (2017) çalışmalarında, Thomson Reuters Journal Citation Reports 2013 yılı verilerini kullanarak, iş dergilerini sıralamak için VZA modelini kullandılar. Bu modelde atıf sayısı temel alınarak; makale sayısı girdi değişkeni olarak; toplam ciltler, etki faktörü, beş yıllık etki faktörü, uyum indeksi, öz faktör puanı ve makale etki puanı ise çıktı değişkenleri olarak alınmıştır. Dergilerin görece etkinlikleri hesaplandığında, sonuçlar dergilerin listelerdeki sıralamasını destekler niteliktedir.

1.2. Network VZA ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Seiford ve Zhu (1999), finansal şirketlerin kar üretimi ve piyasa değeri oluşturma şeklinde iki aşamalı olduğuna dikkat çekerek, bu süreçleri karlılık ve pazarlanabilirlik gibi iki yaklaşımla incelemişlerdir. Gelirleri ve karları ara ürünler olarak kullanarak, iki sektör arasındaki ağ yapısını network VZA modeli ile belirlemişlerdir.

Löthgren ve Tambour (1999), müşteri memnuniyetinin yanısıra hedefleri etkinlik ve üretkenlik olan İsveçteki eczanelerin bir örneğine network VZA modelini uyguladılar. Network VZA modelinin sonuçları ile geleneksel VZA modelinin sonuçlarını karşılaştırdılar.

Lewis ve Sexton (2004), network VZA için çok aşamalı bir yapı önermiştir. Bu model, her bir düğüm için modeli bağımsız olarak çözmektedir. Çıktı odaklı bir modelde öncelikle çıktıların optimal çözümünü elde etmek için birinci aşamadaki üst düğüm için genel bir VZA modeli çözülür. Bir sonraki aşamada, üst düğümde elde edilen optimal çıktıların bir kısmı (veya tümü) bir sonraki düğüme ara girdiler olarak uygulanır. Tüm düğümler için VZA modellerini çözdükten sonra, son düğümde son optimal çıktı elde edilir. Dolayısıyla etkinlik skoru, gözlenen bir çıktı ile bölünen nihai optimal çıktı olarak ölçülür.

Prieto ve Zofio (2007), Koopmans tarafından oluşturulan bir girdi-çıktı modelinde network etkinlik analizini uyguladılar. Network VZA teknikleri ile girdileri, ara ürünleri ve istenen nihai çıktıları optimize ederek, modellerini OECD ülkelerinin girdi-çıktı veri tabanına taşımayı başarmışlardır.

Yu (2008) çalışmasında, 40 küresel demiryolunun etkinliğini araştırırken geleneksel VZA ve network VZA yöntemlerini kullanmıştır. Network VZA'nın demiryolu yöneticilerine etkinsizliğin nedeni hakkında daha fazla kaynak sağladığı sonucuna ulaşılmıştır.

Tone ve Tsutsui (2009), ara ürünleri ele alan aylak tabanlı network VZA modelini geliştirmişlerdir. Aylak tabanlı model, radyal olmayan bir yöntemdir ve girdi ve çıktıların orantısız olarak değişebileceği durumlarda etkinliği ölçmek için uygundur. Bu model, genel etkinliği bölümlere ayırır.

Chen vd (2009), Tayvan'daki hayat dışı sigorta şirketlerine iki aşamalı veri zarflama analizi uygulamışlardır. Bu çalışma toplam etkinliğin, alt aşamaların etkinliklerinin ağırlıklı bir toplamı olarak ifade edildiği, bir ilave etkinlik ayrıştırma yaklaşımı geliştirmektedir. Aşamalar arasındaki toplamsal ilişki, toplamsal network VZA yöntemi ile modellenmiştir.

Kao (2009b), hem teorik hem de uygulama açısından kapsamlı çalışmasıyla, ilişkisel network VZA yaklaşımı olarak adlandırılan, çarpımsal ilişki ile aşamalar arasındaki sürekliliği dikkate almıştır. Network modelini incelemek için, karar verme birimlerinin iç parçalarını paralel ve seri olmak üzere iki yapı şeklinde düşünmüştür.

Moreno ve Lozano (2014), National Basketball Association (NBA) takımlarının etkinliğini değerlendirmek için aylak tabanlı model kullanarak, network VZA ile geleneksel VZA yöntemlerini karşılaştırmışlardır. Sonuçlar, network VZA'nın geleneksel VZA'dan daha ayırt edici olduğu ve daha fazla bilgi sağladığını göstermektedir.

Moreno vd (2015), Brezilya'da elektrik dağıtım şirketlerinin etkinliğini değerlendirmek için iki aşamalı network VZA modelini uygulamışlardır. Hem ilişkisel hem de toplamsal network modelleri kullanılarak karşılaştırma yapılmıştır.

Omrani ve Soltanzadeh (2016), sistemin ve iç süreçlerin zaman içinde etkinliklerini aynı anda ölçen ilişkisel dinamik bir network VZA modeli kullanarak, birbirine bağlantılı sekiz İran havayolunun etkinliğini değerlendirmişlerdir. Elde edilen sonuçlar ile network VZA ve dinamik VZA modelleri karşılaştırılmıştır.

Aydın (2017), Türkiye'de üretilen ve tüketilen elektrik enerjisini, şehirler ve dağıtım bölgeleri açısından analiz etmiş ve yenilenebilir enerji kaynaklarından elektrik

üretimi ve tüketimi için çözüm önerilerini Genetik Algoritmalar ve Network Veri Zarflama Analizi ile ortaya koymuş ve çıkan sonuçları değerlendirmiştir.

Fukuyama ve Matousek (2017), Japonya’da faaliyet gösteren bankaların ağ gelir performansını değerlendirmek için network VZA yöntemini kullanarak, banka ağı gelir fonksiyonunu modellemişlerdir.

Kalantary ve Saen (2018), tedarik zincirlerinin sürdürülebilirliğini VZA ile değerlendirmişlerdir. Tedarik zincirlerinin sürdürülebilirliğini çeşitli dönemlerde değerlendirmek için dinamik bağlamda bir ters network VZA modeli geliştirmişlerdir.

1.3. Kapula ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Alhan (2008) çalışmasında, bağımsızlık kapulasını içeren iki değişkenli kapula ailelerini fonksiyonel form bakımından araştırmış ve kapula tahmin yöntemlerini incelemiştir. İstanbul Menkul Kıymetler Borsası sektör endeks verileri kullanılarak, sektörler arasındaki bağımlılık yapısı araştırılmış ve sektörler arası ikişerli bağımlılık yapısını ortaya koyan kapulalar, haftalık ve aylık veriler üzerinden tahmin edilmiştir.

Kolev ve Paiva (2009), çalışmalarında çeşitli kapula temelli regresyon modelleri üzerinde araştırma yapmışlardır. Özellikle sigorta uygulamalarında kullanılan veriler üzerinde farklı kapula modelleri ile sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Nguyen ve Bhatti (2012), gelişmekte olan ekonomilerin belirsizliğinin özellikle petrol fiyatlarındaki dalgalanmadan kaynaklandığından hareketle, petrol fiyatları ve borsa ilişkileri arasında yüksek derecede bağımlılığı modellemeye çalışmışlardır. Non-parametrik yöntemler (chi ve k-plotlar) ve kapula yöntemleri kullanılarak, Çin ve Vietnam pazarları arasındaki ilişki modellenmiştir. Petrol fiyatları ile borsalar arasındaki bu modelleme yatırımcılar ve risk yöneticileri için anlamlı sonuçlar ortaya koymuştur.

Topçu (2013), meme kanseri tanısı konulmuş hastalar için meydana gelişi gözlenen ve ölüm riski olarak belirlenen beş olaydan, uzak organ yayılım riski ve koltukaltı lenf nodu bölgesinde nüks riski seçilerek arasındaki bağımlılık yapısı Arşimedyen kapula fonksiyonu ile belirlenmiş ve yorumlanmıştır. Aralarındaki bağımlılığın klinik olarak anlamlı olması nedeniyle bu iki risk seçilmiştir. Sadece tamoxifen adlı ilaçla tedavi edilen hasta grubu için uzak organ yayılım riski ve koltukaltı lenf nodu bölgesinde nüks riski arasındaki bağımlılığın Frank kapula ile

modellendiği görülmüştür. Benzer şekilde, tamoxifen ve radyoterapi uygulanan hasta grubu içinde aynı risklerin bağımlılık yapısı Gumbel kapula ile modellenmiştir. Dolayısıyla sağkalım analizinde, yapılan bu modellemeyle daha gerçekçi sonuçlar elde edilmiştir.

El Mehdi ve Hafner (2014), Fas belediyelerinin etkinliğinin analizi için stokastik sınır analizi yöntemini kullanmışlar ve SSA analizindeki hata teriminin iki bileşeni için bağımlılık yapısını kapula ile modellemişlerdir. Teknik etkinlik için Cobb-Douglas fonksiyonu kullanılırken, hata terimleri arasındaki bağımlılığı modellemek için Ali-Mikhail-Haq, Clayton, Farlie-Gumbel-Morgenstern, Frank ve Gaussian kapula aileleri kullanılmıştır. En yüksek etkinlik düzeyleri Clayton ve Gaussian kapulalar için en düşük etkinlik düzeyleri Frank kapula için elde edilmiştir. Dolayısıyla, hata bileşenlerinin bağımlılığı göz önüne alındığında SSA analizi için daha gerçekçi tahminler elde edilebildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Cheng vd (2014), iki değişkenli sağkalım verileri için bir yarı-parametrik kapula modelini, sağkalım fonksiyonunu non-parametrik modeller ile, bağımlılığı ise parametrik modeller ile karakterize etmişlerdir. Sağkalım verileri sansürlendiğinde, etkin yarı-parametrik modelin Gaussian kapula olduğu görülmüştür. Sansürlenmiş veriler için, yarı-parametrik etkinlik sınırını elde etmişler ve kapula bağımlılık parametresi ve sağkalım fonksiyonlarının asimptotik olarak normal ve etkin oldukları sonucuna ulaşmışlardır.

Kim ve Jun (2015), Apple şirketinin patentlerini ve teknolojileri arasındaki ilişkiyi anlamak için kapula yöntemini kullanmışlardır. Apple'ın şimdiye kadar uygulanan tüm patentleri bir araya getirilmiş ve patent analizi yapılmıştır. Bunun için kullanılan patentlerden elde edilen, Apple'ın teknolojik yönlerini içeren anahtar kelimelerden yararlanılmıştır. Grafik nedensel çıkarım metodunu kullanarak, Apple anahtar kelimeleri arasındaki nedensel ilişkileri oluşturup, hedef cevap anahtar kelimesinin ve öngörülen anahtar kelimelerin birbirleriyle nasıl ilişkili olduğunu görmek için yarı-parametrik Gaussian kapula regresyon modeli kullanılmıştır.

Houari vd (2016), büyük ve çeşitli veri kümelerinde çalışmanın zor olduğunu ve çok boyutlu verilerin kullanılmasının daha fazla gürültüye, gereksiz ve bağlantısız verilere neden olduğu gerekçesiyle, bu tür verilerin etkin bir şekilde değiştirilip, boyut

azaltmasına gidilmesinde kapula ve ileri düzenleme tekniklerini önermişlerdir. Yöntem gerçek veri setlerine uygulandığında, olumlu sonuçlar elde edilmiştir.

Ayuso vd (2016), İspanya'daki 21361 ölümcül olmayan trafik kazasının tesadüfi bir örneği üzerinde çalışmışlardır, geçici sakatlık ve kalıcı yaralanmalar için iki değişkenli kapula tabanlı bir regresyon modeli kullanmışlardır. İlk olarak her iki yaralanma şiddeti değişkenleri için Akaike Information Criterion (AIC) değerlerine bakılarak, marjinal regresyon modeli seçilmiştir. İkinci aşamada, yaralanma şiddeti değişkenleri için bağımlılık yapısı belirlenmiştir. AIC değerlerine göre seçilen gamma ve negatif binom marjinal regresyon modelleri ile bağımlılık yapısını en iyi ortaya koyan Frank kapula regresyon modeli olmuştur.

Alpay ve Hayat (2016), veri zarflama analizinde girdi ve çıktıların belirlenmesinde, yeni bir yaklaşım önermişlerdir. Özellikle değişken seçimi hakkında herhangi bir ön bilgi bulunmadığında, bu değişkenlerin seçiminde kapulaları kullanmışlardır. Gerçek veriler ve bu yöntemle simüle edilmiş verilerin etkinlik değerleri karşılaştırıldığında, kapula yaklaşımının mükemmel yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

Sriboonchitta vd (2017), etkinsizlik ile gürültü terimlerinin arasındaki bağımlılıkları ve örneklem seçimindeki hatalar ile stokastik sınır denklemleri arasındaki bağımlılıkları modellemek için iki kapula fonksiyonunu kullanmışlardır. AIC değeri göz önüne alınarak, en uygun kapula modeline karar vermişlerdir. Sonuç olarak, kapula kullanılarak elde edilen çift katmanlı stokastik sınır analizi modelinin, hata teriminin iki bileşenini bağımsız kabul eden klasik SSA modelinden daha iyi performans gösterdiği sonucuna ulaşılmıştır.

1.4. Enerji Etkinliği ile İlgili Çalışmalar

Ramanathan (2005), 17 Ortadoğu ve Güney Afrika ülkesinin enerji etkinliğini VZA yöntemi ile incelemiştir. Girdi değişkenleri olarak kişi başına düşen karbondioksit emisyon miktarı ve fosil yakıt enerji tüketimi alınırken çıktı değişkenleri olarak kişi başına düşen gayrisafi yurtiçi hasıla (GSYH) ve fosil olmayan yakıt enerji tüketimi alınmış ve ülkeler arası karşılaştırma yapılmıştır.

Hu ve Wang (2006), Çin'in 29 idari bölgesinde enerji etkinliğini incelerken işgücü, sermaye, enerji tüketimi ve eklenen toplam alan girdi değişkenleri olarak; GSYH

ise tek çıktı değişkeni olarak alınmıştır. 1995-2002 yılları verileri baz alınarak, her bir bölgenin hedefi olan enerjiyi belirlemek için VZA yöntemini kullanmışlardır.

Lee (2008), Tayvan'ın 47 hükümet binasının enerji etkinliğini karşılaştırırken, regresyon analizinden elde edilen enerji kullanım yoğunluğu girdi değişkeni olarak, gözlenen enerji kullanım yoğunluğu ise çıktı değişkeni olarak alınmıştır.

Shi vd (2010), Çin'in bölgesel olarak sanayi sektöründeki enerji etkinliğini değerlendirmişlerdir. Girdi değişkenleri olarak duran varlıklardaki endüstriyel yatırım, endüstriyel enerji tüketimi, endüstriyel işgücü alınırken; endüstriyel katma değer istenen çıktı ve yakıt yanmasından kaynaklanan endüstriyel atık gaz hacmi ise istenmeyen çıktı olarak alınmıştır. VZA yöntemi kullanılarak, bölgesel olarak teknik etkinlikler hesaplanmıştır.

Fallahi vd (2011), 32 elektrik üretim şirketinin etkinlik analizini parametrik olmayan VZA yöntemi ile hesaplamışlardır. Aylık üretilmesi gereken enerji miktarı, fosil yakıtların ısı değeri toplamı, işçi sayısı, araç-gereçler tarafından tüketilen enerji, yaklaşık yıllık çalışma saati girdi değişkenleri olarak, üretilen net elektrik miktarı ise çıktı değişkeni olarak alınmıştır.

Zhang vd (2011), 23 ülkenin toplam faktör enerji etkinliğini araştırırken işgücü, sermaye ve enerji tüketim verilerini girdi değişkenleri olarak alırken, GSYH tek çıktı değişkeni olarak alınmıştır. 1980-2005 yılları baz alınarak, kesitsel ve zamanla değişen veriler için etkinliği ölçebilen VZA window yöntemini kullanmışlardır.

Xie vd (2014), 26 ülkenin elektrik enerjisi endüstrisinde çevresel toplam faktör etkinliğini araştırırken, aylık tabanlı VZA'yı temel alan Malmquist indeks yöntemini kullanmışlardır. Çalışan sayısı, kurulu kapasite, yakıt tüketimi, nükleer enerji tüketimi girdi değişkenleri olarak alınırken elektrik enerjisi üretimi istenen çıktı ve karbondioksit emisyonu istenmeyen çıktı olarak alınmıştır. İkinci aşamada ise toplam faktör etkinliğini etkileyen değişkenleri belirlerken tobit regresyon analizi kullanılmıştır.

Cui ve Li (2014), Çin'in il idari bölgelerinin ulaşım sektöründeki enerji etkinliğini değerlendirirken, üç aşamalı sanal sınır VZA yöntemini kullanmışlardır. Ulaşım sektöründe çalışan kişi sayısı, ulaşım sektörüne ayrılan sermaye, ulaşım sektöründeki enerji tüketimi girdi değişkenleri olarak alınırken, yolcu ve nakliye cirosu ise çıktı değişkenleri olarak alınmıştır.

Zhou vd (2014), Çin'in ulaşım sektöründeki enerji etkinlik performansını ölçerken VZA yöntemini kullanmışlardır. Ulaşım sektöründe çalışan kişi sayısı, kullanılan enerji miktarı girdi değişkenleri olarak alınırken, yolcu ve yük hizmetleri için sırasıyla yolcu kilometresi ve yük kilometresi değişkenleri istenen çıktı, karbondioksit emisyon miktarı istenmeyen çıktı olarak alınmıştır. Çin'in 30 idari bölgesinin ulaşım sektöründe enerji tasarruf potansiyelini en üst düzeye çıkarmak amaçlanırken, istenmeyen çıktıyı azaltıp aynı anda istenen çıktıyı artırmak için, etkinlik hesaplarken çıktı yönelimli uzaklık fonksiyonu kullanılmıştır.

Apergis vd (2015), seçilen OECD ülkelerinde enerji etkinliğini hesaplarken istenmeyen çıktılar için aylak tabanlı model kullanmışlardır. Literatürdeki enerji etkinliği göstergelerinden yararlanarak çalışan sayısı, yenilenebilir ve yenilenemeyen enerji tüketimi, sermaye girdi değişkenleri olarak alınırken GSYH istenen çıktı, karbondioksit emisyon miktarı ise istenmeyen çıktı olarak alınmıştır. İkinci aşamada ise genelleştirilmiş lineer modeller kullanılarak, enerji etkinlik seviyelerini etkileyen sermaye-işgücü oranı gibi değişkenler belirlenmiştir.

Li ve Lin (2015), Çin'in 30 idari bölgesinde toplam faktör enerji etkinliğini değerlendirirken süper etkinlik ve sıralı VZA modellerini birleştiren gelişmiş bir VZA yöntemi uygulamışlardır. Sermaye, işgücü, enerji tüketim verileri girdi değişkenleri olarak alınırken, bölgelerdeki GSYH ve enerji yoğunluğu çıktı değişkenleri olarak alınmıştır.

Liu ve Wang (2015), Çin sanayi sektörünün enerji etkinliğini, network VZA ve etkinlik ayrıştırma tekniğini kullanarak hesaplamıştır. Sanayi sektöründe çalışan kişi sayısı, sanayi sektörüne ayrılan sermaye sistem girdisi olarak alınırken enerji tüketimi ara değişken ve GSYH ise sistem çıktısı olarak alınmıştır. Daha sonra klasik VZA ile network VZA sonuçları karşılaştırılmıştır.

Zhao vd (2016), Çin'deki bölgesel sanayilerin etkinliğini, VZA yöntemiyle çevresel ve işlevsel olarak analiz etmişlerdir. Duran varlıklardaki endüstriyel yatırım, endüstriyel işgücü, endüstriyel enerji tüketimi girdi değişkenleri; endüstriyel üretim değeri, endüstriyel atık gaz miktarı ve atık su emisyonları ise çıktı değişkenleri olarak tanımlanmıştır.

Wang vd (2017), Pekin'de sanayi sektörünün enerji etkinliğini Bootstrap-VZA yöntemi ile incelerken, etkinliği etkileyen faktörleri ikinci aşamada tobit regresyon ile

değerlendirmişlerdir. Sermaye, işgücü, enerji tüketimi girdi değişkenleri; karbondioksit emisyon miktarı istenmeyen çıktı ve endüstriyel katma değer ise istenen çıktı değişkenleri olarak tanımlanmıştır.

Wu vd (2018), Çin'deki kömür yakıtlı santrallerin eko-verimlilik ölçümünde süper etkinlik VZA modelini kullanmışlardır. Kurulu kapasite, işgücü, kömür tüketimi, yardımcı güç tüketimi, yakıt tüketimi ve su tüketimi değişkenleri girdi olarak alınırken, atık gaz emisyonları istenmeyen çıktı ve üretilen elektrik miktarı ile nominal yükün belli bir sürede kullanımı istenen çıktı değişkenleri olarak tanımlanmıştır.

Park vd (2018), Amerika Birleşik Devletleri'nin ulaştırma sektöründeki çevresel etkinliğini değerlendirirken sermaye giderleri, enerji kullanımı ve işgücü verilerini girdi değişkenleri olarak tanımlarken, GSYH katma değerini ve karbondioksit emisyon miktarını sırasıyla istenen ve istenmeyen çıktı değişkenleri olarak tanımlamıştır. Ulaştırma sektörünün çevresel açıdan etkin olmadığı sonucuna ulaşılmıştır.

Liu ve Lin (2018), Çin'in ulaşım sektöründeki enerji etkinliğini değerlendirirken ilk aşamada VZA yöntemini, etkinliği etkileyen faktörleri incelerken ikinci aşamada budanmış ve sansürlü regresyon yöntemlerini kullanmışlardır. Ulaşım sektöründe çalışan kişi sayısı, ulaşım sektörüne ayrılan sermaye, ulaşım sektöründeki enerji tüketimi girdi değişkenleri olarak alınırken ulaşım sektöründeki dönüştürülmüş ciro ise çıktı değişkeni olarak alınmıştır.

2. VERİ ZARFLAMA ANALİZİ

Veri zarflama analizi, girdiyi çıktıya dönüştürmekten sorumlu KVB'lerin bağlı etkinliğinin ölçülmesi için geliştirilen, parametrik olmayan bir etkinlik ölçüm tekniğidir (Ramanathan, 2003). Bu teknik, KVB'nin çıktılarını oluşturmak için mevcut kaynakları nasıl etkin bir şekilde kullanacağını belirlenmesini sağlar (Yolalan, 1993).

Çok sayıda girdi ve çok sayıda çıktının ağırlıklı bir girdi veya çıktı setine dönüştürülmesinin güç olduğu durumlarda veri zarflama analizi, oldukça geçerli ve anlamlı sonuçlar üreten matematiksel programlamaya dayalı bir tekniktir.

VZA yönteminde etkin sınır, minimum girdiyle maksimum çıktı üreten yani en iyi performansı sergileyen KVB'lerden oluşur. Etkin sınıra göre diğer birimlerin etkinlikleri hesaplanır.

VZA, etkin KVB'leri etkin olmayan KVB'lerden ayırır. Bunun yanı sıra KVB'lerdeki etkinsizlik miktarı ve nereden kaynaklandığı hakkında bilgi veren bir tekniktir. Bundan dolayı VZA, etkin olmayan birimlerde gerekli olan girdi azaltma ve/veya çıktı artırma miktarlarını belirleyerek karar vericilere destek sağlar (Kecek, 2010).

Farrell (1957)'in etkinliği değerlendirmeye yönelik çalışması VZA'nın başlangıcı olarak kabul edilmektedir. Bu çalışmada birden fazla girdi ve tek çıktı kullanmasına rağmen, etkinlik ölçümü ile ilgili olarak kurulan doğrusal denklem sistemi, çoklu çıktılar için etkinliğin hesaplanmasına temel oluşturmuştur.

İlk VZA modeli; Charnes vd (1978), tarafından oluşturulmuştur. Amerika'da devlet okullarına giden öğrenciler için, bir eğitim programına katılan ve katılmayan eşleştirilmiş bir takım okul gruplarının performansı karşılaştırılmıştır. Burada 70 okulun bağlı teknik etkinliğini, fiyatları göz ardı ederek çoklu girdi ve çoklu çıktılarla tahmin etme isteği CCR formülasyonu olarak bilinen, VZA oransal formülasyonunu ortaya çıkarmış olup, VZA'yı ilk duyuran çalışma olarak European Journal of Operations Research dergisinde yayınlanmıştır.

İlk önceleri VZA yöntemi, ölçüğe göre sabit getiri varsayımı altında sadece teknik etkinliği ölçmede kullanılırken, daha sonra yapılan bazı değişikliklerle; Banker, Charnes ve Cooper (BCC) tarafından 1984'de ölçek etkinliğinin ölçülmesinde de kullanılmaya başlanmıştır.

VZA tekniği 1978 yılında başlayıp günümüze kadar geçen süre içinde, teoride ve uygulamada hızlı bir gelişme göstermiştir. Başlangıçta kar amacıyla yapılmayan VZA daha sonraları kar amaçlı üretim ve hizmet sektörlerinde, işletmeler arası karşılaştırmalı teknik etkinliğin ölçülmesinde kullanılmıştır (Ulucan ve Karacabey, 2002).

2.1. Veri Zarflama Analizi Modelleri

n karar verme biriminin, $(j = 1, \dots, n)$ farklı s çıktıyı $(r = 1, \dots, s)$ üretmek için değişik miktarlarda m girdiyi $(i = 1, \dots, m)$ kullandığını düşünelim. Özellikle j . karar verme birimi (KVB_j), r . çıktının y_{rj} miktarını üretirken i . girdinin x_{ij} miktarını tüketir. Farz edelim ki $x_{ij} \geq 0$, $y_{rj} \geq 0$ ve ayrıca her KVB, en az bir pozitif girdi ve pozitif çıktı değerine sahip olsun. VZA, gözlenen girdileri ve çıktıları ele alır ve özel bir KVB için girdi ve çıktı etkilerinin değerlerini seçer. Yani veri zarflama analizinde etkinlik, çıktıların toplam etkisinin, toplam girdi etkisine oranını tanımlar (Luptacik, 2010).

Zarflama yüzeyleyle temsil edilen, ölçeğe göre sabit getiri (Constant Returns to Scale) (CRS) ve ölçeğe göre değişken getiri (Variable Returns to Scale) (VRS) olmak üzere iki temel VZA modeli vardır. VZA modelleri farklı kriterler göz önünde bulundurularak farklı şekillerde sınıflandırılabilir. CRS varsayımı altında girdiye ve çıktıya yönelik modeller olarak; oransal ve zarflama modellerini içine alan CCR modelleri ve buna ek olarak VRS varsayımını kabul eden BCC modelleri gibi pek çok modelde farklı sınıflandırmalar mevcuttur.

Ölçeğe göre sabit getiri altında VZA modellerinde girdilerdeki oransal artış, çıktılarda aynı oransal artışa öncülük eder ve doğrusal bir üretim sınırı meydana gelir. Ayrıca CRS altında CCR modelleri tüm birimlerin optimal ölçekte faaliyet gösterdiklerinde etkinlik ölçümü için uygulanacak bir modeldir. Dolayısıyla etkinliğin, ölçek büyüklüğünden etkilendiği durumlarda Banker vd (1984) tarafından geliştirilen değişken ölçek varsayımını altındaki modeller kullanılır.

CRS ve VRS modelleri arasındaki fark; orjinden geçen yardımcı hiperdüzlemlerin (zarf yüzeyinin bir parçası olan) değişimini anlatan bağımsız değişken μ_0 ın varlığıdır. Örneğin; CCR modelinde tek girdi ve tek çıktı için etkinlik sınırı, CRS varsayımında orjinden geçen bir doğru iken VRS varsayımı altında parçalı doğrusal ve dış bükeydir (Luptacik, 2010).

2.1.1. Ölçeğe göre sabit getiri (CRS) altında girdiye yönelik modeller

Girdiye yönelik modellerde, belli bir çıktı bileşiminin en etkin bir şekilde elde edilebilmesi amacı ile en uygun girdi bileşiminin ne olması gerektiği araştırılır. Başka bir ifadeyle girdiye yönelik VZA'da belirli bir çıktı seviyesi garanti altına alındıktan sonra, girdi seviyesini minimize etmeyi hedefleyen bir model çözümü gerçekleştirilmektedir (Lorcu, 2008).

2.1.1.1. CRS altında girdiye yönelik oran modeli

Charnes vd (1978), KVB'lerin etkinliklerini ölçmek için öne sürdükleri ilk model CCR oran modelidir. m adet girdi kullanarak, s adet çıktı üreten, n sayıda KVB'den oluşan bir gözlem kümesinde, girdiye yönelik oran modeli aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \max \quad & h_0(u, v) = \frac{\sum_{r=1}^s y_{r0} u_r}{\sum_{i=1}^m x_{i0} v_i} \\ \text{kısıtlar} \quad & \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r}{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_i} \leq 1 \quad j = (1, \dots, n) \\ & u_r \geq \varepsilon \quad r = (1, \dots, s) \\ & v_i \geq \varepsilon \quad i = (1, \dots, m) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Modelde u_r , r . çıktının ağırlığı, v_i ise i . girdinin ağırlığıdır. $x_{ij} > 0$, j . KVB'nin üretimde kullandığı i . girdi miktarını; $y_{rj} > 0$ ise üretim sonucu elde edilen r . çıktı miktarını göstermektedir. ε ise yeterince küçük pozitif bir sayıdır.

(2.1) modeli bir bütün olarak ele alındığında amaç fonksiyonunda maksimize edilmesi istenen oranın, kısıtlarda da yer aldığı görülmektedir. Dolayısıyla amaç fonksiyonunun değeri $0 < h_0 \leq 1$ olmalıdır. $h_0 = 1$ ise KVB etkindir, $h_0 < 1$ ise KVB etkin değildir. Etkin olmayan KVB'ler, etkin olanlara kıyasla daha düşük performans sergilerler yani buradaki skorlar görece etkinlik değerleridir.

Oransal model kavramsal olarak VZA modeli gibi düşünülebilir, ancak doğrusal ve konveks olmadığı için etkinlik skorlarının gerçek ölçümü için kullanılmaz. Aşağıdaki dönüşümler yardımıyla oransal programlama modeli bir doğrusal programlama modeline dönüştürülebilir.

$$\begin{aligned} \mu_r &= t u_r & (r = 1, \dots, s) \\ v_i &= t v_i & (i = 1, \dots, m) \end{aligned}$$

$$t = \frac{1}{\sum_{i=1}^m x_{i0}v_i} \quad (2.2)$$

2.1.1.2. CRS altında girdiye yönelik doğrusal model

(2.2)'deki dönüşümler ile CCR doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \max \quad & w_0(\mu) = \sum_{r=1}^s y_{r0}\mu_r \\ \text{kısıtlar} \quad & \sum_{r=1}^s y_{rj}\mu_r - \sum_{i=1}^m x_{ij}v_i \leq 0 \quad j = (1, \dots, n) \\ & \sum_{i=1}^m x_{i0}v_i = 1 \\ & \mu_r \geq \varepsilon \quad r = (1, \dots, s) \\ & v_i \geq \varepsilon \quad i = (1, \dots, m) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bu model n adet KVB için, KVB'lerin kendi parametreleri ile n defa çözülür. Bu modelin etkin olabilmesi için $\sum_{r=1}^s y_{r0}\mu_r = 1$ olmalıdır (Luptacik, 2010).

2.1.1.3. CRS altında girdiye yönelik zarflama modeli

(2.3) modelinin duali alınarak elde edilen modele girdiye yönelik zarflama modeli denir ve aşağıda gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \min \quad & g_0(\theta, s^-, s^+) = \theta - \varepsilon(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+) \\ \text{kısıtlar} \quad & \theta x_{i0} - \sum_{j=1}^n x_{ij}\lambda_j - s_i^- = 0 \quad i = (1, \dots, m) \\ & \sum_{j=1}^n y_{rj}\lambda_j - s_r^+ = y_{r0} \quad r = (1, \dots, s) \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j = (1, \dots, n) \\ & s_i^- \geq 0 \quad i = (1, \dots, m) \\ & s_r^+ \geq 0 \quad r = (1, \dots, s) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Girdiye yönelik zarflama modelinde amaç fonksiyonu, belirli bir çıktı düzeyi için, ilgili KVB'ye ait girdilerin radyal (daireysel) olarak ne kadar azaltılabileceğini gösterir. Modelde yer alan θ değişkeni $\sum_{i=1}^m x_{i0}v_i = 1$ kısıtına karşılık gelmekte ve k. KVB'nin çıktılarında azalma olmadan, girdi düzeyinde yapılabilecek azalma oranını göstermektedir ve büzülme katsayısı adını alır.

$\sum_{r=1}^s y_{rj} \mu_r - \sum_{i=1}^m x_{ij} \nu_i \leq 0$ kısıtına karşılık gelen değişken λ_j dir. λ_j j. KVB'nin aldığı yoğunluk değerini göstermektedir ve KVB'nin referans grubunda olup olmayacağını gösterir. Modelde yer alan s_i^- , KVB'nin gözlenen çıktıları üretmek için, i. girdiden kullandığı fazla miktarı diğer bir ifadeyle i. girdiye ait atıl değeri gösterir. s_r^+ ise KVB'nin r. çıktısına ait ulaşılması gereken çıktı miktarı ile gözlenen çıktı miktarı arasındaki farkı başka bir ifadeyle r. çıktıya ait atıl değeri gösterir (Lorcu, 2008).

- $\theta^0 = 1$
- $s_i^{-0} = s_r^{+0} = 0$ (tüm i ve r'ler için) \Leftrightarrow KVB etkindir.

Bu etkinliğe CCR etkinliği denir. Aksi takdirde;

i) $\theta^0 < 1$ ise KVB etkin değildir, bu durum girdilerin aşırı kullanımını şeklinde radyal etkinsizlikleri gösterir.

ii) $\theta^0 = 1$ ve aylak değişkenlerden en az biri 0'dan farklı ise KVB etkin değildir.

Girdiye yönelik zarflama modelleri sadece etkin olmayan karar birimlerini saptamaz. Aynı zamanda etkin kullanılmayan kaynakları ve miktarları gösterdiği gibi, etkin olmayan karar birimleri için referans kümesinin belirlenmesine de yardımcı olmaktadır. Etkin olmayan bir KVB için örnek alacağı referans kümesi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$R_k = \{j; \lambda_j^0 > 0, j = 1, \dots, n\}$$

Bir KVB'nin referans kümesinde yer alması için KVB'ye ait $\lambda_j^0 > 0$ olmak zorundadır. Etkin olan karar birimlerinin referans grubunda sadece kendileri vardır ve $\lambda_j^0 = 1$ 'dir. Etkin olmayan birimlerde ise $\lambda_j^0 = 0$ 'dır.

Referans kümesi, etkin olmayan karar birimlerini etkinlik sınırına taşır ve hedef girdi-çıkıtı seviyelerini temsil eden sanal karar birimini oluşturur. Bu sanal KVB, etkinliği ölçülen karar biriminin referans kümesinde yer alan etkin birimlerin doğrusal bir kombinasyonudur (Tarım, 2001).

- $\sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j^0 = \theta^0 x_{i0} - s_i^{-0} \rightarrow$ sanal girdi seviyesi
- $\sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j^0 = y_{r0} + s_r^{+0} \rightarrow$ sanal çıktı seviyesi

Modelin çözümünden elde edilen λ_j sadece referans kümesinin oluşturulmasında değil ölçeğe göre getiri durumunun belirlenmesinde de rol oynar (Cook ve Zhu, 2006).

- $\lambda_j^0 > 1$ ise ölçeğe göre azalan getiri
- $\lambda_j^0 = 1$ ise ölçeğe göre sabit getiri
- $\lambda_j^0 < 1$ ise ölçeğe göre artan getiri özelliği gösterdiği bilinmektedir.

2.1.2. Ölçeğe göre sabit getiri (CRS) altında çıktıya yönelik modeller

Çıktıya yönelik VZA modelleri, girdi seviyesinde herhangi bir değişimin mümkün olmadığı durumlarda, çıktı miktarlarının artırılması amacına yönelik olan modellerdir.

2.1.2.1. CRS altında çıktıya yönelik oran modeli

Girdiye yönelik oran modelinde KVB'ye ait etkinlik yüzde olarak gösterilmekte ve KVB'nin bu etkinliği maksimize etmek için girdi ve çıktılarına verdiği ağırlıklar belirlenmekteydi. Bu model ise etkinsizliğin minimizasyonunu ifade etmekte ve aşağıdaki gibi gösterilmektedir. Bir başka ifadeyle, değerlendirilen “KVB etkinsizliği ve diğer tüm etkinsizlikler 1’den büyük olamaz” kısıtı altında sanal girdinin sanal çıktıya oranı minimize edilmektedir (Luptacik, 2010).

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z_0(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^m x_{i0} v_i}{\sum_{r=1}^s y_{r0} u_r} \\
 \text{kısıtlar} \quad & \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij} v_i}{\sum_{r=1}^s y_{rj} u_r} \geq 1 \quad j = (1, \dots, n) \\
 & u_r \geq \varepsilon \quad r = (1, \dots, s) \\
 & v_i \geq \varepsilon \quad i = (1, \dots, m)
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Burada yer alan değişkenlerin tanımları ve anlamları (2.1) modeli ile aynıdır.

Modelin çözülmesiyle elde edilen amaç fonksiyonunun değeri z_0^* ile gösterilsin. (2.5) modeli, (2.1) modelinin ters ölçü şekli olduğundan, h_0^* ve z_0^* arasında $z_0^* = \frac{1}{h_0^*}$ ilişkisi vardır.

2.1.2.2. CRS altında çıktıya yönelik doğrusal model

(2.5) modelinin oransal programlama modeli şeklinde olması, bu modellerin çözümünde zorluklar oluşturduğundan, model doğrusal programlama modeline dönüştürülür.

$$\begin{aligned} \min \quad & f_0(v) = \sum_{i=1}^m x_{i0} v_i \\ \text{kısıtlar} \quad & -\sum_{r=1}^s y_{rj} \mu_r + \sum_{i=1}^m x_{ij} v_i \geq 0 \quad j = (1, \dots, n) \\ & \sum_{r=1}^s y_{r0} \mu_r = 1 \\ & \mu_r \geq \varepsilon \quad r = (1, \dots, s) \\ & v_i \geq \varepsilon \quad i = (1, \dots, m) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Bu model her bir KVB için, karar birimlerinin kendi parametreleriyle hazırlanıp n defa çözülür. Modelin çözümünden elde edilen değerler (f_0^*, μ_r^*, v_i^*) ile gösterilsin. Amaç fonksiyonunun değeri yani $1 \leq f_0^* < \infty$ 'dur. Bu modelde f_0^* ın alabileceği minimum değer 1'dir. $f_0^* = 1$ olması KVB'nin etkin olduğu anlamına gelirken, $f_0^* > 1$ olması durumunda ise etkin olmadığı yargısına varılır.

2.1.2.3. CRS altında çıktıya yönelik zarflama modeli

(2.6) modelinin duali alınarak elde edilen modele çıktıya yönelik zarflama modeli denir ve aşağıda gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} \max \quad & q_0(\varphi, s^+, s^-) = \varphi + \varepsilon(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^-) \\ \text{kısıtlar} \quad & \varphi y_{r0} - \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j + s_r^+ = 0 \\ & \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j + s_i^- = x_{i0} \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j = (1, \dots, n) \\ & s_r^+ \geq 0 \quad r = (1, \dots, s) \\ & s_i^- \geq 0 \quad i = (1, \dots, m) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Çıktıya yönelik zarflama modelinde amaç fonksiyonu belirli bir girdi düzeyi için, ilgili KVB'ye ait çıktıların ne kadar arttırılabileceğini göstermektedir.

Modelde yer alan φ değişkeni $\sum_{r=1}^s y_{r0}\mu_r = 1$ kısıtına karşılık gelmekte ve KVB'nin girdilerinde herhangi bir artış yapılmadan, çıktı düzeyinde yapılabilecek artış oranını göstermekte ve genişleme katsayısı adını almaktadır.

$-\sum_{r=1}^s y_{rj}\mu_r + \sum_{i=1}^m x_{ij}v_i \geq 0$ kısıtına karşılık gelen değişken λ_j dir. λ_j j. KVB'nin aldığı yoğunluk değerini göstermekte, KVB'nin referans grubunda yer alıp almayacağını da belirlemektedir (Lorcu, 2008). Modelin çözümünden elde edilen değişkenlerin optimal değerleri (φ^* , λ_j^* , s_i^{-*} , s_r^{+*}) ile gösterilsin.

- $\varphi^* = 1$
- $s_i^{-*} = s_r^{+*} = 0$ (tüm i ve r'ler için) \Leftrightarrow KVB etkindir.

2.1.3. Ölçeğe göre değişken getiri altında (VRS) girdiye yönelik modeller

Banker vd (1984), tarafından geliştirilen bu modeller BCC modeli olarak adlandırılır ve CCR modellerinden farkı sabit ölçek yerine değişken ölçek kullanarak, göreceli etkinlik ölçümü yapar. CCR modellerinde olduğu gibi BCC modellerini, girdiye ve çıktıya yönelik oransal, doğrusal ve zarflama olarak sınıflandırabiliriz.

2.1.3.1. VRS altında girdiye yönelik oran modeli

$$\begin{aligned}
 \max \quad & h_0(u, v, u_0) = \frac{\sum_{r=1}^s y_{r0}u_r + u_0}{\sum_{i=1}^m x_{i0}v_i} \\
 \text{kısıtlar} \quad & \frac{\sum_{r=1}^s y_{rj}u_r + u_0}{\sum_{i=1}^m x_{ij}v_i} \leq 1 \quad j = (1, \dots, n) \\
 & u_r \geq \varepsilon \quad r = (1, \dots, s) \\
 & v_i \geq \varepsilon \quad i = (1, \dots, m) \\
 & u_0 \text{ serbest}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.1.3.2. VRS altında girdiye yönelik doğrusal model

$$\begin{aligned}
 \max \quad & w_0(\mu, z) = \sum_{r=1}^s y_{r0}\mu_r + \mu_0 \\
 \text{kısıtlar} \quad & \sum_{r=1}^s y_{rj}\mu_r - \sum_{i=1}^m x_{ij}v_i + \mu_0 \leq 0 \quad j = (1, \dots, n) \\
 & \sum_{i=1}^m x_{i0}v_i = 1 \\
 & \mu_r \geq \varepsilon \quad r = (1, \dots, s)
 \end{aligned}$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i = (1, \dots, m)$$

$$\mu_0 \text{ serbest} \quad (2.9)$$

2.1.3.3. VRS altında girdiye yönelik zarflama modeli

$$\begin{aligned} \min \quad & g_0(\theta) = \theta - \varepsilon(\sum_{i=1}^m s_i^- + \sum_{r=1}^s s_r^+) \\ \text{kısıtlar} \quad & \theta x_{i0} - \sum_{j=1}^n x_{ij} \lambda_j - s_i^- = 0 \\ & \sum_{j=1}^n y_{rj} \lambda_j - s_r^+ = y_{r0} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\ & \lambda_j \geq 0 \quad j = (1, \dots, n) \\ & s_i^- \geq 0 \quad i = (1, \dots, m) \\ & s_r^+ \geq 0 \quad r = (1, \dots, s) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Doğrusal programlama dualite teoremine göre, doğrusal programdaki μ_0 bağımsız değişkeni, zarf problemindeki $\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1$ artığı ile ilişkili dual değişkendir. CCR modellerinde bu kısıt yoktur ve BCC modellerinden temel farkı budur.

BCC modeli bu kısıtla birlikte, üretim olanakları kümesinin dışbükey (konveks) parçalı bir doğru tarafından zarflandığını ve parçalı doğrusal bir üretim sınırının meydana geleceğini göstermektedir. Dolayısıyla BCC modeli, KVB'lerin konveks bir kombinasyonunu gösterir ve BCC etkinliği “yerel salt teknik etkinlik” olarak adlandırılır. Daha önce tanımladığımız CCR etkinliği ise toplam etkinlik olarak adlandırılır (Luptacik, 2010).

Bir KVB'nin BCC etkin olabilmesi için $\Leftrightarrow \theta^0 = 1$ ve $s_i^{-0} = s_r^{+0} = 0$ (tüm i ve r 'ler için) olmalıdır.

2.1.4. Ölçeğe göre değişken getiri altında (VRS) çıktıya yönelik modeller

Çıktıya yönelik CCR modellerinde olduğu gibi girdi düzeyini değiştirmeden, çıktı miktarını artırmaya yönelik modellerdir.

2.1.4.1. VRS altında çıktıya yönelik oran modeli

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z_0(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^m x_{i0}v_i + v_0}{\sum_{r=1}^s y_{r0}u_r} \\
 \text{kısıtlar} \quad & \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij}v_i + v_0}{\sum_{r=1}^s y_{rj}u_r} \geq 1 \quad j = (1, \dots, n) \\
 & u_r \geq \varepsilon \quad r = (1, \dots, s) \\
 & v_i \geq \varepsilon \quad i = (1, \dots, m) \\
 & v_0 \text{ serbest}
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.1.4.2. VRS altında çıktıya yönelik doğrusal model

$$\begin{aligned}
 \min \quad & f_0(v, v_0) = \sum_{i=1}^m x_{i0}v_i + v_0 \\
 \text{kısıtlar} \quad & -\sum_{r=1}^s y_{rj}\mu_r + \sum_{i=1}^m x_{ij}v_i + v_0 \geq 0 \quad j = (1, \dots, n) \\
 & \sum_{r=1}^s y_{r0}\mu_r = 1 \\
 & \mu_r \geq \varepsilon \quad r = (1, \dots, s) \\
 & v_i \geq \varepsilon \quad i = (1, \dots, m) \\
 & v_0 \text{ serbest}
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.1.4.3. VRS altında çıktıya yönelik zarflama modeli

(2.12) modelinin duali olan çıktıya yönelik BCC zarflama modeli aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & q_0(\varphi, s^+, s^-) = \varphi + \varepsilon(\sum_{r=1}^s s_r^+ + \sum_{i=1}^m s_i^-) \\
 \text{kısıtlar} \quad & \varphi y_{r0} - \sum_{j=1}^n y_{rj}\lambda_j + s_r^+ = 0 \quad r = (1, \dots, s) \\
 & \sum_{i=1}^m x_{ij}\lambda_j + s_i^- = x_{i0} \quad i = (1, \dots, m) \\
 & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \\
 & \lambda_j \geq 0 \quad j = (1, \dots, n) \\
 & s_r^+ \geq 0 \quad r = (1, \dots, s) \\
 & s_i^- \geq 0 \quad i = (1, \dots, m)
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Bir KVB'nin toplam etkinliği (TE), salt teknik etkinliği (STE) ile gösterilsin.

Bu durumda ilgili KVB'nin ölçek etkinliği ($\ddot{O}E$); $\ddot{O}E = \frac{TE}{STE}$ ile ifade edilir.

Yani, ölçek etkinliği $= \frac{CCR \text{ etkinliği}}{BCC \text{ etkinliği}}$ şeklindedir.

CCR ve BCC etkinlik skorlarının karşılaştırılması; bir KVB'nin etkinliğini, salt teknik etkinlik ve ölçek etkinliği içinde ayırtmamıza fırsat verir. Sonuç olarak; BCC modellerinin yoğunluk vektörü λ karar değişkenlerinin toplamının 1'e eşit olmalarıyla kısıtlanması sonucunda CCR modelindeki KVB'nin ölçek etkin olma zorunluluğu ortadan kalkar. Dolayısıyla bir KVB'nin CCR etkin olabilmesi için hem teknik etkin hem de ölçek etkin olması gerekirken; BCC etkin olabilmesi için sadece teknik etkin olması yeterlidir (Kecek, 2010).

2.2. VZA Yönteminde İstenmeyen Çıktı Faktörü

VZA, birden fazla çıktı üretmek için birden fazla girdiyi kullanan, üretimin etkinlik ölçümüyle ilgilenen bir yöntemdir. Normal şartlar altında, yüksek etkinliğe ulaşmak için daha az girdi kullanarak daha çok çıktı üretmek amaçlanmıştır. Ancak üretim sürecinde, bir çıktının oluşması istenmeyen bir faktör olabilir. İstenmeyen çıktı durumunda, aynı miktar girdi ile daha fazla çıktı üretimi istenmez (Kao, 2017). İstenmeyen çıktının bir örneği, bir üretim işleminden kaynaklanan kirliliktir. Enerji üretiminde ortaya çıkan hava ve su kirliliği istenmeyen çıktılara tipik bir örnektir. İstenmeyen çıktılar etkinlik ölçümünde uzun zamandır tartışılmıştır. Girdi-çıkı değişimi, veri dönüşümü, zayıf kullanılıp atılabilirlik, aylak temelli ölçümler gibi birçok yöntem geliştirilmiştir. Bu kısımda veri dönüşümünden bahsedilecektir.

2.2.1. Veri dönüşümü

Bu yöntemde, istenmeyen faktörleri istenen yöne uyacak şekilde dönüşüm yapıp daha sonra VZA ile etkinlik ölçümü yapmak amaçlanmıştır. Ters dönüşüm, negatif dönüşüm, değiştirilmiş negatif dönüşüm gibi farklı biçimlerle veriye dönüşüm yapılır.

Ters dönüşümde matematiksel olarak, çıktı değişkenlerinin inversi alınarak istenmeyen faktörlerin istenen yöne sahip olması sağlanır (Golany ve Roll, 1989).

Negatif dönüşümde ise, büyük sayıları küçük sayılarla yer değiştirmek için çıktı değişkenlerinin negatifi alınarak, etkinlik analizi yapılır. Bu dönüşüm doğrusal ve simetrik olup, ideal gibi gözükse de VZA ile etkinlik analizinde modeli daha karmaşık hale getirebilir (Kao, 2017).

VZA modellerinde negatif sayıları kullanmak zor olduğundan etkinliği ölçmek için, negatif dönüşüm uyguladığımız değişkenlere yeterince büyük bir sabit ekleyip

pozitif hale getirmekle, verilere değiştirilmiş negatif dđnüşüm uygularız. Negatif sayılara sabit eklendiğinde, etkinlik sınırı negatif kadrandan pozitif kadrana kayar, ancak etkinlik sınırı değişmez (Seiford ve Zhu, 2002).



3. NETWORK VERİ ZARFLAMA ANALİZİ

Network Veri Zarflama Analizi, her bir karar verme birimini bir süreçler ağı olarak tanımlar, diğer bir ifadeyle iç sistem yapısını dikkate alır. Geleneksel veri zarflama analizinde, girdileri çıktılara dönüştüren tek bir sürecin varlığı söz konusudur. Färe ve Grosskopf (2000) geleneksel VZA modelinin, araştırmacı için gerekli olan bir soyutlama seviyesine kadar teknolojiyi tanımladığını, ancak teknolojinin iç işlevlerini oluşturan alt teknolojilerin açıklanmasında eksik kaldığını belirtmişlerdir. Bu alt teknolojiler genellikle “kara kutu” olarak nitelendirilip, içlerinde ne olduğu hakkında bilgi yoktur. VZA ile performans ölçümü, üretim hakkında “kara kutu” olarak düşünmeye dayanmaktadır. Bunun anlamı, girdiler bu kutuda çıktılara dönüşür ancak gerçek dönüşüm süreci genellikle açık bir şekilde modellenmemiştir.

Network VZA’da, tüketilen ve üretilen ara ürünlere ek olarak, kendi girdilerine sahip ve kendi çıktılarını üreten çok sayıda aşama söz konusudur. Bu ara ürünler bazı aşamalar için girdiyken diğerleri için çıktı olarak tanımlanmaktadır. Alt teknolojilerin özellikleri, üretim sürecini birlikte oluşturan girdi tahsisi ve ara ürünlerin açık bir şekilde incelenmesini sağlar. Alt teknolojilerin ağlara birleştirilmesi, geleneksel VZA modellerinin ele alamayacağı sorunların analiz edilmesine yönelik bir yaklaşım sağlar (Färe vd, 2007).

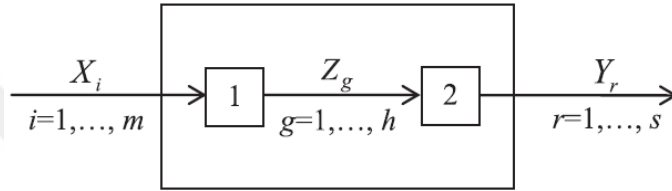
VZA etkinlik ölçümünde, içerisinde alt süreç ve bağlantılar bulunduran yapıları kara kutu olarak ele alması ve birimleri tek bir düğüm olarak değerlendirmesi, etkinsizliğin kaynağını bulmayı zorlaştırmaktadır. Etkinsizliğin nedeni alt süreçlerden bir ya da daha fazlası olabilir. Dolayısıyla etkinliği hesaplanan birimlerin çoğunun alt düğümlerden ve bu düğümler arasındaki girdi/çıktı ilişkilerinde karmaşık yapıya sahip olması, network VZA modelinin ortaya çıkmasına neden olmuştur (Erturan, 2012).

Network VZA’nın temelleri Färe ve Grosskopf (1996) tarafından atılmıştır. Kara kutu olarak adlandırılan yapıyı inceleyerek, birçok model ortaya koymuşlardır. İlk tanımlanan Network VZA modelleri, bağımsız olarak her aşama için geleneksel bir VZA modeli uygulamıştır ancak aşamalar arasındaki sürekliliği dikkate almayan radyal tabanlı modellerdir (Meza vd, 2018). Bu modeller, üretim olanakları kümesi ve geleneksel VZA’yı temel alan CCR ve BCC modellerini kullanarak radyal etkinlik ölçümü yapar. Radyal modellerde girdi ve çıktıların oransal değişimlere uğradığı

varsayılır. Daha sonra yapılan çalışmalarla aylak tabanlı modeller, dinamik modeller gibi birçok model geliştirilmiştir.

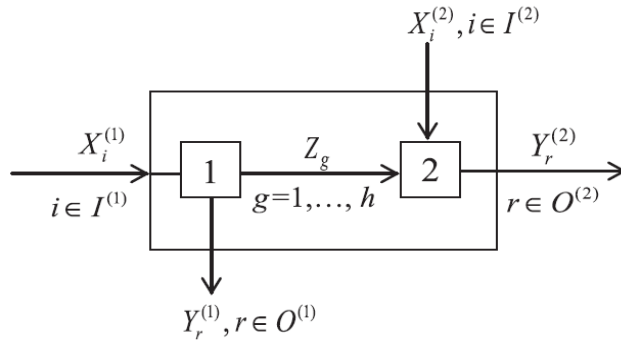
3.1. Temel Network (Ağ) Yapıları

Ağ üretim sistemleri, farklı yapılara sahiptir ve etkinlik ölçümü genellikle sistemin yapısına bağlı olarak değişir. Ağ sisteminin en çok tartışılan ve en basit yapısı iki aşamalı sistemlerdir. İki aşamalı sistem ikinci süreçte tüm nihai çıktıları (Y_r) üretmek üzere tüm girdileri (X_i), ara ürünleri (Z_g) üretmek için birinci sürece verir. Bu sistem Şekil 3.1'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 3.1. İki aşamalı sistem (Kao, 2014)

Bu yapının bir uzantısı, ilk sürecin bazı çıktılarının sistemin nihai çıktısı haline geldiği ve ikinci sürecin dışarıdan temin edilen girdileri tükettiği genel iki aşamalı sistemlerdir. Genel iki aşamalı sistem, çoklu aşamalara genelleştirilebilir. Bu sistem Şekil 3.2'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 3.2. Genel iki aşamalı sistem (Kao, 2014)

Bütün bu sistemler, seri yapıya sahiptir. Bu yapının aksine, sistemde bağımsız olarak çalışan birçok bölümün her biri, dışarıdan temin edilen bir dizi girdi tüketen ve bir dizi nihai çıktı üreten paralel yapılardır.

Ağ yapılarının temel amacı, bileşen süreçleri dikkate alarak etkinlik ölçümü yapmaktır. Paralel yapılarda her bir bileşen bölümü, aynı veya farklı işlevleri yerine getirmektedir. Birincisi çok bileşenli, ikincisi ise çok fonksiyonlu bir sistem olarak adlandırılır. Bazı bölümler paralel yapılar ile bir dizi alt süreçten oluşur. Hiyerarşik olarak adlandırılan bu sistem, paralel yapının iki veya daha fazla seviyeye sahip olmasıdır. Eğer tek bir seviye varsa, merkez ve alt birimler arasında etkileşim yoksa, sistem paralel olarak görülebilir (Kao, 2017).

Bazı sistemler ise ne seri ne de paralel yapıya uygundur. Bu durumda, seri ve paralel yapıyı birlikte barındıran karma yapılar kullanılır.

İki aşamalı sistem, genel çok aşamalı sistem, paralel sistem, karma sistem, hiyerarşik sistem yapılarında etkinlik, statik olarak ölçülür. Statik modellerde bir ağ sonlu, bir dizi alt teknolojilerden oluşur. Statik modeller, ara ürünlerin tahsisini analiz etmek için oldukça kullanışlıdır. Zaman söz konusu olduğunda dinamik yapılar tercih edilir. Dinamik yapılar tek periyodun tekrarı ile ilgilidir. Dinamik modelde, sürecin belirli bir zaman periyodundaki (t) bazı çıktıları, bir sonraki periyotta ($t + 1$) sürecin girdileri olarak kullanılır (Färe vd, 2007).

Sonuç olarak, network VZA modeli söz konusu ağın yapısına bağlı olarak değişir ve geleneksel VZA'da olduğu gibi standart bir formu yoktur. Bir ağ sistemi için temelde, seri ve paralel olmak üzere iki yapı söz konusudur. Her iki yapı için sistem etkinliği (etkinsizliği), bileşen süreçlerin etkinliklerine (etkinsizliklerine) ayrıştırılabilir. Bu bölümde seri, paralel ve karma yapılar üzerinde durulacaktır.

3.1.1. Seri yapılar

Seri yapı, birbirine bağlı bir dizi süreçten bahseder. Sırasıyla her süreç, önceki süreçle üretilen girdileri ve ara ürünleri tüketir ve daha sonra kullanılmak üzere çıktılar ve ara ürünler üretir (Kao, 2014).

Seiford ve Zhu (1999) iki süreçten oluşan bir sistem için, her sürecin etkinliğini bağımsız olarak hesaplarken geleneksel VZA modelini kullanmıştır. Kao ve Hwang (2008), ilişkisel bir model geliştirmiştir. İki sürecin seri ilişkisini dikkate alarak sistemin etkinliğini hesaplamışlardır. İlişkisel modelde sistem etkinliği, iki süreç etkinliğinin ürünüdür. Bunun sonucu olarak ilişkisel modeller, ikiden fazla süreçten oluşan genel seri sistemlerine genişletilebilir.

X_{ij} ve Y_{rj} sırasıyla bir sistemin girdileri ve çıktıları olmak üzere, bu sistem h-tane seri sürece sahip olsun.

j -nci KVB (KVB_j) için, $Z_{pj}^{(t)}$, t sürecin ($t = 1, \dots, h - 1$) p -inci ($p = 1, \dots, q$) ara ürünü olsun. t sürecin ara ürünleri, t sürecin çıktıları ve aynı zamanda $t + 1$ sürecin girdileridir. Burada dikkat edilirse son süreç h 'ın ara ürünleri, sistemin çıktıları olmaktadır. Ara ürün sayısı (q) her süreç için farklı olabilir. Burada matematiksel gösterimin sade ve anlaşılır olması için tüm süreçler aynı alınmıştır. $w_p^{(t)}$, t sürecin p -inci ara ürünüyle ilişkili bir çarpan olarak tanımlanır. (KVB_k)'nin sistem etkinliği, Kao ve Hwang (2008) tarafından geliştirilen modelden hesaplanarak aşağıdaki gibi elde edilir (Kao, 2009a).

$$E_k = \max \sum_{r=1}^s u_r Y_{rk} \quad (3.1)$$

$$\text{kısıtlar; } \sum_{i=1}^m v_i X_{ik} = 1 \quad (3.2)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

$$\sum_{p=1}^q w_p^{(1)} Z_{pj}^{(1)} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

$$\sum_{p=1}^q w_p^{(t)} Z_{pj}^{(t)} - \sum_{p=1}^q w_p^{(t-1)} Z_{pj}^{(t-1)} \leq 0, \quad t = 2, \dots, h - 1, j = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{p=1}^q w_p^{(h-1)} Z_{pj}^{(h-1)} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

$$u_r, v_i, w_p^{(t)} \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m, \quad p = 1, \dots, q, \quad t = 1, \dots, h - 1 \quad (3.7)$$

Burada (3.3) kısıtı sisteme karşılık gelirken, (3.4), (3.5), (3.6) kısıtları h -tane sürece karşılık gelir. Bir KVB'nin süreç kısıtları toplamı aynı KVB'nin sistem kısıtına eşittir. Dolayısıyla sistem kısıtları ihmal edilebilir. Temel olarak gereken kısıtlama sayısı bu modelde, sistemdeki süreç sayısı ile KVB sayısının çarpımına eşittir.

u_r^*, v_i^* ve $w_p^{(t)*}$ yukarıdaki modelden elde edilen optimal çarpanları göstermek üzere, (KVB_k) için her bir sürecin etkinliği aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$E_k^{(1)} = \sum_{p=1}^q w_p^{(1)*} Z_{pk}^{(1)} / \sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik}$$

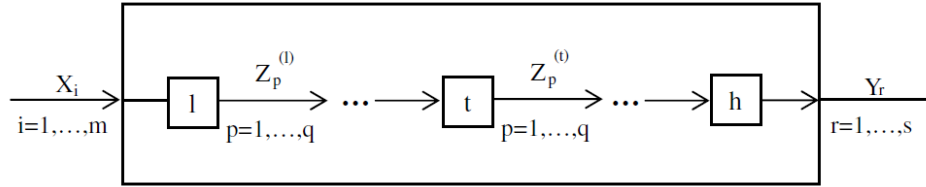
$$E_k^{(t)} = \sum_{p=1}^q w_p^{(t)*} Z_{pk}^{(t)} / \sum_{p=1}^q w_p^{(t-1)*} Z_{pk}^{(t-1)}, \quad t = 2, \dots, h - 1 \quad (3.8)$$

$$E_k^{(h)} = \sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rk} / \sum_{p=1}^q w_p^{(h-1)*} Z_{pk}^{(h-1)}$$

$t = 1, \dots, h$ için $E_k^{(t)} = \sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rk} / \sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik}$, E_k sisteminin etkinliğidir. Bir KVB'nin etkin olması için tüm süreçlerin etkin olması gerekir. Etkin olmayan çok süreç varsa sistem etkinliği düşük iken, tüm süreçler yüksek etkinliğe sahipse sistem etkinliği de yüksek olacaktır (Kao, 2009a).

Modelde, (3.4), (3.5), (3.6) süreç kısıtları ortadan kaldırılırsa, model geleneksel CCR modeline dönüşür. Daha fazla kısıta (süreçlerle ilgili) sahip olduğu için seri yapıdan elde edilen etkinlik değeri E_k , CCR modelinden elde edilen E_k^{CCR} etkinlik değerini geçemez. Modelde E_k^{CCR} , sistem etkinliğinin ulaşabileceği en büyük sayıdır.

Yukarıda anlattığımız seri yapıyı, Şekil 3.3'deki gibi gösterebiliriz.



Şekil 3.3. Seri yapı (Kao, 2009a)

3.1.2. Paralel yapılar

Ağ sistemi temel yapılardan olan paralel yapı, paralel süreçlerden oluşan sistemlerdir. Paralel sisteme verilebilecek bir örnek, bölümleri ile birlikte bir üniversite olabilir. Tüm üniversitenin etkinliği, kullanılan toplam girdiler ve tüm bölümler tarafından üretilen toplam çıktılarla hesaplanabilir. Her bir bölüm, diğer üniversitelerin eşdeğer bölümleri ile ayrıca karşılaştırılarak, hesaplanan bir etkinliğe sahip olabilir. Teorik olarak tüm bölümleri etkin olan bir üniversite, etkindir. Ancak bir üniversitenin her bölümünün en iyi performansa sahip olmasını beklemek mümkün değildir. Bunun önemi yoktur, çünkü etkinlik ölçümünün nihai hedefi etkisizlik kaynaklarını bulmak ve girdilerin daha etkin kullanıldığı uygun iyileştirmeler yapmaktır. (Kao ve Huwang, 2010).

Kao (2009a), paralel bağlı h süreçten oluşan bir sistem için, bileşen süreçlerin ve sistemin aynı anda etkisizliğini hesaplayan bir VZA modeli geliştirmiştir. Her bir KVB_j için, t sürecin i -nci girdisi $X_{ij}^{(t)}$ ve r -inci çıktısı $Y_{rj}^{(t)}$ olsun. Tüm süreçler için i -nci girdilerinin toplamı, bir KVB'nin i -nci sistem girdisine eşittir. Yani $\sum_{t=1}^h X_{ij}^{(t)} =$

X_{ij} biçimindedir. Çıktılar için de aynı durum söz konusu olup, $\sum_{t=1}^h Y_{rj}^{(t)} = Y_{rj}$ biçimindedir.

Tüm süreçler gözönüne alındığında, KVB_k 'nın sistem etkinliği aşağıdaki ilişkişel model ile hesaplanır.

$$E_k = \max \sum_{r=1}^s u_r Y_{rk} \quad (3.9)$$

$$\text{kısıtlar; } \sum_{i=1}^m v_i X_{ik} = 1 \quad (3.10)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rk} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ik} + s_k = 0 \quad (3.11)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rk}^{(t)} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ik}^{(t)} + s_k^{(t)} = 0, \quad t = 1, \dots, h \quad (3.12)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq k \quad (3.13)$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj}^{(t)} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij}^{(t)} \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad j \neq k, \quad t = 1, \dots, h \quad (3.14)$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1, \dots, s, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.15)$$

Modelde (3.13) kısıtı sisteme, (3.14) kısıtı ise t sürecine aittir. (3.11) ve (3.12) sırasıyla (3.13) ve (3.14) kısıtlarının k -ıncı kısıtlarıdır. Bu kısıtlar s_k ve $s_k^{(t)}$ aylak değişkenleriyle ilişkilidir. (3.12) ve (3.14)'teki tüm h süreçlerinin kısıtları toplamı, sırasıyla (3.11) ve (3.13) sistem kısıtlarına eşit olur ve $\sum_{t=1}^h s_k^{(t)} = s_k$ biçimindedir. Bu yüzden (3.11) ve (3.13) sistem kısıtları ihmal edilebilir. Ayrıca sistemin etkinsizlik aylak değişkeni s_k , sistem etkinliği E_k 'nin tamamlayıcısıdır. Süreç etkin değilse, sürecin etkinsizlik aylak değişkeni $s_k^{(t)}$, sürecin etkinliği $E_k^{(t)}$ 'nin tamamlayıcısı olmak zorunda değildir. Bunun sebebi,

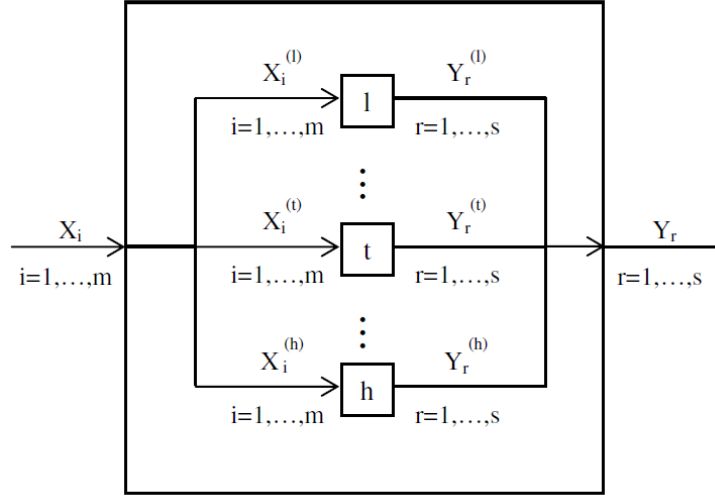
$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rk}^{(t)} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ik}^{(t)} + s_k^{(t)} = 0 \text{ kısıtının,}$$

$(\sum_{r=1}^s u_r Y_{rk}^{(t)} / \sum_{i=1}^m v_i X_{ik}^{(t)}) - 1 + (s_k^{(t)} / \sum_{i=1}^m v_i X_{ik}^{(t)}) = 0$ kısıtına eşit olmasıdır.

Seri sistemde olduğu gibi paralel sistemde de, tüm süreçler etkin ise sistem etkindir. Paralel VZA modeli için kısıtların sayısı, KVB sayısı ile sistemdeki süreç sayısının çarpımına eşittir. Eğer paralel sistemdeki bir süreç etkinse, sistem üretim için tek bu süreci kullanmayı tercih edecektir. CCR modeli ölçeğe göre sabit getiri varsayımına sahip olduğundan bu etkin süreçler, üretim için tüm girdileri tüketirse sistem etkin olacaktır. Modelden (3.12) ve (3.14) kısıtlarını attığımızda, model CCR

modeline dönüşür. CCR modelinden elde ettiğimiz etkinlik değeri E_k^{CCR} sistem etkinliği E_k 'nin alabileceği en büyük değerdir (Kao, 2009a).

Yukarıda anlattığımız paralel yapıyı, Şekil 3.4'deki gibi gösterebiliriz.



Şekil 3.4. Paralel yapı (Kao, 2009a)

3.1.3. İlişkisel (Karma) yapılar

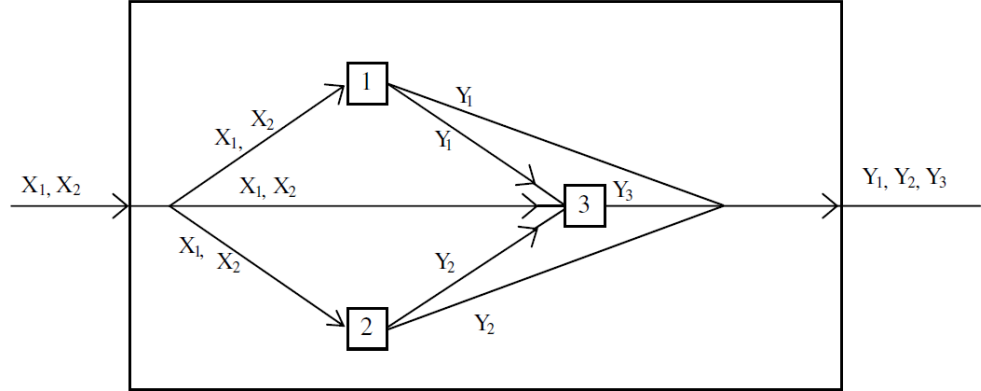
İlişkisel yapı, sistemin her aşamasının paralel olduğu bir seri sistemden oluşur. Seri ve paralel yapılara dayanarak sistem etkinliği, süreç etkinliğinin karmaşık bir ilişkisine ayrıştırılır. Bir ağ sisteminin seri-paralel gösterimi tek değildir. Bu yaklaşım, sistem için olağan gereksinime ek olarak, tüm süreçler için toplam çıktının, toplam girdiye eşit ya da daha az olmasını gerektirir (Kao ve Hwang, 2010).

Şekil 3.5, üç süreçten oluşan bir ağ sistemidir. Sistemin girdileri X_1 ve X_2 , çıktıları ise Y_1 , Y_2 ve Y_3 'tür. Süreç-1, Y_1 üretmek için bir miktar X_1 ve X_2 kullanır, burada Y_1 'in bir kısmı Süreç-3 için korunur. Süreç-2, Y_2 üretmek için belirli bir miktar X_1 ve X_2 kullanır, benzer şekilde Y_2 'nin bir kısmı Süreç-3 için korunur. Sırasıyla Süreç-1 ve Süreç-2 tarafından üretilen bir kısım Y_1 ve Y_2 ile birlikte Süreç-3, Y_3 üretmek için X_1 ve X_2 'nin kalan miktarını kullanır.

$X_{ij}^{(t)}$, $t = 1, \dots, 3$, KVB_j için t sürecin i -nci girdisi olsun. Üç sürecin girdilerinin toplamının, sistemin girdisine eşit olduğu aşıkardır. Bu durum aşağıdaki biçimde gösterilir.

$$X_{ij}^{(1)} + X_{ij}^{(2)} + X_{ij}^{(3)} = X_{ij} \quad , \quad i = 1,2 \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

Süreç-1'in çıktısı $Y_1^{(0)}$ ve $Y_1^{(I)}$ olarak ayrılır. $Y_1^{(0)}$ sistemin nihai çıktısı iken, $Y_1^{(I)}$ ise Süreç-3 tarafından üretim için kullanılan girdi miktarıdır. Süreç-2'in çıktısı $Y_2^{(0)}$ ve $Y_2^{(I)}$ olarak ayrılır. Benzer şekilde, $Y_2^{(0)}$ sistemin nihai çıktısı iken, $Y_2^{(I)}$ ise Süreç-3 tarafından üretim için kullanılan girdi miktarıdır.



Şekil 3.5. Üç süreçli bir ağ yapısı (Kao, 2009a)

u_r , r - inci çıktı ile ilgili çarpan ve v_i ise i - nci girdi ile ilgili çarpan olsun. KVB_k 'nin sistem etkinliğini hesaplamada sistem için gereken geleneksel kısıtların yanısıra, toplam çıktının toplam girdiyi aşmayacak sınır şartını sağlaması gerekir. Bu durumu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$E_k = \max(u_1 Y_{1k}^{(0)} + u_2 Y_{2k}^{(0)} + u_3 Y_{3k}) \quad (3.16)$$

$$\text{kısıtlar; } v_1 X_{1k} + v_2 X_{2k} = 1 \quad (3.17)$$

$$(u_1 Y_{1j}^{(0)} + u_2 Y_{2j}^{(0)} + u_3 Y_{3j}) - (v_1 X_{1j} + v_2 X_{2j}) \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

$$u_1 Y_{1j} - (v_1 X_{1j}^{(1)} + v_2 X_{2j}^{(1)}) \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (3.19)$$

$$u_2 Y_{2j} - (v_1 X_{1j}^{(2)} + v_2 X_{2j}^{(2)}) \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (3.20)$$

$$u_3 Y_{3j} - (v_1 X_{1j}^{(3)} + v_2 X_{2j}^{(3)} + u_1 Y_{1j}^{(I)} + u_2 Y_{2j}^{(I)}) \leq 0, j = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, \quad r = 1,2,3, \quad i = 1,2 \quad (3.22)$$

Modelde (3.18) kısıtı sisteme, (3.19), (3.20), (3.21) kısıtları ise sistemin üç sürecine aittir. Eklenen süreç kısıtları nedeniyle, ilişkisel network VZA modeli,

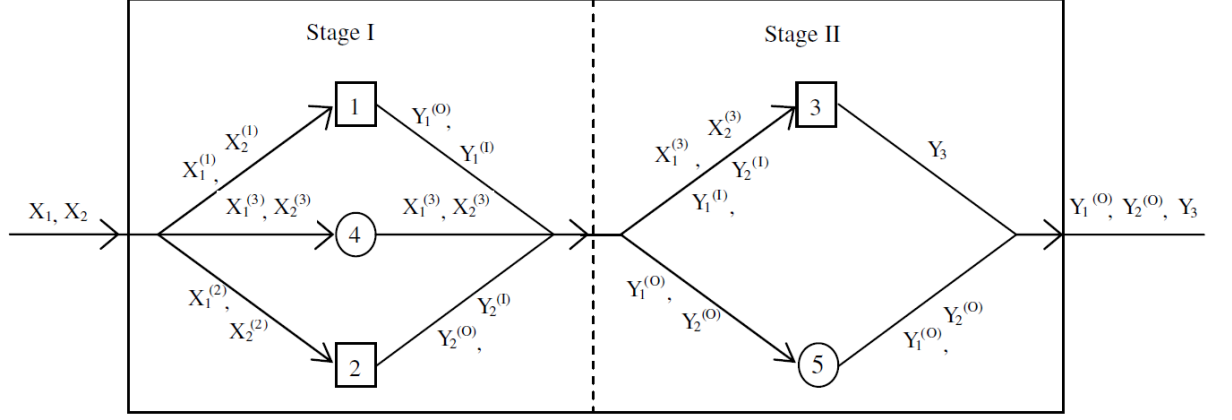
geleneksel VZA modelinden daha bağlayıcıdır. Bundan dolayı bu modelden hesaplanan etkinlik değeri, geleneksel VZA'dan elde edilen etkinlik değerini geçemez. Ayrıca, bu ek kısıtlamalar sistemden ziyade süreçlerden kaynaklandığından, KVB'lerin sistem etkinliğinin 1 olması beklenemez. Bu durum seri ve paralel yapılar için de geçerlidir. Modelden (3.19), (3.20) ve (3.21) süreç kısıtlarını attığımızda, model geleneksel CCR modeli haline dönüşür. (Kao, 2009a).

VZA modelinin doğrusal ve zarflama olmak üzere iki formu vardır. Model (3.16) doğrusal formudur, Färe vd (2007) tarafından geliştirilen ise zarflama formudur. Bu ilişkiyel modelin altında yatan ilke, bir faktörün çarpanının, nerede ve nasıl kullanıldığına bakılmaksızın her zaman aynı olduğu yönündedir. Örneğin X_1 girdisi, Süreç-1 tarafından $X_{1j}^{(1)}$, Süreç-2 tarafından $X_{1j}^{(2)}$ ve Süreç-3 tarafından $X_{1j}^{(3)}$ olarak kullanıldığına bakılmaksızın, aynı v_1 çarpanına sahiptir. Benzer şekilde Süreç-1'in çıktısı, $Y_{1j}^{(o)}$ sistemin nihai çıktısı ve $Y_{1j}^{(l)}$ Süreç-3'ün girdisi olduğuna bakılmaksızın aynı u_1 çarpanına sahiptir. Öte yandan, Färe vd (2007) tarafından geliştirilen modelde farklı çarpanlar kullanılır. Modelde sistem kısıtı (3.18), süreç kısıtları (3.19), (3.20) ve (3.21)'in toplamına eşit olduğundan bu kısıtlar ihmal edilebilir. Dolayısıyla, bu network VZA modelindeki kısıt sayısı karşılaştırılan KVB sayısı ile sistemdeki süreçlerin sayısının çarpımına eşit olur. Modelden hesaplanan u_1^* , u_2^* , u_3^* , v_1^* ve v_2^* optimal çarpanları ile üç sürecin etkinlikleri aşağıdaki gibi belirlenir.

$$\begin{aligned}
 E_k^{(1)} &= u_1^* Y_{1k} / (v_1^* X_{1k}^{(1)} + v_2^* X_{2k}^{(1)}) \\
 E_k^{(2)} &= u_2^* Y_{2k} / (v_1^* X_{1k}^{(2)} + v_2^* X_{2k}^{(2)}) \\
 E_k^{(3)} &= u_3^* Y_{3k} / (v_1^* X_{1k}^{(3)} + v_2^* X_{2k}^{(3)} + u_1^* Y_{1k}^{(l)} + u_2^* Y_{2k}^{(l)})
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Bu ağ sisteminin etkinlik ayrıştırması için seri ve paralel yapılar biçiminde temsil etmek amacıyla, Süreç-3'ün önüne kukla Süreç-4, Süreç-1 ve Süreç-2'nin arkasına kukla Süreç-5 tanımlanır. Bir kukla sürecin girdileriyle çıktıları aynıdır. Bu iki yardımcı süreçle sistem, iki aşamalı bir seri yapı olarak temsil edilebilir. Burada aşama I (stage I), 1, 4 ve 2 süreçlerinden oluşan paralel yapı iken, aşama II (stage II) ise 3 ve 5 süreçlerinden oluşan başka bir paralel yapıdır. Bu eşdeğer sistem Şekil 3.6'daki gibi tanımlanabilir. Kareler ve daireler sırasıyla gerçek ve kukla süreçleri temsil etmek için kullanılmıştır. Orjinal sistemle karşılaştırıldığında bu sistem, Süreç-4 ve Süreç-5 gibi iki sürece daha sahiptir. Diğer yandan bir kukla sürecin girdileri ve

çıktıları aynı olduğundan, bu süreçlerle ilgili kısıtlamalar gereksizdir. Dolayısıyla, kukla süreçli sistem ile orjinal sistem aynıdır (Kao, 2009a).



Şekil 3.6. Her aşaması paralel yapıya sahip, eşdeğer bir Tandem Sistemi

Daha önce de bahsettiğimiz gibi, bir seri yapının sistem etkinliği, bileşen aşamalarının etkinliğinin ürünüdür. E_k^I ve E_k^{II} , birinci ve ikinci aşamaların etkinlikleri olmak üzere sistem etkinliği $E_k = E_k^I \times E_k^{II}$ biçimindedir. Aşama I için, VZA'nın sınır koşulu gereği, toplam çıktı toplam girdiyi aşmamalıdır ve bu kısıt aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\left[u_1 Y_{1j} + \left(v_1 X_{1j}^{(3)} + v_2 X_{2j}^{(3)} \right) + u_2 Y_{2j} \right] - \left(v_1 X_{1j} + v_2 X_{2j} \right) \leq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

Bu kısıtlama, Süreç-1 ve Süreç-2 ile ilgili kısıtlamaların toplamı ile ilgilidir, bu nedenle gerekli değildir. Bu kısıta göre, KVB_k için aşama I'in etkinliği aşağıdaki gibidir.

$$E_k^I = \left[u_1^* Y_{1k} + \left(v_1^* X_{1k}^{(3)} + v_2^* X_{2k}^{(3)} \right) + u_2^* Y_{2k} \right] / \left(v_1^* X_{1k} + v_2^* X_{2k} \right) \quad (3.24)$$

Benzer şekilde aşama II'nin etkinliği aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$E_k^{II} = \left(u_1^* Y_{1k}^{(0)} + u_2^* Y_{2k}^{(0)} + u_3^* Y_{3k} \right) / \left[u_1^* Y_{1k} + \left(v_1^* X_{1k}^{(3)} + v_2^* X_{2k}^{(3)} \right) + u_2^* Y_{2k} \right] \quad (3.25)$$

Aşama I ve aşama II, paralel yapılardır. Daha önce de bahsettiğimiz gibi sistemin etkinsizliği, bileşen süreçlerin etkinsizlik oranlarının toplamıdır. Aşama I'in etkinsizliği, paralel bağlı Süreç-1 ve Süreç-2'nin etkinsizliği toplamına eşittir. Aşama II'nin etkinsizliği, tek süreç olan Süreç-3'ün etkinsizliğine eşittir.

4. KAPULALAR

Kapulalar, rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koyar. Kapulalar, bir rastgele değişken vektörünün ortak dağılım fonksiyonu ile bu dağılımın marjinalleri arasında bağımlı kuran çok değişkenli, özel bir fonksiyondur. Kapula fonksiyonunun asıl amacı, gözlenen verilere en uygun düşen çok değişkenli dağılımı, bağımlılık yapısını da ortaya koyarak elde etmektir. Dolayısıyla bir kapula fonksiyonunun kendisi de çok değişkenli bir dağılım fonksiyonudur. Diğer bir ifadeyle kapulalar, tek değişkenli marjinalleri $[0,1]$ üzerinde düzgün dağılıma sahip ve çok değişkenli dağılımları kendi tek değişkenli marjinallerine bağlayan fonksiyonlardır (Alhan, 2008).

İstatistikte değişkenler arasındaki ilişkiyi anlamak ve yorumlamak için korelasyon ölçümleri, regresyon analizleri gibi birçok yöntem geliştirilmiştir. Çok değişkenli analizlerde, değişkenler arasındaki ilişkiyi kavrayabilmek için değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının ortaya konulması gerekir. Bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki ilişkiyi fonksiyonel formda ifade eden ve istatistikte en sık kullanılan yöntemlerden biri regresyon analizidir. Regresyon analizi, değişkenler arasındaki ilişkinin doğrusal olması ve hata teriminin normalliği gibi varsayımlara sahiptir. Dolayısıyla her veri seti için bu varsayımların sağlanması mümkün değildir.

Kapulalar, marjinal olasılık dağılımları için herhangi bir varsayım gerektirmeyen bir yaklaşım olup, bağımlı ve bağımsız değişkenler arasındaki lineer olmayan bağımlılığın modellenmesini sağlar. Ayrıca hiçbir korelasyon ölçüsü bu özelliğe sahip değildir. Dolayısıyla kapulalar, bağımlılık açısından ölçüden bağımsız olarak çalışmaya olanak sağlaması ve iki ya da daha fazla değişkene sahip dağılım ailelerini inşa etmede başlangıç noktası olması nedeniyle uygulamada önemli bir yere sahiptir (Nelsen, 2003).

Hoeffding'in (1940) çok değişkenli dağılımlar, bu dağılımların özellikleri ve bağımlılık ölçüleri üzerine bazı çalışmaları kapulanın başlangıcı olarak kabul edilebilir. Ancak ilk defa Sklar (1959) tarafından kapulanın varlığı ortaya konmuştur. Aralarında özel bir bağımlılık yapısına sahip düzgün dağılımlı değişkenleri birleştirecek, ortak dağılım elde eden bir fonksiyon için "kapula" terimi kullanılmıştır (Habiboellah, 2007). 1970 yılına kadar, olasılıklı metrik uzaylarının gelişimiyle ilgili olarak iki boyutlu kapulaların, rastgele değişken çiftleri arasında parametrik olmayan

bağımlılık ölçülerini tanımladığı sonucuna ulaşılmıştır. 1990 yıllarında, kapulaların sabit marjinaler ve monoton dönüşümler altında değişmez olduğu keşfedilmiş ve cebirsel özellikleri bakımından kullanışlı özelliklere sahip olan Arşimedyen kapulalar kullanılmaya başlanmıştır. Kapulalar teoride ve uygulamada hızla gelişme kaydetmiştir ve finans, risk analizleri, hidroloji, biyoistatistik, zaman serileri gibi birçok alanda kullanılmıştır ve kullanılmaya devam etmektedir.

Değişkenler arasında bağımlılık yapılarının farklı biçimleri vardır. Bağımlılığa ilişkin bazı varsayımlar sağlanmadıkça, istatistiksel model anlamlı olarak düşünülemez (Jogdeo,1982). Dolayısıyla olasılık ve istatistikte değişkenler arasındaki bağımlılık, üzerinde çokça çalışılan konulardan biridir. Örneğin, Pearson korelasyon katsayısı değişkenler arasındaki doğrusal ilişkiyi belirlerken, değişkenlerin nicel ve normal dağılımlı olma koşullarının sağlanmasını gerektirir. Diğer yandan, nicel olmayan rastgele değişkenler için dağılımdan bağımsız, sıra korelasyon ölçüleri Kendall tau ve Spearman rho kullanılır.

Uyumluluk ve bağımlılık, değişkenler arasında birlikteliği ifade eden kavramlardır. Rastgele değişken çiftinin büyük değerleri büyük değerlere, küçük değerleri küçük değerlere karşılık geliyorsa, iki değişken uyumludur denir. Bağımlılık ve uyum ölçüleri, değişkenler arasındaki ilişkinin güçlü ya da zayıf olduğunu gösterirken aynı zamanda ilişkinin yönünü de belirler. İki rastgele değişken bağımsız ise, uyumluluk ölçüsü 0'dır. Bağımlılık ölçüsü için bu gerektirmenin tersi de doğrudur. Yani, bağımlılık ölçüsünün 0 değerini alması değişkenlerin bağımsız olmasını gerektirir. Rastgele değişkenlerden biri, diğerinin kesin monoton artan fonksiyonu ise uyumluluk ölçüsü 1 değerini alırken, değişkenler arasında monoton azalan dönüşüm olduğunda -1 değerine ulaşır. Bölge bağımlılığı ve kuyruk bağımlılığı ise uç değerlerdeki yerel bağımlılığa işaret eder. Bölge bağımlılığı güvenirlilik ve risk analizleri kuyruk bağımlılığı ise daha çok sağkalım analizlerinde yer alan veriler arasındaki bağımlılığı modellemek için kullanılır (Alhan, 2008).

Kapulalar rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını yansıttığından, bağımlılık ölçüleri kapulalar yardımıyla ifade edilebilir. Bu bize, çok değişkenli bir dağılımın bağımlılık yapısının bir parametre ya da parametreler vektörü ile ifade etmeye olanak sağlar. Çok değişkenli analizlerde boyut sorununu ortadan kaldırarak, somut göstergeler (parametreler) elde edilir.

Sağkalım fonksiyonunu kullanan sağkalım kapulaları, eliptik kapulalardan olan Gaussian ve Student's t kapulaları gibi literatürde tanımlanan birçok kapula aileleri mevcuttur. Arşimedyen kapulalar ise farklı bağımlılık yapılarına sahip olması, büyük değişkenlikleri yansıtabilmesi ve kullanışlı cebirsel özelliklere sahip olması sebebiyle araştırmacıların sıklıkla kullandığı kapula ailesidir. Her kapulanın ortaya koyduğu farklı bağımlılık yapıları vardır. Örneğin Arşimedyen kapula ailesinden olan Clayton kapula, negatif bağımlılığa izin vermezken, sol kuyruk bağımlılığı sergiler. Buna karşın, Gumbel kapula Clayton kapulanın aksine güçlü sağ kuyruk bağımlılığı sergiler. Frank kapula geniş bir parametre uzayına sahip olup, çok güçlü negatif veya pozitif bağımlılığa sahip gözlemler için uygulanır. Dolayısıyla değişkenlerin bağımlılığı üzerinde çalışırken, seçilen kapulanın verilere uygun olup, verilerin bağımlılık yapısını en uygun şekilde modellemesi gerekir.

İstatistikte geliştirilen birçok tahmin yönteminin amacı minimum hata ile gerçeğe en yakın olan tahmini elde etmektir. Kapula tahmin yöntemleri de bu amaca yönelik olarak, değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını belirleyen parametrelerin tahmini için geliştirilmiştir. Kapula tahmin yöntemleri parametrik, yarı-parametrik ve parametrik olmayan olmak üzere üç gruba ayrılır. Parametrik yöntemler, marjinal dağılımlar ve kapula fonksiyonu hakkında önbilgimiz varsa kullanılır. En Çok Olabilirlik Yöntemi (Maximum Likelihood Estimation) (MLE) ve Marjinallere İlişkin Çıkarsama Yöntemi (Inference Function for Margins) (IFM) parametrik yöntemlerdir. MLE yönteminde, marjinal dağılımlar ve kapula parametresinin eş anlamlı olarak tahmin edilmesinden dolayı elde edilen skor fonksiyonlarının doğrusal olmaması, hesaplamaları zahmetli kılar. Bu sorun bilgisayar programları ile giderilip, tahminler kolayca elde edilmektedir. IFM yöntemi ise iki aşamalı bir yöntem olup, çok boyutlu analizlerde MLE yöntemine göre daha kolay hesaplanıp, daha etkin tahmin ediciler sunar. Sözde En çok Olabilirlik Yöntemi (Pseudo Maximum Likelihood Estimation) (PMLE), yarı-parametrik bir yöntem olup, marjinallerin modellenmesini gerektirmeyen sıra sayılarına dayalı bir tahmin yapar. Bu özelliğinden dolayı parametrik yöntemlere göre daha çok tercih edilir. Parametrik olmayan yöntemler ise Kendall tau, Spearman rho gibi birliktelik ölçülerini kullanarak, bağımlılık parametresini tahmin eder. Dağılımdan bağımsız ve herhangi bir önkoşul gerektirmediğinden yarı-parametrik yöntemlere göre daha çekicidir.

Tahmin edilen kapula modelinin, veriye uygun olup olmadığının test edilmesi de önemli bir aşamadır. Değişkenlerin bağımlılık yapısı araştırılmak istenildiğinde, birden fazla kapula modelinin belirlenerek, uyum iyiliği testleriyle bağımlılık yapısını en iyi yansıtan modeli bulmak en etkili stratejidir (Trivedi ve Zimmer, 2005). Bunun için Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling ve minimum uzaklık ölçülerini kullanan uyum iyiliği testleri ile beklenen ve gözlenen frekanslar üzerinden ki-kare istatistikleri hesaplanmıştır. Bunun yanısıra, maksimum olasılıkla kullanılan, AIC ve BIC (Bayesian Information Criterion) değerleri ile modelin uygunluğu test edilmiştir. AIC ve BIC değerleri en düşük olan model, tahmin edilen parametre ile birlikte değişkenler arasındaki bağımlılığı en iyi ortaya koyan modeldir.

Kapula ile bağımlılığın belirlenmesinde ilk olarak kapula tahmin yöntemleri ile parametreler tahmin edilmeli, iki ya da çok değişkenli dağılımın bağımlılık yapısı ortaya konulmalıdır. Son olarak bağımlılık yapısına uygun, elde edilen birden fazla kapula modelinden verilere en uygun olanı, uyum iyiliği testleriyle test edilmelidir.

4.1. İki Boyutlu Kapulalar

İki boyutlu kapulaların tanımı ve Sklar teoremi için öncelikle dağılım fonksiyonu, dağılım fonksiyonunun yarı tersi, bir bölgenin hacmi, temelli fonksiyon ve artan fonksiyon gibi tanımları iki değişkenli durum için ele alalım.

Bir bölgenin H-hacmi: H , iki değişkenli reel bir fonksiyon ve $B = [x, y]$, tüm köşeleri H 'ın tanım kümesinde olan bir dikdörtgen olmak üzere, $V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1)$ ile verilen $V_H(B)$ değerine B 'nin H -hacmi denir.

Temelli fonksiyon: S_1 ve S_2 , \bar{R} 'nin boştan farklı alt kümeleri ve H , $S_1 \times S_2$ 'de tanımlı reel bir fonksiyon olsun. S_1 kümesi a_1 ve S_2 kümesi a_2 en küçük elemanlarına sahip olsun. Bu takdirde, $\forall (x, y)$ için $H(x, a_2) = H(a_1, y) = 0$ ise H fonksiyonuna temelli fonksiyon denir.

2-artan fonksiyon: Tüm köşeleri H fonksiyonunun tanım kümesinde olan tüm B dikdörtgenleri için $V_H(B) \geq 0$ oluyorsa, iki değişkenli H fonksiyonuna 2-artan fonksiyon denir.

Bir fonksiyonun 2-artan olması her bir bileşenine göre artan olmasını gerektirmez. Yani $V_H(B) \geq 0$ iken H fonksiyonu sadece x 'e veya y 'ye göre azalan bir fonksiyon olabilir.

Dağılım fonksiyonu: (Ω, U, P) bir olasılık uzayı olmak üzere, X tesadüfi değişkeni bu uzayda tanımlı olsun. $\forall x \in R$ için;

$$F_x: R \rightarrow [0,1]$$

$$x \rightarrow F_x(x) = P(X \leq x)$$

fonksiyonuna X tesadüfi değişkeninin dağılım fonksiyonu denir.

Dağılım fonksiyonunun yarı tersi: F bir dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$F^{(-1)}: [0,1] \rightarrow R$$

$$t \rightarrow F^{(-1)}(t) = \inf\{x: F(x) \geq t\}$$

fonksiyonuna F 'in yarı tersi denir.

O halde, yukarıdaki tanımlar yardımıyla ve $I = [0,1]$ olmak üzere iki boyutlu kapula aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$C: I^2 \rightarrow I$$

$$(u, v) \rightarrow C(u, v)$$

- $\forall u, v \in I$ için $C(u, 0) = C(0, v) = 0$ yani temelli bir fonksiyon
- $\forall u, v \in I$ için $C(u, 1) = u$ ve $C(1, v) = v$
- $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ için $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ iken;

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (4.1)$$

yani 2-artan bir fonksiyon şartlarını sağlıyorsa $C(u, v)$ fonksiyonu iki boyutlu kapuladır (Nelsen, 2006).

4.1.1. Sklar Teoremi

Ortak dağılım fonksiyonu ile kapulalar arasındaki bağıntıyı tanımlayan, A. Sklar (1959) tarafından ispatlanan bu teorem kapulanın varlığını ortaya koyar.

H , marjinaleri F ve G olan iki değişkenli bir ortak dağılım fonksiyonu olsun. O halde, $\forall x, y \in \bar{R}$ için; $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ olacak şekilde bir C kapulası vardır.

Eğer F ve G sürekli ise C tektir. Aksi halde C , F ve G fonksiyonlarının değer kümelerinin kartezyen çarpımı üzerinde tek türlü tanımlanmıştır. Tersine, eğer C bir kapula ve F ile G marjinal dağılım fonksiyonlarıysa, o zaman H fonksiyonu

marjinaleri F ve G olan bir ortak dağılım fonksiyonudur. $F^{(-1)}$ ve $G^{(-1)}$ sırasıyla F ve G dağılım fonksiyonlarının yarı tersi olmak üzere, F ve G süreklirse $\forall (u, v)$ için $C(u, v) = H\left(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)\right)$ olur. Bu sonuç ortak dağılım fonksiyonlarından kapulalar oluşturmamızı sağlar.

4.1.2. Frechet-Hoeffding Sınırları

C bir kapula olmak üzere her C kapulası $(u, v) \in I^2$ için,

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) \text{ ve } M(u, v) = \min(u, v) \text{ olmak üzere;}$$

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v) \text{ eşitsizliğini sağlar.}$$

Bu eşitsizlikte, W 'ya Frechet-Hoeffding alt sınırı, M 'ye Frechet-Hoeffding üst sınırı denir.

Sklar teoreminin bir sonucu olarak H , marjinaleri F ve G olan iki değişkenli bir ortak dağılım fonksiyonu olmak üzere $\forall (x, y)$ için, bu sınırlar aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\max((F(x) + G(y) - 1), 0) \leq H(x, y) \leq \min(F(x), G(y)) \quad (4.2)$$

4.1.3. Bağımsızlık

X ve Y marjinaleri F ve G olan sürekli rastgele değişkenler olmak üzere, ortak dağılım fonksiyonu H olsun. X ile Y 'nin bağımsız olması için $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in \bar{R}^2$ için, $H(x, y) = F(x)G(y)$ olmalıdır. Bu tanımla kapulayla aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$X \text{ ile } Y \text{'nin bağımsız olması için } \Leftrightarrow C_{XY}(u, v) = uv \text{ olmalıdır.}$$

Dolayısıyla, iki değişkenli bir dağılım fonksiyonuna karşılık gelen $\pi(u, v) = uv$ kapulası bağımsızlık kapulasıdır (Nelsen, 2006).

Teorem 4.1.

X ve Y , C_{XY} kapulasına sahip sürekli tesadüfi değişkenler olmak üzere, α ve β sırasıyla X ve Y değişkenlerinin değer kümesi üzerinde kesin monoton dönüşümler olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır (Nelsen, 1999).

➤ α ve β kesin artansa,

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = C_{XY}(u, v)$$

- α kesin artan ve β kesin azalansa ,

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v)$$

- α kesin azalan ve β kesin artansa,

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v)$$

- α ve β kesin azalansa,

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v)'dir.$$

4.1.4. Kapula Modelleri

Literatürde sıklıkla karşılaşılan kapula ailelerini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

4.1.4.1. Arşimedyen Kapulalar

Arşimedyen kapulalar, farklı bağımlılık yapılarına sahip olması, büyük değişkenlikleri yansıtabilmesi ve kullanışlı cebirsel özelliklere sahip olması sebebiyle araştırmacıların sıklıkla kullandığı kapula ailesidir.

Bu yaklaşımda çok değişkenli bir kapula üretici yardımıyla tek değişkenli bir fonksiyona indirgenir. $C: I^2 \rightarrow I$ iki boyutlu bir kapula olsun. $\varphi: I \rightarrow [0, \infty]$ sürekli, konveks, kesin azalan ve $\varphi(1) = 0$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun.

φ 'nin genelleştirilmiş ters fonksiyonu $\varphi^{[-1]}$ ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \varphi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} \quad (4.3)$$

$\forall u, v \in [0, 1]$ için,

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (4.4)$$

fonksiyonu bir Arşimedyen kapula olup, φ 'ye Arşimedyen kapulanın üreticisi denir.

$\varphi(0) = \infty$ ise $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ olup, φ 'nin bilinen ters fonksiyonu olur. Bu durumda φ kesin üretici olarak tanımlanır. $\forall u, v \in [0, 1]$ için,

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (4.5)$$

fonksiyonu kesin Arşimedyen kapula olarak adlandırılır (Nelsen, 2006).

Dolayısıyla, Arşimedyen kapula üreticisinin özelliklerini aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

- $\varphi(1) = 0$
- $\forall t \in (0,1)$ için $\varphi'(t) < 0$ 'dır. (φ azalan bir fonksiyondur)
- $\forall t \in (0,1)$ için $\varphi''(t) \geq 0$ 'dır. (φ konveks bir fonksiyondur)

C , Arşimedyen bir kapula ve üreticisi φ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır (Nelsen, 1999).

- $\forall u, v \in I$ için $C(u, v) = C(v, u)$ olup yani C simetriktir.
- $\forall u, v \in I$ için $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ olup yani C birleşmelidir.
- c bir sabit ve $c > 0$ ise $c\varphi$ de C 'nin üreticisidir.

4.1.4.2. Sağkalım Kapulaları

Bir sistemde ilgilenilen rastgele değişkenler yaşam sürelerini temsil etmek üzere, bir bireyin ya da nesnenin x zamanından sonra yaşama olasılığı, $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P(X > x)$ sağkalım fonksiyonu ile ifade edilir. (X, Y) rastgele değişken çifti için $\bar{H}(x, y) = P(X > x, Y > y)$ ile tanımlanan ortak sağkalım fonksiyonu ve marjinal sağkalım fonksiyonları \bar{F} ve \bar{G} arasında Sklar teoremi gereği $\bar{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y))$ bağıntısı vardır. X ve Y 'nin kapula fonksiyonu C olmak üzere, ortak sağkalım fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned}\bar{H}(x, y) &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y))\end{aligned}\quad (4.6)$$

$\hat{C}: I^2 \rightarrow I$ olmak üzere, X ve Y 'nin sağkalım kapulası aşağıdaki gibi tanımlanır (Kaishev vd, 2007).

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)\quad (4.7)$$

4.1.4.3. Clayton Kapula

Clayton kapula bir Arşimedyen kapuladır. θ bağımlılık parametresi ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$C(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, \quad 0 \leq \theta < \infty \quad (4.8)$$

$\theta \rightarrow 0$ iken $C(u, v) = \pi(u, v) = uv$ olur ve bağımsızlık kapulasına ulaşılır. $\theta \rightarrow \infty$ iken mükemmel bağımlılığa işaret eder. Clayton kapula negatif bağımlılığa izin vermez. Clayton kapula için sol kuyruk bağımlılığı dikkate alınmalıdır. Yani, birlikte azalış göstermeye, birlikte artış göstermekten daha yatkın olan gözlemlerde Clayton kapula tercih edilmelidir (Trivedi ve Zimmer, 2007).

Clayton kapula için üretici fonksiyon aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\varphi(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1) \quad (4.9)$$

4.1.4.4. Gumbel-Hougaard Kapula Ailesi

Gumbel-Hougaard kapula bir Arşimedyen kapuladır. θ bağımlılık parametresi ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$C(u, v) = \exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right\}, \quad 1 \leq \theta < \infty \quad (4.10)$$

$\theta \rightarrow 1^+$ için $C(u, v) = \pi(u, v) = uv$ bağımsızlık kapulasına dönüşür. Bu kapula hiçbir θ değeri için Frechet alt sınırına ulaşmaz. Yani Gumbel kapula, Clayton kapula gibi negatif bağımlılığa izin vermez. Fakat Clayton kapulanın aksine, güçlü sağ kuyruk bağımlılığı sergiler. Bunun anlamı iki boyutlu rastgele değişkenler birlikte artış göstermeye, birlikte azalış göstermekten daha yatkındır. Küçük değerler için düşük korelasyon, yüksek değerler için güçlü korelasyona sahip gözlemler varsa, bu tür gözlemler için Gumbel kapula tercih edilmelidir. Gumbel kapula için sağ kuyruk bağımlılığı $\lambda_U = 2 - 2^{1/\theta}$ ile hesaplanır (Trivedi ve Zimmer, 2007).

Gumbel kapula için üretici fonksiyon aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\varphi(t) = (-\ln t)^\theta \quad (4.11)$$

4.1.4.5. Frank Kapula

Frank kapula bir arşimedyen kapuladır. θ bağımlılık parametresi ile birlikte aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$C(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right], \quad \theta \in R - \{0\} \quad (4.12)$$

$\theta \rightarrow 0$ iken $C(u, v) = \pi(u, v) = uv$ bağımsızlık kapulasına ulaşılır. $\theta \rightarrow \infty$ iken Frechet üst sınırına $\theta \rightarrow -\infty$ iken Frechet alt sınırına eşit olur. Geniş bir parametre uzayına sahip olması ve marjinaler arasındaki negatif bağımlılığın da modellenenebilir olması nedeniyle, Frank kapula uygulamalarda daha çok tercih edilmektedir. Frank kapula ile modellenen gözlemler çok güçlü negatif ya da çok güçlü pozitif bağımlılığa sahiptir (Meester ve Mackay, 1994).

Frank kapula için üretici fonksiyon aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\varphi(t) = -\ln\left(\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right) \quad (4.13)$$

4.1.4.6. Joe Kapula

Joe kapula bir Arşimedyen kapuladır. θ bağımlılık parametresi ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$C(u, v) = 1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta - (1-u)^\theta(1-v)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}, 1 \leq \theta < \infty \quad (4.14)$$

$\theta \rightarrow 1^+$ iken $C(u, v) = \pi(u, v) = uv$ bağımsızlık kapulasına ulaşılır. Joe kapula, Gumbel kapula gibi sağ kuyruk bağımlılığı sergiler. Ancak, bu bağımlılık Gumbel kapulaya göre daha güçlüdür.

Joe kapula için üretici fonksiyon aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\varphi(t) = -\ln(1 - (1-t)^\theta) \quad (4.15)$$

4.1.4.7. Gaussian Kapula

Gaussian kapula eliptik bir kapuladır. θ bağımlılık parametresi ile birlikte aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{aligned} C(u, v) &= \Phi_G(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v); \theta) \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} * \left(\frac{-(s^2-2\theta st+t^2)}{2(1-\theta^2)}\right) ds dt \end{aligned} \quad (4.16)$$

Burada Φ standart normal dağılım fonksiyonu, $\Phi_G(u, v)$ iki değişkenli standart normal dağılım fonksiyonudur. Gaussian kapulada θ bağımlılık parametresi, Pearson korelasyon ölçümü olup $[-1,1]$ aralığına kısıtlanmıştır. $\theta \rightarrow 0$ için bağımsızlık kapulasına dönüşür. $\theta \rightarrow -1$ ve $\theta \rightarrow 1$ olduğunda sırasıyla Frechet alt sınır ve Frechet

üst sınırına ulaşır. Eşit derecede pozitif ve negatif bağımlılığa izin verdiği için esnek bir kapula modelidir (Trivedi ve Zimmer, 2007). Burada u ve v parametrik ya da non-parametrik keyfi bir dağılıma sahip olabilir. Ancak u ve v normal dağılan marjinalerse Gaussian kapula'da iki değişkenli dağılım fonksiyonu normal dağılıma sahiptir (Chen vd, 2017).

4.1.4.8. Student's t Kapula

Student's t kapula eliptik bir kapula olup, r Pearson korelasyon katsayısı ve t_v ise v serbestlik dereceli student-t dağılımını belirtmek üzere bu iki bağımlılık parametresi ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$C(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \left(1 + \frac{(s^2 - 2rst + t^2)}{v(1-r^2)}\right)^{-\frac{v+2}{2}} ds dt \quad (4.17)$$

Burada t_v^{-1} , v serbestlik derecesine sahip student t dağılımının tersini ifade eder. $v \rightarrow \infty$ için $C(u_1, u_2, r, v) \rightarrow \Phi_G(u_1, u_2, r)$ olur. Yani v sonsuza yaklaştığında, Student's t kapula, Gaussian kapulaya yakınsar. Student's t kapula simetrik bağımlılık sergiler. Alt ve üst kuyruk bağımlılığı birbirine eşit olup $\lambda_U = \lambda_L = 2t_{v+1} \left(\frac{-\sqrt{v+1}\sqrt{1-r}}{\sqrt{1+r}} \right)$ ile ifade edilir (Wiboonpongse vd, 2015).

4.2. Çok Boyutlu Kapulalar

Çok boyutlu kapuların tanımı ve Sklar teoremi için, daha önceden ifade ettiğimiz iki boyutlu kapula tanımlarını n-boyut için genelleştireceğiz.

Tanım 4.1.

S_1, S_2, \dots, S_n \bar{R}^n de tanımlı aralıklar ve H , tanım kümesi $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ olan n-boyutlu reel bir fonksiyon olsun. $B = [a, b]$ tüm köşeleri H 'ın tanım kümesinde olan bir bölge olsun. Bu takdirde, B 'nin tüm köşeleri üzerinden H fonksiyonunun B bölgesindeki hacmi;

$$V_H(B) = \sum \text{sgn}(c) H(c) \quad (4.18)$$

olarak tanımlanır.

Burada $c = (c_1, \dots, c_n)$, B 'nin köşelerini göstermek üzere;

$$\text{sgn}(c) = \begin{cases} -1, & \text{tek sayıda } k \text{ için } c_k = a_k \\ 1, & \text{çift sayıda } k \text{ için } c_k = a_k \end{cases} \quad (4.19)$$

olarak tanımlanır.

Bu tanımı, H 'ın n . mertebeden farkları cinsinden aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$V_H(B) = \Delta_a^b H(t) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \Delta_{a_1}^{b_1} H(t) \quad (4.20)$$

Burada her bir k için;

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(t) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_n) \quad (4.21)$$

olarak tanımlıdır.

Tanım 4.2.

Köşeleri H fonksiyonunun tanım kümesinde olan tüm B bölgeleri için, $V_H(B) \geq 0$ ise, n -boyutlu H fonksiyonuna n -artan fonksiyon denir.

Tanım 4.3.

H , tanım kümesi $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ olan n -boyutlu reel bir fonksiyon olsun. Her bir S_k kümesinin en küçük elemanı a_k olmak üzere, en az bir k için $t_k = a_k$ olacak şekilde tanım kümesine ait tüm t 'ler için $H(t) = 0$ ise H fonksiyonuna temelli fonksiyon denir.

Lemma 4.1.

$S_1, S_2, \dots, S_n, \bar{R}$ ' nin boştan farklı alt kümeleri ve H , tanım kümesi $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ olan temelli ve n -artan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde H her boyutunda azalmayandır.

Eğer $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n)$ ve $(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$ H 'da tanımlı ve $x < y$ ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \quad (4.22)$$

Lemma 4.2.

$S_1, S_2, \dots, S_n, \bar{R}$ ' nin boştan farklı alt kümeleri ve H , tanım kümesi $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ olan marjinallere sahip temelli ve n -artan bir fonksiyon olsun. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$ 'de tanımlı herhangi noktalar olsun. Bu takdirde, aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$|H(x) - H(y)| \leq \sum_{k=1}^n |H_k(x_k) - H_k(y_k)| \quad (4.23)$$

Tanım 4.4.

$$C: I^n \rightarrow I$$

$$u \rightarrow C(u) \text{ fonksiyonu,} \quad (4.24)$$

- $\forall u \in I^n$ için u 'nun koordinatlarından en az biri 0 ise, $C(u) = 0$ (temelli fonksiyon)
- $\forall u \in I^n$ için u_k hariç u 'nun tüm koordinatları 1 ise, $C(u) = u_k$
- $a \leq b$ olan $\forall a, b \in I^n$ için $V_C([a, b]) \geq 0$ (n-artan fonksiyon)

şartlarını sağlıyorsa C 'ye n -boyutlu kapula ya da kısaca n -kapula denir (Nelsen, 1999).

4.2.1. Sklar Teoremi (n -boyutlu)

H , marjinalleri F_1, F_2, \dots, F_n olan n -boyutlu ortak dağılım fonksiyonu olsun. Bu takdirde $\forall x \in \bar{R}^n$ için,

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \quad (4.25)$$

olacak şekilde bir C n -kapulası vardır. Eğer F_1, F_2, \dots, F_n 'lerin hepsi süreklirse o zaman C tektir. Aksi takdirde C , F_1, F_2, \dots, F_n 'lerin değer kümelerinin kartezyen çarpımı üzerinde tek türlü tanımlanmıştır. Tersine C bir n -kapula ve F_1, F_2, \dots, F_n dağılım fonksiyonları ise (4.25) eşitliğinde tanımlanan H fonksiyonu, marjinalleri F_1, F_2, \dots, F_n olan n -boyutlu bir dağılım fonksiyonudur.

H , marjinalleri F_1, F_2, \dots, F_n olan ve kapulası C olan dağılım fonksiyonu olsun. $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ sırasıyla F_1, F_2, \dots, F_n 'lerin yarı tersleri olsun. Bu takdirde herhangi bir $u \in I^n$ için;

$$C(u_1, u_2, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)) \quad (4.26)$$

eşitliği Sklar teoreminin bir sonucu olarak sağlanır (Sklar, 1959).

Teorem 4.2.

X_1, X_2, \dots, X_n , sırasıyla F_1, F_2, \dots, F_n marjinal dağılımlarına sahip tesadüfi değişkenler ve ortak dağılım fonksiyonları H olsun. Bu takdirde, (4.24)'deki şartları sağlayan n -boyutlu bir C kapulası vardır. (Eğer F_1, F_2, \dots, F_n marjinalleri süreklirse, C tektir. Aksi

halde C, F_1, F_2, \dots, F_n dağılım fonksiyonlarının, değer kümelerinin kartezyen çarpımı üzerinde tek türlü tanımlanmıştır) (Nelsen, 1999).

M, Π ve W 2 –boyutlu kapuların n -boyuta genişlemeleri sırasıyla M^n, Π^n ve W^n ile gösterilir.

$$\begin{aligned} M^n(u) &= \min(u_1, u_2, \dots, u_n) \\ \Pi^n(u) &= u_1 u_2 \dots u_n \\ W^n(u) &= \max(u_1 + u_2 + \dots + u_n - n + 1, 0) \end{aligned} \quad (4.27)$$

olmak üzere; $\forall n \geq 2$ için M^n ve Π^n fonksiyonları n -boyutlu kapula iken, $n > 2$ için W^n kapula değildir. İki den fazla boyutta W^n kapula olmamasına rağmen, $W^n(u) \leq C(u) \leq M^n(u)$ Frechet-Hoeffding sınırları çok boyutlu kapular için de geçerlidir (Nelsen, 2006).

Teorem 4.3.

$n > 2$ olmak üzere, X_1, X_2, \dots, X_n 'ler sürekli tesadüfi değişkenler olsun. Bu takdirde;

- ❖ X_1, X_2, \dots, X_n tesadüfi değişkenlerinin bağımsız olması için \Leftrightarrow bu değişkenlere karşılık gelen kapulanın $C_{X_1, X_2, \dots, X_n} = \Pi^n = u_1 u_2 \dots u_n$ olmasıdır. Bir başka deyişle, H marjinaleri F_1, F_2, \dots, F_n olan ortak dağılım fonksiyonu olmak üzere X_1, X_2, \dots, X_n 'in bağımsız olması için $\Leftrightarrow \forall x \in \bar{R}^n$ için $H(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1)F_2(x_2) \dots F_n(x_n)$ 'dir.
- ❖ X_1, X_2, \dots, X_n tesadüfi değişkenlerinden her biri diğerlerinin hemen hemen kesin artan fonksiyonu olması için \Leftrightarrow bu değişkenlere karşılık gelen kapulanın $C_{X_1, X_2, \dots, X_n} = M^n$ olmasıdır (Nelsen, 1999).

4.2.2. Gaussian Kapula (n –boyutlu)

X_1, \dots, X_n standart normal dağılıma sahip rastgele değişkenler olsun. $R = \{R_{ij}\}$ ($i, j = 1, \dots, n$) korelasyon matrisine sahip, n -değişkenli standart normal dağılımlı (X_1, \dots, X_n) rastgele değişkeninin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu, $x = (x_1, \dots, x_n)'$ olmak üzere, aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\phi_R(x_1, \dots, x_n) = (2\pi)^{-n/2} |R|^{-1/2} \exp\left\{-\frac{x'R^{-1}x}{2}\right\} \quad (4.28)$$

Φ tek değişkenli standart normal dağılım fonksiyonu, Φ_R n –değişkenli standart normal dağılım fonksiyonu ve Φ^{-1} standart tek değişkenli normal dağılımın tersi olmak üzere, (X_1, X_2, \dots, X_n) değişkenine karşılık gelen, n –boyutlu Gaussian kapula aşığıdaki gibi tanımlanır (Kaishev vd, 2007).

$$C_R(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \\ = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_n)} \phi_R(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (4.29)$$

Gaussian kapula için yoğunluk fonksiyonu ise aşığıdaki gibi ifade edilir.

$$c_R(u_1, \dots, u_n) = \frac{\partial^n C_R(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} = \frac{\phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))}{\phi(\Phi^{-1}(u_1)) \times \dots \times \phi(\Phi^{-1}(u_n))} \quad (4.30)$$

4.2.3. Student's t Kapula (n –boyutlu)

$x = (x_1, \dots, x_n)'$ olmak üzere, $t_{R,v}(x_1, \dots, x_n)$ R korelasyon matrisine sahip, v serbestlik dereceli n -değişkenli standart t-dağılımının ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu aşığıdaki gibi ifade edilir.

$$t_{R,v}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{\Gamma(\frac{v+n}{2}) |R|^{-1/2}}{\Gamma(\frac{v}{2}) (v\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(1 + \frac{1}{v} \xi' R^{-1} \xi\right)^{-\frac{v+n}{2}} d\xi_1 \dots d\xi_n \quad (4.31)$$

n -boyutlu Student's t kapula ise aşığıdaki gibi tanımlanır (Kaishev vd, 2007).

$$C_T(u_1, \dots, u_n) = t_{R,v}(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)) \\ = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_n)} \frac{\Gamma(\frac{v+n}{2}) |R|^{-1/2}}{\Gamma(\frac{v}{2}) (v\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(1 + \frac{1}{v} \xi' R^{-1} \xi\right)^{-\frac{v+n}{2}} d\xi_1 \dots d\xi_n \quad (4.32)$$

$\xi = (t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n))'$ ve $t_v^{-1}(u_i)$, $(i = 1, \dots, n)$ v serbestlik dereceli tek değişkenli t-dağılımının tersi olmak üzere Student's t kapula için yoğunluk fonksiyonu aşığıdaki gibi ifade edilir.

$$C_T(u_1, \dots, u_n) = |R|^{-1/2} \frac{\Gamma(\frac{v+n}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2})} \left(\frac{\Gamma(\frac{v}{2})}{\Gamma(\frac{v+1}{2})}\right)^n \frac{(1 + \frac{1}{v} \xi' R^{-1} \xi)^{-\frac{v+n}{2}}}{\prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{\xi_j^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}}} \quad (4.33)$$

4.3. Bağımlılık Yapıları ve Kapulalar

Rastgele değişkenler arasındaki bağımlılığı ve ilişkilendirmeyi ölçen çeşitli yöntemler vardır. Kapulalar, daha önce de ifade ettiğimiz gibi parametrik olmayan bağımlılığı

modellerken, marjinal dağılımlar hakkında varsayım gerektirmeyen bir yaklaşım olup, ölçekten bağımsız olarak çalışmaya olanak sağlar.

Kapularar rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya koyduğu için bağımlılık ölçüleri kapula yardımıyla ifade edilebilir. X ve Y ortak dağılım fonksiyonu H olan iki tesadüfi değişken olmak üzere H , tüm ortak dağılım fonksiyonlarının oluşturduğu kümenin Π kapulasıyla belirtilen özel alt kümesine dahil olduğunda X ile Y kesin olarak bağımsızdır. Benzer şekilde, ortak dağılım fonksiyonu Frechet-Hoeffding sınırlarından birine eşit olduğunda, iki rastgele değişkenden birinin, diğerinin hemen hemen her yerde monoton bir fonksiyonu olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla değişkenler arasındaki bağımsızlığın olduğu gibi birçok bağımlılık yapısının kapularların temel özellikleri kullanılarak tanımlanabileceği görülmektedir (Nelsen, 1999).

Burada, ölçüden bağımsız uyumluluğu karakterize eden Kendall tau, Spearman rho ve değişkenler arasındaki lineer bağımlılığın ölçüsü olan Pearson korelasyon katsayısı gibi bir takım birliktelik ölçüleri kapula fonksiyonu yardımıyla ifade edilecektir.

4.3.1. Uyum

Bir rastgele değişken çifti için uyumluluk, birinin büyük değerlerinde diğerinin de büyük değerler alması veya birinin küçük değerlerinde diğerinin de küçük değerler almasıdır.

(x_i, y_i) ve (x_j, y_j) , sürekli rastgele değişken vektörü (X, Y) 'den alınan gözlemler olsun. Bu takdirde aşağıdaki tanımlar yapılabilir (Nelsen, 1999).

$x_i < x_j$ ve $y_i < y_j$ ya da $x_i > x_j$ ve $y_i > y_j$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) gözlemleri uyumludur.

$x_i < x_j$ ve $y_i > y_j$ ya da $x_i > x_j$ ve $y_i < y_j$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) gözlemleri uyumsuzdur.

$(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) gözlemleri uyumludur.

$(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) gözlemleri uyumsuzdur.

Tanım 4.5.

C kapulasına sahip X ve Y rastgele değişkenlerinin arasındaki ilişkiyi gösteren κ ölçüsü, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa uyumluluk ölçüsüdür. Bu ölçü $\kappa_{X,Y}$ ya da κ_C ile gösterilir (Nelsen, 2006).

- κ , her X, Y sürekli rastgele değişken çifti için tanımlıdır.
- $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$, $\kappa_{X,X} = 1$ ve $\kappa_{X,-X} = -1$
- $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$
- X ile Y bağımsız ise $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\Pi} = 0$
- $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$
- C_1 ve C_2 , $C_1 < C_2$ şartını sağlayan kapulalar ise $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$ 'dir.
- $\{(X_n, Y_n)\}$, C_n kapularına sahip sürekli rastgele değişkenler dizisi ve $\{C_n\}$ noktasal olarak C 'ye yakınsıyorsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$ 'dir.

Teorem 4.4.

κ , X ve Y sürekli rastgele değişken çiftlerinin uyumluluk ölçüsü olsun.

- Y , X 'in hemen hemen her yerde artan fonksiyonu ise $\kappa_{X,Y} = \kappa_M = 1$ 'dir.
- Y , X 'in hemen hemen her yerde azalan fonksiyonu ise $\kappa_{X,Y} = \kappa_W = -1$ 'dir.
- α ve β sırasıyla X ve Y 'nin değer kümelerinde hemen hemen her yerde kesin monoton fonksiyonlar ise, $\kappa_{\alpha(X),\beta(Y)} = \kappa_{X,Y}$ 'dir (Nelsen, 2006).

4.3.2. Kendall Tau (τ)

Kendall tau birliktelik ölçüsünün örnek versiyonunu, uyumluluk açısından Kruskal (1958), Hollander ve Wolfe (1973), Lehmann ve D'abrera (1975) aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$, (X, Y) sürekli rastgele değişkenler vektöründen alınmış n gözlemlik bir tesadüfi örnek olsun. Bu örnekteki (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) farklı gözlem çiftlerinden $\binom{n}{2}$ tane vardır ve her bir çift ya uyumlu ya da uyumsuzdur. c uyumlu çiftlerin sayısını, d uyumsuz çiftlerin sayısını göstermek üzere, örneğe ilişkin Kendall tau değeri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$t = \frac{c-d}{c+d} = \frac{c-d}{\binom{n}{2}} \quad (4.34)$$

Dolayısıyla bu değerin (t) aslında, uyumluluk olasılığı ile uyumsuzluk olasılığının farkı olduğu görülür. Kendall tau'nun popülasyon formu, H ortak dağılım fonksiyonuna sahip bir (X, Y) sürekli rastgele değişkenler vektörü için benzer şekilde ifade edilebilir. (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) , H ortak dağılım fonksiyonuna sahip bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele vektörler olsun. Bu takdirde, popülasyona ilişkin Kendall tau değeri aşağıdaki gibi ifade edilir (Nelsen, 2006).

$$\tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (4.35)$$

Teorem 4.5.

(X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) sırasıyla F (X_1 ve X_2 için) ve G (Y_1 ve Y_2 için) marjinal dağılım fonksiyonlarına ve H_1 ile H_2 ortak dağılım fonksiyonlarına sahip, bağımsız sürekli rastgele değişkenler vektörü olsun. C_1 ve C_2 , $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ ve $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$ olmak üzere (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) değişkenlerinin kapulaları olsun. Q fonksiyonu (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) 'nin uyumluluk ve uyumsuzluk olasılıkları arasındaki farkı gösterebilir. Yani,

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (4.36)$$

O halde, aşağıdaki eşitlik tanımlanır.

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1 \quad (4.37)$$

Sonuç 4.1.

C_1, C_2 ve Q 'nin tanım ve anlamları Teorem 4.5'teki gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. Q fonksiyonu kendi değişkenlerine göre simetriktir. Yani, $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$ 'dir.
2. Q fonksiyonu her değişkeninde azalmayandır. Yani $\forall (u, v) \in I^2$ için $C_1 < C_1'$ ve $C_2 < C_2'$ ise $Q(C_1, C_2) \leq Q(C_1', C_2')$ 'dir.
3. Kapulalar sağkalım kapulaları ile yer değiştirebilir. Yani, $Q(C_1, C_2) = Q(\hat{C}_1, \hat{C}_2)$ 'dir.

C keyfi bir kapula olsun. $Q(C, C) \in [-1, 1]$ 'dir. Ayrıca $Q(C, M) \in [0, 1]$, $Q(C, W) \in [-1, 0]$ ve $Q(C, \Pi) \in \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ olur (Nelsen, 1999).

Teorem 4.6.

X ve Y kapulası C olan sürekli rastgele değişkenler olsun. X ve Y 'ye ilişkin Kendall tau populasyon değeri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) dudv \quad (4.38)$$

(4.38) integrali düzgün dağılımlı U ve V değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonu $C(U, V)$ 'nin beklenen değeri ile de ifade edilebilir (Nelsen, 2006).

$$\tau_C = 4E(C(U, V)) - 1 \quad (4.39)$$

Sonuç 4.2.

X ve Y , φ üretici fonksiyonu tarafından üretilen bir C Arşimedyen kapulasına sahip rastgele değişkenler olsun. X ve Y 'ye ilişkin Kendall tau populasyon değeri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \quad (4.40)$$

4.3.3. Spearman Rho (ρ)

Spearman rho da Kendall tau gibi uyumluluğu ve uyumsuzluğu temel alan bir ilişki ölçüsüdür. $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ H ortak dağılım fonksiyonuna (marjinaleri F ve G olan) ve C kapulasına sahip bağımsız rastgele vektörler olsun. Spearman rho'nun populasyon değeri, (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_3) vektörleri için uyum olasılığından uyumsuzluk olasılığının çıkarılmasıyla orantılıdır.

$$\rho_{X,Y} = 3(P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]) \quad (4.41)$$

Burada (X_3, Y_2) vektörü de kullanılabilirdi. (X_1, Y_1) 'in ortak dağılım fonksiyonu $H(x, y)$ iken, (X_2, Y_3) 'ün ortak dağılım fonksiyonu $F(x)G(y)$ ve X_2 ile Y_3 'ün kapulası Π olur. Teorem 4.5 ve Sonuç 4.1 kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir (Nelsen, 1999).

Teorem 4.7.

X ve Y , kapulası C olan sürekli rastgele değişkenler olsun. X ve Y için Spearman rho populasyon değeri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\rho_{X,Y} = \rho_C = 3Q(C, \Pi) = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3 = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3 \quad (4.42)$$

Teorem 4.8.

X ve Y , kapulası C olan sürekli rastgele değişkenler olmak üzere, Kendall tau'nun ve Spearman rho'nun popülasyon değerleri, Tanım 4.5 ve Teorem 4.4'deki uyumluluk ölçüsü için tanımlanan özellikleri sağlar.

4.3.4. Kendall Tau ve Spearman Rho arasındaki ilişki

Kendall tau ve Spearman rho'nun her ikisi de, kapulası verilen rastgele değişkenler arasında uyum olasılığının ölçüsü olmasına rağmen birbirlerinden oldukça farklıdır.

Teorem 4.9.

X ve Y sürekli rastgele değişkenler ve Kendall tau (τ) ve Spearman rho (ρ), eşitlik (4.35) ve (4.41)'deki gibi tanımlansın. Aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho \leq 1 \quad (4.43)$$

Teorem 4.10.

X, Y, τ ve ρ Teorem 4.9'da tanımlandığı gibi olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$\left(\frac{1+\rho}{2}\right) \geq \left(\frac{1+\tau}{2}\right)^2$$

ve

$$\left(\frac{1-\rho}{2}\right) \geq \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2 \quad (4.44)$$

Sonuç 4.3.

X, Y, τ ve ρ Teorem 4.9'da tanımlandığı gibi olsun. Bu takdirde, yukarıdaki iki teoremin birleşiminden aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\frac{3\tau-1}{2} \leq \rho \leq \frac{1+2\tau-\tau^2}{2}, \quad \tau \geq 0$$

ve

$$\frac{\tau^2+2\tau-1}{2} \leq \rho \leq \frac{1+3\tau}{2}, \quad \tau \leq 0 \quad (4.45)$$

Teorem 4.11.

X ve Y , marjinal dağılım fonksiyonları F ve G , ortak dağılım fonksiyonu H olan sürekli değişkenler olsun. Kendall tau (ρ) ve Spearman rho (τ) katsayıları arasında aşağıdaki ilişkiler geçerlidir.

- $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$ ve $\tau(X, Y) = \tau(Y, X)$
- X ve Y bağımsız ise $\rho(X, Y) = \tau(X, Y) = 0$
- $-1 \leq \rho(X, Y), \tau(X, Y) \leq 1$
- X 'in değer kümesindeki $T: R \rightarrow R$ kesin monoton dönüşümü için ρ ve τ 'nin her ikisi de,

$$\rho(X, Y) = \tau(X, Y) = 1 \Leftrightarrow Y = T(X) \text{ gibi } T \text{ artan dönüşüm ise}$$

$$\rho(X, Y) = \tau(X, Y) = -1 \Leftrightarrow Y = T(X) \text{ gibi } T \text{ azalan dönüşüm ise}$$

bağıntılarını sağlar (De Matteis, 2001).

4.3.5. Gini Katsayısı (g)

Corrado Gini (1910) tarafından, basit uyumluluk indisi denilen bir g birliktelik ölçüsü tanıtılmıştır. p_i ve q_i sırasıyla, sürekli X ve Y rastgele değişkenlerinin n birimlik örneklemindeki sıra sayılarını gösterirken, $[t]$ ise t 'nin tamsayı kısmını göstermek üzere g katsayısı aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$g = \frac{1}{[n^2/2]} [\sum_{i=1}^n |p_i + q_i - n - 1| - \sum_{i=1}^n |p_i - q_i|] \quad (4.46)$$

Bu katsayı, salgın hastalıkların görülme sıklığına ilişkin çalışmaların yanı sıra gelir dağılımındaki dengesizlikleri incelemede geniş bir uygulama alanına sahiptir (Alhan, 2008).

Teorem 4.12.

X ve Y , kapulası C olan sürekli rastgele değişkenler olsun. X ve Y için Gini katsayısının popülasyon değeri aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\gamma_{X,Y} = \gamma_C = 2 \int_0^1 \int_0^1 (|u + v - 1| - |u - v|) dC(u, v) \quad (4.47)$$

4.3.6. Blomqvist Katsayısı (β)

Blomqvist (1950), \tilde{x} ve \tilde{y} sırasıyla X ve Y 'nin medyanı olmak üzere, β ile gösterilen medyan korelasyon katsayısını aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

$$\beta = \beta_{X,Y} = P[(X - \tilde{x})(Y - \tilde{y}) > 0] - P[(X - \tilde{x})(Y - \tilde{y}) < 0] \quad (4.48)$$

X ve Y sırasıyla F ve G marjinal dağılım fonksiyonlarına ve H ortak dağılım fonksiyonuna sahip sürekli rastgele değişkenler olmak üzere kapulaları C olsun. Bu takdirde,

$$F(\tilde{x}) = G(\tilde{y}) = 1/2$$

$$\begin{aligned}\beta &= 2P[(X - \tilde{x})(Y - \tilde{y}) > 0] - 1 \\ &= 2\{P[X < \tilde{x}, Y < \tilde{y}] + P[X > \tilde{x}, Y > \tilde{y}]\} - 1 \\ &= 2\{H(\tilde{x}, \tilde{y}) + [1 - F(\tilde{x}) - G(\tilde{y}) + H(\tilde{x}, \tilde{y})]\} - 1 \\ &= 4H(\tilde{x}, \tilde{y}) - 1\end{aligned}$$

biçimindedir. $H(\tilde{x}, \tilde{y}) = C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olduğundan β katsayısı, kapula ile aşağıdaki gibi ifade edilir (Nelsen, 1999).

$$\beta = \beta_c = 4C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - 1 \quad (4.49)$$

Bu katsayı, bir yığının asimptotik normal dağılımlı olduğu varsayımı altında ve iki değişken arasındaki ilişki -1 veya $+1$ sınırlarından birine yakın olduğunda kullanılmaktadır. (Blomqvist, 1950).

4.3.7. Bağımlılık

Tanım 4.5’de uyumluluk ölçüsünün sağladığı özelliklerden ve Kendall tau, Spearman rho, Gini katsayısı ve Blomqvist katsayılarının birer uyum ölçüsü olduğundan bahsedildi. Tanım 4.5’deki dördüncü özellikten hareketle, X ile Y rastgele değişkenleri bağımsızsa uyum ölçüsü sıfırdır. Ancak bunun tersi doğru olmayabilir. Yani, X ile Y değişkenlerinin uyum ölçüsü sıfır olup, değişkenler bağımlı olabilir. Dolayısıyla bu kısımda birliktelik ölçülerinden bağımlılık ölçüleri incelenecektir.

Lancaster (1963) bir bağımlılık ölçüsünün, karşılıklı bağımlılık ve bağımsızlıkta uç noktalarda X ve Y değişkenlerinin ilişki derecesini yansıttığını ifade etmiştir. Renyi (1959), Lancaster (1963) Schweizer ve Wolff (1981), Jogdeo (1982), tarafından bağımlılık ölçüsüne ilişkin özellikler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.6.

C kapulasına sahip X ve Y rastgele değişkenlerinin arasındaki ilişkiyi gösteren δ ölçüsü, aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, bir bağımlılık ölçüsüdür. Bu ölçü $\delta_{X,Y}$ ya da δ_C ile gösterilir (Nelsen, 1999).

- δ , her X, Y sürekli rastgele değişken çifti için tanımlıdır.
- $0 \leq \delta_{X,Y} \leq 1$

- $\delta_{X,Y} = \delta_{Y,X}$
- X ile Y bağımsızdır $\Leftrightarrow \delta_{X,Y} = 0$
- Y , X 'in hemen hemen her yerde kesin monoton fonksiyonudur $\Leftrightarrow \delta_{X,Y} = 1$
- α ve β , sırasıyla X ve Y 'nin değer kümelerinde hemen hemen her yerde kesin monoton fonksiyonlar ise, $\delta_{\alpha(X)\beta(Y)} = \delta_{X,Y}$ 'dir.
- $\{(X_n, Y_n)\}$, C_n kapularına sahip sürekli rastgele değişkenler dizisi ve $\{C_n\}$ noktasal olarak C 'ye yakınsıyorsa, $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{C_n} = \delta_C$ 'dir.

4.3.8. Pearson Korelasyon Katsayısı (r)

X ve Y , kapulası C olan sürekli rastgele değişkenler olmak üzere, sırasıyla F ve G marjinallerine sahip olsun. Bu takdirde Pearson korelasyon katsayısı, kapulalar ile aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$r(X, Y) = \frac{1}{D(X)D(Y)} \int_0^1 \int_0^1 [C(u, v) - uv] dF^{-1}(u) dG^{-1}(v) \quad (4.50)$$

Burada, D standart sapmayı ifade eder.

4.3.9. Schweizer ve Wolff Katsayısı (σ)

X ve Y , kapulası C olan sürekli rastgele değişkenler olsun. Bu takdirde, X ve Y rastgele değişken çifti için Schweizer ve Wolff katsayısı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\sigma_{X,Y} = \sigma_C = 12 \int_0^1 \int_0^1 |C(u, v) - uv| dudv \quad (4.51)$$

Eşitlikten görüldüğü üzere bu katsayı, X ve Y rastgele değişken çiftinin kapulası ile bağımsızlık kapulası arasındaki mutlak uzaklığın bir fonksiyonudur (Schweizer ve Wolff, 1981).

4.3.10. Bölge Bağımlılığı

Kimeldorf ve Sampson (1989) genellikle, bir birliktelik ölçüsünün özellikleri ile beraber hangi bağımlılık yapısına uyduğunun anlaşılmasının zor olduğunu belirtmiştir. Dolayısıyla bağımsızlığın ve monoton fonksiyonel bağımlılığın uç değerleri arasındaki bağımlılığı ifade eden kapulalara ihtiyaç duyulmuştur.

Pozitif bağımlılık özelliği, rastgele değişkenlerin birlikte değer alma eğilimini yansıtır. Yani bir değişken büyük (küçük) değerler aldığımda diğeri de büyük (küçük) değer alma eğilimindeyse pozitif bağımlıdır. Negatif bağımlılıkta ise bir değişken büyük (küçük) değerler aldığımda diğerrinin küçük (büyük) değerler alma eğiliminde olmasıdır.

Tanım 4.7.

X ve Y rastgele değişkenler olsun. $\forall(x, y) \in R^2$ için;

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y) \quad (4.52)$$

veya

$$P(X > x, Y > y) \geq P(X > x)P(Y > y) \quad (4.53)$$

ise X ve Y pozitif bölge bağımlı (Positive Quadrant Dependence) (PQD)'dir.

Marjinal dağılım fonksiyonları sırasıyla F ve G , ortak dağılım fonksiyonu H ve kapulası C olan X ve Y rastgele değişkenlerinin pozitif bölge bağımlılığı aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

$$\forall(x, y) \in R^2 \text{ için } H(x, y) \geq F(x)G(y) \quad (4.54)$$

veya

$$\forall(u, v) \in I^2 \text{ için } C(u, v) \geq uv \quad (4.55)$$

Benzer şekilde,

$$P(X \leq x, Y \leq y) < P(X \leq x)P(Y \leq y) \quad (4.56)$$

veya

$$P(X > x, Y > y) < P(X > x)P(Y > y) \quad (4.57)$$

ise X ve Y negatif bölge bağımlı (Negative Quadrant Dependence)(NQD)'dir (Lehmann, 1966).

Pozitif bölge bağımlılığı, rastgele değişkenlerin aynı anda küçük ya da büyük değerler aldığı durumlarda nasıl davrandıklarını gösterir. Bu yüzden güvenirlilik analizleri, risk yönetimleri gibi alanlarda daha çok kullanılmaktadır.

Teorem 4.13.

X ve Y , marjinal dağılım fonksiyonları sırasıyla F ve G , ortak dağılım fonksiyonu H ve kapulası C olan sürekli rastgele değişkenler olsun. X ve Y pozitif bölge bağımlıysa, birliktelik ölçüleri için aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir (Nelsen, 1999).

$$3\tau_{X,Y} \geq \rho_{X,Y} \geq 0, \gamma_{X,Y} \geq 0 \text{ ve } \beta_{X,Y} \geq 0 \quad (4.58)$$

4.3.11. Kuyruk Bağımlılığı

Kuyruk bağımlılığı Kendall tau, Spearman rho gibi birliktelik ölçülerinin aksine yerel bağımlılıkları ölçer, yani uç değerlerdeki bağımlılıkla ilişkilidir. Kuyruk bağımlılığı daha çok sağkalım tipi verilerin modellenmesinde kullanılır.

Tanım 4.8.

X ve Y , marjinal dağılım fonksiyonları sırasıyla F ve G , kapulası C olan rastgele değişkenler olsun.

C iki boyutlu bir kapula ve $\lambda_U \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\lambda_U = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1-2\alpha+C(\alpha,\alpha)}{1-\alpha} \quad (4.59)$$

limiti var ise, X ve Y üst kuyruk bağımlılığına sahiptir. $\lambda_U = 0$ ise, X ve Y üst kuyruk bağımlılığına sahip değildir.

Benzer şekilde, $\lambda_L \in [0,1]$ olmak üzere,

$$\lambda_L = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{C(\alpha,\alpha)}{\alpha} \quad (4.60)$$

limiti var ise, X ve Y alt kuyruk bağımlılığına sahiptir. $\lambda_L = 0$ ise, X ve Y alt kuyruk bağımlılığına sahip değildir (Nelsen,1999).

$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x|F(x) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere, tanımlamalar aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

$$\lambda_U(\alpha) = P(Y > G^{-1}(\alpha)|X > F^{-1}(\alpha)) \quad (4.61)$$

$$\lambda_L(\alpha) = P(Y \leq G^{-1}(\alpha)|X \leq F^{-1}(\alpha)) \quad (4.62)$$

Burada dikkat edilirse λ_U ve λ_L değerleri, marjinal dağılımlardan bağımsız yalnızca kapula fonksiyonuna bağlıdır (Topçu, 2013).

4.4. Kapula Tahmin Yöntemleri

Rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı kapula ile istatistiksel olarak, bir parametre ya da parametreler vektörü ile belirlenebilmektedir. Bağımlılığı yansıtan bu parametrelerin tahmin edilmesinde parametrik, yarı-parametrik ve parametrik olmayan olmak üzere üç ayrı yöntem kullanılmaktadır.

4.4.1. Parametrik tahmin yöntemleri

Parametrik tahmin yöntemleri, değişkenlere ait marjinal dağılımlar ve kapula fonksiyonu hakkında bilgi sahibi olduğunda kullanılan yöntemlerdir. Bu kısımda, En Çok Olabilirlik ve Marjinallere İlişkin Çıkarsama yöntemleri tanıtılacaktır.

4.4.1.1. En çok olabilirlik yöntemi (MLE)

Bu yöntemde, tahmin edilen çok değişkenli dağılımın, marjinal dağılımlarına ait parametreleri ile bağımlılık yapısını karakterize eden kapulaya ilişkin parametrelerin tamamı eşanlı tahmin edilir (Joe, 1997). MLE yöntemi parametrenin çok boyutlu olduğu durumlarda, momentler tahmin yöntemine alternatif olup, daha etkin tahmin ediciler elde etmeyi sağlar.

Çok değişkenli bir dağılımın kanonik gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) \prod_{j=1}^n f_j(x_j) \quad (4.63)$$

$$f_j(x_j) = \frac{\partial F_j(x_j)}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n \text{ ve}$$

$$c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)) = \frac{\partial^n C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n))}{\partial F_1(x_1) \partial F_2(x_2) \dots \partial F_n(x_n)} \quad (4.64)$$

olmak üzere, c kapula yoğunluğu C kapulasının n . mertebeden kısmi türevini, f_j 'ler ise marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonlarını ifade etmektedir. Dolayısıyla bu kanonik gösterimden hareketle, kapuların istatistiksel modellenmesi iki adımda gerçekleşir. İlk olarak marjinal dağılımlar belirlenir ve daha sonra uygun kapula fonksiyonu tanımlanır.

Örnek veri matrisi $S = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$ olsun. Bu takdirde, log-olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln\{c(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}), \dots, F_n(x_{nt}))\} + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \ln f_j(x_{jt}) \quad (4.65)$$

Burada θ , kapula ve marjinallere ilişkin parametreler vektörüdür. Marjinal dağılımlar ve kapula fonksiyonu biliniyorsa, yukarıdaki log-olabilirlik fonksiyonu yazılır ve en çok olabilirlik tahmin edicisi $\hat{\theta}_{MLE} = \text{max}l(\theta)$ ile bulunur.

Bu kısımda, kapula ve marjinal olasılık yoğunluk fonksiyonları için asimptotik en çok olabilirlik teorisine uygun olma koşullarını sağladığı varsayılmıştır. Bu varsayım altında, en çok olabilirlik tahmin edicisi normal dağılımlı, tutarlı ve etkin bir tahmin edicidir (Cherubini vd, 2004).

4.4.1.2. Marjinallere ilişkin çıkarsama yöntemi (IFM)

En çok olabilirlik tahmin yönteminde, marjinal dağılımlar ve kapula fonksiyonunun bilinmesi gerektiğinden çok boyutlu modellemelerde zor ve zaman alan hesaplamalarla karşılaşılır. Bu durumda IFM yöntemi tercih edilir. İki aşamalı yöntemde, ilk olarak marjinallere ilişkin en çok olabilirlik parametre tahmini gerçekleşir. Daha sonra elde edilen bu parametreler sabit tutularak, en çok olabilirlik tahmini ile kapula parametreleri bulunur (Joe, 1997).

İlk adımda, marjinal dağılım parametreleri $\hat{\theta}_1$ ile marjinal dağılımlar tahmin edilir.

$$\hat{\theta}_1 = \text{ArgMax}_{\theta_1} \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^n \ln f_j(x_{jt}; \theta_1) \quad (4.66)$$

İkinci adımda, elde edilen $\hat{\theta}_1$ parametresi ile kapula yani bağımlılık parametresi $\hat{\theta}_2$ tahmin edilir.

$$\hat{\theta}_2 = \text{ArgMax}_{\theta_2} \sum_{t=1}^T \ln [c(F_1(x_{1t}), F_2(x_{2t}), \dots, F_n(x_{nt}); \theta_2; \hat{\theta}_1)] \quad (4.67)$$

IFM tahmin edicisi $\hat{\theta}_{IFM} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)'$ vektörü ile gösterilir.

l log-olabilirlik fonksiyonu, l_c kapulanın log-olabilirlik fonksiyonu ve l_j ise j . marjinalin log-olabilirlik fonksiyonu olmak üzere, IFM tahmin edicisi aşağıdaki eşitliğin çözümünden elde edilir.

$$\left(\frac{\partial l_1}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l_2}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l_n}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l_c}{\partial \theta_2} \right) = 0' \quad (4.68)$$

MLE tahmin edicisi ise aşağıdaki eşitliğin çözümünden elde edilir.

$$\left(\frac{\partial l}{\partial \theta_{11}}, \frac{\partial l}{\partial \theta_{12}}, \dots, \frac{\partial l}{\partial \theta_{1n}}, \frac{\partial l}{\partial \theta_2} \right) = 0' \quad (4.69)$$

Bu iki tahmin edici genelde birbirine eşit çıkmamaktadır. Öte yandan IFM tahmin edicisi MLE tahmin edicisinden daha kolay hesaplanmaktadır. Dolayısıyla bu iki tahmin ediciyi kıyaslarken, asimptotik etkinliğin araştırılıp, kovaryans matrislerinin karşılaştırılması gerekir (Alhan, 2008).

Joe (1997), IFM tahmin edicisinin MLE tahmin edicisi gibi asimptotik normallik özelliğine sahip olduğunu kanıtlamıştır. Ayrıca IFM tahmin edicisinin MLE tahmin edicisine göre daha etkin olduğunu göstermiştir (Cherubini vd, 2004). Öte yandan, MLE yöntemi ile IFM yöntemi bazı durumlarda eş değer sonuçlar verebilmektedir. Örneğin, normal dağılımlı marjinallere sahip Gaussian kapula için eş değerlik söz konusudur.

4.4.2. Yarı-parametrik tahmin yöntemleri

Yarı-parametrik tahmin yönteminde, kapulaya ait yoğunluk fonksiyonunun bilinmesi gerekir. Dolayısıyla IFM yöntemi gibi marjinal dağılımların modellenmesini gerektirmez. Bu açıdan parametrik yöntemlere göre daha esnek iken çok fazla sayısal işlem içerdiği ve kapula yoğunluk fonksiyonunun bilinmesi gibi önkoşul gerektirdiğinden, parametrik olmayan yöntemlere göre daha az çekicidir. Bu bölümde yarı-parametrik bir yöntem olan sözde en çok olabilirlik yöntemi tanıtılacaktır.

4.4.2.1. Sözde en çok olabilirlik yöntemi (PMLE)

c_θ , bir C_θ kapulasının yoğunluk fonksiyonu olmak üzere;

$$F_\theta(x_1, x_2, \dots, x_n) = C_\theta(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

dağılımından bir $S = \{x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}\}_{t=1}^T$ örnek veri matrisi tanımlansın. Bu takdirde,

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^T \ln \{c_\theta(F_1(x_{1t}), \dots, F_n(x_{nt}))\} \quad (4.70)$$

fonksiyonunu max yapan değer sözde en çok olabilirlik tahmin edicisidir (Genest vd, 1995).

Oakes (1994), Genest ve Ghoudi (1994) ile Shih ve Louis (1995) çalışmalarında sözde en çok olabilirlik fonksiyonundaki bağımlılık parametresini, sıra sayılarına dayalı bir tahmine uyarlamışlardır.

c_θ , yoğunluğuna sahip C_θ kapulasının mutlak sürekliliğini gerektiren, sıra sayılarına dayalı sözde en çok olabirlik tahmini aşağıda verilen log-olabirlik fonksiyonu max yapan değerdir.

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln \left\{ c_\theta \left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{S_i}{n+1} \right) \right\} \quad (4.71)$$

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln \{ c_\theta (F(X_i), G(Y_i)) \} \quad (4.72)$$

Klasik log-olabirlik fonksiyonundaki bilinmeyen F ve G marjinal dağılım fonksiyonlarının yerine, R_i ve S_i , örnekten elde edilen X_i ve Y_i değişkenlerinin sıra sayıları olmak üzere aşağıdaki eşitlikler alınır.

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I(X_i \leq x) = \frac{R_i}{n+1} \quad (4.73)$$

$$G_n(y) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n I(Y_i \leq y) = \frac{S_i}{n+1} \quad (4.74)$$

Bu yöntemde θ bağımlılık parametresinin gerçek sayı olması gerekmediğinden diğer yöntemlere göre daha fazla uygulanabilir (Genest ve Favre, 2007).

4.4.3. Parametrik olmayan tahmin yöntemleri

Parametrik olmayan tahmin yöntemi, birliktelik ölçülerini kullanarak, momentler yöntemine dayalı tahmin yapar. Marjinal dağılımların bilinmesini gerektiren parametrik yöntemler ya da marjinal dağılımların örnekten elde edildiği yarı-parametrik yöntemler gibi olmayıp, dağılımdan bağımsızdır. Bu bölümde parametrik olmayan yöntemlerden, Kendall tau ve Spearman rho değerlerine dayanan yöntemler tanıtılacaktır.

4.4.3.1. Kendall Tau (τ) değerine dayanan yöntem

Kendall tau değeri ile tahmin edilen parametreler, verilerin zayıf bağımlılık gösterdiği durumda daha iyi sonuçlar verirken, yüksek bağımlılık durumunda iyi sonuçlar vermemektedir (Phelps ve Weissfeld, 1997). Öte yandan hesaplama kolaylığı, doğrusallık ve normal dağılım varsayımlarına ihtiyaç duyulmadığı için, Kendall tau değerine daha çok tercih edilir.

$\theta = g(\tau)$ şeklinde bir fonksiyona sahipse, $\hat{\theta}_n = g(\tau_n)$ şeklinde tanımlanan $\hat{\theta}_n$, θ için Kendall tau değerine dayalı bir tahmin edicidir.

Genest ve Rivest (1993),

$$\tilde{W}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I_{ji} = \frac{1}{n} \#\{j: X_i \leq X_j, Y_i \leq Y_j\} \quad (4.75)$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (W_i + \tilde{W}_i - 2\bar{W})^2 \quad (4.76)$$

olmak üzere, $\sqrt{n} \frac{\tau_n - \tau}{4S} \sim N(0,1)$ olduğunu göstermişlerdir. Burada, $\bar{W} = \frac{W_1 + W_2 + \dots + W_n}{n}$ ve W_i , $W = C(U, V) = H(X, Y)$ rastgele değişkeninin, n birimlik örneğinden i . değerinin beklenen değeridir.

$$K_0(w) = P(UV \leq w) = \int_0^1 P\left(U \leq \frac{w}{v}\right) dv = \int_0^w 1 dv + \int_w^1 \frac{w}{v} dv = w - w \ln w$$

ve k_0 olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere, W_i aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$W_i = n \binom{n-1}{i-1} \int_0^1 w k_0(w) \{K_0(w)\}^{i-1} \{1 - K_0(w)\}^{n-i} dw$$

Delta metodu uygulandığında $n \rightarrow \infty$ için, $\hat{\theta}_n \sim N\left(\theta, \frac{1}{n} \{4S g'(\tau_n)\}^2\right)$ olur.

Böylece θ için $1 - \alpha$ güven katsayılı güven aralığı aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\theta}_n \pm Z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} 4S |g'(\tau_n)| \quad (4.77)$$

Arşimedyen kapula aileleri için Genest ve Mackay (1986) tarafından, Kendall tau ve üretici fonksiyon arasındaki eşitlik aşağıdaki gibi gösterilmiştir.

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt \quad (4.78)$$

4.4.3.2. Spearman Rho (ρ) değerine dayanan yöntem

Bu yöntemde Kendall tau yöntemine benzer olarak, örnekten Spearman rho değeri tahmin edilir. Daha sonra elde edilen bu tahmin değeri kullanılarak kapula parametresi tahmin edilir.

$\theta = h(\rho)$ şeklinde bir fonksiyona sahipse, $\hat{\theta}_n = h(\rho_n)$ şeklinde tanımlanan $\hat{\theta}_n$, θ için Spearman rho değerine dayalı bir tahmin edicidir.

Gaenssler ve Stute (1987), $\rho_n \sim N\left(\rho, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ sonucuna ulaşmışlardır.

Borkowf (2002), σ^2 'nin C kapulasına bağlı olduğunu ifade etmiştir.

Delta metodu uygulandığında, $n \rightarrow \infty$ için, $\hat{\theta}_n \sim N\left(\theta, \frac{1}{n} \{\sigma_n h'(\rho_n)\}^2\right)$ olur.

Böylece θ için $1 - \alpha$ güven katsayılı güven aralığı aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\theta}_n \pm Z_{\alpha/2} \frac{1}{\sqrt{n}} \sigma_n |h'(\rho_n)| \quad (4.79)$$

Borkowf, C kapulası yerine C_n uygulanırsa, σ^2 için tutarlı bir tahmin edici olan σ_n^2 'i aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

$$\sigma_n^2 = 144(-9A_n^2 + B_n + 2C_n + 2D_n + 2E_n) \quad (4.80)$$

Burada,

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1}$$

$$B_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{R_i}{n+1} \right)^2 \left(\frac{S_i}{n+1} \right)^2$$

$$C_n = \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{S_i}{n+1} I(R_k \leq R_i, S_k \leq S_j) + \frac{1}{4} - A_n$$

$$D_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{S_i}{n+1} \frac{S_j}{n+1} \max\left(\frac{R_i}{n+1}, \frac{R_j}{n+1}\right)$$

$$E_n = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{R_i}{n+1} \frac{R_j}{n+1} \max\left(\frac{S_i}{n+1}, \frac{S_j}{n+1}\right)$$

olarak tanımlanmıştır (Genest ve Favre, 2007).

Çizelge 4.1. Bazı kapula ailelerine ilişkin parametre aralıkları ve ilişki katsayıları

Aileler	Kapulanın Formu $C_\theta(u, v)$	Parametre Aralığı	Kendall Tau (τ)	Spearman Rho (ρ)
Ali-Mikhail-Haq	$\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	$-1 \leq \theta \leq 1$	$\frac{3\theta - 2}{3\theta} - \frac{2(1-\theta)^2 \ln(1-\theta)}{3\theta^2}$	-
Cuadras-Auge	$uv \left[\min\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right) \right]^\theta$	$0 \leq \theta \leq 1$	$\frac{\theta}{2 - \theta}$	$\frac{3\theta}{4 - \theta}$
Clayton	$(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$0 \leq \theta < \infty$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	-
Farlie-Gumbel-Morgenstern	$uv[1 + \theta(1-u)(1-v)]$	$-1 \leq \theta \leq 1$	$\frac{2\theta}{9}$	$\frac{\theta}{3}$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left[1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right]$	$\theta \in R - \{0\}$	$1 - \frac{4}{\theta} [1 - D_1(\theta)]$	$\frac{1}{- \frac{12}{\theta} [D_1(\theta) - D_2(\theta)]}$
Gumbel-Hougaard	$\exp \{ - [(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta} \}$	$1 \leq \theta < \infty$	$1 - \frac{1}{\theta}$	-
Gaussian	$\Phi_G(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v); \theta)$	$-1 \leq \theta \leq 1$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\theta)$	$\frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\theta}{2}\right)$
Plackett	$\frac{[1 + (\theta - 1)(u + v)] - \sqrt{[1 + (\theta - 1)(u + v)]^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)}$	$0 < \theta < \infty$	-	$\frac{(\theta + 1)}{(\theta - 1)} - \frac{2\theta \ln \theta}{(\theta - 1)^2}$

Not: Bu çizelgedeki D_1 ve D_2 'ler Debye fonksiyonu olarak adlandırılır ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$D_k(-x) = D_k(x) + \frac{kx}{k+1} \quad \text{ve} \quad D_k(x) = \frac{k}{x} \int_0^x \frac{t^k}{e^t - 1} dt$$

4.4.4. Diğer tahmin yöntemleri

Kapula yöntemi ile bağımlılık parametresi belirlerken, uygulamada karşılaşılan zorluklar ve bazı varsayımlar gereği yeni tahmin yöntemleri geliştirilmiş ve önceki yöntemlerle karşılaştırılmıştır. Genest ve Rivest (1993), gözlenen ve beklenen frekanslar üzerinden ki-kare istatistiği hesaplamış ve en küçük ki-kare değerine sahip kapula modelinin bağımlılığı en iyi karakterize eden model olduğunu ifade etmişlerdir. Diğer bir çalışmada, Kolmogorov-Smirnov ve Anderson-Darling uzaklık ölçüleri kullanılarak, bir kapula modelinin uyum iyiliği test edilmiştir. Bu yöntemin amacı her bir gözlemi, uzaklık ölçülerine dayanan marjinal olasılıklara dönüştürerek test istatistiğini doğrudan türetmektir (Kole vd, 2007). Huard vd (2006), Bayes tahmin yöntemini kullanarak bağımlılık parametrelerini elde etmişlerdir. Biau ve Wegkamp (2005), minimum uzaklık yöntemi ile kapula yoğunluk fonksiyonunu tahmin etmişlerdir. Tsukahara (2005) minimum uzaklık ve denklem tahmin etme yaklaşımına dayalı iki yeni tahmin ediciyi simülasyon çalışmasıyla araştırmış ve sözde en çok olabilirlik tahmin edicisiyle kıyaslamıştır. PMLE tahmin edicisinin daha etkin olduğu sonucuna ulaşmıştır. Prokhorov ve Schmidt (2006), parametre tahmini, momentler yöntemine dayalı olan genelleştirilmiş momentler yöntemini geliştirerek simülasyon çalışması yapmışlardır.

4.4.5. Tahmin yöntemlerinin özellikleri

Literatürde birçok kapula tahmin yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntemler karşılaştırıldığında, birbirlerine göre üstün ve zayıf yönlerinin olduğu görülmektedir. Örneğin, parametrik yöntemlerde marjinal dağılımlar ve kapula yoğunluk fonksiyonunun bilinmesi gerekirken, parametrik olmayan yöntemler dağılımdan bağımsız birliktelik ölçülerini kullanırlar. Diğer yandan, PMLE yönteminde sadece kapula yoğunluk fonksiyonunun bilinmesi gerektiğinden, bu yöntem parametrik yöntemlere göre daha çok tercih edilirken, parametrik olmayan yöntemlere göre daha az tercih edilir. Sonuç olarak, yapılan analizlerde en uygun kapula tahmin yönteminin

kullanılması, istatistiksel modelin sağlam (robust) yani en yüksek etkinliğe sahip olmasını sağlar.

Kim vd (2007), parametrik ve yarı-parametrik tahmin yöntemleri hakkında aşağıdaki sonuçlara ulaşmışlardır.

- Marjinal dağılımların yanlış belirlenmesi durumunda, IFM ve MLE yöntemleri sağlam değildir.
- PMLE'nin IFM'ye göre avantajı, PMLE'nin marjinal dağılımları açıkça modellemeyi gerektirmemesidir.
- PMLE yöntemi ile IFM yöntemi kavramsal olarak birbirine benzerdir, ancak PMLE yöntemi marjinal dağılımların modellenmesini gerektirmediğinden, marjinal dağılımların yanlış belirlenmesi halindeki modelin sağlam olmama sorununu ortadan kaldırır.
- Çok boyutlu analizlerde PMLE tahmini, istatistiksel hesaplamalar ve analiz bakımından, IFM tahmini gibi hesaplanması kolaydır.
- PMLE yönteminin simülasyon çalışmaları sonucunda, uygulamada karşılaşılan durumların çoğunda, MLE ve IFM tahminlerinden daha iyi olduğu gözlemlenmiştir (Alhan, 2008).

4.5. Kapula Seçimi

Yapılan deneysel çalışmalarda, seçilen kapula modelinin verilere ne kadar uyduğunun bilinmesi gerekir. Örneğin veri kuyruk tipi bağımlılık gösterirken, seçilen kapula modeli bu bağımlılığı yansıtmayabilir. Bunun yanı sıra, uygulanan kapula modellerinden hangisinin veriye en uygun olduğunun belirlenmesi gerekir.

4.5.1. Seçim kriterleri

Farklı kapula fonksiyonları farklı bağımlılık modelleri sergiler. Bu nedenle, bağımlılık yapısı araştırılmak istenildiğinde, birkaç kapula modeli tahmin edilir ve verilere en uygun olan seçilir. Kapula tahminindeki ilk adım, marjinal dağılımları tanımlamak ve tahmin etmektir. Bu tahmin, verilerin ekonomik ve istatistiksel özelliklerine göre yapılmalıdır. Marjinal modellerin uygunluğu, tanı ve uyum iyiliği testleri ile değerlendirilmelidir. İkinci ve daha zor olan adım bir kapula fonksiyonu belirlemektir.

Bu aşamada ön bilgiler rol oynar. Örneğin, veriler sağ kuyruk bağımlılığı sergiliyorsa, seçilen kapula fonksiyonu bu bağımlılığın modellenmesine izin vermelidir. Bir veri bağlamı hem pozitif hem de negatif bağımlılık sergiliyorsa, sadece pozitif bağımlılığa izin veren kapula seçimi kısıtlayıcı olur. Sonuç olarak yapılan deneysel çalışmalarda, birden fazla kapula modeli deneyerek, bağımlılık yapısını keşfetmek en etkili yöntemdir (Trivedi ve Zimmer, 2005).

Genest ve Rivest (1993), iki değişkenli Arşimedyen kapulalar arasında seçim yaklaşımını ele almışlardır.

X_i ve Y_i rastgele değişkenler ve her $i = 1, \dots, N$ için (X_i, Y_i) mevcut olsun. X_i ve Y_i 'nin ortak dağılım fonksiyonu H ve kapulası C_φ olsun. Bizim amacımız kapula fonksiyonunun formunu yani φ 'yi belirlemektir. $Z_i = H(X_i, Y_i)$ rastgele bir değişken ve dağılım fonksiyonu $K(z) = P(Z_i \leq z)$ olsun. Bu dağılım fonksiyonu, aşağıda verilen Arşimedyen kapulanın üreticisiyle ilişkilidir.

$$K_\varphi(z) = z - \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)} \quad (4.81)$$

φ fonksiyonunu belirlemek için, veriden Kendall tau değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\tau_n = \binom{N}{2}^{-1} \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \text{sign}[(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)] \quad (4.82)$$

İkinci adımda, sözde gözlemler belirlenerek, K_n 'in parametrik olmayan tahmini bulunur.

$$Z_i = H(X_i, Y_i) = (n-1)^{-1} \sum_{j=1}^n I[(X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i)], \quad i = 1, \dots, n \quad (4.83)$$

$$K_n(z) = \frac{Z_i \leq z \text{ olan gözlemlerin sayısı}}{n-1} \quad (4.84)$$

Daha sonra K_φ 'nin parametrik tahmini bulunur. $\tau_n \rightarrow \theta_n$ ise $\varphi_n(t) \rightarrow K_{\varphi_n}(z)$ 'dir. Bu adım, her karşılaştırmada arzu edilen kapula için tekrarlanır. En iyi üretici, $K_n(z)$ fonksiyonuna en yakın $K_{\varphi_n}(z)$ tahminidir. Bu yakınsama, aşağıdaki uzaklık fonksiyonunun minimum olmasıyla sağlanır (Najjari, 2014).

$$\int [K_{\varphi_n}(z) - K_n(z)]^2 dK_n(z) \quad (4.85)$$

Bağımlılık yapısını belirleyen kapula seçiminin diğer yaklaşımı, tahminden önce değişkenlerin bağımlılık yapılarının grafiksel olarak incelenmesidir (Bu yaklaşım, marjinal dağılımlarda ortak değişkenler (covariate) bulunmadığında uygulanabilir).

Örneğin serpmeye diyagramı standart modellerden birine benzer ise bu, birden fazla uygun kapula seçimine işaretler. Örneğin, değişkenler sol kuyrukta yüksek derecede ilişkili ise, Clayton kapula uygun olabilir. Simetrik ya da negatif bağımlılık söz konusu olduğunda Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) kapulası uygun bir seçimdir. Bağımlılık nispeten güçlü ise, FGM kapuladan kaçınılmalıdır (Trivedi ve Zimmer, 2005).

Diğer bir yaklaşım, maksimum olabilirlik fonksiyonu ile kullanılan AIC ya da BIC değerleridir.

$$BIC = -2 \ln(L) + k \ln(n) \quad (4.86)$$

Bu eşitlikte $\ln(L)$ maksimize edilmiş log-olabilirlik değeri, k parametre sayısı, n ise gözlemlerin sayısıdır. En küçük BIC değerine sahip kapula en iyi uyuma sahip olan kapuladır.

$$AIC = -2 \ln(L) + 2k \quad (4.87)$$

Benzer şekilde, $\ln(L)$ maksimize edilmiş log-olabilirlik değeri, k parametre sayısı olmak üzere en küçük AIC değerine sahip olan kapula, bağımlılığı en iyi ortaya koyan modeldir.

5. ENERJİ ETKİNLİKLERİNİN TAHMİN EDİLMESİ

5.1. Genel Bilgi

Enerji temel anlamda, mal ve hizmetler için vazgeçilmez bir unsurdur. Mikro açıdan ele alındığında bir işletmenin yaşayabilmesi için en önemli besin kaynağı, makro açıdan ise ülkelerin refah artışı için gerekli üretim artışının önemli bir girdisi konumundadır (Konca, 2018).

Ekonomik ve toplumsal kalkınmanın önemli unsurlarından biri olan enerji, başta gelişmekte olan ülkeler olmak üzere tüm dünya ülkeleri için kritik bir öneme sahiptir. Enerji olmadan üretim yapmak, ulaşım olanaklarını kullanmak kısacası günlük hayatı devam ettirmek mümkün değildir. Bu bağlamda enerji, kalkınma programlarının temelini oluşturur.

Son yıllarda artan nüfus, ekonomik büyüme, kentleşme ve teknolojik gelişmeler ülkelerin enerji ihtiyacını yükseltmektedir. Kaynakların sınırlı olması, yükselen enerji fiyatları ve buna bağlı olarak gelişen olumsuz çevresel koşullar gereği, tüm ülkeler ileriye yönelik stratejik planlama faaliyetleri oluşturmaktadır.

1970'li yıllarda yaşanan kriz, birincil enerji kaynaklarının tükenebilir ve kullanımlarının ekonomik, teknik gibi birçok faktörle sınırlı olduğunu açıkça ortaya koymuştur. Kriz sonrası ülkeler, sanayinin temel girdisi olan enerji maliyetlerini azaltmaya yönelik önlemler almışlardır. Bu dönemde ülkeler yerel enerji kaynaklarına doğru yönelirken enerjinin korunmasına yönelik teknolojileri geliştirmişlerdir (Diakoulaki vd, 1999). 1980'li yıllarda enerji kullanımının artışı ile birlikte enerji araştırmalarının yanı sıra, çevre konularında da gelişen bir bilinç oluşmuştur. Enerji kaynaklarının sonsuz olmadığına bilincine varılması, artan enerji kullanımının çevreye zarar vermesi ile birlikte enerjiyi etkin bir biçimde üretmek, üretilen enerjiyi verimli kullanmak gibi enerji ve çevre konusunda politikalar üretmek büyük önem kazanmıştır.

Enerji kaynaklarının kullanımında etkinliğin sağlanması, alternatif enerji kaynaklarının üretiminin artırılması konuları, enerji verimliliği kavramını gündeme getirmiştir. Enerji verimliliği, aynı miktar hizmeti ya da faydalı çıktıyı üretmek için daha az enerji kullanmaktır (Patterson, 1996). Diğer bir ifadeyle enerji verimliliği,

enerji kaynaklarının üretimden tüketime kadar tüm aşamalarda en etkin biçimde değerlendirilmesidir.

Enerjinin etkin kullanılıp kullanılmadığının belirlenmesi ve ülkeler arasında enerji etkinliğinin karşılaştırılmasında çeşitli göstergeler kullanılmaktadır. Bunlardan en sık kullanılanları, kişi başına enerji tüketimi ile enerji yoğunluğudur. Enerji yoğunluğu gayri safi yurtiçi hasıla başına tüketilen enerji miktarıdır. Bir ülkenin enerji yoğunluğu düşük ise, aynı miktarda ürünü daha az enerji ile üretir. Dolayısıyla, enerji yoğunluğu düşük ülkelerin enerji etkinliği yüksektir. Ülkeler arasında enerji kullanım etkinliklerinin ve sosyo ekonomik düzeylerin farklı olması gibi sebeplerden, enerji yoğunluğu ülkeden ülkeye farklılık gösterir. Gelişmiş ülkelerde enerji yoğunluğu, gelişmekte olan ülkelere göre daha düşüktür (Topallı, 2012).

Enerji etkinliği ve enerji yoğunluğu farklı açılardan, benzer bir olguyu ölçer. Enerji yoğunluğu enerji etkinliğinin tersi olup, bir süreçteki belirli bir çıktı ve etkinliği ölçmektedir. Enerji etkinliği, teknolojiye ve üretim yöntemlerine bağlı olup aynı zamanda bir ekonominin enerji yoğunluğunu da etkiler. Bu yüzden birçok çalışmada enerji etkinliği, enerji yoğunluğu tarafından ölçülmektedir (Bessec ve Meritet, 2007).

Kişi başına enerji tüketimi ise, ülkelerin gelişmişlik seviyesini yansıtan ve enerji etkinliği karşılaştırmalarında kullanılan diğer önemli bir ölçüttür. Dünya genelinde yıllar itibariyle enerji tüketimi artmıştır. Gelişmiş ülkelerin gelişmekte olan ülkelere göre artan nüfus, teknolojik gelişmeler, ekonomik büyüme gibi nedenlerden dolayı kişi başı enerji tüketimi daha fazladır.

Ülkelerin başarılı bir enerji stratejisi izlemeleri için ilk olarak yapmaları gereken, enerji etkinliğini ölçen en uygun göstergelyi bulmaktır. Bunun için birçok araştırmacı enerji etkinliğinin zaman içinde değişimini incelemek, ülke içi ya da ülkeler arası enerji etkinliğini karşılaştırmak adına uygun göstergeler elde etmiştir. Birçok ulusal ve uluslararası enerji kuruluşu oluşturdukları göstergeler ile kendi içlerinde etkinlik ölçümlerini geliştirmişlerdir (Şimşek, 2011). Bunlardan bazıları International Energy Agency (IEA), A Decision-Support Tool For Energy Efficiency Policy Evaluation (ODYSSEE), Energy Information Administration (EIA), World Development Indicators (WDI), World Energy Council, British Petroleum (BP), EUROSTAT, ENERDATA, ILOSTAT gibi enerji kuruluşları ve enerji veri tabanlarıdır. Diğer taraftan çeşitli küresel ve bölgesel örgütler de üye ülkelerine enerji etkinliği konusunda

yol göstererek, ekonomik kalkınma planları yapmaktadırlar. Ülkemizin de içinde bulunduğu Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Teşkilatı, bu bağlamda üye ülkelere ekonomik ve sosyal refahı artıracak politikalar sunmaktadır. 36 üye ülkeden oluşan OECD teşkilatı, dünyanın en gelişmiş ekonomilerinin yanısıra Türkiye, Meksika, Şili gibi gelişmekte olan ülkeleri içermektedir. OECD dünyanın en geniş ve en güvenilir karşılaştırmalı istatistik, ekonomik, sosyal veri ve analiz kaynaklarından biri haline gelmiştir. Çok boyutlu bir yaklaşım izleyen OECD'nin veri tabanı ticaret, tarım, çevre, işgücü, istihdam gibi farklı alanların yanısıra geniş kapsamda sunduğu enerji göstergeleri ile üye ülkelerin enerji etkinliğini değerlendirmede yol göstericidir.

Enerji göstergelerinin yanısıra son yıllarda, enerji etkinliğini ölçmek için birçok teknik geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Ekonometrik teknikler, öngörü teknikleri, optimizasyon teknikleri, ve karar analizi teknikleri gibi birçok yöntem enerji alanında kullanılmıştır. Enerjinin daha etkin bir şekilde üretilip kullanılmasında, ülkeler arası etkinlik ölçümlerinin yapılıp, sonuçların değerlendirilerek kıyaslanmasında ve ülkelerin ileriye dönük enerji politikalarının belirlenmesinde VZA, en sık kullanılan yöntemlerden biridir. Parametrik olmayan bir yöntem olması, çoklu girdi ve çoklu çıktı durumunda da tek bir etkinlik ölçümü sağlaması, diğer yöntemlere göre daha esnek olması ve geliştirilen birçok modele sahip olması ile doğrusal programlama tabanlı VZA yöntemi daha çok tercih edilir.

Son yıllarda enerji etkinliği çalışmaları sanayi, ulaşım, yapı, güç, hizmet, tarım gibi enerji alt sektörlerinden elde edilen veriler kullanılarak yapılmıştır. Sektörel enerji kullanımı, uygulanan enerji politikalarına, sosyo-ekonomik politikalara ve teknolojik gelişime göre değiştiği için enerji etkinliğini sektörel bazda değerlendirmek daha doğru bir yaklaşım olacaktır. Örneğin, ülkemiz ekonomik büyüme ve kalkınmasını sanayileşme üzerine planladığı için, sanayi sektörünün artmasıyla daha fazla enerjiye ihtiyaç duymuş ve sanayi sektörünün toplam tüketim içindeki payı yıldan yıla artmıştır. Diğer yandan modern tarım tekniklerinin geliştirilmesiyle, tarım sektörünün enerji tüketimi içindeki payı artmıştır (Yılmaz, 2012). Dolayısıyla bu bağlamda, her bir sektörü kendi içinde değerlendirerek sonrasında bütüncül bir yaklaşımla, enerji etkinliği üzerinde yorum yapmak daha doğru ve güvenilir sonuçlar elde etmeyi sağlar.

5.2. Veri Seti

Bu çalışmada OECD üyesi 36 ülkenin yapı, sanayi, güç, ulaşım sektörlerindeki enerji etkinliklerini hesaplamak için her bir sektör adına belirlenmiş olan enerji tüketimi, işgücü, gayrisafi yurtiçi hasıla ve karbondioksit emisyon verileri kullanılmıştır. IEA, OECD-Stat, WDI, ILOSTAT veri tabanlarından derlenerek hazırlanan verilerden, kayıp veri olmaması sebebiyle 2011 yılı tercih edilmiştir. Her bir sektör için belirlenen girdi ve çıktı değişkenlerinin anlamlarını aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

Enerji Tüketimi-Yapı (ETY): Bir ülkenin nihai enerji tüketimi, çeşitli enerji hizmetlerini sağlamak için kullanılan enerjinin toplamıdır. Bu değişken, yapı sektörünün nihai enerji tüketiminin, her yıl hesaplanan toplam nihai enerji tüketimine oranı olarak hesaplanır.

İş gücü-Yapı (İY): Bu değişken, yapı sektörü ile istihdam edilen toplam kişi sayısını gösterir. Ülkelerden elde edilen nüfus verileri ile istatistiklerden derlenen istihdamı temsil eder.

Gayrisafi Yurtiçi Hasıla-Yapı (GSYHY): Yapı sektöründen kaynaklanan gayrisafi yurtiçi hasıladır. Bu değişken, ülkelerin mal ve hizmet hacmindeki farklılıklar hariç belirli bir satın alma gücü paritesinin kullanılarak, harcamaların aynı fiyatla ifade edildiği gayrisafi yurtiçi hasıladır. Satın alma gücü paritesi, birbirinden farklı para birimleri arasındaki satınalma gücünü eşitleyerek, ülkeler arasındaki fiyat düzeylerini aynı seviyeye getiren bir değişim oranıdır.

Karbondioksit Emisyonu-Yapı (KEY): Karbondioksit emisyonları, enerji üretimi ve kullanımının büyük ölçüde yan üründür ve küresel ısınmayla ilgili sera gazlarının büyük kısmını oluşturur. Bu değişken, konutlarda yakıt yanmasından kaynaklı emisyonların yanısıra, ticari ve kamu hizmetlerinden kaynaklanan tüm karbondioksit emisyonlarını kapsar.

Çizelge 5.1. Yapı sektörü için girdi ve çıktı değerleri

OECD ÜLKELERİ	ETY	İY	GSYHY	KEY
AVUSTRALYA	13	1014	114.410,0	3,3402
AVUSTURYA	22	354	17.476,8	12,5487
BELÇİKA	20	338	19.456,1	23,7022
KANADA	18	1295	121.696,0	14,8237
ŞİLİ	22	608	7.168.009,7	7,7955
ÇEK CUMHURİYETİ	26	431	224.714,0	9,5725
DANİMARKA	31	160	73.782,0	8,0181
ESTONYA	33	59	1.001,5	2,2586
FİNLANDİYA	20	176	10.905,0	4,1330
FRANSA	25	1889	111.634,0	22,5769
ALMANYA	25	2577	106.503,0	17,8488
YUNANİSTAN	29	246	6.309,9	12,0482
MACARİSTAN	35	260	987.039,0	26,3388
İZLANDA	15	10	63.574,0	0,5348
İRLANDA	26	88	1.587,6	23,3674
İSRAİL	25	162	45.997,4	4,0889
İTALYA	25	1791	82.071,9	18,3250
JAPONYA	16	5020	24.093.300,0	10,4982
KORE	12	1772	58.587.300,0	9,1359
LETONYA	35	61	1.074,2	12,5341
LİTVANYA	26	85	1.814,4	10,1322
LÜKSEMBURG	12	15	2.123,7	13,7964
MEKSİKA	15	3660	1.136.737,3	5,1426
HOLLANDA	17	435	29.794,0	16,3946
YENİ ZELANDA	12	172	10.886,0	4,6543
NORVEÇ	20	190	135.139,0	3,2053
POLONYA	29	1279	120.255,0	15,2101
PORTEKİZ	15	423	8.464,5	6,9303
SLOVAKYA	19	241	5.713,0	15,6164
SLOVENYA	25	54	1.885,0	10,3046
İSPANYA	18	1404	73.980,0	9,4940
İSVEÇ	23	309	185.821,0	5,1627
İSVİÇRE	28	287	30.785,7	32,8133
TÜRKİYE	25	1674	100.016,4	17,5744
BİRLEŞİK KRALLIK	30	2202	85.424,0	19,0659
AMERİKA	18	9584	546.614,4	10,2301

Çizelge 5.2. Yapı sektörünün girdi ve çıktı değişkenlerinin tanımlayıcı istatistikleri

Yapı	Min	Maks	Ortalama	Standart Sapma
ETY	12	35	22,3611	6,5341
İY	10	9584	1120,1389	1832,2572
GSYHY	1001,50	58587300,0	2619813,7639	10447193,2066
KEY	0,5348	32,8133	12,2005	7,4973

Enerji Tüketimi-Sanayi (ETS): Bu değişken toplam nihai enerji tüketiminde, sanayi sektörünün payını gösterir. Sanayi sektöründe metal, kağıt, kimyasal, gıda gibi endüstrilerin kaynakları çıkarması ve mal üretmesi için kullanılan nihai enerji tüketiminin, her yıl hesaplanan toplam nihai enerji tüketimine oranı olarak hesaplanır.

İş gücü-Sanayi (İS): Bu değişken, sanayi sektörü ile istihdam edilen kişi sayısının toplam istihdamdaki yüzdesini gösterir. Sanayi sektörü, madencilik, taşocakçılığı, inşaat, imalat ve kamu hizmetlerinden oluşmaktadır. Bu veri

Uluslararası Çalışma Örgütü'nün ülkelerin işgücü anketlerine dayanarak yaptığı model tahmini ile oluşturulmuştur. Ülkeye özgü faktörler arasındaki farklılıkları hesaba katarak ülkeler arasında ve zaman içinde karşılaştırılabilirliği sağlamak için uyumlaştırılmıştır.

Gayrisafi Yurtiçi Hasıla-Sanayi (GSYHS): Bu değişken sanayi sektöründen kaynaklanan, satın alma gücü paritesi ile hesaplanan gayrisafi milli hasıladır. Satın alma gücü paritesi, ülkeler arasındaki fiyat seviyelerindeki farklılıkları ortadan kaldırırken, ortak para biriminde farklı para birimlerini ifade etmeyi sağlayan dönüşüm oranlarıdır. Güncel fiyatlarla fiziki miktarların akışları yıl sonunda raporlanır ve bu yılda bildirilen fiyatlar ile değerlendirilip, gayrisafi milli hasıla hesaplanır.

Karbondioksit Emisyonu-Sanayi (KES): İmalat sanayilerinden ve inşaatın kaynaklanan karbondioksit emisyonu, sanayide yakıtların yanmasından kaynaklanan tüm emisyonları içermektedir. Bu değişken, ayrıca dönüşüm sektörü için maden ocaklarında kömürün yakılmasıyla ortaya çıkan emisyonları da içerir.

Çizelge 5.3. Sanayi sektörü için girdi ve çıktı değerleri

OECD ÜLKELERİ	ETS	İS	GSYHS	KES
AVUSTRALYA	35	20,8360	277.583,0	10,2272
AVUSTURYA	34	26,0260	61.443,0	17,5202
BELÇİKA	44	23,2340	58.694,7	18,2440
KANADA	32	19,8760	365.409,0	12,3491
ŞİLİ	41	23,3750	35.169.716,6	18,5392
ÇEK CUMHURİYETİ	36	38,4530	1.122.892,0	12,9868
DANİMARKA	19	19,8880	300.293,0	9,4694
ESTONYA	23	32,4340	3.265,3	5,2513
FİNLANDİYA	47	22,9950	38.340,0	15,5217
FRANSA	28	22,1720	258.423,0	14,6819
ALMANYA	36	28,2360	635.684,0	13,1189
YUNANİSTAN	22	17,6890	22.016,4	7,0220
MACARİSTAN	25	30,8390	6.202.863,0	9,4426
İZLANDA	53	18,5540	317.305,8	25,1337
İRLANDA	24	18,8740	40.331,4	10,3634
İSRAİL	20	20,0330	137.218,8	1,2593
İTALYA	29	28,2890	273.890,8	11,7263
JAPONYA	40	25,5140	108.005.700,0	19,4052
KORE	62	24,7690	405.802.100,0	13,9672
LETONYA	21	22,9080	3.192,7	14,1689
LİTVANYA	37	24,5580	6.930,7	10,4846
LÜKSEMBURG	19	13,3600	2.705,8	9,3245
MEKSİKA	35	24,5660	3.785.197,5	14,9203
HOLLANDA	45	17,1690	100.708,0	14,3824
YENİ ZELANDA	38	20,3850	29.913,0	16,9646
NORVEÇ	41	20,2470	898.895,0	16,1371
POLONYA	27	30,6730	347.166,0	9,8674
PORTEKİZ	39	26,8550	25.587,6	13,4354
SLOVAKYA	41	37,4900	17.009,0	20,4262
SLOVENYA	26	31,6590	8.041,9	11,1471
İSPANYA	31	21,7600	171.651,0	14,7545
İSVEÇ	40	19,9260	724.894,0	19,3305
İSVİÇRE	22	22,2790	130.497,5	13,1458
TÜRKİYE	36	26,4610	275.597,3	18,2099
BİRLEŞİK KRALLIK	25	19,1770	210.040,0	8,7758
AMERİKA	26	18,5730	2.557.681,0	8,9016

Çizelge 5.4. Sanayi sektörünün girdi ve çıktı değişkenlerinin tanımlayıcı istatistikleri

Sanayi	Min	Maks	Ortalama	Standart Sapma
ETS	19	62	33,31	10,054
İS	13,3600	38,4530	23,8926	5,5959
GSYHS	2705,8000	405802100,0	15788579,9390	69419356,4668
KES	1,2593	25,1337	13,3502	4,7024

Enerji Tüketimi-Güç (ETG): Elektrik enerjisi tüketimi, kombine ısı ve enerji santralleri ile enerji santrallerinin ürettiği elektriğin toplamından, ısı ve enerji santrallerinin kendi kullandığı elektrik miktarı ile iletim, dağıtım ve dönüşüm kayıplarını çıkardığımızda geriye kalan miktarı ölçer. Bu değişken, elektrik enerjisi tüketiminin orta yaş nüfusa bölünmesiyle elde edilir.

İş gücü-Güç (İG): İstihdam belirli bir süre boyunca, serbest mesleğe ya da ücretli işe sahip tüm bireyleri kapsamaktadır. Bu veri Uluslararası Çalışma Örgütü'nün ülkelerin işgücü anketlerine dayanarak yaptığı model tahmini ile oluşturulmuştur. Elektrik, gaz ve su temini için maden ve taşocaklarında istihdam edilen kişi sayısını belirtir.

Gayrisafi Yurtiçi Hasıla-Güç (GSYHG): Enerji kullanımının birim başına gayrisafi yurtiçi hasılası olarak tanımlanan bu değişken satın alma gücü paritesine göre, enerji kullanımının kilogram başına düşen petrol tüketimi olarak hesaplanır. 2011 yılı satın alma gücü paritesi oranları kullanılarak gayrisafi yurtiçi hasıllar, güncel uluslararası dolara çevrilmiştir.

Karbondioksit Emisyonu-Güç (KEG): Bu değişken kombine ısı ve elektrik üretimi, elektrik üretimi ve ısı santrallerinden kaynaklanan emisyonların toplamını gösterir. Petrol rafinerilerinde yakılan yakıtlar, petrol ve gaz çıkarma, katı yakıtlar, kömür madenciliği ve diğer enerji üreten endüstrilerin üretimi için emisyonlar içermektedir.

Çizelge 5.5. Güç sektörü için girdi ve çıktı değerleri

OECD ÜLKELERİ	ETG	İG	GSYHG	KEG
AVUSTRALYA	10627,2939	368	7,2920	61,5514
AVUSTURYA	8425,1678	58	11,3345	36,4480
BELÇİKA	8021,9093	69	8,1071	27,8573
KANADA	15642,9678	477	5,2543	38,8201
ŞİLİ	3600,3448	281	10,4308	43,1208
ÇEK CUMHURİYETİ	6298,7277	155	7,0628	61,2298
DANİMARKA	6165,9736	35	13,7464	47,9419
ESTONYA	6314,4144	18	5,7916	78,3738
FİNLANDİYA	15710,9738	31	6,2230	53,7472
FRANSA	7232,9802	406	9,7322	18,3218
ALMANYA	7281,2722	681	11,0322	48,4692
YUNANİSTAN	5389,3331	62	10,8571	55,1053
MACARİSTAN	3898,8231	100	9,1353	37,3333
İZLANDA	52373,8770	2	2,1821	0,0000
İRLANDA	5657,5382	27	15,7562	34,3271
İSRAİL	6930,0008	26	10,2539	68,2222
İTALYA	5514,8036	375	12,8508	39,5745
JAPONYA	8099,5987	30	9,9077	51,7105
KORE	10129,9571	167	5,9864	60,4104
LETONYA	3264,0533	22	9,5679	29,7003
LİTVANYA	3529,9188	28	9,4734	39,9119
LÜKSEMBURG	15586,0842	2	11,4201	10,3711
MEKSİKA	2153,7154	477	10,4093	44,6773
HOLLANDA	7060,0538	73	9,9352	42,7740
YENİ ZELANDA	9458,4854	24	7,8368	27,0152
NORVEÇ	23510,3838	85	10,9997	36,9439
POLONYA	3879,5421	573	8,6118	55,9231
PORTEKİZ	4848,2793	67	12,3754	40,6888
SLOVAKYA	5347,5262	66	8,0384	41,3699
SLOVENYA	6753,0737	24	8,0731	40,8296
İSPANYA	5599,3774	255	11,9227	38,2477
İSVEÇ	14030,1632	52	8,2954	24,3281
İSVİÇRE	7928,1907	42	17,5283	9,1304
TÜRKİYE	2696,3148	336	12,7156	43,2775
BİRLEŞİK KRALLIK	5471,9241	515	12,3170	44,9644
AMERİKA	13243,2978	2511	7,0845	48,2274

Çizelge 5.6. Güç sektörünün girdi ve çıktı değişkenlerinin tanımlayıcı istatistikleri

Güç	Min	Maks	Ortalama	Standart Sapma
ETG	2153,7154	52373,8770	9102,1206	8681,9822
İG	2	2511	236,67	434,441
GSYHG	2,1821	17,5283	9,7094	3,0056
KEG	0	78,3738	41,1374	16,2803

Enerji Tüketimi-Ulaşım (ETU): Bu değişken toplam nihai enerji tüketiminde, ulaşım sektörünün payını gösterir. Ulaşım sektöründe araba ve diğer araçların yakıt yanmasının yanısıra, araçların üretiminde, yolların, havalimanlarının, deniz limanlarının ve boru hatlarının oluşturulması gibi altyapı faaliyetlerinde kullanılan nihai enerji tüketiminin, her yıl hesaplanan toplam nihai enerji tüketimine oranı olarak hesaplanır.

İş gücü-Ulaşım (İU): Bu değişken, ulaşım sektöründe istihdam payını gösterir. Ulaşım şirketleri tarafından doğrudan istihdam edilen işçiler, şirket içi taşımacılık yapan işçiler, ulaşım sektörüne hizmet eden işçiler ve okul bölgeleri gibi devlet kurumlarına ulaşım sağlayan işçiler bu kapsama girmektedir.

Gayrisafi Yurtiçi Hasıla-Ulaşım (GSYHU): Güncel fiyatlarda fiziki miktarların akışları yıl sonunda raporlanır ve bu yılda bildirilen fiyatlar ile değerlendirilir. Güncel fiyatlar baz alınarak, konaklama, yemek servisi gibi dağıtım ticareti ve ulaşımdan elde edilen gayri safi yurtiçi hasılayı kapsar.

Karbondioksit Emisyonu-Ulaşım (KEU): Ulaşım sektöründen kaynaklanan karbondioksit emisyonları, yurtiçi havacılık, yurtiçi navigasyon, karayolu, demiryolu ve boru hattı taşımacılığı dahil, uluslararası deniz sığınakları ve uluslararası havacılık hariç olmak üzere, tüm ulaşım faaliyetleri için yakıt yanmasından kaynaklanan emisyonlardır.

Çizelge 5.7. Ulaşım sektörü için girdi ve çıktı değerleri

OECD ÜLKELERİ	ETU	İU	GSYHU	KEU
AVUSTRALYA	39	6,3	237.155,0	23,2938
AVUSTURYA	30	4,9	64.908,8	32,3750
BELÇİKA	22	6	68.751,2	28,4127
KANADA	30	7	277.638,0	31,1013
ŞİLİ	29	7,2	17.751.273,2	29,0173
ÇEK CUMHURİYETİ	23	6,6	662.448,0	14,9067
DANİMARKA	31	4,8	309.281,0	30,2641
ESTONYA	26	8	3.302,1	12,6482
FİNLANDİYA	17	6	28.260,0	22,6672
FRANSA	29	5,2	327.264,0	39,5523
ALMANYA	25	4,8	386.990,0	20,4975
YUNANİSTAN	35	4,9	44.312,7	23,9017
MACARİSTAN	21	6,8	4.341.641,0	24,4372
İZLANDA	11	9,7	259.647,3	43,8503
İRLANDA	35	6,7	25.106,5	30,1249
İSRAİL	37	6,5	119.036,9	23,2000
İTALYA	30	4,8	297.837,8	28,4159
JAPONYA	24	5,9	107.528.200,0	18,1605
KORE	19	5,5	183.164.000,0	14,8372
LETONYA	26	8,5	4.869,9	38,4196
LİTVANYA	25	7,4	8.749,4	37,4449
LÜKSEMBURG	59	6,7	7.261,7	66,0324
MEKSİKA	43	4,1	3.668.077,1	33,3114
HOLLANDA	19	4,7	110.127,0	21,6021
YENİ ZELANDA	36	4,4	32.667,0	46,0034
NORVEÇ	24	5,7	346.771,0	37,8005
POLONYA	25	5,8	347.720,0	15,7345
PORTEKİZ	33	3,6	36.245,0	36,5434
SLOVAKYA	24	6,5	13.680,6	21,6743
SLOVENYA	37	5,6	6.441,4	36,0985
İSPANYA	36	4,9	225.396,0	34,6903
İSVEÇ	23	5,1	579.218,0	49,6464
İSVİÇRE	31	4,2	127.323,1	43,4015
TÜRKİYE	20	4,3	300.454,9	15,4430
BİRLEŞİK KRALLIK	31	5	257.999,0	26,3684
AMERİKA	40	5,7	2.397.717,1	31,7460

Çizelge 5.8. Ulaşım sektörünün girdi ve çıktı değişkenlerinin tanımlayıcı istatistikleri

Ulaşım	Min	Maks	Ortalama	Standart Sapma
ETU	11	59	29,03	8,817
İU	3,6	9,7	5,828	1,3162
GSYHU	3302,1	183164000,0	9010215,881	34864564,5480
KEU	12,6482	66,0324	30,1007	11,3259

5.3. Yöntem

Bu çalışmada ilk olarak, OECD ülkelerinin yapı, sanayi, güç ve ulaşım sektörlerindeki enerji etkinlikleri, her bir sektör için belirlenmiş olan farklı girdi-çıkıtı kombinasyonları ile parametrik olmayan veri zarflama analizi yöntemi kullanılarak hesaplanmıştır. Her bir sektör için belirlenmiş olan enerji tüketimi, işgücü girdi değişkenleri olarak alınırken gayrisafi yurtiçi hasıla istenen çıktı, karbondioksit emisyonu ise istenmeyen

çıktı olarak etkinlik analizine alınmıştır. Karbondioksit emisyonu verilerine değiştirilmiş negatif dönüşüm uygulanmıştır. İlk olarak karbondioksit emisyon verilerinin negatifi alınmıştır. Daha sonra karbondioksit emisyon verilerinin maksimum değeri, negatif sayılara eklenerek, veriler pozitif hale dönüştürülmüştür. İkinci aşamada sektörlerden elde edilen etkinlik değerleri birer tesadüfi değişken olarak ele alınıp, değişkenler arasındaki ikili, üçlü, dörtlü bağımlılık yapıları kapula fonksiyonu ile belirlenmiştir. Bağımlılığı en iyi şekilde ortaya koyan iki ya da çok değişkenli kapula modelinde, bağımlılık parametreleri ve etkinlik değerleri ile birlikte, her bir ülke için tek bir etkinlik skoru elde edilmiştir. Daha sonra her bir sektörün içinde bulunduğu ağ yapısı belirlenerek iki süreçli, üç süreçli ve tüm sektörlerin dahil edildiği dört süreçli sistemler oluşturularak, network veri zarflama analizi ile tüm ülkelerin sistem etkinlik skorları elde edilmiştir. Kapula modeli ile birleştirilen etkinlik skorları ve network VZA'dan elde edilen sistem etkinlik skorları incelenerek, her bir ülke için etkinlik sıralaması belirlenmiştir. Bu iki etkinlik sıralaması arasındaki korelasyona bakılarak karşılaştırma yapılmıştır.

5.4. Bulgular

OECD üyesi 36 ülkenin KVB olarak alındığı bu çalışmada, ülkelerin yapı, sanayi, güç ve ulaşım sektörlerindeki enerji etkinlik değerlerini hesaplamak için VZA yönteminde kullanılan, her bir sektöre göre farklılık gösteren girdi ve çıktı değişkenleri aşağıdaki gibidir:

Girdi değişkenleri:

- Enerji Tüketimi (ET)
- İşgücü (İ)

Çıktı değişkenleri:

- Gayrisafi Yurtiçi Hasıla (GSYH) (İstenen çıktı)
- Karbondioksit Emisyonu (KE) (İstenmeyen çıktı)

Bu çalışmada ilk olarak, girdiye yönelik BCC modeli (2.9) kullanılarak, VZA yöntemi ile her bir sektör için enerji etkinlik değerleri elde edilmiştir. Çıktıların ağırlıklı toplamı ile girdilerin ağırlıklı toplamının oranı 1'den küçük ya da eşit kısıtı ve diğer kısıtlarla birlikte doğrusal programlama modeli elde edilmiştir. Optimal ağırlıklar kullanılarak, her bir KVB için model çözülerek etkinlik değerleri elde edilmiştir. Girdiye yönelik model kullandığımız için etkinlik değeri 1 olan KVB'ler

etkindir. Kullanılan girdi-çıkıtı kombinasyonları ile İzlanda, Kore, Lüksemburg, Yeni Zelanda yapı sektöründe etkin; Danimarka, İsrail, Kore, Lüksemburg sanayi sektöründe etkin; İrlanda, İzlanda, Letonya, Lüksemburg, Meksika, İsviçre, Türkiye güç sektöründe etkin; Estonya, Finlandiya, İzlanda, Kore, Hollanda, Portekiz, Türkiye ulaşım sektöründe etkindir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 5.9'daki gibidir.

Çizelge 5.9. VZA'dan elde edilen etkinlik değerleri

OECD ÜLKELERİ	Yapı	Sanayi	Güç	Ulaşım
AVUSTRALYA	0,9971	0,6416	0,2879	0,6412
AVUSTURYA	0,5455	0,5588	0,4661	0,8253
BELÇİKA	0,6000	0,5751	0,4590	0,8392
KANADA	0,6667	0,6727	0,1974	0,6474
ŞİLİ	0,5455	0,6138	0,7830	0,6584
ÇEK CUMHURİYETİ	0,4615	0,5302	0,4969	0,8271
DANİMARKA	0,4081	1,0000	0,7894	0,8313
ESTONYA	0,4368	0,8480	0,9663	1,0000
FİNLANDİYA	0,6436	0,5810	0,4831	1,0000
FRANSA	0,4800	0,6792	0,8080	0,7953
ALMANYA	0,4800	0,5294	0,3799	0,8750
YUNANİSTAN	0,4138	0,8766	0,6780	0,8203
MACARİSTAN	0,3429	0,7855	0,8008	0,8335
İZLANDA	1,0000	0,7205	1,0000	1,0000
İRLANDA	0,4615	0,7917	1,0000	0,6263
İSRAİL	0,5297	1,0000	0,7491	0,6332
İTALYA	0,4800	0,6553	0,6100	0,8382
JAPONYA	0,7500	0,7607	0,6347	0,8411
KORE	1,0000	1,0000	0,3149	1,0000
LETONYA	0,3485	0,9048	1,0000	0,6697
LİTVANYA	0,4799	0,5440	0,9220	0,7199
LÜKSEMBURG	1,0000	1,0000	1,0000	0,5444
MEKSİKA	0,8000	0,5543	1,0000	0,9099
HOLLANDA	0,7059	0,7783	0,4725	1,0000
YENİ ZELANDA	1,0000	0,6554	0,6937	0,8483
NORVEÇ	0,6531	0,6611	0,2352	0,8040
POLONYA	0,4138	0,7039	0,6286	0,7877
PORTEKİZ	0,8000	0,4975	0,8579	1,0000
SLOVAKYA	0,6316	0,4634	0,6023	0,7719
SLOVENYA	0,5046	0,7308	0,7808	0,7082
İSPANYA	0,6667	0,6142	0,6107	0,7864
İSVEÇ	0,5251	0,6715	0,4075	0,8602
İSVİÇRE	0,4286	0,8636	1,0000	0,9161
TÜRKİYE	0,4800	0,5285	1,0000	1,0000
BİRLEŞİK KRALLIK	0,4000	0,7635	0,5302	0,8063
AMERİKA	0,6667	0,7433	0,1713	0,6864

İkinci aşamada, kapulalar farklı girdi ve çıktıya sahip, aynı karar verme birimleri üzerinde VZA ile hesaplanan etkinlik skorlarının bağımlılığını modellemede kullanılmıştır. Her bir sektör için VZA'dan elde edilen etkinlik değerleri [0,1] aralığında düzgün dağılıma sahiptir. Dolayısıyla, her bir ülke için elde edilen etkinlik değerleri birer tesadüfi değişken olarak kabul edilip, aralarındaki bağımlılık yapısı kapula fonksiyonu ile belirlenmiştir. Böylece iki ya da çok değişkenli dağılımın ortak

dağılım fonksiyonu, bağımlılık parametreleri ile birlikte en uygun kapula modeli ile elde edilmiştir.

Daha sonra ülkelerin yapı, sanayi, güç ve ulaşım sektörlerindeki ağ yapısı gözönüne alınarak network veri zarflama analizi ile etkinlikler hesaplanmıştır. Yapı, sanayi, güç ve ulaşım sektörleri alt süreçler olarak düşünülmüş ve her bir ülke için optimal ağırlık katsayıları bulunarak ve bu optimal değerler kullanılarak, sistem ve süreçlerin etkinlik değerleri elde edilmiştir.

Network VZA'da, her bir süreç için belirlenmiş olan enerji tüketimi, işgücü girdi değişkenleri olarak sisteme alınırken, gayrisafi yurtiçi hasıla ve karbondioksit emisyonu çıktı değişkenleri olarak sisteme alınmıştır. Ağ yapısında ara değişkenler kullanılmamıştır.

Bir ülkenin etkinliği, kullanılan toplam girdilerle birlikte tüm sektörler tarafından üretilen toplam çıktılarla hesaplanabilir. Her bir sektör, diğer ülkelerin eşdeğer sektörleri ile karşılaştırılıp, kendi içinde hesaplanan bir etkinliğe sahip olabilir. Dolayısıyla her sektör bağımsız bir birimdir. Her ülkenin alt sektörleri olduğu için, bu sistem tipik bir paralel yapıdır.

Ağ yapısı paralel olduğundan, kısıtlarıyla birlikte (3.9) modeli kullanılarak, her bir KVB'nin sistem etkinliği hesaplanır. Girdiye yönelik BCC modelinde olduğu gibi amaç fonksiyonu, sistem çıktılarının ağırlıklı toplamını maksimize eder. Amaç fonksiyonu sistemin son çıktılarıyla ilgilidir. KVB_k için oluşturulan amaç fonksiyonunda ise sadece $k - inci$ sistemin son çıktıları söz konusudur. Girdiye yönelik model kullanıldığı için etkinlik değeri 1 olan KVB'ler etkindir.

Modelde, KVB_k 'nin girdilerinin ağırlıklı toplamının 1'e eşit olması, karşılaştırılan her sistem için, ağırlıklı son çıktılarının sistem girdilerine eşit ya da küçük olması gibi sistem kısıtları mevcuttur. Burada oluşturulan sisteme, ara girdiler ya da ara çıktılar dahil değildir. Benzer şekilde, incelenen her bir sistemin her bir süreci için çıktıların, girdilerden küçük ya da eşit olması gibi süreç kısıtları mevcuttur. Modeldeki her bir sistem için sistem ve süreç kısıtlarıyla birlikte (3.9) doğrusal programlama modeli çözülerek optimal ağırlıklar elde edilir. Modelden elde edilen optimal değerler kullanılarak, her bir ülke için sistem etkinliği ve her bir ülkenin yapı, sanayi, güç ve ulaşım sektörü için süreç etkinlikleri elde edilmiştir.

İlk olarak sektörlerden VZA ile elde edilen etkinlik değerleri arasındaki ikili bağımlılık yapısı araştırılmıştır. Kapula fonksiyonu tahmininde, en çok olabilirlik yöntemi kullanılarak parametreler elde edilmiştir. Elde edilen parametrelerle birlikte, etkinlik değerleri en uygun kapula modelinde yerine konularak her bir ülke için tek bir etkinlik skoruna ulaşılmıştır. Network VZA ile Yapı-Sanayi, Yapı-Güç, Yapı-Ulaşım, Sanayi-Güç, Sanayi-Ulaşım, Güç-Ulaşım sistemleri, iki süreçli paralel ağ yapısı olarak ele alınmış, her bir ülke için sistem ve süreç etkinlikleri elde edilmiştir. Network VZA modelinde ara değişkenler kullanılmadığı için, alt sektörlerde yani süreçlerde elde edilen etkinlik değerleri, Çizelge 5.9'daki VZA'dan elde ettiğimiz etkinlik değerleri ile aynıdır.

Sektör etkinliklerinin ikili bağımlılık yapıları incelendiğinde, tahmin edilen parametreler ve bu değişken çiftleri için en uygun kapula aileleri Çizelge 5.10'daki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 5.10. İkili sektör etkinlikleri için uygun kapula aileleri

Sektörler	Kapula	$\hat{\theta}$	λ
Yapı-Sanayi	Student's t	par1=0,2697 par2=11,6421	$\lambda_U = 9,3648$ $\lambda_L = -9,3648$
Yapı-Güç	Student's t	par1=0,1244 par2=16,1748	$\lambda_U = 13,0249$ $\lambda_L = -13,0249$
Yapı-Ulaşım	Gumbel	par=1,0143	$\lambda_U = 0,0195$
Sanayi-Güç	Gumbel	par=1,0064	$\lambda_U = 0,0089$
Sanayi-Ulaşım	Frank	par=4,5811	-
Güç-Ulaşım	Gumbel	par=1,0126	$\lambda_U = 0,0172$

Sektörlerin ikili bağımlılık yapısını gösteren parametreler göz önüne alındığında, Yapı-Sanayi ile Yapı-Güç etkinliklerinin par1 değerleri ve Yapı-Ulaşım, Sanayi-Güç, Sanayi-Ulaşım, Güç-Ulaşım etkinliklerinin par değerleri sıfırdan büyük olduğu için sektör etkinlikleri arasında pozitif ilişki vardır. Sanayi-Ulaşım sektörünün bağımlılık yapısı Frank kapula ile belirlendiği için, Sanayi-Ulaşım sektörü diğer sektörlerle göre daha güçlü pozitif bir bağımlılık yapısı sergiler. Yapı-Sanayi sektör etkinlikleri ve Yapı-Güç sektör etkinlikleri arasında simetrik bağımlılığın ölçüsü olan Pearson korelasyon ölçüsü (par1) düşükken, kuyruk bağımlılığını ifade eden λ_U ve λ_L değerlerine göre yüksek kuyruk bağımlılığı sergilerler. Yapı-Güç sektörü ($\lambda_U = 13,0249, \lambda_L = -13,0249$), Yapı-Sanayi sektörüne ($\lambda_U = 9,3648, \lambda_L = -9,3648$) göre daha güçlü kuyruk bağımlılığına sahiptir. Yapı-Ulaşım, Sanayi-Güç, Güç-Ulaşım sektör etkinlikleri arasındaki bağımlılık yapısı Gumbel kapula ile belirlendiği için, sektör etkinlikleri arasında sağ kuyruk bağımlılığı söz konusudur. Yapı-Ulaşım

sektörü $\lambda_U = 0,0195$ değeri ile diğer sektörler göre daha güçlü sağ kuyruk bağımlılığı sergiler.

Yapı-Sanayi sektörü için, kapula fonksiyonu ile birleştirilen etkinlik değerleri ve network VZA ile hesaplanan ülkelerin etkinlik değerleri ve sıralamaları Çizelge 5.11'deki gibidir.

Çizelge 5.11. Yapı-Sanayi sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları

OECD ÜLKELERİ	Kapula etkinlik	Kapula sıra	Network etkinlik	Network sıra
AVUSTRALYA	0,6406	5	0,8193	5
AVUSTURYA	0,3477	27	0,5521	31
BELÇİKA	0,3869	22	0,5875	24
KANADA	0,4859	10	0,6697	12
ŞİLİ	0,3765	24	0,5797	26
ÇEK CUMHURİYETİ	0,2877	36	0,4959	36
DANİMARKA	0,4081	16	0,7041	10
ESTONYA	0,3937	19	0,6424	17
FİNLANDİYA	0,4144	15	0,6123	22
FRANSA	0,3644	25	0,5796	27
ALMANYA	0,2974	33	0,5047	34
YUNANİSTAN	0,3820	23	0,6452	16
MACARİSTAN	0,2953	35	0,5642	29
İZLANDA	0,7205	3	0,8603	3
İRLANDA	0,3951	18	0,6266	20
İSRAİL	0,5297	8	0,7648	6
İTALYA	0,3542	26	0,5677	28
JAPONYA	0,6007	6	0,7554	7
KORE	1,0000	1	1,0000	1
LETONYA	0,3293	30	0,6266	19
LİTVANYA	0,3042	32	0,5120	33
LÜKSEMBURG	1,0000	2	1,0000	2
MEKSİKA	0,4739	11	0,6771	11
HOLLANDA	0,5802	7	0,7421	8
YENİ ZELANDA	0,6554	4	0,8277	4
NORVEÇ	0,4701	12	0,6571	13
POLONYA	0,3264	31	0,5588	30
PORTEKİZ	0,4277	14	0,6488	14
SLOVAKYA	0,3330	29	0,5475	32
SLOVENYA	0,4043	17	0,6177	21
İSPANYA	0,4485	13	0,6404	18
İSVEÇ	0,3920	20	0,5983	23
İSVİÇRE	0,3914	21	0,6461	15
TÜRKİYE	0,2969	34	0,5042	35
BİRLEŞİK KRALLIK	0,3356	28	0,5818	25
AMERİKA	0,5297	9	0,7050	9

Yapı-Güç sektörü için, kapula fonksiyonu ile birleştirilen etkinlik değerleri ve network VZA ile hesaplanan ülkelerin etkinlik değerleri ve sıralamaları Çizelge 5.12'deki gibidir.

Çizelge 5.12. Yapı-Güç sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları

OECD ÜLKELERİ	Kapula etkinlik	Kapula sıra	Network etkinlik	Network sıra
AVUSTRALYA	0,2872	26	0,6425	17
AVUSTURYA	0,2738	29	0,5058	29
BELÇİKA	0,2943	25	0,5295	27
KANADA	0,1426	35	0,4320	34
ŞİLİ	0,4419	10	0,6642	13
ÇEK CUMHURİYETİ	0,2491	30	0,4792	30
DANİMARKA	0,3352	20	0,5987	21
ESTONYA	0,4253	12	0,7016	9
FİNLANDİYA	0,3294	21	0,5634	24
FRANSA	0,4010	16	0,6440	15
ALMANYA	0,2013	33	0,4299	35
YUNANİSTAN	0,2973	24	0,5459	25
MACARİSTAN	0,2859	27	0,5718	23
İZLANDA	1,0000	1	1,0000	1
İRLANDA	0,4615	8	0,7308	7
İSRAİL	0,4127	14	0,6394	18
İTALYA	0,3118	23	0,5450	26
JAPONYA	0,4919	6	0,6924	11
KORE	0,3149	22	0,6574	14
LETONYA	0,3485	19	0,6743	12
LİTVANYA	0,4494	9	0,7010	10
LÜKSEMBURG	1,0000	2	1,0000	2
MEKSİKA	0,8000	3	0,9000	3
HOLLANDA	0,3504	18	0,5892	22
YENİ ZELANDA	0,6937	5	0,8468	4
NORVEÇ	0,1663	34	0,4441	33
POLONYA	0,2780	28	0,5212	28
PORTEKİZ	0,6963	4	0,8290	5
SLOVAKYA	0,3990	17	0,6169	20
SLOVENYA	0,4086	15	0,6427	16
İSPANYA	0,4251	13	0,6387	19
İSVEÇ	0,2331	31	0,4663	31
İSVİÇRE	0,4286	11	0,7143	8
TÜRKİYE	0,4800	7	0,7400	6
BİRLEŞİK KRALLIK	0,2311	32	0,4651	32
AMERİKA	0,1241	36	0,4190	36

Yapı-Ulaşım sektörü için, kapula fonksiyonu ile birleştirilen etkinlik değerleri ve network VZA ile hesaplanan ülkelerin etkinlik değerleri ve sıralamaları Çizelge 5.13'deki gibidir.

Çizelge 5.13. Yapı-Ulaşım sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları

OECD ÜLKELERİ	Kapula etkinlik	Kapula sıra	Network etkinlik	Network sıra
AVUSTRALYA	0,6395	8	0,8191	8
AVUSTURYA	0,4529	18	0,6854	18
BELÇİKA	0,5063	13	0,7196	14
KANADA	0,4351	20	0,6570	23
ŞİLİ	0,3626	26	0,6019	30
ÇEK CUMHURİYETİ	0,3843	25	0,6443	24
DANİMARKA	0,3416	30	0,6197	26
ESTONYA	0,4368	19	0,7184	15
FİNLANDİYA	0,6436	7	0,8218	7
FRANSA	0,3846	24	0,6377	25
ALMANYA	0,4222	21	0,6775	19
YUNANİSTAN	0,3419	29	0,6170	27
MACARİSTAN	0,2878	35	0,5882	33
İZLANDA	1,0000	1	1,0000	1
İRLANDA	0,2925	34	0,5439	35
İSRAİL	0,3389	31	0,5814	34
İTALYA	0,4049	22	0,6591	22
JAPONYA	0,6335	9	0,7955	9
KORE	1,0000	2	1,0000	2
LETONYA	0,2362	36	0,5091	36
LİTVANYA	0,3487	28	0,5999	32
LÜKSEMBURG	0,5444	10	0,7722	10
MEKSİKA	0,7299	5	0,8549	5
HOLLANDA	0,7059	6	0,8529	6
YENİ ZELANDA	0,8483	3	0,9242	3
NORVEÇ	0,5281	11	0,7285	12
POLONYA	0,3286	32	0,6007	31
PORTEKİZ	0,8000	4	0,9000	4
SLOVAKYA	0,4907	14	0,7017	16
SLOVENYA	0,3607	27	0,6064	28
İSPANYA	0,5274	12	0,7265	13
İSVEÇ	0,4542	17	0,6927	17
İSVİÇRE	0,3942	23	0,6723	21
TÜRKİYE	0,4800	15	0,7400	11
BİRLEŞİK KRALLIK	0,3250	33	0,6031	29
AMERİKA	0,4611	16	0,6765	20

Sanayi-Güç sektörü için, kapula fonksiyonu ile birleştirilen etkinlik değerleri ve network VZA ile hesaplanan ülkelerin etkinlik değerleri ve sıralamaları Çizelge 5.14'deki gibidir.

Çizelge 5.14. Sanayi-Güç sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları

OECD ÜLKELERİ	Kapula etkinlik	Kapula sıra	Network etkinlik	Network sıra
AVUSTRALYA	0,1858	33	0,4645	31
AVUSTURYA	0,2620	31	0,5124	29
BELÇİKA	0,2655	29	0,5170	28
KANADA	0,1336	35	0,4348	35
ŞİLİ	0,4821	17	0,6773	17
ÇEK CUMHURİYETİ	0,2650	30	0,5123	30
DANİMARKA	0,7894	6	0,8947	6
ESTONYA	0,8200	4	0,9832	2
FİNLANDİYA	0,2823	26	0,5321	27
FRANSA	0,5502	13	0,7433	14
ALMANYA	0,2025	32	0,4538	33
YUNANİSTAN	0,5954	10	0,8390	9
MACARİSTAN	0,6304	9	0,7804	10
İZLANDA	0,7205	8	0,8600	8
İRLANDA	0,7917	5	0,8958	5
İSRAİL	0,7491	7	0,8745	7
İTALYA	0,4014	22	0,6326	21
JAPONYA	0,4844	16	0,5792	24
KORE	0,3149	25	0,4271	36
LETONYA	0,9048	2	0,9524	3
LİTVANYA	0,5024	15	0,7330	15
LÜKSEMBURG	1,0000	1	1,0000	1
MEKSİKA	0,5543	12	0,7719	11
HOLLANDA	0,3691	24	0,6253	22
YENİ ZELANDA	0,4562	18	0,6745	18
NORVEÇ	0,1564	34	0,4475	34
POLONYA	0,4441	19	0,6662	19
PORTEKİZ	0,4279	20	0,6777	16
SLOVAKYA	0,2807	27	0,5329	26
SLOVENYA	0,5720	11	0,7558	13
İSPANYA	0,3767	23	0,6123	23
İSVEÇ	0,2750	28	0,5390	25
İSVİÇRE	0,8636	3	0,9318	4
TÜRKİYE	0,5285	14	0,7639	12
BİRLEŞİK KRALLIK	0,4062	21	0,6465	20
AMERİKA	0,1280	36	0,4547	32

Sanayi-Ulaşım sektörü için, kapula fonksiyonu ile birleştirilen etkinlik değerleri ve network VZA ile hesaplanan ülkelerin etkinlik değerleri ve sıralamaları Çizelge 5.15'deki gibidir.

Çizelge 5.15. Sanayi-Ulaşım sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları

OECD ÜLKELERİ	Kapula etkinlik	Kapula sıra	Network etkinlik	Network sıra
AVUSTRALYA	0,5165	30	0,6414	33
AVUSTURYA	0,5280	29	0,6921	30
BELÇİKA	0,5454	24	0,7072	27
KANADA	0,5364	27	0,6600	32
ŞİLİ	0,5095	32	0,6361	34
ÇEK CUMHURİYETİ	0,5037	33	0,6787	31
DANİMARKA	0,8313	3	0,9156	3
ESTONYA	0,8480	2	0,9240	2
FİNLANDİYA	0,5810	21	0,7905	11
FRANSA	0,6145	16	0,7373	21
ALMANYA	0,5121	31	0,7022	28
YUNANİSTAN	0,7582	6	0,8484	7
MACARİSTAN	0,7088	8	0,8095	9
İZLANDA	0,7205	7	0,8603	6
İRLANDA	0,5733	22	0,7090	26
İSRAİL	0,6332	13	0,8166	8
İTALYA	0,6124	17	0,7468	19
JAPONYA	0,6951	9	0,8009	10
KORE	1,0000	1	1,0000	1
LETONYA	0,6457	11	0,7872	12
LİTVANYA	0,4869	35	0,6319	35
LÜKSEMBURG	0,5444	25	0,7722	14
MEKSİKA	0,5412	26	0,7321	23
HOLLANDA	0,7783	5	0,8892	5
YENİ ZELANDA	0,6158	15	0,7519	17
NORVEÇ	0,6045	18	0,7325	22
POLONYA	0,6287	14	0,7458	20
PORTEKİZ	0,4975	34	0,7488	18
SLOVAKYA	0,4347	36	0,6176	36
SLOVENYA	0,6028	19	0,7195	24
İSPANYA	0,5621	23	0,7003	29
İSVEÇ	0,6332	12	0,7659	15
İSVİÇRE	0,8152	4	0,8899	4
TÜRKİYE	0,5285	28	0,7642	16
BİRLEŞİK KRALLIK	0,6788	10	0,7849	13
AMERİKA	0,5957	20	0,7149	25

Güç-Ulaşım sektörü için, kapula fonksiyonu ile birleştirilen etkinlik değerleri ve network VZA ile hesaplanan ülkelerin etkinlik değerleri ve sıralamaları Çizelge 5.16'daki gibidir.

Çizelge 5.16. Güç-Ulaşım sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları

OECD ÜLKELERİ	Kapula etkinlik	Kapula sıra	Network etkinlik	Network sıra
AVUSTRALYA	0,1868	34	0,4646	34
AVUSTURYA	0,3869	29	0,6457	30
BELÇİKA	0,3874	28	0,6491	29
KANADA	0,1295	35	0,4224	36
ŞİLİ	0,5183	18	0,7207	21
ÇEK CUMHURİYETİ	0,4134	27	0,6620	27
DANİMARKA	0,6586	10	0,8103	11
ESTONYA	0,9663	3	0,9832	3
FİNLANDİYA	0,4831	21	0,7416	17
FRANSA	0,6450	11	0,8016	12
ALMANYA	0,3340	31	0,6274	32
YUNANİSTAN	0,5587	14	0,7491	15
MACARİSTAN	0,6698	7	0,8171	9
İZLANDA	1,0000	1	1,0000	1
İRLANDA	0,6263	12	0,8132	10
İSRAİL	0,4772	23	0,6911	24
İTALYA	0,5138	19	0,7241	20
JAPONYA	0,5363	17	0,7379	18
KORE	0,3149	32	0,6574	28
LETONYA	0,6697	8	0,8348	7
LİTVANYA	0,6654	9	0,8210	8
LÜKSEMBURG	0,5444	16	0,7722	13
MEKSİKA	0,9099	5	0,9549	5
HOLLANDA	0,4725	24	0,7363	19
YENİ ZELANDA	0,5909	13	0,7710	14
NORVEÇ	0,1906	33	0,5196	33
POLONYA	0,4979	20	0,7082	22
PORTEKİZ	0,8579	6	0,9290	6
SLOVAKYA	0,4677	25	0,6871	25
SLOVENYA	0,5558	15	0,7445	16
İSPANYA	0,4830	22	0,6985	23
İSVEÇ	0,3524	30	0,6339	31
İSVİÇRE	0,9161	4	0,9581	4
TÜRKİYE	1,0000	2	1,0000	2
BİRLEŞİK KRALLIK	0,4301	26	0,6682	26
AMERİKA	0,1190	36	0,4288	35

Kapula fonksiyonu ve network VZA'dan elde edilen ikili sektör etkinliklerinin sıralamaları arasında Spearman sıra korelasyon katsayıları Çizelge 5.17'deki gibidir. Sonuçlara bakıldığında, iki yöntemle elde edilen etkinlik değerlerinin sıralamaları arasında yüksek korelasyon vardır.

Çizelge 5.17. Kapula etkinlik ve network etkinlik sıralamaları arasındaki korelasyon değerleri

Sektörler	Spearman's rho
Yapı-Sanayi	0,942
Yapı-Güç	0,952
Yapı-Ulaşım	0,980
Sanayi-Güç	0,966
Sanayi-Ulaşım	0,890
Güç-Ulaşım	0,987

Sektörlerden VZA ile elde edilen etkinlik değerleri arasındaki üçlü bağımlılık yapısı araştırılmıştır. İki den fazla yani çok boyutlu durumda, Student's t ve Gaussian kapula kullanılarak, en çok olabilirlik yöntemine göre parametreler elde edilmiştir. AIC değeri daha düşük olan model, parametrelerle birlikte bağımlılığı yansıtan en iyi model olmuştur. Bağımlılık parametreleri ve etkinlik değerleri çok değişkenli modelde yerine konularak her bir ülke için birleştirilmiş tek bir etkinlik skoru elde edilmiştir. Network VZA ile Yapı-Sanayi-Güç, Yapı-Sanayi-Ulaşım, Yapı-Ulaşım-Güç, Sanayi-Ulaşım-Güç sistemleri, üç süreçli paralel ağ yapısı olarak ele alınmış, her bir ülke için sistem ve süreç etkinlikleri elde edilmiştir. Network VZA modelinde ara değişkenler kullanılmadığı için, alt sektörlerde yani süreçlerde elde edilen etkinlik değerleri, Çizelge 5.9'daki VZA'dan elde edilen etkinlik değerleri ile aynıdır.

Yapı-Sanayi-Güç, Yapı-Sanayi-Ulaşım, Yapı-Ulaşım-Güç, Sanayi-Ulaşım-Güç sektör etkinlikleri için tahmin edilen parametreler ve bu değişkenler için Student's t ve Gaussian kapulaya göre AIC değerleri Çizelge 5.18'deki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 5.18. Üçlü sektör etkinlikleri için elde edilen parametre ve AIC değerleri

Sektörler	Kapula	AIC	$\hat{\theta}$
Yapı-Sanayi-Güç	Student's t Gaussian	68,0803 68,3895	-0,2520, -0,2895, 0,2160; 5,6641 -0,2261, 0,2864, 0,2151
Yapı-Sanayi-Ulaşım	Student's t Gaussian	68,2755 68,8049	-0,2456, 0,1118, -0,2336; 2,6500 -0,2221, 0,1463, -0,2855
Yapı-Ulaşım-Güç	Student's t Gaussian	68,9001 69,5407	-0,2378, 0,1564, 0,0405; 2,8201 -0,2769, 0,1259, 0,0551
Sanayi-Ulaşım-Güç	Student's t Gaussian	68,6179 68,8821	0,2104,-0,1806, 0,0422; 1,8800 0,1962, 0,2755, 0,0498

Yapı-Sanayi-Güç, Yapı-Sanayi-Ulaşım, Yapı-Ulaşım-Güç, Sanayi-Ulaşım-Güç tüm sektör etkinlikleri için AIC değeri daha düşük olan Student's t kapula bağımlılığı yansıtan en iyi kapula modeli olarak elde edilmiştir. Üçlü sektör etkinlikleri arasında simetrik bağımlılık söz konusudur. Tahmin edilen parametreler ve ülkelerin etkinlik değerleri $n = 3$ için Student's t kapula modelinde (4.32) yerine yazılarak elde edilen birleştirilmiş etkinlik değerleri ve network VZA'dan elde edilen etkinlik değerleri ve sıralamaları, sırasıyla; Yapı-Sanayi-Güç, Yapı-Sanayi-Ulaşım, Yapı-Ulaşım-Güç, Sanayi-Ulaşım-Güç sektörleri için aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 5.19. Yapı-Sanayi-Güç sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları

OECD ÜLKELERİ	Kapula etkinlik	Kapula sıra	Network etkinlik	Network sıra
AVUSTRALYA	0,2096	20	0,6422	22
AVUSTURYA	0,1159	30	0,5235	32
BELÇİKA	0,1343	28	0,5447	29
KANADA	0,0727	35	0,5123	34
ŞİLİ	0,2276	16	0,6474	20
ÇEK CUMHURİYETİ	0,0934	32	0,4962	35
DANİMARKA	0,2885	13	0,7325	11
ESTONYA	0,3312	9	0,7504	10
FİNLANDİYA	0,1585	24	0,5693	26
FRANSA	0,2261	18	0,6557	17
ALMANYA	0,0729	34	0,4631	36
YUNANİSTAN	0,2052	21	0,6561	16
MACARİSTAN	0,1781	23	0,6431	21
İZLANDA	0,7205	2	0,9068	2
İRLANDA	0,3363	8	0,7511	9
İSRAİL	0,3603	5	0,7596	7
İTALYA	0,1566	25	0,5818	25
JAPONYA	0,3426	7	0,7152	13
KORE	0,3149	11	0,7716	5
LETONYA	0,2984	12	0,7511	8
LİTVANYA	0,2024	22	0,6487	19
LÜKSEMBURG	1,0000	1	1,0000	1
MEKSİKA	0,4162	4	0,7848	3
HOLLANDA	0,2346	15	0,6522	18
YENİ ZELANDA	0,4837	3	0,7830	4
NORVEÇ	0,0839	33	0,5164	33
POLONYA	0,1453	27	0,5821	24
PORTEKİZ	0,3253	10	0,7185	12
SLOVAKYA	0,1541	26	0,5658	27
SLOVENYA	0,2512	14	0,6721	14
İSPANYA	0,2261	17	0,6305	23
İSVEÇ	0,1142	31	0,5347	30
İSVİÇRE	0,3479	6	0,7641	6
TÜRKİYE	0,2133	19	0,6695	15
BİRLEŞİK KRALLIK	0,1240	29	0,5646	28
AMERİKA	0,0678	36	0,5271	31

Çizelge 5.20. Yapı-Sanayi-Ulaşım sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları

OECD ÜLKELERİ	Kapula etkinlik	Kapula sıra	Network etkinlik	Network sıra
AVUSTRALYA	0,3782	7	0,7600	9
AVUSTURYA	0,2140	27	0,6432	28
BELÇİKA	0,2524	21	0,6714	20
KANADA	0,2599	20	0,6622	22
ŞİLİ	0,1881	32	0,6059	35
ÇEK CUMHURİYETİ	0,1655	35	0,6063	34
DANİMARKA	0,3497	11	0,7465	11
ESTONYA	0,3472	12	0,7616	8
FİNLANDİYA	0,3384	13	0,7416	12
FRANSA	0,2286	24	0,6515	26
ALMANYA	0,1843	34	0,6281	31
YUNANİSTAN	0,2855	18	0,7036	16
MACARİSTAN	0,2028	30	0,6539	25
İZLANDA	0,7205	2	0,9068	2
İRLANDA	0,2116	28	0,6265	32
İSRAİL	0,3522	10	0,7209	14
İTALYA	0,2307	23	0,6578	23
JAPONYA	0,4572	6	0,7839	6
KORE	1,0000	1	1,0000	1
LETONYA	0,2073	29	0,6410	29
LİTVANYA	0,1532	36	0,5813	36
LÜKSEMBURG	0,5444	3	0,8481	3
MEKSİKA	0,3720	8	0,7547	10
HOLLANDA	0,5262	5	0,8281	5
YENİ ZELANDA	0,5374	4	0,8346	4
NORVEÇ	0,3148	16	0,7060	15
POLONYA	0,2016	31	0,6351	30
PORTEKİZ	0,3706	9	0,7658	7
SLOVAKYA	0,1865	33	0,6223	33
SLOVENYA	0,2359	22	0,6479	27
İSPANYA	0,2871	17	0,6891	18
İSVEÇ	0,2705	19	0,6856	19
İSVİÇRE	0,3218	14	0,7361	13
TÜRKİYE	0,2143	26	0,6695	21
BİRLEŞİK KRALLIK	0,2226	25	0,6566	24
AMERİKA	0,3153	15	0,6988	17

Çizelge 5. 21. Yapı-Ulaşım-Güç sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları

OECD ÜLKELERİ	Kapula etkinlik	Kapula sıra	Network etkinlik	Network sıra
AVUSTRALYA	0,1886	28	0,6421	24
AVUSTURYA	0,1880	29	0,6123	28
BELÇİKA	0,2094	26	0,6327	27
KANADA	0,0755	35	0,5038	36
ŞİLİ	0,2845	16	0,6623	21
ÇEK CUMHURİYETİ	0,1673	30	0,5952	31
DANİMARKA	0,2578	20	0,6763	17
ESTONYA	0,4151	7	0,8011	7
FİNLANDİYA	0,2753	19	0,7089	12
FRANSA	0,3040	14	0,6944	15
ALMANYA	0,1334	33	0,5783	33
YUNANİSTAN	0,2140	25	0,6374	25
MACARİSTAN	0,2189	24	0,6590	22
İZLANDA	1,0000	1	1,0000	1
İRLANDA	0,3125	12	0,6960	14
İSRAİL	0,2532	22	0,6373	26
İTALYA	0,2255	23	0,6427	23
JAPONYA	0,3897	9	0,7419	10
KORE	0,3149	11	0,7716	9
LETONYA	0,2538	21	0,6727	18
LİTVANYA	0,3295	10	0,7073	13
LÜKSEMBURG	0,5444	5	0,8481	4
MEKSİKA	0,7363	2	0,9033	2
HOLLANDA	0,3006	15	0,7261	11
YENİ ZELANDA	0,5924	4	0,8473	5
NORVEÇ	0,1063	34	0,5641	34
POLONYA	0,1890	27	0,6100	29
PORTEKİZ	0,6738	3	0,8860	3
SLOVAKYA	0,2820	17	0,6686	19
SLOVENYA	0,2787	18	0,6645	20
İSPANYA	0,3090	13	0,6879	16
İSVEÇ	0,1590	31	0,5976	30
İSVİÇRE	0,4015	8	0,7816	8
TÜRKİYE	0,4800	6	0,8267	6
BİRLEŞİK KRALLIK	0,1507	32	0,5788	32
AMERİKA	0,0678	36	0,5081	35

Çizelge 5.22. Sanayi-Ulaşım-Güç sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları

OECD ÜLKELERİ	Kapula etkinlik	Kapula sıra	Network etkinlik	Network sıra
AVUSTRALYA	0,1323	34	0,5236	35
AVUSTURYA	0,2370	30	0,6167	30
BELÇİKA	0,2444	28	0,6244	28
KANADA	0,0977	36	0,5058	36
ŞİLİ	0,3164	23	0,6851	25
ÇEK CUMHURİYETİ	0,2396	29	0,6181	29
DANİMARKA	0,6601	4	0,8736	4
ESTONYA	0,8244	1	0,9381	1
FİNLANDİYA	0,3137	25	0,6881	24
FRANSA	0,4433	14	0,7608	15
ALMANYA	0,2005	32	0,5948	32
YUNANİSTAN	0,5006	9	0,7916	12
MACARİSTAN	0,5346	7	0,8066	9
İZLANDA	0,7205	3	0,9068	3
İRLANDA	0,4772	12	0,8060	10
İSRAİL	0,4797	11	0,7941	11
İTALYA	0,3549	20	0,7012	22
JAPONYA	0,4243	15	0,7455	17
KORE	0,3149	24	0,7716	14
LETONYA	0,5960	5	0,8582	5
LİTVANYA	0,3492	21	0,7286	20
LÜKSEMBURG	0,5444	6	0,8481	6
MEKSİKA	0,4933	10	0,8214	8
HOLLANDA	0,3924	18	0,7503	16
YENİ ZELANDA	0,4029	17	0,7325	19
NORVEÇ	0,1417	33	0,5667	33
POLONYA	0,3649	19	0,7067	21
PORTEKİZ	0,4455	13	0,7852	13
SLOVAKYA	0,2297	31	0,6125	31
SLOVENYA	0,4091	16	0,7399	18
İSPANYA	0,3117	26	0,6704	26
İSVEÇ	0,2581	27	0,6464	27
İSVİÇRE	0,7866	2	0,9266	2
TÜRKİYE	0,5285	8	0,8428	7
BİRLEŞİK KRALLIK	0,3449	22	0,7000	23
AMERİKA	0,0979	35	0,5337	34

Kapula fonksiyonu ve network VZA'dan elde edilen üçlü sektör etkinliklerinin sıralamaları arasında Spearman sıra korelasyon katsayıları Çizelge 5.23'deki gibidir. Sonuçlara bakıldığında, iki yöntemle elde edilen etkinlik değerlerinin sıralamaları arasındaki korelasyon oldukça yüksektir.

Çizelge 5. 23. Kapula etkinlik ve network etkinlik sıralamaları arasındaki korelasyon değerleri

Sektörler	Spearman's rho
Yapı-Sanayi-Güç	0,963
Yapı-Sanayi-Ulaşım	0,977
Yapı-Ulaşım-Güç	0,975
Sanayi-Ulaşım-Güç	0,980

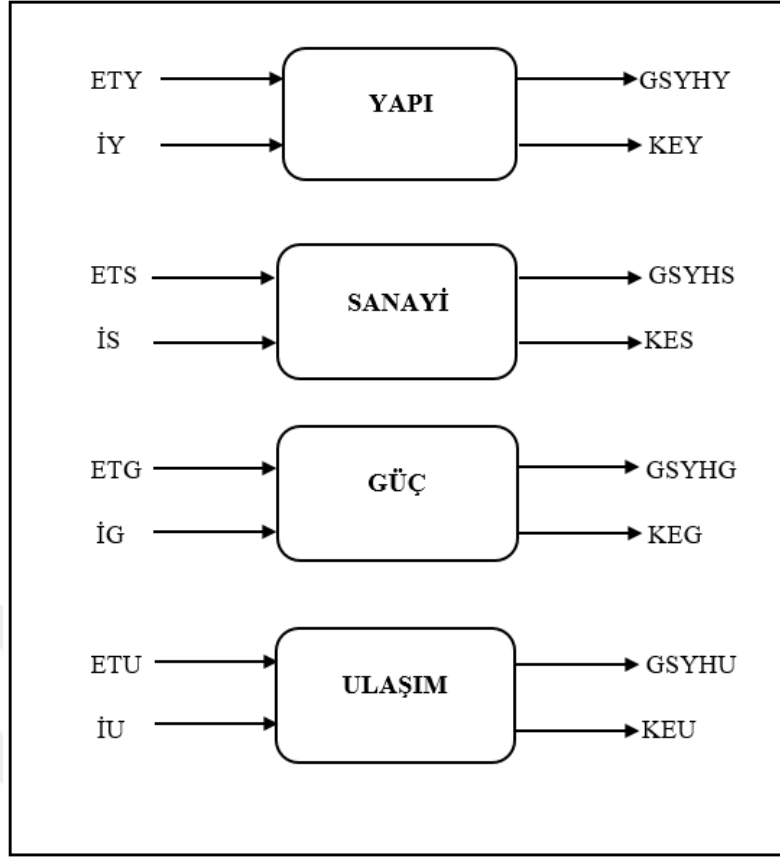
Son olarak tüm sektörler çalışmaya dahil edilmiştir. Yapı, sanayi, güç ve ulaşım sektörleri arasındaki bağımlılık yapısı, Student's t ve Gaussian kapula kullanılarak en çok olabilirlik yöntemine göre tahmin edilmiştir. AIC değeri daha düşük olan Student's t kapula bağımlılığı en iyi modelleyen kapula fonksiyonu olmuştur. Elde edilen parametrelerle birlikte AIC değerleri Çizelge 5.24'deki gibidir.

Çizelge 5. 24. Yapı-Sanayi-Güç-Ulaşım sektör etkinlikleri için elde edilen parametre ve AIC değerleri

Kapula	AIC	$\hat{\theta}$
Student's t	65.1115	-0,2577, -0,2316, 0,1355, 0,1856, -0,2068, 0,0651; 3,5120
Gaussian	65.9493	-0,2308, -0,2826, 0,1391, 0,2069, -0,2793, 0,0377

Yapı, sanayi, güç ve ulaşım sektörleri arasında simetrik bağımlılık söz konusudur. Çok değişkenli Student's t kapula modelinde (4.32) bağımlılık parametreleri ve etkinlik değerleri $n = 4$ için modelde yerine konularak her bir ülke için birleştirilmiş tek bir etkinlik skoru elde edilmiştir.

Yapı, sanayi, güç, ulaşım sektörleri her bir ülke için alt süreçler olarak düşünülmüş ve dört süreçli paralel ağ yapısı baz alınarak Network VZA ile sistem ve süreç etkinlikleri hesaplanmıştır. Tüm sektörlerin dahil edildiği paralel ağ yapısı Şekil 5.1'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 5.1. Paralel ağ yapısı

Network VZA ile her bir ülke için sistem etkinliği ve her bir ülkenin yapı, sanayi, güç ve ulaşım sektör etkinlikleri Çizelge 5.25'deki gibi elde edilmiştir.

Çizelge 5.25. Network VZA'dan elde edilen etkinlik skorları

OECD ÜLKELERİ	Yapı	Sanayi	Güç	Ulaşım	Sistem
AVUSTRALYA	0,9971	0,6416	0,2879	0,6412	0,6419
AVUSTURYA	0,5455	0,5588	0,4661	0,8253	0,5989
BELÇİKA	0,6000	0,5751	0,4590	0,8392	0,6183
KANADA	0,6667	0,6727	0,1974	0,6474	0,5460
ŞİLİ	0,5455	0,6138	0,7830	0,6584	0,6502
ÇEK CUMHURİYETİ	0,4615	0,5302	0,4969	0,8271	0,5789
DANİMARKA	0,4081	1,0000	0,7894	0,8313	0,7572
ESTONYA	0,4368	0,8480	0,9663	1,0000	0,8128
FİNLANDİYA	0,6436	0,5810	0,4831	1,0000	0,6770
FRANSA	0,4800	0,6792	0,8080	0,7953	0,6906
ALMANYA	0,4800	0,5294	0,3799	0,8750	0,5661
YUNANİSTAN	0,4138	0,8766	0,6780	0,8203	0,6972
MACARİSTAN	0,3429	0,7855	0,8008	0,8335	0,6907
İZLANDA	1,0000	0,7205	1,0000	1,0000	0,9301
İRLANDA	0,4615	0,7917	1,0000	0,6263	0,7199
İSRAİL	0,5297	1,0000	0,7491	0,6332	0,7280
İTALYA	0,4800	0,6553	0,6100	0,8382	0,6459
JAPONYA	0,7500	0,7607	0,6347	0,8411	0,7466
KORE	1,0000	1,0000	0,3149	1,0000	0,8287
LETONYA	0,3485	0,9048	1,0000	0,6697	0,7307
LİTVANYA	0,4799	0,5440	0,9220	0,7199	0,6665
LÜKSEMBURG	1,0000	1,0000	1,0000	0,5444	0,8861
MEKSİKA	0,8000	0,5543	1,0000	0,9099	0,8160
HOLLANDA	0,7059	0,7783	0,4725	1,0000	0,7392
YENİ ZELANDA	1,0000	0,6554	0,6937	0,8483	0,7994
NORVEÇ	0,6531	0,6611	0,2352	0,8040	0,5883
POLONYA	0,4138	0,7039	0,6286	0,7877	0,6335
PORTEKİZ	0,8000	0,4975	0,8579	1,0000	0,7889
SLOVAKYA	0,6316	0,4634	0,6023	0,7719	0,6173
SLOVENYA	0,5046	0,7308	0,7808	0,7082	0,6811
İSPANYA	0,6667	0,6142	0,6107	0,7864	0,6695
İSVEÇ	0,5251	0,6715	0,4075	0,8602	0,6161
İSVİÇRE	0,4286	0,8636	1,0000	0,9161	0,8021
TÜRKİYE	0,4800	0,5285	1,0000	1,0000	0,7521
BİRLEŞİK KRALLIK	0,4000	0,7635	0,5302	0,8063	0,6250
AMERİKA	0,6667	0,7433	0,1713	0,6864	0,5669

Network VZA'dan elde edilen etkinlik sonuçlarına göre, ara değişkenler kullanılmadığı için, alt süreçlerde yani sektörlerde elde edilen etkinlik değerleri Çizelge 5.9'daki VZA'dan elde edilen etkinlik değerleriyle aynıdır. Girdiye yönelik BCC modeli kullanıldığı için etkinlik değeri 1 olan KVB'ler etkindir. İzlanda yapı, güç, ulaşım sektöründe etkin, sistem etkinliğindeki değeri 0,930134 olup etkin değildir. Lüksemburg yapı, sanayi, güç sektöründe etkin, sistem etkinliğindeki değeri 0,886098 olup etkin değildir. Kore yapı, sanayi ve ulaşım sektöründe etkin, sistem etkinliğindeki değeri 0,828713 olup etkin değildir. Hollanda ulaşım sektöründe etkin, sistem etkinliğindeki değeri 0,739184 olup etkin değildir. Türkiye güç ve ulaşım sektöründe etkin, sistem etkinliğindeki değeri 0,752125 olup etkin değildir.

Tüm süreçlerde etkin ülke olmadığı için sistem etkinliğinde, etkinlik değeri 1 olan ülke yoktur.

Network VZA'dan elde edilen etkinlik skorları ve kapula ile birleştirilen etkinlik skorları incelenerek her bir ülke için etkinlik sıralamaları Çizelge 5.26'daki gibi belirlenmiştir.

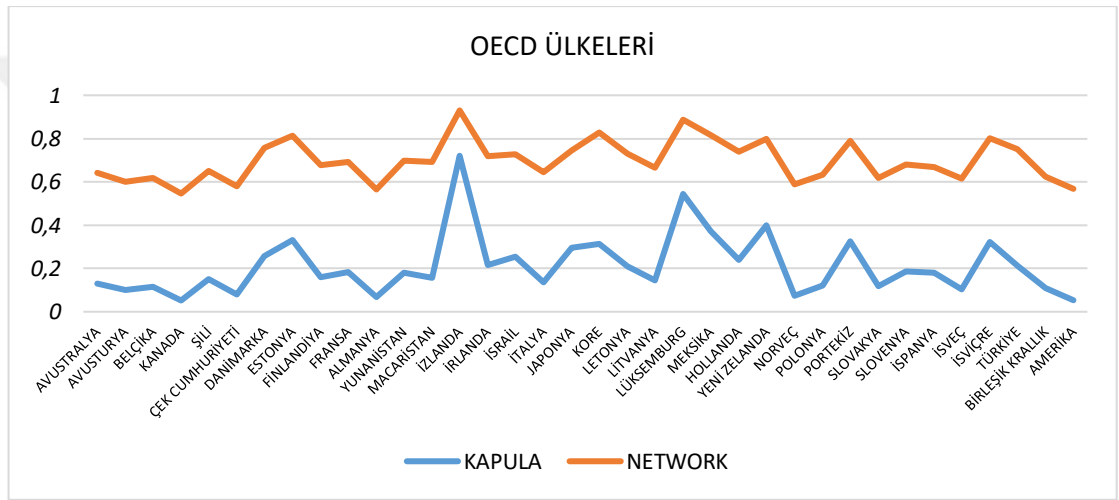
Çizelge 5.26. Yapı-Sanayi-Güç-Ulaşım sektörü için elde edilen etkinlikler ve sıralamaları

OECD ÜLKELERİ	Kapula etkinlik	Kapula sıra	Network etkinlik	Network sıra
AVUSTRALYA	0,1306	25	0,6419	25
AVUSTURYA	0,0994	31	0,5989	31
BELÇİKA	0,1165	28	0,6183	28
KANADA	0,0520	36	0,5460	36
ŞİLİ	0,1515	22	0,6502	23
ÇEK CUMHURİYETİ	0,0806	32	0,5789	33
DANİMARKA	0,2578	10	0,7572	9
ESTONYA	0,3315	5	0,8128	5
FİNLANDİYA	0,1604	20	0,6770	20
FRANSA	0,1844	17	0,6906	18
ALMANYA	0,0671	34	0,5661	35
YUNANİSTAN	0,1808	18	0,6972	16
MACARİSTAN	0,1559	21	0,6907	17
İZLANDA	0,7205	1	0,9301	1
İRLANDA	0,2150	13	0,7199	15
İSRAİL	0,2530	11	0,7280	14
İTALYA	0,1368	24	0,6459	24
JAPONYA	0,2943	9	0,7466	11
KORE	0,3149	8	0,8287	3
LETONYA	0,2102	15	0,7307	13
LİTVANYA	0,1441	23	0,6665	22
LÜKSEMBURG	0,5444	2	0,8861	2
MEKSİKA	0,3731	4	0,8160	4
HOLLANDA	0,2385	12	0,7392	12
YENİ ZELANDA	0,4001	3	0,7994	7
NORVEÇ	0,0724	33	0,5883	32
POLONYA	0,1215	26	0,6335	26
PORTEKİZ	0,3238	6	0,7889	8
SLOVAKYA	0,1186	27	0,6173	29
SLOVENYA	0,1848	16	0,6811	19
İSPANYA	0,1808	19	0,6695	21
İSVEÇ	0,1043	30	0,6161	30
İSVİÇRE	0,3224	7	0,8021	6
TÜRKİYE	0,2124	14	0,7521	10
BİRLEŞİK KRALLIK	0,1086	29	0,6250	27
AMERİKA	0,0521	35	0,5669	34

Ülkelerin network VZA ile hesaplanan etkinlik sıralamasına göre, İzlanda ilk sırada yer alırken, Lüksemburg ikinci, Kore üçüncü sırada yer almıştır. Kapula ile birleştirilen etkinliklerde de sırasıyla İzlanda, Lüksemburg ve Yeni Zelanda ilk üç sırada yer almıştır. Türkiye, network VZA ile hesaplanan etkinlik sıralamasında

OECD ülkeleri arasında onuncu iken kapula ile birleştirilen etkinliklerde on dördüncü sırada yer almıştır.

Ülkelerin etkinlik sıralamaları arasındaki korelasyona bakıldığında, Spearman sıra korelasyon katsayısı 0,983 olarak elde edilmiştir. Dolayısıyla kapula ile birleştirilen etkinlik skorları ve network VZA'dan elde edilen etkinlik skorları yüksek korelasyona sahiptir. Network VZA'dan elde edilen etkinlik skorları ile kapula ile birleştirilen etkinlik skorları Şekil 5.2'deki gibi gösterilmiştir. Network VZA'dan ve kapuladan elde edilen etkinlik skorlarının birbirlerine paralel olduğu görülmüştür.



Şekil 5.2. Network VZA'dan ve kapuladan elde edilen etkinlik skorları

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kapular değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını belirlerken, bazı korelasyon ölçümleri ya da parametrik yöntemlerin sahip olduğu varsayımlara ihtiyaç duymadan, değişkenlerin ortak dağılım fonksiyonu ile marjinalleri arasında bağlantı kurar. Bu sayede, kapula ile değişkenler arasında bağımlılık yapısı belirlenirken diğer taraftan da değişkenlere uygun düşen çok değişkenli dağılım elde edilir. Kapular ile verilerin normal dağılmadığı ya da dağılımın bilinmediği durumlarda çok değişkenli bir modelle, bağımlılık yapısını yansıtan parametreler elde edilebilir.

Bu tez çalışmasının uygulama kısmında, kapular farklı girdi ve çıktıya sahip, aynı karar verme birimleri üzerinde hesaplanan etkinlik skorlarının bağımlılığını modellemede kullanılmıştır. Her bir sektör için VZA'dan elde edilen etkinlik değerleri $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahiptir. Dolayısıyla her bir ülke için elde edilen etkinlik değerleri birer tesadüfi değişken olarak kabul edilmiştir. Çalışmaya dahil edilen sektörlerden elde edilen bu etkinlik değerleri uygun kapula modeli ile birleştirilip iki, üç ve dört değişkenli ortak dağılımlar elde edilmiştir.

VZA ile etkinlik analizi yapılırken, KVB'nin içinde bulunduğu süreç ve bağlantılar ihmal edilmektedir. Etkinliği hesaplanan birimlerin alt süreçlerden oluşması ve etkinlik analizinde sistem ve süreçlerin de değerlendirilmesi amacıyla geliştirilen Network VZA, bu tez çalışmasında sektörlerle birlikte enerji etkinlik değerlendirilmesinde kullanılmıştır. Sektörler ile iki, üç ve dört süreçli paralel ağ yapısı oluşturulup OECD ülkeleri için sistem ve süreç etkinlikleri elde edilmiştir.

Kaynakların sınırlı olduğu bugünlerde, enerji etkinliği bir ülkenin geleceğini belirleyen en önemli unsurlardan biridir. Eldeki kaynakları kullanarak maksimum çıktıyı üretmek olarak adlandırılan etkinlik, son yıllarda enerjinin tüm alt sektörleri için büyük bir öneme sahiptir. Sektörel enerji kullanımı her ülkeye göre farklılık gösterdiği için, her sektörü kendi içinde değerlendirip, daha sonra bütüncül yaklaşımla ele almak daha gerçekçi sonuçlara ulaşmamızı sağlayacaktır.

Etkinlik değerlerinin kapula yöntemi ile bağımlılığının belirlenip, etkinlik değerlerinin en uygun kapula modeli ile birleştirilmesi, yapılacak analizlerde boyut sorununu ortadan kaldırarak daha somut modellere erişilmesini sağlayan tek bir dağılım parametresi(ler) sunar. Bu sayede analizlerde ve sonuçların yorumlanmasında daha etkin ve sağlam parametreler elde edilebilir. Çalışmaya dahil edilen sektörlerdeki

enerji etkinliklerinin her bir ülke için tek bir skor halinde elde edilmesi, karar vericilere destek sağlayarak, yol gösterici olması amaçlanmıştır. Bu sayede Türkiye'nin OECD ülkeleri arasındaki etkinlik sıralaması belirlenmiştir. Etkinlik değerlerinin kapula yöntemi ile birleştirilmesi, birden çok performans değerinin tek bir değerde toplanmasını sağlamıştır.

Network VZA'dan elde edilen ülkelerin enerji etkinliği ile kapula ile birleştirilen etkinlikler arasında korelasyon değerlerinin yüksek olduğunu sonucuna ulaşılmıştır. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda, parametrik olmayan network VZA yöntemi ile tesadüfi değişkenler arasındaki bağımlılığı modelleyen parametrik kapula yöntemi karşılaştırılarak, enerji etkinliğindeki çok boyutlu analizlere farklı bir bakış açısı kazandırmak amaçlanmıştır. Dolayısıyla çok boyutlu analizlerde, parametrik bir yaklaşım olduğundan kapula yöntemi, parametrik olmayan network VZA yöntemine göre tercih edilebilirdir.

KAYNAKLAR

- Alhan, A. 2008. Bağımsızlık kapulasını içeren kapula aileleri, kapula tahmin yöntemleri ve İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında sektörler arası bağımlılık yapısı. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, 162, Ankara.
- Alpay, O. and Hayat, E. A. 2016. Copula approach to select input/output variables for DEA. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA)*, 7(1), 28-34.
- Altun, D. 2006. Türk Telekomünikasyon A.Ş. İl Telekom Müdürlüklerinin veri zarflama analizi ile etkinlik ölçümü. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, 151, Ankara.
- Apergis, N., Aye, G. C., Barros, C. P., Gupta, R. and Wanke, P. 2015. Energy efficiency of selected OECD countries: A slacks based model with undesirable outputs. *Energy Economics*, 51, 45-53.
- Aydın, S. 2017. Optimizasyon problemlerinin çözümünde genetik algoritmaların etkinliğinin network veri zarflama analizi ile değerlendirilmesi. Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, 140, Samsun.
- Ayuso, M., Bermúdez, L. and Santolino, M. 2016. Copula-based regression modeling of bivariate severity of temporary disability and permanent motor injuries. *Accident Analysis & Prevention*, 89, 142-150.
- Bal, H. and Örkçü, H. H. 2005. Combining the discriminant analysis and the data envelopment analysis in view of multiple criteria decision making: A new model. *Gazi University Journal of Science*, 18 (3), 355-364.
- Banker, R.D., Charnes, A. and Cooper, W.W. 1984. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management Science*, 30(9), 1078-1092.
- Bessec, M. and Meritet, S. 2007. *The Causality Link Between Energy Prices, Technology and Energy Intensity*. In *The Econometrics of Energy Systems* Palgrave Macmillan, 121-145, London.
- Biau, G. and Wegkamp, M. 2005. A note on minimum distance estimation of copula densities. *Statistics & probability letters*, 73(2), 105-114.
- Blomqvist, N. 1950. On a measure of dependence between two random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, 593-600.

- Borkowf, C. B. 2002. Computing the nonnull asymptotic variance and the asymptotic relative efficiency of Spearman's rank correlation. *Computational statistics & data analysis*, 39(3), 271-286.
- Cao, X. and Yang, F. 2011. Measuring the performance of internet companies using a two-stage data envelopment analysis model. *Enterprise Information Systems*, 5 (2), 207-217.
- Charnes, A., Cooper, W.W. and Rhodes, E. 1978. Measuring the efficiency of decision making units. *European Journal of Operational Research*, 2 (6), 429-444.
- Chen, M., Yu, G., Chen, P. and Wang, Y. 2017. A copula-based approach for estimating the travel time reliability of urban arterial. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 82, 1-23.
- Chen, Y., Cook, W. D., Li, N. and Zhu, J. 2009. Additive efficiency decomposition in two-stage DEA. *European Journal of Operational Research*, 196:3, 1170-1176.
- Cheng, G., Zhou, L., Chen, X. and Huang, J. Z. 2014. Efficient estimation of semiparametric copula models for bivariate survival data. *Journal of Multivariate Analysis*, 123, 330-344.
- Cherubini, U., Luciano, E. and Vecchiato, W. 2004. *Copula methods in finance*. John Wiley and Sons, 289, New York.
- Cook, W.D. and Zhu, J. 2006. *Modeling performance measurement: Applications and implementation issues in DEA*, Springer, 403, New York.
- Cui, Q. and Li, Y. 2014. The evaluation of transportation energy efficiency: an application of three-stage virtual frontier DEA. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 29, 1-11.
- De Matteis, R. 2001. Fitting copulas to data. Institute of Mathematics of the University of Zürich, 95, Zurich.
- Diakoulaki, D., Zopounidis, C., Mavrotas, G. and Doumpos, M. 1999. The use of a preference disaggregation method in energy analysis and policy making. *Energy*, 24:2, 157-166.
- El Mehdi, R. and Hafner, C. M. 2014. Inference in stochastic frontier analysis with dependent error terms. *Mathematics and Computers in Simulation*, 102, 104-116.
- Erturan, M. B. 2012. Network veri zarflama analizi ve Türkiye'de demir yolları üzerine bir uygulama. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonometri Anabilim Dalı, 81, Antalya.

- Fallahi, A., Ebrahimi, R. and Ghaderi, S. F. 2011. Measuring efficiency and productivity change in power electric generation management companies by using data envelopment analysis: A case study. *Energy*, 36(11), 6398-6405.
- Farrell, M. J. 1957. The measurement of productive efficiency, *Journal of the Royal Statistical Society*, 120, 253-290.
- Färe, R. and Grosskopf, S. 1996. Productivity and intermediate products: A frontier approach. *Economics letters*, 50: 1, 65-70.
- Färe, R. and Grosskopf, S. 2000. Network DEA. *Socio-Economic Planning Sciences*, 34: 1, 35-49. doi:10.1016/S0038-0121(99)00012-9
- Färe, R., Grosskopf, S. and Whittaker, G. 2007. *Network dea*. In *Modeling Data Irregularities and Structural Complexities in Data Envelopment Analysis*, Springer, 209-240, Boston, MA.
- Fukuyama, H. and Matousek, R. 2017. Modelling bank performance: A network DEA approach. *European Journal of Operational Research*, 259:2, 721-732.
- Gaenssler, P. and Stute, W. 1987. Seminar on empirical processes. DMV Seminar, Bd. 9, 8-13 September, Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, VI, DM, 38, 110, Schloß Mickeln, Düsseldorf.
- Genest, C. and MacKay, J. 1986. The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician*, 40(4), 280-283.
- Genest, C. and Rivest, L. P. 1993. Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas. *Journal of the American Statistical Association*, 88(423), 1034-1043.
- Genest, C. and Ghoudi, K. 1994. Une famille de lois bidimensionnelles insolite. *Comptes rendus-academie des sciences paris serie 1*, 318, 351-351.
- Genest, C., Quesada Molina, J. J. and Rodríguez Lallena, J. A. 1995. De l'impossibilité de construire des lois à marges multidimensionnelles données à partir de copules. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique*, 320(6), 723-726.
- Genest, C. and Favre, A. C. 2007. Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask. *Journal of hydrologic engineering*, 12(4), 347-368.
- Gini, C. 1910. Prezzi e consumi. *Giornale degli economisti e rivista di statistica*, 40(1), 99-114.

- Golany, B. and Roll, Y. 1989. An application procedure for DEA. *Omega*, 17(3), 237-250.
- Habiboellah, F. 2007. Copulas, modeling dependencies in financial risk management. Master Thesis, Vrije Universiteit, Business Mathematics and Informatics (BMI), 27, Amsterdam.
- Hoeffding, W. 1940. Masstabinvariante korrelationstheorie. *Schriften des Mathematischen Instituts und Instituts für Angewandte Mathematik der Universität Berlin*, 5:3, 181-233.
- Hollander, M. and Wolfe, D. A. 1973. *Nonparametric statistical methods*. John Wiley & Sons. Inc, 364, New York.
- Houari, R., Bounceur, A., Kechadi, M. T., Tari, A. K. and Euler, R. 2016. Dimensionality reduction in data mining: A copula approach. *Expert Systems with Applications*, 64, 247-260.
- Hu, J. L. and Wang, S. C. 2006. Total-factor energy efficiency of regions in China. *Energy policy*, 34(17), 3206-3217.
- Huard, D., Évin, G. and Favre, A. C. 2006. Bayesian copula selection. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(2), 809-822.
- Joe, H. 1997. *Multivariate models and multivariate dependence concepts*. CRC Press, 395, London.
- Jogdeo, K. 1982. Concepts of dependence. *Encyclopedia of statistical sciences*, 1, 324-334.
- Kalantary, M. and Saen, R. F. 2018. Assessing sustainability of supply chains: An inverse network dynamic DEA model. *Computers & Industrial Engineering* (Accepted In Press) .
- Kao, C. and Hwang, S. N. 2008. Efficiency decomposition in two-stage data envelopment analysis: An application to non-life insurance companies in Taiwan. *European Journal of Operational Research*, 185, 418-429.
- Kao, C. 2009a. Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model. *European journal of operational research*, 192: 3, 949-962.
- Kao, C. 2009b. Efficiency measurement for parallel production systems. *European Journal of Operational Research*, 196: 3, 1107-1112.
- Kao, C. and Hwang, S. N. 2010. Efficiency measurement for network systems: IT impact on firm performance. *Decision Support Systems*, 48: 3, 437-446.

- Kao, C. 2014. Network data envelopment analysis: A review. *European journal of operational research*, 239: 1, 1-16.
- Kao, C. 2017. *Network Data Envelopment Analysis Foundations and Extensions*. Springer, 335-336, Taiwan.
- Kaishev, V. K., Dimitrova, D. S. and Haberman, S. 2007. Modelling the joint distribution of competing risks survival times using copula functions. *Insurance: Mathematics and Economics*, 41(3), 339-361.
- Kecek, G. 2010. *Veri zarflama analizi teori ve uygulama örneği*. Siyasal Kitabevi, 180, Ankara.
- Kim, G., Silvapulle, M. J. and Silvapulle, P. 2007. Comparison of semiparametric and parametric methods for estimating copulas. *Computational Statistics & Data Analysis*, 51(6), 2836-2850.
- Kim, J. M. and Jun, S. 2015. Graphical causal inference and copula regression model for apple keywords by text mining. *Advanced Engineering Informatics*, 29(4), 918-929.
- Kimeldorf, G. and Sampson, A. R. 1989. A framework for positive dependence. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 41(1), 31-45.
- Kole, E., Koedijk, K. and Verbeek, M. 2007. Selecting copulas for risk management. *Journal of Banking & Finance*, 31(8), 2405-2423.
- Kolev, N. and Paiva, D. 2009. Copula-based regression models: A survey. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 139(11), 3847-3856.
- Konca H. 2018. Enerjide dışa bağımlılık çerçevesinde Türkiye’de nükleer enerjinin analizi. Yüksek Lisans Tezi, Kırklareli Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İktisat Anabilim Dalı, 133, Kırklareli.
- Kruskal, W. H. 1958. Ordinal measures of association. *Journal of the American Statistical Association*, 53(284), 814-861.
- Lancaster, H. O. 1963. Correlation and complete dependence of random variables. *The Annals of Mathematical Statistics*, 34(4), 1315-1321.
- Lee, W. S. 2008. Benchmarking the energy efficiency of government buildings with data envelopment analysis. *Energy and Buildings*, 40(5), 891-895.
- Lehmann, E. L. 1966. Some concepts of dependence. *Ann. Math. Statist*, 37, 1137-1153.

- Lehmann, E. L. and D'abrera, H. J. M. 1975. *Nonparametrics: Statistical Methods Based on Ranks*. Holden-day inc, 300-315, San Francisco.
- Lewis, H. F. and Sexton, T. R. 2004. Network DEA: Efficiency analysis of organizations with complex internal structure. *Computers & Operations Research*, 31: 9, 1365-1410.
- Li, K. and Lin, B. 2015. The improvement gap in energy intensity: Analysis of China's thirty provincial regions using the improved DEA (data envelopment analysis) model. *Energy*, 84, 589-599.
- Liu, W. and Lin, B. 2018. Analysis of energy efficiency and its influencing factors in China's transport sector. *Journal of Cleaner Production*, 170, 674-682.
- Liu, Y. and Wang, K. 2015. Energy efficiency of China's industry sector: An adjusted network DEA (data envelopment analysis)-based decomposition analysis. *Energy*, 93, 1328-1337.
- Lorcu, F. 2008. Veri zarflama analizi ile Türkiye ve Avrupa Birliği ülkelerinin sağlık alanındaki etkinliklerinin değerlendirilmesi. Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İşletme Anabilim Dalı, 340, İstanbul.
- Lozano, S., Gutiérrez, E. and Moreno, P. 2013. Network DEA approach to airports performance assessment considering undesirable outputs. *Applied Mathematical Modelling*, 37: 4, 1665-1676.
- Löthgren, M. and Tambour, M. 1999. Productivity and customer satisfaction in Swedish pharmacies: A DEA network model. *European Journal of Operational Research*, 115: 3, 449-458.
- Luptacik, M. 2010. *Mathematical optimization and economic analysis*. Springer, 287, New York.
- Meester, S. G. and Mackay, J. 1994. A parametric model for cluster correlated categorical data. *Biometrics*, 954-963.
- Meza, L. A., Mello, J. C. C. B. S., Gomes Júnior, S. F. and Moreno, P. 2018. Evaluation of post-graduate programs using a network data envelopment analysis model. *Dyna*, 85: 204, 83-90.
- Moreno, P. and Lozano, S. 2014. A network DEA assessment of team efficiency in the NBA. *Annals of Operations Research*, 214, 99-124. DOI: 10.1007/s10479-012-1074-9

- Moreno, P., Andrade, G.N., Angulo-Meza, L. and Soares de Mello, J. C. C. B. 2015. Evaluation of Brazilian electricity distributors using a network DEA model with shared inputs. *IEEE Latin America Transactions*, 13:7. 2209-2216. doi:10.1109/TLA.2015.7273779
- Najjari V. 2014. Yeni arşimedyan kapula aileleleri ve finans alanında bir uygulama. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, 82, Ankara.
- Nelsen, R. B. 1999. *An introduction to Copulas*. Springer,1-4, New York.
- Nelsen, R. B. 2003. Properties and applications of Copulas: A Brief Survey. In Proceedings of the First Brazilian Conference on Statistical Modeling in Insurance and Finance, September, University Press USP: Sao Paulo ,10-28, Brazil.
- Nelsen, R. B. 2006. *An introduction to Copulas* (Second edition). New York: Springer Science Business Media.
- Nguyen, C. C. and Bhatti, M. I. 2012. Copula model dependency between oil prices and stock markets: Evidence from China and Vietnam. *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 22: 4, 758-773.
- Oakes, D. 1994. Multivariate survival distributions. *Journal of Nonparam*, 3: 3-4, 343-354.
- Omrani, H. and Soltanzadeh, E. 2016. Dynamic DEA models with network structure: An application for Iranian airlines. *Journal of Air Transport Management*, 57, 52-61.
- Öztürk, E. G. 2016. Health system performance in OECD countries: Data envelopment analysis. Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Ekonomi Anabilim Dalı, 132, Ankara.
- Park, Y. S., Lim, S. H., Egilmez, G. and Szmerekovsky, J. 2018. Environmental efficiency assessment of US transport sector: a slack-based data envelopment analysis approach. *Transportation Research Part D: Transport and Environment*, 61, 152-164.
- Patterson, M. G. 1996. What is energy efficiency?: Concepts, indicators and methodological issues. *Energy Policy*, 24: 5, 377-390.
- Phelps, A. L. and Weissfeld, L. A. 1997. Comparison of dependence estimators in bivariate Copula models. *Commun Stat Part B Simul Comput*, 26: 4, 1583-1597.

- Prieto, A. M. and Zofio, J. L. 2007. Network DEA efficiency in input–output models: With an application to OECD countries. *European Journal of Operational Research*, 178: 1, 292-304.
- Prokhorov, A. and Schmidt, P. 2006. Robustness, redundancy, and validity of Copulas in likelihood models. *Working Paper, Michigan State University*, 37, Michigan.
- Ramanathan, R. 2003. *An introduction to data envelopment analysis: A tool for Performance Measurement*. Sage Publications, 180, New Delhi.
- Ramanathan, R. 2005. An analysis of energy consumption and carbon dioxide emissions in countries of the Middle East and North Africa. *Energy*, 30: 15, 2831-2842.
- Rényi, A. 1959. On measures of dependence. *Acta Mathematica Hungarica*, 10: 3-4, 441-451.
- Rosenthal, E. C. and Weiss, H. J. 2017. A data envelopment analysis approach for ranking journals. *Omega*, 70, 135-147.
- Saka, Ö. 2015. Route based performance evaluation: An application of data envelopment analysis. Yüksek Lisans Tezi, Bahçeşehir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı, 56, İstanbul.
- Sarica, K. and Or, İ. 2007. Efficiency assessment of Turkish power plants using data envelopment analysis. *Energy*, 32, 1484-1499.
- Schweizer, B. and Wolff, E. F. 1981. On nonparametric measures of dependence for random variables. *The annals of statistics*, 879-885.
- Seiford, L. M. and Zhu, J. 1999. Profitability and marketability of the top 55 US commercial banks. *Management Science*, 45: 9, 1270-1288.
- Seiford, L. M. and Zhu, J. 2002. Modeling undesirable factors in efficiency evaluation. *European Journal of Operational Research*, 142: 1, 16-20.
- Shi, G. M., Bi, J. and Wang, J. N. 2010. Chinese regional industrial energy efficiency evaluation based on a DEA model of fixing non-energy inputs. *Energy Policy*, 38: 10, 6172-6179.
- Shih, J. H. and Louis, T. A. 1995. Inferences on the association parameter in Copula models for bivariate survival data. *Biometrics*, 1384-1399.
- Sklar, A. 1959. Fonctions de Répartition à n Dimensions et Leurs Marges. *Publ. Inst. Statist. Univ.*, 8, 229-231.

- Sriboonchitta, S., Liu, J., Wiboonpongse, A. and Denoeux, T. 2017. A Double-Copula stochastic frontier model with dependent error components and correction for sample selection. *International Journal of Approximate Reasoning*, 80, 174-184.
- Şimşek, N. 2011. Türkiye'nin çevresel enerji etkinliği ve toplam faktör verimliliği: Karşılaştırmalı bir analiz. *Ege Akademik Bakış Dergisi*, 11: 3, 379-396.
- Tarım A. 2001. *Veri zarflama analizi: Matematiksel programlama tabanlı göreceli etkinlik ölçüm yaklaşımı*. Sayıştay Yayın İşleri, 60, Ankara.
- Taşköprü, V. 2014. Klasik veri zarflama analizi ile kategorik veri zarflama analizi modellerinin enerji verimliliği üzerinde karşılaştırılmalı incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, 153, İstanbul.
- Tone, K. and Tsutsui, M. 2009. Network DEA: A slacks-based measure approach. *European Journal of Operational Research*, 197: 1, 243-252.
- Topallı, N. 2012. Enerji etkinliği ve Türkiye'de konut elektriği tüketiminin geri tepme (rebound effect) etkisi. Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İktisat Anabilim Dalı, 252, Konya.
- Topçu, Ç. 2013. Yarışan bağımlı risklerle sağkalım analizinde archimedean kapula yaklaşımı. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı, 119, Ankara.
- Trivedi, P. K. and Zimmer, D. M. 2005. *Copula modeling: An introduction for practitioners*. Publishers Inc., 28, Hanover, USA.
- Trivedi, P. K. and Zimmer, D. M. 2007. Copula modeling: An introduction for practitioners. *Foundations and Trends in Econometrics*, 1: 1, 1-111.
- Tsukahara, H. 2005. Semiparametric estimation in Copula models. *Canadian Journal of Statistics*, 33: 3, 357-375.
- Ulucan A. ve Karacabey A. 2002. İMKB hisse senedi piyasasında teknik etkinliğin AB aday ve üye ülkelerle karşılaştırmalı analizi. *Ankara Avrupa Çalışmaları Dergisi*, 2, 101-102.
- Wang, J. M., Shi, Y. F. and Zhang, J. 2017. Energy efficiency and influencing factors analysis on Beijing industrial sectors. *Journal of Cleaner Production*, 167, 653-664.

- Wiboonpongse, A., Liu, J., Sriboonchitta, S. and Denoeux, T. 2015. Modeling dependence between error components of the stochastic frontier model using Copula: Application to intercrop coffee production in Northern Thailand. *International Journal of Approximate Reasoning*, 65, 34-44.
- Wu, Y., Ke, Y., Xu, C., Xiao, X. and Hu, Y. 2018. Eco-efficiency measurement of coal-fired power plants in China using super efficiency data envelopment analysis. *Sustainable Cities and Society*, 36, 157-168.
- Xie, B. C., Shang, L. F., Yang, S. B. and Yi, B. W. 2014. Dynamic environmental efficiency evaluation of electric power industries: Evidence from OECD (Organization for Economic Cooperation and Development) and BRIC (Brazil, Russia, India and China) countries. *Energy*, 74, 147-157.
- Yeşilyurt, C. ve Alan, M. A. 2003. Fen liselerinin 2002 yılı göreceli etkinliğinin veri zarflama analizi yöntemi ile ölçülmesi. *Cumhuriyet Üniversitesi İktisadi ve İdari Bilimler Dergisi*, 4: 2, 91-104.
- Yılmaz, A. 2012. Türkiye’de sektörel enerji tüketimini etkileyen faktörler ve alternatif enerji politikaları. Doktora Tezi, Adnan Menderes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü İktisat Anabilim Dalı, 271, Aydın.
- Yolalan, R. 1993. *İşletmeler Arası Göreceli Etkinlik Ölçümü*. MPM Yayınları, 96, Ankara.
- Yu, M. M. 2008. Assessing the technical efficiency, service effectiveness, and technical effectiveness of the world’s railways through NDEA analysis. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 42: 10, 1283-1294.
- Zhang, X. P., Cheng, X. M., Yuan, J. H. and Gao, X. J. 2011. Total-factor energy efficiency in developing countries. *Energy Policy*, 39: 2, 644-650.
- Zhao, L., Zha, Y., Liang, N. and Liang, L. 2016. Data envelopment analysis for unified efficiency evaluation: An assessment of regional industries in China. *Journal of Cleaner Production*, 113, 695-704.
- Zhou, G., Chung, W. and Zhang, Y. 2014. Measuring energy efficiency performance of China’s transport sector: A data envelopment analysis approach. *Expert Systems with Applications*, 41: 2, 709-722.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Mervenur PALA

Doğum Yeri : Samsun

Doğum Tarihi : 01.01.1988

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Tülay Başaran Anadolu Lisesi (2005)

Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi
Matematik (2010)

Yüksek Lisans : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik
(2014)

Yayımlar : Pala M. & Şenel T. (2019). Context-Dependent Data Envelopment
Analysis and an Application. *International Journal of
Advanced Research in Engineering & Management (IJAREM)*,
ISSN: 2456-2033, pp. 01-08.