

T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



KUANTUM BİLGİSAYARLARINDA BAZI ÇOK DEĞERLİ  
KUANTUM MANTIK DEVRELERİNİN İNCELENMESİ

MİKAİL DOĞUŞ KARAKAŞ

DOKTORA TEZİ

**T.C.  
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DOKTORA TEZİ**

**KUANTUM BİLGİSAYARLARINDA BAZI ÇOK DEĞERLİ  
KUANTUM MANTIK DEVRELERİNİN İNCELENMESİ**

**MİKAİL DOĞUŞ KARAKAŞ**

**FİZİK ANABİLİM DALI**

**SAMSUN  
2020**

**Her hakkı saklıdır.**

## TEZ ONAYI

Mikail Doğuş Karakaş tarafından hazırlanan ‘‘Kuantum Bilgisayarlarında Bazı Çok Değerli Kuantum Mantık Devrelerinin İncelenmesi’’ adlı tez çalışması 17/01/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı’ nda **Doktora Tezi** olarak kabul edilmiştir.

**Danışman** Prof. Dr. Azmi GENÇTEN

Fizik Anabilim Dalı

### Jüri Üyeleri

**Başkan** Prof. Dr. Recep TAPRAMAZ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Fizik Anabilim Dalı

**Üye** Prof. Dr. Azmi GENÇTEN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Fizik Anabilim Dalı

**Üye** Prof. Dr. Erdal KILIÇ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı

**Üye** Doç. Dr. Ferdi ALTINTAŞ

Bolu Abant İzzet Baysal Üniversitesi

Fizik Anabilim Dalı

**Üye** Dr. Öğr. Üyesi Selçuk ÇAKMAK

Samsun Üniversitesi

Yazılım Mühendisliği Anabilim Dalı

**Yukarıdaki sonucu onaylım. .../.../2020**

**Prof. Dr. Bahtiyar ÖZTÜRK**

**Enstitü Müdürü**

## ETİK BEYAN

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.



Tarih: 16.01.2020

İmza:

Mikail Doğuş KARAKAŞ

# ÖZET

Doktora Tezi

KUANTUM BİLGİSAYARLARINDA BAZI ÇOK DEĞERLİ

KUANTUM MANTIK DEVRELERİNİN İNCELENMESİ

Mikail Doğuş Karakaş

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Azmi Gençten

Geleceğin teknolojileri arasında önemli bir yere sahip olacak olan kuantum bilgisayarları konusunda gün geçtikçe daha fazla araştırma ve çalışma yapılarak odak noktası haline gelmiştir. Kuantum bilgisayarlarının geliştirilmesi teknolojinin ilerlemesine ve özellikle de kuantum algoritmalarının oluşturulmasına bağlıdır. Kuantum bilgi işlemenin temel bilgi birimi kübitdir ve  $d$ -seviyeli bir durumda ( $d \geq 3$ ) küdit olarak adlandırılır. Küdit durumlarında üç seviyeli durumları ifade etmek için kütrit ve dört seviyeli durumlar için ise kükuart kavramları kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasında çekirdek ya da elektron spini-1 olan kuantum durumu için tek kütrit tanımlanırken spini-3/2 olan kuantum durumu için ise tek kükuart tanımlanmıştır. Ayrıca iki kütritlik durumlar için SI ( $S=1, I=1$ ) spin sistemi, iki kükuartlık durumlar içinde SI ( $S=3/2, I=3/2$ ) spin sistemi kullanılacaktır. Kütritler ve kükuartlar için Hadamard ve CNOT gibi bazı önemli mantık kapıları oluşturulacaktır. SI ( $S=3/2, I=3/2$ ) spin sistemi için iki kükuartlık onaltı tane dolanık durum ilk defa bu çalışmada oluşturulmuştur. Onaltı tane dolanık durum manyetik rezonans seçici pulslar kullanılarak da elde edilmiştir. Kükuartlar için Weyl operatörlerini kullanarak dolanık durumların birbirlerine dönüştürülmeleri de gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmada ilk defa iki kütritlik ve iki kükuartlık durumlar için aşırı yoğun kodlama devreleri oluşturularak uygulamaları yapılmıştır. Daha sonra iki küditlik durumlar için genel aşırı yoğun kodlama devresi önerilmiştir. Üç kütritlik ve üç kükuartlık durumlar için kuantum ışınlama devreleri oluşturularak uygulamaları yapılmıştır. Üç küditlik durumlar için kuantum ışınlama devresinin geliştirilmesi yine ilk defa bu çalışmada yapılmıştır. Kübitler için kullanılan Kuantum Fourier Dönüşümü (QFT) düşünülerek iki kütritlik durumlar için Kuantum Fourier Dönüşüm devresi oluşturulmuş ve hesaplamaları yapılmıştır. Son olarak da iki küditlik durumlar için genel bir SWAP mantık devre önerisi ve uygulaması yapılmıştır.

Ocak 2020, 105 sayfa

**Anahtar Kelimeler:** kuantum bilgisayar, kuantum bilgi işleme, kübit, kütrit, kükuart, küdit, dolanıklık, ışınlama, aşırı yoğun kodlama, fourier dönüşümü, algoritmalar, manyetik rezonans seçici pulslar, SWAP mantık devresi

# ABSTRACT

Doctoral Dissertation

## AN INVESTIGATION OF SOME MULTI-VALUED LOGIC CIRCUITS IN QUANTUM COMPUTERS

Mikail Doğuş Karakaş

Ondokuz Mayıs University

Graduate School of Sciences

Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Azmi Gençten

Quantum computers, which will have an important role among the technologies of the future, have become the focal point with more research and studies. The development of quantum computers depends on the advancement of technology and in particular the creation of quantum algorithms. The basic information unit of quantum information processing is qubit, and in a d-level case, ( $d \geq 3$ ), which is called qudit. For qudit states the term qutrit is used to express the three-level states and the ququart is used for the four-level states.

In this thesis, a single qutrit is defined for a quantum state with a nuclear or electron spin-1, while a single ququart is defined for a quantum state with spin-3/2. In addition, SI ( $S = 1, I = 1$ ) spin system will be used for two qutrit states and SI ( $S = 3/2, I = 3/2$ ) spin system will be used for two ququart states. Some important logic gates will be established for qutrits and ququarts, such as Hadamard and CNOT. For SI ( $S = 3/2, I = 3/2$ ) spin system, sixteen two ququart entangled states were constructed for the first time in this study. These entangled states were also obtained by using magnetic resonance selective pulses. By using Weyl operators for ququarts, transformations of entangled states between each others were performed. For the first time, superdense coding circuits were created and applied for two qutrit and two ququart states. Then, general superdense coding circuit was suggested for two qudit states. Quantum teleportation circuits have been created and applied for three qutrit and three ququart states. The generalization of quantum teleportation circuit for three qudit states was made for the first time in this study. Considering the Quantum Fourier Transform (QFT) used for qubits, Quantum Fourier transform circuit for two qutrit states were created and calculated. Finally, a general SWAP logic circuit is proposed and implemented for two qudit states.

January 2020, 105 pages

**Keywords:** quantum computer, quantum information processing, qubit, qutrit, ququart, qudit, entanglement, teleportation, superdense coding, fourier transform, algorithms, magnetic resonance selective pulses, SWAP logic circuit

## TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca yaptığım çalıőmalarda bilgi ve tecrubesini benimle paylaőarak rehberlik eden değerli danıőmanım ve hocam Prof. Dr. Azmi GENÇTEN'e en derin duygularıyla teşekkür ederim.

Tez İzleme Komitesinde bulunan ve tezin ilerlemesinde öneri ve yorumlarıyla katkıda bulunan Prof. Dr. Recep TAPRAMAZ ve Prof. Dr. Erdal KILIÇ'a samimi duygularıyla teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatım boyunca hiçbir emeğini fedakarlığını esirgemeyerek bugünlere ulaőmamda yardımcı olan kıymetli aileme ve doktora sürecinde tüm zorlukları benimle göğüsleyen sevgili eőime sonsuz teőekkürlerimi sunarım. Doktora tez çalıőmamı akıllı oğlum Deha Doruk KARAKAŞ'a ithaf ediyorum.

Ocak 2020, Samsun

Mikail Doğuş KARAKAŞ

## İÇİNDEKİLER DİZİNİ

<b>ÖZET</b> .....	<b>i</b>
<b>ABSTRACT</b> .....	<b>ii</b>
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	<b>iii</b>
<b>İÇİNDEKİLER DİZİNİ</b> .....	<b>iv</b>
<b>SİMGELER VE KISALTMALAR</b> .....	<b>vi</b>
<b>ŞEKİLLER DİZİNİ</b> .....	<b>viii</b>
<b>ÇİZELGELER DİZİNİ</b> .....	<b>x</b>
<b>1. GİRİŞ</b> .....	<b>1</b>
<b>2. KURAMSAL TEMELLER</b> .....	<b>8</b>
2.1. Kuantum Mekaniğinin Temel Prensipleri .....	8
2.2. Kuantum Bilgi İşleme .....	11
2.2.1. Kübitler .....	11
2.2.2. Küditler .....	21
2.3. Kuantum Dolanıklık (Entanglement) .....	29
2.4. Kuantum Aşırı Yoğun Kodlama (Superdense Coding).....	31
2.5. Kuantum Işınlama (Teleportation) .....	35
2.6. Kuantum Algoritmalar (Algorithms) .....	39
2.7. Manyetik Rezonans Spektroskopisi .....	41
2.7.1. Nükleer Manyetik Rezonans (NMR).....	42
2.7.2. Elektron Paramanyetik Rezonans (EPR) .....	44
2.7.3. Elektron Nükleer İkili Rezonans (ENDOR) .....	46
<b>3. MATERYAL VE YÖNTEM</b> .....	<b>49</b>
3.1. Kuantum Mantık Devrelerinin Analizi .....	49
3.2. Manyetik Rezonans Seçici Pulslar .....	50
3.3. Weyl Operatörleri.....	52
<b>4. BULGULAR VE TARTIŞMA</b> .....	<b>55</b>
4.1. Giriş.....	55
4.2. İki Kükuartlık Dolanık Durumların İncelenmesi .....	56
4.2.1. İki Kükuartlık Dolanık Durumların Matrislerle Elde Edilmesi .....	56
4.2.2. İki Kükuartlık Dolanık Durumların Seçici Pulslarla Elde Edilmesi.....	59
4.2.3. İki Kükuartlık Dolanık Durumlar Arasındaki Dönüşümler .....	71
4.3. İki Küditlik Durumlar İçin Aşırı Yoğun Kodlamanın Oluşturulması .....	74
4.3.1. İki Küditlik Durumlar İçin Aşırı Yoğun Kodlama .....	74



4.3.2. İki Kükuartlık Durumlar İçin Aşırı Yoğun Kodlama .....	76
4.3.3. İki Küditlik Durumlar İçin Aşırı Yoğun Kodlama .....	77
4.4. Üç Küditlik Durumlar İçin Kuantum Işınlamanın Genelleştirilmesi .....	80
4.4.1. Üç Kütritlik Durumlar İçin Kuantum Işınlama Devresi .....	80
4.4.2. Üç Kükuartlık Durumlar İçin Kuantum Işınlama Devresi.....	82
4.4.3. Üç Küditlik Durumlar İçin Kuantum Işınlama Devresi.....	84
4.5. İki Kütritlik Durumlarda Kuantum Fourier Dönüşümü (QFT).....	86
4.6. İki Küditlik Durumlar İçin Genel SWAP Mantık Devresi.....	89
<b>5. SONUÇ VE ÖNERİLER .....</b>	<b>92</b>
5.1. Sonuç .....	92
5.2. Öneriler.....	96
<b>KAYNAKLAR .....</b>	<b>97</b>
<b>EKLER.....</b>	<b>103</b>
EK 1 İki Kükuartlık Dolanık Durumları Oluşturmak İçin Kullanılan Mathematica Kodları .....	103
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>105</b>

## SİMGELER VE KISALTMALAR

$H_{AIY}$	Aşırı ince yapı etkileşme Hamiltoniyeni
$\mu_0$	Boşluğun geçirgenliği
$\mu_N$	Çekirdeğin manyetonu
$g_N$	Çekirdeğin $g$ faktörü
$m_I$	Çekirdek spin manyetik kuantum sayısı
$\gamma_I$	Çekirdeğin jromanyetik oranı
$w_I$	Çekirdeğin Larmor frekansı
$I$	Çekirdek spin açısal momentum işlemcisi
$\mu_I$	Çekirdeğin spin manyetik momenti
$H_{NZ}$	Çekirdek Zeeman Hamiltoniyeni
$\Psi$	Dalga fonksiyonu
$g_e$	Elektronun $g$ faktörü
$m_S$	Elektron Spin Manyetik Kuantum Sayısı
$\mu_B$	Bohr manyetonu
$w_e$	Elektronun Larmor frekansı
<b>ENDOR</b>	Elektron Nükleer İkili Rezonans
$S$	Elektron spin açısal momentum işlemcisi
$\mu_e$	Elektronun spin manyetik momenti
<b>EPR</b>	Elektron Paramanyetik Rezonans
$\nu$	Elektromanyetik ışınım frekansı
$\gamma_e$	Elektronun jromanyetik oranı
$H_{EZ}$	Elektron Zeeman Hamiltoniyeni
$E$	Enerji
$\Delta E$	Enerji Farkı
$\hbar$	$h/2\pi$

$H$	Hamiltoniyen
$H_{(d)}$	d-seviyeli Hadamard
$FFT$	Hızlı Fourier Dönüşümü
$\gamma$	Jiromanyetik Oran
$CNOT$	Kontrollü Değil Mantık Kapısı
$U_{nm}$	Weyl Operatörleri
$QFT$	Kuantum Fourier Dönüşümü
$B_0$	Manyetik alan
$M$	Mıknatıslanma
$MW$	Mikrodalga
$NMR$	Nükleer Manyetik Rezonans
$L$	Orbital Açısız Momentum Kuantum Sayısı
$h$	Planck sabiti
$RF$	Radyo frekans
$S$	Spin Açısız Momentum Kuantum Sayısı
$J$	Toplam Açısız Momentum Kuantum Sayısı
$\rho$	Yoğunluk matrisi

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Bir kübit'in Bloch Küresi üzerindeki geometrik temsili.....	13
Şekil 2.2. $CNOT_a$ ve $CNOT_b$ Mantık Kapıları.....	19
Şekil 2.3. SWAP Mantık Devresi .....	20
Şekil 2.4. Kuantum Dolanıklık Oluşturma Devresi .....	30
Şekil 2.5. Aşırı Yoğun Kodlama Oluşturma Devresi.....	33
Şekil 2.6. Kuantum Işınlama Mantık Devresi.....	36
Şekil 2.7. İki kübitlik Kuantum Fourier Dönüşüm (QFT) devresi.....	41
Şekil 2.8. a) Manyetik alan içerisinde manyetik moment b) $B_0 = 0$ durumunda çekirdek spinlerinin yönelimi c) $B_0 \neq 0$ durumunda çekirdek spinlerinin yönelimleri .....	42
Şekil 2.9. $B_0$ dış manyetik alanda spini $I = 1/2$ olan bir çekirdeğin enerji seviyeleri .....	43
Şekil 2.10. Elektron spin kuantum sayısı $S = 1/2$ olan paramanyetik maddenin dış manyetik alandaki enerji düzeyleri.....	45
Şekil 2.11. Sabit manyetik alanda spini $I = 1/2$ olan bir çekirdek ile çiftlenmemiş elektronun enerji seviyelerinin gösterimi .....	47
Şekil 3.1. a) Seri bağlı kuantum devresi, b) Paralel bağlı kuantum devresi .....	49
Şekil 3.2. $SI(S=1/2, I=1/2)$ spin sistemi için radyo frekans ve mikrodalga geçişleri	51
Şekil 4.1. İki kükuartlık durumlar için dolanıklık oluşturma devresi .....	56
Şekil 4.2. Spin-3/2 için kükuart durumları ve bunlar arasındaki bazı seçici geçişler	60
Şekil 4.3. $SI(S=3/2, I=3/2)$ spin sistemi için ENDOR enerji düzeyleri .....	63
Şekil 4.4. a) Dolanık durumları oluşturmak için kuantum devresi ve b) $ 00\rangle$ durumu için bu devreyle ilgili puls dizileri .....	65
Şekil 4.5. a) Hadamard seçici pulslarını uygulamadan önceki durum ve sırasıyla b) $\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{[1-5]}$ , c) $\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{[1-9]}$ , d) $\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{[5-13]}$ seçici pulslarının uygulanmasıyla oluşan enerji seviyelerindeki spin yoğunluğu değişimleri .....	66

Şekil 4.6. a) Hadamard kapısı uygulandıktan sonra sistemin süperpozisyon durumu ve sırasıyla b) $(\pi)_x^{[5]-[6]}$ , c) $(\pi)_x^{[9]-[11]}$ , d) $(\pi)_x^{[13]-[16]}$ seçici pulslarının uygulanmasıyla oluşan enerji seviyelerindeki spin yoğunluğu değişimleri .....	67
Şekil 4.7. İki kütritlik durumlar için aşırı yoğun kodlama mantık devresi .....	74
Şekil 4.8. İki kükuartlık durumlar için aşırı yoğun kodlama mantık devresi.....	76
Şekil 4.9. İki küditlik durumlar için aşırı yoğun kodlama mantık devresi.....	78
Şekil 4.10. Üç kütritlik durumlar için kuantum ışınlama devresi .....	81
Şekil 4.11. Üç kükuartlık durumlar için kuantum ışınlama devresi.....	83
Şekil 4.12. Üç küditlik (çok değerli) durumlar için kuantum ışınlama devresi .....	85
Şekil 4.13. İki kütritlik Kuantum Fourier Dönüşüm (QFT) devresi .....	87
Şekil 4.14. İki küditlik durumlar için önerilen SWAP mantık kapı devresi .....	89

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Tek kübitlik bazı mantık kapılarının sembol ve matrisleri .....	17
Çizelge 2.2. Spin-1 için tek kütritlik durumlar .....	22
Çizelge 2.3. Tek kütritlik durumların süperpozisyonları .....	23
Çizelge 2.4. Spin-3/2 için tek kükuartlık durumlar.....	26
Çizelge 2.5. Tek kükuartlık durumların süperpozisyonları.....	27
Çizelge 2.6. Bell durumları .....	31
Çizelge 2.7. A göndericisinin paylaşılan bir ebite uygulaması gereken ilk işlem .....	32
Çizelge 2.8. B alıcısının paylaşılan bir ebit durumuna uygulaması gereken ilk işlem .....	33
Çizelge 2.9. B alıcısında bulunan birinci kübite Hadamard işleminin uygulanması .	34
Çizelge 2.10. B alıcısında bulunan kübite uygulayacak dönüşüm operatörü.....	38
Çizelge 3.1. Kükuartlar için Weyl operatörleri.....	53
Çizelge 4.1. İki kükuartlık dolanık durumlar .....	57
Çizelge 4.2. SI ( $S=3/2$ , $I=3/2$ ) spin sistemi için iki kükuartlık durumlar ve spin Hamiltonyen enerjileri.....	62
Çizelge 4.3. İki kükuartlık dolanık durumları oluşturmak için uygun $H_{(4)}$ ve $CNOT_a(4)$ puls dizileri .....	69
Çizelge 4.4. SI( $3/2$ , $3/2$ ) spin sistemindeki mikrodalga seçici pulslar ve matris temsilleri.....	70
Çizelge 4.5. SI( $3/2$ , $3/2$ ) spin sistemindeki radyo frekans seçici pulslar ve matris temsilleri.....	71
Çizelge 4.6. İki kükuartlık dolanık durumların dönüşüm operatörleriyle birbirlerine dönüşümleri.....	74
Çizelge 4.7. Kütritlerde dolanık durumlara aşırı yoğun kodlama uygulanması .....	75
Çizelge 4.8. Kükuartlarda dolanık durumlara aşırı yoğun kodlama uygulanması.....	77
Çizelge 4.9. Farklı iki küditlik dolanık durumlar için aşırı yoğun kodlama .....	79

## 1. GİRİŞ

İnsanoğlu varoluşundan bu yana devamlı olarak yaşamını ve çevresini araştırmakta ve edindiği tecrübelerle bu bilgileri yeni nesillere aktarmaktadır. Bu bilgi edinme sürecindeki olayları analiz etmenin en iyi araçlarının başında hiç kuşkusuz matematik dili gelmektedir. Olayların sadeleştirilerek analitik bir düzen içerisinde insanlara sunulmasına yardımcı olan matematik dilinin daha anlamlı ve sürdürülebilir hale gelmesi için ise Fizik dili çok daha önemli bir rol üstlenmektedir. Bilgi, çoğunlukla soyut bir matematiksel kavramın terimleri kullanılarak ifade edilmektedir. Bilgi içeren bir durum söz konusu ise fiziksel bir ortamda saklanmalı ve fiziksel süreçler ile üzerinde değişiklikler yapılabilmelidir. Bu durum bize bilgi işleyen makinelerin özelliklerinin fizik yasaları ile belirlendiğini ifade etmektedir. 19. yüzyılın sonlarına gelindiğinde fizik yasaları bugünkü adıyla klasik fizik için Isaac Newton'un hareket denklemleri ve James Clerk Maxwell'in elektromanyetizma denklemleri deneysel verilerle büyük oranda uyuşmaktaydı. Ancak 20. yüzyılın başlarında bazı bilim adamları küçük ölçekli yapılarda klasik fizik yasalarının uyumsuzluk gösterdiğini buldular. Öncülüğünü Max Planck'ın yapmış olduğu ve daha sonra Albert Einstein, Niels Bohr, Louis de Broglie, Erwin Schrödinger, Werner Heisenberg gibi bilim insanlarının da katkılarıyla "Kuantum Fiziği" adı verilen yeni bir fizik teorisi doğmuştur.

Bilgisayarların gelişiminde özellikle 1854 yılında George Boole, kendi adıyla da anılacak olan sayısal devrelerin tasarımı ve analiz edilmesinde sadece 0 ve 1 rakamlarının kullanıldığı Boolean cebri oluşturarak önemli bir gelişim başlatmıştır (Boole, 1854). Günümüz bilgisayarlarının programlama temelini oluşturan Turing makinesi 1936'da Alan Turing tarafından tasarlanmıştır (Turing, 1937). Boolean cebri kullanılarak anahtarlar ve röleler yardımıyla mantık operatörlerinin ifade edilebileceği gösterilmiştir (Shannon, 1938). Ayrıca 1948'de Claude Shannon bilginin temel biriminin ikili rakam ya da bit olduğunu belirtmiştir (Shannon, 1948). Bu çalışmayla birlikte *Bilgi Teorisi*'nin temelleri atılmıştır.

Kuantumun ilk devrimi atom ve atomaltı fizikte elde edilen teoriler ve bunun sonucu olarak yaşanan gelişmelerle oluşan bir süreci kapsamaktaydı. Kuantumda yaşanan ikinci devrim ise kuantum mekaniğinin ilk olarak bilgi teorisine

uygulanması ve ardından da bilgi teknolojilerindeki ilerlemesi ile devam etmektedir. Kuantum bilgisini anlamak için onu tanımlayan matematiği iyi anlamak gerekmektedir (Jaeger, 2018). Kuantum Bilgisayarlar mümkün mü? Sorusu belkide çağımızın en büyük bilimsel ve mühendislik sorularından biri haline gelmiştir. Günümüze kadar olan süreçte bilgisayarlar mekanik dişli ve kollardan, elektrik rölelerinden, vakum tüplerinden, ayrık transistörlerden ve son süreçte milyonlarca transistör barındıran entegre devrelerden oluşturulmuştur. Son 50 yıllık süreçte bilgisayar teknolojilerindeki minyatürleştirme doruk noktasına ulaşmıştır. 1971’de bir mikroişlemci ortalama 2300 transistör içerirken, günümüz işlemcileri milyarlarca transistör içerebilmektedir. Bu zaman süresince bilgisayar biliminin temelini oluşturan matematik modelide değişim göstermiştir.

Moore yasası, işlemci teknolojileri açısından bir dev olan Intel firmasının kurucularından Gordon Moore tarafından 1965 yılında “Electronics Magazine” isimli teknoloji dergisinde yayınlanan makale ile duyurulmuştur. Bu yasa, bilgisayar çiplerinin içinde bulunan birim alandaki transistör sayılarının her iki yılda bir iki katına çıkacağını böylelikle bilgisayar çiplerinin transistör yoğunluğunun üstel şekilde artacağını söylemektedir (Moore, 1965). Bilgisayar teknolojilerindeki ilerlemelere bakılacak olursa Moore yasasının öngördüğü birim alandaki transistör sayısındaki artışın önümüzdeki yıllarda limit değere ulaşacak olması sebebiyle zorunlu olarak çok küçük ölçeklerde fizik yasalarının geçerli olduğu farklı alternatifler üretilmesi gerçeği doğmuştur. Bu yeni bilgi teknolojisine dayalı sistem kuantum hesaplama adı verilen kuantum fiziği yasalarını kullanan yeni bir gerçekliğe dayanmaktadır.

İlk olarak 1980 yılında Paul Benioff hesaplama ve kuantum mekaniği arasındaki ilişkiyi, kuantum sistemlere uygulanan birimsel (üniter) dönüşümlerin mantık geçitleri olabileceğini belirten bir makale ile açıklamıştır (Benioff, 1980). Aynı yıllarda ünlü fizikçi Richard Feynman ise bir kuantum sistemin dinamiklerinin klasik bilgisayar tarafından taklit edilebilmesi için üstel olarak artan bir hesaplama kapasitesini ihtiyaç duyulacağını ifade etmiştir. Bu sayede kuantum sistemlerinin bilgi üretme ve hesaplama açısından kullanılabileceğini belirten bir makale yayınlamıştır (Feynman, 1982). 1985’te David Deutsch karmaşık matematiksel hesapların belirli bir sistem tarafından yapılmasını sağlayacak Kuantum Turing makinesini tasarlamıştır (Deutsch, 1985).



Deutsch bu makalede klasik fizikte karşılığı olmayan kuantum fiziğine ait olan süperpozisyonun, hesaplamaları hızlandırmada kullanabileceğini göstermiştir. 1989'da Deutsch evrensel üç-kübitlik kuantum mantık kapısını da önermiştir (Deutsch, 1989). Ayrıca 1992'de bir problemin kuantum algoritmaları kullanılarak klasik bilgisayarlara göre çok daha hızlı çözülebileceğini gösteren bir çalışma yapılmıştır (Deutsch ve Jozsa, 1992). Kuantum kriptoloji açısından 1994 yılında Peter Shor'un geliştirdiği algoritma çok dikkat çekicidir. Klasik bilgisayarların milyonlarca yılda çözebileceği çok büyük sayıların çarpanlara ayrılmasıyla ilgili işlemleri Shor algoritması ile dakikalar içerisinde çözülebileceği ortaya konuldu (Shor, 1994). Günümüzde en güvenli sayılabilecek şifreleme algoritması olan ve asal çarpanlara ayırma işleminin büyük sayılar için bilgisayarlarda etkili olarak çözülememesi üzerine kurulu olan RSA algoritmasının bu kuantum algoritması ile çözülebilecek olması bilim çevrelerinde kuantum bilgisayarlarına olan merakı ve çalışmaları arttırmıştır. 1997 yılında geliştirilen diğer önemli bir kuantum algoritması ise Lov Kumar Grover tarafından geliştirilen ve sıralanmamış bir veritabanındaki istenilen bir elemanın bulunmasıyla ilgilidir (Grover, 1997). Grover arama algoritması olarak bilinen bu işlem kuantum bilgisayarlarında yapıldığında, klasik bilgisayarlara göre kuadratik ( $\sqrt{N}$ ) bir hızlanma avantajı sağlamaktadır. 1997 yılında yayınlanan bir diğer önemli makalede Kuantum Fourier Dönüşüm (QFT) algoritması ile klasik olana göre algoritma hızında üstel kazanç sağlandığı gösterilmiştir (Jozsa, 1997). DiVincenzo 2000 yılında kuantum bilgisayarlarının çalışma prensibi olarak ne tür özelliklere ihtiyaç duyduğuyla ilgili olarak bir makale yayınlamıştır (DiVincenzo, 2000). DiVincenzo kriterleri aslında bir kuantum bilgisayarının benzetiminin (simulation) nasıl yapılabileceği sorusunda cevap vermiş oluyor.

Kuantum bilgi işlemede çok önemli bir yer tutan kuantum dolanıklık konusu 1935 yılında Einstein, Podolsky ve Rosen (EPR) kuantum fiziğinin gerçekliğini sorgulayan “ Fiziksel gerçekliğin kuantum mekaniksel tanımı tamamlanmış olarak düşünülebilir mi?” konulu bir makale yayınladılar (Einstein vd, 1935). EPR deneyi olarak da anılmakla beraber birden fazla atomaltı parçacığın aralarındaki mesafeye bağlı olmaksızın eşzamanlı olarak birbirlerini etkiledikleri bir bakıma iletişim kurduklarını söylemektedir. 1964 yılına kadar çok tartışılan bu konu üzerine John Bell bu düşüncenin matematiksel olarak ifade edilebileceği gibi deneysel olarak da ispatlanabileceğini göstermiştir (Bell, 1964).

Kuantum dolanıklıkla ilgili olarak yapılan ilk ve kapsamlı sayılabilecek Aspect deneyi sonrasında artık dolanıklık kavramı tartışmadan çok bir gerçeklik haline gelmiştir (Aspect vd, 1982). Kuantum bilgi işlemede özellikle dolanıklık konusuyla ilgili olarak birçok uygulama alanı ve çalışma mevcuttur. Bunlardan bazıları, tek bir kuantum durumunun kopyalanamayacağıyla ilgili kopyalama yasak teoremi (no cloning theorem) (Wootters ve Zurek, 1982), kuantum bilgi şifreleme (quantum cryptography) (Bennett ve Brassard, 2014), kuantum aşırı yoğun kodlama (superdense coding) (Bennett ve Wiesner, 1992; Mattle vd, 1996), kuantum bir durumun ışınlanması (quantum teleportation) (Bennett vd, 1993), kuantum dolanıklık değiş-tokuşu (entanglement swapping) (Yurke ve Stoler 1992; Żukowski vd, 1993), kuantum hata düzeltme kodları (quantum error correction) (Shor, 1995; Steane, 1996) olarak verilebilir.

Kuantum durumların ışınlanmasına yönelik ilk çalışmalar Charles H. Bennet ile arkadaşları tarafından gerçekleştirilmiştir (Bennett vd, 1993). Deneysel olarak ışınlama çalışmaları atomaltı parçacıklardan protonların kullanılmasıyla ilk olarak Bouwmeester ve arkadaşları tarafından yapılmıştır (Bouwmeester vd, 1997). 1998'de Nükleer Manyetik Rezonans (NMR) tekniği kullanılarak da kuantum ışınlama gerçekleştirilmiştir (Nielsen vd, 1998). Ayrıca kuantum bilgi işleme süreçlerinde NMR prensiplerinin yararlı olacağı gösterilmiştir (Gershenfeld ve Chuang, 1997). İki kübit içeren kuantum mantık kapılarının oluşturulmasında NMR prensipleri kullanılmıştır (Price vd, 1999). Önemli bir mantık kapısı olan SWAP için NMR prensipleri kullanılarak dört kübitlik durumlar için uygulaması yapılmıştır (Gün vd, 2011). SI ( $S=3/2$ ,  $I=1/2$ ) spin sistemi için üç kübitlik dolanık durumlar elde edilmiştir (Gün ve Gençten, 2011). Ardından SI ( $S=3/2$ ,  $I=3/2$ ) spin sistemi için dört kübitlik dolanık durumlar elde edilmiştir (Gün vd, 2013). Ayrıca kuantum iletişim ve dolanık durumlarla ilgili olarak SI ( $S=3/2$ ,  $I=1/2$  ve  $I=3/2$ ) spin sistemleri içinde bazı uygulamalar yapılmıştır (Gün, 2011).

Nanoteknolojideki ilerlemelerin sonucu olarak geliştirilen endohedral fullerenerin içine yerleştirilmiş atomun çekirdek ve elektron spin durumlarının elektron nükleer ikili rezonans (ENDOR) tekniğiyle kontrolünün sağlanmasıyla çalışacak bir kuantum bilgisayarının yapılabileceği düşüncesi ortaya atılmıştır (Harneit, 2002). Endohedral fullerenerden faydalanılarak iki kübitlik mantık kapıları NMR prensipleri ile oluşturulmuştur (Ju vd, 2007).

Belli bir mesafede yerleştirilen iki tane endohedral fulleren içerisinde hapsedilen iki elektrona mikrodalga (MW) pulsunun uygulanmasıyla Bell durumları üreticisi gerçekleştirilmiştir (Yang vd, 2008). Ayrıca puls ENDOR tekniği kullanılarak aşırı yoğun kodlama deneysel olarak yapılmıştır (Rahimi vd, 2005). Kuantum bilgi işleme açısından endohedral fullerenlerin durum tomografisinin incelenmesi yapılmıştır (akmak, 2011). Endohedral fullerenlerin SI spin sistemlerini oluşturmak için uygun örneklere sahip olduğu çalışmayla gösterilmiştir (BelBruno, 2002).

Klasik bilgisayar teknolojilerindeki temel bilgi birimi “bit” adı verilen ikili (binary) sayı sistemi ile oluşturulan mantık kapılarına ve işlemlerine dayanmaktadır. Aynı şekilde kuantum bilgisayarlarında da temel bilgi birimi iki seviyeli bir kuantum sistemi olan kübit (qubit) olarak ifade edilir. Bilgisayarların geliştirildiği yıllarda ikili sistemden farklı olarak üçlü (ternary) sistemle çalışacak bilgisayarlar yapılmaya çalışılmıştır. Temel bilgi birimi “trit” olarak adlandırılan ve işlem olarak daha yüksek ve maliyet açısından daha ucuz olan bir bilgisayar 1958 yılında geliştirilmiştir. Buna rağmen üçlü sistemle çalışan bilgisayarlar beklenenin aksine ilgi görmeyerek yapılan araştırmalar 1970’de durmuştur (Arpasi, 2003). Kuantum bilgi işlemede üç seviyeli bir kuantum sistemi kütrit (qutrit) olarak tanımlanmaktadır. NMR kuantum bilgisayarlarında iki kütritlik bazı mantık kapılarının oluşturulması ve uygulamaları yapılmıştır (Türkpene, 2007). Kütrit sistemlerde dönme işlemcilerinin oluşturulmasıyla ilgili çalışmalarda bulunmaktadır (Kocakoç, 2014). İki kütritlik dolanık durumlar manyetik rezonans seçici pulslar kullanılarak oluşturulmuştur (orbaci vd, 2016). Kütritler kullanılarak oluşturulan bazı kuantum devreleri ve uygulamaları üzerine farklı çalışmalarda yapılmıştır (Terzi, 2019).

Çok değerli mantık (multi-valued logics - MVL) ilk kez 1920’de Polonyalı bir matematikçi olan Jan Lukasiewicz tarafından çalışılmıştır. Üç ve üzerindeki çok değerli (multi-valued) bir kuantum sistemi genel olarak küdit (qudit) olarak tanımlanmaktadır (Proctor ve Kendon, 2016). Kuantum hesaplama mantığına kübit sistemlerden yola çıkarak çok değerli bir yaklaşımla küditler üzerine araştırmalar yapılmıştır (Dalla Chiara vd, 2018). Klasik ve kuantum bilgi işleme açısından çok değerli mantık kapıları olarak kullanılan çalışmalar mevcuttur (Brennen vd, 2005; Muthukrishnan ve Stroud, 2000). Küditler için SWAP mantık devresinin oluşturulmasıyla ilgili çalışmada yapılmıştır (Garcia-Escartin ve Chamorro-Posada 2013).

Son 40 yılda özellikle çok değerli mantık üzerine birçok çalışma yapılmıştır (Sasao, 2013). Ayrıca dört seviyeli bir kuantum sistemi ise kükuart (ququart) olarak isimlendirilmiştir (Di ve Wei, 2013).

Günümüzde kuantum bilgisayarlarıyla ilgili olarak IBM, Microsoft ve Google gibi büyük teknoloji firmalarının araştırmaları bulunmaktadır. Bunlardan en önemlilerinden biri IBM tarafından geliştirilen 20 kübitlik *IBM Q* adını verdiği ve yaptığı çalışmaları hızlandırmanın yanında araştırmacılardan geri dönüt alabilmek için bulut tabanlı olarak kullanıma sunulan kuantum bilgisayarıdır (IBM, 2019). Yine Microsot'un Azure Kuantum adını verdiği bulut tabanlı bir sistemi bulunmaktadır (Microsoft, 2019). Arama motoru devi Google ise Kanadalı bir şirket tarafından oluşturularak kuantum hesaplama yapabilen *D-Wave Systems* adında bir projenin ortağıdır. Ayrıca birleşik krallık ulusal kuantum teknoloji programları gibi birçok projede bulunmaktadır. Kuantum bilgisayarlarıyla ilgili en son gelişmelerden birisi de Google araştırmacıları tarafından Nature dergisinde yayınlanan bir çalışmadır (Arute vd, 2019). Bu çalışmada Sycamore işlemcisi adını verdikleri 53 kübit üzerinde oluşturulan bir problemin çözümünün 200 saniyede gerçekleştirilerek kuantum üstünlüğüne ulaştıkları belirtiliyor. Bu problemin çözümünde dikkat çeken husus ise günümüz süper bilgisayarlarının bu işlemi yaklaşık olarak 10.000 yılda çözebilecek olmasıdır. Gelecekte kuantum bilgisayarlarının ve yeni algoritmaların geliştirilmesiyle birlikte insanlığın ilerlemesine yardımcı olacak diğer alanlarının tümünde de büyük atılımlar olacaktır.

Bu tez çalışmasında, kuramsal temeller bölümünde kuantum mekaniğinin temel prensipleri ile ilgili temel bilgiler verildikten sonra kuantum bilgi işleme süreçlerinde bize yardımcı olacak kübit kavramı, tek ve iki kübitlik durumlar, bazı kuantum mantık kapı ve devreleri, küdit kavramı, küditlerle ilgili bazı kuantum mantık kapı ve devreleri verilmiştir. Ayrıca kuantum bilgi işleme açısından dolanıklık kavramı ve kübitler için dolanıklık devresi, kübitler için aşırı yoğun kodlama devresi, kübit bir durumun ışınlanması ve devresi, literatürde bilinen bazı kuantum algoritmaları, nükleer manyetik rezonans, elektron paramanyetik rezonans ve elektron nükleer ikili rezonans spektroskopileri gibi konular tanıtılmıştır.

Materyal ve yöntem bölümünde kuantum mantık devrelerinin analiz edilmesinde seri ve paralel bağlı devreler, manyetik rezonans seçici pulslar ve Weyl operatörleri verilerek kükuartlar için oluşturulmuştur.

Bulgular ve tartışma bölümünde ilk olarak iki kükuartlık dolanık durumlar incelenmiştir. İki kükuartlık dolanık durumlar öncelikle matrislerle elde edilerek tablosu oluşturulmuştur. Ardından iki kükuartlık dolanık durumlar için manyetik rezonans seçici pulslar oluşturularak onaltı tane dolanık durum elde edilmiştir. Weyl operatörleri kullanılarak iki kükuartlık dolanık durumların birbirine dönüşümü sağlanmıştır. İkinci olarak iki küditlik durumlarda aşırı yoğun kodlama incelenmiştir. İki kütritlik durumlar için aşırı yoğun kodlama mantık devresi oluşturularak kütritler için dolanık durumlara uygulaması yapılmıştır. Daha sonra iki kükuartlık durumlar için aşırı yoğun kodlama mantık devresi önerilerek kükuartlar için dolanık durumlara uygulaması yapılmıştır. Kütritler ve kükuartlar için yapılan aşırı yoğun kodlama devreleri göz önüne alınarak genel olarak iki küditlik durumlar için aşırı yoğun kodlama devresi önerilerek genel denklemi oluşturulmuştur. Üçüncü olarak da üç küditlik durumlarda kuantum ışınlama incelenmiştir. Üç kütritlik durumlar için kuantum ışınlama devresi oluşturularak devrenin matris temsili elde edilmiştir. Ardından üç kükuartlık durumlar için kuantum ışınlama devresi önerilerek devrenin matris temsili elde edilmiştir. Kütrit ve kükuartlar için oluşturulan kuantum ışınlama devreleri düşünülerek genel üç küditlik kuantum ışınlama devre önerisi yapılmıştır. Ayrıca bu devrenin matris temsili de yazılmıştır. Dördüncü olarak da önemli bir algoritma olan Kuantum Fourier Dönüşümü (QFT) kullanılarak iki kütritlik durumlar için Kuantum Fourier Dönüşümü devresi önerilmiştir ve uygulaması yapılmıştır. Son olarak da iki küditlik durumlar için yeni bir SWAP mantık kapı devre önerisi yapılarak uygulaması gerçekleştirilmiştir.

Sonuç ve öneriler bölümünde ise bu tezde yapılan çalışmalarla ilgili olarak elde edilen sonuçlar verilerek ileride yapılacak çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

### 2.1. Kuantum Mekanikinin Temel Prensipleri

19. yüzyıla kadar olan zamanda birçok bilimadamı tarafından dünya üzerinde birçok teorik ve deneysel çalışma yapılmıştır. Mekanik yasaları Galileo Galilei ve Isaac Newton tarafından, elektromanyetizma Michael Faraday ve James Clerk Maxwell tarafından, termodinamik ise Ludwig Boltzmann tarafından açıklanmıştır. 19. yüzyılın sonlarında birçok fizikçi tüm fiziksel problemlerin çözümlendiğini ve evreni tamamen tanımlayabildiklerini düşünüyordu.

Bilimadamları siyah cisim ışıması, Compton saçılması, fotoelektrik olay gibi bazı olayların klasik fizik yaklaşımıyla açıklanamadığını farkettiler. Bu düşünce yeni bir akımın ilk kıvılcıklarını ateşlemiş oldu. Kuantum Fiziği adı verilen bu büyük devrim fizik dünyası için yeni bir başlangıç anlamına geliyordu. Öncülüğünü ise 1900 yılında Max Planck, temel bir düşünce ile ortaya çıkarmıştır. Atomlardan yayılan radyasyonun sürekli olmadığını ve kesikli (kuantumlu) birimler halinde olması gerektiğini belirtmiştir. Frekansı  $\nu$  olan bir radyasyonun atomlara verdiği enerjinin  $h\nu$ 'nün tam katları olacağını ortaya attı ( $E = nh\nu$ ). Burada  $h$ , Planck sabitini,  $E$  enerjii temsil eder ve  $n = 1, 2, 3, \dots$  değerlerini alır.  $h\nu$  temel birimine, enerji kuantumu denilmektedir. 1905 yılında ise Albert Einstein, ışığın kuantum enerji paketleri şeklinde tanecikli bir yapıya sahip olduğunu belirtmiştir. İlk defa Hertz tarafından keşfedilen fotoelektrik olayın açıklamasında yine bu düşünceyi kullanarak yapmıştır. Ayrıca Einstein, özel ve genel görelilik kuramlarında zamanın doğası ve evrenin yapısı hakkındaki fikirleri ile bilime yeni bir bakış kazandırmıştır.

Işığın tanecikli yapıya sahip olduğu tartışılırken 1923 yılında Louis de Broglie madde dalgası fikrini öne sürerek elektron, atom ve moleküllerin tanecik olarak düşünülebileceği gibi bunların dalga olarak da ifade edebileceğini belirtmiştir. Daha sonra Erwin Schrödinger taneciğin belli bir andaki durumunu belirleyebilmek için dalga fonksiyonunu kullanarak Schrödinger dalga denklemini oluşturmuştur. Bir parçacığın konum ve momentumunun aynı anda ve aynı hassasiyetle ölçülememesi Heisenberg belirsizlik ilkesi olarak Werner Heisenberg tarafından ifade edilmiş ve bu

yeni fiziğe bir başka katkı daha sağlamıştır. İlerleyen yıllarda başka fizikçiler tarafından da birçok katkı yapılarak Kuantum Mekaniğinin temelleri daha da güçlenerek günümüzdeki haline ulaştırılmıştır.

Kuantum mekaniğinin temelini 4 postulat oluşturmaktadır. Bunlar:

- I. Postulat:** Kuantum mekaniği açısından bir sistemin durumu ve bu sisteme ilişkin gözlenebilir değerleri, üzerinde bir iç çarpımın tanımlı olduğu, sonlu ya da sonsuz boyutlu bir kompleks vektör uzayı olan Hilbert (H) uzayında tanımlanmaktadır. Bu uzay üzerindeki elemanlar Dirac notasyonu kullanılarak  $|\Psi\rangle$  - ket vektörü ve bunun eşleniği olan  $\langle\Psi|$  - bra vektörleri ile temsil edilir. Bu vektörler sistem hakkındaki tüm bilgileri içerdiği gibi sistemin kuantum durumlarında temsil etmektedir.
- II. Postulat:** Klasik mekanik açısından deneysel olarak ölçülen ve değerlendirilen gözlenebilir ifadeler kuantum mekaniğinde işlemciler karşılık gelmektedir. Kuantum mekaniğinin tanımlandığı Hilbert uzayında kendine eşlenik olan yani hermitik olan bir işlemci gözlenebilir olarak ifade edilir. Kuantum mekaniksel bir sistemde gözlenebilir nicelik olan A, Hilbert uzayında bir hermityen operatör olarak  $\hat{A}$  şeklinde tanımlanır.
- III. Postulat:**  $\hat{A}$  işlemcisine eşlik eden gözlenebilirin ölçülmesinde gözlenebilen ifadeler  $\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$  özdeğer denklemini sağlayan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  özdeğerleri, gözlenebilirin ölçülmesinde mümkün sonuçları verir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler, kuantum sisteminin durum uzayının ortonormal baz vektörlerinin bir takımı halindedir.
- IV. Postulat:** Bir kuantum sisteminde birden fazla fiziksel sistemden oluşan bileşke sistemin durum uzayı, fiziksel sistemin bileşenlerinin tensör çarpımlarıyla ifade edilir. Bu sistemler  $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \dots, |\psi_n\rangle$  durumlarında ise bileşke sistemin Hilbert uzayı  $H_{\psi_1} \otimes H_{\psi_2} \otimes H_{\psi_3} \otimes \dots \otimes H_{\psi_n}$  biçiminde olup sistemin durumu ise  $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_n\rangle$  ile verilir.

Kuantum mekaniğinin elemanları olan vektörleri ifade etmede Dirac notasyonu çok kolaylık sağlamaktadır. Fiziksel bir sistemin durumunu ifade ederken  $|\dots\rangle$  - ket sütun vektörü,  $\langle\dots|$  - bra satır vektörü ve  $\langle\dots|\dots\rangle$  braket kullanımı Dirac gösterim şeklidir.

Kartezyen koordinat sistemi kullanılarak bir  $W(a, b)$  noktası farklı biçimlerde ifade edilebilir. Bu nokta sütun vektörü olarak  $W = (a \ b)^T$  veya vektör ifadesiyle  $\vec{W} = a\vec{x} + b\vec{y}$ , ayrıca Dirac gösteriminde ise  $|W\rangle = a|x\rangle + b|y\rangle$  şeklinde yazılır.

Kartezyen koordinat durumunda a ve b katsayıları reel sayı olmalıdır. Kuantum mekanikte ise a ve b karmaşık sayı olup  $\alpha$  ve  $\beta$  olarak yazılabilir. Dirac gösterimiyle bir kuantum durumu  $|\Psi\rangle = (\alpha, \beta)$  aşağıdaki gibidir.

$$|\Psi\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle \quad (2.1)$$

Bir bra bir ketin karmaşık eşleniğini ifade eder.  $|\Psi\rangle$  sütun vektörü  $\Psi = (\alpha\beta)^T$  şeklinde yazılırsa bunun satır vektörü  $\Psi^\dagger = (\alpha^*\beta^*)$  olup, burada  $\Psi^\dagger$ ,  $\Psi$ 'nin karmaşık eşleniğinin transpozudur. Dirac gösterimiyle,

$$\langle\Psi| = \alpha^*\langle x| + \beta^*\langle y| \quad (2.2)$$

şeklinde verilir. Kuantum mekaniğinde bir  $|\Psi\rangle$  vektörü ile başka bir  $|\Phi\rangle$  vektörünün karmaşık eşleniğinin çarpımı  $\langle\Phi|\Psi\rangle$  değerine 'iç çarpım' denir. Örneğin  $|\Psi\rangle$  vektörünün kendi karmaşık eşleniğiyle iç çarpımı aşağıdaki gibi verilir.

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = (\alpha^*\beta^*) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \quad (2.3)$$

Bra ve ket gösterimi ile işlem yapılırken aşağıdaki kurallara dikkat edilir.

$$\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle = 0 \quad (2.4)$$

$$\langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = 1 \quad (2.5)$$

Sıfırdan farklı iki vektörün iç çarpımları sıfır ise bu iki vektöre dik (ortogonal) vektörler ve bir vektörün kendisi ile iç çarpımına onun normu (boyu) denir. Bir  $|\Psi\rangle$  vektörünün normu,

$$\|\Psi\| = \sqrt{\langle\Psi|\Psi\rangle} \quad (2.6)$$



biçiminde tanımlanır. Vektörün normu her zaman sıfırdan büyük bir reel sayıdır. Normu bir olan vektöre de normalize edilmiş vektörler adı verilir. Bra ve ketler matrislerle de temsil edilir. Bir  $W$  matrisi,

$$W = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

ile ifade edilir. Dirac gösteriminde bra ve ketlerin dış çarpımı  $(|\dots\rangle\langle\dots|)$  aşağıdaki gibidir (Gün, 2011):

$$W = a_{xx} |x\rangle\langle x| + a_{xy} |x\rangle\langle y| + a_{yx} |y\rangle\langle x| + a_{yy} |y\rangle\langle y| \quad (2.8)$$

## 2.2. Kuantum Bilgi İşleme

### 2.2.1. Kübitler

İlk bilgisayarlardan günümüze kadar olan süreçte kullandığımız bilgisayar teknolojisi elektronik olarak yüksek ve alçak durumları temsil eden 1 ve 0 mantık yapısı ile çalışmaktadır. 1937’de Claude Shannon elektrik devrelerinin mantıksal yapısını George Boole’un ortaya koyduğu cebir ile ilişkilendirmiştir. Bu cebire göre ifade edilen mantık kapılarının 1 ve 0 (doğru-yanlış) değerlerini alabilen giriş ve çıkışları vardır. 1940’da John von Neumann bu ikili sistemi kullanarak bilgisayar programlarının saklanabileceği fikrini öne sürmüştür.

Günümüzde kullandığımız bilgisayarlarda saklanan en küçük veri birimi bu ikili sisteme dayalı olarak “*binary digit*” cümlesinin kısaltılmışı olan “*bit*” ifadesidir. Benzer biçimde kuantum bilgisayarlarda bilginin temel birimi “*kuantum bit*” veya genelde kullanılan kısaltılmış haliyle “*kübit*” olarak adlandırılmıştır (Lloyd, 1995; Schumacher, 1995).

Atomaltı parçacıklardan oluşan bir kuantum sisteminin, taban ve uyarılmış durum gibi iki farklı durumu mantıksal olarak “0” ve “1” olarak tanımlanabilir. Bu durumda kübit için iki mümkün durum,  $|0\rangle$  ve  $|1\rangle$  ket vektörleriyle verilebilir. Bu durumlar iki boyutlu Hilbert uzayında ortonormal bir baz oluştururlar. Kuantum mekaniğine göre,  $|0\rangle$  ve  $|1\rangle$  ile gösterilen iki farklı duruma sahip kuantum sistemi,

herhangi bir anda bu durumlardan birinde bulunabileceği gibi,  $\alpha|0\rangle \pm \beta|1\rangle$  olan bir üst durumda da bulunabilir. Kübitlerin matris temsilleri,

$$|\alpha\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\beta\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

şeklinde yazılır. Böylelikle Dirac notasyonu kullanılarak tek kübit için bu ifadelerin lineer kombinasyonu şeklinde aşağıdaki gibi yazılır.

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.10)$$

Denklem 2.10'daki  $\alpha$  ve  $\beta$  katsayıları her durum için bulunma olasılıklarını vermektedir. Yani normalizasyon şartına göre  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  olmalıdır. Böylece kübitler kullanıldığında daha fazla bilgi depolanabilir. N kübitlik saf bir durum için genel ifade aşağıdaki gibi olacaktır.

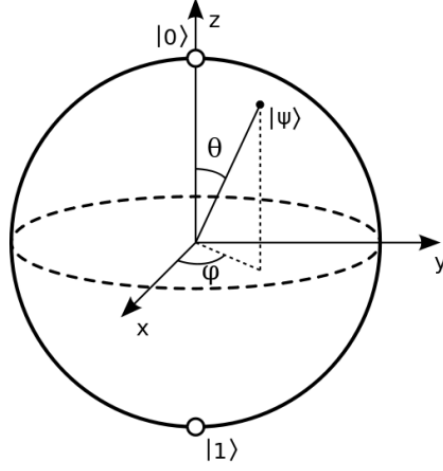
$$|\Psi_N\rangle = \sum_{x=00\dots0}^{11\dots1} C_x |x\rangle \quad (2.11)$$

Bu ifadeye  $C_x$  olasılık büyüklüğüdür. Bir kübit N çekirdeğe sahip bir sistem için N tane kübit içermektedir. Bu durum ise Hilbert uzayında  $|00\dots0\rangle$ 'dan  $|11\dots1\rangle$ 'e kadar  $2^N$  tane durumun süperpozisyonunda olabilir (Peng vd, 2009). O halde bir kübiti genel olarak aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$|\Psi(\theta, \varphi)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle \quad (2.12)$$

Bu denklemde yer alan kutupsal açı  $\theta$  ( $0 \leq \theta \leq \pi$ ), azimutal açı  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) aralığında değerler almaktadır.

Kübit kavramını matematiksel olarak betimlemenin bir diğer yolu da kübit durumlarını geometrik olarak, Şekil 2.1' de verilen bir birim küre yüzeyi üzerinde noktalar olarak temsil etmektir. Bloch küresi üzerinde yönelime sahip bir kübitin üç boyutta dönebilmesi için döndürme işlemcileri kullanılır.



Şekil 2.1. Bir kübit'in Bloch Küresi üzerindeki geometrik temsili

Bloch küresi olarak ifade edilen bu küre, kuantum hesaplama ve kuantum bilgi teorisi açısından tek bir kübitin görselleştirilmesi ve üzerinde kübit ile ilgili pek çok işlemin tanımlanabilmesine olanak sağlamaktadır.

Tek kübitlik bir durum  $|0\rangle$  ya da  $|1\rangle$  öz durumuyla ifade edilebileceği gibi bunların süperpozisyonlarıyla da ifade edilebilir. Böyle bir durumu Hilbert uzayında sütun ve satır vektörleriyle yazdığımızda,

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \langle\Psi| = (c_0^* \quad c_1^*) \quad (2.13)$$

şeklinde olur. Genel olarak kuantum bilgisayarları bu yolla açıklanabilirken NMR kuantum bilgisayarlarının ifade edilmesinde yoğunluk matrisi yaklaşımına gidilir. Böylece yoğunluk matrisini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} (c_0^* \quad c_1^*) = \begin{pmatrix} c_0^* c_0 & c_1^* c_0 \\ c_0^* c_1 & c_1^* c_1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Spin-1/2 için yoğunluk matrisinin elemanları Pauli baz durumları  $(1/2)E, I_x, I_y, I_z$  cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}E + I_z \quad (2.15)$$

$$|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}E - I_z \quad (2.16)$$

NMR deneylerinde E birim matrisi herhangi bir farklılık göstermez, bu yüzden dikkate alınmaz. Burada  $I_z$  ve  $-I_z$ ,  $|0\rangle$  ve  $|1\rangle$  öz durumlarına karşılık gelen saf durumlardır. Ancak bu yaklaşım büyük spinli sistemlerle çalışıldığında geçerli olmamaktadır.

$\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  süperpozisyon durumunu düşünerek bunu ifade eden yoğunluk matrisini yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| + \langle 1|) &= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \left[ (1 \ 0) + (0 \ 1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = 1/2E + I_x \end{aligned} \quad (2.17)$$

sonucunu elde ederiz. Daha önce belirtildiği gibi birim matris çarpanları ihmal edilir. Buradan  $(1/\sqrt{2})(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|)$  durumunun  $I_x$  'i ifade ettiği görülebilir. Sonuç olarak temel kübit öz durumları, tek spin manyetizasyonlarıyla ilişkilendirilirken, onların süperpozisyonları da tek spin durumları ile ilişkilendirilir.

Tek bir kübit durumunda olan bir sistem için, NMR ile kübit durumları arasında bağlantı kolaylıkla oluşturulabilirken iki ve daha fazla kübit durumunda daha karmaşık hale gelebilmektedir. Kuantum algoritmaları oluşturulurken öncelikle  $|0\rangle$  saf durumlu tek kübit ile başlamak kolaylık sağlar.

Kuantum bilgisayarları veriler üzerinde işlem yapabilmek için kuantum bilgi teorisindeki mantık kapılarından faydalanır. Bu mantık kapıları tek kübit ya da çok kübitli olabilir. Kuantum bilgi teorisinde çok sık kullanılan mantık kapılarından olan Pauli işlemcileri önemli bir yer tutmaktadır. Klasik bilgi teorisinde de karşılığı bulunan DEĞİL (NOT) kapısı, kuantum bilgi teorisinde de yer alan en basit mantık kapısı olup Pauli-X kapısı olarak da bilinmektedir. Pauli-X mantık kapısını spini 1/2 olan bir parçacık üzerine uyguladığımızda  $|0\rangle$  ve  $|1\rangle$  kübit durumlarını değiştirmektedir.

Tek kübitlik  $\Psi_0 = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle$  durumuna Pauli-X mantık kapısını uygularsak,

$$|\Psi_1\rangle = X|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) = a_1|0\rangle + a_0|1\rangle \quad (2.18)$$

yukarıdaki  $|\Psi_1\rangle$  durumunu elde ederiz. DEĞİL kapısının karekökü ise klasik olarak eşitliği olmayan kuantum mantık kapılarından biridir. DEĞİL kapısının karekökünü  $V$  ile gösterdiğimizde,

$$V^2 = VV = X \quad (2.19)$$

olur. NMR puls dizileri kullanılarak DEĞİL'in karekökü oluşturulabilir. Bu işlem  $90^\circ$ 'lik  $I_x$  pulsü kullanılarak gerçekleştirilir.

$$e^{-i\pi/2I_x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Bir öz duruma DEĞİL'in karekökü uygulandığında öz durumların süperpozisyonu elde edilebilir. Klasik bilgi teorisi için süperpozisyon durumu oluşturulamadığı için  $V$ 'nin kuantum mekanik olarak oluşturulan bir kapı olduğu ortaya çıkmaktadır. Kuantum bilgi teorisinde kullanılan ancak klasik bilgi teorisinde karşılığı olmayan bir diğer kapı da Pauli-Y mantık kapısıdır.  $|\Psi_0\rangle$  durumuna bu defa Pauli-Y mantık kapısını uygularsak,

$$|\Psi_2\rangle = Y|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} (a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) = -ia_1|0\rangle + ia_0|1\rangle \quad (2.21)$$

$|\Psi_2\rangle$  durumunu elde ederiz. Faz döndürme işlemcisi olarak da bilinen Pauli-Z mantık kapısını tek kubitlik  $|\Psi_0\rangle$  durumuna uyguladığımızı düşürsek,

$$|\Psi_3\rangle = Z|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) = a_0|0\rangle - a_1|1\rangle \quad (2.22)$$

ifadesindeki gibi gelişerek dalga fonksiyonunu faz değişimine uğratacaktır. Pauli işlemcileri, kuantum bilgi teorisinde tek başlarına uygulanabileceği gibi bu işlemciler yardımıyla farklı mantık kapıları da oluşturulmuştur. Bunlardan bazıları Hadamard mantık kapısı ve döndürme işlemcileri olarak verilebilir (Oliveira vd, 2007).

Kuantum bilgi teorisinde Hadamard dönüşümü  $H$  ile ifade edilen Hadamard mantık kapısı kullanılarak uygulanır. Çok fazla uygulaması bulunan Hadamard

mantık kapısı uygulanan kuantum bilgi sistemini süperpozisyon durumuna getirmektedir (McMahon, 2007). Kuantum mekaniğinde Hadamard mantık kapısını elde etmek için Pauli-X ve Pauli-Z mantık kapılarını kullanabiliriz. Bu ifade Denklem 2.23'deki gibi elde edilir.

$$H = \frac{X+Z}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Hadamard mantık kapısı tek kübitlik sistem için uygulandığında  $|0\rangle$  durumu için Denklem 2.24'deki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} H|0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \end{aligned} \quad (2.24)$$

ifadesini elde ederiz. Aynı şekilde  $|1\rangle$  durumu için Denklem 2.25'deki sonucu elde ederiz.

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) \quad (2.25)$$

Kuantum bilgi teorisinde dalga fonksiyonunda faz oluşturmak için kullanılan iki faz kapısı mevcuttur. Bunlardan birincisi S harfi ile gösterilen S-Faz kapısı ve ikincisi T harfi ile gösterilen  $T - \frac{\pi}{8}$  Faz kapısıdır. Bu faz kapıları,

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

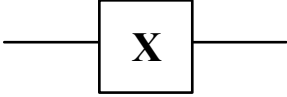
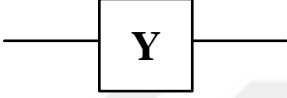
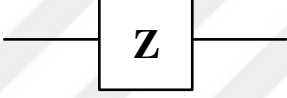
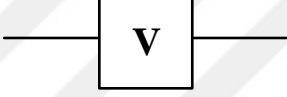
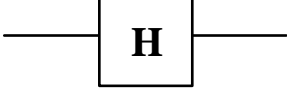
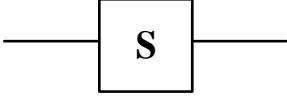
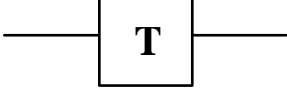
şeklindedir.  $|\Psi_0\rangle$  gibi tek kübitlik bir sisteme S ve T faz kapıları uygulandığında,

$$S|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} (a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) = a_0|0\rangle + ia_1|1\rangle \quad (2.28)$$

$$T|\Psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix} (a_0|0\rangle + a_1|1\rangle) = a_0|0\rangle + e^{i\pi/4} a_1|1\rangle \quad (2.29)$$

durumlarını elde ederiz. Bazı tek kübitlik mantık kapılarının sembol ve matrisleri Çizelge 2.1’de verilmiştir.

Çizelge 2.1. Tek kübitlik bazı mantık kapılarının sembol ve matrisleri

Mantık kapısı	Devre sembolü	Matris temsili
Pauli-X		$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Pauli-Y		$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
Pauli-Z		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Değil Karekök		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$
Hadamard		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
S-Faz		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
T-Faz		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$

İki kubit durumunda  $|00\rangle$  ve n kubitlik durum için ise  $\underbrace{|00\dots0\rangle}_n$  şeklinde devam eder.

Örneğin,  $\underbrace{|00\dots0\rangle}_n$  kubitlik durumun matris temsili,

$$\underbrace{|00\dots0\rangle}_n = \underbrace{|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle}_n = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_n = \begin{pmatrix} 1 & \overbrace{0 \dots 0}^{2^n-1} \end{pmatrix}^T \quad (2.30)$$

şeklindedir. n kubitlik duruma karşılık gelen yoğunluk matrisi ise  $\underbrace{|00\dots0\rangle}_n \otimes \underbrace{\langle 00\dots0|}_n$  olarak oluşturulabilir.

Bu zamana kadar anlatılanlarda tek kubitlik bir kuantum sistemine mantıksal operatörlerin uygulanması incelendi. Ancak işlem yapacağımız kuantum sistemi birden fazla kübite sahipse, o halde kullanacağımız mantık kapısı sistemin her kubitine ayrı ayrı uygulanabilmelidir. Örnek olarak Hadamard mantık kapısını çok kubitlik bir sistem içinde elde etmek mümkün olabilmektedir. n kubitlik bir kuantum sistemi için n kubitlik Hadamard mantık kapısı  $H^{\otimes n}$  ile gösterilebilir.  $\otimes$  işlemi tensörel çarpım olmak üzere n kubitlik Hadamard mantık kapısı,

$$H^{\otimes n} = \underbrace{H \otimes H \otimes H \otimes \dots \otimes H}_n \quad (2.31)$$

biçiminde yazılarak elde edilir. Bu sonuca göre n kubitlik bir kuantum sistemine  $\underbrace{(|00\dots0\rangle)}_n$ , n kubitlik Hadamard mantık kapısı uygulanınca oluşacak süperpozisyon durumu ise,

$$H^{\otimes n} |00\dots0\rangle_n = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x=0}^{2^n-1} |x\rangle \quad (2.32)$$

genel denklemlerle ifade edilir (Oliveira vd, 2007).

Tek kubitlik  $|0\rangle$  ve  $|1\rangle$  durumlarının direkt çarpımlarından  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|10\rangle$  ve  $|11\rangle$  gibi dört tane iki kubitlik durum elde edilir. Kuantum bilgi işlemede çok fazla kullanılan ve iki kubitlik bir mantık kapısı olan kontrollü değil (CNOT) mantık kapısıdır.



CNOT mantık kapısında kubitlerden biri kontrol kübiti, diğeri ise hedef kübiti olarak seçilir. Bu mantık kapısı uygulandığında kontrol kubitinin durumuna bakarak hedef kubitinin durumunu değiştirmektedir. Örneğin iki kubitlik bir  $|ab\rangle$ , kuantum sistemi düşünüldüğünde a kübiti kontrol durumunda iken b kübiti hedef seçilirse CNOT mantık kapısı uygulandığında aşağıdaki şekilde gelişecektir.

$$\text{CNOT}_a |a, b\rangle = |a, a \oplus b\rangle \quad (2.33)$$

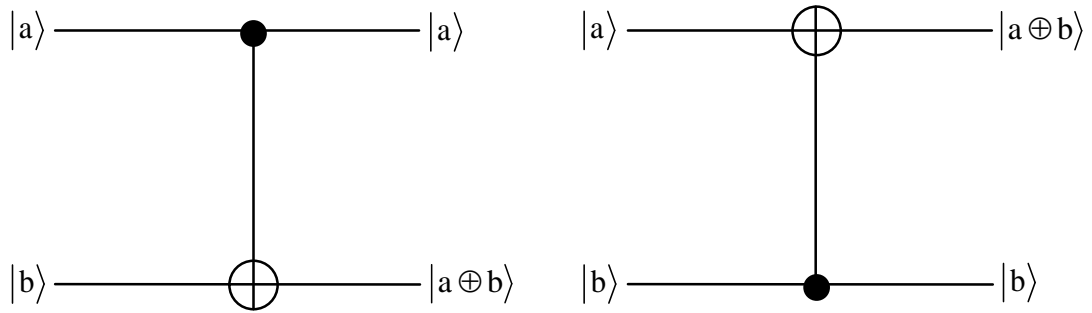
Aynı şekilde iki kubitlik bir kuantum sistemi için b kübiti kontrol durumunda iken a kübiti hedef seçilirse CNOT mantık kapısı uygulandığında aşağıdaki şekilde gelişecektir.

$$\text{CNOT}_b |a, b\rangle = |a \oplus b, b\rangle \quad (2.34)$$

Bu denklemlerdeki  $\oplus$  işlemi mod2'ye göre toplama işlemidir. Bu ifadelerin matrisleri aşağıdaki gibi olur.

$$\text{CNOT}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } \text{CNOT}_b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

CNOT mantık kapılarının gösterimi Şekil 2.2'de verilmiştir.



Şekil 2.2.  $\text{CNOT}_a$  ve  $\text{CNOT}_b$  Mantık Kapıları

$CNOT_a$  mantık kapısı  $|11\rangle$  durumuna uygulandığında,

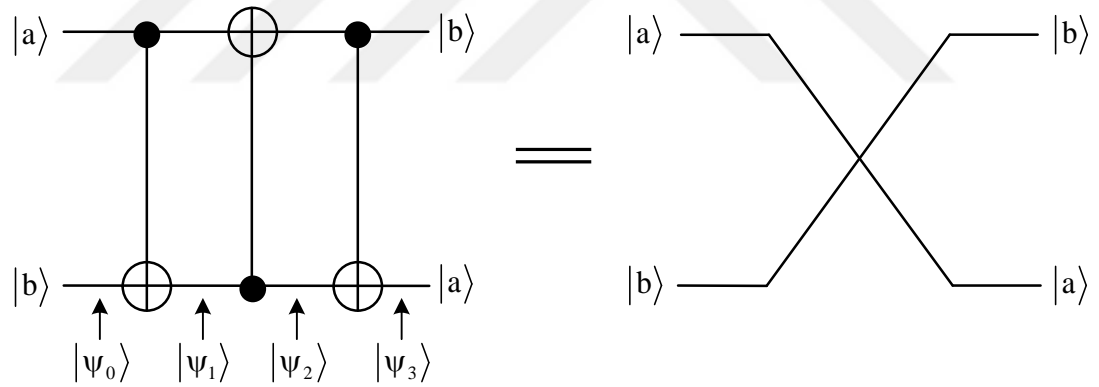
$$CNOT_a |11\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |10\rangle \quad (2.36)$$

şeklinde gelişir. İki kubitlik CNOT kapıları üzerinde teorik ve deneysel çalışmalar bulunmaktadır (Yang vd, 2005; Zheng ve Guo, 2000). Aynı zamanda Hadamard mantık kapıları kullanılarak bir CNOT kapısından diğer CNOT kapısı elde edilebilir.

$$CNOT_a = (H \otimes H) CNOT_b (H \otimes H) \quad (2.37)$$

$$CNOT_b = (H \otimes H) CNOT_a (H \otimes H) \quad (2.38)$$

En çok kullanılan bir diğer iki kubitlik mantık kapısı da SWAP mantık kapısıdır. Uygulandığı kuantum bilgi sistemindeki kubitlerin yerini değiştirmek için kullanılır. Şekil-2.3’de sadece CNOT kapılarından oluşan SWAP mantık kapısı görülmektedir.



Şekil 2.3. SWAP Mantık Devresi

CNOT mantık kapılarını kullanarak SWAP mantık devresini Denklem 2.37’deki gibi elde edebiliriz.

$$SWAP = CNOT_a CNOT_b CNOT_a \quad (2.39)$$

SWAP mantık devresi,

$$SWAP |ab\rangle = |ba\rangle \quad (2.40)$$

olarak tanımlanmaktadır.  $a \oplus a \oplus b = b$  ve  $a \oplus b \oplus b = a$  olmak üzere, SWAP mantık devresinin uygulamasını adım adım gösterelim.

$$|\psi_0\rangle = |a\rangle \otimes |b\rangle \quad (2.41)$$

$$|\psi_1\rangle = \text{CNOT}_a |a, b\rangle = |a, a \oplus b\rangle \quad (2.42)$$

$$|\psi_2\rangle = \text{CNOT}_b |a, a \oplus b\rangle = |a \oplus a \oplus b, a \oplus b\rangle = |b, a \oplus b\rangle \quad (2.43)$$

$$|\psi_3\rangle = \text{CNOT}_a |b, a \oplus b\rangle = |b, a \oplus b \oplus b\rangle = |b, a\rangle \quad (2.44)$$

SWAP mantık devresinin matris temsili ile elde edilmesine bakacak olursak,

$$\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

şeklinde verilir. Örnek olarak SWAP mantık devresinin matris temsilinden faydalanarak  $|01\rangle$  durumuna uygularsak,

$$\text{SWAP}|01\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |10\rangle \quad (2.46)$$

sonucuna ulaşırız.

### 2.2.2. Küditler

Kuantum bilgi işlemede  $d$  seviyeli durumlar  $d \geq 3$  için küdit olarak isimlendirilir. Küdit durumlar için özel olarak üç seviyeli durumları ifade eden küditler ve dört seviyeli durumları ifade eden kükuartlar için Hadamard ve CNOT ifadeleri elde edilecektir.

Küdit, üç olasılıklı durumu ( $d=3$ ) ifade eden kuantum trit durumunun kuantum mekaniksel ifadesidir. Hilbert uzayında bir küditi ifade ederken  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  ve  $|2\rangle$  şeklinde üç ortanormal baza sahip olan kuantum durumları biçiminde ele alırız. Spin-1 olan bir çekirdeğin zeeman seviyeleri küditlere örnek olarak verilebilir.

Çizelge 2.1’de bu enerji seviyeleri ve bu seviyelere karşılık gelen matris ifadeleri verilmiştir.

Çizelge 2.2. Spin-1 için tek kütritlik durumlar

$m_l$	kütrit
1	$ 0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
0	$ 1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
-1	$ 2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dirac notasyonu kullanılarak tek kütrit için bunların lineer kombinasyonu biçiminde aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle \quad (2.47)$$

Bu denklemdeki  $\alpha$ ,  $\beta$  ve  $\gamma$  katsayıları her durum için bulunma olasılıklarını vermektedir. Yani normalizasyon şartına göre  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$  olmalıdır. Çok değerli kuantum durumları için genelleştirilmiş Hadamard mantık kapısı,

$$H_{(d)} = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{\ell, j=0}^{d-1} e^{i2\pi j\ell/d} |j\rangle\langle\ell| \quad (2.48)$$

şeklinde ifade edilir (Karimipour vd, 2002). Bu denklemdeki  $d$  ifadesi oluşturulacak Hadamard mantık kapısındaki seviye sayısını ifade etmektedir.

Örneğin, üç olasılıklı durumu ifade eden kütritler için tek kütrit içeren Hadamard mantık kapısının matris temsilini yazabiliriz. Buna göre  $d = 3$  alırsak,

$$H_{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & c^2 & c \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

Burada  $c = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ,  $c^2 = e^{-i\frac{4\pi}{3}} = c^*$  'dir (Çorbacı vd, 2016).

Örneğin kütritler için Hadamard mantık kapımızı  $|2\rangle$  durumuna uygularsak,

$$\begin{aligned} H_{(3)}|2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & c & c^2 \\ 1 & c^2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ c^2 \\ c \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} [|0\rangle + c^2|1\rangle + c|2\rangle] \end{aligned} \quad (2.50)$$

şeklinde elde ederiz. Benzer işlemleri  $|0\rangle$  ve  $|1\rangle$  durumlarına da uyguladığımızda Çizelge 2.3'deki gibi elde edilir.

Çizelge 2.3. Tek kütritlik durumların süperpozisyonları

Kütrit, $ a\rangle$	$H_{(3)} a\rangle$
$ 0\rangle$	$( 0\rangle +  1\rangle +  2\rangle) / \sqrt{3}$
$ 1\rangle$	$( 0\rangle + c 1\rangle + c^2 2\rangle) / \sqrt{3}$
$ 2\rangle$	$( 0\rangle + c^2 1\rangle + c 2\rangle) / \sqrt{3}$

İki spinli  $SI(S=1, I=1)$  spin sistemi için, tek kütritlik durumların tensör çarpımıyla  $|00\rangle, |01\rangle, |02\rangle, |10\rangle, |11\rangle, |12\rangle, |20\rangle, |21\rangle$  ve  $|22\rangle$  gibi dokuz tane iki kütritlik durum elde edilir.

İki kütritlik CNOT mantık kapıları,

$$\text{CNOT}_a(3)|a,b\rangle = |a,b \oplus a\rangle \quad (2.51)$$

$$\text{CNOT}_b(3)|a,b\rangle = |a \oplus b,b\rangle \quad (2.52)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemlerdeki  $\oplus$  işareti mod3'e göre toplama işlemidir. Buradaki parantez içerisindeki üç sayısı üçlü (ternary) anlamına gelmektedir. İki kütritlik bir  $|ab\rangle$ , kuantum sistemi düşünüldüğünde a kütriti kontrol durumunda iken b kütriti hedef seçilerek  $\text{CNOT}_a(3)$  mantık kapısının gelişimi, benzer şekilde b kütriti kontrol durumunda iken a kütriti hedef seçilerek  $\text{CNOT}_b(3)$  mantık kapısının gelişimi bulunmuştur. Bu CNOT mantık kapılarının 9x9'lu matris ifadeleri,

$$\text{CNOT}_a(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

$$\text{CNOT}_b(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

olur.

Bu iki kütürlük CNOT mantık kapılarını Dirac notasyonunu kullanarak yazmak istersek aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \text{CNOT}_a(3) = & |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |02\rangle\langle 02| + |10\rangle\langle 12| + |11\rangle\langle 10| \\ & + |12\rangle\langle 11| + |20\rangle\langle 21| + |21\rangle\langle 22| + |22\rangle\langle 20| \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \text{CNOT}_b(3) = & |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 21| + |02\rangle\langle 12| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 01| \\ & + |12\rangle\langle 22| + |20\rangle\langle 20| + |11\rangle\langle 01| + |22\rangle\langle 02| \end{aligned} \quad (2.56)$$

Örneğin  $\text{CNOT}_b(3)$  mantık kapısını  $|22\rangle$  durumuna matris yöntemiyle uygularsak,

$$\text{CNOT}_b(3)|22\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |12\rangle \quad (2.57)$$

sonucuna ulaşırız.

Dört değerli (quaternary) bilgi işlemede ise dört olasılıklı durumlar ( $d=4$ ) için kükuart kavramı kullanılmaktadır. Kükuart olarak bu ifadeler  $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$  ve  $|3\rangle$  biçiminde kuantum durumları olarak düşünülebilir. Spin-3/2 olan bir çekirdeğin zeeman seviyeleri dört durum içeren kükuartlara örnek olarak verilebilir. Çizelge 2.4'de bu enerji seviyeleri ve bu seviyelere karşılık gelen matris ifadeleri verilmiştir. Dirac notasyonu kullanılarak tek kükuartlık durum aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle + \delta|3\rangle \quad (2.58)$$

Bu denklemdaki  $\alpha, \beta, \gamma$  ve  $\delta$  katsayıları her durum için bulunma olasılıklarını vermektedir. Yani normalizasyon şartına göre  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$  olmalıdır.

Çizelge 2.4. Spin-3/2 için tek kükuartlık durumlar

$m_l$	kükuart
$\frac{3}{2}$	$ 0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\frac{1}{2}$	$ 1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$-\frac{1}{2}$	$ 2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
$-\frac{3}{2}$	$ 3\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Çok değerli kuantum durumları için genelleştirilmiş Hadamard mantık kapısı denklemini dörtlü kuantum durumu içinde yazılabilir. Denklem 2.48 kullanılarak d=4 kuantum durumu için matris temsili aşağıdaki gibi olur.

$$\mathbf{H}_{(4)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

Örneğin kükuartlar için Hadamard mantık kapımızı  $|3\rangle$  durumuna uygularsak,

$$\mathbf{H}_{(4)}|3\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$



$$= \frac{1}{2} [|0\rangle - i|1\rangle - |2\rangle + i|3\rangle] \quad (2.60)$$

şeklinde elde ederiz. Benzer işlemleri  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  ve  $|2\rangle$  durumlarına da uyguladığımızda aşağıdaki Çizelge 2.5 elde edilir.

Çizelge 2.5. Tek kükuartlık durumların süperpozisyonları

Kükuart, $ a\rangle$	$H_{(4)} a\rangle$
$ 0\rangle$	$( 0\rangle +  1\rangle +  2\rangle +  3\rangle)/2$
$ 1\rangle$	$( 0\rangle + i 1\rangle -  2\rangle - i 3\rangle)/2$
$ 2\rangle$	$( 0\rangle -  1\rangle +  2\rangle -  3\rangle)/2$
$ 3\rangle$	$( 0\rangle - i 1\rangle -  2\rangle + i 3\rangle)/2$

İki spinli  $SI(S=3/2, I=3/2)$  spin sistemi için, tek kükuartlık durumların tensör çarpımıyla

$|00\rangle, |01\rangle, |02\rangle, |03\rangle, |10\rangle, |11\rangle, |12\rangle, |13\rangle, |20\rangle, |21\rangle, |22\rangle, |23\rangle, |30\rangle, |31\rangle, |32\rangle$  ve  $|33\rangle$  gibi onaltı tane iki kükuartlık durum elde edilir. İki kükuartlık CNOT mantık kapıları,

$$\text{CNOT}_a(4)|a, b\rangle = |a, b \oplus a\rangle \quad (2.61)$$

$$\text{CNOT}_b(4)|a, b\rangle = |a \oplus b, b\rangle \quad (2.62)$$

şeklinde yazılır. Bu denklemlerdeki  $\oplus$  işareti mod4'e göre toplama işlemidir. Buradaki parantez içerisindeki dört sayısı dörtlü (quaternary) anlamına gelmektedir. İki kükuartlık bir  $|ab\rangle$ , kuantum sistemi düşünüldüğünde a kükuartı kontrol durumunda iken b kükuartı hedef seçilerek  $\text{CNOT}_a(4)$  mantık kapısının gelişimi, benzer şekilde b kükuartı kontrol durumunda iken a kükuartı hedef seçilerek  $\text{CNOT}_b(4)$  mantık kapısının gelişimi bulunmuştur.



olarak yazılır. Bu iki kükuartlık CNOT mantık kapılarını Dirac notasyonunu kullanarak yazmak istersek aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \text{CNOT}_a(4) = & |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |02\rangle\langle 02| + |03\rangle\langle 03| + |10\rangle\langle 13| + |11\rangle\langle 10| \\ & + |12\rangle\langle 11| + |13\rangle\langle 12| + |20\rangle\langle 22| + |21\rangle\langle 23| + |22\rangle\langle 20| + |23\rangle\langle 21| \\ & + |30\rangle\langle 31| + |31\rangle\langle 32| + |32\rangle\langle 33| + |33\rangle\langle 30| \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \text{CNOT}_b(4) = & |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 31| + |02\rangle\langle 22| + |03\rangle\langle 13| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 01| \\ & + |12\rangle\langle 32| + |13\rangle\langle 23| + |20\rangle\langle 20| + |21\rangle\langle 11| + |22\rangle\langle 02| + |23\rangle\langle 33| \\ & + |30\rangle\langle 30| + |31\rangle\langle 21| + |32\rangle\langle 12| + |33\rangle\langle 03| \end{aligned} \quad (2.66)$$

Örneğin  $\text{CNOT}_a(4)$  mantık kapısını  $|33\rangle$  durumuna Dirac yöntemiyle uygularsak:

$$\begin{aligned} \text{CNOT}_a(4)|33\rangle &= \left[ \begin{array}{l} |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 01| + |02\rangle\langle 02| + |03\rangle\langle 03| + |10\rangle\langle 13| + |11\rangle\langle 10| \\ + |12\rangle\langle 11| + |13\rangle\langle 12| + |20\rangle\langle 22| + |21\rangle\langle 23| + |22\rangle\langle 20| + |23\rangle\langle 21| \\ + |30\rangle\langle 31| + |31\rangle\langle 32| + |32\rangle\langle 33| + |33\rangle\langle 30| \end{array} \right] |33\rangle \\ &= |00\rangle(\langle 00||33\rangle) + |01\rangle(\langle 01||33\rangle) + |02\rangle(\langle 02||33\rangle) + |03\rangle(\langle 03||33\rangle) + |10\rangle(\langle 13||33\rangle) \\ &+ |11\rangle(\langle 10||33\rangle) + |12\rangle(\langle 11||33\rangle) + |13\rangle(\langle 12||33\rangle) + |20\rangle(\langle 22||33\rangle) + |21\rangle(\langle 23||33\rangle) \\ &+ |22\rangle(\langle 20||33\rangle) + |23\rangle(\langle 21||33\rangle) + |30\rangle(\langle 31||33\rangle) + |31\rangle(\langle 32||33\rangle) + |32\rangle(\langle 33||33\rangle) \\ &+ |33\rangle(\langle 30||33\rangle) \\ &= |32\rangle \end{aligned} \quad (2.67)$$

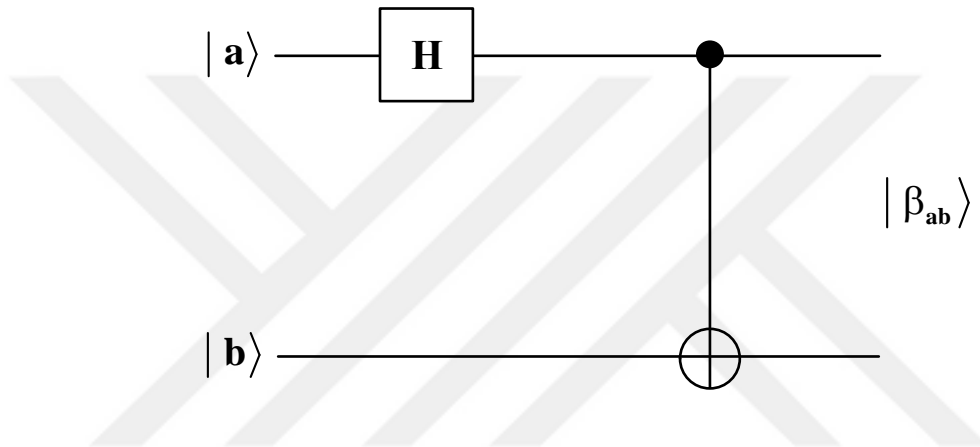
olur.

Burada  $\langle ab||ab\rangle = \langle aa||aa\rangle = \langle ba||ba\rangle = \langle bb||bb\rangle = 1$ ,  $\langle ab||ba\rangle = \langle ba||ab\rangle = 0$  'dır.

### 2.3. Kuantum Dolanıklık (Entanglement)

Kuantum fiziğinin gelişmesindeki en büyük katkılardan birini belki de ünlü EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) düşünce deneyiyle Einstein ve arkadaşları yapmıştır (Einstein vd, 1935). Bu deney etkileşim halindeki iki parçacığın hareketlerinin birbirine bağlı olduğu fikrine dayanmaktadır. Yani parçacıklardan biri üzerinde yapılan bir gözlem sayesinde ikinci parçacık hakkında fikir edinilebilir. Bu özelliğe sahip olan parçacıklar için kuantum dolanıklık ifadesi kullanılmaktadır. Klasik fizikte bir karşılığı bulunmayan dolanıklık, nesnelere birbirinden ayrı olsalar da yine birbirleriyle iletişim halinde oldukları durumları ifade etmektedir.

Biraz daha somutlaştırmamız gerekirse, X ve Y adında tek kübitlik bilgiyi içeren iki elektron (yukarı spin “1”, aşağı spin “0”) olarak düşünelim. Bu sistem için oluşacak dört tane klasik durum 00, 01, 10 ve 11 ’dir. Kuantum fiziğine göre ise bu dört durum geçerli olmakla birlikte bunların süperpozisyon durumunda oluşabilecek bir durumda da olabilecektir. Kuantum bilgi teorisinin belki de en önemli mantık devrelerinden birisi de dolanıklık için en fazla bilinen örnek olan Bell durumlarını oluşturmamızı sağlayan kuantum dolanıklık oluşturma devresidir. Bell durumlarını oluşturmada kullanılan kuantum mantık devresi Şekil 2.4’de verilmiştir.



Şekil 2.4. Kuantum Dolanıklık Oluşturma Devresi

Herhangi iki kübitlik kuantum bilgi sisteminde Bell durumlarını elde etmek için,  $|a\rangle \otimes |b\rangle = |ab\rangle$  durumuna Şekil 2.4’deki gibi,  $|a\rangle$  kübitine yani birinci kübite Hadamard mantık kapısı, ardından  $|a\rangle$  kontrol kübiti,  $|b\rangle$  hedef kübit olacak şekilde  $\text{CNOT}_a$  mantık kapısı aşağıdaki gibi uygulanır.

$$|\beta_{ab}\rangle = \text{CNOT}_a [(H \otimes I_2)|ab\rangle] \quad (2.68)$$

Bu ifadede  $I_2$ ,  $2 \times 2$  boyutunda birim matristir. İşlem sonucu genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$|\beta_{ab}\rangle = \frac{|0b\rangle + (-1)^a |1\bar{b}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (2.69)$$

Burada  $|\bar{b}\rangle$  ifadesi  $|b\rangle$  kübitinin değildir. Denklem 2.69 kullanılarak tüm Bell durumlarını elde etmek mümkündür. Elde edilen bu Bell durumları Çizelge 2.6'da verilmiştir.

Çizelge 2.6. Bell durumları

$ \beta_{00}\rangle = \frac{ 00\rangle +  11\rangle}{\sqrt{2}}$	$ \beta_{01}\rangle = \frac{ 01\rangle +  10\rangle}{\sqrt{2}}$	$ \beta_{10}\rangle = \frac{ 00\rangle -  11\rangle}{\sqrt{2}}$	$ \beta_{11}\rangle = \frac{ 01\rangle -  10\rangle}{\sqrt{2}}$
---	---	---	---

Ayrıca literatürde küdit durumlar için dolanıklık oluşturma ile ilgili bazı çalışmalar yer almaktadır. Kütritleri ifade eden  $d=3$  için dolanık durumlar değişik yöntemlerle incelenmiş ve çalışılmıştır (Terzi, 2019).

#### 2.4. Kuantum Aşırı Yoğun Kodlama (Superdense Coding)

Kuantum dolanık bir durum tekrar eski haline getirilebilir mi? Peki bu ne işimize yarayabilir. Kuantum iletişim açısından bakıldığında çok önemli bir yer tutmaktadır. Dolanık durumların kuantum bilgisayarlarda nasıl kullanılabileceğiyle ilgili önemli bir çalışma Charles Bennet ve Stephen Weisner tarafından gerçekleştirilmiştir (Bennett ve Wiesner 1992). Aşırı Yoğun Kodlama (superdense coding) adı verilen bu çalışmada tek bir kübit kullanılarak iki tane klasik bit'in gönderici ve alıcı arasında nasıl iletilebileceği açıklanmıştır. Bu işlemi iki parçacığın Bell durumlardan hangisine yerleştirilmesi gerektiğini belirterek sağlamışlardır.

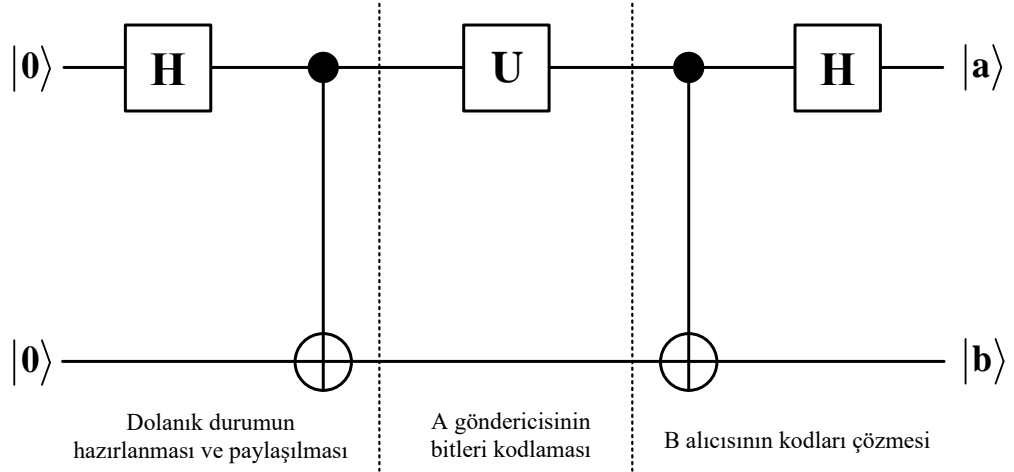
Spini  $1/2$  olacak şekilde seçilen bir parçacığın yukarı ve aşağı spin yönelimleri "0" ve "1" durumları olarak ele alındığında, iki bitlik bir mesaj için parçacığın spin yönelimleri istediğimiz duruma getirilerek gerçekleştirilebilir. Öncelikli olarak aşırı yoğun kodlamada gönderici ve alıcının ebit olarak adlandırılan bir dolanık parçacık çiftini paylaşmaları gerekir. A kişinin (gönderici) B kişisine (alıcı) tek kübit kullanarak iki bit içeren bilgiyi göndermek istediğini düşünelim. A ve B kişisi veri gönderilmeden önce dolanık parçacık çifti (ebit) olarak Bell durumlarından  $|\beta_{00}\rangle$  durumunu paylaşmaktadır.

A göndericisi iletilecek olan iki bitlik veriyi ondalık sayı sistemine çeviriyor. Bu durumda iki bitlik verinin alabileceği değerler  $|00\rangle=0$ ,  $|01\rangle=1$ ,  $|10\rangle=2$  veya  $|11\rangle=3$  olacaktır. Çizelge 2.7’de içerisinde Pauli matrislerinin yer aldığı bazı dönüşüm operatörleri verilmiştir. A göndericisi bu değerlere göre önceden paylaşılan  $|\beta_{00}\rangle$  durumuna uygun olan dönüşüm operatörünü seçer.

Çizelge 2.7. A göndericisinin paylaşılan bir ebite uygulaması gereken ilk işlem

Ondalık sayı	Dönüşüm operatörü (U)	Oluşan durum
0	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$ \beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle +  11\rangle)$
1	$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$ \beta_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 10\rangle +  01\rangle)$
2	$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$ \beta_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle -  11\rangle)$
3	$iY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$ \beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle -  10\rangle)$

A göndericisi bu durumda yukarıdaki dönüşüm operatörlerinden uygun olan I dönüşüm operatörünü seçerek oluşturulan kübiti B alıcısına gönderir. Buradan sonra B alıcı kişisi gönderilen kübiti ve elindeki dolanık çifte ait olan kübite aşırı yoğun kodlama işlemi uygular. Aşırı yoğun kodlama durumu için gereken kuantum mantık devresi Şekil 2.5’de verildiği gibi oluşturulmaktadır.



Şekil 2.5. Aşırı Yoğun Kodlama Oluşturma Devresi (Marinescu, 2005)

Aşırı yoğun kodlama devresinden de görüleceği gibi A göndericisi ve B alıcısı arasında dolanık bir durum paylaşılmaktadır. A göndericisi gereken dönüşüm operatörünü belirleyerek kodlamayı yaptıktan sonra B alıcısı ilk olarak CNOT mantık kapısını uygulamaktadır. B alıcısının başlangıç durumuna göre CNOT işlemini uyguladıktan sonra alması gereken sonuçlar Çizelge 2.8’de verildiği gibi olacaktır.

Çizelge 2.8. B alıcısının paylaşılan bir ebit durumuna uygulaması gereken ilk işlem

İşlem	Gönderilen durum	CNOT işlemi	1. kübit	2. kübit
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle +  11\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle +  10\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle +  1\rangle)$	$ 0\rangle$
2	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 10\rangle +  01\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 11\rangle +  01\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 1\rangle +  0\rangle)$	$ 1\rangle$
3	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle -  11\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle -  10\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle -  1\rangle)$	$ 0\rangle$
4	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle -  10\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle -  11\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle -  1\rangle)$	$ 1\rangle$

A göndericisinin iletmek istediği kubit durumuna bağlı olarak B alıcısı elinde bulunan dolanık kubit çiftini çizelgeden belirleyecektir. A göndericisi 1. İşlemdeki durumu göndermek istemiştir. Bu durumda B alıcısı bu durum üzerine gereken işlemi yaptıktan sonra birinci kubit süperpozisyon durumunda olacaktır. İkinci kubit ise  $|0\rangle$  ya da  $|1\rangle$  değerlerini alacaktır. Burada B alıcısı ikinci kubit üzerine bir ölçüm yapabilir. Bu durum herhangi bir çökmeye neden olmayacağı gibi süperpozisyon durumunda bozmayacaktır.

Son durumda B alıcısının ölçüm sonucuna göre  $|1\rangle$  durumunda, klasik olarak iletilen veri 1 ya da 3 olacaktır. Eğer ölçüm sonucu  $|0\rangle$  durumunda ise klasik veri 0 ya da 2 olmalıdır. Bu ayrımı yapabilmek için aşırı yoğun kodlama mantık devresinde bulunan Hadamard mantık kapısı birinci kubit üzerine uygulanır. B alıcısında bulunan birinci kubit durumuna göre Hadamard mantık kapısının uygulanmasının sonuçları Çizelge 2.9'da verilmiştir.

Çizelge 2.9. B alıcısında bulunan birinci kübite Hadamard işleminin uygulanması

İşlem	B'de bulunan son durum	Birinci kubit	H uygulanması
1	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle +  10\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle +  1\rangle)$	$ 0\rangle$
2	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 11\rangle +  01\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 1\rangle +  0\rangle)$	$ 0\rangle$
3	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 00\rangle -  10\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle -  1\rangle)$	$ 1\rangle$
4	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 01\rangle -  11\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}( 0\rangle -  1\rangle)$	$ 1\rangle$

B alıcısı son işlemten sonra birinci kübite ölçtüğünde A göndericisinin klasik veri değerini bulabilir.  $|\beta_{00}\rangle$  durumu için B alıcısı CNOT işleminden sonraki ikinci kubit için ilk ölçüm sonucunda  $|0\rangle$  durumlarına ait olan 0 ve 2 klasik verilerini bulacaktır.



Ardından Hadamard işleminden sonraki birinci kubitte ise ikinci ölçüm sonucunda  $|0\rangle$  durumlarına ait olan 0 ve 1 klasik verilerine ulaşacaktır. Her iki ölçüm sonucunda ortak olan 0 klasik verisi A göndericisinin iletmek istediği değer olarak bulunacaktır. Sonuç olarak aşırı yoğun kodlama mantık devresi kullanılarak ve iki defa ölçüm yapılarak klasik veri belirlenebilmiştir.

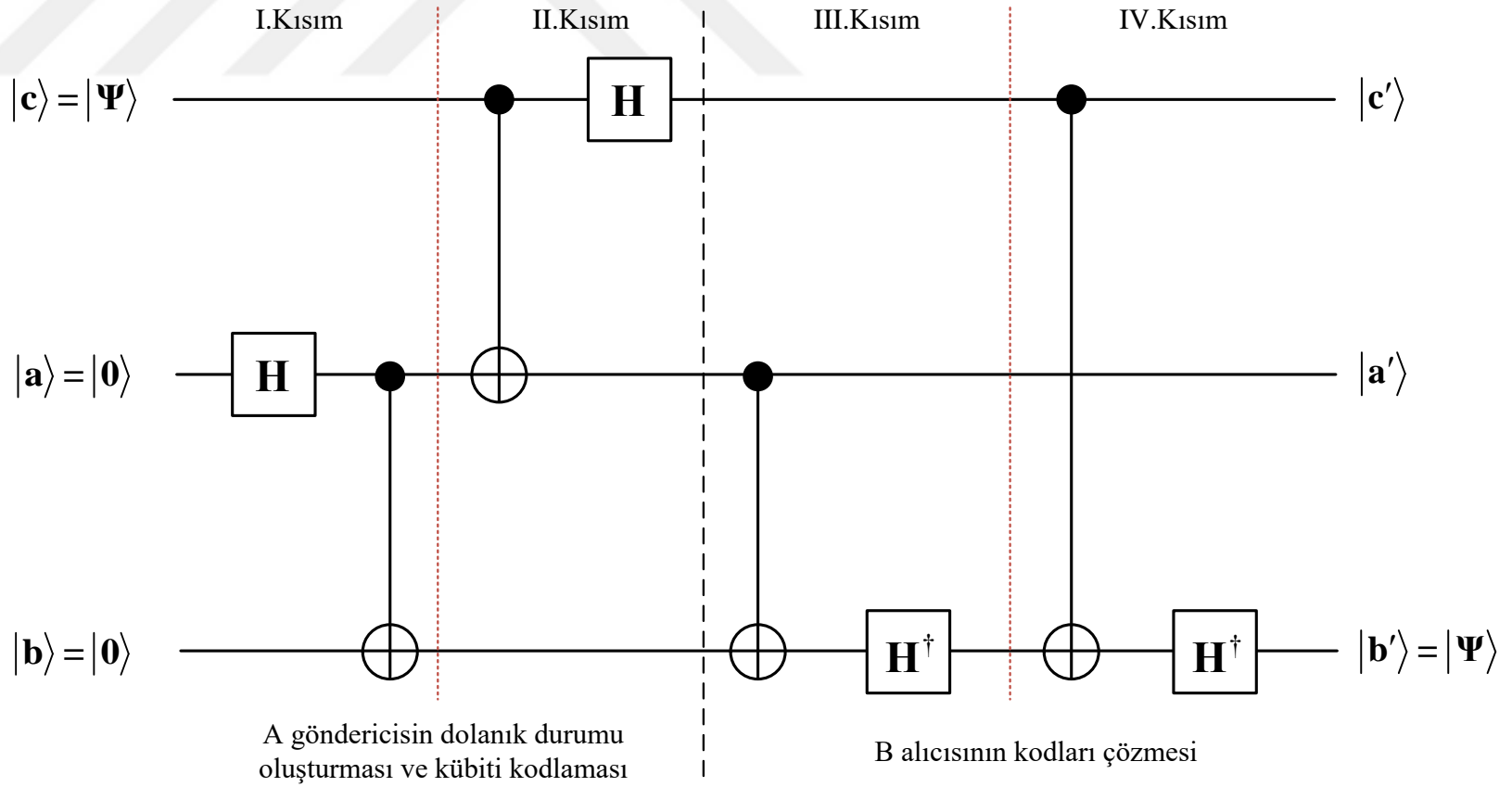
## 2.5. Kuantum Işınlama (Teleportation)

Bilimkurgu filmlerinin en dikkat çeken konularının başında ışınlamanın geldiği herkesçe bilinen bir gerçektir. Ancak kuantum ışınlama filmlerde olan durumdan biraz farklıdır. Kuantum ışınlamada herhangi bir madde aktarımından ziyade kuantum bilginin ışınlanmasından söz edilir. Kuantum sistemi bilinen bir durum kuantum olarak ışınlanabilir. Işınlama esnasında dolanık parçacıklar kullanılır. Aşırı yoğun kodlama durumundaki gibi burada kubitin kendisi ışınlanmaz. Işınlanan ise kubitin kuantum durumudur. Kuantum ışınlama, başlangıçta dolanık bir durum gönderici ve alıcı arasında biliniyorsa, iki bitlik klasik mesaj ile değeri bilinmeyen bir kubit durumunun başka bir yere aktarılması işlemidir. Aktarım sonrasında gönderen kişinin elindeki kubit değeri ilk durumunu kaybedeceği için kubitin kopyalanma durumunda olmayacaktır.

Kuantum ışınlamada kullanılacak olan devre Şekil 2.6'da verilmiştir. Bu devrenin noktalı çizgilerle ayrılmış sol tarafında A göndericisi tarafından uygulanacak işlemler sağ tarafında ise B alıcısı tarafından gerçekleştirilecek işlemler yer almaktadır. Işınlama işlemi başlamadan önce devrenin sol tarafındaki A göndericisi c girişinden ışınlanacak olan  $|\Psi\rangle$  durumunu, a ve b girişlerinde ise  $|0\rangle$  durumlarını hazırlar. Bu işlem sonucunda  $|b'\rangle$  çıkışında  $|\Psi\rangle$  durumu oluşacaktır. Kuantum ışınlama devresinin A göndericisi ve B alıcısı arasında nasıl çalıştığı dört adımda gösterilebilir. Öncelikle başlangıçta ışınlanacak kubit değerimiz,

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.70)$$

olsun.



Şekil 2.6. Kuantum Işınlama Mantık Devresi (Marinescu, 2005)

Birinci adımda A göndericisi Şekil 2.6'daki I. Kısımda  $|0\rangle$  kubitlerini kullanarak dolanık bir çift oluşturur ve bunlardan birini b kuantum kanalı üzerinden B alıcısına iletir. Oluşturulan bu dolanık çifti ise  $|\Phi\rangle$  ile gösterelim.

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (2.71)$$

I. kısımda detaylıca incelersek a girişindeki  $|0\rangle$  kübiti öncelikle Hadamard mantık kapısından geçirilir.

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (2.72)$$

Süperpozisyon durumundaki bu kübit ile b girişindeki  $|0\rangle$  kübitine CNOT işlemi uygulanır.

$$\text{CNOT}_a(H|0\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (2.73)$$

Bu son işlemden sonra  $|\Phi\rangle$  dolanık çiftini elde etmiş oluruz. Bu dolanık çift "ebit" olarak da isimlendirilir.

İkinci adımda A göndericisi oluşturulan  $|\Phi\rangle$  ebiti ile ışınlanacak olan  $|\Psi\rangle$  kübitini dolanık hale getirmelidir. Bunun için II. kısımda öncelikle  $|\Phi\rangle$  ebitine ve  $|\Psi\rangle$  kübitine CNOT işlemi uygulayacaktır.

$$|\Psi\rangle \otimes |\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|100\rangle + \beta|111\rangle) \quad (2.74)$$

$$\text{CNOT}_a(|\Psi\Phi\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle + \alpha|011\rangle + \beta|110\rangle + \beta|101\rangle) \quad (2.75)$$

Daha sonra bu sonuca ise Hadamard mantık kapısı uygulanır.

$$|A\rangle = H[\text{CNOT}_a(|\Psi\Phi\rangle)] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha(|000\rangle + |011\rangle + |100\rangle + |111\rangle) \\ +\beta(|010\rangle + |001\rangle - |110\rangle - |101\rangle) \end{bmatrix} \quad (2.76)$$

Oluşan bu sonuç üç kübitten oluşan bir sistemdir. Bunu  $|A\rangle$  ile gösterelim.

Üçüncü adımda ise A göndericisi son durumda oluşan en üst ve ortadaki kübiti ölçer. Ölçüm sonucunda A göndericisi 2 bitlik klasik bir değere ulaşacaktır. Klasik bir iletişim kanalıyla bu bilgiyi B alıcısına iletir. Daha öncesinde b kuantum kanalı üzerinden dolanık çiftlerden biri B alıcısına iletilmişti. A göndericisinin ölçümü bu durumda B alıcısının elindeki dolanık kübitin değerini de değiştirecektir. Aslında böylece EPR deneyi gerçekleştirilmiş olur ve B alıcının kübiti, A göndericisinin ölçümüne göre bir değere çökecektir. Ölçüm sonucunun bir diğer etkisinde ışınlanacak olan  $|\Psi\rangle$  değerinde çökerek A göndericisinin elinde kübitin orijinal halinin değerini kaybetmesidir. Bu sayede kübitlerin kopyalanamaması kuramı da çiğnenmemiş olacaktır.

Dördüncü adımda ise B alıcısı A göndericisinden gelen 2 bitlik klasik veriyi aldığına buna uygun olarak oluşturduğu iki kübit ve zaten elinde bulunan ebit ile birlikte III. kısım için devrenin girişini oluşturacaktır. Buradaki işlemler ve IV. kısımdaki gerekli işlemlerde tamamlandıktan sonra devrenin  $|b'\rangle$  çıkışından  $|\Psi\rangle$  durumu elde edilecektir.

Çizelge 2.10. B alıcısında bulunan kübite uygulayacak dönüşüm operatörü

Transfer edilen bitler	Dönüşüm operatörü (U)	Kübit
00	$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$
01	$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$
10	$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$
11	$iY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle$

Kuantum ışınlama devresinin sağ tarafında kalan B alıcısının devre girişinin A göndericisinin yaptığı ölçüme göre dört farklı girişi olacaktır. Bu farklı girişlere göre işlemler aynı şekilde gerçekleştirilebilir. A göndericisinin ölçümüne göre yapılan bu değerlere uygun B alıcısının uygulayacağı dönüşüm operatörleri Çizelge 2.10'da verilmiştir. Çizelgede bulunan dönüşüm operatörleri B alıcısının devre girişindeki en üst ve ortadaki kubitlere uygulanarak  $|\Psi\rangle$  kübiti kolayca elde edilebilir. Örneğin; A göndericisi ölçüm yaptıktan sonra 2 bitlik 00 değerini elde etsin. Bu durumda Çizelge 2.10'da yer alan I dönüşüm operatörü kubit değere uygulanarak  $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  durumuna yani A göndericisinin ışınlamak istediği kubit değerine ulaşılmış olacaktır. Işınlama devresinin çıkışına ait son denklem aşağıda verilmiştir.

$$|c'a'\rangle \otimes |b'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)}_{|b'\rangle=|\Psi\rangle} \quad (2.77)$$

Böylelikle  $|b'\rangle = |\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  ifadesi bulunarak ışınlama gerçekleşmiştir.

## 2.6. Kuantum Algoritmalar (Algorithms)

Kuantum bilgisayarlarını günümüzdeki bilgisayarlardan en farklı kılan özelliği kullandığı algoritmaların güçlü yanlarının çok fazla olmasıdır. Günümüzde klasik bilgisayarlarda çözümü olmayan ya da daha etkin bir çözüm yolu sunan algoritmaları oluşturmak kuantum bilgisayarlarıyla ilgili önemli bir araştırma konusu olmuştur. Kuantum algoritmalar sayesinde süperpozisyon ve dolanık durumlar gibi klasik bilgisayarlarda karşılığı olmayan bit dizilerinin durumları hesaplanabilir. Klasik algoritmalara göre daha hızlı olması kuantum algoritmaların önemini arttırmaktadır. Kuantum bilgisayarlarında zor olan ise sonuç kısmında yapılan ölçümlerin güçlüğünden ileri gelmektedir (Gün, 2011). Bunun nedeni ise süperpozisyon durumundaki dizilerden sadece birinin seçilmesi gerekmektedir. Kuantum algoritmalarını güçlü yapan özelliği ise buradan gelmektedir. Kuantum algoritmaları üstel ve polinomal olarak hızlı olmasına göre iki sınıfa ayrılabilir.

Kuantum mantık kapıları kullanılarak farklı algoritmalar tasarlanmıştır. İlk kuantum algoritması David Deutsch tarafından yapılmıştır (Deutsch, 1985). Bu kuantum algoritması sayesinde verilen bir problem, klasik bilgisayarlara oranla üstel

olarak artan bir şekilde daha hızlı çözüme ulaşmıştır (Deutsch ve Jozsa, 1992). İlerleyen yıllarda Peter Shor, kuantum bilgisayarları daha da öne çıkaracak olan tamsayıları asal çarpanlarına ayırabilen önemli bir algoritmayı içeren makale yayımladı (Shor, 1994). Shor bu algoritma ile klasik olanlarına göre üstel olarak daha hızlı olduğunu göstererek bu alandaki çalışmaları hızlandırmıştır. Herhangi bir veritabanını içerisinde sıralı olmayan bilgi yığınlarından istenilen durumun bulunmasını sağlayan Grover'in arama algoritması yine önemli bir kuantum algoritmasıdır. Grover arama algoritması polinomal olarak daha hızlıdır (Grover, 1997).

Kuantum bilgi işleme alanında geliştirilen önemli bir diğer algoritma ise Kuantum Fourier Dönüşümüdür (QFT). Bilimsel analizde de sık kullanım alanı olan ayrık Fourier dönüşümü kullanılarak geliştirilmiştir. Kuantum Fourier Dönüşümü algoritma hızında üstel olarak kazanç sağlamaktadır. Yani, klasik bilgi işlemede Hızlı Fourier Dönüşümü (FFT) için  $n2^n$  işlem gerekirken, Kuantum Fourier Dönüşümü bu süreçte sadece  $n^2$  tane işlem kullanır (Oliveira vd, 2007). Başlangıç durumu için,

$$|\Psi\rangle = \sum_{j=0}^{N-1} a_j |j\rangle = a_0 |0\rangle + a_1 |1\rangle + \dots + a_{N-1} |N-1\rangle \quad (2.78)$$

$$|\Psi\rangle = (a_0 \quad . \quad . \quad . \quad a_{N-1})^T \quad (2.79)$$

olmak üzere, bu durum üzerine QFT işlemi etki ettirildiğinde,

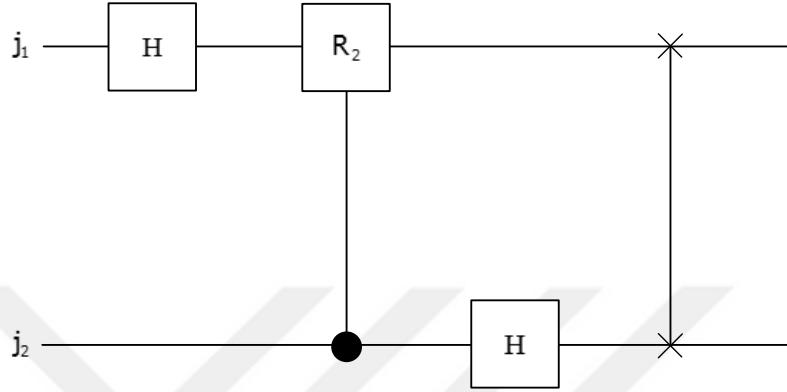
$$\text{QFT}|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} b_k |k\rangle \text{ ya da } \text{QFT} \begin{pmatrix} a_0 \\ . \\ . \\ . \\ a_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ . \\ . \\ . \\ b_{N-1} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

olur. Burada  $N = 2^n$  durum sayısıdır. Bu ifadede  $b_k$  Fourier uzayındaki katsayılarla karşılık gelmektedir. Ayrıca,

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} a_j e^{i2\pi jk/N} \quad (2.81)$$

şeklinde yazılır. Kuantum Fourier Dönüşümü Hadamard ve kontrollü faz değiştirme kapıları ile uygulanmaktadır. İki kubitlik sistem için dört durum vardır.

İki kubitlik bir sistem düşünüldüğünde Kuantum Fourier Dönüşüm devresi Şekil 2.7'de gösterilmiştir.



Şekil 2.7. İki kubitlik Kuantum Fourier Dönüşüm (QFT) devresi

Bu şekile göre,

$$R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i2\pi/2^k} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

$$|\Psi\rangle = a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle \quad (2.83)$$

$$\text{QFT}|\Psi\rangle = \sum_{k=0}^3 b_k |k\rangle = b_{00}|00\rangle + b_{01}|01\rangle + b_{10}|10\rangle + b_{11}|11\rangle \quad (2.84)$$

dir. Bu işlem sonucunda, QFT uygulanmış olur.

## 2.7. Manyetik Rezonans Spektroskopisi

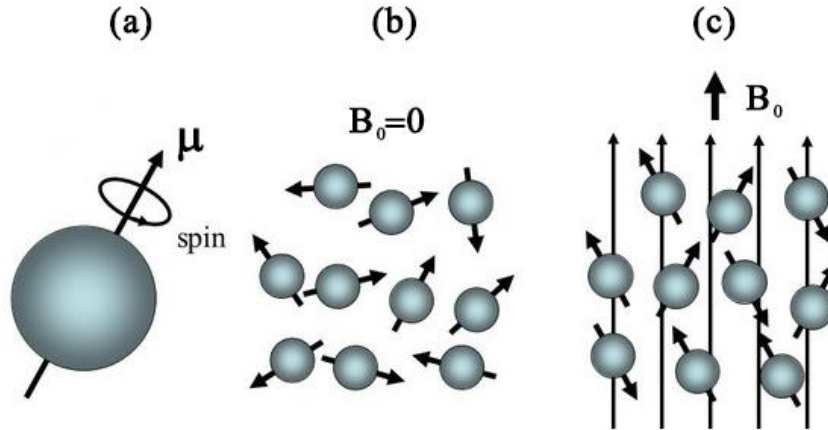
Spektroskopi, maddelerin özelliklerini elektromanyetik ışınlar veya atomaltı parçacık gibi etkenler kullanılarak çeşitli yöntem ve tekniklerle inceleme olarak tanımlanır. Spektroskopi ile atom veya moleküllerin yapı ve manyetik özellikleriyle birlikte dış ortam ile enerji alışverişleride incelenmektedir. Bohr şartına göre bir maddenin ilk ve son enerji düzeyleri arasındaki fark,

$$\Delta E = h\nu \quad (2.85)$$

ile ifade edilir. Bu duruma göre madde ya enerji yayınlar ya da enerjiyi soğurur. Elektromanyetik spektrumun farklı frekans bölgelerine uygun olarak ele alınan enerji düzeyleri için kullanılan spektroskopik yöntemlerde çeşitlilik göstermektedir. Bu tezin kapsamında ele alınacak olan yöntemler radyo frekans (RF) aralığında kullanılan nükleer manyetik rezonans (NMR), mikrodalga (MW) aralığında kullanılan elektron paramanyetik rezonans (EPR) ve bu iki yöntemin birleşimi olan elektron nükleer ikili rezonans (ENDOR) olacaktır (Schweiger ve Jeschke, 2001).

### 2.7.1. Nükleer Manyetik Rezonans (NMR)

Elektromanyetik spektrumun radyo frekans bölgesinde oluşan, spin kuantum sayısı sıfırdan farklı olan çekirdeklerin manyetik alanla etkileşmesiyle NMR gözlenir. Çekirdeğin manyetik alan içerisindeki manyetik momentini Şekil 2.8.a'daki gibi gösterebiliriz. Manyetik alanın olmadığı durumda ise manyetik momentler Şekil 2.8 b'deki gibi rastgele yönelmişlerdir ve bu durumda çekirdeklerin enerjileri dejenere olacaktır. Manyetik alanın varlığında ise (Şekil 2.8.c) çekirdek spin kuantum sayısı  $I \neq 0$  olduğu durumda çekirdeğin manyetik momentleri Boltzman dağılımına göre yönelmişlerdir.



Şekil 2.8. a) Manyetik alan içerisinde manyetik moment b)  $B_0 = 0$  durumunda çekirdek spinlerinin yönelimi c)  $B_0 \neq 0$  durumunda çekirdek spinlerinin yönelimleri



Manyetik çekirdek spin kuantum sayısı sıfırdan farklı olan ( $I \neq 0$ ) bir çekirdeğin manyetik moment vektörü,

$$\vec{\mu}_I = g_I \frac{\mu_I}{h} \vec{I} = \gamma_I \vec{I} \quad (2.86)$$

ile ifade edilir. Bu denklemde yer alan  $\gamma_I$  değeri çekirdeğe göre farklılık gösteren jromanyetik oran sabitidir. Manyetik alanın varlığında çekirdeğin manyetik momenti ile etkileşme Hamiltonyen ifadesi

$$\hat{H} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_0 = -\gamma_I \vec{B}_0 \cdot \vec{I} \quad (2.87)$$

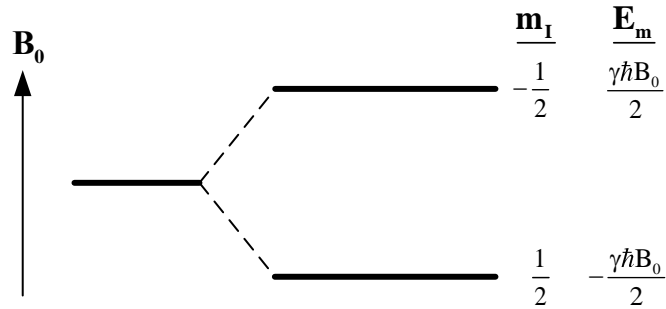
olarak yazılır. Burada  $\vec{I}$  değeri kuantum mekaniksel bir işlemcidir. Manyetik alan z yönünde uygulandığında yeni Hamiltonyen ifadesi

$$\hat{H} = -\gamma_I B_0 \hat{I}_z \quad (2.88)$$

olacaktır. Bu Hamiltonyen ifadesine karşılık gelen enerji özdeğerleri  $\hat{I}_z$  işlemcisi yerine  $m_I \hbar$  yazarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E = -\gamma \hbar B_0 m_I \quad (2.89)$$

Burada manyetik çekirdek spin kuantum sayısı olan  $m_I = -I, -I+1, \dots, I-1, I$  olacak şekilde toplamda  $2I+1$  tane değer alacaktır. Örnek olarak spin kuantum sayısı  $I=1/2$  olan hidrojen çekirdeği verilebilir. Bu çekirdek manyetik alanın varlığında alanla aynı ya da alanla zıt yönde olmak üzere iki yönelime sahip olacaktır. İki yönelimin enerji seviyeleri farklı olacaktır.  $B_0$  bir dış manyetik alanın varlığında spin kuantum sayısı  $I=1/2$  olan bir çekirdeğin enerji seviyeleri Şekil 2.9'da gösterilmiştir.



Şekil 2.9.  $B_0$  dış manyetik alanda spini  $I=1/2$  olan bir çekirdeğin enerji seviyeleri

Enerji düzeyleri ve rezonans durumunda soğurulan veya yayımlanan radyasyon frekansı ile ilgili olarak NMR için izinli geçişler  $\Delta m = \pm 1$  şartını sağlamalıdır. İki durum arasında olan bu geçiş arasındaki enerji farkı ise

$$\Delta E = h\nu = \gamma\hbar B_0 \quad (2.90)$$

olmalıdır. Son denkleme göre uygulanan dış manyetik alana bağlı şekilde rezonans frekansını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\nu = \frac{\gamma B_0}{2\pi} \quad (2.91)$$

NMR tekniği kuantum ışınlamada kullanılmıştır (Nielsen vd, 1998). Bu çalışmalarında trikloretilen molekülündeki  $^{13}\text{C}$  ve  $^1\text{H}$  çekirdekleri kübit olarak ele alınmıştır. Bu deney ile molekülde bulunan karbon çekirdeğinin birinin kübit durumunu hidrojen çekirdeğinin kübit durumuna ışınlaması şeklindedir. Bir diğer önemli çalışmada aşırı yoğun kodlamayı gerçekleştirmek için kullanılan bir kuantum devresi ile gerçekleştirilmiştir (Fang vd, 2000). Bu deney kloroform ( $\text{CHCl}_3$ ) molekülü ile yapılmıştır. Molekülde  $^{13}\text{C}$  ve  $^1\text{H}$  çekirdekleri kübit olarak kullanılmıştır.

### 2.7.2. Elektron Paramanyetik Rezonans (EPR)

Elektron paramanyetik rezonans (EPR) ile Nükleer manyetik rezonans (NMR) teorik olarak bakıldığında birbirine benzer yapıdadır. NMR çekirdek spinleriyle ilgiliyken, EPR elektron spinlerini dikkate alır. Bundan dolayı da çekirdek ve elektron arasındaki farklılıktan dolayı bu tekniklerde de bazı farklılıklar olmaktadır. Farklılıklar genelde spinler üzerinedir. EPR elektron spinini göz önüne aldığından moleküllerin çoğunun elektron spinini sıfırdır. Bu nedenle molekül diamanyetiktir. EPR spektrumunu gözleyebilmek için molekülün bir ya da birden fazla çiftlenmemiş elektronu olması gerekir. Aslında molekül paramanyetik olmalıdır. EPR spekturumu bu nedenle kullanım alanı olarak sınırlıdır. Elektron spin açısıl momenti sıfırdan farklı olan moleküllerde elektron spin manyetik moment ifadesi

$$\vec{\mu}_s = -g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S} \quad (2.92)$$

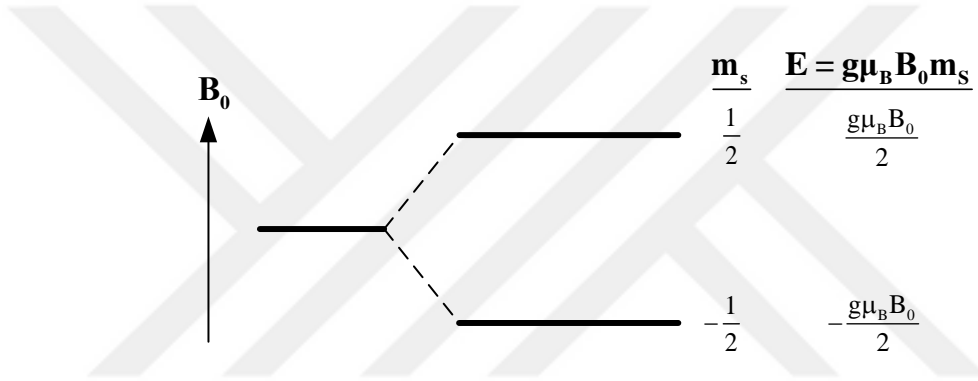
olarak verilir.  $\vec{B} = B_0 \hat{k}$  şeklinde bir dış manyetik alanla elektron spin manyetik momentinin etkileşme Hamiltonyen ifadesi

$$\hat{H} = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = g \frac{\mu_B}{\hbar} \vec{S} \cdot \vec{B} = g \frac{\mu_B}{\hbar} B_0 \hat{S}_z \quad (2.93)$$

ile verilir. Bu denklemde  $\hat{S}_z = m_s \hbar$  ifadesi yerine yazılırsa enerji özdeğerleri

$$E = g \mu_B B_0 m_s \quad (2.94)$$

ile bulunur. Bu ifade doğrultusunda  $\vec{B} = B_0 \hat{k}$  gibi bir dış manyetik alanın varlığında paramanyetik bir madde Şekil 2.10' daki gibi iki enerji düzeyine ayrılır.



Şekil 2.10. Elektron spin kuantum sayısı  $S=1/2$  olan paramanyetik maddenin dış manyetik alandaki enerji düzeyleri

EPR açısından izinli geçişler komşu iki spinin enerji düzeyleri arasında olmalıdır. Bu tanıma göre seçim kuralı,  $\Delta m_s = \pm 1$  olduğundan iki düzey arasında enerji farkı olacaktır. Bu enerji farkı ifadesi

$$\Delta E = h\nu = g \mu_B B_0 \quad (2.95)$$

olur. Bu enerji aralığında mikrodalga bölgesine düşen rezonans frekansı ise,

$$\nu = \frac{g \mu_B B_0}{h} \quad (2.96)$$

ile ifade edilir. EPR açısından elektron spinlerinin bu yönelimleri kuantum bilgi teorisinde ‘kübit’ olarak çok sık kullanılmaktadır. Yani  $|1/2\rangle$  yönelimi  $|0\rangle$  kübitine,  $|-1/2\rangle$  yönelimide  $|1\rangle$  kübitine karşılık gelmektedir.

### 2.7.3. Elektron Nükleer İkili Rezonans (ENDOR)

Manyetik alandaki yönelimler, NMR için çekirdek ile manyetik alanın etkileşme şiddeti ve EPR için ise elektron ile manyetik alanın etkileşme şiddetine bağlı olarak  $\Delta E$  enerji farkı ile ayrılmaktadır (Oliveira vd, 2007). Bu oluşan enerji farkı, elektronların düşük enerji seviyesinden yüksek enerji seviyesine geçmesine neden olan  $\nu$  frekansa sahip elektromanyetik ışının etkisi ile ölçülebilir (NMR ve EPR için sırasıyla, denklem 2.91 ve 2.96).

NMR spektroskopisinde çekirdeğin Zeeman enerji seviyeleri arasındaki geçişler incelenirken, EPR spektroskopisinde elektron Zeeman enerji seviyeleri arasındaki geçişler incelenir. NMR için spin-spin çiftlenimine uygun olarak, EPR için çiftlenmemiş elektronun manyetik çekirdekle etkileşiminden kaynaklı aşırı ince yapı etkileşmesi oluşur. NMR için spin-spin çiftlenimi genelde molekül içerisindeki az bir çekirdekle gerçekleşirken, EPR için aşırı ince yapı etkileşmesi çiftlenmemiş elektronlara yakın manyetik çekirdeklerle gerçekleştiği için EPR spektrumunda fazlaca yarılmaya neden olurlar. Bundan dolayı büyük radikallerin incelenmesi EPR spektrumunda oldukça zordur. Bunun çözümü ise EPR ve NMR tekniklerinin birleştirilmesiyle oluşturulan ENDOR tekniği ile yapılır. ENDOR tekniğinde örnek üzerine yüksek güçte mikrodalga enerjisi gönderilerek elektron rezonansının doyumuna ulaşması sağlanır. Rezonans durumunda dış manyetik alan ve mikrodalga frekansı sabit tutulur. Daha sonra örnek üzerine gönderilecek radyo frekans alanı değiştirilerek doyumuna ulaşan elektron rezonansı üzerindeki değişiklikler incelenir. EPR'ye göre ENDOR tekniği spektrumdaki belirsizlikleri azaltarak daha net bir çözünürlük sağlamaktadır. EPR spektrumundaki pik sayıları, her çekirdek grubunun  $(2I+1)$  değeriyle çarpılmasıyla elde edilirken, ENDOR spektrumundaki pik sayısı ise her özdeş çekirdek grubu için iki'ye eşittir. Aşırı ince yapı sabiti (A)'nin ölçümü ENDOR ile çok daha kolaydır. Çünkü ENDOR spektroskopisinin temelini, EPR spektroskopisi üzerinde yapılan çeşitli değişiklikler sonucunda NMR geçişlerinin daha kolay gözlenmesi oluşturmaktadır. Zayıf etkileşme durumunda,  $B_0$  dış manyetik alanının varlığında bir elektronla bir çekirdeğin spin Hamiltonyeni

$$H_0 = H_{EZ} + H_{NZ} + H_{AIY} \quad (2.97)$$

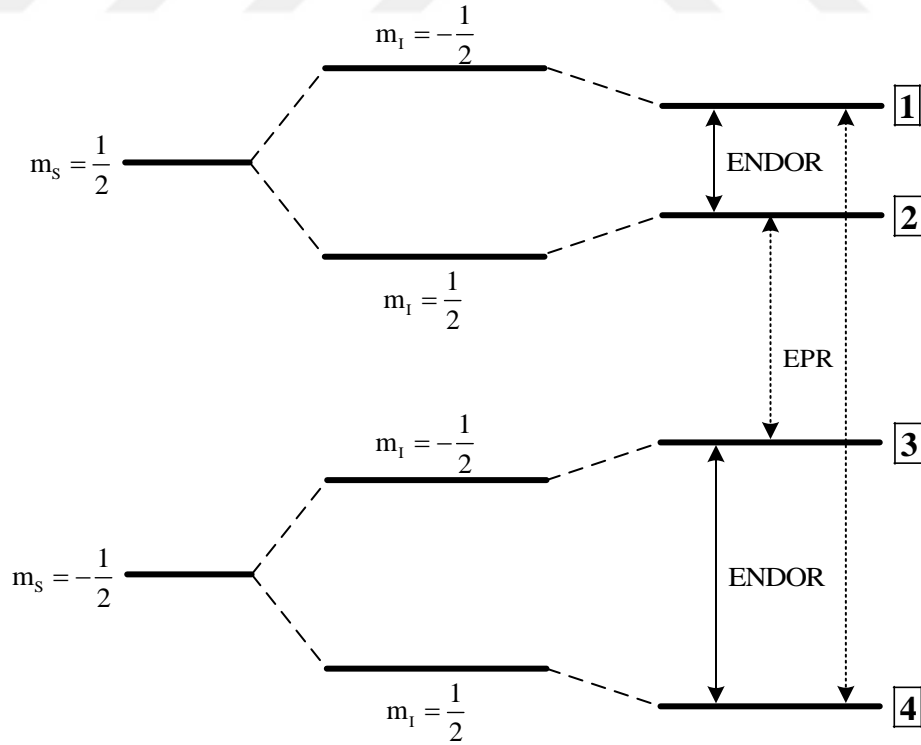
ile verilir. Burada,  $H_{EZ}$ :Elektron ile dış manyetik alanın etkileşmesinden oluşan elektron Zeeman Hamiltonyeni,  $H_{NZ}$ : Çekirdek ile dış manyetik alanın etkileşmesinden oluşan çekirdek Zeeman Hamiltonyeni ve  $H_{AIV}$ :Elektron ile çekirdeğin etkileşmesinden oluşan aşırı ince yapı etkileşme Hamiltonyenidir. Ayrıca  $B_0$  dış manyetik alanı z yönünde seçilip gerekli ifadeler yerine yazıldığında Hamiltoniyen

$$\hat{H} = \Omega_S \hat{S}_Z - \Omega_I \hat{I}_Z + A \hat{S}_Z \hat{I}_Z \quad (2.98)$$

ile ifade edilir. Bu denklemde  $\Omega_S = g_e \mu_B B_0 / \hbar$  ve  $\Omega_I = g_N \mu_N B_0 / \hbar$  ile verilir. Bu Hamiltonyene karşılık gelen enerji denklemi

$$E = \Omega_S m_S - \Omega_I m_I + A m_I m_S \quad (2.99)$$

ile oluşturulur. Burada,  $\mu_B$  ve  $\mu_N$  sırasıyla Bohr manyetonuna ve çekirdeğin manyetonuna karşılık gelir. Serbest bir elektron için  $g_e = 2,0023$  iken  $g_N$  değeri ise serbest elektronun  $g$  değerinden farklıdır.



Şekil 2.11. Sabit manyetik alanda spini  $I=1/2$  olan bir çekirdek ile çiftlenmemiş elektronun enerji seviyelerinin gösterimi

Dış manyetik alan içerisinde aşırı ince yapı sabitinin ( $A$ ) büyük olduğu bir durum düşünüldüğünde, spin kuantum sayısı  $I=1/2$  olan çekirdek ile çiftlenmemiş bir elektronun fiziksel bir sistemdeki enerji seviyeleri Şekil 2.11’de verilmiştir. Bu şekildeki 2-3 ile 1-4 seviyeleri arasındaki geçişler EPR geçişlerini ifade ederken, 1-2 ile 3-4 seviyeleri arasındaki geçişler ENDOR geçişlerini göstermektedir. Kuantum bilgi işleme açısından düşünüldüğünde bu sistem  $S=1/2$  ve  $I=1/2$  spin sisteminin çiftlenimi olarak kullanılmaktadır. Burada elektron ve çekirdek etkileşimi gerçekleştiğinden, iki kubitlik durumları ifade edebilmek için 1 seviyesi  $|01\rangle$ , 2 seviyesi  $|00\rangle$ , 3 seviyesi  $|11\rangle$  ve 4 seviyesi  $|10\rangle$  kubit durumları olarak ifade edilir (Gün, 2011).



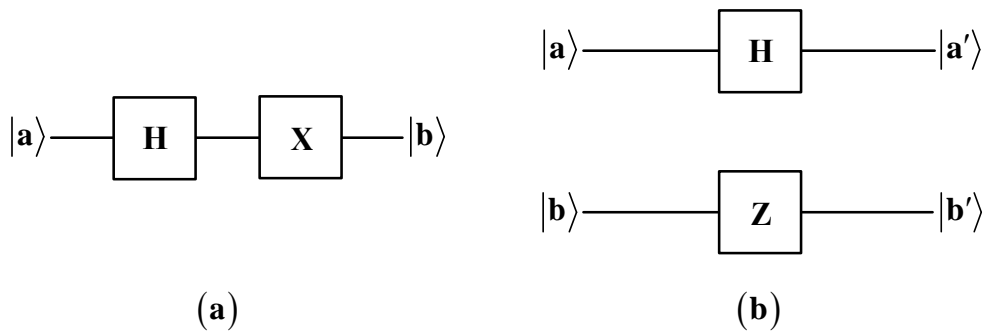
### 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Atom ve moleküllerin manyetik özelliklerini ve elektronik yapılarını incelemenin en önemli yolu spektroskopik yöntemleri kullanmaktır. Birçok araştırmada spektroskopik yöntemler çok sık uygulanmaktadır. Bu bölüm içinde bulgular ve tartışma kısmında kullanılacak olan kuantum mantık devrelerinin analizi, seçici pulslar ve Weyl operatörleri gibi yöntemler ele alınacaktır.

#### 3.1. Kuantum Mantık Devrelerinin Analizi

Kuantum Bilgi İşleme sürecisinde birden çok mantık kapısı kullanılarak elde edilen bir kuantum mantık devresinin analiz edilmesi önemli bir aşama oluşturmaktadır. Bir kuantum devre diyagramı, art arda uygulanan kuantum mantık kapı işlemlerinin görsel bir temsilini sağlamaktadır. Herhangi n-kübitli devre, bu n-kübitle ilgili n-yatay çizgiden oluşmaktadır. Devre üzerindeki mantık kapılarının uygulanışı soldan sağa doğrudur. Yani en sağdaki mantık kapısından önce en soldaki mantık kapısı uygulanarak devam edilir (Williams, 2010). Devre diyagramı soldan sağa doğru ifade edilir. Mantık kapılarının matrislerinin çarpımı sağdan sola doğru uygulanmaktadır. Çarpım işlemini doğru uygulamak için, durum vektörü operatörün sağ tarafında olacak şekilde işlem yapılır (Viamontes, 2007).

Kuantum mantık devresindeki çoklu kübit ifadeleri ve mantık kapıları tensör çarpım kullanılarak ifade edilebilmektedir. Aşağıdaki Şekil 3.1 a'daki gibi seri bağlı devrelerde normal matris çarpım işlemi yani nokta çarpım yapılırken, Şekil 3.1 b'deki gibi paralel bağlı bir devrede tensör çarpım yani direk çarpım yapılmaktadır.



Şekil 3.1. a'daki seri bağlı kuantum devresine Hadamard ve Pauli X mantık kapılarını örnek olarak  $|1\rangle$  durumu için uygulayalım.

$$\begin{aligned}
 (\text{X.H})|1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |0\rangle)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Şekil 3.1. b'deki paralel bağlı kuantum devresine Hadamard ve Pauli Z mantık kapılarını örnek olarak  $|00\rangle$  durumu için uygulayalım.

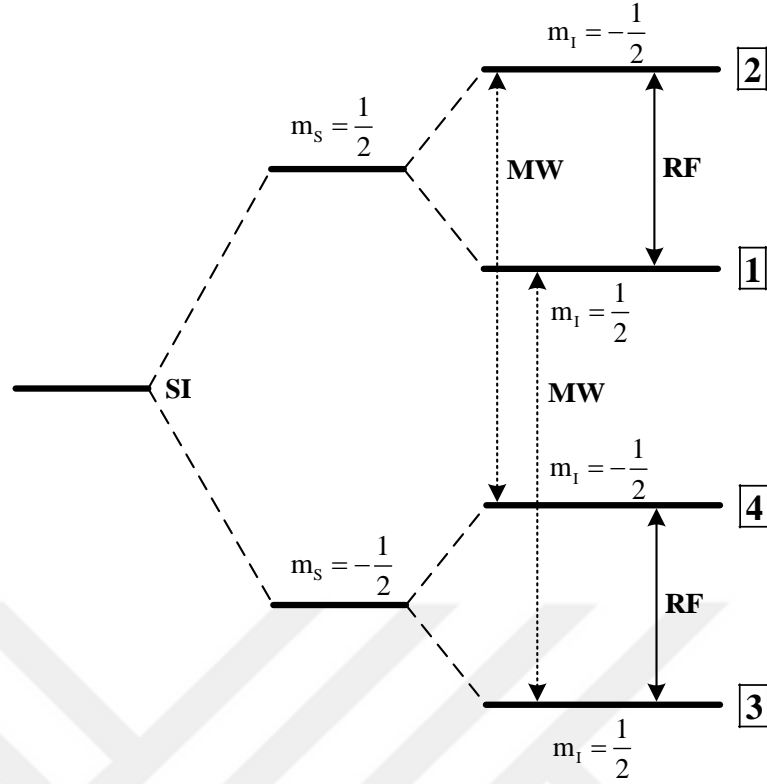
$$\begin{aligned}
 (\text{H} \otimes \text{Z})|00\rangle &= \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |10\rangle)
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

### 3.2. Manyetik Rezonans Seçici Pulslar

Puls dizileri x ve y eksenleri boyunca gönderilerek çekirdek ya da elektronların spin açıl momentleri üzerine etki eden işlemcilerden oluşur. Enerji seviyeleri arasında geçiş yaptırmak ya da spin yönelimlerini değiştirmek için bu pulsların frekansları değiştirilebilir. Dış bir manyetik alanın varlığında frekans değerine göre etkileşimde bulunduğu parçacıkta farklılık gösterir. Eğer frekans değeri radyo frekans (RF) bölgesine denk geliyorsa çekirdeğin, mikrodalga (MW) bölgesinde ise elektronun spin açıl momentleriyle etkileşir.

Seçici pulslar, bir spin sistemi içerisinde radyo frekans ve mikrodalga puls dizilerinin tek bir geçiş oluşturmasıyla tanımlanır.  $SI(S=1/2, I=1/2)$  spin sisteminde zayıf çiftlenim sırasında ortaya çıkan enerji seviyeleri ile bu seviyeler arasındaki geçişleri Şekil 3.2'de verilmiştir.





Şekil 3.2. SI( $S=1/2$ ,  $I=1/2$ ) spin sistemi için radyo frekans ve mikrodalga geçişleri

Bu şekildeki 1-2 ve 3-4 geçişleri izinli çekirdek geçişlerini, 1-3 ve 2-4 arasındaki geçişler ise izinli elektron geçişlerini ifade eder. Tüm çekirdek ve elektron geçişleri bunlar olmasına rağmen seçici pulslar kullanılarak mikrodalga ya da radyo frekans geçişlerinden istenilen herhangi bir geçiş elde edilebilir. Bu seçici geçişleri oluşturmak için aşağıdaki ifadeler kullanılır (Mádi vd, 1998).

$$S^{\alpha} = \frac{1}{2}[E_S + 2S_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

$$S^{\beta} = \frac{1}{2}[E_S - 2S_z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$I^{\alpha} = \frac{1}{2}[E_I + 2I_z] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$I^{\beta} = \frac{1}{2}[E_I - 2I_z] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Bu ifadeler yardımıyla x yönündeki radyo frekans pulsları ile 1-2 ve 3-4 arasındaki çekirdek geçişleri, aynı şekilde mikrodalga pulslarıyla da 1-3 ve 2-4 arasındaki elektron geçişleri sağlanabilir. Bu pulslar ise

$$I_x^{1-2} = S^\alpha \otimes I_x = \frac{1}{2}(E_s \otimes I_x + 2S_z \otimes I_x) \quad (3.7)$$

$$I_x^{3-4} = S^\beta \otimes I_x = \frac{1}{2}(E_s \otimes I_x - 2S_z \otimes I_x) \quad (3.8)$$

$$S_x^{1-3} = S_x \otimes I^\alpha = \frac{1}{2}(S_x \otimes E_1 + 2S_x \otimes I_z) \quad (3.9)$$

$$S_x^{2-4} = S_x \otimes I^\beta = \frac{1}{2}(S_x \otimes E_1 - 2S_x \otimes I_z) \quad (3.10)$$

olarak verilir. Yukarıdaki ifadelere göre diğer yönlerdeki seçici radyo frekans ya da mikrodalga pulsları da oluşturulabilir.

### 3.3. Weyl Operatörleri

Genellikle küdit olarak isimlendirilen d-boyutlu bir kuantum sisteminin durumu,  $d \times d$  boyutlu bir yoğunluk matrisiyle tanımlanabilir. Literatürde d-boyutlu bir kuantum sisteminin yoğunluk matrislerinin ayrıştırılması için üç farklı matris temeli sunulmuştur. Bunlar genelleştirilmiş Gell-Mann matrisleri, Polarizasyon operatörleri ve Weyl operatörleridir (Bertlmann ve Krammer, 2008). Bu tez çalışmasında ise Weyl operatörleri kullanılmıştır. Ayrıca literatürde Weyl operatörleri kullanılarak  $d=3$  durumlarını ifade eden küditler için dolanık durumların birbirlerine dönüşümüyle ilgili çalışmalar mevcuttur (Çorbacı vd, 2016).

d-boyutlu Hilbert uzayının bir bazı aşağıda verilen denklemdeki  $d^2$  tane operatörden oluşturulur.

$$U_{nm} = \sum_{k=0}^{d-1} e^{i\frac{2\pi}{d}kn} |k\rangle \langle (k+m) \bmod d| \quad (3.11)$$

Bu ifadede  $n, m = 0, 1, 2, \dots, (d-1)$ . Bunlar Hilbert uzayının standart bazı olarak kullanılır. Bu operatörler küdit durumların kuantum ışınlamasının içeriğinde de tanımlanan ve literatürde genellikle “Weyl operatörleri” olarak isimlendirilen operatörlerdir.  $d^2$  operatörlerinin tamamı üniter olup Hilbert uzayında ortanormal bazıları oluşturur.

Kükuartlar için  $d = 4$  olacak şekilde bu operatörlerin matris temsilleri Çizelge 3.1’deki gibi oluşturulabilir ve bu operatörler Pauli bazları olarak da adlandırılır.

Çizelge 3.1. Kükuartlar için Weyl operatörleri

---

$U_{00} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$U_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U_{02} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$U_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$	$U_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$
$U_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$U_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
$U_{30} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}$	$U_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$U_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$

---

Bu operatörler kuantum bilgi işlemede tek kükuartlık mantık kapıları olarak kullanılabilir. Örneğin; denklem 3.11’i kullanarak Çizelge 3.1.’deki  $U_{03}$  operatörü aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned}
 U_{03} &= \sum_{k=0}^3 e^{i\frac{2\pi}{4}k \cdot 0} |k\rangle \langle (k+3) \bmod 4| = \sum_{k=0}^3 |k\rangle \langle (k+3) \bmod 4| \\
 &= |0\rangle \langle (0+3) \bmod 4| + |1\rangle \langle (1+3) \bmod 4| \\
 &\quad + |2\rangle \langle (2+3) \bmod 4| + |3\rangle \langle (3+3) \bmod 4| \\
 &= |0\rangle \langle 3| + |1\rangle \langle 0| + |2\rangle \langle 1| + |3\rangle \langle 2|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 0 \ 1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1 \ 0 \ 0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1 \ 0) \\
&U_{03} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Bulgular ve tartışma bölümünde iki kükuartlık dolanık durumların birbirine dönüştürülmesinde, iki kütritlik, iki kükuartlık ve iki küditlik dolanık durumlar için aşırı yoğun kodlamanın uygulanmasında ve iki küditlik genel SWAP mantık devresinin oluşturulmasında Weyl operatörleri kullanılacaktır.

## 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

### 4.1. Giriş

Kuantum Fiziğinin ilerlemesindeki en büyük katkılardan biri hiç kuşkusuz ki 1935 yılında Einstein ve arkadaşları Podolsky ve Rosen tarafından gerçekleştirilen EPR düşünce deneyi olarak tanımlanan bir çalışmadır (Einstein vd, 1935). Bu çalışma sayesinde  $\alpha$  ve  $\beta$  gibi iki parçacığın taşıdıkları özelliklere göre dolanık olabileceği ortaya konulmuştur. Kuantum bilgi işlemede çok yaygın kullanılan dolanık durumlar ile kuantum ışınlama ve aşırı yoğun kodlama gibi birçok çalışma yapılabilmektedir.

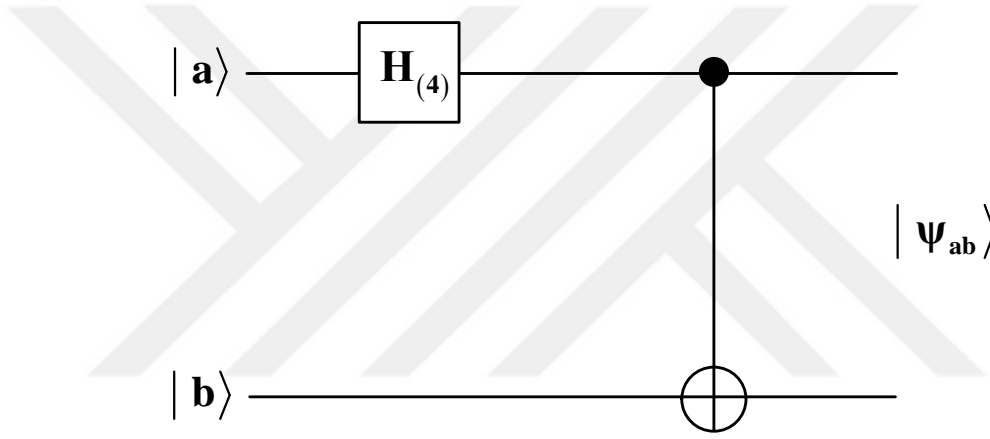
Bu çalışmada, öncelikle iki kükuartlık dolanık durumların incelenmesi yapılmıştır. İki kükuartlık dolanık durumları elde etmek için gerekli olan kuantum mantık devresi kullanılmıştır. Bu devreye göre ilk olarak iki kükuartlık dolanık durumlar matrislerle elde edilmiştir. İkinci olarak da iki kükuartlık dolanık durumlar manyetik rezonans seçici pulslar kullanılarak oluşturulmuştur. Ayrıca Weyl operatörleri yardımıyla iki kükuartlık dolanık durumların birbirlerine dönüşümleri gerçekleştirilmiştir. İki küditlik durumlar için aşırı yoğun kodlamanın incelenmesi yapılmıştır. İki kütritlik ve iki kükuartlık dolanık durumlar için aşırı yoğun kodlama mantık devreleri oluşturulmuştur. Sonrasında bu iki durumu göz önüne alarak iki küditlik durumlar için genel bir aşırı yoğun kodlama mantık devresi önerilmiştir. Kuantum ışınlama konusu ise üç küditlik durumlar için incelenmiştir. Üç kütritlik ve üç kükuartlık kuantum ışınlama mantık devreleri oluşturularak hesaplamaları yapılmıştır. Ardından üç küditlik durumlar için genelleştirilmiş kuantum ışınlama devresi oluşturulmuştur. Kuantum bilgi işlemede de önemli bir yeri olan Kuantum Fourier Dönüşümü iki kütritlik durumlar için hesaplanmıştır. Son olarak da SWAP mantık kapısı olarak iki küditlik durumlar için genel bir SWAP mantık devresi önerisinde bulunulmuştur.

## 4.2. İki Kükuartlık Dolanık Durumların İncelenmesi

İki kükuartlık dolanık durumlar ilk olarak matrislerle, ardından manyetik rezonans seçici pulslarla elde edilecektir. Daha sonra Weyl operatörleri yardımıyla dönüşüm operatörleri tanımlanarak dolanık durumların birbirlerine dönüştürülmesi sağlanacaktır.

### 4.2.1. İki Kükuartlık Dolanık Durumların Matrislerle Elde Edilmesi

İki kükuartlık dolanık durumları oluşturmak için kullanılan kuantum devresi Şekil 4.1’de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. İki kükuartlık durumlar için dolanıklık oluşturma devresi

İki kükuartlık durumlar için dolanıklık oluşturma devresinde öncelikle ilk kükuarta (S spini) denklem 2.59’deki Hadamard mantık kapısı, ardından oluşan duruma da denklem 2.63’deki  $CNOT_a(4)$  mantık kapısı uygulanır. Onaltı tane iki kükuartlık durumların her birisi için bu işlem gerçekleştirildiğinde SI ( $S=3/2$ ,  $I=3/2$ ) spin sisteminde iki kükuartlık kuantum dolanık durumlar oluşturulmuş olur.

Kükuartlar için dolanıklık oluşturma devresi kullanılarak iki kükuartlık dolanık durumlar Çizelge 4.1.’deki gibi elde edilir.

Çizelge 4.1. İki kükuartlık dolanık durumlar

Giriş kükuartı, $ ab\rangle$	Çıkış dolanık durumlar, $ \psi_{ab}(4)\rangle$
$ 00\rangle$	$( 00\rangle +  11\rangle +  22\rangle +  33\rangle) / 2$
$ 01\rangle$	$( 01\rangle +  12\rangle +  23\rangle +  30\rangle) / 2$
$ 02\rangle$	$( 02\rangle +  13\rangle +  20\rangle +  31\rangle) / 2$
$ 03\rangle$	$( 03\rangle +  10\rangle +  21\rangle +  32\rangle) / 2$
$ 10\rangle$	$( 00\rangle + i 11\rangle -  22\rangle - i 33\rangle) / 2$
$ 11\rangle$	$( 01\rangle + i 12\rangle -  23\rangle - i 30\rangle) / 2$
$ 12\rangle$	$( 02\rangle + i 13\rangle -  20\rangle - i 31\rangle) / 2$
$ 13\rangle$	$( 03\rangle + i 10\rangle -  21\rangle - i 32\rangle) / 2$
$ 20\rangle$	$( 00\rangle -  11\rangle +  22\rangle -  33\rangle) / 2$
$ 21\rangle$	$( 01\rangle -  12\rangle +  23\rangle -  30\rangle) / 2$
$ 22\rangle$	$( 02\rangle -  13\rangle +  20\rangle -  31\rangle) / 2$
$ 23\rangle$	$( 03\rangle -  10\rangle +  21\rangle -  32\rangle) / 2$
$ 30\rangle$	$( 00\rangle - i 11\rangle -  22\rangle + i 33\rangle) / 2$
$ 31\rangle$	$( 01\rangle - i 12\rangle -  23\rangle + i 30\rangle) / 2$
$ 32\rangle$	$( 02\rangle - i 13\rangle -  20\rangle + i 31\rangle) / 2$
$ 33\rangle$	$( 03\rangle - i 10\rangle -  21\rangle + i 32\rangle) / 2$

Örneğin; Çizelge 4.1'deki  $|00\rangle$  dolanık durumu elde edebilmek için aşağıdaki işlemleri sırasıyla uygulayabiliriz.

$$|\Psi_{00}(4)\rangle = \text{CNOT}_a(4) \left\{ \left( H_{(4)} \otimes I_4 \right) |00\rangle \right\} = \text{CNOT}_a(4) \left\{ \left( H_{(4)} |0\rangle \otimes I_4 |0\rangle \right) \right\} \quad (4.1)$$

$$= \text{CNOT}_a(4) \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \text{CNOT}_a(4) \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \text{CNOT}_a(4) \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{CNOT}_a(4) \left\{ \frac{1}{2} (|00\rangle + |10\rangle + |20\rangle + |30\rangle) \right\}$$

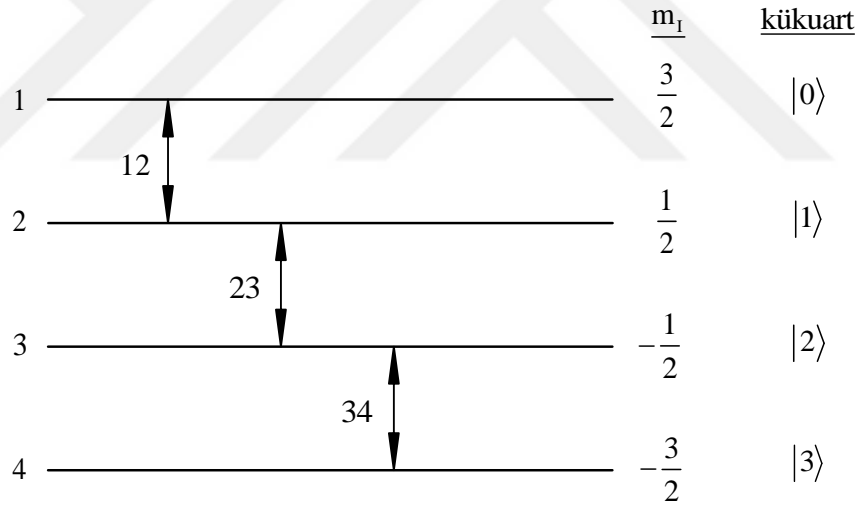




$$P_{\alpha}^{12}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\pi\alpha/2} & 0 & 0 \\ i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\pi\alpha/2} & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$R_{\alpha}^{24}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\pi\alpha/2} & 0 & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\pi\alpha/2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\pi\alpha/2} & 0 & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\pi\alpha/2} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Burada sırasıyla x, y, -x ve -y için  $\alpha=0, 1, 2$  ve  $3$ 'tür. Ayrıca tekli, ikili ve üçlü kuantum geçişleri için  $P_{\alpha}^{23}(\theta)$ ,  $P_{\alpha}^{34}(\theta)$ ,  $P_{\alpha}^{13}(\theta)$ ,  $P_{\alpha}^{14}(\theta)$  ve  $P_{\alpha}^{24}(\theta)$  gibi seçici puls operatörleri elde edilebilir.



Şekil 4.2. Spin-3/2 için kükuart durumları ve bunlar arasındaki bazı seçici geçişler

Endohedral fullerenler, spin kuantum hesaplamaları için elektron-çekirdek spin sistemi olarak kullanılabilir (Gün vd, 2013; Harneit, 2017; Takui vd, 2016). Böylece,  $^{75}\text{As}@C_{60}$  molekülü SI ( $S=3/2$ ,  $I=3/2$ ) spin sistemi gibi ele alınabilir. Bu endohedral fullerene molekülü için taban durumunda As atomunun elektron spinini  $3/2$ 'dir. Ayrıca bolluğu %100 olan  $^{75}\text{As}$  atomunun çekirdek spinini  $3/2$ 'dir.

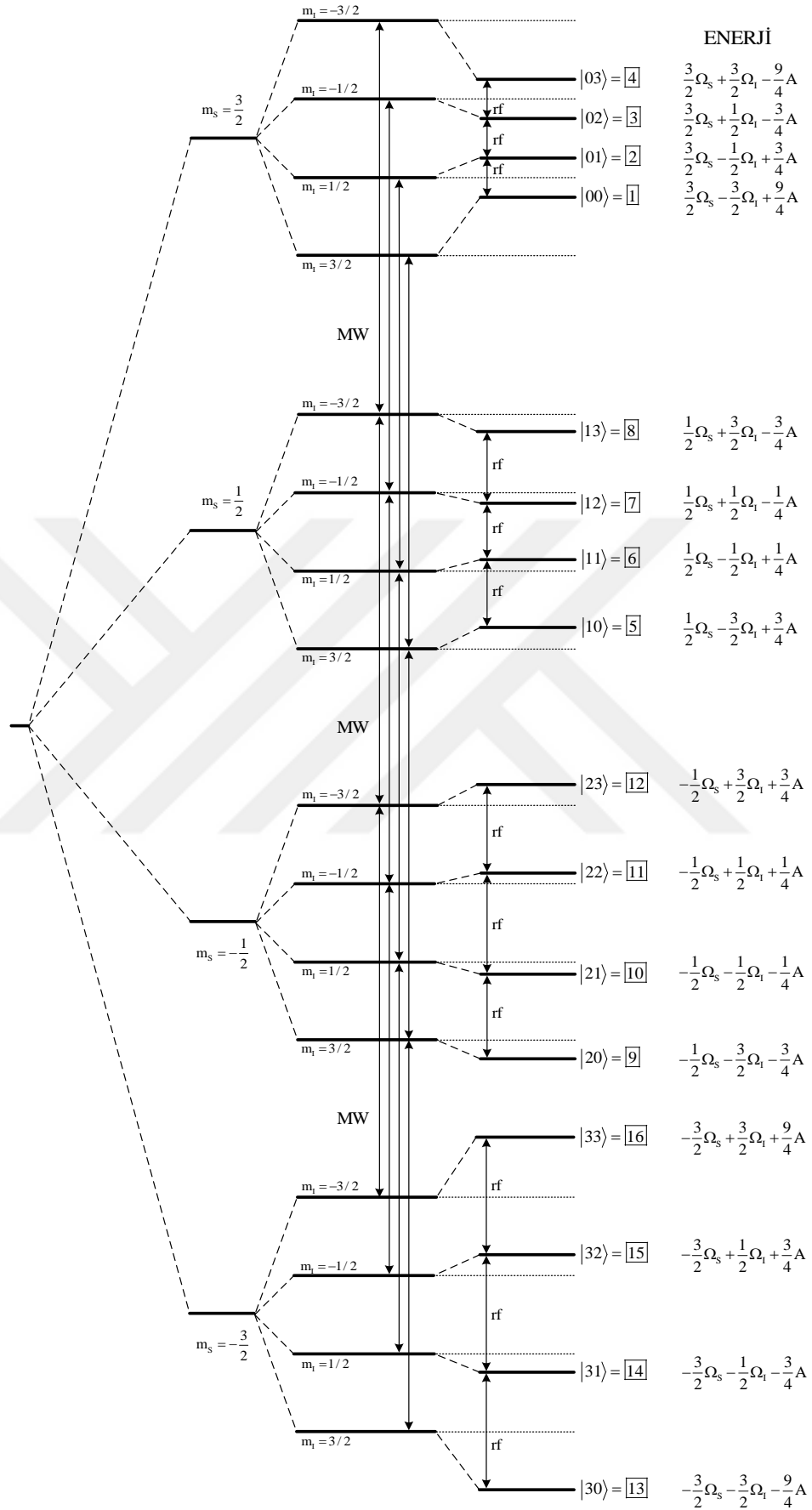
Bu tek molekülün dış manyetik alanda ENDOR deneyi için toplam Hamiltoniyeni

$$\hat{H} = \Omega_S S_z - \Omega_I I_z + A S_z I_z \quad (4.5)$$

dir. Burada ilk terim elektron Zeeman, ikinci terim nükleer Zeeman ve son terim ise aşırı ince yapı etkileşme terimidir. Burada elektron ve çekirdek arasında zayıf bir aşırı ince yapı etkileşmesi olduğu varsayılmaktadır. Bu spin sistemi için, Çizelge 4.2’de gösterildiği gibi 16 tane iki kükuartlık durum ve 16 tane enerji seviyesi vardır. Bu sistemde çekirdek ve elektron etkileşmesiyle ortaya çıkan enerji düzeyleri ve bunlara karşılık gelen iki kükuartlık durumlar Şekilde 4.3.’de gösterilmiştir. Ayrıca SI ( $S=3/2$ ,  $I=3/2$ ) spin sistemi başka bir çalışmada dört kübitlik durumlar olarak temsil edilmiştir (Gün vd, 2013). Bu çalışmada ise benzer enerji seviyeleri iki kükuartlık durumlar olarak kabul edilmiştir.

Çizelge 4.2. SI (S=3/2, I=3/2) spin sistemi için iki kükuartlık durumlar ve spin Hamiltonyeni enerjileri

Seviye numarası	$ M_s\rangle$	$ M_I\rangle$	Enerji	İki kükuart durum, $ ab\rangle$
1	$ 3/2\rangle$	$ 3/2\rangle$	$\frac{3}{2}\Omega_s - \frac{3}{2}\Omega_I + \frac{9}{4}A$	$ 00\rangle$
2	$ 3/2\rangle$	$ 1/2\rangle$	$\frac{3}{2}\Omega_s - \frac{1}{2}\Omega_I + \frac{3}{4}A$	$ 01\rangle$
3	$ 3/2\rangle$	$ -1/2\rangle$	$\frac{3}{2}\Omega_s + \frac{1}{2}\Omega_I - \frac{3}{4}A$	$ 02\rangle$
4	$ 3/2\rangle$	$ -3/2\rangle$	$\frac{3}{2}\Omega_s + \frac{3}{2}\Omega_I - \frac{9}{4}A$	$ 03\rangle$
5	$ 1/2\rangle$	$ 3/2\rangle$	$\frac{1}{2}\Omega_s - \frac{3}{2}\Omega_I + \frac{3}{4}A$	$ 10\rangle$
6	$ 1/2\rangle$	$ 1/2\rangle$	$\frac{1}{2}\Omega_s - \frac{1}{2}\Omega_I + \frac{1}{4}A$	$ 11\rangle$
7	$ 1/2\rangle$	$ -1/2\rangle$	$\frac{1}{2}\Omega_s + \frac{1}{2}\Omega_I - \frac{1}{4}A$	$ 12\rangle$
8	$ 1/2\rangle$	$ -3/2\rangle$	$\frac{1}{2}\Omega_s + \frac{3}{2}\Omega_I - \frac{3}{4}A$	$ 13\rangle$
9	$ -1/2\rangle$	$ 3/2\rangle$	$-\frac{1}{2}\Omega_s - \frac{3}{2}\Omega_I - \frac{3}{4}A$	$ 20\rangle$
10	$ -1/2\rangle$	$ 1/2\rangle$	$-\frac{1}{2}\Omega_s - \frac{1}{2}\Omega_I - \frac{1}{4}A$	$ 21\rangle$
11	$ -1/2\rangle$	$ -1/2\rangle$	$-\frac{1}{2}\Omega_s + \frac{1}{2}\Omega_I + \frac{1}{4}A$	$ 22\rangle$
12	$ -1/2\rangle$	$ -3/2\rangle$	$-\frac{1}{2}\Omega_s + \frac{3}{2}\Omega_I + \frac{3}{4}A$	$ 23\rangle$
13	$ -3/2\rangle$	$ 3/2\rangle$	$-\frac{3}{2}\Omega_s - \frac{3}{2}\Omega_I - \frac{9}{4}A$	$ 30\rangle$
14	$ -3/2\rangle$	$ 1/2\rangle$	$-\frac{3}{2}\Omega_s - \frac{1}{2}\Omega_I - \frac{3}{4}A$	$ 31\rangle$
15	$ -3/2\rangle$	$ -1/2\rangle$	$-\frac{3}{2}\Omega_s + \frac{1}{2}\Omega_I + \frac{3}{4}A$	$ 32\rangle$
16	$ -3/2\rangle$	$ -3/2\rangle$	$-\frac{3}{2}\Omega_s + \frac{3}{2}\Omega_I + \frac{9}{4}A$	$ 33\rangle$



Şekil 4.3. SI (S=3/2, I=3/2) spin sistemi için ENDOR enerji düzeyleri

Her iki kükuartlık bir durum Çizelge 4.2’de verildiği gibi SI ( $S=3/2$ ,  $I=3/2$ ) spin sistemindeki bir enerji seviyesine karşılık gelmektedir. Ayrıca bu enerji seviyeleri dikkate alınarak, iki kükuartlık dolanık durumlar Hadamard ve CNOT kuantum mantık kapıları için önerilen manyetik rezonans seçici puls dizileri kullanılarak elde edilebilir. Burada dolanıklık toplam elektron spini ve çekirdek spini arasındadır. Dolanıklık oluşturulacak  $|00\rangle$ ,  $|01\rangle$ ,  $|02\rangle \dots |33\rangle$  gibi sanki (pseuodo) saf durumların oluşturulması başka kaynaklarda bulunabilir (Sinha vd, 2001; Takui vd, 2016). Spin  $3/2$  için mikrodalga ve radyo frekans pulslarında kullanılan matrisler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 S_E = I_E &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S^{3/2} = I^{3/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S^{1/2} = I^{1/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 S^{-1/2} = I^{-1/2} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S^{-3/2} = I^{-3/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

Hadamard ve CNOT kuantum mantık kapıları için önerilen seçici puls dizileri uygulanarak, iki kükuartlık dolanık durumlardan biri kolayca elde edilebilir. Örneğin;  $|00\rangle$  durumu için dolanık durum oluşturmada, Hadamard ve CNOT kuantum mantık kapılarının puls dizileri Şekil 4.4’de gösterilmiştir. Bu şekilde Hadamard mikrodalga puls dizisi

$$H_{(4)} = \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{[1-5]} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{[1-9]} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{[5-13]} \quad (4.7)$$

ile ifade edilir. Burada üst indisler Çizelge 4.2’de verildiği gibi seviye numaralarını temsil eder. Bu puls dizileri aşağıdaki gibi adım adım uygulanabilir:

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{[1-5]} |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|00\rangle + |10\rangle] \quad (4.8)$$

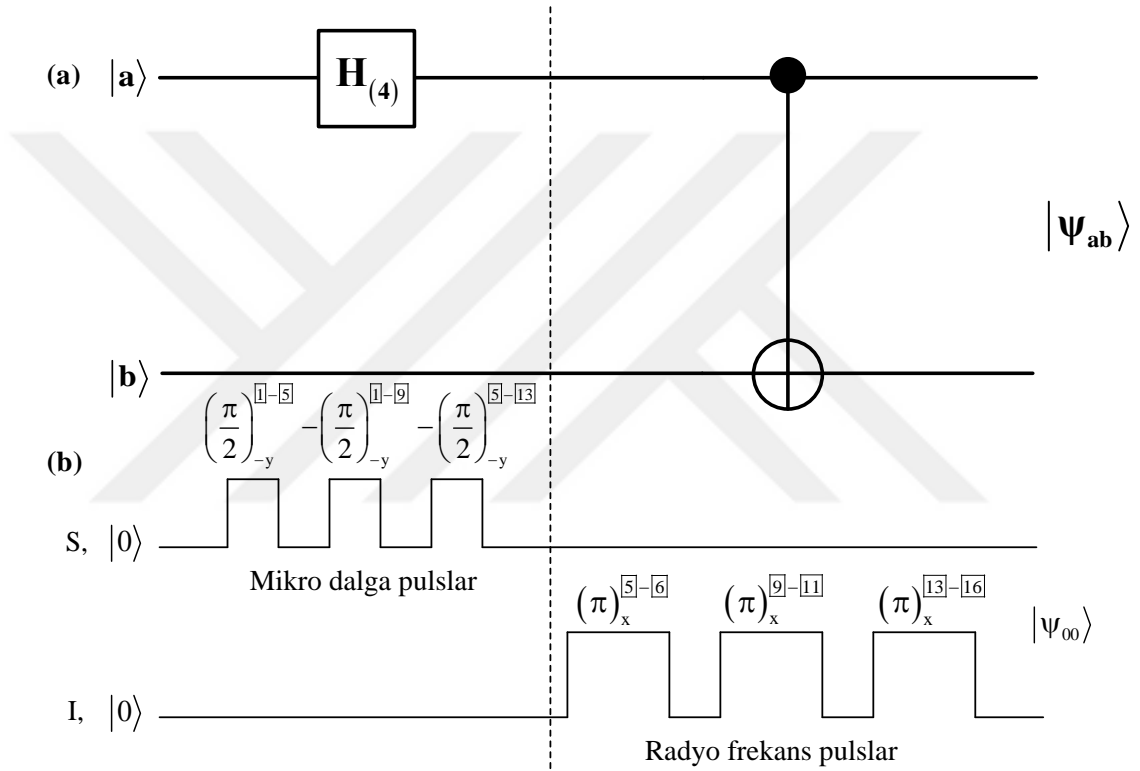
$$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{[1-9]} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |20\rangle \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle \quad (4.9)$$

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{[5]-[13]} \left[ \frac{1}{2}|00\rangle + \frac{1}{2}|20\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \right] = \frac{1}{2}[|00\rangle + |10\rangle + |20\rangle + |30\rangle] \quad (4.10)$$

Sonuç olarak Hadamard puls dizisi  $|00\rangle$  durumuna uygulandığında;

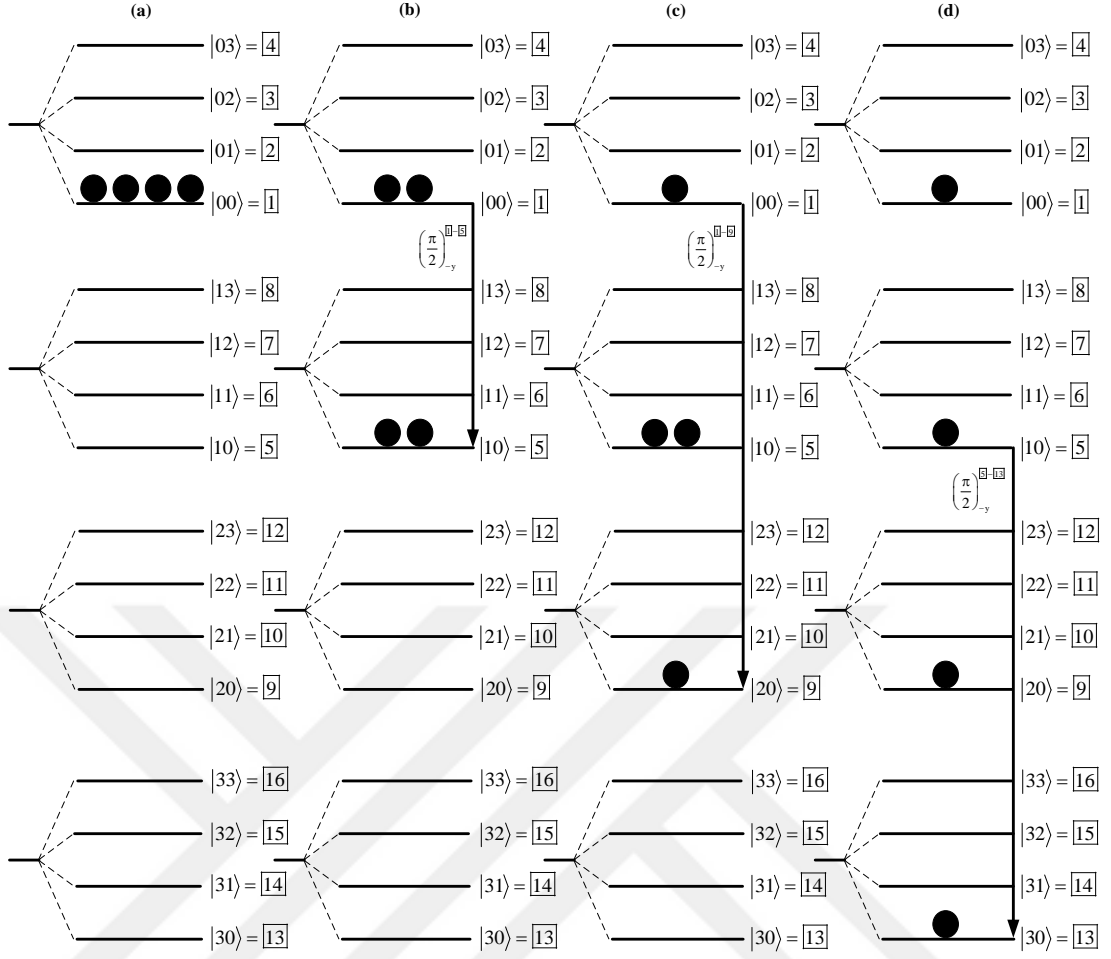
$$H_{(4)}|00\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |10\rangle + |20\rangle + |30\rangle) \quad (4.11)$$

elde edilir.



Şekil 4.4. a) Dolanık durumları oluşturmak için kuantum devresi ve b)  $|00\rangle$  durumu için bu devreyle ilgili puls dizileri

Şekil 4.5’de, denklem 4.7’de verilen Hadamard mantık kapısını oluşturan seçici pulslerin uygulanmasıyla ortaya çıkan enerji düzeylerindeki spin yoğunluğu değişiminin benzetimi verilmiştir.



Şekil 4.5. a) Hadamard seçici pulslarını uygulamadan önceki durum ve sırasıyla b)  $\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{|1-5|}$ , c)  $\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{|1-9|}$ , d)  $\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{|5-13|}$  seçici pulslarının uygulanmasıyla oluşan enerji seviyelerindeki spin yoğunluğu değişimleri

Daha sonra  $CNOT_a(4)$  kuantum mantık kapısı olarak, denklem 4.12’de elde edilen süperpozisyon durumlarına uygulanacak radyo frekans puls dizileri aşağıdaki gibidir.

$$CNOT_a(4) = (\pi)_x^{|5-6|} - (\pi)_x^{|9-11|} - (\pi)_x^{|13-16|} \quad (4.12)$$

Böylece,  $|00\rangle$  için dolanık durum aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$(\pi)_x^{|5-6|} \left\{ \frac{1}{2} [ |00\rangle + |10\rangle + |20\rangle + |30\rangle ] \right\} = \frac{1}{2} [ |00\rangle + |11\rangle + |20\rangle + |30\rangle ] \quad (4.13)$$

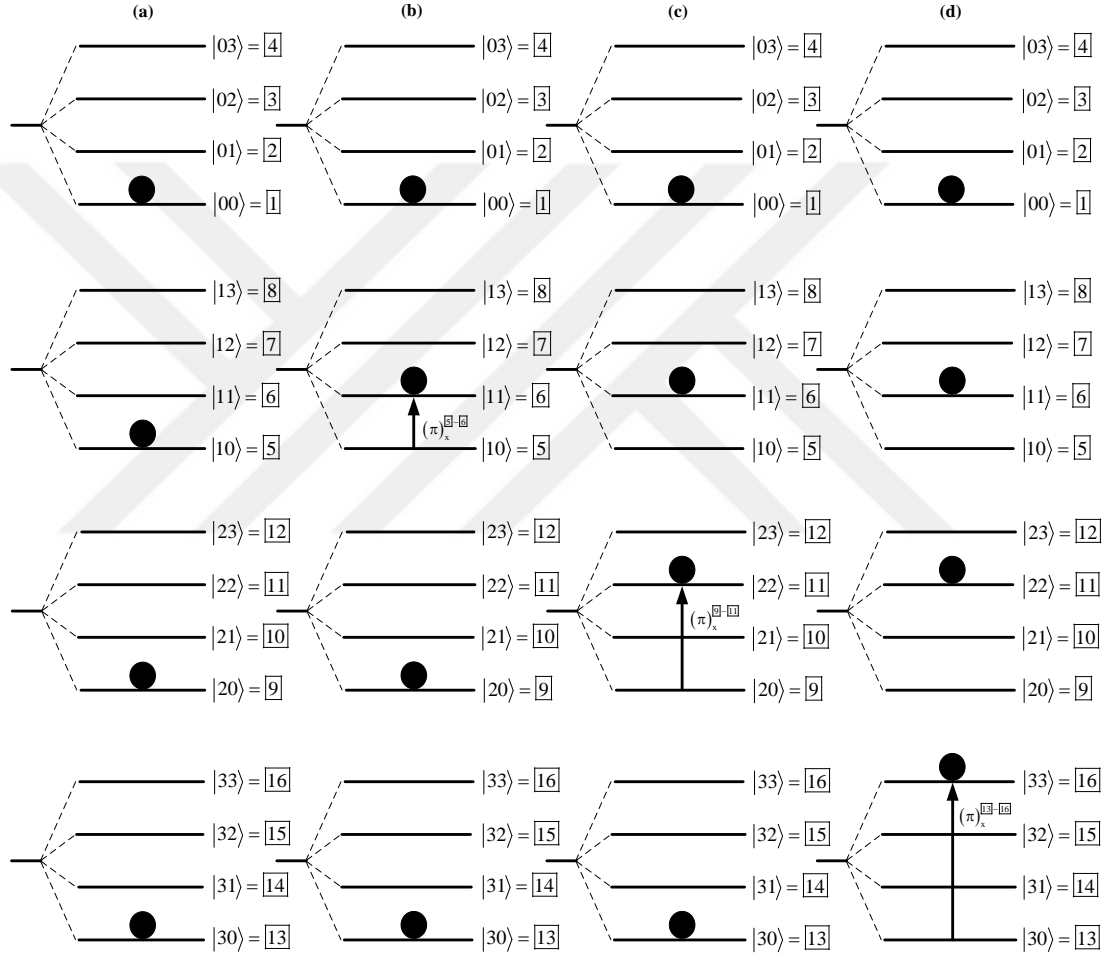
$$(\pi)_x^{|9-11|} \left\{ \frac{1}{2} [ |00\rangle + |11\rangle + |20\rangle + |30\rangle ] \right\} = \frac{1}{2} [ |00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |30\rangle ] \quad (4.14)$$



$$(\pi)_x^{\boxed{13}-\boxed{16}} \left\{ \frac{1}{2} [|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |30\rangle] \right\} = \frac{1}{2} [|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |33\rangle] \quad (4.15)$$

Denklem 4.11'deki  $|00\rangle$  süperpozisyon durumuna  $\text{CNOT}_a(4)$  radyo frekans puls dizisinin uygulanmasından sonra elde edilen eşitlik aşağıdaki gibidir.

$$|\Psi_{00}\rangle = \text{CNOT}_a(4)(H_{(4)}|00\rangle) = \frac{1}{2} (|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |33\rangle) \quad (4.16)$$



Şekil 4.6. a) Hadamard kapısı uygulandıktan sonra sistemin süperpozisyon durumu ve sırasıyla b)  $(\pi)_x^{\boxed{5}-\boxed{6}}$ , c)  $(\pi)_x^{\boxed{9}-\boxed{11}}$ , d)  $(\pi)_x^{\boxed{13}-\boxed{16}}$  seçici pulslarının uygulanmasıyla oluşan enerji seviyelerindeki spin yoğunluğu değişimleri

Şekil 4.6. a'da,  $|00\rangle$  durumuna Hadamard puls dizisi uygulandıktan sonra sistemin süperpozisyon durumunun spin yoğunluğu gösterilmiştir. Şekil 4.6. b,c ve d'de ise sırasıyla  $(\pi)_x^{[5]-[6]}$ ,  $(\pi)_x^{[9]-[11]}$  ve  $(\pi)_x^{[13]-[16]}$  seçici radyo frekans pulsarı uygulanmıştır. Bu şekilde iki kükuartlık  $|00\rangle$  durumuna kuantum dolanıklık devresinin uygulanmasıyla  $|00\rangle$ 'ın dolanık durumuna ulaşılmıştır.

İki kükuartlık diğer tüm dolanık durumlarda özel Hadamard ve  $CNOT_a(4)$  puls dizileri kullanılarak oluşturulabilir. Çizelge 4.3'de önerilen puls dizilerini kullanarak, benzer işlemler diğer iki kükuartlık dolanık durumların oluşturulması içinde uygulanabilir.



Çizelge 4.3. İki kükuartlık dolanık durumları oluşturmak için uygun  $H_{(4)}$  ve  $CNOT_a(4)$  puls dizileri

$ ab\rangle$	Uygun $H_{(4)}$ mikrodalga puls dizisi	Uygun $CNOT_a(4)$ radyo frekans puls dizisi	$ ab\rangle$	Uygun $H_{(4)}$ mikrodalga puls dizisi	Uygun $CNOT_a(4)$ radyo frekans puls dizisi
$ 00\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{1-5} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{1-9} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{5-13}$	$(\pi)_x^{5-6} - (\pi)_x^{9-11} - (\pi)_x^{13-16}$	$ 20\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{1-9} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{1-5} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{9-13}$	$(\pi)_x^{5-6} - (\pi)_x^{9-11} - (\pi)_x^{13-16}$
$ 01\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{2-6} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{2-10} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{6-14}$	$(\pi)_x^{6-7} - (\pi)_x^{10-12} - (\pi)_x^{13-14}$	$ 21\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{2-10} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{2-6} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{10-14}$	$(\pi)_x^{6-7} - (\pi)_x^{10-12} - (\pi)_x^{13-14}$
$ 02\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{3-7} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{3-11} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{7-15}$	$(\pi)_x^{7-8} - (\pi)_x^{9-11} - (\pi)_x^{14-15}$	$ 22\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{7-11} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{3-7} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{11-15}$	$(\pi)_x^{7-8} - (\pi)_x^{9-11} - (\pi)_x^{14-15}$
$ 03\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{4-8} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{4-12} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{8-16}$	$(\pi)_x^{5-8} - (\pi)_x^{10-12} - (\pi)_x^{15-16}$	$ 23\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{8-12} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{4-8} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{12-16}$	$(\pi)_x^{5-8} - (\pi)_x^{10-12} - (\pi)_x^{15-16}$
$ 10\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{1-5} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{1-9} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{5-13} \text{ (R)}$	$(\pi)_x^{5-6} - (\pi)_x^{9-11} - (\pi)_x^{13-16}$	$ 30\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{5-13} \text{ (R)} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{9-13} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{1-5}$	$(\pi)_x^{5-6} - (\pi)_x^{9-11} - (\pi)_x^{13-16}$
$ 11\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{2-6} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{2-10} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{6-14} \text{ (R)}$	$(\pi)_x^{6-7} - (\pi)_x^{10-12} - (\pi)_x^{13-14}$	$ 31\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{6-14} \text{ (R)} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{10-14} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{2-6}$	$(\pi)_x^{6-7} - (\pi)_x^{10-12} - (\pi)_x^{13-14}$
$ 12\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{3-7} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{3-11} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{7-15} \text{ (R)}$	$(\pi)_x^{7-8} - (\pi)_x^{9-11} - (\pi)_x^{14-15}$	$ 32\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{7-15} \text{ (R)} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{11-15} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{3-7}$	$(\pi)_x^{7-8} - (\pi)_x^{9-11} - (\pi)_x^{14-15}$
$ 13\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{4-8} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{4-12} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{8-16} \text{ (R)}$	$(\pi)_x^{5-8} - (\pi)_x^{10-12} - (\pi)_x^{15-16}$	$ 33\rangle$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{8-16} \text{ (R)} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{12-16} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{4-8}$	$(\pi)_x^{5-8} - (\pi)_x^{10-12} - (\pi)_x^{15-16}$

Çizelge 4.4. SI(3/2, 3/2) spin sistemindeki mikrodalga seçici pulsar ve matris temsilleri

Mikrodalga seçici puls	Matris temsili	Mikrodalga seçici puls	Matris temsili
$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\mp y}^{1-5}$	$P_{\mp y}^{12} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{3/2} + S_E \otimes (I_E - I^{3/2})$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{7-15}$	$P_{-y}^{24} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{1/2} + S_E \otimes (I_E - I^{1/2})$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\mp y}^{2-6}$	$P_{\mp y}^{12} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{1/2} + S_E \otimes (I_E - I^{1/2})$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{8-16}$	$P_{-y}^{24} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{-3/2} + S_E \otimes (I_E - I^{-3/2})$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\mp y}^{3-7}$	$P_{\mp y}^{12} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{-1/2} + S_E \otimes (I_E - I^{-1/2})$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\mp y}^{9-13}$	$P_{\mp y}^{34} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{3/2} + S_E \otimes (I_E - I^{3/2})$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\mp y}^{4-8}$	$P_{\mp y}^{12} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{-3/2} + S_E \otimes (I_E - I^{-3/2})$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\mp y}^{10-14}$	$P_{\mp y}^{34} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{1/2} + S_E \otimes (I_E - I^{1/2})$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\mp y}^{1-9}$	$P_{\mp y}^{13} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{3/2} + S_E \otimes (I_E - I^{3/2})$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\mp y}^{11-15}$	$P_{\mp y}^{34} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{-1/2} + S_E \otimes (I_E - I^{-1/2})$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\mp y}^{2-10}$	$P_{\mp y}^{13} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{1/2} + S_E \otimes (I_E - I^{1/2})$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\mp y}^{12-16}$	$P_{\mp y}^{34} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{-3/2} + S_E \otimes (I_E - I^{-3/2})$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\mp y}^{3-11}$	$P_{\mp y}^{13} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{-1/2} + S_E \otimes (I_E - I^{-1/2})$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{5-13} (R)$	$R_y^{24} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{3/2} + S_E \otimes (I_E - I^{3/2})$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{\mp y}^{4-12}$	$P_{\mp y}^{13} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{-3/2} + S_E \otimes (I_E - I^{-3/2})$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{6-14} (R)$	$R_y^{24} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{1/2} + S_E \otimes (I_E - I^{1/2})$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{5-13}$	$P_{-y}^{24} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{3/2} + S_E \otimes (I_E - I^{3/2})$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{7-15} (R)$	$R_y^{24} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{-1/2} + S_E \otimes (I_E - I^{-1/2})$
$\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{6-14}$	$P_{-y}^{24} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{1/2} + S_E \otimes (I_E - I^{1/2})$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)_y^{8-16} (R)$	$R_y^{24} \left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes I^{-3/2} + S_E \otimes (I_E - I^{-3/2})$

SI spin sisteminde izinli 20 tane mikrodalga (EPR) ve izinli 10 tane radyo frekans (NMR) geçişi vardır. Mikrodalga geçişleri için elde edilen seçici pulslar Çizelge 4.4'de verilirken, radyo frekansı geçişini yaptıran pulslar Çizelge 4.5'de verilmiştir.

Çizelge 4.5. SI(3/2, 3/2) spin sistemindeki radyo frekans seçici pulslar ve matris temsilleri

Radyo frekans seçici puls	Matris temsili
$(\pi)_x^{\boxed{5}-\boxed{6}}$	$S^{1/2} \otimes P_x^{12}(\pi) + (S_E - S^{1/2}) \otimes I_E$
$(\pi)_x^{\boxed{6}-\boxed{7}}$	$S^{1/2} \otimes P_x^{23}(\pi) + (S_E - S^{1/2}) \otimes I_E$
$(\pi)_x^{\boxed{7}-\boxed{8}}$	$S^{1/2} \otimes P_x^{34}(\pi) + (S_E - S^{1/2}) \otimes I_E$
$(\pi)_x^{\boxed{5}-\boxed{8}}$	$S^{1/2} \otimes P_x^{14}(\pi) + (S_E - S^{1/2}) \otimes I_E$
$(\pi)_x^{\boxed{9}-\boxed{11}}$	$S^{-1/2} \otimes P_x^{13}(\pi) + (S_E - S^{-1/2}) \otimes I_E$
$(\pi)_x^{\boxed{10}-\boxed{12}}$	$S^{-1/2} \otimes P_x^{24}(\pi) + (S_E - S^{-1/2}) \otimes I_E$
$(\pi)_x^{\boxed{13}-\boxed{14}}$	$S^{-3/2} \otimes P_x^{12}(\pi) + (S_E - S^{-3/2}) \otimes I_E$
$(\pi)_x^{\boxed{13}-\boxed{16}}$	$S^{-3/2} \otimes P_x^{14}(\pi) + (S_E - S^{-3/2}) \otimes I_E$
$(\pi)_x^{\boxed{14}-\boxed{15}}$	$S^{-3/2} \otimes P_x^{23}(\pi) + (S_E - S^{-3/2}) \otimes I_E$
$(\pi)_x^{\boxed{15}-\boxed{16}}$	$S^{-3/2} \otimes P_x^{34}(\pi) + (S_E - S^{-3/2}) \otimes I_E$

#### 4.2.3. İki Kükuartlık Dolanık Durumlar Arasındaki Dönüşümler

İki küditlik dolanık bir durum farklı bir dolanık duruma dönüştürülebilir. Bunun için dönüşüm operatörlerinin tanımlanması gerekmektedir. Bu çalışmada iki küditlik dolanık bir durumun diğer bir dolanık duruma dönüştürülmesi için aşağıdaki gibi genelleştirilmiş bir dönüşüm denklemi önereceğiz.

$$(U_{nm} \otimes I_d) |\Psi_{ab}\rangle = e^{i\frac{2\pi}{d}ma} |\Psi_{(a\oplus n)(b\oplus m)}\rangle, \text{ mod } d \quad (4.17)$$

Bu ifade de  $U_{nm}$ , Weyl operatörlerini temsil ederken,  $\oplus$  işlemi ise  $d$  seviyeli durum için mod  $d$ 'ye göre toplama işlemidir.

İki kükuartlık dolanık durumlar arasındaki dönüşüm denklemlerini elde etmek için genelleştirilmiş denklemde  $d=4$  yazarak Weyl operatörleri yardımıyla

$U_{nm} \otimes I_4$  şeklinde dönüşüm operatörlerini oluşturulabiliriz. Örneğin  $|\psi_{00}\rangle$  kuantum dolanık durumuna  $U_{01} \otimes I_4$  şeklinde bir dönüşüm operatörü uygulandığında  $|\psi_{01}\rangle$  kuantum dolanık durumuna dönüşecektir. Bu durumun uygulanmasını matris temsilleriyle aşağıdaki gibi verebiliriz.

$$(U_{01} \otimes I_4)|\psi_{00}\rangle = (U_{01} \otimes I_4) \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |33\rangle) \quad (4.18)$$

$$= \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$



Çizelge 4.6. İki kükuartlık dolanık durumların dönüşüm operatörleriyle birbirlerine dönüşümleri

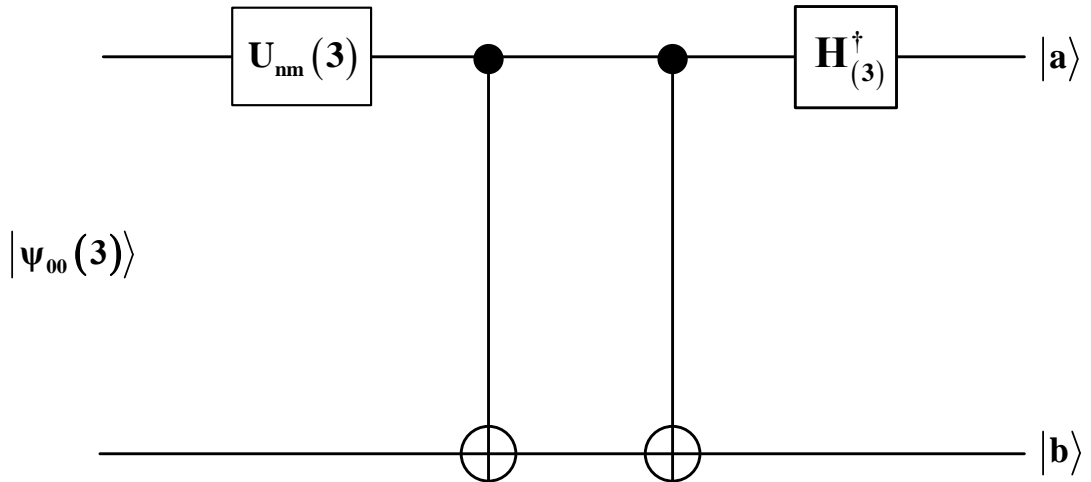
$(U_{nm} \otimes I_4)  \Psi_{ab}\rangle$	$ \Psi_{00}\rangle$	$ \Psi_{01}\rangle$	$ \Psi_{02}\rangle$	$ \Psi_{03}\rangle$	$\dots$	$ \Psi_{33}\rangle$
$U_{00} \otimes I_4$	$ \Psi_{00}\rangle$	$ \Psi_{01}\rangle$	$ \Psi_{02}\rangle$	$ \Psi_{03}\rangle$	$\dots$	$ \Psi_{33}\rangle$
$U_{01} \otimes I_4$	$ \Psi_{01}\rangle$	$ \Psi_{02}\rangle$	$ \Psi_{03}\rangle$	$ \Psi_{00}\rangle$	$\dots$	$-i \Psi_{30}\rangle$
$U_{02} \otimes I_4$	$ \Psi_{02}\rangle$	$ \Psi_{03}\rangle$	$ \Psi_{00}\rangle$	$ \Psi_{01}\rangle$	$\dots$	$- \Psi_{01}\rangle$
$U_{03} \otimes I_4$	$ \Psi_{03}\rangle$	$ \Psi_{00}\rangle$	$ \Psi_{01}\rangle$	$ \Psi_{02}\rangle$	$\dots$	$i \Psi_{32}\rangle$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$U_{33} \otimes I_4$	$ \Psi_{33}\rangle$	$ \Psi_{30}\rangle$	$ \Psi_{31}\rangle$	$ \Psi_{03}\rangle$	$\dots$	$i \Psi_{22}\rangle$

### 4.3. İki Küditlik Durumlar İçin Aşırı Yoğun Kodlamannın Oluşturulması

Bu bölümde iki kütritlik, iki kükuartlık ve iki küditlik dolanık durumlar kullanılarak aşırı yoğun kodlama mantık devreleri oluşturularak hesaplamaları yapılacaktır.

#### 4.3.1. İki Kütritlik Durumlar İçin Aşırı Yoğun Kodlama

Dolanık bir durum üzerine aşırı yoğun kodlama mantık devresi oluşturularak uygulanabilir. İki kütritlik bir sistem olarak SI (S=1, I=1) spin sistemi düşünüldüğünde aşırı yoğun kodlama mantık devresi Şekil 4.7'deki gibi verilebilir.



Şekil 4.7. İki kütritlik durumlar için aşırı yoğun kodlama mantık devresi



Bu devrede A göndericisi ile B alıcısının arasında paylaşılan dolanık durumun

$$|\Psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle) \quad (4.20)$$

olduğunu düşünelim. A göndericisi göndermek istediği iki kütritlik duruma göre  $U_{nm}(3)$  dönüşüm operatörünü uygulayarak kodlama işlemini yapar. Daha sonra B alıcısı önce iki tane  $CNOT_a(3)$  mantık kapısını ardından bir tane de Hadamard mantık kapısını uygulayarak kodlamayı çözer. Bu işlemlerin genel denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$|ab\rangle = \left(H_{(3)}^\dagger \otimes I_3\right) \left\{ CNOT_a^2(3) \left[ \left( U_{nm}(3) \otimes I_3 \right) |\Psi_{00}(3)\rangle \right] \right\} \quad (4.21)$$

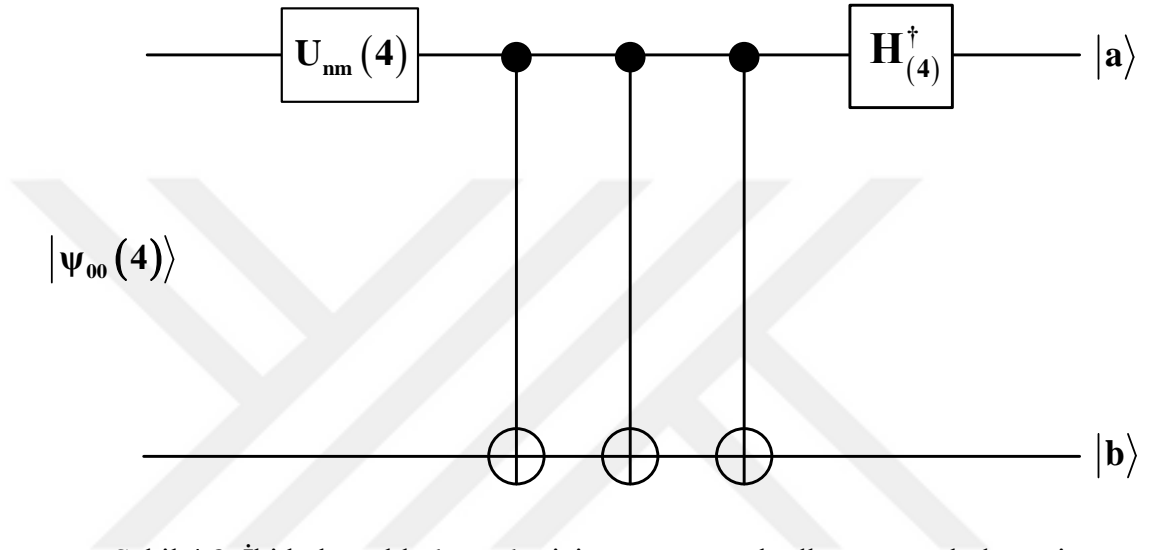
Burada  $CNOT_a^2(3) = CNOT_a(3)CNOT_a(3)$ 'dir. Denklem 4.21 kullanılarak gönderilmek istenen iki kütritlik tüm durumlar için yapılan işlemler ve sonuçları Çizelge 4.7'de verilmiştir. Burada  $c = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ,  $c^2 = e^{-i\frac{4\pi}{3}} = c^*$ 'dir.

Çizelge 4.7. Kütritlerde dolanık durumlara aşırı yoğun kodlama uygulanması

$U_{nm}(3)$	$(U_{nm}(3) \otimes I_3)  \Psi_{00}(3)\rangle =  \Psi_{nm}(3)\rangle$	Çıkış, $ ab\rangle$
$U_{00}$	$ \Psi_{00}(3)\rangle = ( 00\rangle +  11\rangle +  22\rangle) / \sqrt{3}$	$ 00\rangle$
$U_{01}$	$ \Psi_{01}(3)\rangle = ( 01\rangle +  12\rangle +  20\rangle) / \sqrt{3}$	$ 01\rangle$
$U_{02}$	$ \Psi_{02}(3)\rangle = ( 02\rangle +  10\rangle +  21\rangle) / \sqrt{3}$	$ 02\rangle$
$U_{10}$	$ \Psi_{10}(3)\rangle = ( 00\rangle + c 11\rangle + c^2 22\rangle) / \sqrt{3}$	$ 10\rangle$
$U_{11}$	$ \Psi_{11}(3)\rangle = ( 01\rangle + c 12\rangle + c^2 20\rangle) / \sqrt{3}$	$ 11\rangle$
$U_{12}$	$ \Psi_{12}(3)\rangle = ( 02\rangle + c 10\rangle + c^2 21\rangle) / \sqrt{3}$	$ 12\rangle$
$U_{20}$	$ \Psi_{20}(3)\rangle = ( 00\rangle + c^2 11\rangle + c 22\rangle) / \sqrt{3}$	$ 20\rangle$
$U_{21}$	$ \Psi_{21}(3)\rangle = ( 01\rangle + c^2 12\rangle + c 20\rangle) / \sqrt{3}$	$ 21\rangle$
$U_{22}$	$ \Psi_{22}(3)\rangle = ( 02\rangle + c^2 10\rangle + c 21\rangle) / \sqrt{3}$	$ 22\rangle$

### 4.3.2. İki Kükuartlık Durumlar İçin Aşırı Yoğun Kodlama

Kütrit sistem için önerilen aşırı yoğun kodlama mantık devresinden yola çıkarak iki kükuartlık sistemler içinde aşırı yoğun kodlama mantık devreleri önerilebilir. Bölüm 4.2.2’de iki kükuartlık dolanık durum devresi oluşturularak hesaplamaları yapılmıştı. SI ( $S=3/2$ ,  $I=3/2$ ) spin sistemi iki kükuartlık bir durumu ifade ettiğine göre aşırı yoğun kodlama mantık devresi Şekil 4.8’deki gibi oluşturulur.



Şekil 4.8. İki kükuartlık durumlar için aşırı yoğun kodlama mantık devresi

Bu devrede A göndericisi ile B alıcısının arasında paylaşılan dolanık durumun

$$|\Psi_{00}\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |33\rangle) \quad (4.22)$$

olduğunu düşünelim. A göndericisi göndermek istediği iki kükuartlık duruma göre  $U_{nm}(4)$  dönüşüm operatörünü uygulayarak kodlama işlemini yapar. Daha sonra B alıcısı önce üç tane  $CNOT_a(4)$  mantık kapısı kullanırken, bir tane de Hadamard mantık kapısı kullanmıştır. İki kükuartlık sistem için geçerli olan aşırı yoğun kodlama mantık devresine ait denklemler verilmiştir.

$$|ab\rangle = \left( H_{(4)}^\dagger \otimes I_4 \right) \left\{ CNOT_a^3(4) \left[ \left( U_{nm}(4) \otimes I_4 \right) |\Psi_{00}(4)\rangle \right] \right\} \quad (4.23)$$

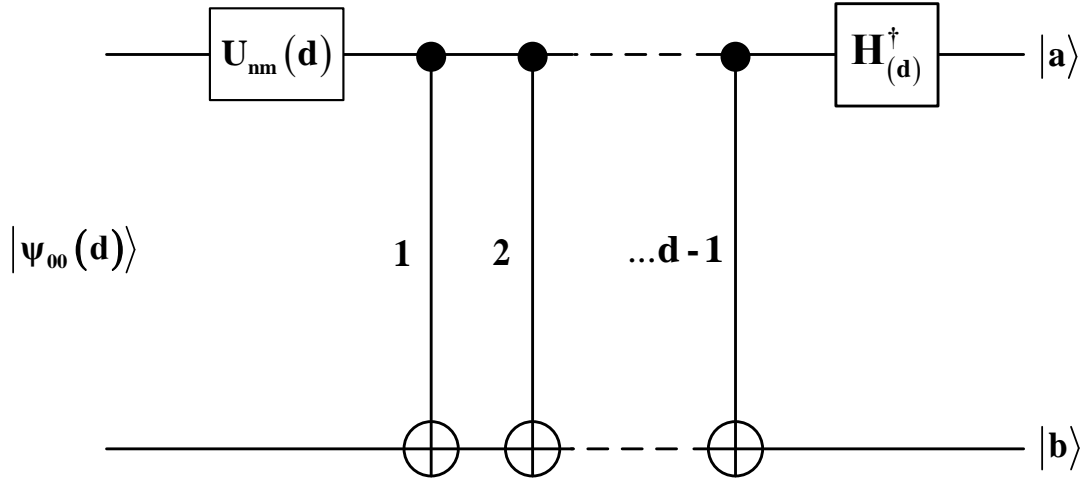
Burada  $CNOT_a^3(4) = CNOT_a(4)CNOT_a(4)CNOT_a(4)$ ’dir. Bu denklem kullanılarak tüm dolanık durumlardan kükuart değerlere Çizelge 4.8’deki gibi ulaşılır.

Çizelge 4.8. Kükuartlarda dolanık durumlara aşırı yoğun kodlama uygulanması

$U_{nm}(4)$	$(U_{nm}(4) \otimes I_4)  \Psi_{00}(4)\rangle =  \Psi_{nm}(4)\rangle$	Çıkış, $ ab\rangle$
$U_{00}$	$ \Psi_{00}(4)\rangle = ( 00\rangle +  11\rangle +  22\rangle +  33\rangle) / 2$	$ 00\rangle$
$U_{01}$	$ \Psi_{01}(4)\rangle = ( 01\rangle +  12\rangle +  23\rangle +  30\rangle) / 2$	$ 01\rangle$
$U_{02}$	$ \Psi_{02}(4)\rangle = ( 02\rangle +  13\rangle +  20\rangle +  31\rangle) / 2$	$ 02\rangle$
$U_{03}$	$ \Psi_{03}(4)\rangle = ( 03\rangle +  10\rangle +  21\rangle +  32\rangle) / 2$	$ 03\rangle$
$U_{10}$	$ \Psi_{10}(4)\rangle = ( 00\rangle + i 11\rangle -  22\rangle - i 33\rangle) / 2$	$ 10\rangle$
$U_{11}$	$ \Psi_{11}(4)\rangle = ( 01\rangle + i 12\rangle -  23\rangle - i 30\rangle) / 2$	$ 11\rangle$
$U_{12}$	$ \Psi_{12}(4)\rangle = ( 02\rangle + i 13\rangle -  20\rangle - i 31\rangle) / 2$	$ 12\rangle$
$U_{13}$	$ \Psi_{13}(4)\rangle = ( 03\rangle + i 10\rangle -  21\rangle - i 32\rangle) / 2$	$ 13\rangle$
$U_{20}$	$ \Psi_{20}(4)\rangle = ( 00\rangle -  11\rangle +  22\rangle -  33\rangle) / 2$	$ 20\rangle$
$U_{21}$	$ \Psi_{21}(4)\rangle = ( 01\rangle -  12\rangle +  23\rangle -  30\rangle) / 2$	$ 21\rangle$
$U_{22}$	$ \Psi_{22}(4)\rangle = ( 02\rangle -  13\rangle +  20\rangle -  31\rangle) / 2$	$ 22\rangle$
$U_{23}$	$ \Psi_{23}(4)\rangle = ( 03\rangle -  10\rangle +  21\rangle -  32\rangle) / 2$	$ 23\rangle$
$U_{30}$	$ \Psi_{30}(4)\rangle = ( 00\rangle - i 11\rangle -  22\rangle + i 33\rangle) / 2$	$ 30\rangle$
$U_{31}$	$ \Psi_{31}(4)\rangle = ( 01\rangle - i 12\rangle -  23\rangle + i 30\rangle) / 2$	$ 31\rangle$
$U_{32}$	$ \Psi_{32}(4)\rangle = ( 02\rangle - i 13\rangle -  20\rangle + i 31\rangle) / 2$	$ 32\rangle$
$U_{33}$	$ \Psi_{33}(4)\rangle = ( 03\rangle - i 10\rangle -  21\rangle + i 32\rangle) / 2$	$ 33\rangle$

### 4.3.3. İki Küditlik Durumlar İçin Aşırı Yoğun Kodlama

İki küditlik ve iki kükuartlık aşırı yoğun kodlama devreleri düşünülerek iki küditlik durumlar için daha genel bir aşırı yoğun kodlama mantık devresi önerilebilir. Bölüm 4.2.3'de iki küditlik sistemler için dolanık durumlar oluşturularak hesaplamaları yapılmıştı. İki küditlik bir sistem için ifade edilen bu dolanık durumlar üzerine uygulanacak aşırı yoğun kodlama mantık devresi Şekil 4.9'daki gibi oluşturulur.



Şekil 4.9. İki küditlik durumlar için aşırı yoğun kodlama mantık devresi

Bu devrede A göndericisi ile B alıcısının arasında paylaşılan dolanık durumun

$$|\Psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + \dots + |(d-1)(d-1)\rangle) \quad (4.24)$$

olduğunu düşünelim. A göndericisi göndermek istediği iki küditlik duruma göre  $U_{nm}(d)$  dönüşüm operatörünü uygulayarak kodlama işlemini yapar. Daha sonra B alıcısı önce  $d-1$  tane  $CNOT_a(d)$  mantık kapısı kullanırken, bir tane de Hadamard mantık kapısı kullanmıştır. İki küditlik sistem için geçerli olan aşırı yoğun kodlama mantık devresine ait denklemler verilmiştir.

$$|ab\rangle = \left(H_{(d)}^\dagger \otimes I_d\right) \left\{ CNOT_a^{d-1}(d) \left[ \left( U_{nm}(d) \otimes I_d \right) |\Psi_{00}(d)\rangle \right] \right\} \quad (4.25)$$

Burada  $CNOT_a^{d-1}(d)$  ifadesi  $d-1$  tane  $CNOT_a(d)$ 'nin matris çarpımıdır. Çizelge 4.9'da farklı iki küditlik dolanık durumlar için aşırı yoğun kodlama denklemleri verilmiştir.  $d$ -seviyeli iki küditlik dolanık durumlar için genelleştirilmiş aşırı yoğun kodlama denklemi çizelgenin son satırında belirtilmiştir.

Çizelge 4.9. Farklı iki kütitlik dolanık durumlar için aşırı yoğun kodlama

d	Paylaşılan kütitlik dolanık durum	Aşırı yoğun kodlama çıkış, $ ab\rangle$
2	Bell dolanık durum, $ \beta_{00}\rangle$	$ ab\rangle = (H^\dagger \otimes I_2) \{ \text{CNOT}_a [(U \otimes I_2)  \beta_{00}\rangle] \}$
3	İki kütitlik dolanık durum, $ \Psi_{00}(3)\rangle$	$ ab\rangle = (H_{(3)}^\dagger \otimes I_3) \{ \text{CNOT}_a^2(3) [(U_{nm}(3) \otimes I_3)  \Psi_{00}(3)\rangle] \}$
4	İki kükuartlık dolanık durum $ \Psi_{00}(4)\rangle$	$ ab\rangle = (H_{(4)}^\dagger \otimes I_4) \{ \text{CNOT}_a^3(4) [(U_{nm}(4) \otimes I_4)  \Psi_{00}(4)\rangle] \}$
•	•	•
•	•	•
•	•	•
<b>d</b>	İki kütitlik dolanık durum $ \Psi_{00}(d)\rangle$	$ ab\rangle = (H_{(d)}^\dagger \otimes I_d) \{ \text{CNOT}_a^{d-1}(d) [(U_{nm}(d) \otimes I_d)  \Psi_{00}(d)\rangle] \}$

#### 4.4. Üç Küditlik Durumlar İçin Kuantum Işınlamanın Genelleştirilmesi

Bu bölümde öncelikle kuantum bilgi işlemede üç küditlik durumlar için bir ışınlama devresi oluşturulacaktır. Daha sonra üç kükuartlık durumlar için bir ışınlama devresi önerilecektir. Ardından bu iki devreden yola çıkarak çok değerli (küdit) durumlara kuantum ışınlama devresi önerilerek genelleştirilmesi yapılacaktır.

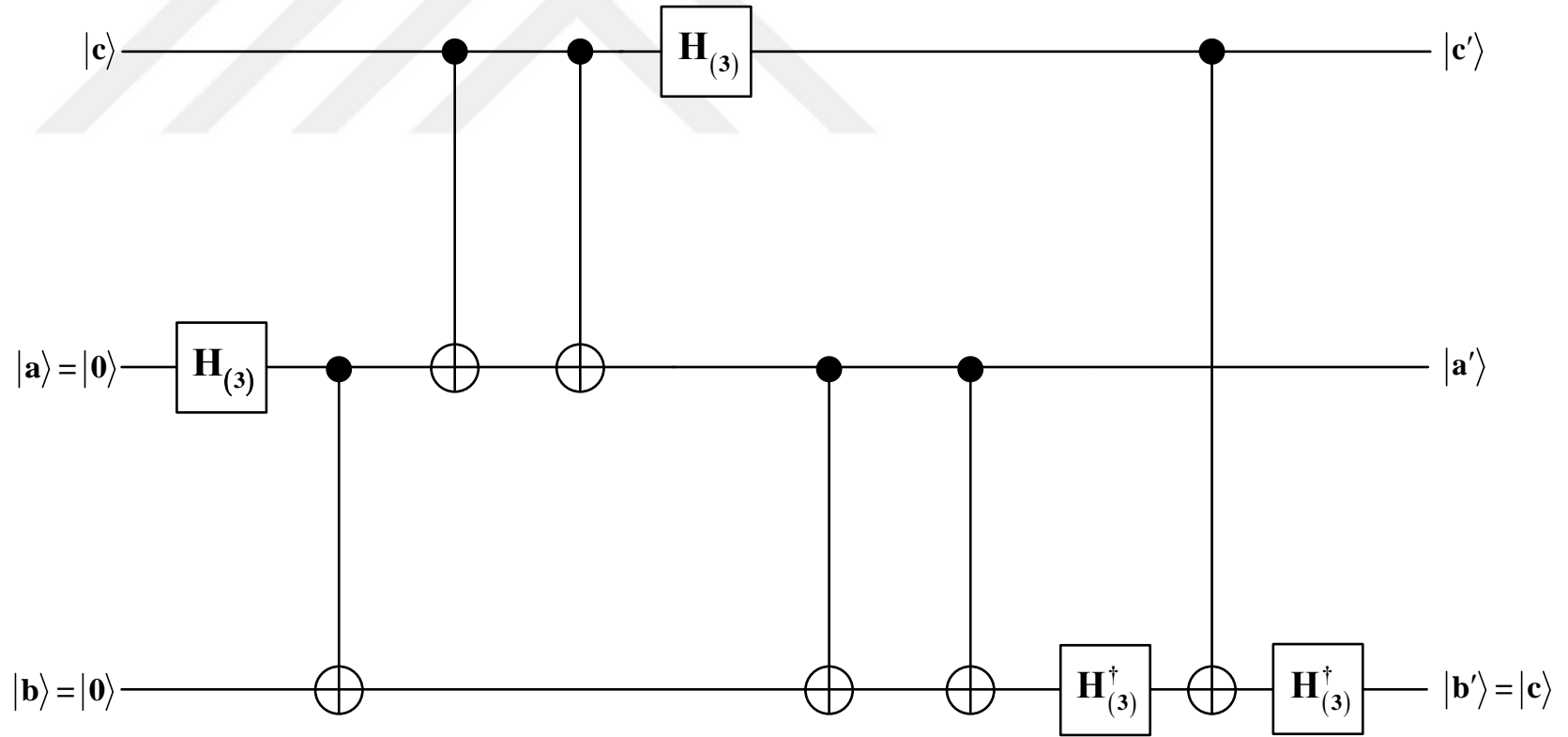
##### 4.4.1. Üç Küditlik Durumlar İçin Kuantum Işınlama Devresi

Spin-1 olan elektron ya da çekirdek için Zeeman seviyelerinin kütrit olarak isimlendirildiği önceki bölümde ifade edilmişti. Ayrıca kütrit durumlar için geçerli olan Hadamard mantık kapısı ve CNOT mantık kapıları da oluşturulmuştu. Bu bölümde bu mantık kapılarını kullanarak iki küditlik durumların yardımıyla bir kütrit durumun ışınlanmasıyla ilgili bir kuantum ışınlama devresi önereceğiz. Bu kuantum ışınlama devresi Şekil 4.10'da verilmiştir. Bu devrede  $|c\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle$  kütrit durumun ışınlanması  $|ab\rangle = |00\rangle$  gibi iki kütrit durumun kullanılmasıyla gerçekleştirilmiştir. Bu kuantum ışınlama devresi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \text{TEL}(3) = & \left( I_3 \otimes I_3 \otimes H_{(3)}^\dagger \right) \text{CNOT}(3)(c, b) \left( I_3 \otimes I_3 \otimes H_{(3)}^\dagger \right) \text{CNOT}(3)(a, b) \\ & \text{CNOT}(3)(a, b) \left( H_{(3)} \otimes I_3 \otimes I_3 \right) \text{CNOT}(3)(c, a) \text{CNOT}(3)(c, a) \\ & \text{CNOT}(3)(a, b) \left( I_3 \otimes H_{(3)} \otimes I_3 \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Ayrıca bu kuantum ışınlama devresinin matris temsili Dirac notasyonunda aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\text{TEL}(3) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} |000\rangle\langle 000| + |001\rangle\langle 100| + |002\rangle\langle 200| \\ + |010\rangle\langle 000| + |011\rangle\langle 100| + |012\rangle\langle 200| \\ + |020\rangle\langle 000| + |021\rangle\langle 100| + |022\rangle\langle 200| \\ + |100\rangle\langle 000| + |101\rangle\langle 100| + |102\rangle\langle 200| \\ + |110\rangle\langle 000| + |111\rangle\langle 100| + |112\rangle\langle 200| \\ + |120\rangle\langle 000| + |121\rangle\langle 100| + |122\rangle\langle 200| \\ + |200\rangle\langle 000| + |201\rangle\langle 100| + |202\rangle\langle 200| \\ + |210\rangle\langle 000| + |211\rangle\langle 100| + |212\rangle\langle 200| \\ + |220\rangle\langle 000| + |221\rangle\langle 100| + |222\rangle\langle 200| \end{bmatrix} \quad (4.27)$$



Şekil 4.10. Üç kütirlilik durumlar için kuantum ışınlama devresi

Kütritler için TEL(3) matrisini  $|cab\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle + \gamma|200\rangle$  durumuna uygularsak,

$$\begin{aligned} \text{TEL}(3)|cab\rangle &= |c'a'b'\rangle \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} \alpha|000\rangle + \beta|001\rangle + \gamma|002\rangle + \alpha|010\rangle + \beta|011\rangle + \gamma|012\rangle \\ \alpha|020\rangle + \beta|021\rangle + \gamma|022\rangle + \alpha|100\rangle + \beta|101\rangle + \gamma|102\rangle \\ \alpha|110\rangle + \beta|111\rangle + \gamma|112\rangle + \alpha|120\rangle + \beta|121\rangle + \gamma|122\rangle \\ \alpha|200\rangle + \beta|201\rangle + \gamma|202\rangle + \alpha|210\rangle + \beta|211\rangle + \gamma|212\rangle \\ \alpha|220\rangle + \beta|221\rangle + \gamma|222\rangle \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.28)$$

biçiminde elde ederiz. Burada,

$$\begin{aligned} |c'a'\rangle &= \frac{1}{3}(|00\rangle + |01\rangle + |02\rangle + |10\rangle + |11\rangle + |12\rangle + |20\rangle + |21\rangle + |22\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle) \frac{1}{\sqrt{3}}(|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle) \end{aligned} \quad (4.29)$$

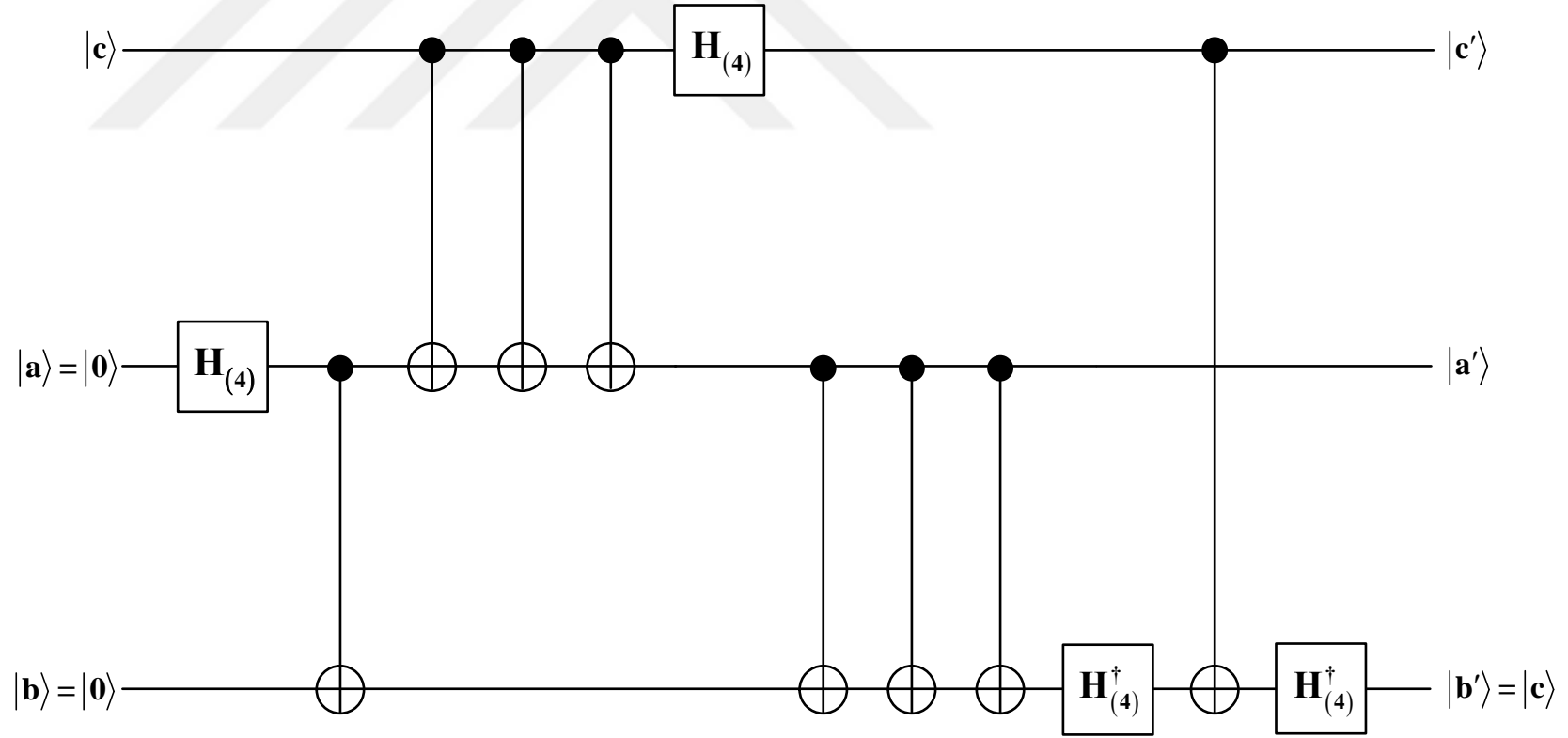
ile verilir. Bu uygulamanın sonucunda  $|b'\rangle = |c\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle$  olacaktır. Böylece  $|c\rangle$  kütrit durumu 1. satırdan 3. satıra ışınlanmış olacaktır.

#### 4.4.2. Üç Kükuartlık Durumlar İçin Kuantum Işınlama Devresi

Spin-3/2 olan elektron ya da çekirdek için Zeeman seviyelerinin kükuart olarak isimlendirildiği önceki bölümde ifade edilmişti. Ayrıca iki kükuartlık durumlar için geçerli olan Hadamard mantık kapısı ve CNOT mantık kapıları da oluşturulmuştu. Bu bölümde bu mantık kapılarını kullanarak iki kükuartlık durumların yardımıyla bir kükuart durumun ışınlanmasıyla ilgili bir kuantum ışınlama devresi önereceğiz. Bu kuantum ışınlama devresi Şekil 4.11'de verilmiştir. Bu devrede  $|c\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle + \delta|3\rangle$  kükuart durumun ışınlanması  $|ab\rangle = |00\rangle$  gibi iki kükuart durumun kullanılmasıyla gerçekleştirilmiştir. Bu kuantum ışınlama devresi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \text{TEL}(4) &= \left( I_4 \otimes I_4 \otimes H_{(4)}^\dagger \right) \text{CNOT}(4)(c, b) \left( I_4 \otimes I_4 \otimes H_{(4)}^\dagger \right) \text{CNOT}^3(4)(a, b) \\ &\quad \left( H_{(4)} \otimes I_4 \otimes I_4 \right) \text{CNOT}^3(4)(c, a) \text{CNOT}(a, b)(4) \left( I_4 \otimes H_{(4)} \otimes I_4 \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$





Şekil 4.11. Üç kükuartlık durumlar için kuantum ışınlama devresi

Kükuartlar için TEL(4) matrisini  $|cab\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle + \gamma|200\rangle + \delta|300\rangle$  durumuna uygularsak,

$$\begin{aligned} \text{TEL}(4)|cab\rangle &= |c'a'b'\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left( \begin{aligned} &\alpha|000\rangle + \beta|001\rangle + \gamma|002\rangle + \delta|003\rangle + \alpha|010\rangle + \beta|011\rangle \\ &+ \gamma|012\rangle + \delta|013\rangle + \alpha|020\rangle + \beta|021\rangle + \gamma|022\rangle + \delta|023\rangle \\ &+ \alpha|030\rangle + \beta|031\rangle + \gamma|032\rangle + \delta|033\rangle + \alpha|100\rangle + \beta|101\rangle \\ &+ \gamma|102\rangle + \delta|103\rangle + \alpha|110\rangle + \beta|111\rangle + \gamma|112\rangle + \delta|113\rangle \\ &+ \alpha|120\rangle + \beta|121\rangle + \gamma|122\rangle + \delta|123\rangle + \alpha|130\rangle + \beta|131\rangle \\ &+ \gamma|132\rangle + \delta|133\rangle + \alpha|200\rangle + \beta|201\rangle + \gamma|202\rangle + \delta|203\rangle \\ &+ \alpha|210\rangle + \beta|211\rangle + \gamma|212\rangle + \delta|213\rangle + \alpha|220\rangle + \beta|221\rangle \\ &+ \gamma|222\rangle + \delta|223\rangle + \alpha|230\rangle + \beta|231\rangle + \gamma|232\rangle + \delta|233\rangle \\ &+ \alpha|300\rangle + \beta|301\rangle + \gamma|302\rangle + \delta|303\rangle + \alpha|310\rangle + \beta|311\rangle \\ &+ \gamma|312\rangle + \delta|313\rangle + \alpha|320\rangle + \beta|321\rangle + \gamma|322\rangle + \delta|323\rangle \\ &+ \alpha|330\rangle + \beta|331\rangle + \gamma|332\rangle + \delta|333\rangle \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

biçiminde elde ederiz. Burada

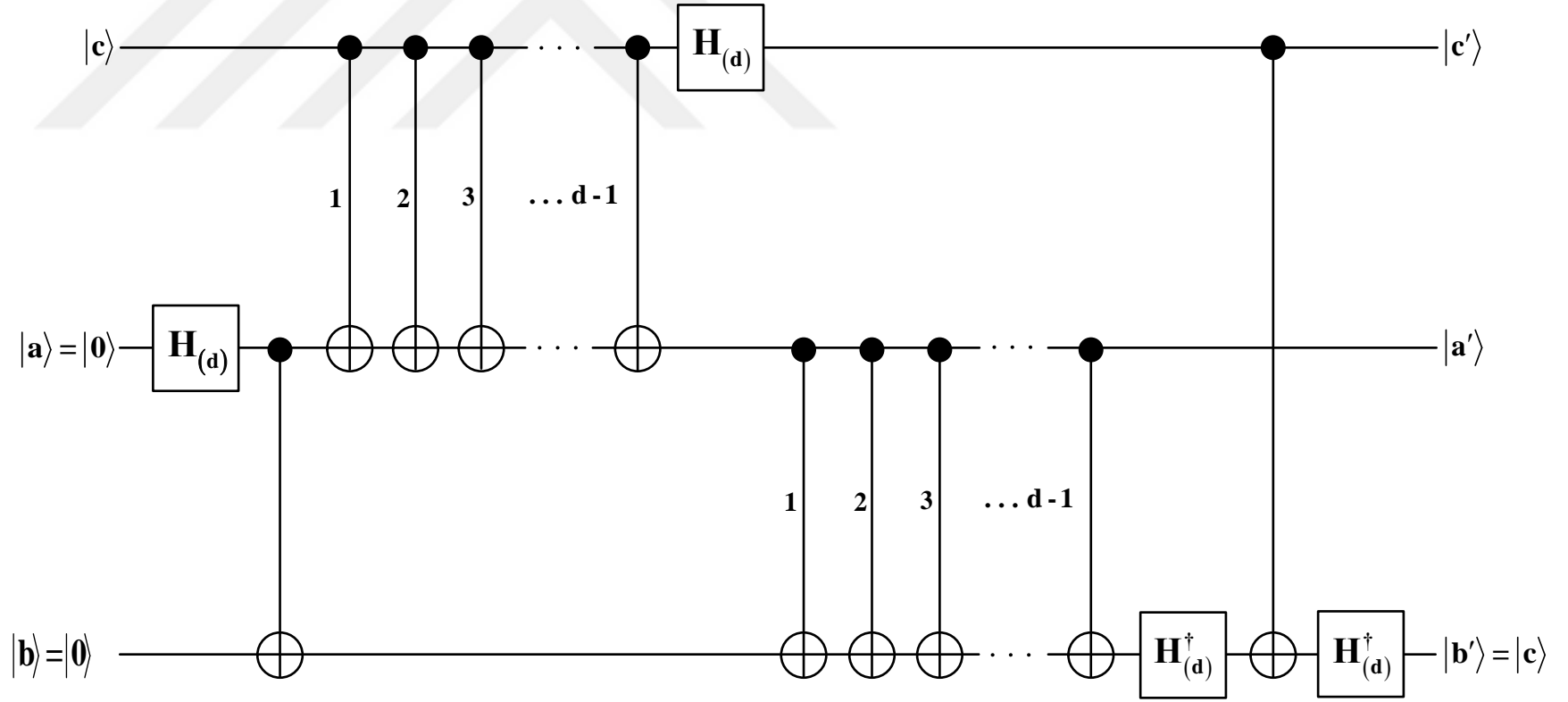
$$\begin{aligned} |c'a'\rangle &= \frac{1}{4} \left( |00\rangle + |01\rangle + |02\rangle + |03\rangle + |10\rangle + |11\rangle + |12\rangle + |13\rangle + |20\rangle \right. \\ &\quad \left. + |21\rangle + |22\rangle + |23\rangle + |30\rangle + |31\rangle + |32\rangle + |33\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle) \frac{1}{2} (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle) \end{aligned} \quad (4.32)$$

ile verilir. Bu uygulamanın sonucunda  $|b'\rangle = |c\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle + \delta|3\rangle$  olacaktır. Böylece  $|c\rangle$  kükuart durumu 1. satırdan 3. satıra ışınlanmış olacaktır.

#### 4.4.3. Üç Küditlik Durumlar İçin Kuantum Işınlama Devresi

Önceki bölümlerde üç küditlik ve üç kükuartlık durumların ışınlanmasıyla ilgili devreler önerilmiş ve bu durumların ışınlanması sağlanmıştır. Bu devrelerden yola çıkarak üç küditlik durumlar için geliştirilmiş bir kuantum ışınlama devresi önerebiliriz. Bu kuantum ışınlama devresi Şekil 4.12'de verilmiştir.

Bu devrede  $|c\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle + \delta|3\rangle + \dots + \omega|d-1\rangle$  küdit durumun ışınlanması  $|ab\rangle = |00\rangle$  gibi iki küdit durumun kullanılmasıyla gerçekleştirilmiştir.



Şekil 4.12. Üç küditlik (çok değerli) durumlar için kuantum ışınlama devresi

Bu kuantum ışınlama devresi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} \text{TEL}(D) = & \left( I_d \otimes I_d \otimes H_{(d)}^\dagger \right) \text{CNOT}(d)(c, b) \left( I_d \otimes I_d \otimes H_{(d)} \right) \text{CNOT}^{d-1}(d)(a, b) \\ & \left( H_{(d)} \otimes I_d \otimes I_d \right) \text{CNOT}^{d-1}(d)(c, a) \text{CNOT}(a, b)(d) \left( I_d \otimes H_{(d)} \otimes I_d \right) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Küditler için  $\text{TEL}(D)$  matrisini,

$$|cab\rangle = \alpha|000\rangle + \beta|100\rangle + \gamma|200\rangle + \delta|300\rangle + \dots + \omega|(d-1)00\rangle \text{ durumuna uygularsak,}$$

$$\text{TEL}(D)|cab\rangle = |c'a'b'\rangle \quad (4.34)$$

biçiminde elde ederiz. Burada

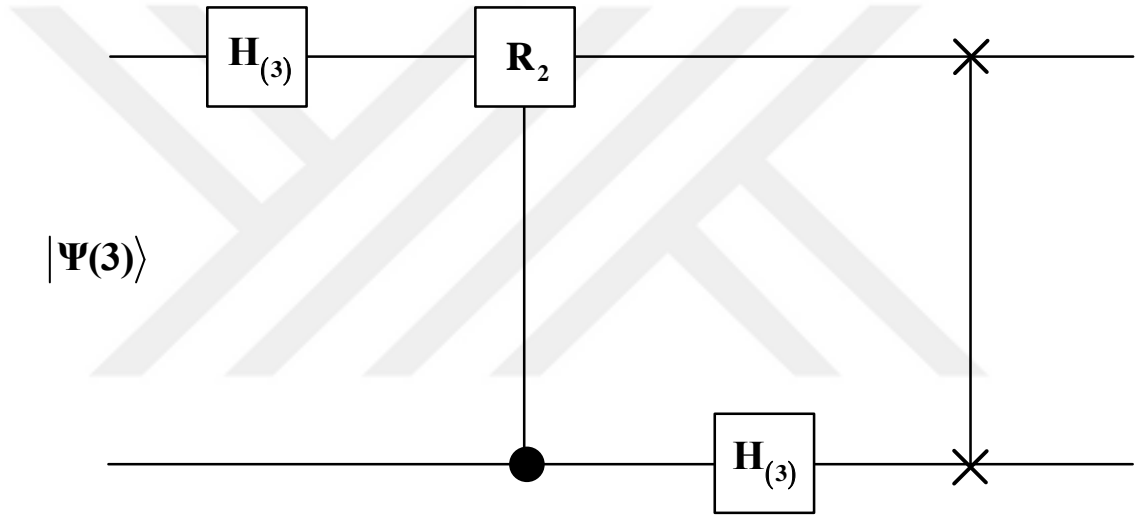
$$\begin{aligned} |c'a'b'\rangle &= \frac{1}{d-1} \left( \begin{array}{l} |00\rangle + |01\rangle + |02\rangle + |03\rangle + \dots + |0(d-1)\rangle \\ + |10\rangle + |11\rangle + |12\rangle + |13\rangle + \dots + |1(d-1)\rangle \\ + |20\rangle + |21\rangle + |22\rangle + |23\rangle + \dots + |2(d-1)\rangle \\ + |30\rangle + |31\rangle + |32\rangle + |33\rangle + \dots + |3(d-1)\rangle \\ + \dots + |(d-1)0\rangle + |(d-1)1\rangle + |(d-1)2\rangle \\ + |(d-1)3\rangle + \dots + |(d-1)(d-1)\rangle \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{d-1}} (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + \dots + |(d-1)\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{d-1}} (|0\rangle + |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + \dots + |(d-1)\rangle) \end{aligned} \quad (4.35)$$

ile verilir.

Bu uygulamanın sonucunda  $|b'\rangle = |c\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle + \delta|3\rangle + \dots + \omega|d-1\rangle$  olacaktır. Böylece  $|c\rangle$  küdit durumu 1. satırdan 3. satıra ışınlanmış olacaktır.

#### 4.5. İki Küritlik Durumlarda Kuantum Fourier Dönüşümü (QFT)

İkinci bölümde kubitler için geçerli olan Kuantum Fourier Dönüşümü (QFT) incelenmişti. Bu bölümde ise bilimsel analizde çok sık kullanılan Fourier dönüşümünün kuantum bilgi işleme süreçlerinde küritler açısından incelenmesi yapılacaktır. Kürit bir sistem düşünüldüğünde  $N = 3^n$  durum sayısını ifade edecektir. İki küritlik bir sistemde 9 durumdan söz edilir. İki küritlik bir sistem için Kuantum Fourier Dönüşüm (QFT) devresi önerebiliriz. Kuantum Fourier Dönüşümü Hadamard ve kontrollü faz değiştirme kapıları ile uygulanmaktadır. Bu sistem düşünüldüğünde Kuantum Fourier Dönüşüm devresi Şekil 4.13'teki gibi ifade edilir.



Şekil 4.13. İki küritlik Kuantum Fourier Dönüşüm (QFT) devresi

Küritler için Kuantum Fourier Dönüşüm (QFT) devresine ait olan genel denklem

$$\text{QFT}|\Psi(3)\rangle = \text{SWAP}(3)\left\{\left(I_3 \otimes H_{(3)}\right)CR_2\left[\left(H_{(3)} \otimes I_3\right)|\Psi(3)\rangle\right]\right\} \quad (4.36)$$

ifadesi ile verilebilir. Burada,

$$R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i2\pi/3^2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i4\pi/3^2} \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

şeklindedir.

Aşağıdaki gibi iki kütritlik bir durumu düşünelim.

$$\begin{aligned} |\Psi(3)\rangle = & a_{00}|00\rangle + a_{01}|01\rangle + a_{02}|02\rangle + a_{10}|10\rangle + a_{11}|11\rangle \\ & + a_{12}|12\rangle + a_{20}|20\rangle + a_{21}|21\rangle + a_{22}|22\rangle \end{aligned} \quad (4.38)$$

Bu durum üzerine QFT işlemini uygulayalım

$$\text{QFT}|\Psi(3)\rangle = \sum_{k=0}^8 b_k |k\rangle \quad (4.39)$$

Fourier uzayındaki katsayıları bulmak için Denklem 2.81 ifadesini kullanarak,

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{9}} \sum_{j=0}^8 a_j e^{i2\pi jk/9} \quad (4.40)$$

$$b_{00} = \frac{1}{3} (a_{00} + a_{01} + a_{02} + a_{10} + a_{11} + a_{12} + a_{20} + a_{21} + a_{22}) \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} b_{01} = & \frac{1}{3} (a_{00} + a_{01}e^{i2\pi/9} + a_{02}e^{i4\pi/9} + a_{10}e^{i6\pi/9} + a_{11}e^{i8\pi/9} \\ & + a_{12}e^{i10\pi/9} + a_{20}e^{i12\pi/9} + a_{21}e^{i14\pi/9} + a_{22}e^{i16\pi/9}) \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} b_{02} = & \frac{1}{3} (a_{00} + a_{01}e^{i4\pi/9} + a_{02}e^{i8\pi/9} + a_{10}e^{i12\pi/9} + a_{11}e^{i16\pi/9} \\ & + a_{12}e^{i20\pi/9} + a_{20}e^{i24\pi/9} + a_{21}e^{i28\pi/9} + a_{22}e^{i32\pi/9}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

•  
•  
•

$$\begin{aligned} b_{22} = & \frac{1}{3} (a_{00} + a_{01}e^{i16\pi/9} + a_{02}e^{i32\pi/9} + a_{10}e^{i48\pi/9} + a_{11}e^{i64\pi/9} \\ & + a_{12}e^{i80\pi/9} + a_{20}e^{i96\pi/9} + a_{21}e^{i112\pi/9} + a_{22}e^{i128\pi/9}) \end{aligned} \quad (4.44)$$

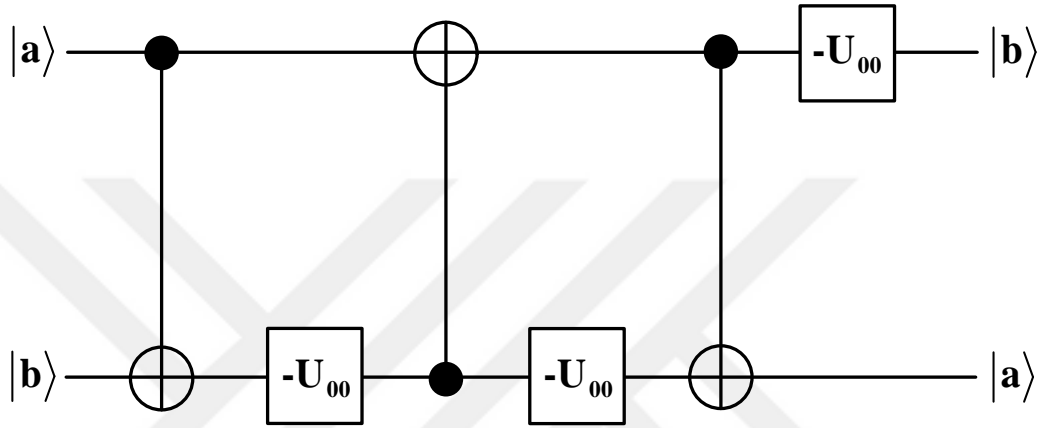
sonuçlarını elde ederiz. Fourier uzayındaki dalga fonksiyonunu aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$\begin{aligned} |\Psi(3)\rangle = & b_{00}|00\rangle + b_{01}|01\rangle + b_{02}|02\rangle + b_{10}|10\rangle + b_{11}|11\rangle \\ & + b_{12}|12\rangle + b_{20}|20\rangle + b_{21}|21\rangle + b_{22}|22\rangle \end{aligned} \quad (4.45)$$

Böylece iki kütritlik durumlara Kuantum Fourier Dönüşümü uygulanmıştır.

#### 4.6. İki Kütitlik Durumlar İçin Genel SWAP Mantık Devresi

İkinci bölümde kütitler için verilen SWAP mantık kapısı kütit durumlar için geçerli olmamaktadır. İki kütitlik durumlar için farklı SWAP mantık kapısı önerileri vardır (Garcia-Escartin ve Chamorro-Posada, 2013). Burada iki kütitlik durumlar için SWAP mantık devresinin yeni bir uygulaması önerilecektir. İki kütitlik durumlar için geçerli olacak SWAP mantık kapı devresi Şekil 4.14’de gösterilmiştir.



Şekil 4.14. İki kütitlik durumlar için önerilen SWAP mantık kapı devresi

Bu devrede yer alan  $-U_{00}(d)$  ifadesi  $d \times d$  boyutunda birim matrisin negatif işaretli şeklidir. Bu devrenin genel ifadesini,

$$\begin{aligned} \text{SWAP}(D) = & [(-U_{00}(d) \otimes I_d)] \text{CNOT}_a(d) [I_d \otimes (-U_{00}(d))] \\ & \text{CNOT}_b(d) [I_d \otimes (-U_{00}(d))] \text{CNOT}_a(d) \end{aligned} \quad (4.46)$$

olarak yazabiliriz. Burada  $I_d = U_{00}$  'dır. Bu denklemi kullanarak iki kütitlik durumların aşağıdaki gibi değiştiği görülebilir.

$$\text{CNOT}_a(d) |a, b\rangle = |a, a \oplus b\rangle \quad (4.47)$$

$$[I_d \otimes (-U_{00}(d))] |a, a \oplus b\rangle = |a, -a \oplus -b\rangle \quad (4.48)$$

$$\text{CNOT}_b(d) |a, -a \oplus -b\rangle = |a \oplus -a \oplus -b, -a \oplus -b\rangle = |-b, -a \oplus -b\rangle \quad (4.49)$$

$$[I_d \otimes (-U_{00}(d))] |-b, -a \oplus -b\rangle = |-b, a \oplus b\rangle \quad (4.50)$$

$$\text{CNOT}_a(d)|-b,a \oplus b\rangle = |-b,a \oplus b \oplus -b\rangle = |-b,a\rangle \quad (4.51)$$

$$\left[(-U_{00}(d)) \otimes I_d\right]|-b,a\rangle = |b,a\rangle \quad (4.52)$$

Sonuç olarak son ifadeyi yazacak olursak,

$$\text{SWAP}(D)|a,b\rangle = |b,a\rangle \quad (4.53)$$

olacaktır. Bu son ifade ile kütitler için önerilen SWAP mantık kapı devresinin doğruluğu bu şekilde gösterilmiştir. Kütit durumlar için genelleştirilmiş SWAP mantık kapı devremizi kütit ve kükuart durumlar için yazarak uygulayabiliriz.

İki kütitlik SWAP mantık kapısının matris temsili,

$$\text{SWAP}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.54)$$

olur. Bu iki kütitlik SWAP mantık kapısını Dirac notasyonunu kullanarak yazmak istersek aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \text{SWAP}(3) = & |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |02\rangle\langle 20| + |10\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11| \\ & + |12\rangle\langle 21| + |20\rangle\langle 02| + |21\rangle\langle 12| + |22\rangle\langle 22| \end{aligned} \quad (4.55)$$

Örnek olarak SWAP mantık kapısını  $|20\rangle$  durumuna matris yöntemiyle uygularsak,

$$\text{SWAP}(3)|20\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |02\rangle \quad (4.56)$$



sonucunu elde ederiz. Benzer şekilde iki kükuartlık durumlar için SWAP mantık kapısının matris temsili,

$$\text{SWAP}(4) = \begin{pmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix} \quad (4.57)$$

olur. Bu iki kükuartlık SWAP mantık kapısını Dirac notasyonunu kullanarak yazmak istersek aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
 \text{SWAP}(4) = & |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |02\rangle\langle 20| + |03\rangle\langle 30| + |10\rangle\langle 01| \\
 & + |11\rangle\langle 11| + |12\rangle\langle 21| + |13\rangle\langle 31| + |20\rangle\langle 02| + |21\rangle\langle 12| \\
 & + |22\rangle\langle 22| + |23\rangle\langle 32| + |30\rangle\langle 03| + |31\rangle\langle 13| + |32\rangle\langle 23| \\
 & + |33\rangle\langle 33|
 \end{aligned} \quad (4.58)$$

Örnek olarak SWAP mantık kapısını  $|32\rangle$  durumuna Dirac notasyonu ile uygularsak,

$$\begin{aligned}
 \text{SWAP}(4)|32\rangle & = \left[ \begin{array}{l} |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |02\rangle\langle 20| + |03\rangle\langle 30| + |10\rangle\langle 01| \\ + |11\rangle\langle 11| + |12\rangle\langle 21| + |13\rangle\langle 31| + |20\rangle\langle 02| + |21\rangle\langle 12| \\ + |22\rangle\langle 22| + |23\rangle\langle 32| + |30\rangle\langle 03| + |31\rangle\langle 13| + |32\rangle\langle 23| \\ + |33\rangle\langle 33| \end{array} \right] |32\rangle \\
 & = |23\rangle
 \end{aligned} \quad (4.59)$$

sonucuna ulaşırız.

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

### 5.1. Sonuç

Bu tezin bulgular ve tartışma bölümü altı ana kısım ve bunların alt kısımlarından oluşmaktadır. Bu kısımlarda kuantum bilgi işleme ve kuantum bilgisayarlarında özellikle kuantum iletişim ve kriptoloji bakımından araştırılan kuantum dolanık durumlar, kuantum aşırı yoğun kodlama, kuantum ışınlama, kuantum fourier dönüşümü (QFT) ve SWAP mantık devreleri gibi önemli konular çok değerli (küdit) durumlar için farklı yöntemlerle hesaplamalar yapılarak yeni kuantum devreleri tanımlanmıştır.

Kısım 4.2.1'de öncelikle iki kükuartlık dolanık durumlar matrisler kullanılarak elde edilmiştir. İki kükuartlık dolanık durumları oluşturmak için gerekli devre Şekil 4.1'de ki gibi oluşturulmuştur. Bu devrede kullanılan kükuartlar için Hadamard mantık kapısı  $(H_{(4)})$  denklem 2.59'da, Kontrollü değil mantık kapısı da  $(CNOT_a(4))$  denklem 2.65'de verilmiştir. İki kükuartlık dolanıklık oluşturma devresi  $|00\rangle$  durumuna uygulanarak  $|\psi_{00}(4)\rangle = \frac{1}{2}\{|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle + |33\rangle\}$  ifadesi denklem 4.2'deki gibi elde edilmiştir. Ayrıca iki kükuartlık onaltı tane dolanık durum oluşturularak Çizelge 4.1'deki gibi elde edilmiştir.

Kısım 4.2.2'de iki kükuartlık dolanık durumlar manyetik rezonans seçici pulslar kullanılarak elde edilmiştir. Manyetik alan içerisinde spin durumları, manyetik spin kuantum sayılarına ve enerji seviyelerine ayrılırlar. Spin-3/2 olan bir çekirdek ya da elektron için, manyetik kuantum sayıları ve bunlarla ilgili olarak tek kükuartlık durumlar Şekil 4.2'de gösterilmiştir. Bu seviyeler arasındaki seçici geçişler için puls işlemcileri oluşturulmuştur.  $^{75}\text{As}@C_{60}$  molekülü SI (S=3/2, I=3/2) spin sistemi ENDOR enerji düzeyleri ve oluşan kükuart değerleri Şekil 4.3'de verilmiştir. Ayrıca bu spin sistem için 16 tane iki kükuartlık durum ve 16 tane enerji seviyesi Çizelge 4.2'de gösterilmiştir. Daha sonra SI (S=3/2, I=3/2) spin sistemi kullanılarak iki kükuartlık dolanık durumları elde etmede kullanılacak olan Hadamard  $(H_{(4)})$  ve Kontrollü değil  $(CNOT_a(4))$  mantık kapılarının manyetik

rezonans puls dizileri iki kükuartlık tüm durumlar için elde edilmiştir. Örnek olarak  $|00\rangle$  giriş durumunda dolanık durumu oluşturmak için ilk olarak  $\left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{[1-5]} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{[1-9]} - \left(\frac{\pi}{2}\right)_{-y}^{[5-13]}$  Hadamard ( $H_{(4)}$ ) mantık kapısının mikrodalga puls dizisi, Şekil 4.5' de adım adım gösterildiği gibi spin yoğunluğu değişimiyle uygulanmıştır. Daha sonra  $(\pi)_x^{[5-6]} - (\pi)_x^{[9-11]} - (\pi)_x^{[13-16]}$  Kontrollü değil ( $CNOT_a(4)$ ) mantık kapısının radyo frekans puls dizisi, Şekil 4.6' da spin yoğunluğu değişimi ile gösterildiği gibi adım adım uygulanmıştır. Böylelikle  $|00\rangle$  iki kükuartlık giriş durumunda dolanık durum seçici pulslar yardımıyla elde edilmiştir. Bununla ilgili iki kükuartlık dolanık durumları oluşturmak için gereken kuantum mantık devresi ve  $|00\rangle$  giriş durumuna uygulanacak puls dizileri Şekil 4.4'de gösterilmiştir. Diğer tüm iki kükuartlık girişlerin dolanık durumlarını elde etmek için gerekli olan tüm Hadamard ( $H_{(4)}$ ) mantık kapısının mikrodalga puls dizileri ve tüm Kontrollü değil ( $CNOT_a(4)$ ) mantık kapısının radyo frekans puls dizileri tek tek elde edilerek Çizelge 4.3'de verilmiştir. Ayrıca bu kısımda kullanılmış olan tüm izinli mikrodalga ve radyo frekans geçişleri ile bunların matris temsilleri oluşturulmuş, Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5'de verilmiştir.

Kısım 4.2.3'de iki kükuartlık tüm dolanık durumların birbirleri arasındaki dönüşümleri sağlayan operatörler geliştirilerek Weyl operatörleri yardımıyla tanımlanmıştır. Örneğin  $|\psi_{00}\rangle$  kuantum dolanık durumuna  $U_{01} \otimes I_4$  şeklinde bir dönüşüm operatörü uygulandığında  $|\psi_{01}\rangle$  kuantum dolanık durumu elde edilmiştir. İki kükuartlık dolanık durumların tamamına, oluşturulan tüm dönüşüm operatörlerinin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar Çizelge 4.6'da verilmiştir.

Kısım 4.3'te çok değerli (küdit) dolanık durumlar için aşırı yoğun kodlama üzerine çalışılmıştır. İlk olarak kısım 4.3.1'de iki kütritlik dolanık durumlar için aşırı yoğun kodlama mantık devresi Şekil 4.7'deki gibi oluşturulmuştur. Bu devrede kütritler için oluşturulan  $U_{nm}(3)$  dönüşüm operatörleri kullanılmıştır. Ayrıca iki tane Kontrollü değil ( $CNOT_a(3)$ ) mantık kapısı ve bir tane Hadamard ( $H_{(3)}^\dagger$ ) mantık

kapısı kullanılmıştır. Bu devrenin genel ifadesi ise denklem 4.21’de verilmiştir. İki kütürlük durumlar için tüm dolanık durumlara aşırı yoğun kodlama uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar Çizelge 4.7’de elde edilmiştir.

Kısım 4.3.2’de kütürlük sistemler için oluşturulan aşırı yoğun kodlama mantık devresinden yola çıkarak iki kükuartlık bir sistem için aşırı yoğun kodlama çalışılmıştır. İki kükuartlık sistem için gerekli olan aşırı yoğun kodlama mantık devresi Şekil 4.8’de oluşturulmuştur. Bu devre için kükuartlarda oluşturulan  $U_{nm}(4)$  dönüşüm operatörleri ile üç tane Kontrollü değil ( $CNOT_a(4)$ ) mantık kapısı ve bir tane Hadamard ( $H_{(4)}^\dagger$ ) mantık kapısı kullanılmıştır. Bu devrenin genel ifadesi ise denklem 4.23’de verilmiştir. İki kükuartlık durumlarda tüm dolanık durumlara aşırı yoğun kodlama uygulanmasıyla ilgili yapılan hesaplamalarda elde edilen sonuçlar Çizelge 4.8’de verilmiştir.

Kısım 4.3.3’de ise iki kütürlük ve iki kükuart sistemlerde uygulanan aşırı yoğun kodlama mantık devresi göz önüne alınarak çok değerli (küdit) durumlar için genel bir aşırı yoğun kodlama mantık devresi önerilmiştir. İki küditlik olarak oluşturulan bu devre Şekil 4.9’da gösterilmiştir. Bu devrede d seviyeli bir durum için  $U_{nm}(d)$  dönüşüm operatörleri kullanılmaktadır. Aynı zamanda d-1 tane Kontrollü değil ( $CNOT_a(d)$ ) mantık kapısı ve d tane Hadamard ( $H_{(d)}^\dagger$ ) mantık kapısı kullanılmıştır. İki küditlik sistem için geçerli olacak aşırı yoğun kodlama mantık devresinin genelleştirilmiş ifadesi denklem 4.25’de verilmiştir. Bu denklem kullanılarak farklı iki küditlik tüm dolanık durumlar için aşırı yoğun kodlama denklemleri oluşturulabilir. Denklem 4.25 kullanılarak elde edilecek aşırı yoğun kodlama ifadeleri Çizelge 4.9’da verilmiştir.

Kısım 4.4’de çok değerli (küdit) durumların kuantum ışınlanmasıyla ilgili olarak çalışılmıştır. İlk olarak kısım 4.4.1.’de kütürlükler için geçerli olan kuantum ışınlama devresi Şekil 4.10’da gösterildiği gibi oluşturulmuştur. Bu devrede altı tane Kontrollü değil ( $CNOT_a(3)$ ) mantık kapısı, iki tane Hadamard ( $H_{(3)}$ ) mantık kapısı ve iki tanede kompleks eşleniğinin transpozu ( $H_{(3)}^\dagger$ ) kullanılmıştır. Ardından üç kütürlük durumlar için  $|c\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle$  gibi bir durumun kuantum ışınlanması

$|ab\rangle = |00\rangle$  gibi iki küttrit durumun kullanılmasıyla gerçekleştirilmiştir. Bu kuantum ışınlama devresi için kullanılan ifade ise denklem 4.26'da verilmiştir. Ayrıca bu devre için geçerli olacak matris temsili Dirac notasyonu kullanılarak denklem 4.27'deki gibi elde edilmiştir.

Kısım 4.4.2'de üç kükuartlık durumlar için kuantum ışınlamasıyla ilgili çalışılmıştır. Bunun için iki kükuartlık  $|ab\rangle = |00\rangle$  gibi yardımcı bir durum kullanılarak  $|c\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle + \delta|3\rangle$  gibi bir kükuartın ışınlanması sağlanmıştır. Bu işlemde gerekli olan kükuartlar için kuantum ışınlama devresi Şekil 4.11'deki gibi oluşturulmuştur. Devre üzerinde sekiz tane Kontrollü değil ( $\text{CNOT}_a(4)$ ) mantık kapısıyla birlikte iki tane Hadamard ( $H_{(4)}$ ) mantık kapısı ve iki tanede kompleks eşleniğinin transpozu ( $H_{(4)}^\dagger$ ) kullanılmıştır. Kükuart kuantum ışınlama devresi için oluşturulan genel ifade denklem 4.30'da verilmiştir.

Kısım 4.4.3'te ise oluşturulan üç küttritlik ve üç kükuartlık kuantum ışınlama devrelerinden yola çıkarak daha genel olarak çok değerli (küdit) durumların ışınlanmasıyla ilgili çalışılmıştır. Bununla ilgili üç küditlik durumlar için genelleştirilmiş bir kuantum ışınlama devresi Şekil 4.12'deki gibi önerilmiştir. Devrede  $2(d-1)+2$  tane Kontrollü değil ( $\text{CNOT}_a(d)$ ) mantık kapısı, iki tane Hadamard ( $H_{(d)}$ ) mantık kapısı ve iki tanede kompleks eşleniğinin transpozu ( $H_{(d)}^\dagger$ ) kullanılmıştır. Üç küditlik bu devrede  $|c\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle + \delta|3\rangle + \dots + \omega|d-1\rangle$  gibi küdit bir durumun ışınlanması  $|ab\rangle = |00\rangle$  gibi iki küditlik bir durum kullanılarak sağlanmıştır. Ayrıca bu devreye ait olan genel ifade denklem 4.33'de verilmiştir.

Kısım 4.5'te özellikle bilimsel analizde en çok kullanılan Fourier dönüşümü konusunun kuantum bilgi işleme açısından küttrit durumlarda incelenmesi yapılmıştır. İki küttritlik bir sistem için geçerli olacak Kuantum Fourier Dönüşüm (QFT) devresi Şekil 4.13'teki gibi önerilmiştir. Bu devrede iki tane Hadamard ( $H_{(3)}$ ) mantık kapısı, bir tane kontrollü faz değiştirme kapısı ( $\text{CR}_2(3)$ ) ve SWAP mantık kapısı kullanılmıştır. Devreye ait olan genel ifade denklem 4.36'da verilmiştir. Küttritler için

elde edilen fourier uzayındaki dalga fonksiyonu denklem 4.45'deki gibi elde edilmiştir.

Son olarak kısım 4.6'da kuantum bilgi işlemede çok fazla çalışılan bir konu olan SWAP mantık devresinin küdit durumlar için çalışmaları yapılmıştır. İki küditlik durumlar için genel bir SWAP mantık kapı devresi önerilerek Şekil 4.14'de gösterilmiştir. Bu devrede üç tane dxd boyutunda birim matrisinin negatif işaretlisi  $-U_{00}(d)$  ifadesi, iki tane  $CNOT_a(d)$ , bir tane  $CNOT_b(d)$  kullanılmıştır. Bu devreye ait genel ifade denklem 4.46'da verilmiştir. Ayrıca bu genel denklem kullanılarak ilk olarak iki küditlik durumlar için SWAP mantık devresinin matris ifadesi denklem 4.54'de ve Dirac notasyonu kullanılarak elde edilen ifade denklem 4.55'te verilmiştir. İki küditlik SWAP mantık kapısının  $|20\rangle$  durumuna uygulaması yapılmıştır. İkinci olarak da iki kükuartlık durumlar için SWAP mantık devresinin matris ifadesi denklem 4.57'de, Dirac notasyonu ile elde edilen ifade ise denklem 4.58'de verilmiştir. Aynı şekilde iki kükuartlık SWAP mantık kapısı  $|32\rangle$  durumuna uygulanmıştır.

## 5.2. Öneriler

Bu tez çalışmasında ele alınan kuantum dolanıklık, kuantum aşırı yoğun kodlama, kuantum ışınlama, kuantum fourier dönüşümü (QFT) ve SWAP mantık devreleri gibi konular kuantum bilgi işleme süreçlerinde özellikle de kuantum bilgisayarların geliştirilmesinde yardımcı olabilir.

Çalışmada ele alınan spin sistemi çekirdek spini ve elektron spini arasındaki durumlar göz önüne alınarak yapılmıştır. İki farklı çekirdek spini arasında da çalışmalar yapılabilir. Bu çalışmada yer alan Weyl operatörleri kullanılarak elde edilen operatörler ve oluşturulan puls dizileri yardımıyla farklı kuantum mantık devreleri ve yeni algoritmalar oluşturulabilir.

Günümüz bilgi ve iletişim teknolojisi nano boyutlardaki çalışmalarla çok ileri bir seviyeye ulaşmıştır. Geleceğin bilgi ve iletişim teknolojilerindeki ilerlemeler hiç kuşkusuz atomaltı parçacıkları bilginin temel birimi olarak kullanacak olan kuantum bilgisayarıyla olacaktır. Bununla ilgili olarak farklı teknoloji ve algoritmalara gerek duyulacaktır.

## KAYNAKLAR

- Arpasi, J. P. 2003. A brief introduction to ternary logic. <https://aymara.org/ternary/ternary.pdf> (Erişim tarihi:10.10.2019)
- Arute, F. et al. 2019. Quantum supremacy using a programmable superconducting processor. *Nature*, 574(7779): 505–10. doi:10.1038/s41586-019-1666-5
- Aspect, A., Grangier, P. and Roger, G. 1982. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities. *Physical Review Letters*, 49(2): 91–94. doi:10.1103/PhysRevLett.49.91
- BelBruno, J. J. 2002. Computational study Of N@C 60 , P@C 60 , and As@C 60. *Fullerenes, Nanotubes and Carbon Nanostructures*, 10(1): 23–35. doi:10.1081/FST-120002927
- Bell, J. S. 1964. On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physics Physique Fizika*, 1(3): 195–200. doi:10.1103/PhysicsPhysiqueFizika.1.195
- Benioff, P. 1980. The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical hamiltonian model of computers as represented by Turing machines. *Journal of Statistical Physics*, 22(5): 563–91. doi:10.1007/BF01011339
- Bennett, C. H. and Wiesner, S. J. 1992. Communication via one- and two-particle operators on Einstein-Podolsky-Rosen states. *Physical Review Letters*, 69(20): 2881–84. doi:10.1103/PhysRevLett.69.2881
- Bennett, C. H., Brassard, G., Crépeau, C., Jozsa, R., Peres, A. and Wootters, W. K. 1993. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, 70(13): 1895–99. doi:10.1103/PhysRevLett.70.1895
- Bennett, C. H. and Brassard, G. 2014. Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing. *Theoretical Computer Science*, 560(12): 7-11. doi:10.1016/j.tcs.2014.05.025
- Bertlmann, R. A. and Krammer, P. 2008. Bloch vectors for Qudits. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 41(23): 235303. doi:10.1088/1751-8113/41/23/235303
- Bonk, F. A., DeAzevedo, E. R., Sarthour, R. S., Bulnes, J. D., Freitas, J. C. C., Guimarães, A.P., Oliveira, I.S. and Bonagamba, T.J. 2005. Quantum logical operations for Spin 3/2 quadrupolar nuclei monitored by quantum state tomography. *Journal of Magnetic Resonance*, 175(2): 226–34. doi:10.1016/j.jmr.2005.04.009

- Boole, G. 1854. *An investigation of the laws of thought: On which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. Dover Publications, 424, New York.
- Bouwmeester, D., Pan, J. W., Mattle, K., Eibl, M., Weinfurter, H. and Zeilinger, A. 1997. Experimental quantum teleportation. *Nature*, 390(6660): 575–79. doi:10.1038/37539
- Brennen, G. K., O’Leary, D. P. and Bullock, S. S. 2005. Criteria for exact Qudit universality. *Physical Review A*, 71(5). doi:10.1103/PhysRevA.71.052318
- Çakmak, S. 2011. Bazı Endohedral Fullerenlerde kuantum bilgi işleme ve durum tomografisinin incelenmesi. Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 118s, Samsun.
- Çorbacı, S., Karakaş, M. D. and Gençten, A. 2016. Construction of two Qutrit entanglement by using magnetic resonance selective pulse sequences. *Journal of Physics: Conference Series*, 766(1): 911. doi:10.1088/1742-6596/766/1/012014
- Dalla Chiara, M. L., Giuntini, R., Sergioli, G. and Leporini, R. 2018. A many-valued approach to quantum computational logics. *Fuzzy Sets and Systems*, 335, 94–111. doi:10.1016/j.fss.2016.12.015
- Deutsch, D. 1985. Quantum theory, the Church-Turing principle and the universal quantum computer. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 400(1818): 97–117. doi:10.1098/rspa.1985.0070
- Deutsch, D. 1989. Quantum computational networks. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 425(1868): 73–90. doi:10.1098/rspa.1989.0099
- Deutsch, D. and Jozsa, R. 1992. Rapid solution of problems by quantum computation. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 439(1907): 553–58. doi:10.1098/rspa.1992.0167
- Di, Y. M. and Wei, H. R. 2013. Synthesis of multivalued quantum logic circuits by elementary gates. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 87(1): 012325. doi:10.1103/PhysRevA.87.012325
- DiVincenzo, D. P. 2000. The physical implementation of quantum computation. *Fortschritte der Physik: Progress of Physics*, 48(9–11): 771–83.
- Einstein, A., Podolsky, B. and Rosen, N. 1935. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. *Physical Review*, 47(10): 777–80. doi:10.1103/PhysRev.47.777
- Fang, X., Zhu, X., Feng, M., Mao, X. And Du F. 2000. Experimental implementation of dense coding using nuclear magnetic resonance. *Physical Review A*, 61(2): 022307. doi:10.1103/PhysRevA.61.022307



- Feynman, R. P. 1982. Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(6–7): 467–88. doi:10.1007/BF02650179
- Garcia-Escartin, J. C. and Chamorro-Posada, P. 2013. A SWAP gate for Qudits. *Quantum Information Processing*, 12(12): 3625–31. doi:10.1007/s11128-013-0621-x
- Gershenfeld, N. A. and Chuang, I. L. 1997. Bulk spin-resonance quantum computation. *Science*, 275(5298): 350–56. doi:10.1126/science.275.5298.350
- Grover, L. K. 1997. Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack. *Physical Review Letters*, 79(2): 325–28. doi:10.1103/PhysRevLett.79.325
- Gün, A. 2011. SI ( $S=3/2$ ,  $I=1/2$  ve  $3/2$ ) Spin sistemlerinde kuantum dolanıklık ve kuantum iletişimdeki bazı uygulamaları. Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 169s, Samsun.
- Gün, A. and Gençten, A. 2011. Three-qubit quantum entanglement for SI ( $S=3/2$ ,  $I=1/2$ ) spin system. *International Journal of Quantum Information*, 9(7-8): 1635–42. doi:10.1142/S0219749911008313
- Gün, A., Şaka, I. and Gençten, A. 2011. Construction and application of four-qubit swap logic gate in NMR quantum computing. *International Journal of Quantum Information*, 09(02): 779–90. doi:10.1142/S0219749911007721
- Gün, A., Çakmak, S. and Gençten, A. 2013. Construction of four-qubit quantum entanglement for SI ( $S=3/2$ ,  $I=3/2$ ) spin system. *Quantum Information Processing*, 12(1): 205–15. doi:10.1007/s11128-012-0367-x
- Harneit, W. 2002. Fullerene-based electron-spin quantum computer. *Physical Review A*, 65(3): 032322. doi:10.1103/PhysRevA.65.032322
- Harneit, W. 2017. Spin quantum computing with Endohedral Fullerenes. *Endohedral Fullerenes: Electron Transfer and Spin*, 297–324. doi:10.1007/978-3-319-47049-8\_14
- IBM, 2019. IBM Quantum Computing. <https://www.ibm.com/quantum-computing/> (Erişim tarihi:10.10.2019)
- Jaeger, L. 2018. *The second quantum revolution. From the trouble in the microcosmos to new super-technologies*. Springer, 335, Switzerland.
- Jozsa, R. 1997. Quantum algorithms and the fourier transform. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 454(1969): 323–37. doi: 10.1098/rspa.1998.0163
- Ju, C., Suter, D. and Du, J. 2007. Two-qubit gates between noninteracting qubits in Endohedral-Fullerene-based quantum computation. *Physical Review A*, 75(1): 012318. doi:10.1103/PhysRevA.75.012318

- Karimipour, V., Bahraminasab, A. and Bagherinezhad, S. 2002. Quantum key distribution for d-level systems with generalized Bell states. *Physical Review A*, 65(5): 052331. doi:10.1103/PhysRevA.65.052331
- Kocakoç, M. 2014. Kuantum bilgi teorisinde dönme işlemcileri ve EPR tekniğinin uygulanabilirliği. Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 151s, Samsun.
- Lloyd, S. 1995. Quantum-mechanical computers. *Scientific American*, 273(4): 140-145.
- Luo, M. X., Ma, S. Y., Chen, X. B. and Yang, Y. X. 2013. The power of qutrit logic for quantum computation. *International Journal of Theoretical Physics*, 52(8): 2959–65. doi:10.1007/s10773-013-1586-3
- Mádi, Z. L., Brüscheiler, R. And Ernst, R. R. 1998. One- and two-dimensional ensemble quantum computing in spin liouville space. *The Journal of Chemical Physics*, 109(24): 10603–11. doi:10.1063/1.477759
- Marinescu, D. C. and Marinescu, G. M. 2005. *Approaching quantum computing*. Pearson, 400, New Jersey.
- Mattle, K., Weinfurter, H., Kwiat, P. G. and Zeilinger, A. 1996. Dense coding in experimental quantum communication. *Physical Review Letters*, 76(25): 4656–59. doi:10.1103/PhysRevLett.76.4656
- McMahon, D. 2007. *Quantum computing explained*. Wiley, 332, New Jersey.
- Microsoft, 2019. Microsoft Azure Quantum. <https://azure.microsoft.com/tr-tr/services/quantum/> (Erişim tarihi:10.10.2019)
- Moore, G. E. 1998. Cramming more components onto integrated circuits. *Proceedings of the IEEE* 86(1): 82–85. doi: 10.1109/JPROC.1998.658762
- Muthukrishnan, A. and Stroud, C. R. 2000. Multivalued logic gates for quantum computation. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 62(5): 052309–052301. doi:10.1103/PhysRevA.62.052309
- Nielsen, M. A., Knill, E. and Laflamme, R. 1998. Complete quantum teleportation using nuclear magnetic resonance. *Nature*, 396(6706): 52–55. doi: 10.1038/23891
- Oliveira, I. S., Bonagamba, T. J., Sarthour, R. S., Freitas, J. C. C. and DeAzevedo, E. R. 2007. *NMR quantum information processing*, Elsevier, 264, Netherlands.
- Peng, X., Zhang, J., Du, J. and Suter, D. 2009. Quantum simulation of a system with competing two- and three-body interactions. *Physical Review Letters*, 103(14): 1–4. doi:10.1103/PhysRevLett.103.140501
- Price, M. D., Somaroo, S. S., Tseng, C. H., Gore, J. C., Fahmy, A. F., Havel, T. F. and Cory, D. G. 1999. Construction and implementation of NMR quantum logic gates for two spin systems. *Journal of Magnetic Resonance*, 140(2): 371–78. doi:10.1006/jmre.1999.1851

- Proctor, T. J. and Kendon, V. 2016. Hybrid quantum computing with ancillas. *Contemporary Physics*, 57(4): 459–76. doi:10.1080/00107514.2016.1152700
- Rahimi, R., Kazunobu, S., Furukawa, K., Toyota, K., Shiomi, D., Nakamura, T., Kitagawa, M. and Takui, T. 2005. Pulsed ENDOR-based quantum information processing. *International Journal of Quantum Information*, 3(supp01): 197–204. doi:10.1142/S0219749905001377
- Sasao, T. 2013. Four decades of multi-valued logic: Lists of highly cited papers. *2013 IEEE 43rd International Symposium on Multiple-Valued Logic*, 198–202. doi:10.1109/ISMVL.2013.29
- Schumacher, B. 1995. Quantum coding. *Physical Review A*, 51(4): 2738. doi: 10.1103/PhysRevA.51.2738
- Schweiger, A. and Jeschke, G. 2001. *Principles of pulse electron paramagnetic resonance*, Oxford University Press on Demand, 604, New York.
- Shannon, C. E. 1938. A Symbolic analysis of relay and switching circuits. *Electrical Engineering*, 57(12): 713–23. doi:10.1109/EE.1938.6431064
- Shannon, C. E. 1948. A Mathematical theory of communication. *Bell system technical journal*, 27(3): 379–423. doi:10.1002/j.1538-7305.1948.tb01338.x
- Shor, P. W. 1994. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring. *Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 124–34. doi:10.1109/SFCS.1994.365700
- Shor, P. W. 1995. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Physical Review A*, 52(4): R2493–96. doi: 10.1103/PhysRevA.52.R2493
- Sinha, N., Mahesh, T. S., Ramanathan, K. V. and Kumar, A. 2001. Toward quantum information processing by nuclear magnetic resonance: Pseudopure states and logical operations using selective pulses on an oriented spin 3/2 nucleus. *The Journal of Chemical Physics*, 114(10): 4415. doi:10.1063/1.1346645
- Steane, A. M. 1996. Error correcting codes in quantum theory. *Physical Review Letters*, 77(5): 793–97. doi:10.1103/PhysRevLett.77.793
- Takui, T., Berliner, L. and Hanson, G. 2016. *Electron spin resonance (ESR) based quantum computing*, Springer, 255, New York.
- Terzi, S. 2019. Bazı spin sistemleri için kuantum devreleri ve uygulamaları, Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 121s, Samsun.
- Turing, A. M. 1937. On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceedings of the London mathematical society*, 2(1): 230–65. doi:10.1112/plms/s2-42.1.230
- Türkpençe, D. 2007. NMR kuantum bilgisayarlarında iki küritlik bazı mantık kapılarının oluşturulması ve uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 112s, Samsun.

- Viamontes, G. F. 2007. Efficient quantum circuit simulation, Doctoral Dissertation, The University of Michigan, 230, USA.
- Williams, C. P. 2010. *Explorations in Quantum Computing*, Springer, 717, New York.
- Wootters, W. K. and Zurek, W. H. 1982. A Single quantum cannot be cloned. *Nature*, 299(5886): 802–3. doi:10.1038/299802a0
- Yang, W. X., Zhan, Z. M. and Li, J. H. 2005. Efficient scheme for multipartite entanglement and quantum information processing with trapped ions. *Physical Review A*, 72(6): 62108. doi:10.1103/PhysRevA.72.062108
- Yang, W. L., Wei, H., Zhang, X. L. and Feng, M. 2008. Bell-State preparation for Fullerene-based electron spins in distant nanotubes. *Physical Review A*, 78(5): 054301. doi:10.1103/PhysRevA.78.054301
- Yurke, B. And Stoler, D. 1992. Einstein-Podolsky-Rosen effects from independent particle sources. *Physical Review Letters*, 68(9): 1251–54. doi:10.1103/PhysRevLett.68.1251
- Zheng, S. B. And Guo, G. C. 2000. Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity QED. *Physical Review Letters*, 85(11): 2392–95. doi:10.1103/PhysRevLett.85.2392
- Żukowski, M., Zeilinger, A., Horne, M. A. and Ekert, A. K. 1993. “Event-Ready-Detectors” Bell experiment via entanglement swapping. *Physical Review Letters*, 71(26): 4287–90. doi:10.1103/PhysRevLett.71.4287

## EKLER

### EK 1 İki Kükuarthk Dolanık Durumları Oluşturmak İçin Kullanılan Mathematica Kodları

(\*Tek Kükuarthk Durumların Oluşturulması\*)

```
Quq0={{1},{0},{0},{0}};  
Quq1={{0},{1},{0},{0}};  
Quq2={{0},{0},{1},{0}};  
Quq3={{0},{0},{0},{1}};
```

(\*Kükuarthlar için kullanılacak Hadamard ve KontrollüDeğil mantık kapılarının oluşturulması\*)

```
Had4=1/2{{1,1,1,1},{1,i,-1,-i},{1,-1,1,-1},{1,-i,-1,i}};  
CNOT4a={{1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}, {0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0},  
{0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}, {0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0},  
{0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0}, {0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0},  
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0}, {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0},  
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0}, {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0},  
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0}, {0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0},  
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1}};
```

(\*İki kükuarthlık durumların oluşturulması\*)

```
Quq00=KroneckerProduct[Quq0,Quq0];Quq01=KroneckerProduct[Quq0,Quq1];  
Quq02=KroneckerProduct[Quq0,Quq2];Quq03=KroneckerProduct[Quq0,Quq3];  
Quq10=KroneckerProduct[Quq1,Quq0];Quq11=KroneckerProduct[Quq1,Quq1];  
Quq12=KroneckerProduct[Quq1,Quq2];Quq13=KroneckerProduct[Quq1,Quq3];  
Quq20=KroneckerProduct[Quq2,Quq0];Quq21=KroneckerProduct[Quq2,Quq1];  
Quq22=KroneckerProduct[Quq2,Quq2];Quq23=KroneckerProduct[Quq2,Quq3];  
Quq30=KroneckerProduct[Quq3,Quq0];Quq31=KroneckerProduct[Quq3,Quq1];  
Quq32=KroneckerProduct[Quq3,Quq2];Quq33=KroneckerProduct[Quq3,Quq3];
```

(\*İki kükuartlık dolanık durumların oluşturulması\*)

```
EPR00=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq00);  
"ψ00="MatrixForm[EPR00]  
EPR01=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq01);  
"ψ01="MatrixForm[EPR01]  
EPR02=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq02);  
"ψ02="MatrixForm[EPR02]  
EPR03=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq03);  
"ψ03="MatrixForm[EPR03]  
EPR10=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq10);  
"ψ10="MatrixForm[EPR10]  
EPR11=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq11);  
"ψ11="MatrixForm[EPR11]  
EPR12=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq12);  
"ψ12="MatrixForm[EPR12]  
EPR13=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq13);  
"ψ13="MatrixForm[EPR13]  
EPR20=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq20);  
"ψ20="MatrixForm[EPR20]  
EPR21=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq21);  
"ψ21="MatrixForm[EPR21]  
EPR22=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq22);  
"ψ22="MatrixForm[EPR22]  
EPR23=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq23);  
"ψ23="MatrixForm[EPR23]  
EPR30=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq30);  
"ψ30="MatrixForm[EPR30]  
EPR31=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq31);  
"ψ31="MatrixForm[EPR31]  
EPR32=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq32);  
"ψ32="MatrixForm[EPR32]  
EPR33=CNOT4a.(KroneckerProduct[Had4,IdentityMatrix[4]].Quq33);  
"ψ33="MatrixForm[EPR33]
```

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı:** Mikail Doğuş KARAKAŞ

**Doğum Yeri:** Karabük

**Doğum Tarihi:** 24/08/1981

**Medeni Hali:** Evli

**Bildiği Yabancı Diller:** İngilizce

### **Eğitim Durumu:**

Lise: Bağcılar Lisesi (1996-2000)

Ön Lisans: Zonguldak Karaelmas Üniversitesi, Bilgisayar Teknolojisi ve Programlama (2004-2006)

Lisans: Gazi Üniversitesi, Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Öğretmenliği (2007-2010)

Yüksek Lisans: Ahi Evran Üniversitesi, Atom ve Molekül Fiziği (2010-2013)

Doktora: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Atom ve Molekül Fiziği (2014-...)

### **Çalıştığı Kurumlar:**

Amasya Üniversitesi (2014-...)

### **Yayımlar:**

Sevcan Corbacı, Mikail Dogus Karakas, Azmi Gençten, "Construction of Two Qutrit Entanglement by Using Magnetic Resonance Selective Pulse Sequences", Journal of Physics: Conference Series, Volume 766, Number 1, October 2016, DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/766/1/012014>

Mikail Doğuş Karakaş and Azmi Gençten. "Construction of Two-Ququart Quantum Entanglement by Using Magnetic Resonance Selective Pulse Sequences", Zeitschrift für Naturforschung A, Volume 73, Issue 10, July 2018, DOI: <https://doi.org/10.1515/zna-2017-0441>

### **İletişim Bilgileri:**

Adres: Akbilek mah. Şevket Güres cad. 120 Evler Sitesi 5-B Blok  
Daire:4 Merkez/AMASYA

Telefon: 0535 256 30 63

Elektronik Posta: [mikaildoguskarakas@gmail.com](mailto:mikaildoguskarakas@gmail.com)