ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İLKÖĞRETİM EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN MODEL OLUŞTURMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Hacer Nilgün TAŞKAYA ALİM

Danışman

Prof. Dr. Ali ERASLAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Haziran, 2018

TELİF HAKKI

YAZARIN

Adı : Hacer Nilgün

Soyadı : TAŞKAYA ALİM

Bölümü : İlköğretim Eğitimi Anabilim Dalı – Matematik Öğretmenliği

İmza :

Teslim Tarihi : 18.07.2018

TEZİN

Türkçe Adı : Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Model Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi

İngilizce Adı : Investigation of Modeling Processes of Middle School Mathematics Teachers

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı: Hacer Nilgün TAŞKAYA ALİM

İmza: Nilgün

KABUL VE ONAY

Hacer Nilgün TAŞKAYA ALİM tarafından hazırlanan "**Ortaokul Matematik Öğretmenlerinin Model Oluşturma Süreçlerinin İncelenmesi**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Ondokuz Mayıs Üniversitesi **İlköğretim Eğitimi** Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans / Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ali ERASLAN
Matematik ve Fen Eğitimi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Başkan: Prof. Dr. Ali ERASLAN
Matematik ve Fen Eğitimi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Rezan YILMAZ
Matematik ve Fen Eğitimi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Atilla ÖZDEMİR
Matematik ve Fen Eğitimi, Sinop Üniversitesi

Bu tezin **İlköğretim Eğitimi** Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans/ Doktora tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Tarihi: __/__/____

Prof. Dr. Ali ERASLAN

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

(İmza ve Mühür)

“Anneme ve Babama”

TEŞEKKÜRLER

Mesleki ve eğitim yaşantımda akademik gelişimime büyük katıları olan, tez çalışmam boyunca sabır ve özveriyle beni destekleyen değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Ali ERASLAN’a teşekkürlerimi sunuyorum.

Jüri üyesi olarak davetimizi kabul eden ve sundukları görüşlerle ve yapıcı değerlendirmeleri ile çalışmama ışık tutan Dr. Öğretim Üyesi Rezan YILMAZ'a ve Dr. Öğretim Üyesi Atilla ÖZDEMİR' e teşekkür ediyorum. Desteğini hiçbir zaman esirgemeyen Arş. Gör. Neslihan ŞAHİN' e teşekkür ediyorum.

Hayatımın her anında desteklerini arkamda hissettiğim, başarılarıma benden çok sevinen anneme ve babama, zor zamanlarda yanımda olan eşime, kendilerine ait zamanlardan fedakârlık yapmak zorunda kaldığım kızım Ceren’e ve oğlum Korhan’a teşekkür ediyorum.

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN MODEL OLUŞTURMA SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Yüksek Lisans Tezi

Hacer Nilgün TAŞKAYA ALİM

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran, 2018

ÖZ

Bu araştırma, ortaokul matematik öğretmenlerinin model oluşturma süreçlerinin incelenmesi ve bu süreçlerde karşılaşılan güçlükleri ortaya çıkarmayı amaçlamaktadır. Araştırma, Karadeniz Bölgesinde bulunan bir ilimizde Milli Eğitim Bakanlığına bağlı farklı ortaokullarda görev yapan ve daha önce *Matematik Öğretiminde Modelleme* dersini almış üç öğretmeni kapsamaktadır. Oluşturulan bu odak gruba iki farklı model oluşturma etkinliği olan *Kablo Makarası Problemi* ve *Uçağa Binme Problemi* verilerek üzerinde çalışmaları istenmiş ve tüm süreç video ile kayıt altına alınmıştır. Daha sonra öğretmenlerin model oluşturma sürecinde geliştirdikleri matematiksel düşünceleri ve ortaya koydukları yazılı cevaplar Ferri (2006)'nin teorik çerçevesi kullanılarak nitel olarak analiz edilmiştir. Araştırma sonuçları modelleme dersi almış olan ortaokul matematik öğretmenlerinin model oluşturma süreçleri olan problemi anlama, basitleştirme ve yapılandırma, matematikleştirme, matematiksel işlemlerle çalışma, yorumlama ve doğrulama süreçlerinde başarılı bir şekilde çalışabildiklerini ortaya koymuştur. Yapılan çalışma model oluşturma etkinlikleri yardımıyla verilen modelleme eğitimlerinin matematik öğretmenlerine oldukça faydalı olabileceğini gösteren önemli bir sonucu doğurmuştur.

Anahtar Kelimeler : Ortaokul Öğretmenleri, Matematiksel Modelleme, Model Oluşturma Etkinliği

Sayfa Sayısı : 156

Danışman : Prof. Dr. Ali ERASLAN

INVESTIGATION OF MODELING PROCESSES OF MIDDLE SCHOOL MATHEMATICS TEACHERS

MS Thesis

Hacer Nilgün TAŞKAYA ALİM

ONDOKUZ MAYIS UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES

June, 2018

ABSTRACT

This research aims to examine mathematical modeling processes of middle-school mathematics teachers and to reveal the difficulties encountered in these processes. The research study includes three teachers who worked in different middle-schools affiliated to the Ministry of National Education in a city of the Blacksea Region. All teachers have previously taken the course of *Mathematical Modeling in Teaching*. This focus group created was asked to work on two different model eliciting activities, *Cable Roller Problem* and *Airplane Riding Problem*, and the whole process was recorded with video. Then the mathematical ideas developed by the teachers in modeling process and their written answers were analyzed qualitatively by using the theoretical framework of Ferri (2006). The results of the research study revealed that middle school mathematics teachers who have taken modeling courses can successfully work in the processes of modeling, understanding the problem, simplification and structuring, mathematical operations, interpretation and verification. This study also showed that the mathematical modeling courses could be useful for mathematics teachers in teaching and learning mathematics.

Key Words : **Middle-School Teachers, Mathematical Modeling, Model Eliciting Activities.**

Number of Pages : **156**

Advisor : **Prof. Dr. Ali ERASLAN**

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

ABD Amerika Birleşik Devletleri

DISUM Didactical İntervention Modes For Mathematics Teaching Oriented towards Self-Regulation and Directed by Tasks

EMB Ek Matematiksel Bilgi

LEMA Learning and Education in and through Modelling and Applications

MEB Milli Eğitim Bakanlığı

MOE Model Oluşturma Etkinliği

NCTM National Council of Teachers of Mathematics

PISA Programme for International Student Assesment

TIMSS Trends in International Mathematics and Science Study

YÖK Yükseköğretim Kurulu

BİRİNCİ BÖLÜM

I. GİRİŞ

Bireylerin gelişimi ve çağa ayak uydurabilmeleri için eğitim sistemi ile eğitim uygulamalarında değişiklikler yapmak şarttır. Ancak bu sayede bireylerin çevrede, toplumda, teknoloji ve sanayide meydana gelen değişimleri ve yenilikleri yakalama şansı olabilir. Dünya düzeninde gözle görülür değişimlerin kaydedildiği 21. yüzyılda, bireylerin değişimlerle beraber ilerlemeleri ve hatta değişime yön verebilmeleri konusunda araştırmalar yapılmakta ve öneriler sunulmaktadır. 21.yüzyıl becerileri ifade edilen nedenlerden dolayı oldukça önemlidir. Eğitim sistemleri ve yeni beceriler ile ilgili bazı araştırmalara şunlar örnek verilebilir: Öğrencilerin beceri kazanması ve yenilikleri yakalamaları için elverişli öğrenme ortamı üzerine çalışmalar yürüten OECD Eğitim Araştırmaları ve Yenilik Merkezi, çeşitli araştırmalara da öncülük etmiştir. Avrupa Birliği üye ülkelerinde uygulanması gereken ve eğitim sistemi içine entegre edilecek sekiz ana yetenek ve bunlarla ilgili beceriler Avrupa Parlamentosu'nun araştırmaları neticesinde belirlenmiştir. ABD'de faaliyet gösteren "21. Yüzyıl Becerileri Ortaklığı", iş dünyasından, eğitim sektöründen ve politikacılardan katılımcılarla oluşturulmuştur. Bu ortaklık da ABD'de işletilecek öğrenme becerilerini ve bunlar için gerekli faaliyetleri belirleme gayretine girmiştir.

Tüm dünyada "yeni beceriler" üzerine yapılan araştırmaların hepsi öncelikle bireyi geliştirmeye yöneliktir. Ayrıca, yapılan araştırmalar ülkenin sosyo-ekonomik politikalarına da yön verecek nitelikte değerlendirilmektedir. Toplumların gelecekte söz sahibi olabilmeleri için yeni becerileri kavrama ve geliştirme yönünden donanımlı olmaları gerekmektedir. Araştırmacıların konuyla ilgili hassasiyetlerinin altında yatan temel neden de budur. *21. yüzyıl becerilerine* örnek olarak şunlar gösterilebilir:

✓ Yaratıcılık ve Yenilik

✓ Eleştirel düşünme ve problem çözme

- ✓ Esnek düşünme, uyumluluk ve yaşam boyu öğrenme kapasitesi
- ✓ Takım çalışması ve sanal takımlarda işbirliği
- ✓ İnisiyatif alabilme, kendi kendini yönlendirme ve girişimcilik
- ✓ Etkili sözlü ve yazılı iletişim
- ✓ Anadilde yeterlik
- ✓ Çoklu diller ve kültürel farkındalık
- ✓ Bilgiye etkili bir biçimde erişme ve bilgiyi analiz etme
- ✓ Dijital yeterlik

21.yüzyıl becerileri, dünya genelinde 60 enstitü ve 250 araştırmacının gerçekleştirdiği önemli çalışmalar ve araştırmalar neticesinde belirlenmiştir. Bu beceriler dört temel bölümden oluşmaktadır. Bunlar: (a) *Düşünme biçimleri:* Yaratıcılık, eleştirel düşünme, problem çözme, karar verme ve öğrenme, (b) *Çalışma biçimleri:* İletişim ve işbirliği, (c) *Çalışma araçları:* Bilgi ve iletişim teknolojileri, bilgi okuryazarlığı ve (d) *Yaşam becerileri:* Vatandaşlık, bireysel ve toplumsal sorumluluk, meslekte ve yaşamda başarı kazanma.

Kereluik ve diğerleri (2013) yaptığı çalışmalarda 21. yüzyıl becerilerini üç boyutta sınıflandırılmıştır (aktaran, Yılmaz, 2016). Bunlar; temel bilgiler, değişim bilgileri ve insancıl bilgilerdir. Bu boyutların kapsadıkları alanlar aşağıda verilmiştir (Schleicher, 2012; aktaran, Yılmaz, 2016, s.8):

Temel bilgiler

- ✓ Yüksek akademik standartlar
- ✓ Matematik ve bilimsel yeterlilikleri
- ✓ Temel konular (Matematik, Dil, Fen ve Sosyal vb..)
- ✓ Nicel okuryazarlık

- ✓ Disiplini zihin
- ✓ Geleneksel bilgideki sofistike bilgiler
- ✓ Çekirdek /çerçeve eğitim programları

Değişim bilgileri

- ✓ Özgün düşünce
- ✓ Yaratıcılık
- ✓ İnovasyon
- ✓ Yaratıcı ve eleştirel düşünme
- ✓ Yaratıcı zihin
- ✓ Film, oyun ve dizayn

İnsancıl Bilgiler

- ✓ Etik muhakeme
- ✓ Empati
- ✓ Etik düşünce ve yansıtıcı düşünce
- ✓ Duyguları yönetme ve duygusal zekâ
- ✓ Yüksek etik standartlar

Yeni yüzyılın becerilerine bağlı olarak dünya toplumları yeni eğitim politikaları geliştirmiştir. Özellikle PISA (Program for International Student Assessment - Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı), bu eğitim politikalarının bir yansımasıdır. PISA sonuçlarını bir nevi ölçek olarak kabul eden ülkeler, bunda elde ettikleri başarıya göre yeni becerileri eğitim sistemine ne ölçüde entegre ettikleri noktasında çıkarımlarda bulunmaktadırlar. Ülkemizde de yeni becerilerin eğitim sistemine entegre edilmesine yönelik somut adımlar atılmaya başlanmıştır.

Eğitim sistemlerinin; bireyleri topluma uyumlu, yenilikleri özümseyen, gelişime yön veren nitelikte yetiştirme gayreti, ülkeleri yeni becerilerin uygulanmasına sevk etmiştir. Yapılan çalışmalar 21.yüzyıl becerilerine yöneldiği ve bu becerileri kavramaya odaklı olduğu sürece değişimin gerçekleşeceği muhakkaktır. Çalışmanın konusu olan modelleme ise doğrudan becerilerin bir parçası olmasa da, becerilerin birçoğunu bünyesinde toplayan bir yöntem olarak görülmektedir. Modelleme, becerilerin uygulanmasında önemli bir yöntemdir.

Günümüzde teknoloji, mühendislik, mimarlık, ekonomi ve çok daha farklı alanlarda teknoloji ile barışık, problem çözme ve matematiksel modelleme yapabilme becerisi gelişmiş bireylere ihtiyaç duyulduğundan birçok matematik eğitimi araştırmacısı eğitimde matematiksel modelleme üzerine çalışmalar yapmaktadır. Matematik eğitimcilerini bu çalışmaları yapmaya yönlendiren neden, mevcut yöntemlerin günümüzün gerektirdiği becerileri geliştirmede yetersiz kalması ve öğrencilerin gerçek hayatta kullanabilecekleri matematiksel bilgi ve becerilerin öğretimi için nasıl bir matematik eğitimi yapılması gerekliliğini ortaya koymaktır (Kertil, 2008). Çalışmanın bundan sonraki bölümü, yukarıda kısaca bahsedilen matematiksel modelleme konularını daha ayrıntılı aktarmaya yönelik hazırlanmıştır. Bu kapsamda model tanımı, modelin ihtiyaç duyulduğu yerler, modellerin en yaygın özellikleri, model oluşturma etkinlikleri, modelleme ve matematiksel modelleme tanımları ile matematik öğretiminde modellemenin yeri konularına değinilmiştir.

1.1 Model Tanımı

İnsanlar bilimsel yöntemin henüz tanımlanmadığı ilk çağlardan bu yana karşılaştıkları problemlerle başa çıkma, evreni anlama ve doğaya hâkim olma, daha rahat ve güvenli yaşama isteği doğrultusunda; ya sistemin kendisi üzerinde veya soyut/somut bir modeli üzerinde deneyler yapma ihtiyacı hissetmişlerdir (Aydın ve Özgürtaş, 2007). Modeller diğer sistem(ler)i inşa etmek, tanımlamak veya açıklamak için kullanılan zihinde var olan kavramsal yapılar ile bu yapıların dış temsillerinin oluşturduğu bütündür (Lesh ve Doerr, 2003). Bir diğer ifadeyle modeller, gerçeğin bir şekilde nesnelleştirilebilir parçalarının basitleştirilmiş temsilleridir (Henn, 2007). Aşağıda model ile ilgili farklı tanımlara yer verilmiştir:

(a) Modeller bizim mekanizmasını bilmediğimiz olayları anlamamıza, kurguladığımız hipotezleri test etmemize yardımcı olurlar (Aydın ve Özgürtaş, 2007).

(b) Model dış dünya ile ilgili insan zihninde var olan yapıların tamamıdır (Kertil, 2008).

(c) Modeller dışsal notasyon sistemleri kullanılarak ifade edilen kavramsal sistemlerdir (Lesh ve Doerr, 2003).

Model bazı tanıdık sistemlerin davranışlarını açıklamada, tanımlamada, tahmin etmede kullanılabilecek işlemleri, bağıntıları ve elemanları içeren yapıdır. Modeller, ilgili oldukları sistemin yapısal özelliklerine odaklanır (Lesh ve Doerr, 2003).

1.2 Modellere Nerelerde İhtiyaç Duyulur?

Model, farklı birçok alanda ihtiyaç duyulan bir yapıdır (Lesh ve Doerr, 2003). Lesh ve Doerr (2003) farklı alanlarda ihtiyaç duyulan modelleri birkaç örnek ile şu şekilde açıklamışlardır: (a) Havacılık mühendisliğinde; uçakların tasarımında ve geliştirilmesinde kullanılır. Tasarım ve geliştirme süreçlerinin denenerek kontrol edilmesi hem pahalıdır hem de tehlikeli olabilir. Bu nedenle bu modellere gereksinim duyulmaktadır; (b) Ziraat alanında veya dünya ve atmosferle ilgili bilimlerde bilim insanları, bilgisayar tabanlı simülasyonlar (modeller) inşa ederler. Bu durumda model; gerçek sistemleri basitleştirmek, meydana gelebilecek güçlükleri önceden inceleyebilmek için kullanılır; (c) Ekonomi veya iş yönetimi alanında, denklemler ve grafiklerle istatistiksel modeller oluşturulabilir ; (d) Psikologlar tarafından incelenen insan davranışları farklı teknikler ve veriler kullanılarak bilgisayar programları vasıtasıyla simule edilebilir. Bunun için de uygun bilgisayar programlarının ve yazılımların geliştirilmesi gerekir. Bu sayede, insanda var olan düşünme şekillerinin, anlayış ve yeteneklerde nasıl değişikliklere neden olduğu tespit edilebilir; (e) Günlük deneyimlerinde çocuklar çeşitli metaforlar, analojiler, çizimler, hikâyeler, modeller kullanabilirler. Örneğin elektrik devresi, tüplerin içinde suyun akması şeklinde tanımlanabilir (Lesh ve Doerr, 2003).

1.3 Modellerin En Yaygın Özellikleri

Van Driel ve Verloop (1999) dünya genelinde kabul gören modellerin en yaygın özelliklerinin aşağıdaki şekilde açıklamışlardır:

✓ Bir model, her zaman, model tarafından temsil edilen hedef veya hedefler ile ilişkilidir,

✓ Model aslında bir araştırma aracı olarak kullanılır. Bu araştırma aracı bize gözlenemeyen ve ölçülemeyen hedefler hakkında bilgiler verir. Eğer model bir araç olarak görülüyorsa, onun var olan nesnenin ölçeklendirilmiş kopyası olması doğru olmayacaktır. Böyle bir model bilimsel model olarak kabul görmemektedir,

✓ Hedef ile modelin *belirli benzerlikleri* vardır,

✓ Hedef ile model her zaman *belirli açılardan farklılık* gösterirler. Yapılacak araştırmanın özel amaçları doğrultusunda hedefin bazı ayrıntıları bilinçli olarak model dışında bırakılabilir,

✓ Hedef ile model arasındaki *benzerlikler ve farklılıklarda bir uyum* bulunmalıdır. Bu süreç araştırma soruları ile yönlendirilir (Van Driel ve Verloop, 1999).

Henn (2007) ise modelin sürekli etkileşim içinde olan süreçlere bağlı olarak şekillendiğini vurgulamıştır. Modelin revize edilmesi süreçlerde gerçekleşen deneysel verilere bağlı olduğunu, hedefe dair uygulanan deneylerin ve onlardan elde edilen verilerin modelde değişiklikler yapılmasına imkân sunduğunu belirtmiştir. Bu durum en-iyi modelin geliştirilmesi için oldukça önemlidir (Henn, 2007). Modeller her zaman öznel nitelikler taşıyacaklardır. Bu durum aynı zamanda yanlış kullanım ve yanlış yorumlama tehlikesini de içermektedir (Henn, 2007).

1.4 Bir Model Nasıl Olmalıdır?

Henn (2007) iyi bir modelin nasıl olması gerektiğini şu şekilde açıklamıştır: Gerçeğin matematikteki haritalanmış şekli modeldir. Modelin amacı gerçeklik için sonucun nasıl olacağını yansıtmaktır. Gerçeklik için sonuç oldukça önemlidir. Bu noktada modelin faydalı olabilmesi için verimli sonuçlara yönlendirebilmesi gerekir. Aynı zamanda model gerçek için faydalı ve kullanılabilir de olmalıdır. Modelin, günlük hayatta karşılaştığımız problemlere çözüm üretmesi ve aynı zamanda işleri kolaylaştırır, zamandan, emekten tasarruf sağlar yapıda olması gerekir (Henn,2007).

1.5 Model Oluşturma Etkinliği: Tanım ve Altı Prensibi

Model oluşturma etkinlikleri (model eliciting activities), sonunda bir rakam veya bir kelime ile cevabı bulunan geleneksel problemler olmayıp, rutin olmayan-karmaşık gerçek dünya durumlarını ifade eden, kişilerden bu durumu matematiksel olarak yorumlamasını ve bu durumdan yararlanacak bireylerin karar vermesine yardım etmek amacıyla süreci veya metodu matematiksel olarak betimlemesi ve formüle etmesini gerektiren, olası farklı çözümler içeren problem durumlarıdır(Lesh ve Zawojewsky, 2007; Mousoulides, 2007; aktaran, Eraslan, 2011). Bu etkinlikler kişinin (a) gerçek yaşam durumunu yansıtan bir model geliştirmesini, (b) geliştirilen bu model üzerinde kendi düşünce ve yaklaşımlarını gözden geçirip yeniden düzenlemesini ve (c) ortaya çıkan kavramsal sistemleri açıklayabilmek için çok çeşitli temsili medya (sembol, sözlü dil, çizelge, tablo, grafik, benzetim) kullanmasını teşvik eder (Lesh ve Doerr, 2003).

Lesh, Hoover, Hole, Kelly ve Post (2000) bir model oluşturma etkinliğinin sahip olması gereken altı özelliğini şu şekilde açıklamışlardır: (1) *model oluşturma prensibi:* etkinlik model oluşumuna izin verecek şekilde tasarlanmalıdır. Bu model değişkenler, bu değişkenler arasındaki ilişkiler ve işlemler ile bu ilişkileri düzenleyen desen ve kurallardan oluşmalıdır, (2) *gerçeklik prensibi:* etkinlik gerçek veya gerçeğe yakın verilere dayanan, anlamlı ve bireylerin günlük yaşamlarıyla ilgili olmalıdır, (3) *öz-değerlendirme prensibi:* bireyler kendi kendini değerlendirebilmeli veya çözümlerinin kullanışlılığını ölçebilmelidir, (4) *model dokümantasyon prensibi:* bireyler kendi düşünme süreçlerini (varsayımlar, amaçlar ve çözüm yolları) çözümleri içinde gösterebilmelidir, (5) *model genelleme prensibi:* ortaya konulan çözümler genellenebilir veya benzer başka durumlara kolayca adapte edilebilir olmalıdır ve (6) *etkili prototip prensibi:* üretilen model mümkün olduğunca basit fakat matematiksel olarak da bir o kadar önemli olmalıdır.

1.6 Modelleme Tanımı

Konuyla ilgili literatür taraması yapıldığında modelleme ile ilgili birçok tanımın yapıldığı görülmektedir. Bu tanımlardan bazıları şunlardır:

✓ Modelleme, spesifik durumlarda, spesifik amaçlar için temsili tanımlamalar geliştirme sürecidir (Lesh ve Lehrer, 2003).

✓ Modelleme, problem çözenin içinde bulunduğu problem durumunu basitleştirmesi, yapılandırması ve daha açık bir hale getirmesidir (Niss, Blum ve Galbraith, 2007).

Modelleme, herhangi bir problem durumunda, son ürün, sonuç olarak ifade edebileceğimiz modeli elde etme sürecidir (Sriraman, 2005).

1.7 Matematiksel Modelleme Tanımı

Matematiksel modelleme gerçeklik ile matematik arasında gidip gelinen bir gerçek yaşam problemi ile başlar (Blum, 1996). Problemi basitleştirerek, yapılandırarak ve ideal hale getirerek gerçek bir model elde edilir. Gerçek modelin matematikselleştirilmesi ile matematiksel model elde edilir (Blum, 1996). Bu model üzerinde çalışarak matematiksel sonuca ulaşılır. Bu çözüm ilk önce yorumlanır daha sonra da doğrulanır (Blum, 1996).

Matematik gerçek dünyadaki farklı sistemlerin davranışlarını tanımlamak, analiz etmek ve tahmin etmek için bir araç iken, matematiği gerçek dünya problemlerinin çözümünde kullanmak matematiksel modelleme yapmaktır (Verschaffel, Greer ve De corte, 2002). Matematiksel olarak anlamaya çalışılan duruma ait sürecin başlangıcından, durumun bir resmi elde edilen son ana kadar geçen tüm sürece matematiksel modelleme denir (Pollak, 2007). Bir diğer ifadeyle *Matematiksel modelleme* bir olayın, olgunun, olaylar arasındaki ilişkilerin matematiksel olarak ifade edildiği ve inşa edilen matematiksel model ile çalışarak, matematiksel örüntülerin ortaya çıkarıldığı karmaşık bir süreçtir (Verschaffel, Greer ve De corte, 2002).

Matematiksel modelleme şüphesiz, orijinal duruma ışık tutmak için gerçek dünyadan bir durumu alıp, incelenmekte olan duruma uygun değişkenler üzerinde birkaç basit hesap yaparak yorumlamaktan öte, verilen durumun gözlemlenmesi, ilişkilerin ortaya çıkarılması, matematiksel analizlerin uygulanması, sonuçların elde edilmesi ve modelin tekrar yorumlanması süreçlerini içerir. Bu döngüsel süreç sonunda ya bir sonuç raporu elde edilir ya da yeni bir modelleme döngüsü başlar (Swetz ve Hartzler, 1991). Matematiksel modellemeye süreklilik kazandıran, her zaman daha iyi bir çözüm yolunun olabileceğidir (Stillman, Galbraith, Brown ve Edwards, 2007).

1.8 Matematik Öğretiminde Modellemenin Yeri ve Önemi

Matematiği gerçek hayatla ilişkilendirmek (günlük yaşam, mesleki alan ve diğer disiplinlerle) çok uzun süredir zorunlu eğitimin amaçları arasındadır. 1960'lı ve 1970'li yıllarda yapılan "modern matematik" reformunun başarısızlıkla sonuçlanmasından beri, ilk ve orta öğretim matematik müfredatında günlük hayatla ilişkilendirilmiş uygulamalara ihtiyaç duyulmaktadır. Kaynak kitaplar günlük hayatla çokta ilişkili olmayan hatta hiç ilişkili olmayan sorularla doludur (LEMA, 2007). Bu nedenle araştırmacılar, öğrenenlerin okul yaşantılarından sonra karşılaşacakları gerçek dünya problemlerini çözebilmeleri, gelecekte sahip olacakları mesleklerinde veya bir vatandaş olarak karşı karşıya kalacakları gerçek dünya problemlerini çözebilmeleri ve ilerideki öğrenmelerini kolaylaştırmak için hayata nasıl daha iyi bir şekilde hazırlanabilecekleri sorusunun cevabını bulmaya çalışmaktadırlar (English, 2006; Mousoulides, 2007). Bireylerin okul başarılarıyla, gerçek yaşamdaki başarıları arasında bir denge kurmak ve okulda kazandıkları becerileri gerçek yaşamda da uygulayabilmelerini sağlamak amacıyla ortaokul matematik müfredatı vizyonunu;

✓ Yaşamında matematiği gerektiği şekilde kullanabilen,

✓ Gerçek yaşam durumlarıyla matematik arasındaki ilişkiyi kurabilen,

✓ Karşılaştığı problemlere farklı çözüm yolları üretebilen,

✓ Analitik düşünme, akıl yürütme ve ilişkilendirme gibi becerilere sahip, bireyler yetiştirmek olarak yeniden ifade etmiştir (MEB, 2005a; MEB, 2018).

İlköğretim Matematik Öğretmenliği ve Matematik Öğretmenliği lisans programlarında yapılan güncelleme ile matematiksel modelleme dersi zorunlu hale gelmiştir. İlköğretim Matematik Öğretmenliği lisans programında yer alan *Matematik Öğretiminde Modelleme* dersi içeriği;

✓ Matematiksel modelleme ve problem çözme

✓ Matematik öğretiminde modeller ve modelleme süreci

✓ Modelleme döngüsü (problemi tanımlama, manipülasyon, tahmin ve doğrulama),

✓ Model geliştirme basamakları,

✓ Model geliştirme prensipleri,

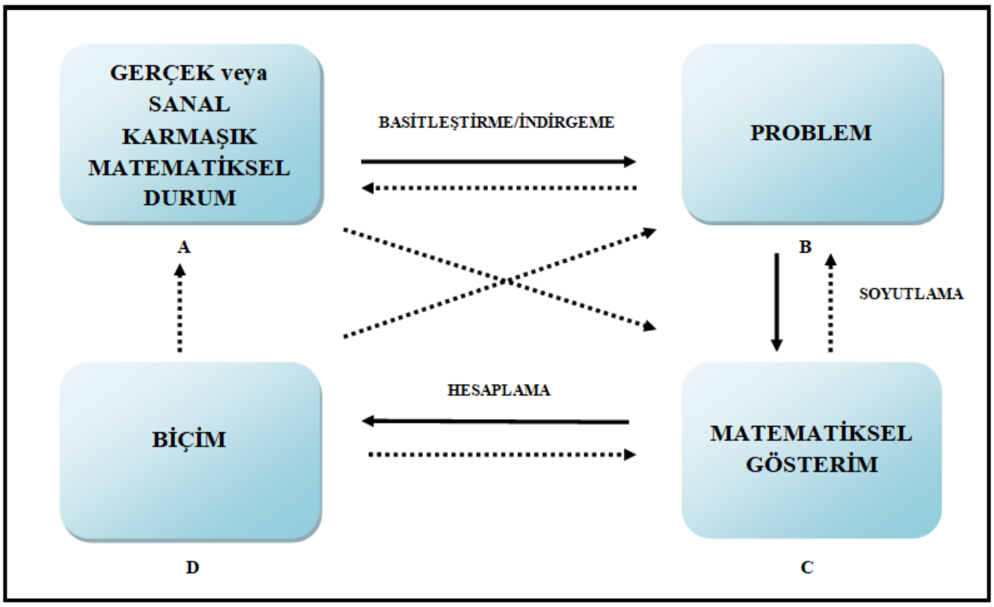
✓ Modelleme etkinliklerinin matematik sınıflarında uygulanması ve öğretmenin rolü,

✓ Matematiksel modelleme etkinlikleri hazırlama ve öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin izlenmesi olarak belirlenmiştir (YÖK, 2018).

Matematiksel modelleme sadece bireylerin becerilerini kullanarak üstesinden gelebileceği sorular yöneltme değil aynı zamanda kritik durumda olan matematik öğrenimini besleyecek etkili bir yöntem olarak da görülmektedir (Skovsmose, 1994). Uzun yıllar matematiksel modelleme üzerinde çalışmış olan Lesh ve Doerr (2003), matematik eğitiminde yapılandırmacı yaklaşıma alternatif olarak *model ve modelleme yaklaşımını* önermişlerdir. Yapılandırmacı anlayışa göre zihnimizde var olan her bir bilgi veya yapı kişi tarafından yapılandırılmaktadır. Dolayısıyla eğitimde öğrencilerin kendi bilgilerini yapılandırma süreçlerine katkıda bulunmak çok önemlidir. Ancak matematik eğitimi için düşünüldüğünde, öyle kavramlar ve kurallar vardır ki herhangi bir şekilde bireyin zihninde bir yapılanma sürecinden geçmesi gerekmez. Model ve modelleme yaklaşımı ise zihinde var olan her bir bilginin bir yapılandırılma sürecinden geçmesinin gerekmeyeceği (örneğin basit bilgi seviyesinde kalacak olan matematiksel formül ve kurallar), bir başka deyişle bazı yapıların yapılandırılmaya ihtiyacı olmadığını belirtmişlerdir (Lesh ve Doerr, 2003). Lesh ve Doerr (2003), zihinsel aktivite olarak zihinde var olan pek çok süreçten (sınıflama, organize etme gibi) sadece bir tanesinin yapılandırma süreci olduğunu vurgulamışlardır. Dolayısıyla yapılandırmacı yaklaşımın öğrenme ve zihinsel aktiviteleri sadece yapılandırma süreci ile kısıtladığını, matematik eğitiminde modelleme perspektifinin ise yapılandırma sürecinden çok zihindeki oluşmuş ya da oluşacak yapılar üzerine yoğunlaştığını belirtmişlerdir. Lesh ve Doerr (2003)'e göre matematik eğitiminin en önemli amacı öğrencilerin yaşadıkları olayları yorumlayabilecekleri zihinsel yapılar (kavramsal sistemler) geliştirmelerine yardımcı olmaktır. Modelleme perspektifi bu zihinsel yapıların, öğrencilerin kendileri tarafından oluşturulmaları konusunda yapılandırmacı yaklaşımla hemfikirdir. Fakat buradaki ince fark, her zihinsel yapının yapılandırılmadığı görüşüdür.

Modelleme yaklaşımına göre matematiksel düşünmede bireylerin kullandıkları zihinsel aktivitelerin hepsi zihinsel *modellerdir* (Lesh ve Doerr, 2003). Diğer bir deyişle *model*, dış dünya ile ilgili insan zihninde var olan yapıların tamamıdır. *Modelleme* ise bir problem durumuyla karşılaşıldığında, bunu zihinde koordine etme, sistemleştirme ve düzenleyip modeller kullanarak bir örüntü oluşturma aktivitesidir (Lesh ve Doerr, 2003). *Model* bir süreç sonucunda oluşturulan ürünü ifade ederken, *modelleme* ise ürünün oluşturulma sürecini temsil eder (Lesh ve Doerr, 2003; Srirman, 2005).

Lester ve Kehle (2003) model ve modelin tanımladığı dünya arasında bazı ayrımlar olduğunu belirtmişlerdir. Kimi özelliklerin modelde varken tanımlanan dünyada bu özellikler olmayabilir. Aynı durum tam tersi olarak da düşünülebilir. Yani tanımlanan dünyada olan bazı özelliklerden de model muaf olabilir. Bu farklılığa bağlı olarak her iki dünyanın aynı olmadığını söyleyebiliriz. Matematiksel modelleme ve onun süreçlerini açıklayan birçok araştırma yapılmıştır. Bu araştırmalar, matematiksel modellemenin bir durumu ve olayı örüntüler vasıtasıyla matematiksel olarak ifade etme şeklidir. Bu modelleme süreçleri üzerine yapılan çalışmalardan biri Lester ve Kehle'ye (2003) aittir.



Şekil 1: *Lester ve Kehle (2003) Tarafından Geliştirilmiş Matematiksel Modelleme Süreci*

Yeni yöntemleri uygulayacak olan öğretmenlere yeni düşünme becerilerini kazandırmak için pek çok çalışmalar ve projeler yapılmakta, öğretmenleri ezbere dayalı geleneksel öğretim yöntemlerinden kurtararak, öğrencilerin kavramları kendi kendilerine oluşturacakları daha anlamlı öğrenme ve öğretme aktiviteleri sağlamak amaçlanmaktadır (NCTM, 2000).

Eğitimde uzun süre uygulanmış geleneksel yöntemde, öğretmen sahip olduğu farklı modelleri, fazlasıyla aktif olduğu sınıf ortamında öğrencilere aktarmaktaydı. Bu geleneksel yöntemde öğretmenin modelleri geliştirmesi pek de mümkün değildi. Zira öğretmenlerin böyle bir beklentisi de yoktu. Bir süre sonra durağan bir yapı sabit bir şekilde işlemeye devam etmekteydi. Bunun asıl nedeni ise öğretmenin bilgi kaynağı, öğrencinin de alıcı görevini üstlenmiş olmasıdır. Tek tip öğrenme yolunun veya tek çözüm yönteminin terk edildiği modelleme yaklaşımında ise öğretmen yeni arayışlara girmek zorunda kalmıştır. Çünkü öğretmen farklı çözüm yolları arayışında bulunmak, gerçek hayat durumunu yorumlama biçimini değerlendirmek, zihinsel model sınırlarını zorlamak gereği hisseder. Bu sayede öğrencilerinin de farklı çözüm yollarını bulma gayretine girmesi öğretmenin de kendi model imajını zenginleştirmesi için ortam oluşur. Öğrenme ve öğretme ortamı zenginlik kazanır.

Böyle bir yöntemde öğretmenlerin, öğrencilerinin farklı bakış açıları kazabilmeleri için kendilerini sürekli geliştirmeleri, geniş perspektife sahip olmaları gerekir.

Model oluşturma etkinlikleri okul öncesi, ilk ve ortaokulun tüm kademeleri ile ortaöğretim ve yükseköğretimin öğrencilerini de kapsayacak şekilde genişletilip bunların model oluşturma süreçlerinin incelenmesi, modelleme ile ilgili bilgilerinin zaman içinde nasıl gelişip değiştiğinin belirlenmesi, modellemenin matematiğe karşı olan görüş ve düşüncelerin değişimindeki etkileri incelenebilir (Şahin, 2014; Şahin ve Eraslan, 2016; Şahin ve Eraslan; 2017; Şahin ve Eraslan, 2018). Anasınıfından üniversiteye kadar eğitimin her aşamasında seviyeye uygun modelleme etkinlikleri kullanılabilir Matematiksel modelleme bilginin çeşitli alanlarında öğrencileri araştırmaya yönlendirir. Eğitim sistemimizde yapılan yeni ve köklü değişiklikler ile başarıyı da olumlu yönde etkileyecektir. Öğrencilerin müfredatla aktarılan bilgileri öğrenmesi, başarılı olması için yeterli olmayabilir. Bunun yanında öğrencilerin problem çözme becerilerini kazanmış olması, matematiksel modelleme yapabilmesi gerekir. Öğrencilerin bu kazanımların tümüne hâkim olabilmesi için onlara rehberlik eden öğretmenlerin de yeterli donanıma sahip olması gerekir. Bu durum, öğretmenlerin eğitim ortamında ne kadar önemli olduklarının bir işaretidir. Elbette yeni müfredatın işlerlik kazanması için onu uygulayan öğretmenlerin ve öğrencilerin tümüyle yeniliği benimsemeleri gerekir. Özellikle bazı öğretmenlerin müfredatın öğrenciler üzerinde etkisini sadece takip ettiği görülmektedir. Oysa öğretmenlerden, öğrencilerle işbirliği içinde olmaları, tartışmalarda zenginleşen öğrenme ortamı oluşturmaları, öğrencileri hata yapmaktan korkmayarak hatalardan da farklı kazanımlar elde edebileceklerine inandırmaları beklenir. Modelleme hakkında değerlendirmeler yapılırken, ortaokul matematik öğretmenlerinin bu konuda eğitim almadıkları da göz ardı edilmemelidir. Bu sürecin verimli olması için bir dizi önlem alınabilir. Öğretmenlerin süreci ve sistemi daha iyi öğrenmeleri ve kendilerini buna hazırlamaları için onlara rehberlik edilmedir. Ayrıca öğretmenlerden modelleme hakkında sürekli geri dönütler alınabilir. Bu sayede sistemin eksikleri bizzat onu uygulayacaklar tarafından giderilebilir. Olumlu ve olumsuz değerlendirmeler, modelleme sisteminin zaman kaybetmeden en iyi şekliyle hayata geçirilmesine yardımcı olacaktır.

1.9 Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın temel amacı, ortaokullarda görev yapan matematik öğretmenlerinin model oluşturma süreçlerinin incelenmesidir. Bu genel amaç doğrultusunda aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

(1) Ortaokul matematik öğretmenleri model oluşturma etkinlikleri boyunca hangi düşünme süreçlerini kullanmaktadırlar?

(2) Ortaokul matematik öğretmenlerinin model oluşturma süreçlerinde varsa karşılaştıkları güçlükler nelerdir?

Çalışmadan elde edilecek veriler ışığında öğretmenlerin model oluşturma sürecindeki durumlarının tespit edilmesi ve eğer varsa karşılaşılan güçlüklere yönelik farklı çözüm ve önerilerin geliştirilmesi hedeflenmektedir. Bu sayede geliştirilecek öğretim yöntemleri ile öğretmenlerimizin zorluk veya eksikliklerini tamamlamasına olanak sağlanırken uzun vadede onların yetiştireceği öğrencilerin analitik ve üst-düzey düşünme gelişimlerine çok daha fazla katkı sağlanması beklenmektedir.

İKİNCİ BÖLÜM

II. KURAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde, modelleme yaklaşımları ve model oluşturma süreçlerinde farklı süreçler tanıtılmıştır. Devamında cebir ve matematiksel modelleme ilişkisi üzerine bilgi verilmiştir. Son olarak da PISA ve matematiksel modelleme arasındaki ilişkiden bahsedilmiştir.

2.1 Matematiksel Modelleme Yaklaşımları

Matematiksel modelleme son yıllarda matematik eğitimi araştırmacılarının ilgisini çeken bir konudur (Mousoulides, Christou ve Sriraman, 2006). Matematiksel modelleme ile ilgili çalışmalar ve bu çalışmalarda bahsedilen matematiksel modelleme tanımları ve yaklaşımları birbirinden farklı teorik temellere dayanmaktadır (Kaiser, Blomhøj ve Sriraman, 2006). Her bir modelleme yaklaşımın matematik eğitimi açısından tanımı, amacı ve müfredatta uygulanma biçimi de farklılık göstermektedir. Dolayısı ile matematiksel modelleme ile ilgili bütün dünya literatüründe kabul görecek tek bir tanım vermek mümkün görünmemektedir. Kaiser ve Sriraman 'a (2006) göre literatürde var olan modelleme yaklaşımları beş tanedir. altıncı yaklaşım olan bilişsel modelleme bir üst yaklaşım olarak ele alınabilir. Kaiser ve Sriraman 'a (2006) göre modelleme yaklaşımları aşağıdaki şekildedir:

2.1.1 Realistik veya Uygulamalı Modelleme

Gerçek hayatta matematiğin pratik uygulamalara yansıtılması realistik modellemeyi ifade eder. Matematiksel modelleme, öğrencilerin farklı düşünce, problem ve kavramlara anlam kazandırma girişimleridir. İşte tam da bu noktada realistik ve uygulamalı model olarak tanımlanan yaklaşım devreye girer ki bu yaklaşım matematiksel modeller ve bunların gerçek hayata yansımalarını kabul eder. Çıkış noktası Anglo-Saxo pragmatizmi ve matematik uygulamalarıdır. Önceki yaklaşımlardan Pollak'ın pragmatik yaklaşımı ile ilişkilidir. Izard, Haines, Crouch ve Neill gibi isimler modellemeye realistik bir açıdan bakmaktadırlar.

2.1.2 Bağlamsal Modelleme

İnsan zihninde kavramsal sistem olarak yer etmiş olan modeller, farklı notasyon sistemleri ile dış dünyaya aktarılır. Modeller karmaşık sistemleri oluşturan, tanımlama ve açıklama için kullanılan, kuralları, işlem ve ilişkileri içeren sistemlerdir. Matematiksel modelleme ise modelin oluşturulma sürecidir. Kavramsal modeller etkin matematiksel modelleme süreciyle şekillenirler. Matematiksel modelleme süreci modelleri oluşturma noktasında katı değildir. Bu sayede, modelleme süreci, birbirinden farklı çokça çözüm yolu üretilmesine imkân sunar. Deneme yanılma uygulamaları ve farklı çözüm yollarını bulmak için harcanan zihinsel performans, matematiksel modelleme sürecinin asıl istediğidir. Amaç öğrencinin, öğrenme sürecinde edindiği kazanımlarla olayları yorumlama için gerekli olan kavramsal sistemi oluşturmasına yardımcı olmaktır. Çıkış noktası Amerikan problem çözme tartışmaları ve günlük okul pratikleridir. Önceki yaklaşımlardan sistemler yaklaşımına neden olan bilgi işleme yaklaşımı ile ilişkilidir. Bu yaklaşımın önemli temsilcileri Iverson-Larson, Sriraman, Lesh ve Doerr' dir.

2.1.3 Eğitimsel Modelleme

Eğitimsel modelleme ikiye ayrılır: didaktik ve bağlamsal. Öğrenme sürecinin tasarlanması ve geliştirilmesi didaktik modellemenin hedefidir. Kavram tanıtımı ve gelişimi ise bağlamsal modellemenin hedefleridir. Çıkış noktası didaktik teoriler ve öğrenme teorileridir. Önceki yaklaşımlardan bütünleştirici yaklaşım (Blum ve Niss) ve bilişsel hümanistik yaklaşımın daha fazla gelişimi ile ilişkilidir. Bu yaklaşımın önemli temsilcileri Niss, Freudenthal, Henning, Keune, Blomhoj, Hoff, Keldsen, Galbraith, Stilman, Lingefjard ve Maaß' dir.

2.1.4 Sosyo-Eleştirel Modelleme

Çıkış noktası politik sosyolojideki sosyo-eleştirel yaklaşım olan ve dünya çapında eleştirel anlayış gibi pedagojik hedefleri olan bu yaklaşım özgürlükçü yaklaşımdan etkilenmiştir. Yaşanılan çevre ve kültürel yapıya uygun eleştirel düşünme becerileri kazandırma temel hedefidir. Önceki yaklaşımlardan özgürlükçü yaklaşım ile ilişkilidir. Barbaso bu yaklaşımın önemli temsilcilerindendir.

2.1.5 Epistemolojik veya Teorik Modelleme

Temelinde teorileri ilke edinen bu yaklaşım, teorilerin geliştirilmesini amaç edinmiştir. Bu modellemenin kaynağı roman epistemolojisine dayanır. Önceki yaklaşımlardan "eski" Freudenthal'ın bilimsel hümanistik yaklaşımı ile ilişkilidir.

Matematiksel kavramlar arası ilişkilerin kurulması ve bunların üzerine konuşulması ana hedefidir. Bu yaklaşımın önde gelen isimleri Brousseau, Chevallard, Garcia, Gascon, Ruiz, Higueras ve Bosch’dur.

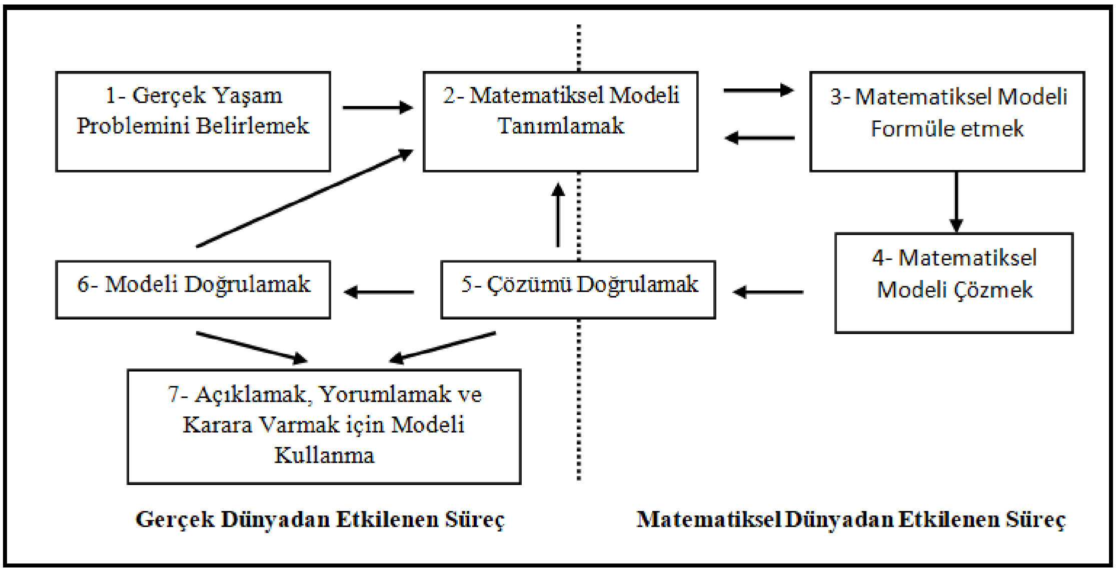
2.1.6 Bilişsel Modelleme

Modelleme sürecindeki zihinsel süreçlerin analizine dayanan ve bir çeşit üst yaklaşım olarak tanımlayabileceğimiz bilişsel modelleme, zihinsel süreçlerin kavranmasını amaç edinmiştir. Bu modellemede model, zihinsel görüntü (imge) hatta fiziksel resimlerdir. Matematiksel düşünme süreçlerinin etkinliğinin sağlanabilmesi ve süreçlerin sağlıklı yürütülmesi için modellemeyi soyutlama veya genelleme şeklinde bir zihinsel süreç olarak irdeler. Çıkış noktası bilişsel psikolojidir. Bu yaklaşımın önemli temsilcileri Blum, Leiss ve Borromeo Ferri'dir.

2.2 Matematiksel Modelleme Süreci

Eğitimin amaçlarının günlük yaşamda karşılaşılan problemleri çözebilen bireyler yetiştirmeye eğilimi, matematiksel modellemenin önemli bir bileşen olarak öğretim programlarında ele alınmasına sebep olmuştur. Bu bağlamda araştırmacılar matematiksel modelleme yapabilen bireyler yetiştirmek için öğrencilere yaşatılması gereken süreci belirlemek amacıyla, matematiksel modelleme sürecinde geçilen basamakları ve bu basamaklar arasındaki geçişleri belirlemeye çalışmışlardır ve yapılan çalışmalar matematiksel modellemenin birçok etkinliği içeren karmaşık bir süreç olduğunu göstermiştir (Justi ve Gilbert, 2002).

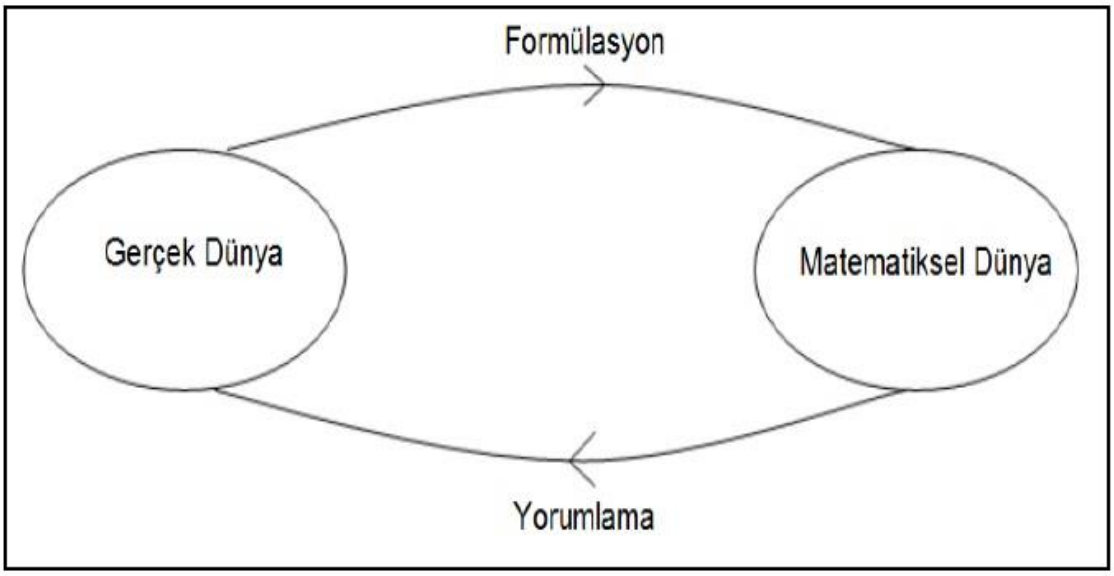
Bu alanda yapılan ilk çalışmalardan biri Kapur (1982) tarafından yapılmıştır. Kapur (1982) matematiksel modelleme sürecinin; uygun değişkenleri seçme, değişkenler arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarma, değişkenler ve ilişkileri dikkate alarak matematiksel bir model ortaya koyma, model ve modelin uygulamalarını test etme basamaklarının bütünü olarak açıklamaktadır. Mason (1988) ise matematiksel modelleme sürecini gerçek dünyadan etkilenen ve matematiksel dünyadan etkilenen iki farklı sürece ayırmış ve bu süreçlerde yaşanan basamakları Şekil 2’deki gibi açıklamıştır:



Şekil 2: *Matematiksel Modellemedeki Basamaklar (Mason, 1998)*

Mason (1988), ilk basamaktan son basamağa doğru gidişin genel olarak tanımladığı basamaklar bağlamında gerçekleştiğini, ancak özellikle gerçek sonuçlara ulaşırken karşılaşılan yapının daha karmaşık olduğunu vurgulamaktadır. Mason (1988), oluşturulan modelin gerçeğe uygun olduğu düşünülse de, modelden elde edilen sonuçların gerçek yaşama uygun olmayan veya gerçek yaşama dönüştürülemeyen sonuçlar olduğu görülebileceği ve bu durumda da geçilen süreç yeniden incelenmesi ve gerekli basamağa yeniden dönülmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Dolayısıyla Mason (1988), kendinden önceki çalışmalara farklı olarak matematiksel modelleme sürecinde modelin doğrulanması basamağına yer vermektedir.

Mason (1988) tarafından tanımlanan matematiksel modelleme sürecinden farklı olarak, Berry ve Houston (1995), matematiksel modelleme sürecini basit bir şekilde gerçek dünya ile matematiksel dünya etkileşimi olarak ifade edilebileceğini dile getirmekte ve Şekil 3'deki gibi şema ile göstermektedir.



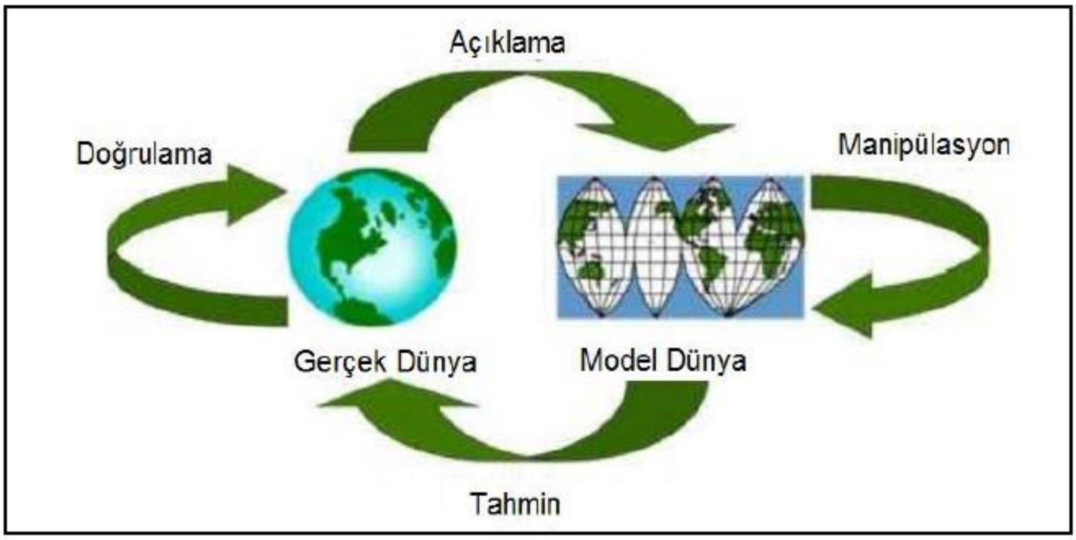
Şekil 3*: Matematiksel Modelleme Sürecinin Basit Bir Görünümü (Berry ve Houston, 1995)*

Bu sürece göre matematiksel modelleme sürecinde gerçek yaşamdaki bir problem, matematiksel bir probleme dönüştürülmekte, matematiksel olarak elde edilen sonuçlar da gerçek dünyada yorumlanarak gerçek yaşam problemine çözüm getirilmektedir. Berry ve Houston (1995) bu süreci Tablo 1'deki gibi ayrıntılandırmış ve her basamakta ortaya çıkması beklenen anahtar davranışları açıklamıştır.

Tablo 1: Matematiksel Modelleme Sürecindeki Temel Basamaklar ve Bu Basamaklara Ait Anahtar Davranışlar (Berry ve Houston, 1995)

Basamaklar	Anahtar Davranışlar
1. Problemi Anlama	Gerçek yaşam problemi tanımlanarak gerekli veriler toplanır, analiz edilir.
2. Değişkenleri Belirleme	Model oluştururken kullanılacak değişkenler belirlenir.
3. Matematiksel Model Oluşturma	Varsayımlar doğrultusunda matematiksel yapılar kullanılarak, gerçek durumu temsil edecek matematiksel model oluşturulur.
4. Matematiksel Problemi Çözme	Matematiksel bilgiler kullanılarak oluşturulan model ile problem çözülür.
5. Çözümü Yorumlama	Matematiksel analiz sonuçları değerlendirilir ve modelin doğrulanması için gerekli verilerin ne olduğuna karar verilir.
6. Modeli Doğrulama	Uygun veriler kullanılarak modelin ideal olup olmadığı test edilir. Model ve modelden elde edilen sonuçlar sorgulanır.
7. Başka Problemler İçin Modeli Geliştirme..	Varsayımların geliştirilmesiyle yeni modeller geliştirilir. Çözme, yorumlama ve doğrulama süreçleri tekrar edilir.
8. Rapor	Problem durumu ve çözümünü içeren bir rapor hazırlanır.

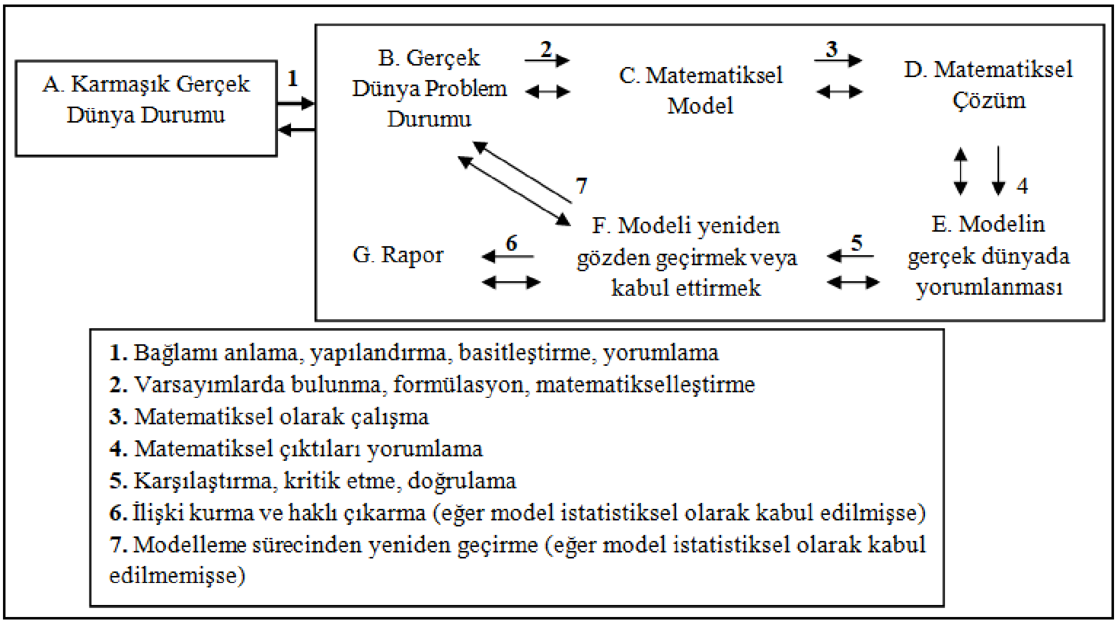
Lesh ve Doerr (2003) ise Berry ve Houston (1995) gibi matematiksel modelleme sürecini gerçek dünya ile model dünya arasında geçişlerden oluşan basit bir görünümle Şekil 4'deki gibi açıklamaktadır. Berry ve Houston (1995) tarafından tanımlanan süreçten farklı olarak matematiksel modelleme sürecini açıklama, manipülasyon, tahmin ve doğrulama olmak üzere Şekil 4'deki gibi dört basamakla açıklamaktadır.



Şekil 4: *Matematiksel Modelleme Döngüsü-1 (Lesh ve Doerr, 2003, s.17)*

Şekil 4'e göre modelleme sürecinde iki farklı dünyanın varlığından söz edilebilir. Bunlardan biri gerçek diğeri ise model dünyadır. Bu iki dünya arasında ilişki kurulabilmesi gerekir. Şekil 4'te yer alan 4 aşamayı Lesh ve Doerr şu şekilde açıklamışlardır: iki dünya arasında kurulması gereken ilk ilişki "Açıklama Basamağı"dır. Açıklama basamağında gerçek dünyadan çözümü mümkün bir problem belirlenir. Bu problemin analizi sağlanır ve probleme dair verilen bilgilerin önemi belirlenir. Problemle ilgili bilgiler önem sırasına göre sıralanır ve durum basitleştirilir. Gerçek yaşama dair varsayımlar da açıklama basamağında oluşturulur. İkinci ilişki basamağı ise "Manipülasyon Basamağı"dır. Burada ise probleme dair ilk basamakta belirlenmiş olan bileşenler matematiksel olarak ifade edilir, bileşenler arasında ilişki kurulur. İkinci ilişki basamağı matematiksel becerilerinin devreye girdiği basamaktır. Gerçek dünya ve model dünya arasında kurulması gereken üçüncü ilişki "Tahmin Basamağı"dır. Bu basamakta, kabaca oluşturulmuş model daha gerçekçi bir hal alır. Modelle elde edilen veriler gerçek dünya ile örtüştürülür. Problemin çözülmesi için ortaya atılan fikirler ve yollar burada belirir. Üretilen çözümlerin problemi ne derece çözebileceği, çözüm önerilerinin ne denli tutarlı olduğu irdelenir. Diğer ilişki olan "Doğrulama Basamağı"nda ise tüm çalışmaların ve tahminlerin gerçek dünya ile ne denli uyumlu olup olmadığına bakılır. Model gerçek durumda ne ölçüde kullanışlıdır ve ne denli geçerlidir bunlar değerlendirilir. Modelin, önceden belirlenmiş tanımlı amaçla ne denli örtüştüğüne bakılır.

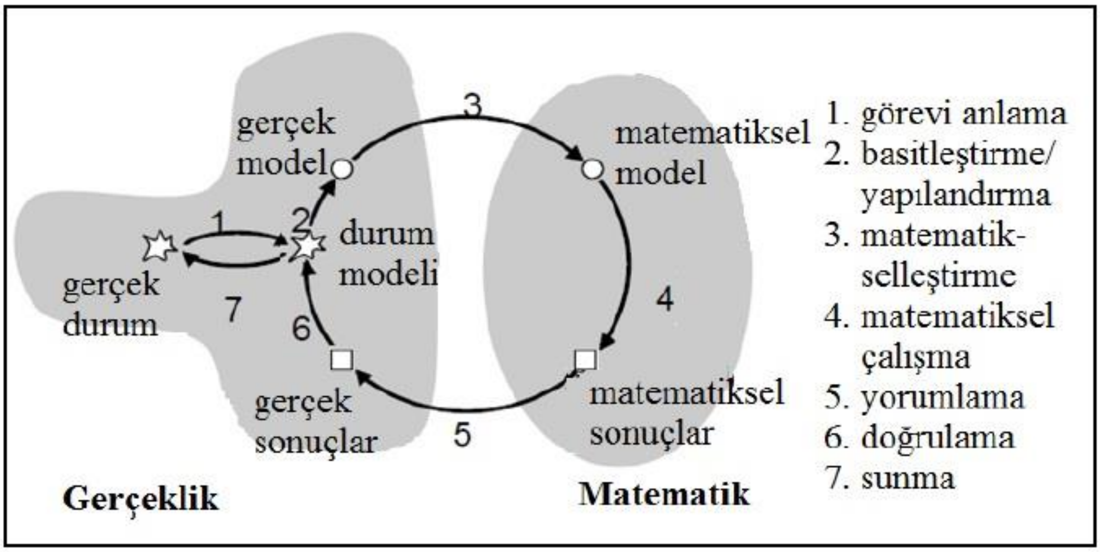
Bazı araştırmacılar matematiksel modelleme sürecinde ortaya çıkan basamakların yanı sıra, basamaklar arasındaki geçişi de betimlemiştir. Galbraith ve Stillman (2006) matematiksel modelleme sürecini karmaşık dünya durumu, gerçek dünya problemi durumu, matematiksel model, matematiksel çözüm, modelin gerçek dünyada yorumlanması, modelin revize edilmesi veya kabul edilmesi son olarak da rapor basamaklarını içeren döngüsel bir süreç olarak açıklamış ve bu basamaklar arası geçişlere karşılık gelen süreçleri belirlemiştir. Galbraith, Stillman, Brown, ve Edwards (2007) ise geçişlere karşılık gelen süreçleri matematiksel modelleme sürecine entegre ederek matematiksel modelleme döngüsünü Şekil 5'deki gibi açıklamaktadır.



Şekil 5: *Matematiksel Modelleme Döngüsü-2 (Galbraith ve diğ., 2007)*

Şekil 5'te yer alan matematiksel modelleme döngüsünde basamaklar arasındaki oklar üst bilişsel aktiviteleri belirtir. Bu iki yönlü oklar ileri-geri yansımalar şeklindedir.

Blum ve Leiß (2007), DISUM(Didactical intervention modes for mathematics teaching oriented towards self-regulation and directed by tasks) projesinde matematiksel modelleme sürecini tanımlayan diğer araştırmacılar farklı olarak matematiksel modelleme sürecindeki —durum modeli (situation model) basamağına odaklanmıştır. Blum ve Leiß (2007) tarafından tanımlanan matematiksel modelleme süreci Şekil 6'da verilmiştir.



Şekil 6: *Matematiksel Modelleme Döngüsü-3 (Blum ve Leiß, 2007)*

Blum ve Leiß (2007), problem durumu olarak verilen bağlam, problem metninde nasıl tanımlandığından bağımsız olarak öğrencilerin bağlamla ilgili deneyimlerine bağlı bir şekilde tanımlandığını vurgulamaktadır. Yani bağlam ile ilgili gerçek durum ile bireyin deneyimleri doğrultusunda temsil edilen durum birbirinden farklıdır. Bundan dolayı da bağlam ile ilgili öğrenci tarafından yapılan tasvir, matematiksel modelleme sürecinde durum modeli olarak adlandırılmaktadır.

Şen-Zeytun (2013), öğretmen adaylarının matematiksel modelleme süreci boyunca geçtiği basamakları belirlemek amacıyla yapmış olduğu çalışmada, matematiksel modelleme sürecinde geçilen basamakların yanı sıra bu basamakların içerdiği alt basamakları da belirlemiştir. Şen-Zeytun (2013) matematiksel modelleme sürecini aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

1. **Basamak: Anlama**

Sürecin bu ilk basamağında; doğru anlamayı sağlamak için problemi okuma/tekrar okuma, problemi çeşitli koşullarda (matematiksel yapı, matematiksel içerik, zorluk derecesi, problemin bağlamsal yapısı gibi) değerlendirme, verilen bilgileri özetleme alt basamakları yer almaktadır. Verilen bilgileri özetleme basamağında; anahtar noktaları yazma, çizim kullanma alt basamakları yer alır.

2. Basamak: Planlama

Matematiksel modelleme sürecinin ikinci basamağı olan planlama; zihinde problem durumunu hayal etme ve temsil etme (kendilerini problem durumunda hayal etme, bağımlı/bağımsız bağlamları gözünde canlandırma), plan tasarlama (bir önceki deneyim ile problemin bağlantısını kurma, değişkenleri ve kriterleri belirleme, varsayımlar yapma, durum modelini çizme, matematiksel kavramları kullanmak için araştırma yapma ve esas imkânları sağlayacak bir plan oluşturmayı amaçlama alt basamaklarından oluşan kapsamlı bir süreci kapsamaktadır.

3. Basamak: Çalışma

Sürecin üçüncü basamağı olan çalışma basamağı; sezgisel bir karara dayalı planın uygulanması, matematik kullanarak planın uygulanması alt basamaklarından oluşmaktadır. Matematik kullanarak planın uygulanması alt basamağı ise kendi içinde; matematiksel temsil etme, matematiksel ilerleme için stratejiler uygulama (matematiksel analiz) ve ifadeleri basitleştirme alt basamaklarından oluşmaktadır.

4. Basamak: Yorumlama ve Doğrulama:

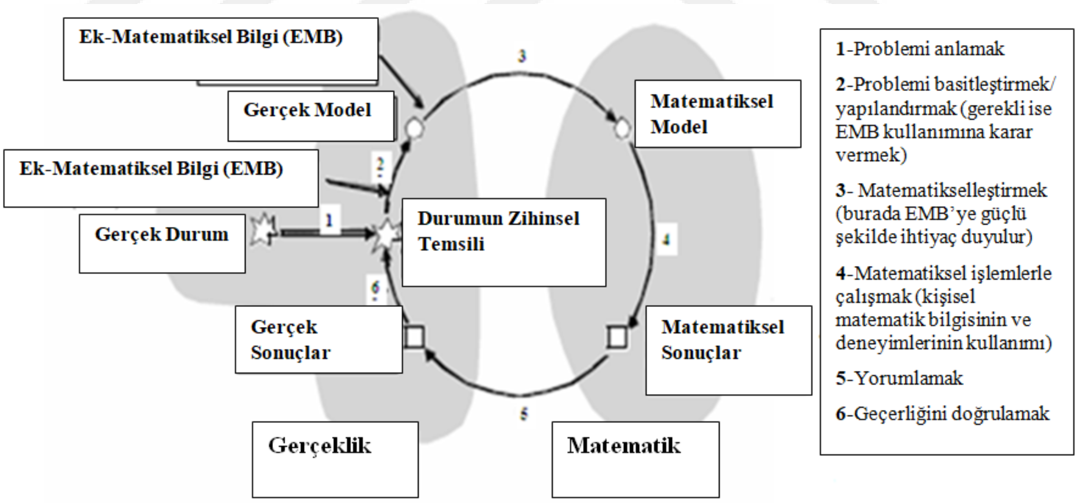
Matematiksel modelleme sürecinin dördüncü basamağı olan yorumlama ve doğrulama basamağında; yorumlama ve doğrulama yok, yorumlama/yanlış yorumlama ve doğrulama alt basamakları yer almaktadır. Doğrulama alt basamağı ise; gerçek yaşamda yorumlayarak ulaşılan çözümü doğrulama, sonuçların doğruluğunu kontrol etmek için matematiksel gerçekler veya değişkenlerin bazı özel değerlerini kullanma, cevabın amaçlarını yerine getirip getirmediğini çapraz kontrol etme ve modellerinin doğruluğunun kontrolü için alanında uzman yetkiliye sorma alt basamaklarından oluşmaktadır.

5. Basamak: Sunum:

Matematiksel modelleme sürecinin beşinci ve son basamağını sunum basamağı oluşturur. Bu basamak; notasyonlar ve varsayımları açıklama, çözümü sonuçlar, prosedürler ve nedenlere odaklanarak sunma alt basamaklarından oluşmaktadır.

Şen-Zeytun (2013) tarafından tanımlanan süreç incelendiğinde diğer tanımlanan süreçlerden farklı olarak her süreç için öğrencilerin yaşayabileceği farklı alt-süreçleri tanımladığı görülmektedir. Örneğin, birinci basamak olan *anlama basamağında* öğrencilerin yaşayacağı üç farklı alt-süreç tanımlanmaktadır. Bu basamak için alt-süreçler doğru anlamayı sağlamak için problemi okuma/tekrar okuma, problemi çeşitli koşullarda değerlendirme ve verilen bilgileri özetleme şeklinde tanımlanmaktadır.

Matematiksel modelleme, gerçek dünya ne matematiksel dünya etkileşimini sağlayan bir süreçtir. Bu iki dünya arasındaki etkileşimi ve bu etkileşimlerin hangi basamaklardan oluştuğunu belirleme noktasında tanım farklılıkları vardır. Net olan, gerçek ile matematiğin sıkı bir ilişkiyle bağlanabilmesi gerekliliğidir. Bazı araştırmacılar, her iki dünya arasındaki etkileşimi basamaklara ayırırken oldukça basit değerlendirir. Bazıları ise ayrıntılara önem vermişlerdir. Öyle ki bazı araştırmalarda, basamakların işleyiş süreçleri gerçekleşirken alt-süreç arası geçişler en ince ayrıntısına kadar değerlendirilmiş, ele alınmıştır. Matematiksel modellemede basamaklar arası geçişleri ifade eden ilerleme, bilişsel engellerin aşılmasıyla gerçekleşir. Elbette karşılaşılan sorunların çözümü, bilişsel engellerin aşılması, bireyin bazı yeteneklerle önceden donanmış olmasına bağlıdır. Bu bireysel donanımlar matematiksel modelleme yeterliliği olarak ifade edilir.



Şekil 7: *Matematiksel Modelleme Döngüsü-4 (Ferri, 2006)*

Şekil 7'de yer alan ve çalışmada teorik çerçeve olarak kullanılan modelleme döngüsünde Ferri (2006) modelleme sürecini bilişsel perspektife göre ele almış ve basamaklar arasındaki geçişi açıklamıştır. Bu sürece göre modelleme bir dizi izole ve lineer ilişkili adımlardan değil bu basamakların karşılıklı ve döngüsel etkileşimiyle gerçekleşmektedir. Örneğin modellemeyi yapan kişi 3. basamakta bir sorunla karşılaştığında tekrar 1. basamağa ya da 6. basamakta bir sıkıntı yaşarsa 3. basamağa da geçiş yapabilir. Ferri (2006) ortaya koyduğu modelleme sürecini şu şekilde açıklamaktadır.

Gerçek Durum

Gerçek durum, problemde verilen durumu ortaya koyar. Bu bir resim, bir metin veya her ikisi beraber de olabilir. Gerçek durumdan durumun zihinsel temsiline geçişte birey problemi az çok anlamıştır.

Problemde verilen durum için, bireyin çokta farkında olmadığı örtülü bir düzeyde zihinsel bir yapılandırma meydana gelir. Birey problem durumunu anlamasa bile verilen görev üzerinde çalışmaya devam edebilir.

- ✓ ***Durumun Zihinsel Temsili***

Birey problemde verilen durum için zihinsel bir temsile sahiptir. Durumun zihinsel temsili, bireyin matematiksel düşünme biçime göre farklılık gösterebilir. Bunlar; (1) Bireyin kendi deneyimleri ile güçlü bağlantıları olan görsel imgeler veya (2) Kişinin ilişkilendirmek veya bir araya getirmek istediği, daha çok problemde verilen sayılar veya gerçeklere (doğrulara) odaklanma şeklinde ortaya çıkabilir.

Gerçek durum ve durumun zihinsel temsili arasındaki farklılığın iki ana unsuru vardır. Bunlar; (a) verilen problem ve bununla bağlantılı durumlar üzerinde farkında olmadan yapılan basitleştirmeler (b) modelleme sürecinde probleme nasıl yaklaşılacağı üzerine yapılan bireysel tercihlerdir.

Durumun zihinsel temsilinden gerçek modele geçiş sürecinde, kişinin çok daha farkında olduğu bir basitleştirme ve somutlaştırma yapılır. Çünkü durumun zihinsel temsili esnasında birey, problemde verilen bilgileri süzgeçten geçirirken seçimlerinde nasıl bir yol izleyeceğine yönelik kararlar alır. Verilen problemin türüne bağlı olarak yeni bir soru veya ek-matematiksel bilgi ihtiyacı ortaya çıkar.

- ✓ ***Gerçek Model***

Bu aşamanın, durumun zihinsel temsili ile çok güçlü bir ilişkisi vardır çünkü gerçek model çoğunlukla bireyde içsel olarak inşa edilir. Bu durum dışsal temsillerin (çizimler ya da formüller) gerçek bir modeli de temsil edebileceği anlamına gelir.

Ama bu kararda yani dış temsillerin oluşturulduğu esnada bireyin sözlü ifadeleri hayati rol oynar.

Gerçek modelden matematiksel modele geçiş, matematikselleştirme sürecinde bireylerin Ek-Matematiksel Bilgiye [EMB] (verilen probleme bağlı olarak) güçlü bir şekilde ihtiyaç duyması ve bu bilgileri kullanarak bir matematiksel model oluşturmasıyla gerçekleşir.

Matematiksel Model

Bu aşamada bireyler temel olarak çizimler ya da formüllerle dışsal temsilleri oluştururlar. Artık bireylerin sözlü ifadeleri problemin gerçek durumunu ifade etmekten ziyade daha çok matematiksel bir düzeydedir. Matematiğe geçiş burada tamamlanır.

Matematiksel modelden matematiksel sonuçlara geçişte bireyler kendi matematiksel bilgi ve deneyimlerini kullanırlar.

Matematiksel Sonuçlar

Burada bireyler çoğunlukla, oluşturdukları model üzerinden elde ettikleri sonuçları yazarlar. Sonuçların yorumlanması matematiksel sonuçlardan gerçek sonuçlara geçiş esnasında olur. Bu önemli aşama bireyler tarafından çoğunlukla farkında olmadan gerçekleştirilir.

Gerçek Sonuçlar

Ulaştıkları matematiksel sonuçların gerçeğe uygun sonuçlar olup olmadığı bireyler tarafından tartışılır. Geçerliğini doğrularken bireyler ulaştıkları gerçek sonuçları ve durumun zihinsel temsil durumları üzerine düşünürler. Bu onlar için doğru da olabilir yanlış da olabilir. Verilerin temelinde bireylerce iki farklı doğrulama biçimi kullanılabilir.

(1) Sezgisel doğrulama (daha bilinçsiz yapılır): Birey elde ettiği sonuçların açıklayamadığı bir nedenden ötürü yanlış olduğunu bilir veya elde ettiği sonuçların kendi deneyimleri ve bununla ilgili etkileşimlerine uygun düşmediğinden yanlış olduğunu hissedebilir. Dolayısıyla bu daha çok farkında olmadan alınan bilinç dışı sezgisel bir karardır.

(2) Bilgi temelli doğrulama (daha bilinçli yapılır): Problemde nasıl bir Ek-Matematiksel Bilgiye ihtiyaç duyulduğuna bağlı olarak bireyler farklı şekillerde doğrulamalar yaparlar. Dolayısıyla “bilgi temelli doğrulamada” bireyler Ek-Matematiksel Bilgilerine bağlı olarak buldukları sonuçlar ile ya hemfikir olurlar ya da olmazlar. Bu iki bilinç türü; farkında olan ama bilgi temelli olmayan ile farkında ve bilgi temelli olmak üzere birbirinden ayırt edilebilir. Hem sezgisel hem de bilgi temelli doğrulama bireyin önceki deneyim ve etkileşimleri ile ilişkilidir. Bireylerin çoğunlukla doğrulama yapmamalarının nedeni bunu büyük ölçüde içsel matematiksel doğrulama şeklinde yaptıkları içindir. Onlara göre doğrulama matematiksel modelin hesaplanmasıdır. Bu yüzden sonuçları gerçek durumla ilişkilendirmezler.

2.3 Cebir ve Matematiksel Modelleme İlişkisi

Gerçek yaşamda var olan bir problem durumunun matematiksel alanda anlam kazanabilmesi büyük ölçüde cebir ile mümkün olmaktadır. Bu bağlamda cebir gerçek yaşam ile matematiksel alan arasındaki geçişi sağlayan bir köprüdür denebilir.

Matematik, fen, astronomi, ekonomi vb. gibi birçok alanda problemlerin çözümü sürecinde cebir alanının nasıl bir öneme sahip olduğu ortaya çıkmaktadır. Ayrıca bu alanlardaki problemlere çözüm üretmede matematiksel modelleme giderek önemi artırmakta ve mühendislikte, eğitimde ve birçok alanda yapılan yeni çalışmalarla güncelliğini korumaktadır. Bu bağlamda gerçek yaşam problemlerine cevap üretebilecek iyi bir nesil yetişmesi, temelleri sağlamca atılmış cebir bilgisine ve problem durumlarının çözümü için etkin modeller oluşturabilecek modelleme becerilerine sahip öğrencilere bağlıdır (Sandalcı, 2013, s.35-36).

2.4 PISA ve Matematiksel Modelleme

Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı *PISA* (Programme for International Student Assesment), Ekonomik İşbirliği ve Kalkınma Teşkilatı *OECD* (Organisation for Economic Co-Operation and Development) tarafından düzenlenen dünyanın en kapsamlı eğitim araştırmalarından biridir. 2000 yılından itibaren üç yılda bir yapılan bu araştırmayla OECD üyesi ülkeler ve diğer katılımcı ülkelerdeki on beş yaş grubu öğrencilerin modern toplumda yerlerini alabilmeleri için gereken temel bilgi ve becerilere ne ölçüde sahip oldukları değerlendirilmektedir (MEB, 2013). PISA sayesinde katılımcı ülkeler kendi öğrencilerin bilgi ve beceri düzeylerini, diğer katılımcı ülkelerdeki öğrencilerin bilgi ve beceri düzeyleriyle karşılaştırma fırsatı bulurlar. Ülkeler, geçerli gördükleri bu sonuçlar yardımıyla kendi eğitim sistemlerini ve uygulamalarını da değerlendirirler. Bu bir anlamda öz eleştiri yapmak için sağlam bir nedendir. Eğitim düzeyinin yükseltilmesi noktasında standartların belirlenmesi, aksaklıkların giderilmesi için öneriler ve çözüm yolları aranması için PISA sonuçları oldukça geçerli bir nedendir. OECD projesi olan bu uygulama aslında katılımcılarının kendi eğitim sistemlerini değerlendirerek, iktisadi açıdan kalkınma ve büyümek için ihtiyaç duyulan insan sermayesini yetiştirmelerine olanak sunmaktadır. İster istemez katılımcı ülkelerin yarışı söz konusudur. Buna bağlı olarak en iyi olma gayreti ile eğitim sisteminde kalite arayışı belirir. PISA bu anlamda eksiklerin belirlenebilmesi ve problemlerin çözümü için rapor niteliğindedir. Her ne kadar bu sistem öğrenci değerlendirme programı olsa da aslında değerlendirilen tam olarak, katılımcı ülkelerin eğitim sistemidir.

PISA projesi; okuma becerileri, matematik ve fen bilimleri konularında temel becerilere odaklanarak, zorunlu eğitimin sonunda öğrencilerin topluma tam olarak katılması için bu bilgi ve becerileri ne derece edindiklerini değerlendirmektedir. PISA öğrencilerin sadece öğrendiklerinin ne kadarını hatırlayabildiklerinin veya öğrendiklerini tekrar kullanıp kullanmadığını değil, aynı zamanda öğrendiklerini okul dışı yaşamlarında kullanabilme yeterliklerinin; karşılaşacakları yeni durumları anlamak, sorunları çözmek, bilmedikleri konularda tahminde bulunmak ve muhakeme yapabilmek için bilgi ve becerilerinden ne ölçüde yararlanabildiklerinin belirlenmesi hedeflenmektedir (MEB, 2013). Bu amaç, PISA'yı diğer değerlendirme yaklaşımlarından ayırmaktadır. Diğer uluslararası çalışmalar (örn. TIMSS: Trends in International Mathematics and Science Study) çoğunlukla öğretim programı ve sınıfta neler öğrenildiğine odaklanırken PISA farklı olarak *okuryazarlık* adını verdiği bir yapıyı ölçer. *Okuryazarlık* kavramı öğrencilerin bilgilerini günlük yaşamda kullanmak, mantıksal çıkarımlar yapmak, çeşitli durumlarla ilgili problemleri yorumlamak ve çözmek için öğrendiklerinden çıkarımlar yapma kapasitesi olarak tanımlanmaktadır (MEB, 2010). Her ne kadar on beş yaşındaki bir öğrencinin bilgi birikimi yetişkininki kadar olmasa da okuma becerisinin gelişmiş olması beklenebilir. Ayrıca öğrencinin fen ve matematik alanlarında da sağlam temellerle donanması gerekir. Mevcut temellerin üzerine inşa edeceği yeni bilgileri ve becerileri günlük yaşamında da aktif olarak kullanması şarttır. Hayata geçirilmeyen bilgi pek de memnun edici olmayabilir. Bu nedenle öğrencilerden beklenen, edindikleri bilgileri günlük yaşamlarına aktarmaları ve yaşam kalitelerini bu sayede yükseltmeleridir.

Matematiksel okuryazarlık matematiğin gerçek yaşamda nasıl kullanılabileceğini görme ve bu nedenle gereksinimlerini karşılamak için matematikten yararlanma kapasitesi olarak tanımlanmaktadır (MEB, 2010). Öğrencilerin matematik okuryazarlığına erişmeleri için belirli bir seviye yoktur. Aksine matematik kullanımı sırasında ortaya konulacak etkili analizler, akıl yürütme ve iletişim gücü ile ilişkili olarak farklı matematiksel yeterlilik seviyelerinden söz edilebilir. Matematik okuryazarlığı, çeşitli seviyelerde matematikle ilgili yeterliliklerin kullanımını gerektirmektedir. Bu yeterlikler, standart matematiksel işlemlerin gerçekleştirilmesinden matematiksel düşünme ve kavramaya kadar geniş bir yelpazede yer almaktadır. Matematik okuryazarlığı aynı zamanda, bir dizi matematiksel içerik ile ilgili bilgi sahibi olmayı ve bu içerikle ilgili uygulama yapma becerisini de gerektirmektedir.

PISA'da *matematik okuryazarlığı* üç boyutta değerlendirilmektedir (MEB, 2010; aktaran, Şahin, 2014): İlk boyut *matematik alanının içeriğidir*. Bu içerik temel olarak, matematiksel düşünme biçimini vurgulayan genel matematiksel kavramlar (Örneğin olasılık, değişim ve büyüme, uzay ve şekil muhakeme gibi) ile ikincil olarak "müfredatla ilgili yapıları" (örneğin sayılar, cebir ve geometri) içermektedir. İkinci boyut genel matematiksel yeterlilikler ile tanımlanan *matematiksel süreçtir*. Bu yeterlikler matematiksel dilin kullanımı, modelleme ve problem çözme becerileri konularını içermektedir. Kullanılan sorular gerekli olan düşünme becerisinin türünü tanımlayan *üç yeterlik grubu* ile ilgili olarak hazırlanmaktadır. İlk matematiksel yeterlik grubu, geleneksel matematik değerlendirme sınavlarında sıkça karşılaşılan basit hesaplamalar veya tanımlardan oluşmaktadır. İkinci grup ise basit problemleri çözmek için ilişkiler kurmayı gerektirmektedir. Üçüncü yeterlik grubu, matematiksel düşünme, genelleme ve kavramadan oluşur ve öğrencilerin analiz yapmalarını, belirli bir durumdaki matematiksel unsurları belirlemelerini ve kendi problemlerini ortaya koymalarını gerektirmektedir. Üçüncü boyut ise *matematiğin kullanıldığı* durumlardır. Bunlar, özel durumlardan daha geniş anlamda bilimsel ve kamusal konulara kadar çeşitlilik gösterir.

PISA'da 2009 ulusal ön raporunda da belirtildiği üzere matematiğe ilişkin test materyallerinden toplanan verileri özetlemek için altı düzeyden oluşan bir yeterlik ölçeği oluşturulmuştur. Bu ölçek, öğrencilerin matematik alanındaki yeterliklerinin altı düzeyde tanımlanıp sınıflandırılmasına ve böylece uluslararası karşılaştırmalar yapılmasına olanak sağlamaktadır. PISA matematik okuryazarlığına ilişkin altı yeterlik düzeyi, ilgili puan aralıkları ve her bir düzeydeki yeterliklerin tanımları aşağıdaki Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2: PISA 2009 Matematik Okuryazarlığı Yeterlik Düzeyleri (MEB, 2010)

DÜZEY	BU DÜZEYDE YER ALAN ÖĞRENCİLER NELER YAPABİLİR?
6	Altıncı düzeye erişmiş öğrenciler, *kendi araştırmaları* ve *modelleme* çalışmalarından elde ettikleri bilgilere dayalı olarak karmaşık problem durumlarıyla ilgili kavramlar oluşturabilir, genellemeler yapabilir ve bunları kullanabilirler. Farklı bilgi kaynakları ve gösterim biçimleri arasında bağlantı kurabilir ve bunların birinden ötekine kolaylıkla geçiş yapabilirler. Bu öğrenciler ileri düzeylerde *matematiksel düşünme* ve *muhakeme* örnekleri ortaya koyabilirler. Bu becerileri ile sembolik ve formal matematiksel işlem ve bağıntılar üzerinde sağlamış oldukları hâkimiyet sayesinde, ilk kez karşılaştıkları durumlarda yeni strateji ve yaklaşımlar geliştirebilirler. Bu düzeye erişmiş olan öğrenciler kendi buluşları, yorumları ve görüşleri ile bunların verilen durumlara uygunluğuna ilişkin düşüncelerini formüle edebilir ve başkalarına tam olarak anlatabilirler.
5	Beşinci düzeye erişmiş olan öğrenciler, karmaşık durumlarla ilgili modeller geliştirip kullanabilir, bunlarla ilgili sınırlılıkları görebilir, varsayımlarda bulunabilirler. Öğrenciler, bu gibi modellerle ilgili karmaşık problemlerle çalışırken yararlanılabilecek nitelikteki stratejileri seçebilir, karşılaştırabilir ve değerlendirebilirler. Bu düzeydeki öğrenciler kapsamlı, iyi gelişmiş düşünme ve muhakeme becerilerini, uygun şekilde ilişkilendirilmiş matematiksel gösterimleri, sembolik ve formal tanımlama veya belirlemeleri, bu durumlarla ilişkili fikirlerini kullanarak stratejik çalışmalar yapabilirler. Yaptıkları işlemler üzerine derinlemesine düşünebilirler, yorumlarını ve muhakemelerini formüle ederek başkalarına anlatabilirler.
4	Dördüncü düzeye ulaşmış öğrenciler, sınırlılıkları olabilen ya da varsayımlarda bulunulmasını gerektirebilen karmaşık somut durumlarla ilgili belirgin modellerle etkili bir şekilde çalışabilirler. Sembolik durumlar da dâhil olmak üzere farklı gösterimleri seçip birleştirebilir ve bunları gerçek dünyada karşılaşılabilecek durumların çeşitli yönleriyle ilişkilendirebilirler. Bu bağlam içerisinde, iyi gelişmiş becerilerini kullanabilir, bazı öngörülerde de bulunarak esnek düşünebilirler. Bu öğrenciler, kendi yorumlarına, görüşlerine ve hareketlerine dayalı açıklama ve görüşler kurgulayabilir ve bunları başkalarına anlatabilirler.
3	Üçüncü düzeye erişmiş olan öğrenciler, ardışık kararlar vermeyi gerektiren durumlar da dâhil olmak üzere, açıkça tanımlanmış olan işlemleri gerçekleştirebilirler. Basit problem çözme stratejilerini seçip kullanabilirler. Bu öğrenciler, farklı bilgi kaynaklarına dayanan gösterimleri yorumlayıp kullanabilir ve bu kaynaklardan hareketle doğrudan muhakeme yapabilirler. Yorumlarını, sonuçlarını ve muhakemelerini anlatan kısa raporlar oluşturabilirler.
2	İkinci düzeye erişmiş olan öğrenciler, doğrudan çıkarım yapmaktan başka bir beceriye gerek olmayan durumları tanıyabilir ve yorumlayabilirler. Bu öğrenciler, tek bir kaynaktan gerekli bilgiyi elde edebilir ve sadece bir gösterim biçimini kullanabilirler. Bu düzeydeki öğrenciler temel algoritmaları, formülleri, alışılageldik işlem yollarını kullanabilirler. Doğrudan ispat gibi basit akıl yürütmeleri yapabilirler ve sonuçlar üzerinde görülenin ötesine geçmeyen yorumlar yapabilirler.
1	Birinci düzeyde bulunan öğrenciler, sorunun açıkça belirtildiği, çözüm için gerekli bütün bilgilerin verildiği, bilinen bir kapsam içerisinde sunulmuş olan soruları yanıtlayabilirler. Bu öğrenciler, bilinen durumlarla ilgili olarak verilen belirgin yönergelere göre bilgileri ayırt edebilir ve rutin işlemleri yapabilirler. Açık olan ve tek bir uyarıcıyı takip etmekle yapılabilen işlemleri gerçekleştirebilirler.

Yeterlik düzeyi ölçeğinin üst kısımlarında öğrencinin yerine getirmesi gereken görevler zorlaşmakta ve daha *üst düzeydeki* becerilere ihtiyaç duyulmaktadır. Bu tip görevler karmaşık gerçek yaşam durumlarında *matematiksel modelleme süreçlerini* kullanarak matematiksel yapılandırmalara ulaşma gibi becerileri içermektedir (MEB, 2010). PISA testlerinde yeterlilik düzeylerine göre ayrıştırma yapılır. Testlerde 5. yeterlik düzeyi ve üzerindeki öğrenciler üst performans grubu olarak değerlendirilir. Üst performans grubunun, katılımcı ülkelerdeki ekonomik kalkınma için gerekli beşeri sermayeyi oluşturduğu fikri hâkimdir. Bu nedenle, bu düzeydeki öğrencilerin tespit edilmesi oldukça önemlidir. PISA testlerindeki orta seviyedeki maddeler yorum gerektiren maddelerdir. Öğrencilerin anlamak ve analiz etmek üzere bir durumu diğer sorunlara göre daha fazla formal matematiksel temsiller içeren bir şekilde yapılandırmaları istenmektedir. Bu tip maddeler, bir grup grafiğin ya da metnin içeriğindeki bilgilerin yorumlanması, gerekli bilgileri elde ederek bir dizi hesaplamaların yapılması, uzamsal düşünmenin ve geometri bilgisinin kullanılması gibi etkinlikler içerir. Düşük düzeydeki maddeler ise sınırlı yorum gerektiren ve daha bilindik bağlamlar içeren soru tipleridir. Bu tip maddeler herhangi bir grafik ya da tabloda açıkça verilen bir bilginin okunması, basit aritmetik hesaplamaların yapılması, gibi etkinlikleri içerir.

PISA sonuçları, eğitim sisteminin irdelenmesi noktasında ülkelere önemli veriler sunmakla birlikte öğrencilerin de kendilerini değerlendirebilmeleri konusunda önemlidir. Öğrenciler sonuçlara bakarak, karmaşık yaşam durumlarına ne denli etkin ve yaratıcı çözüm bulduklarını değerlendirebilirler. Bu konudaki eksiklerini görmeleri için PISA etkin bir sınavdır. İlköğretimi bitiren öğrencilerin matematiği günlük hayatlarına ne derece entegre edebildiklerini de PISA sonuçlarına göre değerlendirebilmek mümkündür. Birçok yönden eğitim kalitesini arttırmak adına, ülkelere farklı ipuçları verse de PISA'nın asıl amacı, ülkelerin kalkınmalarına destek olacak büyük beşeri potansiyeli tespit etmektir. Bu potansiyel üst performans grubu olarak ifade edilmektedir. Bu üst performans grubunda bulunan öğrenci özellikleri ise; karmaşık problem durumlarıyla başa çıkabilme, *üst düzey düşünebilme,* problem durumlarıyla ilgili kavramlar oluşturabilme, *genellemeler yapabilme* ve bunları kullanabilme, karmaşık durumlarla ilgili *modeller geliştirip kullanabilme*, bunlarla ilgili sınırlılıkları görebilme, varsayımlarda bulunabilme, modellerle ilgili karmaşık problemlerle çalışırken yararlanabilecekleri nitelikteki *stratejileri seçebilme, karşılaştırabilme ve değerlendirebilme* kapsamlı, iyi gelişmiş düşünme ve muhakeme becerilerini, yaptıkları işlemler üzerine derinlemesine düşünebilme, yorumlarını ve *muhakemelerini formüle ederek* başkalarına anlatabilme becerilerini içermektedir. Türkiye'nin yıllara göre bu üst düzeylerdeki öğrenci düzeyleri incelendiğinde, OECD'nin çok gerisinde kaldığı açıkça ortadadır. Bu düzeydeki becerilere sahip öğrenciler elde etmek amacıyla; yaşamında matematiği gerektiği şekilde kullanabilen gerçek yaşam durumlarıyla matematik arasındaki ilişkiyi kurabilen, karşılaştığı problemlere farklı çözüm yolları üretebilen, analitik düşünceye sahip, akıl yürütme ve ilişkilendirme gibi becerilerin kazandırılmasında çözümü bir matematiksel modelleme içeren model oluşturma etkinlikleri kullanılabilir (Blum ve Niss, 1991; Lesh ve Doerr, 2003; English ve Waters, 2005; Eraslan, 2012; aktaran, Şahin, 2014).

2.5. Modelleme Sürecinde Grup Çalışmasının Önemi

Sosyal bir etkileşim oluşturmak açısından matematik eğitiminde grup çalışmasının yeri oldukça önem taşımaktadır. Matematik eğitiminde grup çalışması biçimsel olmayan matematiksel birçok fikrin tartışılmasının yanı sıra; bir matematiksel modelin ya da fikrin oluşturulmasında, geliştirilmesinde, bu fikir hakkında yorum yapılmasında bireylere imkân sağlar. Grup içindeki tartışmalarda, konuşmanın iki farklı yönünden bahsedilir. Bunlar kişinin kendi düşüncelerini ifade etmesi ve bu düşünceleri karşılarındakiler tarafından anlaşılabilecek şekilde aktarabilmesidir (Hoyles, 1985; aktaran, Ubuz ve Haser, 2002)

Ortaokul matematik müfredatında da grup çalışmasının önemine yer verilmiştir. Müfredatta grup çalışması ortak bir amacı başarmak için öğrencilerin bir ekip olarak çalışması şeklinde tanımlanmıştır. Grup çalışması sırasında öğrenciler; kendilerinden istenenleri, hem kendileri hem de grup arkadaşları tarafından öğrenilmesini sağlamakla sorumludurlar. Ayrıca grup üyeleri, diğer üyelerin başarılarını artırmada birbirlerine katkıda bulunmakta, destek olmakta ve birbirlerini cesaretlendirmektedirler. Kendi bireysel çabalarının grup başarısını etkileyeceğinin farkında olarak sorumluluklarını yerine getirmektedirler. Yine grup içinde iyi bir iletişim oluşmakta ve grup üyeleri yaptıkları çalışmanın ortak bir değerlendirmesini yaparak çalışmalarının etkililiğini kontrol etmektedirler (MEB, 2005).

Matematik eğitiminde grup odaklı çalışmanın önemine değinen Ubuz ve Haser (2002), bir konunun öğretiminde işbirliğine dayalı çalışma gruplarını içeren öğretim yöntemi ile geleneksel öğretim yöntemini öğretmen ve öğrenci rolleri bakımından incelemiştir. Geleneksel öğretim yönteminin kullanıldığı sınıftaki öğrencilerin de öğrenme-öğretmen sürecine aktif olarak katıldığı fakat rollerinin öğretmeni dinleyip sorularına cevap vermekle sınırlı kaldığını belirtmişlerdir. Oysaki birlikte çalışma gruplarında öğrencilerin dikkat çekmek, anlaşmazlığa düşmek alternatifler üretmek gibi yeni rollere sahip olduğu görülmüştür. Böylece her öğrenci aynı konu hakkında birçok görüşe sahip olmuştur. Öğretmenler ise bu süreçte sadece rehberlik yapmışlar ve öğrencileri yeni deneyimler kazanmaları için desteklemişlerdir.

Yaptıkları nitel çalışmalarında modelleme etkinliklerinde grup çalışmasının önemine yer veren Zawojewski, Lesh ve English'e (2003) göre geleneksel problem çözme etkinliklerinde, verilen problemin belirlenen, sayısal bir sonucu olduğu için birlikte çalışmaya gerek duyulmadığını, bu nedenle bu şekildeki soruların sosyal yönünün oldukça zayıf olduğunu belirtmişlerdir. Matematiksel modelleme etkinliklerinde ise model oluşturma ve modelleme gibi ilkeleri geliştirilen modelin tekrar kullanılabilir olmasını sağlamaktadır.

2.6 İlgili Araştırmalar

Bu bölümde, yapılan literatür taraması sonucunda öğretmen ve öğretmen adaylarına yönelik matematiksel modellemeyle ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Matematiğin gerçek hayatta yaşam bulması gerekliliği, üzerinde ciddi çalışmalar yürütülen bir konudur. Gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin çözümü noktasında etkin beceriler sergilemek, çözüm yollarını irdeleyerek en etkinini tespit edip uygulamaya koyabilmek gerekir. Bu noktada yetersiz kalınması nedeniyle farklı matematik modelleme yaklaşımları gerekli olmuştur. PISA gibi önemli uygulamalar da bireyin tüm yaşantısı boyunca matematiği etkin bir şekilde kullanabilmesi için geliştirilmiştir. Sorun olarak tanımlanan bu duruma, öğrencilere, problemleri çözebilmeleri için gerekli donanımların kazandırılmasıyla çare bulunabilir. Bu bağlamda okul matematiğinde matematiksel modellemeye daha fazla yer verilmesi gerektiği vurgulanmaktadır (Australia Ministry of Education, 2008; Department for Education and Employment, 1999; Jorgensen ve Ryan, 2004; MEB, 2009, 2011, 2012a, 2012b; Niss, Blum ve Galbraith, 2007; Victorian Curriculum and Assessment Authority, 2005). Bunun için de derslerde matematiksel modelleme etkinlikleriyle uğraşmak tamamen yeterli olmamakta birlikte öz inisiyatif ile matematiksel modelleme yeterliklerinin uyarılması merkezi bir önem taşımaktadır (Maaß, 2006). Bu noktada öğrencilerin matematiksel modelleme yeterliklerinin uyarılması ve geliştirilmesine olanak sağlaması ön görülen öğrenme ortamları tasarlanmış ve etkili öğrenme ortamının nasıl olması gerektiğine dair değerlendirilmeler yapılmıştır. Ancak yapılan çalışmalar göstermektedir ki eğitim ortamlarında matematiksel modellemenin tanımı, ele alınış amacı, öğretim programlarına entegre edilme ve öğrencilere sunuluş biçimi konularında kabul görmüş ortak bir anlayıştan söz etmek henüz mümkün değildir(Kaiser, Blomhøj ve Sriraman, 2006; Niss, Blum, ve Galbraith, 2007). Dolayısıyla, tüm dünyada kabul gören ve matematiksel modellemenin öğretimi ve öğrenimiyle ilgili bir teorinin varlığından söz etmek henüz mümkün değildir(Kaiser ve diğ., 2006). Ancak yapılan çalışmaları öğretimsel açıdan sınıflandırmak mümkündür.

Kaiser ve Sriraman (2006) matematiksel modelleme yaklaşımlarını bakış açılarına göre altı farklı grupta değerlendirmektedir. Buna göre matematiksel modellemeye bakış açıları, ana amaçlar ve matematiksel modellemeyi bu bakış açılarıyla ele alan araştırmacılara dair bilgiler Tablo 3’te verilmiştir.

Tablo 3: Matematiksel Modelleme Yaklaşımları (Kaiser ve Sriraman, 2006)

Yaklaşım	Ana Amaç	Matematiksel Modelleme Etkinlikleri	Önemli Araştırmacılar
Realistik veya Uygulamalı modelleme	Gerçek bir içerikte uygulamalı problem çözme olarak matematiksel modelleme problemlerini çözebilme becerilerinin kazandırılması	Matematiksel bilginin mühendislik, çevre, diğer bilimler gibi alanlardaki problem durumlarında uygulanması	Haines/Crouch Burkhardt Kaiser/Schwarz
Bağlamsal Modelleme	Yapaylıktan uzak, uygun gerçek bir bağlam içinde matematiksel kavramların öğretimi	Model oluşturma etkinlikleri	Lesh ve Doerr Iverson/Larson Sriraman
Eğitimsel Modelleme a.Didaktik Modelleme b.Kavramsal Modelleme	Pedagojik ve konu ile ilgili hedefler: a. Öğrenme süreçleri ve teşvikin yapılandırılması b. Kavrama giriş ve yapılandırma	Uygun süreçleri içeren ve kavram öğreten etkinlikler	Niss Freudenthal Henning/Keune Blomhoj/Hoff Keldsen Galbraith/Stilman Lingefjard Maaß
Epistemolojik veya Teorik Modelleme	Matematiksel kavramlar arası ilişkilerin kurulması ve bunların üzerine konuşulması	Gerçekliğin ikinci planda olduğu, içinde matematik olan her uğraş	Brousseau Chevallard Garcia Gascon Ruiz Higueras/Bosch
Sosyo-eleştirel modelleme	Yaşanılan çevre ve kültürel yapıya uygun eleştirel düşünme becerileri kazandırma	Basitten karmaşığa matematik içeren modelleme etkinlikleri	Barbaso
Üst-yaklaşım			
Bilişsel modelleme	Matematiksel modelleme süreci boyunca ortaya çıkan bilişsel süreçlerin analiz edilmesi ve bu bilişsel sürecin anlaşılması	Matematiksel modelleme etkinlikleri ile öğrencilerin düşünme süreçlerini anlama ve desteklemede yol gösterici bir ortam sağlama	Borromeo Ferri Blum/Leiss

Yapılan bu sınıflandırma araştırmacıların öznel fikirlerine dayanmakta ve araştırmacılar da bu sınıflandırmanın yüzeysel bir sınıflandırma olduğunu ifade etmektedirler. Ayrıca bu yaklaşımların kesin çizgilerle birbirinden ayrılması pek de mümkün değildir (Erbaş, Kertil, Çetinkaya, Çakıroğlu, Alacacı ve Baş, 2014).

Matematiksel modelleme yeterliklerinin geliştirilmesini amaçlayan araştırmacılar, *matematiksel modellemenin sadece matematik için değil disiplinler arası ele alınması gereken bir konu* olduğunu vurgulamakta ve diğer disiplinlerde kullanılabilecek, matematiksel modelleme sürecinin tamamlanmasında rol oynayan matematiksel modelleme yeterliklerinin belirlenmesi ve geliştirilmesi önemsenmektedir (Blomhoj ve Jensen, 2007). Bu bağlamada matematiksel modelleme yeterliklerinin geliştirilmesine yönelik tasarlanan öğrenme ortamlarının içerikleri incelendiğinde iki farklı yaklaşımın olduğu görülmektedir. Bunlardan ilki ―*mikro-düzeyde yaklaşı*m ikincisi ise ―*bütüncül yaklaşım*'dır (Grünewald, 2012). Bunun yanında da mikro-düzeyde ve bütüncül yaklaşımların dengelenmesi gerektiğini vurgulayarak her iki yaklaşımın kullanıldığı ―entegre çalışmalar da mevcuttur. Bu yaklaşımlar matematiksel modelleme yeterliklerinin (bazı çalışmalarda doğrudan yeterlik olarak ele alınmasa da matematiksel modelleme sürecinin tamamlanması olarak ele alınmıştır) nasıl geliştirileceği ve değerlendirilebileceği konularında fikir ayrılığı göstermektedir.

Matematiksel modelleme yeterliklerinin geliştirilmesine yönelik tasarlanan öğrenme ortamları incelendiğinde Aydın-Güç (2015, s. 42) tarafından hazırlanan ortam yaklaşımları Tablo 4'teki gibi sınıflandırılabilir.

Tablo 4: Matematiksel Modellemeye Yönelik Öğrenme Ortamı Yaklaşımları (Aydın-Güç 2015, s. 42)

Yaklaşım	Tasarlanan Öğrenme Ortamları
1. Mikro-düzey Yaklaşım	Alt-yeterlik odaklı
2. Bütüncül Yaklaşım	Teorik bilgi odaklı
	Serbest Model Oluşturma Etkinliği (MOE) odaklı
	Matematiksel modelleme basamaklarını takip etme prosedürü odaklı
3. Karma Yaklaşım	Hem mikro-düzey hem bütüncül yaklaşım içerikli (Mikro-düzey ve bütüncül yaklaşım dengesi)

Ulusal literatürde mikro-düzeyde bir yaklaşımla tasarlanan öğrenme ortamında yeterlik gelişimine yönelik bir çalışma Bal ve Doğanay (2014) tarafından yapılmıştır. Bal ve Doğanay (2014) çalışmalarında sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel modelleme konusunda yeterliklerini belirlemek üzere on beş açık uçlu sorudan oluşan matematik ön kavrama testi uygulamış ve öğretmen adaylarının değişkenlerin belirlenmesi, modelin oluşturulması ve modelin çözümlenmesi aşamalarında hatalar yaptıklarını belirlemişlerdir. Matematiksel modellemenin amaca uygun işleyebilmesi için tüm koşulların yerine getirilmesi gerekir. Öğrenme ortamındaki bazı sorunlar nedeniyle matematiksel modelleme süreci aksayabilir. Bu nedenle öğrenme ortamında uygulanacak eylem planları oluşturulmuştur. İlk olarak değişkenler hakkında bilgi verilmiştir. Bu bilgiler beklenen sonucu vermediği için değişkenler hakkında bu defa daha çok ayrıntı aktarılmıştır. Daha sonra, model oluşturma konusunda ve dikkat edileceklerle ilgili hem teorik hem de uygulamaya yönelik plan devreye sokulmuştur. En son süreçte ise modelin çözüm aşaması hakkında bilgiler ve örnekler verilmiştir.

Bütüncül yaklaşıma dayalı teorik bilgi odaklı tasarlanan öğrenme ortamlarında öncelikle matematiksel modelleme ve matematiksel modelleme sürecine yönelik teorik bilgi odaklı dersler yürütülmekte, ardından bu teorik bilgiler doğrultusunda matematiksel modelleme sürecine yönelik hiçbir yönerge içermeyen ancak gerektiğinde öğretmen tarafından stratejik ipuçlarının verildiği, serbest çalışılan Model Oluşturma Etkinlikleri (MOE) uygulanmaktadır. Matematiksel modellemeye yönelik bu tür bir öğrenme ortamı birçok araştırmacı tarafından tasarlanmış ve sonuç olarak matematiksel modelleme süreci hakkındaki bilginin matematiksel modelleme yeterliklerinin kazandırılmasında pozitif etkisi olduğu belirlenmiştir (Kaiser, Shcwars ve Tiedeman, 2010; Bukova-Güzel, 2011; Mehraein ve Gatabi, 2014).

Bukova-Güzel (2011) matematiksel modellemeye yönelik bir öğrenme ortamı tasarlamıştır. Bu çalışmada öğrenme ortamına dâhil olan öğretmen adaylarının matematiksel modelleme problemlerini oluşturma ve oluşturdukları problemler çözme yaklaşımlarını belirlemiştir. Bu öğrenme ortamının içeriğinde ise model ve matematiksel model örnekleri, matematiksel model ile matematiksel modelleme arasındaki farklılıklar, öğretim programlarında matematiksel modellemeye verilen önem ve örnekler, matematiksel modelleme sürecine yönelik farklı yaklaşımlar odaklı teorik bilgiler yer almakta ardından matematiksel modelleme problemlerine literatürden örnekler üzerine grup ve bireysel çalışmalar, çalışmalara ait sunumlar, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme problemi geliştirmeleri ve çözümlerini sunmaları yer almaktadır. Tasarlanan öğrenme ortamında, öğretmen adayları, matematiksel modellemenin tüm basamaklarında deneyim kazanmışlardır. Öğretmenlerin problemi anlama, basitleştirme/yapılandırma, matematikselleştirme, matematiksel çalışma, yorumlama, değerlendirme gibi basamakları öğrenmeleri ile matematiksel modelleme becerilerinin geliştiği gözlemlenmiştir. Diğer yandan, öğretmen adayları, yorumlama ve doğrulama süreçlerinde bazı sıkıntılar yaşamışlardır.

Matematiksel modellemenin amacına ulaşabilmesi için oldukça etkin planlanması gerekir. Öğrenme ortamında öğrenci ve öğretmene yönelik yapılan çalışmalar etkin planlama için gerekli düzenlemelerin yapılabilmesi için ipuçları ermiştir. Neticede eksiklerin belirlenmesi için bazı uygulamaların yapılması ve sorunların bu süreçte tespit edilmesi oldukça verimli bir yöntemdir. Eksiklerin tespit edilmesi sürecinde, hem mikro düzeyde hem de bütüncül yaklaşımla tasarlanan öğrenme ortamlarında öğrencilerin bazı zorluklar karşısında çaresiz kaldığı, süreçleri tam olarak tamamlayamadıkları ya da bazı yeterliklerinin beklenen düzeyde gelişim göstermediği gözlemlenmiştir. Bununla birlikte öğretmenlerin de kısmen eksikleri belirlenmiştir. Hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin karşılaştıkları zorluklar matematiksel modelleme yeterliklerinin gelişimini olumsuz etkilemektedir. Belirtildiği gibi bu sorunlara çözüm üretildiği takdirde etkin matematiksel modelleme süreci işlerlik kazanacaktır.

Aydın (2008) İngiltere'de öğrenim gören öğrencilerin ve öğretmenlerin matematiksel modelleme kullanımlarına yönelik yapmış olduğu çalışmada, öğrencilerin matematik derslerinde öğrendikleri modellemeyi günlük yaşantıları içinde ne derecede kullandıklarını incelemiştir. Ayrıca çeşitli eğitim modellerinin kullanıldığı Londra'da modelleme kullanımının, öğretmen ve öğrenci perspektifinden incelenerek, avantaj ve dezavantajlarının değerlendirilmesi yapılmıştır. Araştırmanın örneklemi ikisi Londra'da değişik ikinci kısım okullarda çalışmış İngiliz matematik öğretmeni ve biri de birinci kısımda çalışan Türk sınıf öğretmeni olmak üzere üç öğretmen ve Londra'da değişik okullar olmak üzere ikinci kısımda okuyan üç Türk öğrenciden oluşmaktadır. Veriler, öğretmen ve öğrencilerle yapılan yüz yüze görüşmelerden elde edilmiştir. Verilerin analizinde öğrenci ve öğretmenlerin görüşleri Fenomenografik yöntemle karşılaştırılmış, kategorilere ayrılmış ve yorumlanmıştır. Araştırmada öğretmenlerle yapılan görüşme sonuçlarına göre öğretmenler derslerinde anlattıkları konu ile gerçek hayat arasında bağlantı kurmaya çalışmakta oldukları belirtilmiştir. Ancak sınıfta öğrencilerin sınav geçme kaygısı nedeniyle gerçek hayatla bağlantılı ders anlatımı tam olarak yapılamamaktadır. Matematik dersleri ile yaşadıkları çevre arasında bağlantı kuran az da olsa öğrenci olduğu bu durumun çocuğun zekâsına, kavrama ve algılama yeteneğine bağlı olarak değiştiği vurgulanmıştır.

Carlson, Larsen ve Lesh (2003), büyük bir kamu üniversitesinde ilkokul öğretmenleri için matematik dersi alan 22 ilkokul öğretmen adayı ile bir çalışma yürütmüştür. Öğrenciler kendi matematiksel modellerini oluştururken, derste tamamen öğrenci merkezli yaklaşım kullanılmış, öğrencilerin düzenli gruplar şeklinde çalışmaları sağlanmıştır. Tüm öğrencilerin üniversite seviyesinde cebir dersi almış olduğu ve dört tanesinin ayrıca analize giriş dersi aldığını belirtmişlerdir. İlk aşamada öğrencilerden yedi farklı fonksiyona ait grafiği fiziksel olarak modellemeleri istenmiştir. Bunun için hesap makinesi ve harekete duyarlı bilgisayar kullanmışlardır. Bu bilgisayarlar öğrenciler yürüdüğünde uzaklık/zaman grafiğini hesap ekranına yansıtabilmektedir. Bu görev tamamlandıktan sonra, öğrencilere bir model oluşturma görevi verilmiştir ve herhangi bir deneyimi olmayan bir kişi için fiziksel model oluşturabileceği bir strateji rehberi yazmaları istenmiştir. İkinci model oluşturma aktivitesi olarak *bir yolcu uçağına ait uzaklık zaman grafiği* istenmiştir. En son model oluşturma aktivitesi olarak da *şişe problemi* verilmiştir. Model oluşturma etkinlikleri için altı prensibe göre düzenlenmiş bu problemde, içerisine su dolmakta olan, gövdesi küre, boğaz kısmı silindir şeklindeki bir şişenin içindeki suyun yüksekliğini gösteren fonksiyonun grafiğini çizmeleri istenmiştir. Çalışma sonunda öğretmen adayların kaydedilen konuşmaları ve çözümleri incelenmiştir. Bu incelemeler sonucu öğrencilerin ortaya koyduğu çözümlerin, akıl yürütme becerilerinin ve kararlılıklarının çalışma için beklenilen sonuçları aştığı görülmüştür. 22 öğrencinin de şişe problemi etkinliği için anlaşılabilir bir grafiğe ulaştığı görülmüştür. Öğrencilerin bu derece başarılı olmasına neden olarak model oluşturma etkinlikleri gösterilmiştir. Bu faktörlerin öğrencilerin akıl yürütmelerini sözlü olarak ifade edebilmeleri, arkadaşları ile karşılıklı olarak dönüt alıp verebilmeleri, akla yatkın bir cevap üretene kadar çözümlerini sürekli gözden geçirip rafine etmeyi sürdürebilmeleri ve görevi tamamlamak için ihtiyaç duydukları kadar zamana sahip olmaları olarak belirtilmiştir.

Matematiksel modellemenin eğitimin amacı olan gerçek yaşamda karşılaştığı problemlere çözüm getirebilen bireyler yetiştirmeye verdiği desteğe yapılan vurgu, bu alanda birçok çalışmanın yapılmasına neden olmuştur. Bu bağlamda yapılan birçok çalışma matematiksel modellemenin öğretimi ve öğreniminin karmaşık olduğunu ve birçok faktörden etkilendiğini belirtmektedir (Borromeo-Ferri ve Blum, 2011). Ayrıca yapılan çalışmalar öğrencilerin matematiksel modelleme sürecinde problemler ve zorluklar yaşadığını belirtmektedir (Örn. Biccard, 2010; Blomhøj ve Kjeldsen, 2006; Eraslan, 2011; Eric, Dawn, Wanty ve Seto, 2012; Tekin-Dede ve Yılmaz, 2013).

Matematiksel modellemenin geleneksel öğrenme ortamlarına entegre edilmesinin ne gibi zorluklar doğurduğunu belirten Blum (1991), bu zorluklarla baş etmek için çeşitli önerilerde bulunmaktadır. Blum (1991) tarafından tanımlanan matematiksel modellemenin doğası gereği geleneksel öğrenme ortamlarına entegre edilmesinde yaşanan zorluklar ve çözüm önerilerini şu şekilde ifade etmiştir: (a) Eğitimde matematiksel modelleme ile ilgilenecek yeterince zaman yoktur. Matematiksel modelleme matematik eğitimine ait değildir. Dolayısıyla matematik dışı bu tür problemler diğer konuların öğretiminde işlenmelidir; (b) Modelleme ve uygulamalar matematik derslerini öğrenciler için çok karmaşık, zorlu ve öngörülemez yapmaktadır. Çünkü öğrenciler sadece matematiksel bir kavramı öğrenmekle yetinmez ayrıca bunun gerçek yaşamdaki kullanım alanı ile ilgili bilgileri de bilmelidir.

Benzer şekilde Akgün, Çiltaş, Deniz, Çiftçi ve Işık (2013) tarafından yürütülen, ortaokul matematik öğretmenlerinin matematiksel modelleme ile ilgili farkındalıklarını belirlemek amacıyla yapmış oldukları çalışma, gözlemler ve görüşmeler sonucunda, öğretmenlerin öğretim programındaki yoğunluktan dolayı zaman sıkıntılarının olduğunu ve matematiksel modellemenin oldukça zaman aldığını belirttiğini, bazı öğretmenlerin ise matematiksel modellemenin matematik derslerini daha karmaşık hale getirdiğini ve öğrenci anlamalarını zorlaştırdığını düşündüğü görülmüştür.

Matematiksel modellemeye yönelik bazı çalışmalarda bireylerin matematiksel modelleme basamaklarındaki geçiş sürecinde bazı zorluklar yaşadığı belirtilmektedir. Bu çalışmalarda genel olarak öğrencilerin MOE'lerin alışık oldukları matematik problemlerden farklı olmasından ve çözüm sürecinde alışık olduklarının dışında eylemler gerektirmesinden dolayı zorlandıkları görülmektedir (Blomhøj ve Kjeldsen, 2006; Eraslan, 2011; Thomas ve Hart, 2010).

Matematiksel modelleme sürecinin başarıya ulaşabilmesi için bir dizi önlemler alınmalıdır. Karşılaşılan sorunlar bu önlemleri gerekli kılmaktadır. Bu sürece uygun tasarlanan öğrenme ortamlarında da bazı sorunlarla karşılaşmak mümkündür. Özellikle matematiksel modelleme öğretiminin geleneksel öğrenme modeline uyumlu hale getirilmesi sürecinde olumsuzluklar yaşanmaktadır. Matematiksel modelleme basamaklarındaki geçiş süreçlerinde karşılaşılan olumsuzluklar da bunlardan sadece biridir. Diğer yandan kavram yanılgıları, kalıplaşmış öğrenme modellerinden kolay vazgeçememe, sabit öğretmen tutumları gibi nedenler tespit edilmiş diğer olumsuzluklardır. Tespit edilen olumsuzlukların etkin çözümlerle bertaraf edilmesi, sonrasında da matematiksel modelleme yeterliliğinin de irdelenmesi ile işleyişte en yüksek verim elde edilebilecektir.

Olivera ve Barbosa (2009) öğretmenlerin matematiksel modelleme etkinliklerinin öğretimi esnasında ne gibi gerginlikler yaşadıklarını araştırmışlardır. Çalışmayı 22 yıllık bir öğretmenin sınıfında gerçekleştirmişlerdir. Öğretmen modelleme aktiviteleri ile ilgili bir eğitim programına alınmıştır. Matematiksel modelleme etkinlikleri esnasında öğretmenlerin yaşadıkları gerginlikler anlaşılmak istendiğinden nitel bir çalışma yapılmıştır. Öğretmenin modelleme dersleri kaydedilmiş ve her ders sonunda yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Verilen eğitim hakkında da öğretmenden kısa bir yazı yazması istenmiş ve bu yazı da elde edilen verilere eklenmiştir. Veriler, gömülü teori (grounded theory) kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırmacılar öğretmenin önceden bir planlama yapmasına rağmen ders esnasında öğrenciler modelleri geliştirdikçe plana uymayan durumlar yaşanabileceğini, beklenmeyen durumların ortaya çıkabileceğini söylemişlerdir. Öğretmenin bu durumda ne yapması gerektiği ile ilgili gerginlik yaşayabileceğini belirtmişler ve bu durumu *ne yapacağına karar verme tepkisi* (the tension of what to do next) olarak adlandırmışlardır. Öğretmenin yapılanların öğrenciler için yararlı ve önemli olacağını düşünmesine rağmen öğrencilerin ilgisini konuya toplayamayabileceğini, planlanmayan bu durumun sürekli dersi bölüp, gerginlik yaratabileceğini söylemişler ve bu durumu da *öğrencilerin derse katılımları ile ilgili tepkileri* (the tension of students' involvement) olarak adlandırmışlardır. Araştırmacılar öğrencilerin önceki konuları unutmuş olmasının öğretmenin planlamanın dışında beklenmedik bir şekilde öğrencilerin eksiklikleri ile ilgilenmesini gerektireceğini, öğrencilerin konu eksikleri varsa modelleme yapamayacaklarını söylemişler ve bu durumu da *öğrencilerin matematiksel içeriğe olan hakimiyetleri ile ilgili tepkileri* (the tension of students' domination of the mathematical content) olarak adlandırmışlardır. Bu tür bilgiler öğretmen eğitiminde pedagojik bilginin ne kadar önemli hale geldiğini göstermektedir.

Biembengut ve Faria (2011), matematik öğretmenlerine ve matematik öğretmenliği eğitimi alan öğretmen adaylarına uzaktan matematiksel modelleme dersi verdikleri bir araştırma projesi gerçekleştirmişlerdir. Uzaktan matematiksel modelleme dersinin sınırlılıklarını ve olabilirliğini anlamak istemişlerdir. Bu anlayışla herhangi bir okul seviyesinde matematik eğitimi için matematiksel modellemeyi etkili hale getirmeyi hedeflemişlerdir. Proje için hazırladıkları web sitesinde eğitim için gerekli tüm materyaller hazır hale getirilmiştir. Verileri mülakatlardan, gözlemlerden, katılımcıların sorularından ve yaşadıkları zorluklardan elde etmişlerdir. Araştırma, öğretmen eğitimi ile ilgili literatürü göz önünde bulundurarak ve deneysel bir yaklaşımla 29 matematik öğretmeni ile yapılmıştır. 60 gün boyunca 40 saatlik ders ve sekiz simültane görüşme yapılmıştır. Matematiksel modelleme dersleri boyunca oluşan zorlukları ve ilerlemeleri analiz etmek, açıklamak ve tanımlamak istemişlerdir. Araştırma sonuçları öğrenci eğitimi için matematiksel modelleme kullanımının ne kadar verimli olduğunu göstermiştir. Öncelikle bu metot öğrencilerin öğrenmeye karşı olan ilgilerinin artmasına imkân vermiş, etraflarındaki dünya ile ilgili anlayışlarını geliştirmiş, çevrelerine karşı bir bilinç oluşturmuştur. Sonuçlar okul çevresinin (school community) nasıl bir eğitim öğretim kurumu (educational institution) gibi işlediğini, bir bireyin, gurubun veya çevrenin eğitimi üzerinde nasıl bir rol oynadığını da ortaya koymuştur. Araştırmada eğitimin geliştirilmesi için atılması gereken adımlar arasında eğitim politikalarına da dikkat çekilmiştir. Öğretmenlerin büyük bir çoğunluğunun sınıf içi alıştırmaları için yeterli altyapısının (backround) olmadığı görülmüştür. Öğretmenler öğretim aşamasında tatmin edici sonuçlar alamamalarına rağmen sisteme sıkışıp kalmışlardır. Pedagojik bilgileri olmasına rağmen bazı çoklu faktörlerin etkisiyle (kişisel, ailevi ve mesleki) matematiksel konuların diğer alanlarla arasındaki ilişkiyi algılamada yetersiz kalmışlar ve eski yöntemlerin dışına çıkamamışlardır. Çok az öğretmen eskilerin yöntemlerinden farklı şekilde davranabilmiştir. Matematik öğretmenlerinin uygulamadaki yetersizlikleri aşağıdaki faktörlerin iyileştirilmesi ile değiştirilebileceği söylenmiştir: (a) Çoklu faktörler (kişisel, ailevi ve mesleki), (b) her düzeyden öğrencinin öğrenmeye karşı olan ilgisizliği ve (c) eğitim politikalarındaki ana yapı

Matematiksel modellemenin, eğitimde ne denli önemli olduğu konusunun herkesçe kabul görmesi başka bir konuyu gündeme getirmektedir. O da matematiksel modellemenin nasıl ve ne ölçüde ele alınması gerektiğidir. Bu durum tartışmalara neden olmaktadır. Buna ek olarak, “Matematiksel modelleme yeterlikleri nasıl değerlendirilecek?” sorusu da başka bir tartışma konusudur. Tartışma konularının kısmen giderilmesi adına bu konularla ilgili pek çok çalışma yapılmıştır. Araştırmalarda elde edilen sonuç, matematiksel modelleme yeterliğinin değerlendirilmesinin mümkün olabileceği yönündedir. Ne var ki bu noktada sorun görülmezken matematiksel modelleme yeterliğinin nasıl ölçülebileceği hakkında güçlü bir sonuca varılamamıştır. Bu konuda kapsamlı bir anlaşma ortamı oluşturabilmek adına tartışmalar sürmektedir.

Kaiser, Shcwars ve Tiedeman (2010) modelleme yeterlikleri ile sınırlandırılmış bir alanda geleceğin matematik öğretmenlerinin mesleki bilgilerini ortaya koymak istemişlerdir. Görüşmeler ve açık uçlu soruların sonuçlarına dayanarak geleceğin öğretmenlerinin yeterlikleri, matematiksel bilgi (matematiksel içerik bilgisi de denir), matematik pedagoji bilgisine (matematikte pedagojik içerik bilgisi de denir) ve eğitim psikolojisi bilgisine (genel pedagojik bilgi de denir) göre değerlendirilmiştir. Çalışma göstermiştir ki, kapsamlı bir modelleme anlayışı ve onun pedagojik değerini geliştirmek için geleceğin öğretmenleri matematikte, matematik pedagojisinde ve genel pedagojide uygun bilgi ve yeterliklere ihtiyaç duymaktadır. Bu çalışma pedagojik konu bilgisinin öğretmenlerin mesleki bilgilerinin gelişimindeki önemli rolünün altını çizmektedir. Araştırmacılar gelecekteki öğretmenlerin sahip olduğu matematik alan bilgileri, matematiksel pedagojik alan bilgileri, genel pedagojik bilgileri şu şekilde açıklamışlardır: Matematiksel bilgi okuldaki matematik alan bilgisi ile sınırlandırılmış ve modellemeye odaklanılmıştır. Matematikte pedagojik alan bilgisi, modelleme öğelerinin hedefleri, ders planlamanın çeşitli yolları ve öğrencilerin kavram yanılgılarını tanımlama yeterliği ve anlama problemleri göz önüne alınarak değerlendirilmiştir. Genel pedagojik bilgi ise motivasyon yönü ve heterojenlikle nasıl başa çıkılacağı bilgileri göz önüne alınarak değerlendirilmiştir. Hamburg Üniversitesinde kendi rızaları ile seminere alınan 80 matematik öğretmeni adayına açık uçlu sorular yöneltilmiştir. Daha sonra bunlardan 20 tanesi ile daha detaylı görüşmeler yapılmış, modelleme yeterlikleri hakkında bilgi edinmek için onlara özel durumları da göz önüne alınarak birçok mobil telefon fiyatını karşılaştırmaları ve bir fiyat önermeleri istenmiştir. Bunu sonucunda öğretmen adayları tarafından üç değişik telefon ücreti önerilmiştir. Bu kişilerle 45 ile 90 dakika arasında değişen görüşmeler yapılmış ve içlerinden en ilginç üç görüşme seçilmiştir. Öğrencilerin modelleme süreçleri bilgisi ve yeterlikleri arasında büyük farklar olduğu görülmüştür. Modelleme süreçleri bilgisi ve modelleme yeterlikleri birbirinden ayrılamayacağı, modelleme süreçleri hakkındaki bilginin modelleme yeterlikleri üzerinde etkili olduğu belirtilmiştir. Elde edilen sonuçlarda mesleki öğretmen bilgisi ile pedagojik alan bilgisinin ilişkili olduğu görülmüştür. Pedagojik alan bilgisine, konu alanı bilgisi ve genel pedagojik bilgi arasındaki bağlantı gözüyle bakılabileceği ve bu alanlardaki bilgilerden birinin eksikliği durumunda olumsuz sonuçlar doğacağı söylenmiştir.

Lingefjard (2002) çalışmasında, modelleme etkinlikleri üzerine çalışan İsveç matematik öğretmen adaylarını gözlemlemiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının modelleme etkinlikleri ele alınmış, kullandıkları strateji ve yetenekler çalışmada tartışılmıştır. Araştırmacının kendisinin verdiği kursa katılan öğretmen adaylarından, üç bölümden oluşan bir problem kullanarak, gerçek dünya durumlarını anlamada matematiğin düzenleyici rolü hakkında daha fazla bilgi edinmelerini ve öğretmen adaylarının kendilerinin verileri hazırlayarak matematiksel modelleme sürecini daha iyi anlamalarını sağlamayı hedefler. Verilen kursun içeriği ise öğretmen adaylarına matematiksel modelleme kullanarak karmaşık problemleri nasıl çözebilecekleri hakkında anlayış kazandırmak olarak tasarlanmıştır. Çalışmanın sonucunda öğretmen adayları kendi modellerinden oluşturulmuş verileri kullanarak matematiksel modelleme problemini çözerken bile, aslında kafaları karışmıştır. Bazen çok yönlü çözümler bulma istekleri yüzünden, basit ve sadece çözümlere ulaşamaz hale gelmişlerdir. Buna rağmen öğrencilere bu şekildeki karmaşık problemler sunmanın birçok yararı olduğu çünkü onların birçok matematiksel aktiviteyi kendi matematiksel yetenekleri ile geliştireceklerini düşünmektedirler. Bunu gerçekleştirmenin yolunun ise öğretmen adaylarına matematiğin günlük yaşamdaki birçok konudan nasıl oluştuğu hakkında anlayış kazandırmak olduğunu belirtmişlerdir.

Ülkemizde de model ve modelleme konusunda çalışmalar yapılmaktadır. Bu araştırmalardan biri matematik öğretmen adaylarının analiz dersi akademik başarıları ile matematiksel modelleme yaklaşımları arasındaki ilişkiyi inceleyen Güzel ve Uğurel'in (2010) çalışmasıdır. Güzel ve Uğurel'e (2010) göre modelleme süreçleri, öğrencilerin hem kavramsal hem de işlemsel becerilerinin gelişimine katkı sağlamaktadır. Bu nedenle matematik eğitiminde matematiksel modelleme yaklaşımları kullanılarak öğrencilerin modelleme becerilerinin geliştirilmesinin gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Araştırmacılara göre bu gerekliliği yerine getirme görevi ilk olarak öğretmenlerindir. Eğer öğretmenlerin kendileri matematiksel modelleme üzerine yeterince bilgiye sahip olmaz ve modelleme becerilerini yeterince geliştirememiş durumda olurlarsa doğal olarak öğrencilerinde de bu süreçte önemli sıkıntıların oluşacağı öngörülebilir. Bu amaçla matematik öğretmen adaylarının matematiksel modellemede ne tür yaklaşımlar sergiledikleri ortaya koymak isteyen bu çalışma ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören farklı akademik başarılara sahip on iki öğretmen adayıyla gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın temel sonucu akademik başarının matematiksel modelleme yaklaşımlarını bir ölçüde etkilediğidir. Söz konusu etki akademik başarının modelleme becerisinin geliştirilmesinde gerekli fakat yeterli olmadığı yönünde kendini göstermektedir. Dolayısıyla matematik öğretmen adaylarının akademik başarılarının arttırılmasının onların matematiksel modelleme döngüsünün tüm basamaklarında başarılı olmalarını tek başına sağlayamayacağı ifade edilebilir.

Ülkemizdeki matematik öğretmen adaylarının, model oluşturma etkinlikleri ve bunların matematik öğrenimine etkisi hakkındaki görüşlerini inceleyen Eraslan (2010) öğretmenlerin, öğrencilerin matematiksel yapıları ve kavramsal sistemleri belirlemesi ve kullanımına yönelik deneyimlerin elde edilmesi ve yorumlanmasında önemli rol oynayabileceğini düşünmektedir. Yapılan nitel çalışmaya araştırmacının kendisinin vermiş olduğu matematik öğretiminde modelleme dersini alan 6 öğretmen adayı katılmıştır. Öğrenciler modelleme gerektiren dört farklı matematiksel problem etkinliği üzerinde önce bireysel daha sonra grup olarak çalışmışlardır. Bu süreçte öğrenciler verilen gerçek yaşam durumunu matematiksel bir problem haline getirip, problem üzerinde kendi matematiksel bilgilerini kullanarak elde ettikleri çözümleri gerçek yaşam durumuyla karşılaştırarak yorumlamaya ve doğrulamaya çalışmışlardır. Elde edilen sonuçlar göstermiştir ki öğretmen adayları bu etkinlikleri içinde birçok varsayımın olduğu, üst düzey düşünme gerektiren, farklı bakış açılarında farklı sonuçlara ulaştıran çok yönlü mantık soruları şeklinde tanımlamışlardır. Ayrıca öğretmen adayları model oluşturma etkinliklerin sınıf içinde belli sınırlar dâhilinde planlandığında öğrencilere her seviyede uygulanabileceğini ve bu etkinliklerin öğrencilerin matematiksel gelişimine katkıda bulunabileceğini öne sürmektedirler.

Kertil (2008), geleneksel eğitim sisteminden yetişmiş matematik öğretmen adaylarının problem çözme becerilerini matematiksel modelleme sürecinde incelemek, müfredatın uygulayıcısı olacak öğretmen adaylarının durumları hakkında fikir edinmek ve uygulanan modelleme etkinlikleriyle onların modelleme ve problem çözme becerilerine katkı sağlamak amacıyla, bir devlet üniversitesinin 4. sınıfında öğrenim gören matematik öğretmen adayları ile bir çalışma yapmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarının modelleme sürecindeki becerilerinin belirlenmesinde modelleme testi ve modelleme etkinlikleri kullanılmıştır. Modelleme etkinlikleri üzerinde öğretmen adayları önce bireysel daha sonra da grup olarak çalışmışlardır. Öğretmen adaylarının bireysel ve grupla çalışma süreçleri ayrı ayrı değerlendirilmiş ve problem çözme becerilerinin bireysel çalışmalarda nasıl olduğu, grup çalışmalarında ne şekilde değiştiği anlaşılmaya çalışılmıştır. Öğretmen adayları ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılarak modelleme testinde ve etkinliklerinde ne gibi zorluklar yaşadıkları, bu problemlere nasıl bir bakış açısıyla yaklaştıkları ve çalışma sonucundaki kazanımları araştırılmış. Araştırma sonucunda modelleme etkinliklerinde grup çalışmasının çok önemli bir rolü olduğu ortaya çıkmıştır. Bazı gruplardaki grup üyelerinin bireysel olarak hiçbir soruya cevap verememelerine rağmen grup çalışması sırasında doğru yanıtlar verdikleri görülmüştür. Yine çalışma sonucunda elde edilen bulgulara göre, öğretmen adaylarının modelleme sürecindeki problem çözme becerilerinin yeteri kadar iyi olmadığı ortaya koyulmuştur. Modelleme testinden ve modelleme etkinliklerinden elde edilen sonuçlar ise öğretmen adaylarının gerçek hayat problemleri çözme sürecinde matematiksel bilgilerini yeterince kullanamadıklarını göstermektedir. Görüşmelerden elde edilen bulgularda öğretmen adaylarının modelleme etkinliklerine pek alışık olmamaları nedeniyle başarısız oldukları fakat bu etkinliklerin onlara problem çözmede yeni bakış açıları kazandırdığına yer verilmiştir. Çalışmanın sonunda öğrencilerin modelleme becerilerinin geliştirilebilmesi için öncelikle öğretmenlerin bu yaklaşımla ilgili gerekli donanıma sahip olması gerekliliği ortaya koyulmuş, bu nedenle öğretmen yetiştirme programlarında, öğretmen adaylarının matematiksel modelleme yeterliklerini artırmak için gerekli eğitimin verilmesinin önemi vurgulanmıştır.

Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme yapabilme becerilerinin gelişimini araştıran Keskin (2008) çalışmasında bir durum analizi yapmıştır. Çalışmaya katılan bir devlet üniversitesinin 3. sınıf öğretmen adaylarından 21 kişi ile bir dönem boyunca modelleme dersleri yapılmıştır. Öğretmen adaylarının matematiksel modelleme ile ilgili görüşleri ve yetenekleri hakkında bilgi sahibi olmak için bu uygulamanın başında ve sonunda ön ve son matematiksel görüş anketi ve beceri testleri uygulanmıştır. Bunun dışında beş öğretmen adayı ile ön ve son görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adaylarının yapılan son matematiksel modelleme beceri testinde genel olarak ön matematiksel modelleme testinde olduklarından daha başarılı oldukları gözlenmiştir. Ayrıca uygulama sonunda öğretmen adaylarının matematiksel modelleme görüş anketi ve görüşmelerde verdikleri yanıtlara bakılarak ilk duruma göre olumlu bir görüşe sahip oldukları belirlenmiştir. Anketlerdeki öğrenci görüşleri dikkate alındığında, üniversitelerin eğitim fakültelerinde öğretmen adaylarının kendi derslerinde kullanabilmeleri için öğretim programlarında bir ders olarak değil de tüm derslerin içinde matematiksel modellemeye yer verilmesi uygun bulunmuştur. Son olarak anasınıfından üniversiteye kadar eğitimin her aşamasında seviyeye uygun modelleme etkinliklerinin kullanılmasının gerekliliği belirtilmiştir.

Genel olarak modelleme konusu üzerine şekillenmiş olan bu bölüm, modellemenin ne kadar önemli olduğunu vurgulamaktadır. Matematiğin gerçek hayata yansıması ne kadar büyük olursa sorunların çözümü ve kaliteli bir yaşama ulaşmak da o kadar kolay olacaktır. Ayrıca modelleme derslerine gerekli önemin verilmesi de problemlerin çözümünde ve sorunu oluşturan süreçlerin anlaşılmasında etkili olacaktır. Buradan yola çıkarak hazırlanan çalışma, ortaokulda eğitim veren başta matematik alanı olmak üzere tüm alan öğretmenlerinin modelleme konusunda fikir sahibi olmalarını, kendi derslerinde uygulamalarını ve geliştirmelerini hedeflemiştir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

III. YÖNTEM

Bu bölümde, araştırmanın türü ve deseni, araştırma grubu, araştırmada kullanılan veri toplama araçları, verilerin analizinde kullanılan yöntemler ile araştırmanın güvenilirliği açıklanmıştır.

3.1 Araştırmanın Türü ve Deseni

Bu çalışma, ortaokul matematik öğretmenlerinin model oluşturma süreçlerinin incelenmesi amacıyla yapılan nitel bir araştırmadır. Çalışmada öğretmenlerin model oluşturma süreçleri çoklu bilgi kaynakları yardımıyla (video-kayıt grup çalışması, çalışma kâğıtları ve sonuç raporları) derinlemesine incelenerek eğer varsa karşılaştıkları güçlüklerin ortaya konulması amaçlanmaktadır. Bu nedenle öğretmenlerin grup çalışmasıyla model oluşturma sürecinde var olan matematik bilgilerini ve deneyimlerini ne kadar kullanabildiklerini ve hangi noktalarda güçlükler yaşadıklarını belirleyebilmede etkili bir araç olan model oluşturma etkinliklerinden faydalanılmıştır. Video kayıt yöntemiyle elde edilen veriler nitel yöntemlere uygun şekilde analiz edilmiş ve yorumlanmıştır. Bu nedenle bu çalışma; en genel anlamda bir grup veya olayı derinlemesine inceleme ve analiz etme olarak tanımlanan durum (case study) çalışmasıdır. Durum çalışması bir veya birkaç durumu kendi sınırları içinde bütüncül olarak analiz etmektir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu araştırmada durum üç ortaokul matematik öğretmeninden oluşan bir odak grubun modelleme süreçlerinin incelenmesidir.

3.2 Araştırma Grubu

Araştırma, 2010-2011 eğitim-öğretim yılında, Karadeniz Bölgesinde bulunan bir ilimizde Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı farklı ortaokullarda görev yapan ve daha önce *Matematik Öğretiminde Modelleme* dersini almış üç öğretmeni kapsamaktadır. Çalışma grubundaki öğretmenler amaçlı örnekleme yöntemi kullanılarak belirlenmiştir. Amaçlı örneklemenin mantığı ve gücü derinlikli çalışmalar açısından zengin durumların seçilmesini sağlamaktır. Bilgi açısından zengin durumlar araştırma amacı için önem taşıyan konular hakkında araştırmacının büyük miktarda bilgi edinebileceği durumlardır (Patton, 2002; aktaran, Glesne, 2013). Bu anlamda amaçlı örneklem pek çok durumda olgu ve olayların keşfedilmesinde ve açıklanmasında yararlı olur (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Amaçlı örnekleme yöntemi türlerinden kolay ulaşılabilir örnekleme yöntemi ile çalışma grubu oluşturulmuştur. Bu yöntem ile araştırmacının araştırmaya hız ve pratiklik kazandırması açısından yakın olan ve erişilmesi kolay olan durumu seçmesi söz konusudur (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Uygulamaya katılan öğretmenler 25-30 yaş aralığındadır. Öğretmenler, lisans eğitimlerini İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünde tamamlamış olup hepsi aynı alanda yüksek lisans eğitimine devam etmektedirler. Katılımcılar 3-7 yıllık mesleki tecrübe aralığında ve yüksek lisans öğrenimine devam ederken *Matematik Öğretiminde Modelleme* dersini almışlardır. Öğretmenlerden ikisi kadın biri erkek öğretmenden seçilmiştir. Çalışmayı yapan araştırmacının çalışma grubu ile aynı derslere katılmış olması, çalışma grubuyla yakın ilişki kurmasını sağlamıştır. Grup çalışmasına yer alan öğretmenlere gerçek isimleri yerine farklı isimler kullanılmış olup, bayan öğretmenlere Ayşen ve Seda, erkek öğretmene ise Arda ismi kullanılmıştır: Tablo 5'te katılımcı bilgileri verilmiştir.

Tablo 5: Katılımcı Bilgileri

Katılımcılar	**Mezun olduğu program**	**Tezli yüksek lisans**	**Mesleki deneyim (yıl)**	**Yaş**
Ayşen	İlköğretim matematik öğretmenliği	İlköğretim matematik eğitimi bilim dalı	3	25
Seda	İlköğretim matematik öğretmenliği	İlköğretim matematik eğitimi bilim dalı	5	27
Arda	İlköğretim matematik öğretmenliği	İlköğretim matematik eğitimi bilim dalı	7	30

Bahar döneminin sonunda bir araya getirilen öğretmenlere iki farklı model oluşturma etkinliği verilerek üzerinde çalışmaları istenmiştir. Öğretmenlere almış oldukları derslerde uyguladıkları model oluşturma etkinliklerinin dışında daha önce görmedikleri iki etkinlik seçilmiş ve uygulanmıştır.

3.3 Çalışmanın Uygulama Süreci

Çalışma öncesinde Karadeniz Bölgesinde bulunan bir ilimizde Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı farklı ortaokullarda görev yapan ve daha önce *Matematik Öğretiminde Modelleme* dersini almış, bir diğer ifadeyle modelleme deneyimi olan üç öğretmen bahar dönemi sonunda uygulama gerçekleştirilmiştir. *Matematik Öğretiminde Modelleme* dersi tez danışmanı tarafından verilmiş olup ders boyunca model, modelleme, matematiksel modelleme, modelleme etkinlikleri, modelleme etkinliklerinin geleneksel problem çözme durumlarından farkı, modelleme pedagojisi, süreçleri, yeterlilikleri ve matematiksel modellemede ölçme-değerlendirme kavramları öğretmenlere tanıtılarak öğretmenlerin tartışmaları sağlanmıştır (Eraslan, 2011).

Öğretmenlere araştırmacı tarafından, aldıkları eğitime bağlı olarak uygulama öncesinde modelleme eğitimi ile bilgilendirme yapılmıştır. Öğretmenler ile araştırmacının aynı meslek ve aynı branştan olması ve daha önceden birbirlerini tanıyor olmaları karşılıklı güvenin oluşmasında önemli bir faktör olmuştur.

Çalışmalar esnasında gerekli görüldüğü durumlarda kullanılmak üzere cetvel, müsvedde kâğıtlar, kalem, silgi hesap makinesi gibi materyaller bulundurulmuştur. Uygulama etkinlikleri daha önceden belirlenen bir gün içerisinde art arda gerçekleştirilmiştir. Bir sınıfta bulunan masanın etrafında toplanan odak grup öğretmenleri araştırmacı tarafından verilen her iki model oluşturma etkinliği üzerinde beraber çalışmışlardır. Süreç, video ile kayıt altına alınmıştır. Model oluşturma etkinliklerinin uygulanış sırası ve süresi Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6: Araştırmada Kullanılan Model Oluşturma Etkinlikleri ve Uygulama Planı

Etkinlik No	Modelleme Etkinliğinin Adı	Çalışmaya Ayrılan Süre
1	Kablo Makarası Etkinliği (Föerster ve Kaiser, 2010)	138 dakika
2	Uçağa Binme Etkinliği (Pan, 2007)	149 dakika

Model oluşturma etkinliklerinin çalışmaları sırasındaki uygulama aşamaları; hazırlık aşaması, model oluşturma ve rapor yazma aşaması ile sunum aşaması olarak belirlenmiştir. Model oluşturma etkinlikleri öğretmenlere verilmeden önce etkinlikle ilgili hazırlık aşaması yapılmıştır. Sonrasında öğretmenlere önce ilk model oluşturma etkinliği verilmiş ve bu etkinlikte belirlenen yönergelere dayanılarak bir model oluşturmaları istenmiştir. Devamında ikinci model oluşturma etkinliği verilerek aynı süreç yinelenmiştir. Çalışma sonunda her iki model oluşturma etkinliğinde gerçekleşen çalışmalar karşılaştırılmıştır. Etkinliklerin aşamaları için ayrılmış olan süreler detaylı olarak Tablo 7'de gösterilmiştir.

Tablo 7: Öğretmenlerin Model Oluşturma Etkinlikleri Üzerinde Aşamalara Göre Çalışma Süreleri

Uygulama Aşamaları	Uygulama Süresi	
	1.Etkinlik	**2.Etkinlik**
Hazırlık	15 dk.	15 dk.
Modelleme Aşaması ve Raporlaştırma	103 dk	114 dk
Sunum	20 dk.	20 dk.
Toplam Süre	138 dk.	149 dk.

3.4 Veri Toplama Araçları

Matematik öğretiminde modelleme dersi kapsamında öğretmenlere uygulanan model oluşturma etkinliklerinin dışında öğretmenlerin deneyimlemediği, alan yazında yer alan farklı iki model oluşturma etkinliği öğretmenlere uygulanmıştır. Öğretmenlere uygulanan farklı model oluşturma etkinlikleri *Kablo Makarası Etkinliği* (Föerster ve Kaiser, 2010) ve *Uçağa Binme Etkinliği'*dir (Pan, 2007).

3.4.1 Kablo Makarası Etkinliği

Çalışmada kullanılan ilk model oluşturma etkinliği olan *Kablo Makarası Etkinliği* (EK-1), Föerster ve Kaiser'in (2010) çalışmasından yararlanılarak Türkçe'ye uyarlanmıştır. Etkinlikte öncelikle makaralar ve kablo makaralarının taşınma şekli hakkında kısa bir bilgilendirme yapılmaktadır. Daha sonra ise bir kablo makarasına en fazla kabloyu sarmaya yönelik öğretmenlerden bir model oluşturmaları ve bunun nasıl yapıldığının raporlaştırılması istenmektedir. Bu süreçte problemin öğretmenler tarafından anlaşılır olması için uygun terimler kullanılmaya çalışılmıştır. Ayrıca modelin oluşturulmasına katkı sağlamak için şekiller ile desteklenmiştir. Öğretmenlere parametre olarak “Makaranın Genişliği=L”, “Makaranın Göbek Yarıçapı= R_2”, “Makaranın Yarıçapı= R_1” ve “Kablo Yarıçapı=r” verilmiştir (Föerster ve Kaiser, 2010).

3.4.2. Uçağa Binme Etkinliği

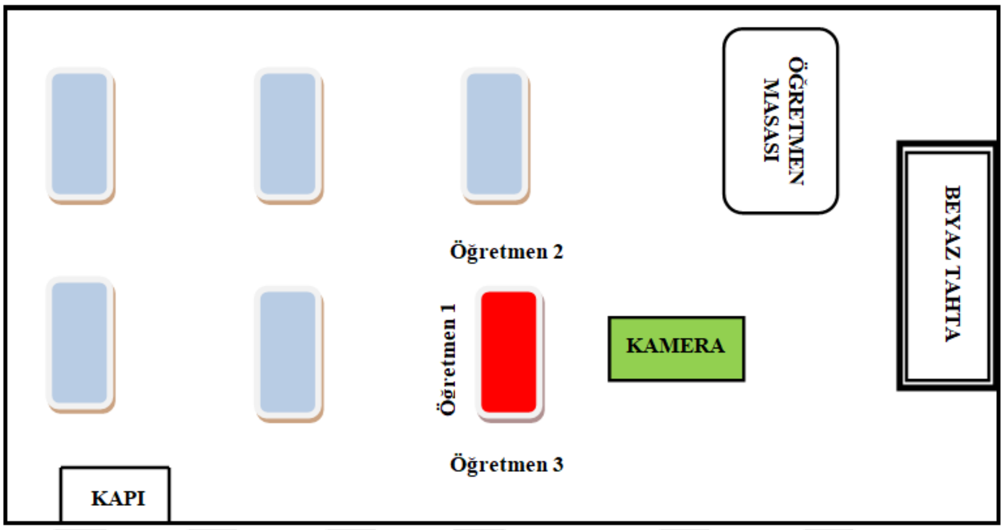
Çalışmada kullanılan bir diğer model oluşturma etkinliği ise *Uçağa Binme Etkinliği* (EK-2)’dir. Etkinlik, Pan (2007)’in çalışmasından Türkçe’ye uyarlanmıştır. Bir önceki model oluşturma etkinliğinde olduğu gibi bu etkinlikte de problemin, öğretmenler tarafından anlaşılır olması için uygun terimler kullanılmış, ayrıca şekil ile desteklenmiştir.

*Uçağa Binme Etkinliği’*nde öncelikle havayolu ile ulaşımı seçen kişilerin havaalanlarında en çok karşılaştığı problemin uçağı kaçırma olduğundan, bu durumun aynı zamanda havayolu şirketlerini de tazminat ödemek yoluyla maddi anlamda sıkıntıya soktuğundan bahsedilmiştir. Çalışmanın devamında yolcuların bir uçağa en kısa sürede yerleşmelerini sağlayarak havalanmasına yardımcı olacak bir oturma planı hazırlamaları, buna yönelik bir model geliştirmeleri istenmiştir. Çalışma, örnek olması açısından bir uçağın oturma planının şekli verilerek zenginleştirilmiştir. Bu noktada uçakta yolcular için 26 sıra koltuk olduğu, uçağın ilk üç sırasında dört kişilik, geri kalan 21 sırada ise altı kişilik koltuğun bulunduğu, toplamda 138 kişilik bir uçak olduğu, ön ve arka giriş kapılarının yerleri ile ilgili bilgiler verilmiştir (Pan, 2007).

3.5 Veri Toplama Yöntemi

Yapılan araştırmalar neticesinde ilgili alan öğretmenlerinden yüksek lisans eğitimlerinde “Matematik Öğretiminde Modelleme” dersi almış üç öğretmen belirlenerek verilen model oluşturma etkinlikleri üzerinde çalışmaları sağlanmıştır.

Çalışmada önce öğretmenlere modelleme konusunda kısa bir hatırlatma yapılmış olup devamında her bir model oluşturma etkinliği sırasıyla uygulanmıştır. Sınıf ortamı Şekil 8’de gösterilmiştir. Çalışma bahar döneminin sonunda gerçekleştirildiği için eğitim-öğretim faaliyetlerini etkilememiş, dolayısıyla model oluşturma etkinlikleri sırasında hiçbir dış etken etkili olmamıştır. Etkinliklerin çözümü için bir süre sınırlaması yapılmamıştır. Birinci etkinlik 103 dakika ikincisi ise 114 dakikada tamamlanmıştır. Etkinlikler süreç boyunca video kaydına alınmıştır. Ayrıca üç öğretmenin de çalışma kâğıtları ve raporları diğer veri kaynakları olarak toplanmıştır. Video-ses kayıtları yazılı olarak dokümanlaştırılmış ve öğretmenlerin çalışma kâğıtlarıyla beraber nitel olarak analiz edilmiştir.



Şekil 8: *Çalışmanın Yapıldığı Sınıfın Yapısı*

Veri toplama yöntemi olarak bir grubun bir konuyu nasıl tartıştığını ve süreç içerisinde çoklu bakış açılarının nasıl ortaya çıktığını anlamak amacıyla *odak grup görüşmesi* kullanılmıştır (Glesne, 2013). Birebir yapılan görüşmelerin tersine odak grup görüşmecileri bir yandan diğer insanların söylediklerini duyup onlara özgün cevaplar oluştururken diğer taraftan kendi düşüncelerini test etmek, ilave yorumlar yapmak ve diğerlerinin yorumlarını da duyabilme imkanı bulabilmektedir. Buradaki amaç, katılımcıların olaylara başkasının penceresinden de bakabileceği bir durumda sağlıklı verilere ulaşılmasıdır (Merriam, 2013; aktaran, Şahin, 2014, s. 99).

3.6 Verilerin Analizi

Bu araştırma bir durum çalışması olup veriler odak grup görüşmesi yöntemiyle toplanmıştır. Bir durum çalışmasında analiz; durumun ve ortamın detaylı bir betimlemesinin yapılmasına bağlıdır (Cresswell, 2013). Bu nedenle çalışmada yer alan öğretmenlerin hem *Kablo Makarası Problemi* hem de *Uçağa Binme Problemi'nin* çözümü esnasında geliştirdikleri matematiksel düşünceler ve ortaya koydukları yazılı cevaplar *betimsel analiz* yöntemiyle çözümlenmiştir. Betimsel analizde elde edilen veriler daha önceden belirlenen temalara göre özetlenir ve yorumlanır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Veriler araştırma sorularının ortaya koyduğu temalara göre düzenlenebileceği gibi, görüşme ve gözlem süreçlerinde kullanılan sorular ya da boyutlar ele alınarak da sunulabilir. Bireylerin görüşlerini yansıtmak amacıyla doğrudan alıntılara sık sık yer verilir. Bu tür analizde amaç, elde edilen bulguları düzenlenmiş ve yorumlanmış biçimde okuyucuya sunmaktır. Bu amaçla elde edilen veriler önce sistematik ve açık biçimde betimlenir daha sonra yapılan bu betimlemeler açıklanır ve yorumlanır, neden sonuç ilişkileri irdelenir ve bir takım sonuçlara ulaşılır. Betimsel analiz dört aşamadan oluşur: (1) betimsel analiz için bir çerçeve oluşturma, (2) tematik çerçeveye göre verilerin işlenmesi, (3) bulguların tanımlanması ve (4) bulguların yorumlanması (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu amaçla odak grup görüşmesinde yer alan öğretmenlerin model oluşturma etkinlikleri üzerindeki düşünme süreçleri, şekil 6'da ayrıntılı bir biçimde açıklanan Ferri'ye (2006) ait modelleme döngüsü kullanılarak veriler analiz edilmiştir. Analizler sırasında odak grubun her bir model oluşturma etkinliği için takip ettiği model oluşturma süreçleri incelenmiş ve öğretmenlerin model oluşturma sürecindeki düşünme süreçleri ile bu süreçlerde karşılaştıkları güçlükler ortaya konulmuştur.

3.7 Çalışmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Nitel araştırmaların veri toplama ve analiz aşamalarının başlıca aracını insan olarak gören Merriam (2013), araştırmacının gözlem ve görüşmeler aracılığıyla gerçek hakkındaki yorumlara doğrudan ulaşabileceğini belirtmektedir. Okuyucu, araştırmanın verilerine yorum katılmamış haliyle okuma fırsatı elde ederse, daha sonra araştırmacının ulaştığı sonuçları bu verilere göre değerlendirme fırsatı elde edebilir (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu nedenle Creswell (2013) nitel bir çalışmada geçerlilik ve güvenirlilik ölçütlerinin bilimsel bir çalışma için edebi bir biçimde ifade edilmiş ikna edici anlatı olarak ortaya koymak olduğunu belirtmiştir (Merriam, 2013). Ayrıca Lincoln ve Guba (1985) bulguların araştırmacı ve katılımcılar arasında nakledilebilir olduğuna emin olmak için yoğun bir betimlemeye ihtiyaç duyulduğunu, araştırmacının verinin değerini belirlerken objektifliğinden ziyade onaylanabilirliğe önem verdiğini ifade ederek hem güvenilebilirlik hem de onaylanabilirliğin araştırma sürecinin denetlenmesi yoluyla belirlendiğini açıklamıştır (aktaran, Cresswell, 2013). Doğru bilgiye ulaşma konusunda gereken önlemlerin alınması (geçerlilik) ve araştırma sürecini ve verileri açık ve ayrıntılı bir biçimde; bir başka araştırmacının değerlendirmesine olanak verecek biçimde tanımlaması (güvenirlilik), nitel bir araştırmanın karşılaması gereken önemli beklentilerindendir (Merriam, 2013). Nitel araştırmada araştırmacı için önem teşkil eden asıl durum çalışmanın güvenilir ve geçerli olduğuna okuyucuyu ikna ederek araştırmacının objektif davrandığına inandırmaktır. Nitel araştırmaların "doğruyu ve gerçeği" yakalayamayacakları bilinen bir şey olmasına rağmen nitel bir araştırmacı olarak, bulguların "inanırlığını" arttırmak için kullanabilecek bir dizi strateji bulunmaktadır (Merriam, 2013). Ancak bu önerileri nicel araştırmada geleneksel olarak kabul gören ve önemli değer ölçütleri olarak ön plana çıkarılan geçerlik ve güvenirlik kavramları çerçevesinde değil nitel araştırmanın doğasına uygun olabileceğini düşündükleri alternatif kavramlarla yapmaktadırlar (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Lincoln ve Guba'nın (1985), iç geçerlik yerine inandırıcılık, dış geçerlik yerine aktarılabilirlik kavramlarını, iç güvenirlik yerine tutarlılık ve dış güvenirlik (tekrar edilebilirlik) yerine ise teyit edilebilirlik kavramlarını kullanmayı tercih etmektedirler (aktaran, Yıldırım ve Şimşek, 2011). Erlandson, Harris, Skipper ve Allen (1933) iç geçerliliği (inandırıcılık); uzun süreli etkileşim, derinlik odaklı veri toplama, çeşitleme (triangulation), uzman incelemesi, dış geçerliliği (aktarılabilirlik/ transfer edilebilirlik) ayrıntılı betimle ve amaçlı örnekleme seçimi, iç güvenirliliği (tutarlılık) tutarlılık incelemesiyle ve dış güvenirliliği (teyit edilebilirlik) ise teyit incelemesi yöntemleri ile sağlanabileceğini belirtmiştir (aktaran, Yıldırım ve Şimşek, 2011). Ayrıca Creswell (1998) güvenilirliği sağlamak amacıyla dikkat edilmesi gerekilen sekiz özelliğin olduğunu belirtmiştir. Bu sekiz özelliği (1) uzun süreli etkileşim ve sürekli gözlem, (2) çeşitleme (üçgenleme), (3) akran incelemesi ve sorgulaması, (4) olumsuz durum analizi, (5) araştırmacının önyargılarının açıklaması, (6) katılımcı teyidi, (7) zengin ve ayrıntılı betimleme, (8) dış denetim (incelemesi) şeklinde tanımlamıştır.

Nitel bir araştırma için yukarıda belirtilen özelliklerden en az ikisinin sağlanılması durumunda yapılan çalışmanın güvenilir ve geçerli olduğu belirtilmiştir (Creswell, 1998). Yapılan bu çalışmada yukarıda belirtilen sekiz özellikten üçünün sağlandığı ve bunun için yapılan güvenirlilik ve geçerlilik işlemleri aşağıda sunulmuştur:

Veri toplama aşamasına uygun ve yeterli katılım olarak araştırmacı etkileşimde bulunarak alan içerisinde katılımcılar ile güven oluşturmayı, kültürü öğrenmeyi ve araştırmacılar ve bilgi veren kişiler tarafından ortaya konan saptamalardan kaynaklanan yanlış bilgilerin kontrol edilmesini sağlamak inandırıcılığı arttırma yollarından biridir (Creswell, 2013). Bundan dolayı araştırmacı uygulamaya geçmeden önce öğretmenler ile yapılacak çalışmanın temelini oluşturan "modelleme ve model oluşturma" konularında sunum yaparak önceden etkileşim içinde bulunmuştur.

Ortaya konan bulguların doğruluk ve gerçekliğinin kontrolü için birden fazla araştırmacı, çoklu veri kaynağı ya da çoklu veri toplama yönteminin kullanılması olarak tanımlanan çeşitleme (triangulation) inandırıcılığı arttırmanın bir diğer yoludur (Merriam, 2013). Bu amaçla bu çalışmada odak grup görüşmesi süresince alınan ortam gözlem notları, öğretmenlerin çalışma kâğıtları ve video-ses kayıtları şeklinde çeşitli veri kaynaklarına başvurulmuştur. Süreç sonunda öğretmenlerin çalışma kâğıtları, ses-kayıt çözümlemeleri, sonuç raporları ve gözlem notları ile beraber veri çeşitlemesi yoluna gidilerek analiz edilmiştir.

Nitel çalışmada dış geçerlilik (genellenebilirlik) yerine kullanılan aktarılabilirlik (transfer edilebilirlik) araştırma sonuçlarının doğrudan benzer ortamlara genellenemeyeceği, ancak bu tür ortamlara sonuçların uygulanabilirliğine ilişkin geçici yargılara ulaşılması ve test edilecek denenceler anlamına gelmektedir. Nitel araştırmanın sorumluluğu olan elde ettiği sonuçların benzer ortamlara aktarılabilirlik değerini ortaya koymak amacıyla ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme yöntemi kullanılmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2011). Bu çalışmada aktarılabilirliği sağlamak amacıyla ayrıntılı betimleme stratejisi kullanılmış, zengin ve derinlikli olarak ortam ve katılımcılar tanımlanmış, araştırma notlarından ve çözümlemelerden yapılan doğrudan alıntılarla desteklenerek bulgular ortaya konmuştur. Ayrıca amaçlı örneklem kullanılarak modelleme eğitimi almış ortaokul öğretmenlerinden bir grup oluşturulmuştur.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

IV. BULGULAR

Bu bölümde odak grup çalışmasında görev alan üç ortaokul matematik öğretmeninin her iki model oluşturma etkinliği üzerinde matematiksel düşünce ve yazılı işlem yoluyla ortaya koydukları bilişsel süreçleri Ferri (2006)'nin şu başlıkları altında incelenmiştir: (1) Problemi anlamak, (2) Problemi basitleştirmek/ yapılandırmak (gerekli ise EMB kullanımına karar vermek), (3) Matematikselleştirmek (burada EMB'ye güçlü şekilde ihtiyaç duyulur), (4) Matematiksel işlemlerle çalışmak (kişisel matematik bilgi ve deneyimlerin kullanımı), (5) Yorumlamak ve (6) Geçerliğini doğrulamak.

4.1. Kablo Makarası Sorusuna İlişkin Bulgular

Bu çalışmada yer alan ortaokul matematik öğretmenlerinin sözlü ve yazılı işlem yoluyla ortaya koydukları model oluşturma süreçlerinin her bir aşaması meydana geldiği sırada sunulmuştur. Grup çalışmasına yer alan bayan öğretmenlere Ayşen ve Seda, erkek öğretmene ise Arda isimleri verilmiştir.

4.1.1. Problemi Anlamak

Ortaokul matematik öğretmenlerine kablo makarası sorusuna ait problem metni araştırmacı tarafından verildikten sonra öğretmenler arasında aşağıdaki konuşmalar gerçekleşmiştir. Ayrıca problemin çözümünde kullanmaları için örnek bir kablo makarası ve iki farklı boyutta kablo da grup üyelerine verilmiştir.

Görüşmeci: Çeşitli boyutlarda pek çok kablo makarası var. Hepimiz görmüşüzdür.
Arda: Evet inşaatlarda yollarda görmüşüzdür.
Görüşmeci: Sorumuz kablo makaraları ile ilgili. Sizden istenen tüm kablo makaraları ile ilgili genel bir sonuca ulaşmanız. (Örnek olarak getirilen boş kablo makarası ve iki farklı boyuttaki kabloyu göstererek) bir makaraya maksimum olarak ne kadar kablo sarabiliriz?
Ayşen: (Örnek olarak getirilen makarayı elinde göstererek) Yani şuna sarabileceğimiz maksimum kabloyu bulacağız.
Arda: Seda soruyu oku istersen.

Öğretmenler problem metnini okuduktan sonra problemi anlamak, genel durumu açıklamaya çalışmak ve problemi daha anlaşılır hale getirmek için problem metni üzerinde aşağıdaki gibi tartışmışlardır.

> **Ayşen:** (Örnek makara üzerinde göstererek) şimdi şurası göbek… R_2 göbeğin yarıçapı. Merkezden itibaren makaranın kulak mı diyelim? Kulakların yarıçapı R_1. Ayrıca L var. Kulaklar arasındaki mesafe… Yani göbeğin uzunluğu… Yani makaranın genişliği…
> **Seda:** Küçük r var…
> **Ayşen:** Kablonun yarıçapı…
> **Seda:** Yani biz bu değerleri kullanarak markaya sarabileceğimiz maksimum kablo boyunu bulacağız.
> **Ayşen:** Kablo değişebilir.
> **Seda:** Hepsi değişebilir. Makarada değişebilir. Ölçüler sabit değil.
> **Ayşen:** En fazla sarabilmek için bir model geliştireceğiz. Bütün makaralara uygulanabilecek.

Yukarıdaki alıntılarda görülmektedir ki grup üyeleri kendilerine verilen problemde ne istendiğini anlamak için soru üzerinde hep birlikte tartışmışlar ve kendilerine verilen örnek makara ve kablolar üzerinde problem metninde verilen R_1, R_2, L, r değişkenlerinin yerlerini belirlemeye çalışmışlardır. Problemde kendilerinden istenenin bir kablo makarasına *en fazla* kabloyu sarmak için bir model geliştirmeleri gerektiği konusunda hemfikir olmuşlardır. Bir başka deyişle grup üyeleri problemde verilen durum için örtülü bir düzeyde zihinsel bir yapılandırmaya gitmiş ve böylece modelleme sürecinin ilk basamağını gerçekleştirmişlerdir.

4.1.2 Problemi Basitleştirmek/ Yapılandırmak (gerekli ise EMB kullanımına karar vermek)

Öğretmenler bir kablo makarasına en fazla kabloyu sarabilmek için bir strateji belirleyebilmek amacıyla neleri dikkate alacaklarını ve bunları nasıl değerlendirecekleri konusunda kendi düşünme biçimlerine göre çeşitli önerilerde bulunmuş ve bu önerileri aşağıdaki şekilde tartışmışlardır.

> **Ayşen:** Bize şey lazım… Şu silindir şeklindeki şeyin yüzey alanı lazım bize (kablo makarasının göbeğini göstererek) çünkü silindir şeklindeki şeyin yüzeyine sarıyoruz değil mi?
> **Seda:** Evet yüzeyi lazım…
> **Ayşen:** Yüzey alanı lazım fakat sadece bir sıra sarmıyoruz. Şuradaki uzunlukta önemli (makara üzerinde R_1-R_2 uzunluğunu göstererek).
> **Seda:** Önce bir katı bulalım da… Bir sırayı bulalım.

Ayşen: Sonra kaç kat gelebilir onu da bulmamız lazım. Bir de tabii bunlar hangi kabloyu sardığımıza göre değişiyor.
Seda: Evet tabii… Kablonun şeyine göre değişiyor.
Ayşen: Yarıçapına…
Seda: Kablo sarıldığında bir sıralık yerde kablonun çapı (2r) kadar mesafeyi kaplıyor."

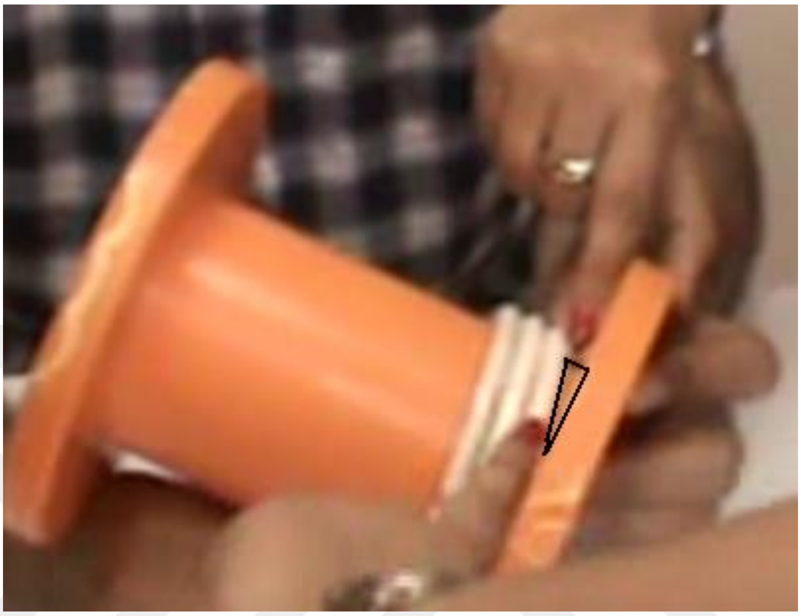
İlk olarak grup üyelerinden Ayşen, kabloyu kablo makarasının yüzeyine doladıkları için göbeğin *yüzey alanının* ne kadar olduğunu bilmeleri gerektiğini söylemiştir. Ayşen ayrıca sarılan kablonun boyutuna göre kaç kat kablo sarılabileceğini de R_1-R_2 uzunluğundan (eliyle göstererek) faydalanılarak bulunabileceğini bunun kablonun yarıçapına göre değişeceğini belirtmiştir. Seda ise makara yüzeyinin her sarımda *kablonun çapı kadar artacağını* söylemiştir. Öğretmenlerden Arda *sarım şekline* dikkat çekmiş ve aşağıdaki şekilde tartışmaya devam etmişlerdir.

Arda: Ama bir fark var ki sizin dediğinize göre şey oluyor bak… Sizin dediğiniz böyle sarıyorsunuz sanki burada birleştirmişsiniz…

Şekil 9: *Öğretmenler Tarafından Örnek Kablonun Uç- Uca Birleştirilmiş Gibi Gösterilmesi:*

Seda: Evet bu (kablo) buraya kadar gelecek… Orada bir fark oluşacak… Orada ne oluşuyor?
Arda: Kabloyu kesip uç uca birleştirsen bir sorun yok. Ama uç uca birleşmiyor. Sarmaya devam ediyorsun. Halkaları yan yana koymuyorsun, üst üste koymuyorsun.
Seda: Bunu sarmaya devam ettiğin zaman en başta bir dik üçgen oluşuyor (makarada birkaç sıra yan yana sararak)."

Öğretmenlerden Arda şekilde görüldüğü gibi kabloları uç uca birleştirmediklerini dolayısıyla halkaları yan yana diziyormuş ya da üst üste koyuyormuş gibi düşünmemeleri gerektiğine dikkat çekmiştir. Bunun üzerinde Seda örnek makarada birkaç sıra yan yana sararak halkaları uç uca birleştirmediklerini, sarmaya devam ettiklerini ve ikinci halkaya başlarken halkalar uç-uca gelmediği için makaranın başında aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi *dik üçgen* şeklinde bir boşluk oluştuğunu belirtmiştir.



Şekil 10: *Kablo Sarılırken İlk Sıranın Başında Oluşan Boşluk*

Öğretmenler kullanacakları stratejiyi belirlemek için önerilerini tartışmaya aşağıdaki şekilde devam etmişlerdir.

Arda: Saralım bence bir bakalım. Önce bir kat saralım.
Ayşen: Kabloyu sardığımız yerin yüksekliği de bizim için önemli. Orası iki dairenin alan farkı (R_1-R_2). O fark kadar oraya saracağız biz. Çünkü büyük daireden küçük olanı çıkardığımız zaman bunun şeyini bulacağız.
Seda: Ama onun alanı değil de… Bu bunun alanını tamam kapılıyor (sarılı olan kabloyu göstererek)…
Arda: Ama aralarında boş yerlerde olacak ki…
Seda: Boş yerlerde olacak.
Arda: Bence alandan ziyade uzunluk veya yükseklikten gitmek lazım…
Ayşen: Yarıçapları farkından yani…
Seda: Evet yarıçapları farkından… Kablonun da çapları toplamına bakaca[ğı]z de[ğil] mi?
Arda: (Kabloyu makaraya sarmaya devam ederek) ben şimdi gözümde canlandırmaya çalışıyorum…
Seda: Ben şimdi şöyle bir düşündüm. Kabloyu bu silindire sardığımızda kablonun kapladığı hacim küçük silindirle büyük silindirin hacimleri farkı.
Arda: Peki ya boşlukları?

Ayşen: Makaranın tamamını büyük silindir gibi düşün. Kabloyu sardığımızda küçük silindir. Kablonun sarıldığı yer büyük silindirin hacminden küçük silindirin hacminin çıkarılması.
Arda: Ama bu kablo sarıldığında boşluklar oluşuyor. Kablo kare şeklinde değil ki… Tamamen dolduramazsınız kesinlikle.
Ayşen: (Eliyle sarma şekli yaparak) Ama dolduruyo[r]sun. Esnek bunlar.
Seda: Tamamen dolduramayacağız arada boşluk kalacak belki ama…
Arda: Dolduramazsınız kesinlikle… Hacim… Belki öyle bir şey yapılabilir.
Ayşen: Farklı şeyleri de yazalım bence.
Seda: Bizden istenen ney önce bir ona bakalım. (Soruyu okuyarak) en fazla kabloyu sarmak için diyor… Bir kablo makarasına en fazla kabloyu sarmak için bir model geliştirmek…
Arda: Sizin modellerinizden biri şey o zaman. Hacim…
Ayşen: Hiçbir boşluk kalmaması hacme denk geliyor aslında değil mi?
Arda: Mümkün değil ama o.
Seda: Mümkün değil ama… Bizim için önemli olan kabloların çapı değil mi? Kablonun çapı ne kadar küçük olursa… Mesela ipi düşünün. Sararken ip ne kadar ince… Arada çok ufak bir boşluk kalıyor. Yani kablomuz ne kadar ince olursa bence o hacim o boşluk…
Ayşen: O kadar çabuk dolar.
Seda: Ve en aza iner.
Ayşen: Kavanozu kumla doldurursan çabuk dolar taşla doldurursan boşluk kalır.
Arda: (Soru metnini göstererek) yani şu resimdeki gibi büyük hortum mu kablo mu neyse artık bununla yaparsanız boşluk kalır bunda.
Seda: Evet.
Arda: Ama biz öyle bir yöntem bulacağız ki hepsi için geçerli olacak.
Ayşen: Yani bir formül bulmamız lazım.
Arda: Hacimden yapmak zaten çok kolay olur. Şey yaparsın… Şunun hacmini bulursun… (makarayı göstererek) makaranın boş sarılan kısmının hacmini bulursun… Silindir gibi düşünüp bunu… Kablonun hacmine bölersin.

Grup üyelerinden Ayşen yine kablo üzerinde eliyle göstererek R_1-R_2 farkına dikkat çekmiştir. Alandan giderek kablonun sarılacağı boş yerin R_1 yarıçaplı büyük daire ile R_2 yarıçaplı küçük dairenin alanları farkı olduğunu vurgulamıştır. Seda ve Arda kablolar sarıldığında oluşacak boşluğa dikkat çekerek alandan gitmeye itiraz etmişlerdir. Arda alandan ziyade *uzunluk (L) ve yükseklikten (R_1-R_2)* gidilmesi gerektiğini söylemiştir. Bu öneri yeteri kadar tartışılmadan Seda *hacime* dikkat çekmiştir. Kablo makarasını dolu olarak düşündüklerinde oluşan hacimden, göbeğin hacmini çıkardıklarında sonucu bulabileceklerini belirtmiştir. Arda ise kabloların kare şeklinde değil yuvarlak olduğunu sararken yine boşluk kalacağını söylemiş, hacimden gitmenin çok kolay olmayacağını belirtmiştir. Grup üyeleri seçenekleri değerlendirmeye yeni sorular sorarak aşağıdaki şekilde devam etmişlerdir:

Seda: Ya şimdi makaranın göbek yarıçapı ile makaranın çapı arasında acaba normalde belirli bir oran kullanılıyor mu üretim esnasında?
Arda: Hııı…
Seda: Yani bir kabloyu taşıyabilecek olan göbek… İnce bir göbek çok büyük kabloları taşıyamaz. Yani iç yarıçapla dış yarıçap arasında belirli bir oran var mı?
Arda: Öyle ama o bizim için lazım değil. Oran olması bizim için bir şey değiştirir mi? Sonuçta biz iki farklı değişken kullanacağız.
Seda: Şunu değiştirir. En fazla kablo sar diyorsa… (Makaranın göbeğini göstererek) bak mesela ben bunu böyle üretmemde daha küçük üretirim. Yani bunun içini ne kadar ince yaparsan dışına o kadar kablo sararım. Eğer burada belirli bir oran varsa o zaman ona dokunamam. Yani bu aradaki fark (R_1-R_2) neyse o kadardır. Bu arada bir oran var mı?
Ayşen: Oranı bilmesek de sonuçta aradaki farka bakmıyor muyuz?
Seda: Bakaca[ğı]z…
Ayşen: Bir şey değişmiyor ama.
Seda: Ama o zaman şey yapardık. Bunu (göbek) küçük tutardık.
Arda: Sen o zaman bunun dizaynına geçtin (makarayı göstererek).
Ayşen: Bu örnek ama…
Seda: (Soru metnini göstererek)ama şuradaki makaraya bakın. R_2 büyümüş. Şimdi bakın mesela burada büyük borular kullanılmış… İçi boş görüyor musunuz? Yarıçap kocaman. İncecik bir şey bunu kaldırmaz çünkü. Yani bu iç göbeğin üzerine sarılacak ağırlığı kaldırma kapasitesinin olması lazım. İç göbeğin… Göbek mi diyoruz buna bakayım.
Arda: Evet.
Seda: Göbek… Sanki kablo büyüdükçe onu kaldırma kapasitesinin artması için yarıçap (R_2) artıyor gibi algıladım ben.
Ayşen: Ama şimdi şöyle bir şey… Kablo büyüdüğü zaman göbeğin yarıçapı da artıyor ama saracağımız alan kısıtlanıyor bizim sonuçta. Benim kablom genişledikçe göbeğinde yarıçapı da arttıkça benim en çok kabloyu saracağım alan azalıyor.
Seda: Alanım kısıtlanıyor ama o kocaman boruları da çekme esnasında o kuvvetle beraber ne olacak? Şey olacak orada… Kuvvet uygulanıyor ya o kuvvet uygulanırken onun rahatlıkla çekilebilmesi için dönmesi gerekiyor. Şimdi küçücük bir göbeğin içine ben kocaman makaraları yerleştiremem. Mesela resimlere bakınca kablolar küçük göbek küçük, kablolar büyük göbek büyük.
Ayşen: Resimler sadece birer örnek. Ama tabii farklı bir bakış açısı…
Arda: Makaranın dizaynına girmeyelim bence ya.

Öğretmenlerden Seda kablo makaraları üretilirken R_1 ve R_2 yarıçapları arasında bir oran olup olmadığını sorgulamıştır. Kablo büyüdükçe göbeğin büyüyeceğini, büyük kabloyu büyük göbeğin çekebileceğini belirtmiştir. Arda kablo makarası ve makara arasındaki oranın önemli olmayacağını, Ayşen ise onları ilgilendirenin aradaki fark olduğunu söylemiştir. Arda aradaki oranı incelemenin makaranın dizaynına girmek olacağını vurgulamıştır. Grup üyeleri kablo makarasına en fazla kabloyu sarmak için belirleyecekleri modeli tespit edebilmek için tartışmaya aşağıdaki gibi devam etmişlerdir.

> **Seda:** Hacimden gidebiliriz. Bunun uzunluğundan gidebiliriz (R_1-R_2). Bir de makaranın dizaynından gidebiliriz. Ben öyle düşünüyorum.
> **Arda:** Hacimden gitmek biraz şey olur. Boşlukları hesaba katmadan kabataslak bir hesap olmaz mı?
> **Seda:** Elimizde iki farklı boyutta kablo var. İkisini de saralım bakalım ne kadar fark var aralarında. İkisi ne kadar sarılıyor? Aynı zamanda makaranın yüksekliği de (R_1-R_2) önemli. Şu aradaki mesafe de (L) önemli. Kaç sıra sarabileceğimiz L ile ilgili.
> Arda kabloyu sarar…
> **Arda:** Bence buradan bir çözüme ulaşılabilir. Şöyle… (kablo sardığı makara üzerinde göstererek) buraya kaç sıra halka saracağımızı nasıl buluruz? Şunun çapını (kablonun) L'ye bölerek buluruz değil mi?
> **Seda:** Evet.
> **Ayşen:** Hmm… Evet.
> **Arda:** Evet bence çözüm yolumuz bu. Uzunluktan (L) ve yükseklikten (R_1-R_2)…
> **Ayşen:** Deneyelim, mantıklı…
> **Seda:** Evet.

Seda en fazla kabloyu saracakları modeli geliştirebilmek için ellerindeki seçeneklerin *hacim, uzunluk* ve *makara dizaynı (R_1 ve R_2 arasındaki oran)* olduğunu söylemiştir. *Makara dizaynı* diğer grup üyeleri tarafından hiç kabul görmediğinden bir daha tartışılmamıştır. *Hacim* ise kablo sarıldığında makara üzerinde boşluklar oluşabileceği kabataslak bir hesap olacağı gerekçesi ile elenmiştir. Daha sonra Seda ellerinde örnek olarak bulunan kabloları sırayla örnek makara üzerine sarıp aralarındaki farkı görmeyi önermiştir. Arda'nin daha önce dile getirdiği ama üzerinde tartışmadıkları uzunluk *(kablo makarasının genişliği)* (L) ve yükseklik *(makarada kablonun sarılacağı boşluk)* (*R_1-R_2*)'ten faydalanma konusunda hemfikir olmuşlardır. Bu aşamada grup üyeleri bir kablo makarasına en fazla kabloyu sarabilmek için bir strateji belirleyebilmek amacıyla hangi faktörleri dikkate alacaklarını ve bunları nasıl değerlendirecekleri konusunda kendi düşünme biçimlerine göre çeşitli önerilerde bulunmuş ve bunlar üzerinde tartışmışlardır. İlk olarak *yüzey alanı* daha sonra *hacim* ve kablo makarasının *dizaynından* faydalanmayı strateji olarak tartışmış olsalar da hiç birinde ortak karara varamamışlardır. Son olarak *kablo makarasının genişliği (L) ve makarada kablonun sarılacağı boşluk (R_1-R_2)* üzerinden bir model oluşturmaya karar vermişlerdir. Ayrıca makara yüzeyinin her sarımda *kablonun çapı kadar artacağını* dikkate alacaklarını belirtmişlerdir.

Öğretmenler durumu daha anlaşılır ve basit hale getirmek için birçok faktörü belirlemiş, sonra bunları tartışarak bazılarını seçip bazılarını eleyerek nasıl hareket edeceklerini planlamışlardır. Modelleme sürecinin ikinci basamağı olan problemi basitleştirme ve yapılandırma aşamasını gerçekleştirmişlerdir.

4.1.3 Matematikselleştirmek

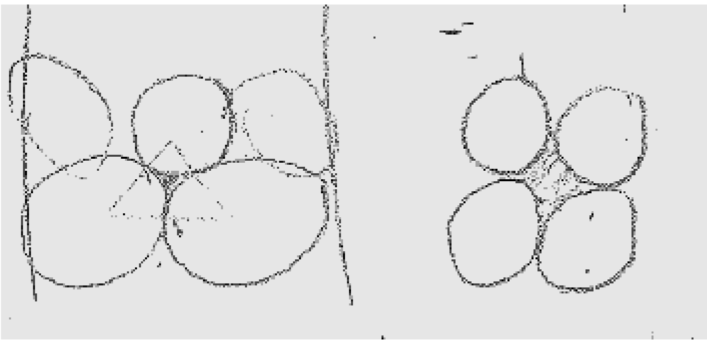
Grup üyeleri makaranın uzunluğu *(L)* ve kablonun sarılacağı alanın yüksekliği yani yarıçapları farkından *(R_1-R_2)* bir çözüme ulaşacakları konusunda hemfikir olmuşlar fakat bunu yaparken hangi faktörleri özellikle dikkate alacakları konusunda kesin bir karara varamamışlardır. Diğer taraftan kablolar üst üste geldiğinde kablonun çapı kadar bir artış olacağını dikkate alırlarken yan yana gelen halkalar konusunda ilk kez Arda aşağıdaki gibi bir tartışmayı başlatmıştır.

> **Arda:** L'yi kablonun çapına (2r)böleriz. Mesela şurası (L) 10cm, şu (kablo) yarım santimetre… O zaman 20 tane sararız.
> **Seda:** Tamam.
> **Arda:** Bu halkanın uzunluğu neye eşit? Şunun çevresine eşit (göbeğin çevresi).
> **Ayşen:** Evet.
> **Arda:** Bir sonrakinde kablonun uzunluğu kablonun çapı (2r)kadar artacak.
> **Seda:** Hı hı… Çapı kadar artacak.
> **Ayşen:** Üst üste gelecek ya bunlar (kablolar)… Dolayısıyla şu uzunluğu da (R_1-R_2) böldüğümüz zaman kaç kat kablonun sarılacağını buluruz.
> **Seda:** Hı hı evet…

Öğretmenlerden Arda *L uzunluğu* ile *kablo çapını (2r)* nasıl kullanacaklarını değer vererek açıklamaya çalışmıştır. L uzunluğuna 10 cm kablonun çapına (2r) ise 0,5 cm değer verilirse yan yana gelecek halkaların sayısının 20 tane olacağını belirtmiştir. Yan yana gelecek olan halkaların her seferinde kablonun çapı kadar (2r) artacağını, L uzunluğunu kablo çapına bölerek yan yana gelecek halka sayısını bulabileceklerini ifade etmiştir. Öğretmenler gerçek modelden matematiksel model oluşturma aşamasına geçerken her kablo halkasının uzunluğunun *göbek çevresine eşit* olduğunu fark etmelerine rağmen üzerinde herhangi bir tartışma yapmamışlardır. Daha sonra Ayşen, makara yüzeyinin her sarımda *kablonun çapı kadar artacağını* hatırlatarak tıpkı yan yana gelen kablolar gibi üst üste gelenlerin sayısını bulmak için *R_1-R_2* uzunluğunu kablo çapına bölmeleri gerektiğini söylemiştir. Fakat Arda'nın kabloların üst üste sarılması konusunda itiraz etmiş ve yeni bir tartışma aşağıdaki şekilde gelişmiştir:

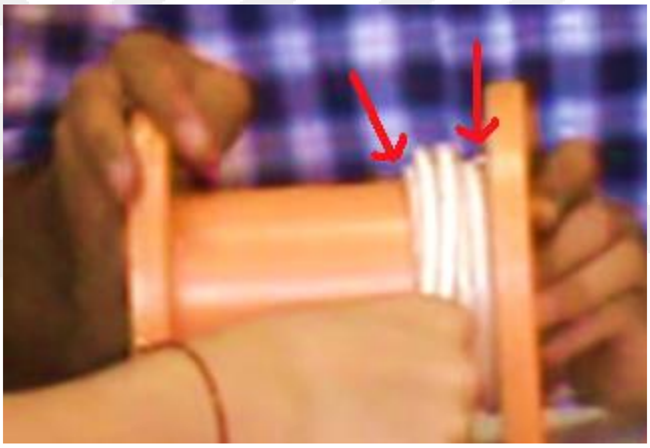
Arda: (örnek kablo makarasında göstererek) tam olmayacak çünkü kablo şöyle gelecek. Üst üste gelmeyecek. Alttaki katın aralarına sarılacak bak. Yani tam çapı kadar yükselmeyecek. Biraz daha az yükselecek.
Seda: O zaman şey olacak. İki yuvarlağa birden değecek.
Arda: Çizimini yapalım.
Seda: Ha şöyle olacak yani… (kâğıda çizerek) şöyle diyorsunuz anladığım kadarıyla… Bir kablo burada diğer kablo burada…
Arda: Diğeri üstünde…
Seda: Tam çizemedim ama şöyle olacak değil mi?
Arda: Evet.
Seda: Öbür türlü çizecek olsak arada boşluk kalıyor. Üst üste değil de aralarına aralarına sarılması gerekiyor değil mi?
Arda: Evet.
Seda: Boşluğu en aza indirmek için… Üst üste sarılırsa daha çok boşluk var.
Arda: Evet. Üst üste sarılmaz zaten. Kendim gördüklerimi düşündüm. Ortasına sarıyorlar.
Seda: Evet. Ben de öyle gördüm. Evdeki kabloları şimdi düşündüm de…
Ayşen: Bütünü görsek bir de… Sadece iki sıra için baktık.
Arda: Her sırada bir boşluk olacak. İlk katta başta boşluk oldu, ikinci katta diğer tarafta boşluk oldu.

Öğretmenlerden Arda örnek kablo makarası üzerinde yaptığı sarımı göstererek kabloların bir üst sıraya geçildiğinde üst üste gelmeyeceğini alt sıradaki iki kablo arasına yerleşeceğini söylemiştir. Bunu çizim yaparak da görmeye çalışmışlardır. Yaptıkları çizim aşağıdaki gibidir (Şekil 11). Öğretmenlerin daha önceden kablo makarasında bir üst sıraya geçildiğinde kablonun çapı kadar yükseklik olacağını kabul etmelerine rağmen yaptıkları örnek sarım ve çizim neticesinde kabloların üst üste gelmesinin mümkün olmayacağını görmüşlerdir. Yani bir üst sıraya geçildiğinde kablonun çapı kadar bir artış olmayacaktır. Bu durumda çok fazla boşluk oluşacağı için en fazla kabloyu sarmalarına engel olacağını düşünmüşlerdir. Grup üyeleri kendi deneyimlerinden de örnek vererek kabloların üst üste sarılamayacağını vurgulamışlardır.



Şekil 11: *Kablonun Alttaki İki Kablo Arasına Geldiğinde ve Üst Üste Geldiğinde Oluşacak Çizimleri*

Grup üyeleri yaptıkları sarımı incelemeye devam etmişler ve kablo sarılmaya devam ettiğinde her yeni katın başlangıcında boşluk olacağını görmüşlerdir (Şekil 12).



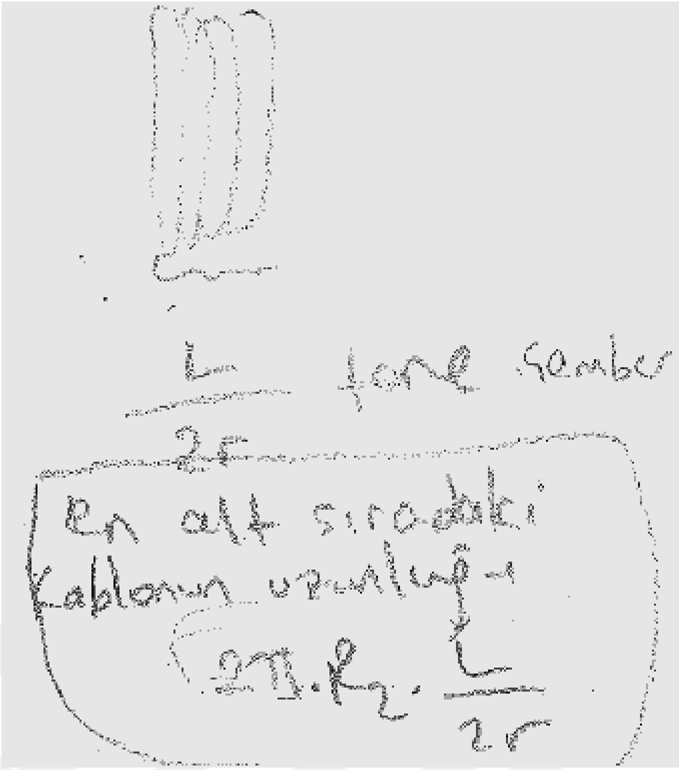
Şekil 12: *Her Katın Başlangıcında Oluşacak Boşluklar*

Öğretmenler kablo makarasına bir sıra kablo sardıklarında yan yana kaç halka olacağını ve bu halkaların toplam uzunluğunun ne olacağını aşağıdaki gibi tartışmışlardır.

Seda: O zaman şimdi…
Arda: Bir… İlk kata ne kadar uzunlukta kablo saracağımızı şöyle buluruz değil mi? Şuradaki L uzunluğunu şeyin (kablonun) çapına böleceğiz. Kablonun çapına ne dedik? 2r dedik değil mi?
Seda: Evet.
Ayşen: L bölü 2r.
Arda: Şurası şöyle şöyle şöyle… Kaç tane bundan? L/2r tane.
Ayşen: O kadar çember oluşacak orada.

<u>Arda:</u> Evet çember… Bunun uzunluğunu bulmamız gerekiyor ya. Kablonun uzunluğunu bulmamız gerekiyor. Bu ilk kata sardığımız kablonun uzunluğu da $2\pi R_2$…
<u>Ayşen:</u> Ama bu sardığımızın yarıçapı ile göbeğin yarıçapı aynı mı? Çünkü üstüne sardıkça çember büyüyor. Mesela en dıştaki… Hani üstüne sarıyorsun ya… Üstüne sarınca daha büyük bir çember oluyor ya yarıçapı daha büyük oluyor.
<u>Arda:</u> Onun için nereden alacağız yarıçapı ortadan mı? Ben anlamadım ne diyorsun?
<u>Ayşen:</u> Şimdi göbeğin çevresi ile üstüne sadığımız şeyin çevresi aynı mı?
<u>Arda:</u> Bence aynı… Şöyle söyleyeyim.
<u>Seda:</u> İlkinde aynı… Temas ettiği yer için aynı…
<u>Arda:</u> Aynı olacak… Bak hemen deneyini yapalım (kabloyu bir halka sararak). Bunun çevresine sarmıyor muyuz bunu?
<u>Ayşen:</u> Tamam.
<u>Arda:</u> Şuradan kessen… İp olsa hiçbir sıkıntı olmayacak değil mi? Sen bu kablo kalın diye diyorsun bunu.
<u>Seda:</u> Evet.
<u>Ayşen:</u> Hmm…
<u>Arda:</u> Birinci basamakta bir sıkıntı yok değil mi? Yazalım şunu. Birinci basamakta küçüğün ki R_2 değil mi? 2π çarpı R_2.
<u>Seda:</u> Çevresi (göbeğin)… Bundan kaç tane olacak?
<u>Arda:</u> Ama ney? Birinci… En alt sıradaki kablonun uzunluğu… $2\pi R_2$ çarpı L bölü 2r.

Öğretmenlerden Arda şimdiye kadar konuştuklarını toparlamak amacıyla ilk önce kablo makarasının ilk sırasına yan yana kaç halka geleceğini tartışmaya açmış ve grup üyeleri yan yana halka sayısını, makaranın genişliğini (L) kablonun çapına (2r) bölerek bulabileceklerini yani *L/2r* olduğunu belirtmişlerdir. Arda bir halkanın uzunluğunun göbeğin çevresine eşit olacağını yani $2\pi R_2$ olacağını söylemiştir ama Ayşen kullanacakları yarıçap konusunda tereddüt yaşamıştır. Bu tereddüt aşıldıktan sonra grup üyeleri *ilk sıradaki toplam kablo uzunluğunu* aşağıdaki şekilde de (Şekil 13) görüldüğü gibi $2\pi R_2 .L/2r$ bulmuşlardır.

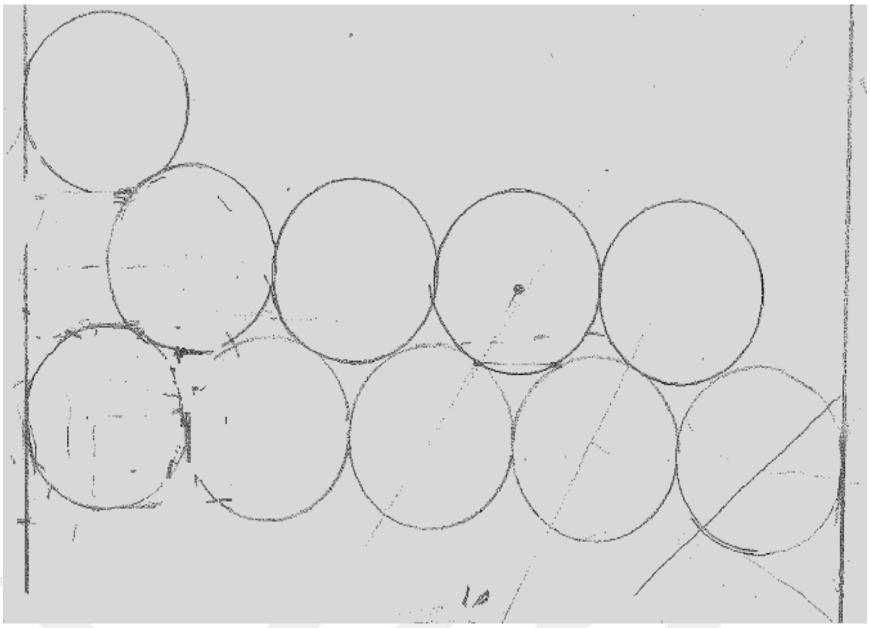


Şekil 13: *Kablo Makarasının İlk Sırasına Sarılan Kablonun Toplam Uzunluğu*

Öğretmenler üst üste gelecek kabloların kaç kat olacağını sorgulayarak tartışmaya aşağıdaki şekilde devam etmişlerdir.

> **Arda:** Yukarıya doğru kaç tane onu da bulalım.
> **Seda:** Şimdi çap kadar artış olacak.
> **Arda:** Çap kadar olmayacak.
> **Seda:** Kablonun çapı kadar olacak.
> **Arda:** Olmayacak dedik ya.
> **Ayşen:** Aralara sarılacak ya.
> **Arda:** Çaptan biraz daha az olacak.
> **Seda:** Ha evet…
> **Arda:** Ne kadar olduğunu nasıl bulacağız?
> **Seda:** Nasıl yapacağız? Birkaç tane çizeyim.
> **Arda:** Üç dört sıra falan çiz.

Grup üyeleri kablo makarasına kaç kat kablo sığabileceğini çizim yaparak görmek istemişlerdir ve Seda tarafından aşağıdaki şekil çizilmiştir (Şekil 14).

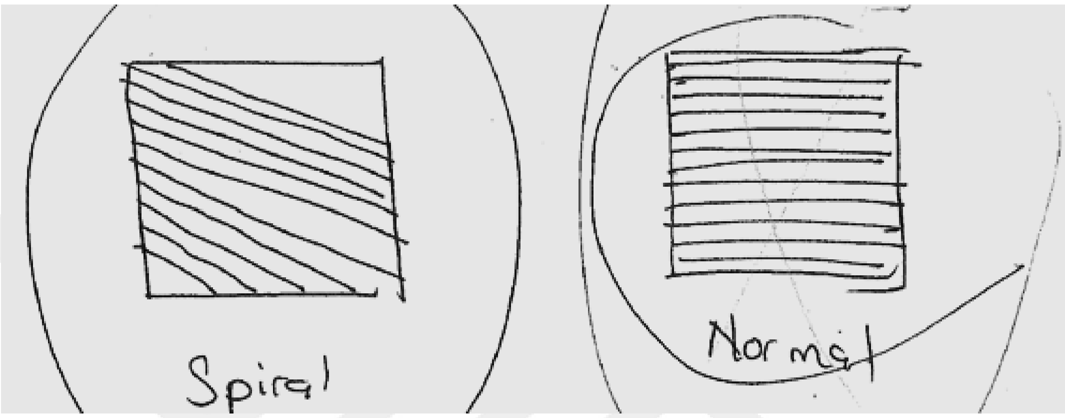


Şekil 14: *Kablo Makarasında Üst Üste Gelecek Katların Görünümü*

Çizimi yaparken üst üste gelecek katların sayısını hesaplamayı bırakarak *sarım şeklini* tartışmaya başlamışlar ve bu tartışma aşağıdaki gibi gelişmiştir:

Seda: Ya sanki çizdikçe şey oluyor (havada elini döndürerek).
Arda: Spiral.
Seda: Evet spiral oluyor. Biraz önce sararken de spiral sardık değil mi? O zaman… Spiral sarınca kablonun uzunluğu biraz önce bulduğumuz gibi değil o zaman.
Arda: Neden? Birinci sırayı düz sardık. O spirallik ihmal edilecek bir şey ya.
Seda: Bence değil.
Arda: Peki biz o spirallerin uzunluğunu nasıl bulacağız? Kablo miktarı uzunluk olarak artacak mı azalacak mı sizce?
Seda: Artacak. Çünkü neden? Spiral olarak sardığımız zaman halkalar daha uzun oluyor. O zaman daha fazla kablo sığmaz mı?
Arda: Peki spiral uzunluğunu hesaplamayı biliyor muyuz? Benim aklıma gelmiyor. Doğrusal bir denklem değil spiralin hesabı. Hatırlamadığımıza göre bizim burada bulacağımız denklem doğrusal bir denklem olacak. Modeli basitleştirmemiz gerekiyor. Hacmi de düşün.
Seda: Biz spiral sararak hacmi küçültmüş olmuyoruz ki. Daha fazla kablo sığdırmayı amaçlıyoruz. Spiral sarmamızın amacı ne? Boşlukları en aza indirmek.
Ayşen: Ananas soyma sorusunda amaç meyvenin etini fazla harcamamaktı değil mi? O yüzden spiral şeklinde soyuluyordu.
Arda: Öyle miydi?
Ayşen: Evet düz soyulduğunda daha fazla ziyan oluyordu. Spiral şeklinde soyunca eti ziyan olmuyordu.
Seda: Bizim de hacmi ziyan etmememiz gerekiyor işte. Yüzeyindeki alandan ziyan etmememiz gerekiyor.

Ayşen: Ama orada alan var burada hacim var.
Seda: Ama düz sararsak yüzeyinde boşluk bırakıyoruz.
Ayşen: Ya bir normal saralım, bir spiral saralım aradaki farkı bir görelim.
Arda: İki kat üç kat saralım bakalım ne oluyor ya.
Ayşen: Spiral şeklinde sardığımızda bir halkadaki kablo daha uzun peki sarma sayımız azsa? Yani halkalar az sayıda ise?
Seda: Biz şimdi bunu nereye sarıyoruz? Silindire… Yani silindirin yan yüzeyine.
Ayşen: Açılmış halini çizersek şöyle mi olacak? (çizim yaparak) (Şekil 15)



Şekil 15: *Göbeğe Sarılan Kablonun Spiral ve Normal Durumdaki Açık Hali*

Arda: Spiral de başta ve sonda boşluk kaldı.
Ayşen: Bunda boşluk kalacak mı?
Seda: Onda ilk başta boşluk kalmayacak ama sonraki sarımlarda kalacak. Şimdi hangisinde daha uzun?
Ayşen: Spiralde bir halka normalde daha uzun fakat diyorum ki belki burada (normal)sarım sayısı daha fazladır.
Arda: Bu daha fazla olacak (normal olanı göstererek).
Seda: Bu daha fazla evet... Ananasın da etinin kaybolmaması için spiral olması demek az yüzeyin alınması demek değil mi?
Arda: Evet.
Ayşen: Biz yüzeyi kaplamaya çalışıyoruz aslında.
Seda: Biz yüzeyi kaplamaya çalışıyoruz. Yani yüzeyden daha fazla faydalanmaya çalışıyoruz. O zaman normal sarmalıyız.
Arda: Biz bir kere bunu böyle saramayız. Sarılmaz bu böyle (normal). Her yeni halkada kayacak bu böyle. İster istemez spiral olacak. Bunu normal sarmak demek bilezik gibi yan yana dizmek demek.
Ayşen: Bana hiç spiralmiş gibi gelmiyor.
Arda: O kadar büyük bir spiral değil zaten. Biz buraya abartı çizdik. Ben bunu biraz önce sardım ya. Spiral olduğunu çok fark edebildiniz mi? Çok belirgin bir şekilde değil.
Seda: Ama kablo büyüdükçe o fark edilecek.
Arda: O da şeyden işte. Şuradaki açıklık artacağı için (ilk sarımda oluşacak boşluk-dik üçgen).
Seda: Ne yapalım o zaman?
Arda: Sarım şekli konusunda spiral sarılacak dedik.

Ayşen: Bunun neden daha avantajlı olduğunu söylememiz lazım bence. Neden normal olanı seçmiyoruz? Söyle bana.
Arda: Söylüyorum. Bu sarılmaz çünkü imkânsız.
Ayşen: İmkânsız?
Arda: Evet buyurun sarın. Mantığı nedir diyorsan bunun faydaları nedir diye sorabilirsin.
Ayşen: Tamam soruyorum. Spiral seçtik ama neden?
Arda: Çünkü başka türlü sarılamıyor.
Seda: Tamam doğru söylüyorsun sarım sırasında kayma oluyor ama biz hem spiral saralım diyoruz hem de uzunluğunu normal sarıyormuş gibi hesaplıyoruz. Hem böyle olur deyip hem normal için işlem yapıyoruz.
Ayşen: O zaman bunun içinde işlem yapmalıyız.
Arda: Eğri şekillerin alan ve hacimleri için bir şey vardı ben hatırlamıyorum onu bilmem siz hatırlıyor musunuz?

Grup üyeleri kablo makarasına kaç kat kablo sığabileceğini çizim yaparak görmek istemişler fakat Seda yaptıkları çizimde sarım şeklini spirale benzetmiştir ve ilk sıradaki kablonun uzunluğu ile ilgili yaptıkları işlemi sorgulamıştır. Arda ilk anda gözlemledikleri spiralliğin ihmal edilecek bir şey olduğunu söylese de daha sonra spiral sarım şeklinde ısrar etmiştir. Öğretmenlerden Ayşen *Ananas Soyma* sorusunu hatırlatarak ananasın etinin fazla harcanmaması için spiral şeklinde soyulduğunu vurgulamıştır. Seda ise 'ananasın yüzeyinin kaybolmaması için spiral şeklinde soyulması demek az yüzeyin alınması demek fakat biz yüzeyden daha fazla faydalanmaya çalışıyoruz o zaman bizim sarım şeklimiz normal olmalı' demiştir. Bir sıradaki sarım sayısının normal sarımda daha fazla olacağını kabul etseler de Arda normal sarımın olması için kabloların bilezik gibi yan yana dizilmesi gerektiğini halkaların ister istemez kayarak spiral şeklini alacağını belirtmiştir. Ayşen önce spiral sarıma itiraz etse de diğer üyeler kabul ettiği için sarım şekli olarak *spiral sarım* kabul edilmiştir.

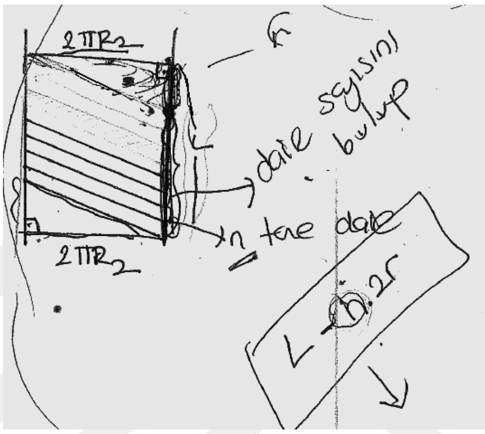
Öğretmenler L uzunluğuna 10 cm ve kablo çapına (2r) 0,5 cm değerlerini vererek yan yana gelecek halkaların sayısını 20 tane olarak hesaplamışlardır. L uzunluğunu kablo çapına bölerek yan yana gelecek halka sayısını bulabileceklerini söylemişler ve gerçek modelden matematiksel model oluşturma aşamasına geçmişlerdir. Devamında grup üyeleri kablo makarasında bir üst sıraya geçildiğinde kabloların üst üste gelmesinin mümkün olmayacağını görmüşler ve kablo sarılırken bir üst sıraya geçildiğinde, artışın kablo çapı kadar olamayacağını fark etmişlerdir. Öğretmenler kablo makarasına bir sıra kablo sardıklarında yan yana kaç halka olacağını L/2r ve bu halkaların toplam uzunluğunu **2π**R_2 .L/2r formüllerini kullanarak bulabileceklerini ifade etmişlerdir. Grup üyeleri üst üste gelecek kabloların kaç kat olabileceğini sorgulamışlar bunu çizim yaparak görmeye çalışmışlardır. Yaptıkları çizim esnasında Seda kablo sarımını spirale benzetmiş ve ilk sıradaki kablonun uzunluğu ile ilgili yaptıkları işlemi sorgulamıştır. Öğretmenlerden Ayşen ananas soyma sorusunu hatırlatarak, ananasın etinin fazla harcanmaması için spiral şeklinde soyulduğunu vurgulamıştır. Seda ise buna karşı çıkarak sarım şeklinin normal olması gerektiğini savunmuştur. Daha sonra bir sıradaki sarım sayısının normal sarımda daha fazla olacağını kabul etseler de Arda normal sarımın olması için kabloların bilezik gibi yan yana dizilmesi gerektiğini halkaların ister istemez kayarak spiral şeklini alacağını belirtmiştir. Ayşen spiral sarıma itiraz etse de diğer üyeler kabul ettiği için sarım şekli olarak spiral sarım kabul edilmiştir. Bu aşamada bireyler sözlü ifadeler yerine yazılı dış temsiller kullanmaya başlayarak matematiğe geçişi tamamlamışlar yani matematikselleştirme aşamasını gerçekleştirmişlerdir.

4.1.4 Matematiksel İşlemlerle Çalışmak (kişisel matematik bilgi ve deneyimlerin kullanımı)

Grup üyelerinden Seda spiral şekilde sarılan bir kablonun uzunluğunu nasıl bulabileceklerini çizdikleri açık kablo makarası şekli üzerinde (Şekil 16) sorarak tartışmayı aşağıdaki şekilde başlatmıştır.

Seda: Şimdi bu spiralin açık halinde ben uzunluğu nasıl bulabilirim?
Ayşen: Yine dik üçgen mi diyorsun?
Seda: Bence dik üçgenden faydalanacağız. Baktığımız zaman eğri ama onun açılmış haline baktığımız zaman o bir dikdörtgenin üzerindeki bir doğru parçası gibi.
Ayşen: (Çizim yaparak) peki şuradaki boşlukla şuradaki boşluk aynı mı olacak?(sprial sarılmış makaranın açık halinin başındaki ve sonundaki boşluk)
Seda: İşte onu çizerken hepsinin eşit olmasına dikkat et. Çünkü başladığı yer ile bittiği yer arasındaki fark o uzunluğu bulmamıza yardım edecek.
Ayşen: Şimdi o zaman açık halinde şurası L şurası **2π**R_2 mi oluyor? Öyle değil mi?
Seda: Evet. Buradan kaç defa sarılacağını da bulacağız. Kaç defa sarılacağına nasıl karar verdik? L/2r mi?
Ayşen: Ama o normal sarım içindi. Yine mi öyle oluyor?
Seda: Biz hiç normal saramadık ki. İlk sarımda illaki spiral oluyor. Biz aslında hiç normal sarmadık.
Arda: Evet saramadık.
Ayşen: Şimdi bir şey diyeceğim. İki tane üçgen var. Şu uzunluklar eşit. O zaman bu boşluklar da eşit olmak zorunda.

Seda: Hı hı…
Ayşen: O zaman biz şuradaki daire sayısını bulup daha sonra nesini alacağız? Çevresini mi alacağız bu daire sayısının?
Seda: Hı hı…
Ayşen: L'den çıkarırsak şu boşluğu bulmaz mıyız? Şurada mesela kaç tane daire olduğunu bilmiyorum. O zaman L'den neyi çıkarmam lazım. Şunu çıkarmam lazım öyle değil mi? O zaman şu uzunluğu nasıl bulabiliriz?
Seda: O uzunluğu kaç tane şey varsa…
Ayşen: Daire mi? n diyelim daire sayısına.
Arda: L eksi n çarpı 2 tane küçük r.
Ayşen: Bu ne şimdi? Dik üçgenin kısa kenarı…

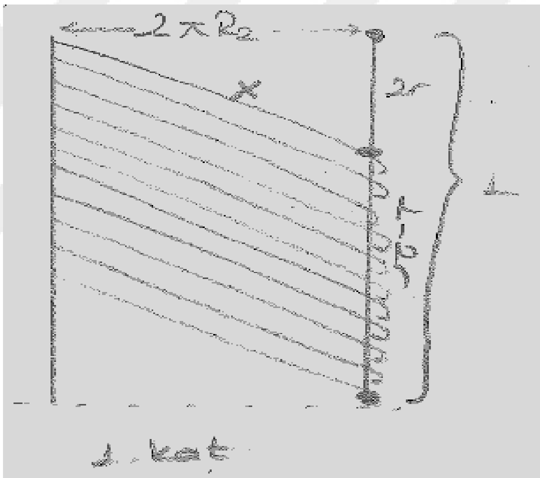


Şekil 16: *Öğretmenlerin Kablo Makarasının Açık Hali ile İlgili Çizimleri*

Grup üyeleri kablo makarasının açık hali üzerinde spiral sarılmış bir kablonun uzunluğunu bulmak için öncelikle makaranın başında ve sonunda oluşan boşluklara odaklandılar. Makaranın açık halinde oluşan boşlukların birbirine eş dik üçgenler olduğuna karar verdiler. Dikdörtgenin uzun kenarına L, kısa kenarına ise $2\pi R_2$ diyerek, bir kat sarımda yan yana kaç defa kablo sarılabileceğini sorguladılar. Öğretmenlerden Seda önceden belirledikleri L/2r formülünü hatırlattığında, Ayşen onun normal sarım için olduğunu spiral sarımda da aynı formülün olup olmayacağını sordu ve diğer grup üyeleri şimdiye kadar hiç normal sarım yapmadıklarını, yaptıkları tüm sarımların spiral olduğunu belirttiler. Ayşen dik üçgenlere dikkat çekerek, dik kenarlardan birinin $2\pi R_2$ olduğunu, diğerinin ise boşluğa gelecek daire sayısının (n tane) kablo çapıyla çarpılarak (n.2r) elde edilebileceğini, L uzunluğundan n.2r yi çıkararak da makaraya yan yana sarılan kabloların makara üzerinde kapladığı uzunluğun bulunabileceğini ifade etmiştir.. Grup üyeleri bu tartışmaya aşağıdaki gibi devam etmişlerdir.

Seda: Ya bir şey söyleyeceğim. Buradaki boşluk kablodan kaynaklanmıyor mu?
Arda: Evet.
Seda: O zaman burası kablonun çapı oluyor. 2r oluyor.
Ayşen: Şimdi şurası 2r mi diyorsunuz? (kısa kenar)
Arda: Evet.
Arda: x diyelim bunun uzunluğuna (hipotenüs).
Seda: İlk başta L-n.2r demiştik (yan yana sarılan kablonun uzunluğu).
Arda: İptal ettik onu.

Öğretmenlerden Seda'nın kablo makarasının başında ve sonunda oluşan boşlukların kablonun tek sarımından olduğuna işaret etmesiyle dik üçgenin kısa kenarını 2r olarak düzeltmişler, hipotenüsüne ise x demişlerdir (Şekil 17). Yan yana gelen kabloların kapladığı uzunluk ise L-2r olarak düzeltilmiştir. Tartışmalar aşağıdaki gibi devam etmiştir.



Şekil 17*: Kablo Makarasının Açık Hali ile İlgili Düzeltilmiş Çizim*

Seda: Buradan da yapılabilir aslında (x uzunluğunu işaret ederek).
Arda: Burada n lazım.
Seda: Evet burada n lazım. Sarım sayısı lazım…
Arda: Sarım sayısını yine bulacağız biz zaten.
Seda: Sarım sayısını L/2r ile bulduk.
Ayşen: Ama o normal sarımdaydı. Bunda da aynı şey olur mu?
Arda: Olmaz. Şunda (spiral) sarım sayısı biraz daha azalacak. Düz sarımda daha fazla spiral sarımda daha az sarım sayısı olması lazım.
Seda: O zaman biraz işlem yapalım. Ne olacak şimdi bunun uzunluğu?
Arda: **2π**R_2'nin karesi artı…
Seda: 2r'nin karesinin karekökü.
Ayşen: Eşittir bir şeyin uzunluğu.
Seda: Bir sarım… Bir sarıma x diyelim.
Arda: Bir sarımın uzunluğu… Çarpı n diyeceğiz kaç tane sardıysak.

Seda: Bu bir tanesi…

Öğretmenler spiral sarımda bir sarımın uzunluğunu (x) bulmak için, oluşan dik üçgende Pisagor bağıntısını uygulayarak $\sqrt{(\mathbf{2\pi R_2})^2 + (\mathbf{2r})^2}$ = x formülünü elde etmişlerdir. Bu bölümde öğretmenler varsayımlarını matematiksel olarak ifade ederken kendi matematik bilgilerini kullanmışlardır. Elde ettikleri sonuçları yazıya dökerek matematiksel sonuçlara geçiş aşamasını tamamlamış, dördüncü aşama olan matematiksel işlemlerle çalışma sürecini gerçekleştirmişlerdir.

Şekil 18: *Spiral Sarımda Bir Sarımın Uzunluğu*

4.1.5 Yorumlamak

Grup üyeleri elde ettikleri sonuçların gerçek sonuçlar olup olmadığını sorgulamaya başlamış ve bu konu hakkındaki tartışmaları aşağıdaki gibi gelişmiştir:

Seda: Şununla şunun arasında ne fark var?(normal sarım ve spiral sarımda bir çemberin boyunu karşılaştırarak). Burada düz modeli kullandığımız için $\mathbf{2\pi}$R$_2$'yi kullandık, spiral olma durumuna da bunu kullandık ($\sqrt{(\mathbf{2\pi R_2})^2 + (\mathbf{2r})^2} = \mathbf{x}$) değil mi uzunluk olarak?
Arda: Evet.
Seda: Spiral olduğunda küçük bir fark ekliyoruz.
Arda: Spiral sarımda biraz daha fazla sarmış olduk biz.

Grup üyelerinden Seda kablo makarasının açık hali üzerinde göstererek, düz sarım ile $\boldsymbol{2\pi R_2}$ uzunluğunu, spiral sarımda ise *x* uzunluğunu kullandıklarını ve bunlar arasındaki farkı sorgulamıştır. Spiral sarımda düz sarımdan farklı olarak küçük bir fark eklendiğini vurgulamıştır. Arda da spiral sarımda daha fazla kablo saracaklarını belirttikten sonra aralarındaki tartışma aşağıdaki şekilde devam etmiştir:

Seda: Burada biz karelerini aldık falan ama bir de karekökünü alıyoruz. Bi[r] değer verelim isterseniz.
Arda: Vermeye gerek yok ki. Büyük… Kesin büyük çünkü şu kadar artıyor (kablo çapını göstererek).
Seda: Ama bak 2r ne biliyor musun? Kablonun çapı. Ufak bir artış var ve sonra da karekökünü alıyoruz.
Arda: Ama bak 2r olmasa diğeriyle aynı olacak. Bu eklediğimiz sıfırdan daha küçük bir şey olmayacak.

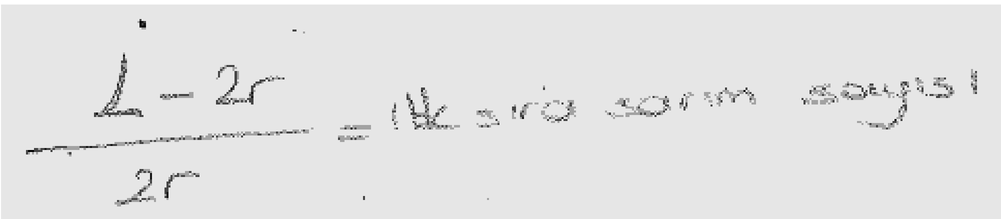
Seda: Tamam eklemiş oluyoruz…
Arda: Artacak.
Seda: Ekliyo[r]sun ama bir de karekökünü alıyorsun. Çok küçük bir değer.
Arda: Şöyle düşün. Karesini alıp da… Kendisini artırmıyo[r]sun.
Seda: Şey yapalım. Bir tane değer verelim mi?
Ayşen: O kadarcık artış için değer mi demek istiyorsun sen Seda değil mi?
Seda: Evet. $2\pi R_2$'nin karesinin karekökü alınsaydı zaten ilk elde ettiğimiz düz sarım gibi olacaktı. 2r burada kablonun çapı ile alakalı. Biz zaten ilk baştaki şekillere de baktığımız zaman kablonun çapı önemli ki… Bakın zaten kablo ne kadar büyükse göbek o kadar büyük olmuş.
Arda: Evet.
Seda: Yani arasında sanki benim anladığım kadarıyla bir ilişki var.
Arda: Bence şu güzel bir çözüm oldu ya (spiral). Daha az şeyi ihmal ettik bunda. Bunu L bölü 2r ile çarpsak bile bundan daha iyi bir model olur bu. Daha detaylı yani…
Seda: Biraz uzatmış oluyoruz kabloyu böyle.
Arda: Evet bu daha detaylı…
Seda: Kablonun şeyi kadar… (çap)

Yukarıdaki alıntılarda öğretmenlerden Seda, $2\pi R_2$ uzunluğu ile x uzunluğu arasındaki farkı değer vererek görmeyi, kablonun çapının çok az bir artış sağlayacağını, karekök alındığı için de bu değerin çok küçük olacağını ifade ederken Arda ise değer vermeye gerek olmadığını, artısın sıfırdan büyük olacağını ve spiral sarımla daha detaylı bir çözüm geliştireceklerini belirtmiştir. Grup üyelerinden Ayşen de bu tartışmaya aşağıdaki şekilde dâhil olmuştur:

Ayşen: Daha detaylı ama sarım sayısı daha az düz olana göre. Normalde de düz sarma imkânımız yok.
Seda: Yok. Sen sarsanda onlar (kablolar) kendi aralarında birbirlerini itmesinden dolayı kayacak.
Arda: Evet kayacak.
Seda: O zaman bunda hemfikir miyiz?
Arda: Ben hemfikirim bunda.
Ayşen: Ya diğerini de yazalım bence. Önceki soruda da farklı çözüm yolları önerdik.
Seda: Ama bak burada en fazla kablo diyor. Bunun için ne diyeceğiz peki. İkinci bir alternatif olarak ne açıklamada bulunacağız.
Ayşen: Ne kadar kayarsa kaysın dönme sayısı fazla oluyor ama. Gerçi gittikçe spirale benziyor ama yukarıya doğru çıktıkça gittikçe spiralleşiyor ama…
Seda: Sarım sayısı ilk sırada fazla oluyor. İkinci sırada sarmaya devam ettiğin zaman üst üste üst üste oluyor böyle birbirlerinin aralarına geçiyorlar. Belki toplamda bunda bir kat daha fazla sarım olacak (spiral).
Arda: Artık biraz toparlayalım mı? Bi[r] şeyi belirleyelim. Nasıl saracağımızı belli ettik… Şunu (spiral sarım) kullanacağımızı...

Ayşen spiral sarımın daha detaylı olduğunu kabul etse de, sarım sayısının düz sarıma göre çok daha az olacağını ifade etmiştir. Benzer şekilde Seda ve Arda da düz sarmaya çalışsalar bile kabloların birbirini itmesinden dolayı kayacaklarını ve spiral hale geleceğini, ikinci sıraya sarmaya devam edildiğinde kablonun alttaki iki sarımın arasına yerleşeceğini, böylece düz sarıma göre daha fazla kat elde edebileceklerini belirtmişlerdir. Daha sonra öğretmenler sarım sayısını nasıl bulacaklarını kendi aralarında aşağıdaki şekilde tartışmaya devam etmişlerdir:

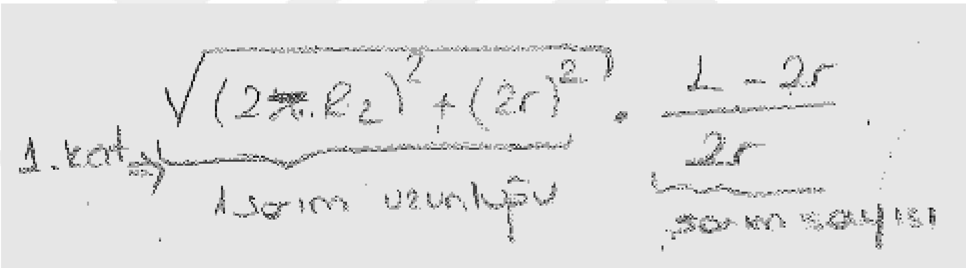
Seda: Evet spiral olursa bunu kullanacağız ($\sqrt{(\mathbf{2\pi R_2})^2 + (\mathbf{2r})^2} = \mathbf{x}$) ama bu eksik arkadaşlar.
Ayşen: Bu sadece bir sıra için. Kaç tane sarmamız gerektiğini de bulacağız arkadaşlar.
Arda: Kaç tane sarmamız gerektiğini basitleştirip bundan bulalım (L/2r).
Ayşen: Ne yani? Hem bundan hem bundan mı olacak? O düz sarıma göre.
Arda: Evet.
Ayşen: Yani diyoruz ki spiralde sarım sayısı az ama biz yine de bunun (normal sarım) sarım sayısını mı alalım diyoruz?
Arda: Azıcık ihmal ediyoruz.
Ayşen: O zaman neden normali yapmıyoruz madem? Neden spiral spiral diyorsunuz? Ne anlamı kaldı?
Arda: Çünkü bu gerçeğe daha yakın ($\sqrt{(\mathbf{2\pi R_2})^2 + (\mathbf{2r})^2} = \mathbf{x}$).
Seda: Arkadaşlar bakın bu sadece ilk sıra için. Daha ikinci sıra için de benzer hesaplama yapacağız. Oradaki fazlalığı bulmamız gerekiyor. Daha çok yapmamız gereken şey var.
Arda: Bence de.
Seda: O yüzden aradaki fark bizi çok ilgilendiriyor. Şimdi biz bir sarım için bunu dedik ($\sqrt{(\mathbf{2\pi R_2})^2 + (\mathbf{2r})^2} = \mathbf{x}$). Kaç tane sarım olacağına nereden karar verdik?
Ayşen: Arda diyor ki normal sarımdaki gibi düşünelim. L uzunluğunu çapa bölerek. Hem diyoruz ki spiralde daha az sarım sayısı…
Seda: O zaman sarım sayısını nereden bulaca[ğı]m? Diyelim n kadar sarım olsun. L den kablonun çapı kadar bi[r] farkımız var.
Ayşen: 2r kadar…
Seda: Bu mesafeyi tekrar kablonun… 2r'ye bölmemiz gerekmiyor mu?
Ayşen: Evet çapa böleceğiz. O da eşittir sarım sayısı. Spiraldeki sarım sayısı ama ilk sıra için.



Şekil 19: *Spiral Sarımda İlk Sıradaki Sarım Sayısı*

Kablo makarasında bir sırada yan yana kaç sarım olacağını bulmak için Arda makaranın genişliğini kablonun çapına bölmeyi (*L/2r)* önermiş, Ayşen ise itiraz ederek onun düz sarıma göre olduğunu kendilerinin spiral sarım yaptığını ifade etmiştir. Ayşen ve Seda spiral sarımda kablo çapı kadar bir kayıp olduğunu, makara genişliğinden *(L)* bu kaybı *(2r)* çıkararak farkı kablo çapına *(2r)* bölmeleri gerektiğini (Şekil 19), böylece spiral sarımda ilk sıradaki sarım sayısını bulacaklarını belirtmişlerdir. Normal ve spiral sarım arasındaki ilişki öğretmenler arasında tartışma aşağıdaki gibi devam etmiştir.

Seda: Evet ilk sıra sarım sayısı… Spiraldeki…
Arda: Hım…
Ayşen: Orada L/2r idi (normal sarım). Burada 2r farkını çıkardık öyle bulduk. O zaman bunu ($\frac{\mathbf{L-2r}}{\mathbf{2r}}$) bununla ($\sqrt{(\mathbf{2\pi R_2})^2 + (\mathbf{2r})^2} = \mathbf{x}$) çarpaca[ğı]z.
Seda: Evet, birinci sıra için bu. Onu da onunla çarpacağız yani…(Çarpımları yazarak) ama bu sadece birinci kat için.

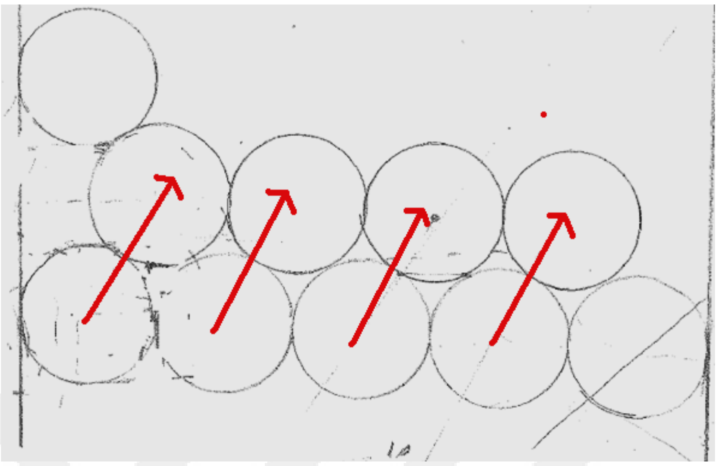


Şekil 20: *Kablo Makarasında İlk Sıradaki Kablo Uzunluğu*

Yukarıda öğretmenler sarım sayısının normal sarımda *L/2r*, spiral sarımda ise $\frac{L-2r}{2r}$ formülü ile bulunabileceğini belirtmişlerdir. İlk sırada yan yana gelen sarımların toplam uzunluğunu bulmak için ise sarım sayısı *(*$\frac{L-2r}{2r}$*)* ile bir sarımın uzunluğunu (*x)* çarpmaları gerektiğini söylemişlerdir (Şekil 20). İkinci sıraya ait tartışmalar aşağıdaki şekilde gelişmiştir.

Seda: Evet şimdi geldik ikinci sıraya.
Arda: Şöyle spiralmiş gibi duruyor (cetvelin ucuyla göstererek)
Seda: Evet ya biz doğru yapıyoruz (gülüşmeler). İkinci sırada da benzer bir boşluk olacak ama…
Arda: Ya peki 2. sırada yükseklik aynı mı? Bu kablo diğer ikisinin arasında kalıyor.
Seda: Bu artışı nereden bulacağız? Şimdi ilk sıradan dolayı yeni bir göbek oluştu.

Ayşen: O zaman ne kadarlık bir artış var? Çevresi kadarlık mı?
Seda: Değil işte… Eğer üst üste yerleştirseydik çevresi kadar olurdu. Üst üste yerleştirmediğimiz için…
Arda: R_2 artı 2r kadar olacak bir sonraki sarımda.
Seda: Normalde olsaydı 2r kadar artacaktı. Ama şimdi öyle değil.

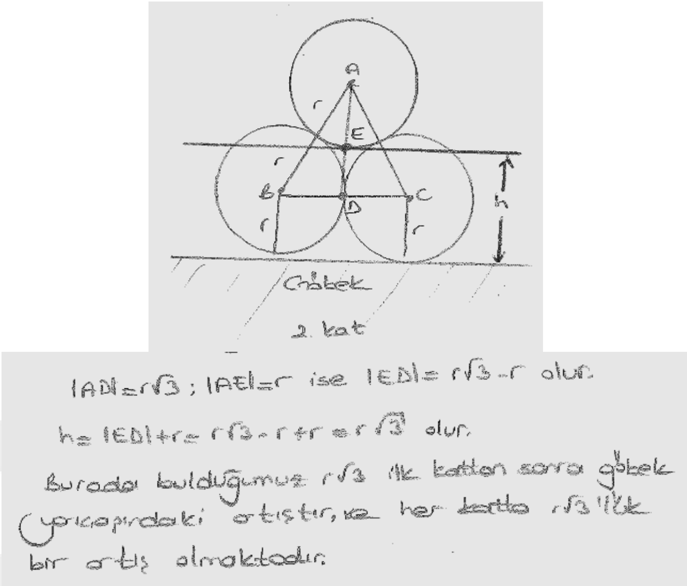


Şekil 21: *Kablo Makarasına İkinci Bir Sıra Sarıldığında Görünümü*

Yukarıda grup üyeleri kablo makarasına bir sıra daha sarıldığında görünümünün nasıl olacağını ve göbek yarıçapının nasıl değişeceğini tartışmışlardır (Şekil 21). Arda ikinci sıraya sarılan kablonun alttaki iki sıranın arasında kaldığını belirtirken, Seda ise göbek yarıçapının değiştiğine dikkat çekmiştir. Arda oluşan yeni göbeğin R_2+2r kadar olduğunu ifade ederken Seda ise kablolar üst üste gelmediğinden spiral sarımda yeni göbeğin 2r kadar artmayacağını söylemiştir. Grup üyeleri göbek yarıçapının nasıl değişeceğini bulmak için bir çizim üzerinde tartışmaya aşağıdaki gibi devam etmişlerdir.

Ayşen: Bu eşkenar üçgen… Şu uzunluklar birbirine eşit (çizim yaparak).
Arda: O zaman bizim şurayı bulmamız lazım (h uzunluğunu göstererek). Buranın tamamı ney? $r\sqrt{3}$ mü? (AD doğru parçası)
Ayşen: Evet.
Arda: Burası ney? r mi?(AE doğru parçası). O zaman burası (ED doğru parçası) $\mathbf{r\sqrt{3} - r}$ mi oluyor?
Seda: Evet.
Arda: (h uzunluğu için) $\mathbf{r\sqrt{3} - r}$ + r. Yani $\mathbf{r\sqrt{3}}$'lük bir artış var.
Seda: Hım…
Arda: 2r'lik değil $\mathbf{r\sqrt{3}}$'lük bir artış var.
Seda: İlk sırada biz ne yaptık? Sadece dış yüzeyi aldık değil mi? Kablonun temas ettiği yer… Yani R_2 aldık.
Arda: En alt değdiği noktayı aldık. Bunun da değdiği noktayı alıyoruz.
Seda: Değdiği nokta burası (E noktasını göstererek).Tamam.

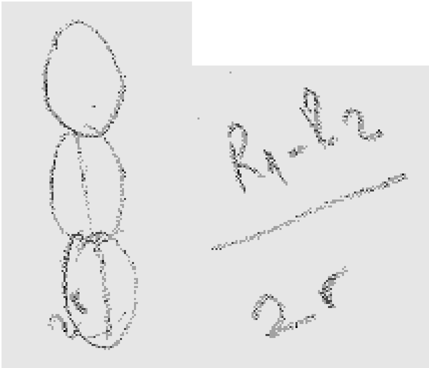
Arda: Yani ikinci sarıma R_2 yerine $R_2 + \mathbf{r\sqrt{3}}$ diyeceğiz. Birinci de R_2 gördüğümüz her yere ikinci için $R_2 + \mathbf{r\sqrt{3}}$ diyeceğiz.
Seda: $\mathbf{r\sqrt{3}}$'lük artış var yani.
Arda: Evet. İlk sarımda R_2, ikincide $R_2 + \mathbf{r\sqrt{3}}$, üçüncüde $R_2 + \mathbf{r\sqrt{3}} + \mathbf{r\sqrt{3}}$…



Şekil 22: *Kablo Makarasında İlk Sarımdan Sonraki Sarımlarda*

Şekil 22'de görüldüğü gibi öğretmenler iki kablo arasına denk gelen kablo çizimini yaparak merkezlerini birleştirmişler ve oluşan şeklin eşkenar üçgen olduğunu belirlemişlerdir. Üçgenin köşelerini *A*, *B* ve *C* olarak adlandırmış ve yüksekliğini ise *IADI*= $\boldsymbol{r\sqrt{3}}$ bulmuşlardır. Yeni oluşan göbek yarıçapının ne kadar artacağını da *h* ile göstermişlerdir. Üstteki kablonun alttaki kablolara değme noktasını *E* ile adlandırmış *IEDI* doğru parçasının uzunluğunu bulmak için üçgenin yüksekliğinden kablo yarıçapını çıkarmışlardır (IEDI= $\mathbf{r\sqrt{3} - r}$). Şekildeki (h) uzunluğunu ise $\boldsymbol{r\sqrt{3} - r + r'}$ den , $\boldsymbol{r\sqrt{3}}$ olarak bularak yeni göbek yarıçapının $\boldsymbol{r\sqrt{3}}$ artacağını ifade etmişlerdir. İlk sarımda göbek yarıçapının R_2, ikinci sarımda yeni göbek yarıçapının $R_2 + \boldsymbol{r\sqrt{3}}$, üçüncü sarımda ise $R_2 + \boldsymbol{r\sqrt{3}} + \boldsymbol{r\sqrt{3}}$ olacağını ve bunun böyle devam edeceğini belirtmişlerdir. Devamında kablo makarasına toplam kaç kat kablo sarılabileceği Seda ile Arda arasında aşağıdaki su konuşmayla açıklanmıştır:

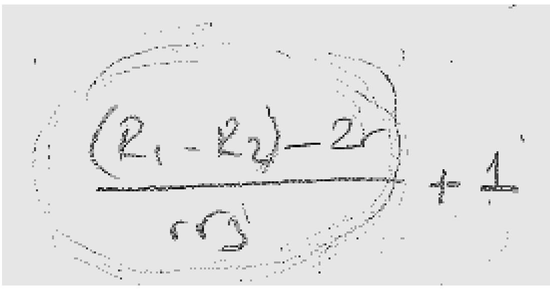
Seda: Toplamda kaç kat olduğunu nasıl bulacağız?
Arda: Eğer bunlar üst üste gelmiş olsaydı R_1-R_2'yi 2r'ye bölecektik. Yukarıya doğru kaç sıra bulduğumuzu koymak için.



Şekil 23: *Eğer Kablolar Üst Üste Sarılsaydı, Kaç Kat Kablo Sarılabileceğini Veren Formül*

Öğretmenlerden Arda kabloların üst üste gelmesi durumunda makaranın yarıçapından (*R_1*), makaranın göbek yarıçapını (*R_2*) çıkararak kablo çapına bölerek ($\frac{R_1 - R_2}{2r}$) sonuca ulaşacaklarını belirtmiştir. Grup üyeleri spiral sarımda kaç kat kablo sarabileceklerini aşağıdaki gibi tartışmışlardır:

Arda: Burada ne yapacağız peki? İlk anda yükseklik 2r
Ayşen: Sonrakinde $\mathbf{r\sqrt{3}}$ yükseldi.
Arda: Hepsinde $\mathbf{r\sqrt{3}}$ yükseldi.
Seda: Ama başta hep 2r var.
Arda: Ama o en altta kalıyor. Diğerlerinde hep $\mathbf{r\sqrt{3}}$ kadar artıyor.
Seda: O zaman şöyle yapaca[ğı]z. Elimizde toplamda R_1-R_2 uzunluğu var değil mi?
Ayşen: Evet.
Seda: Bu uzunlukla ilk baştaki sarımdan gelen…
Ayşen: 2r'yi çıkaracaksın.
Seda: 2r mi?
Ayşen: 2r'yi çıkarıp $\mathbf{r\sqrt{3}}$'e mi böleceksin?
Seda: Hıhı…
Arda: Sarım sayısına da artı 1 dersin o zaman.
Ayşen: Evet.
Arda: Artı 1 demen gerekiyor mu? Bence gerekiyor çünkü şunu (ilk sarım)ihmal ettin ya.
Seda: Onu ihmal ettik evet.
Arda: Artı 1 diyeceksin.
Ayşen: Tamam, bu da spiraldeki sarım sayısı…
Seda: Şimdi bu ney? Yukarı doğru kaç kat olduğu…
Arda: Evet.



Şekil 24: *Kablo Makarasına Kaç Kat Kablo Sarılacağını Veren Formül*

Öğretmenler kablo makarasında kablonun sarılacağı boşluğu, makaranın yarıçapından göbek yarıçapını çıkararak (*R_1-R_2*) bulmuşlardır. Göbek yarıçapını ise ilk katta kablonun makaraya değdiği noktaya kadar (*R_2*), ikinci katta kablonun altta kalan kablolara değdiği noktaya kadar (*R_2*+ $\boldsymbol{r\sqrt{3}}$) olacak şekilde belirlemişlerdir. Grup üyeleri kablo makarasına kaç kat kablo sarılacağını bulmak için ilk kattaki kablo çapının *(2r)* makaradaki boşluktan (*R_1-R_2*) çıkarılarak $\boldsymbol{r\sqrt{3}}$' e bölünmesini ve ilk sıranın *+1* olarak formüle eklenmesi gerektiğini ifade etmişlerdir (Şekil 24). Bu bölümde grup üyeleri kendilerine verilen görevin kablo makarasına en fazla kabloyu sarmak için bir model geliştirmek olduğundan düz sarım ve spiral sarımı karşılaştırmış, spiral sarımın daha avantajlı olduğunu ve kablonun düz sarılamayacağını, sarmaya çalışsalar bile kabloların birbirini itmesinden dolayı kayacağını ve spiral hale geleceğini belirtmişlerdir. Sarım şekli olarak spiral sarımı seçmişimlerdir. Öğretmenler spiral sarımda her bir sarımın için *x* uzunluğunu hesaplamış, bir kattaki sarım sayısını da $\frac{L-2r}{2r}$ formülü ile belirlemişlerdir. Grup üyeleri kablo makarasına toplam kaç kat kablo sarabileceklerini kabloların üst üste gelmesi durumunda makaranın yarıçapından (*R_1)*, makaranın göbek yarıçapını (*R_2*) çıkarıp kablo çapına bölerek ($\frac{R_1-R_2}{2r}$) bulabileceklerini; sarım biçiminin spiral olması gerektiğini ve kablo makarasına $\frac{(R_1-R_2)-2r}{r\sqrt{3}}$ +1 kat kablo sarılacağını genelleyerek formüle etmişlerdir.

4.1.6 Geçerliğini Doğrulamak

Öğretmenler kablo makarasında birinci, ikinci ve üçüncü sıradaki kablo uzunluğunu belirlemek suretiyle genelleme yoluna gitmeye çalışmışlar ve aralarında şu şekilde bir konuşma gerçekleşmiştir:

Seda: Şimdi sonraki katların her birinde artış olacak.
Ayşen: Tamam her biri için ayrı ayrı bulacağız sonra toplayacağız onları. Yani şu formülü her bir sıra için yapıca[ğı]z $\left[\sqrt{(\mathbf{2\pi R_2})^2 + (\mathbf{2r})^2}.(\frac{\mathbf{L-2r}}{\mathbf{2r}})\right]$

Seda: Şimdi birinci sıra için tamam. İkinci sırada $\mathbf{r\sqrt{3}}$ artıyor.

Arda: 3. sırada 2 $\mathbf{r\sqrt{3}}$ ...
Seda: 3. de 1 eksiği kadar oldu. n tane ise sonuncuda n-1 artış olacak.
Arda: n. sarımda da n-1 çarpı $\mathbf{r\sqrt{3}}$ artış olacak. Bunda toplam sembolü kullanmamız gerek.
Seda: Toplam sembolü ile yaparsak… O zaman karekök içinde…
Arda: Deneyelim. Açalım bi[r].
Ayşen: Evet oldu bence.
Arda: Mektubu yazalım bence.

Grup üyeleri kablo makarasında ilk sıradaki kablo uzunluğunu $\left[\sqrt{(2\pi R_2)^2 + (2r)^2}.(\frac{L-2r}{2r})\right]$ formülü ile bulmuşlardır. Ayşen bu formülü sarılacak her sıra için ayrı ayrı uygulamaları, buldukları sonuçları ise toplamaları gerektiğini ifade etmiştir. Her yeni sarımda göbek yarıçapında $\boldsymbol{r\sqrt{3}}$ kadar bir artış olacağından öğretmenler bunu tüm katlara uyguladıklarında *n.* katta *(n-1).* $\boldsymbol{r\sqrt{3}}$ kadar bir artış olacağı ortak kararına varmışlar ve buldukları sonuçları toplam sembolü ile aşağıdaki gibi göstermişlerdir (Şekil 25). Daha sonra buldukları formülün geçerliliğini doğrulamak için toplam formülünü açarak kontrol etmiş ve doğrulamaya çalışmışlardır (Şekil 26).

$$\sum_{n=1}^{\frac{(R_1-R_2)-2r}{r\sqrt{3}}+1} \sqrt{[2\pi(R_2+r\sqrt{3}.(n-1)]^2+(2r)^2}\cdot\frac{L-2r}{2r}$$

Şekil 25: *Öğretmenlerin Kablo Makarasına En Fazla Kabloyu Sarmak İçin Geliştirdikleri Toplam Formülü*

$$\underbrace{\sqrt{(2\pi R_2)^2+(2r)^2}\cdot\frac{L-2r}{2r}}_{1.} + \underbrace{\sqrt{[2\pi(R_2+r\sqrt{3})]^2+(2r)^2}}_{2.\ \text{adım}}\cdot$$

Şekil 26: *Öğretmenlerin Bulduğu Toplam Formülünün Açılmış Hali*

4.2 Kablo Makarası Probleminin Süreç Analiz Özeti

Ortaokul Matematik Öğretmenleri *Kablo Makarası Problemi* üzerindeki matematiksel model oluşturma sürecinde ilk olarak kendilerine verilen problemde ne istendiğini anlamak için soru üzerinde hep birlikte tartışmışlar, problemi daha anlaşılır kılmak için kendilerine verilen örnek makara ve kablolar üzerinde problem metninde verilen R_1, R_2, L, r değişkenlerinin yerlerini belirlemeye çalışmışlardır. Problemde kendilerinden istenenin bir kablo makarasına en fazla kabloyu sarmak için bir model geliştirmeleri gerektiği konusunda hemfikir olmuşlardır. Bir başka deyişle grup üyeleri problemde verilen durum için örtülü bir düzeyde zihinsel bir yapılandırmaya gitmiş ve böylece modelleme sürecinin ilk basamağını gerçekleşmişlerdir.

İkinci aşamada grup üyeleri bir kablo makarasına en fazla kabloyu sarabilmek için bir strateji belirleyebilmek amacıyla hangi faktörleri dikkate alacaklarını ve bunları nasıl değerlendirecekleri konusunda tartışmışlardır. İlk olarak *yüzey alanı* daha sonra *hacim* ve kablo *makarasının dizaynından* faydalanmayı strateji olarak tartışmışlar fakat hiç birinde ortak bir karara varamamışlardır. Son olarak *kablo makarasının genişliği (L)* ve *makarada kablonun sarılacağı boşluk (R_1-R_2)* üzerinden bir model oluşturmaya karar vermişlerdir. Ayrıca makara yüzeyinin her sarımda *kablonun çapı kadar artacağını* belirterek öğretmenler problem durumunu daha anlaşılır ve basit hale getirmişlerdir. Modelleme sürecinin ikinci basamağı olan problemi basitleştirme ve yapılandırma aşamasını bu şekilde gerçekleştirmişlerdir.

Bir sonraki aşamada öğretmenler L uzunluğuna 10 cm ve kablo çapına (2r) 0,5 cm özel değerlerini vererek yan yana gelecek halkaların sayısını 20 tane olarak hesaplamışlardır. L uzunluğunu kablo çapına bölerek yan yana gelecek toplam halka sayısını bulabileceklerini söyleyerek gerçek modelden matematiksel model oluşturma aşamasına geçmişlerdir. Devamında grup üyeleri kablo makarasında bir üst sıraya geçildiğinde kabloların üst üste gelmesinin mümkün olmayacağı varsayımından hareketle kablo sarılırken bir üst sıraya geçildiğinde, artışın kablo çapı kadar olamayacağını belirtmişlerdir. Öğretmenler kablo makarasına bir sıra kablo sardıklarında yan yana kaç halka olacağını L/2r ve bu halkaların toplam uzunluğunu $\mathbf{2\pi}R_2.L/2r$ formüllerini kullanarak bulabileceklerini ifade etmişlerdir. Grup üyeleri daha sonra üst üste gelecek kabloların kaç kat olabileceğini sorgulamışlar bunu çizim yaparak görmeye çalışmışlardır. Yaptıkları çizim esnasında Seda kablo sarımını spirale benzetmiş ve ilk sıradaki kablonun uzunluğu ile ilgili yaptıkları işlemi sorgulamıştır. Ardından Ayşen ananas soyma sorusunu hatırlatarak, ananasın etinin fazla harcanmaması için *spiral* şeklinde soyulduğunu vurgulamıştır. Seda ise kendilerinin yüzeyden daha fazla faydalanmaya çalıştıkları için sarım şeklinin *normal* olması gerektiğini savunmuştur. Bir sıradaki sarım sayısının normal sarımda daha fazla olacağını kabul etseler de Arda normal sarımın olması için kabloların bilezik gibi yan yana dizilmesi gerektiğini halkaların ister istemez kayarak spiral şeklini alacağını belirtmiştir. Ayşen spiral sarıma itiraz etse de diğerleri kabul ettiği için sarım şekli olarak s*piral sarım* kabul edilmiştir.. Devamında öğretmenler spiral sarımda bir sarımın uzunluğunu (x) bulmak için, oluşan dik üçgende Pisagor bağıntısını uygulayarak $\sqrt{(\mathbf{2\pi R_2})^2 + (\mathbf{2r})^2}$ = x formülünü elde etmişlerdir. Bu aşamada bireyler sözlü ifadeler yerine yazılı dış temsiller kullanmaya başlayarak matematikselleştirme ve matematiksel işlemlerle çalışma aşamasını gerçekleştirmişlerdir.

Bu bölümde grup üyeleri kendilerine verilen görevin kablo makarasına en fazla kabloyu sarmak için bir model geliştirmek olduğundan düz sarım ve spiral sarımı karşılaştırmış, spiral sarımın daha avantajlı olduğunu ve kablonun düz sarılamayacağını, sarmaya çalışsalar bile kabloların birbirini itmesinden dolayı kayacağını ve spiral hale geleceğini ifade etmişlerdir. Sarım şekli olarak *spiral sarımı* benimsemişlerdir. Öğretmenler spiral sarımda her bir sarımın için *x* uzunluğunu hesaplamış, bir kattaki sarım sayısını da $\frac{L-2r}{2r}$ formülü ile belirlemişlerdir. Öğretmenlerden Arda kablo makarasına toplam kaç kat kablo sarabileceklerini kabloların üst üste olması durumunda makaranın yarıçapından (R_1), makaranın göbek yarıçapını (R_2) çıkararak kablo çapına bölmenin ($\frac{R_1-R_2}{2r}$) kendilerini sonuca ulaştıracağını ifade etmiştir. Grup üyeleri her yeni katta yeni bir göbek oluşacağını ve göbeğin her katta $\boldsymbol{r\sqrt{3}}$ kadar artacağını bulmuşlardır. Kablo makarasına kaç kat kablo sarılacağını ise $\frac{(R_1-R_2)-2r}{r\sqrt{3}}$ +1 formülü ile ortaya koymuşlardır. Daha sonra öğretmenler her yeni sarımda göbek yarıçapında $\boldsymbol{r\sqrt{3}}$ kadar bir artış olacağını, bunu tüm katlara uyguladıklarında *n.* katta *(n-1).* $\boldsymbol{r\sqrt{3}}$

kadar bir artış olacağını ve toplam kablo uzunluğunu aşağıdaki şekilde toplam sembolü ile göstermişlerdir.

$$\sum_{n=1}^{\frac{(R_1-R_2)-2r}{r\sqrt{3}}+1} \sqrt{[2\pi\,(\mathbf{R}_2 + r\sqrt{3}.\,(\mathbf{n}-\mathbf{1})]^2 + (\mathbf{2r})^2}\ .\ \frac{L-2r}{2r}$$

Öğretmenler buldukları formülün geçerliliğini test etmek için de toplam formülünü n = 1, 2, 3 için açarak doğrulamaya çalışmışlardır.

Kablo Makarası Probleminin süreç analiz özetini gösterir tablo aşağıdadır:

Tablo 8: Kablo Makarası Probleminin Süreç Analiz Özeti

1- Problemi Anlama ✓ *"Bir kablo makarasına en fazla kabloyu sarmak için bir model geliştirmeleri"* gerektiği anlama
2- Problemi Basitleştirmek / Yapılandırmak (gerekli ise EMB kullanımına karar vermek) ✓ Bir kablo makarasına en fazla kabloyu sarabilmek için gerekli stratejiyi belirlemek amacıyla faktörleri belirleme ve ayrıştırma, alternatifleri değerlendirme, yeni sorular sorma ✓ *Kablo makarasının genişliği (L) ve kabloda makaranın sarılacağı boşluk (R_1-R_2)* üzerinden bir model oluşturma konusunda ortak karar alma ✓ Kabloların üst üste geleceğini varsayımına dayanarak makara yüzeyinin her sarımda *kablonun çapı kadar artacağını* dikkate alma
3- Matematikselleştirmek (burada EMB'ye güçlü şekilde ihtiyaç duyulur) ✓ Düz sarımda *makara genişliği (L)* ve *kablo çapına (2r)* değer verip, *L/2r* formülünü kullanarak yan yana gelecek halka sayısını bulma ✓ Düz sarımda yan yana gelen halkaların toplam uzunluğunu $2\pi R_2.L/2r$ formülünü kullanarak bulabileceklerine karar verme ✓ Kablo makarasında bir üst sıraya geçildiğinde kabloların üst üste gelmesinin mümkün olmayacağını görme ve *düz sarımdan* vazgeçme ✓ Sarım şekli olarak *spiral sarımı* kabul etme ✓ Kablo sarılırken bir üst sıraya geçildiğinde, artışın kablo çapı kadar olamayacağını hesaplama
4- Matematiksel İşlemlerle Çalışmak (kişisel matematik bilgi ve deneyimlerinin kullanımı) ✓ Spiral sarımda bir sarımın uzunluğunu (x) bulmak için, oluşan dik üçgende Pisagor bağıntısını uygulayarak $\sqrt{(2\pi R_2)^2 + (2r)^2} = x$ formülünü elde etme
5- Yorumlamak ✓ Düz sarım ve spiral sarımı karşılaştırma ✓ Spiral sarımda her bir kattaki sarım sayısını belirleme ✓ Sarılan her yeni katta yeni bir göbek oluşacağını ve oluşan göbeğin ne kadar artacağını belirleme ✓ Düz ve spiral sarımda kablo makarasına toplam kaç kat kablo sarabileceklerini belirleme ✓ Her yeni sarımda makara göbek yarıçapında ne kadar bir artışın olacağını belirleme ✓ Kablo makarasına sarılacak en fazla kablo miktarını nasıl hesaplayacaklarını belirleme
6- Geçerliğini Doğrulamak ✓ Formülün geçerliliğini test etmek için toplam formülünü n = 1, 2, 3 için açarak doğrulamaya çalışmak

4.3 Uçağa Binme Sorusuna İlişkin Bulgular

Bu çalışmada yer alan ortaokul matematik öğretmenlerinin, matematiksel düşünme ve yazılı işlem yoluyla ortaya koydukları model oluşturma süreçlerinin her bir aşaması meydana geldiği sırada sunulmuş ve Ferri'nin (2006) şu başlıkları altında incelenmiştir: (1) Problemi anlamak, (2) Problemi basitleştirmek/ yapılandırmak (gerekli ise EMB kullanımına karar vermek), (3) Matematikselleştirmek (burada EMB'ye güçlü şekilde ihtiyaç duyulur), (4) Matematiksel işlemlerle çalışmak (kişisel matematik bilgi ve deneyimlerin kullanımı), (5) Yorumlamak ve (6) Geçerliğini doğrulamak.

4.3.1 Problemi Anlamak

Ortaokul matematik öğretmenlerine probleme ait uçak krokisi ve problem metni araştırmacı tarafından verilmiş ve aşağıda yer alan konuşmalar gerçekleşmiştir.

> **Görüşmeci:** Hepimiz otobüs uçak gibi toplu taşıma araçlarını kullanarak yolculuğa çıkıyoruz. Araçta yerinize yerleşme esnasında sıkıntılar yaşıyor musunuz?
> **Seda:** Eğer ben koridorda valizimi koyuyorsam yanımdan kimse geçemiyor.
> **Ayşen:** Evet senin oturman gerekiyor. Koridor tıkanıyor. Bekliyorsun.
> **Görüşmeci:** Evet koridorda bir kişi durduğu takdirde ikinci bir kişi yanından geçemiyor. Kişi gelir yukarı el bagajını koyar ondan sonra da yerine geçer. Soruyu biraz sonra kendiniz okuyacaksınız. Amacınız bütün yolcuları en kısa zamanda yerlerine yerleştirmek olacak. Nasıl bir yöntem veya strateji bulacaksınız ki insanlar uçağa girdikten sonra seri bir biçimde yerlerine oturabilsinler?
> **Arda:** (Uçak krokisine bakarak) bir tane giriş var.
> **Seda:** (Kroki üstünde göstererek) bu oklar ne peki?
> **Görüşmeci:** Onlar acil çıkış kapıları. Onları şu anda siz hiç kullanmıyorsunuz.
> **Seda:** Sadece yolcuların gireceği bir kapı var.
> **Arda:** Burası birinci sınıf burası ikinci sınıf (kroki üstünde göstererek). Seda sen oku istersen biz dinleyelim.
> **Seda:** Tamam ben okuyayım, aynı zamanda anlamaya çalışayım.

Öğretmenler problem metnini okuduktan sonra problemi anlamak, genel durumu açıklamaya çalışmak ve problemi daha anlaşılır hale getirmek için aşağıdaki şekilde kendi deneyimlerinden de örnekler vermişlerdir.

> **Ayşen:** (Problem metninde yer alan kısmı okuyarak) uçaklar havaalanından gecikmeli kalktığı her dakika için gecikme bedeli ödemek zorunda… Otobüs garajlarında da otobüs bekleme süresini geçirse veya sivil araçlar belli bir süreyi geçirirse ücret talep ediliyor. Mesela ben Ordu'ya giderken Ordu Birlik arabaları hemen zamanında çıkıyor para ödememek için. (Yolcu geç

kalmışsa) yolcuyu dışarıda bekliyorlar. Eğer zaman dolmuşsa garaj dışına çıkıyor yolcu eksikse dışarıda bekliyor para ödememek için.
Seda: Aynı mantık belediye otobüslerinde de var. Duraklardan duraklara simsar oluyor ya düdük çalıyor kalkın hadi diye.
Arda: Evet aynen öyle…
Ayşen: Geç kaldığın zaman kapıları kapatıyorlar almıyorlar seni. Otobüslerde bekliyorlar ama bunda öyle değil. Mesela ablam en son şeyde uçakla gelecekti almadılar ablamı geç kaldı diye.
Seda: Benimde arkadaşım Ordu'da çalışırken son akşam Pazar gün akşam uçağa binecek saat 10:30da. Sonra ona göre de Samsun'dan da Fatsa'ya gelecek. Saat 10:30 daki uçağa binmek için yolcuların olması gereken yerde değildi. Oraya gidene kadar uçağın kapıları kapandığı için onu uçağa almadılar.
Arda: Samsundan mı dedin.
Seda: İstanbul'dan geliyor o.
Arda: Çünkü Samsundan çok fazla uçak kalkmıyor öyle peş peşe.
Seda: Niye yaz sezonunda kalkıyor.
Arda: Samsun'dan?
Seda: Tabii direkt Almanya'ya uçuşlar var.
Arda: Böyle peş peşe? Direkt vardır da böyle karıştıracak kadar…
Seda: Bilmiyorum. Belki yerden yere değişebilir.
Arda: O kadar değildir zannedersem. Soruya geçelim isterseniz.

Grup üyelerinden Seda'nın tereddüt etmesi üzerine soruda kendilerinden ne istendiğini tam olarak anlayabilmek için problem metni üzerinde bir süre daha aşağıdaki şekilde tartışmışlardır:

Seda: (Problem metnini okuyarak) uçakların kalkışı esnasında yaşadığı en büyük sorunlardan biri olan yolcuların yerleştirilmesi… Burada başka sorunlar da var.
Ayşen: Ama en önemli sorun yolcuların bindirilip indirilmesi. Bunlarda bir sorun yok.
Seda: Bagajların boşaltılması…
Ayşen: Onu sormuyorlar. Sadece yolcular için olanı istiyor. Zaten en önemli sorun yolcuların bindirilip indirilmesi. Bunlarda bir sorun yok.
Seda: Ama bi[r] dak[i]ka. Diyor ki bak, bir dakika olaya bakar mısınız? (problem metnini okuyarak) dünyada uçak üreten en büyük kuruluşlardan biri olan Boeing' in raporuna göre alana iniş yapan bir uçağın en kısa sürede yeniden alandan ayrılabilmesi için yapılması gereken pek çok farklı işlem var. Bunlardan bazıları…
Ayşen: Ama bak bu rapora göre en uzun süren bu (rapora göre yolcuların uçağa yerleştirilmesi en uzun süreyi almaktadır).
Seda: Ha tamam…
Ayşen: Biz sadece bunu yapacağız.
Arda: Diğerlerine karışmıyoruz.
Ayşen: Burada açıklamış bak.
Seda: Bakalım diğer etkenlere de.

Ayşen: (Problem metnini okuyarak) uçak içindeki yolcuların uçaktan ayrılması, yakıt ve su ikmalinin yapılması, bagajların boşaltılması ve yüklenmesi, yiyecek içecek servisinin hazır hale getirilmesi, uçağın temizlenmesi ve yeni yolcuların uçağa yerleştirilmesi. Bu rapora göre yolcuların uçağa yerleştirilmesi en uzun süreyi almaktadır.
Seda: Tamam tamam…
Arda: Bizden en sonuncuyu istiyor.
Ayşen: Bakın zaten soruda da diyor. (Problem metnini okuyarak) sizden bu uçağın yolcularını alıp en kısa sürede havalanmasını sağlamak için uçağa giren yolcuların koltuklarına yerleşmesini sağlayan bir oturma planı oluşturmanız…
Seda: Tamam.

Yukarıdaki alıntılarda görülmektedir ki grup üyeleri kendilerine verilen problemde ne istendiğini anlamak için soru üzerinde hep birlikte tartışmışlar ve problemde kendilerinden istenenin uçağın yolcularını alıp en kısa sürede havalanmasını sağlamak için uçağa giren yolcuların koltuklarına yerleşmesini sağlayan bir oturma planı oluşturmaları gerektiği konusunda hemfikir olmuşlardır. Problemi daha anlaşılır kılmak için kendi deneyimlerinden de örnekler vermişlerdir. Bir başka deyişle grup üyeleri problemde verilen durum için örtülü düzeyde bir zihinsel yapılandırma gerçekleştirmişlerdir. Böylece modelleme sürecinin ilk basamağı gerçekleşmiştir.

4.3.2 Problemi Basitleştirmek/ Yapılandırmak (gerekli ise EMB kullanımına karar vermek)

Bu aşamada öğretmenler problemde verilen durum için her biri kendi deneyimlerine göre zihinsel bir temsil geliştirmiştir. Bu temsiller onların matematiksel düşünme biçimlerine göre farklılık gösterebilir. Öğretmenler yolcuların uçağa en hızlı şekilde yerleştirilmesi için bir strateji belirleyebilmek amacıyla neleri dikkate alacaklarını ve bunları nasıl değerlendirecekleri konusunda çeşitli önerilerde bulunmuş ve bu öneriler aşağıdaki şekilde tartışılmıştır.

Seda: Şimdi uçağın yolcularını alıp en kısa sürede havalanmasını sağlamak için uçağa giren yolcuların kotlularına yerleşmesini sağlayacak bir oturma planı...
Arda: Benim aklıma şey geliyor. En mantıklı olan en arkadaki adamdan başlayıp, en arkadakini ve en arkadaki ama bir de şeyler yani duvar (uçaktaki cam kenarlarını göstererek).
Seda: Yan yana olmaması lazım karşılıklı olmaması lazım. Karşılıklı olursa iki kişi aynı anda valizlerini yerine koyamayabilir. Koridorda bulunamaz yani.
Arda: Peş peşe iki tane…

Seda: Bence şöyle olsa… Yani mesela bunu alıyorsak bu yolcuyu alıyorsak sonra bu yolcuyu sonra bu yolcuyu ki buraya bir kişi bulunuyor ya, şöyle çapraz çapraz (örneğin B26-E25-B24-E23…).
Arda: Ama buradakilerin…
Seda: Şimdi onları da önce böyle çapraz çapraz aldıktan sonra diyelim ki bir sıradakiler için aldık (örneğin C ve D sıraları). Ondan sonra da mesela ikinci sıradakiler için aynı çapraz (örneğin B ve E sıraları).
Arda: Yani sen diyorsun ki en arkadan doldurarak gelmeyelim.
Seda: En arkadan doldurarak geleceğiz.
Arda: Hepsini mesela bu altıyı doldurduk (A26-B26-C26-D26-E26-F26).
Seda: Altıyı doldurursak zaman kaybederiz. Altının altısının da buraya yerleşmesini beklemek için ilk iki kişi(C26-D26) hem burada bekleyecek hem burada bekleyecek.
Ayşen: Şimdi diyor ki Seda. Şunla şu şunla şu (F26-E25). Çapraz.
Seda: Mesela neden biliyor musun? Mesela ikimiz gittik.
Arda: İsim verilmiş bunlara. Burası A26 mesela.
Seda: Mesela sen A26' nın yolcususun, ben de F26' nın yolcusuyum. İkimizi aynı anda buradan gönderdiler. İkimizde aynı anda buradayız (26. sıra). İkimiz aynı anda koridorda bulunabiliyor muyuz?
Arda: İkisi aynı anda koridorda bulunamaz.
Seda: İkimiz aynı anda burada bulunamayız. Ama bagajımız falan yoksa ki ama herkesin bagajı oluyor. El çantası falan…
Arda: Bagajı vardır büyük ihtimalle. Olduğunu düşünelim.
Seda: Evet olduğunu düşünelim. Madem en kısa sürede herkesin en azından elinde bir tane çantası vardır bence.
Arda: Hiç beklemeden o zaman herkesin sırayla yerleşebilmesi için şuradan (F26)…
Seda: Benim dediğimi anladınız mı siz? İkimiz aynı anda ben buraya (F26) sen buraya (A26) geldiğimizde, ikimiz aynı anda bagaj yerleştirmesi yaptığımız zaman, burada ikimiz yapamayacağız.
Ayşen: Gecikme olacak.
Seda: Birimiz yapacak birimiz yapamayacak. Birimiz arkada bekleyeceğiz. Arkada bekleyince bir önceki koltukları (25. sıra) eğer göndermişlerse onların zamanını alacağız. Yani sürekli geriye doğru bir bekleme olacak.

İlk anda öğretmenler sadece el bagajlarını yerleştirirken koridorda sıkışıklık olmamasına odaklanmışlar ve nasıl bir yerleşim yapacaklarını konuşmuşlardır. Başka unsurları hesaba katmamışlardır. Arda'nın ilk olarak önerdiği en arkadan başlayarak cam kenarlarını önce yerleştirme fikri üzerinde pek tartışılmadan, Seda' nın önerdiği çapraz yerleştirme fikri üzerinde durulmuştur. Fakat bu stratejilerden hangisinin daha iyi bir strateji olabileceği üzerinde bir uzlaşma sağlanamamıştır. İlk anda kabul gören sadece koridorda sıkışmaya meydan vermeden uçağın en arkasından yerleştirmeye başlama önerisi olmuştur.

Aynı sırada oturan yolculardan koridor taraftaki önce oturursa cam kenarında oturanın geçip geçemeyeceği ile ilgili tartışma aşağıdaki gibi gerçekleşmiştir.

Arda: Önce cam kenarını göndermemiz lazım (F veya A). O da var.
Seda: Tabii. Çünkü şurada (D26) birisi oturuyorsa eğer…
Arda: Kalkacak yer verecek.
Seda: Evet. Bazıları rahatsız oluyor. Kalkmak istiyor, bazıları da şey yapıyor…
Arda: Gerçi şu koltuk mesafesinin ne kadar olduğunu da bilmiyorum (önlü arkalı iki koltuk arasındaki boşluk). Kalkmadan da geçilebiliyor mu?
Ayşen: Yok ya rahatsız oluyordur.
Seda: Geçilebilir ama bazı insanlar rahatsız oluyor. Kalkma gereği duyuyor.
Arda: Önümden geçmesin adam diyebilir yani.

Grup üyeleri burada yolcuların birbirinin önünden geçme durumunun rahatsızlık verebileceğini düşünerek koltuklara yerleştirmenin önce cam kenarlarından başlaması gerektiği hususunda hemfikir olmuşlardır.

Dolayısıyla en arkadan başlayarak yerleştirme konusunu dikkate alan öğretmenler daha sonra da cam kenarlarının önce yerleştirilmesini de işin içine katarak en uygun stratejiyi oluşturma yolunda ilerlerken grup üyeleri bu yerleştirmenin nasıl yapılacağı konusunda tartışmaya aşağıdaki şekilde devam etmişlerdir.

Ayşen: Ama illa çapraz olmak zorunda değil ki. Çapraz çapraz değil de şu kısım mesela. D-E-F bölmeleri doldurulur daha sonra A-B-C bölmeleri doldurulur. Yani ilk önce ne olur mesela, F bölmesi cam kenarı, daha sonra E bölmesi orta kısım, daha sonra D bölmesi. Ondan sonra C,B ve A bölmeleri.
Arda: Bu daha basitmiş ya.
Seda: Hmm öyle mi.
Ayşen: Mesela kaç kişi alırız biz bir anda? Kaç koltuk var?
Arda: 26
Seda: Senin dediğinde kaç koltuk alıyoruz? Şurada kaç koltuk var?
Ayşen: 23
Arda: Hepsi 26 ya.
Ayşen: Şurası (ekonomi sınıfı) 2, şurası (birinci sınıf) 3 sıra. Fakat burada (birinci sınıf) biraz fark var. Burada(birinci sınıf) yan yana 2 koltuk varken burada (ekonomi sınıfı) 3 koltuk var.
Arda: Burada (ekonomi sınıfı) sadece D sütunu ve C sütununda fark olacak.
Seda: Evet. Bir kerede şu 23 kişiyi alalım onlar şu sırada (F sütunu) otursun diyorsun sen.
Arda: Neden? 26 kişi ya. Bunları da (birinci sınıf) koy.
Seda: Ha evet…
Arda: Tamam bu 26 geçti buraya. Sonra?
Seda: Şimdi o 26'nın gelme hızı ile ikinci 26'nın gelme hızı… 26 ama bak burada (birinci sınıf 2 sıra var, burada (ekonomi sınıfı) 3 sıra var.

Arda: Tamam işte en son sırada değişecek.
Ayşen: Mesela şu B (birinci sınıf) ile D aynı anda gelir yine yerleşirler. A (birinci sınıf) ile de şu C (ekonomi sınıfı) aynı anda gelir yine yerleşirler. Sadece geriye şu (A- ekonomi sınıfı) kalır mesela. Şurası (birinci sınıf) dolmuş olur.
Seda: Peki. Yani sen diyorsun ki bir kere de biz 26 kişiyi yollayalım (birinci sınıf D ve ekonomi sınıfı F). İkincide 26 (birinci sınıf C ve ekonomi sınıfı E). Sonra 23 (ekonomi sınıfı D). Sonra tekrar 23 (ekonomi sınıfı C).Yani 26-26-23 sonra tekrar 23-26-26 şeklinde.
Ayşen: Şöyle de olabilir Seda. Mesela D (birinci sınıf) ile F'yi (ekonomi sınıfı) attık, C (birinci sınıf) ile E (ekonomi sınıfı) olur. Şu D(ekonomi sınıfı) ile şu B (birinci sınıf) gelebilir mesela. Çünkü D'ler ekonomi sınıfı) önceden girdiği için bu arkadaki B'nin (birini sınıf) şeyi olmaz.
Seda: Bence biz bir kerede en hızlı en çok kaç yolcuyu yerleştirebiliriz birbirini etkilemeden diye düşünsek nasıl olur? 26 dan daha fazla olabilir mi?
Arda: Bence olamaz. Çünkü bunların hepsi yan yana dursa 26 kişi oluyor. Çünkü 26 sıra var burada. Arada yani şu koridorda sadece 26 kişi durabilir ayakta. Ama şu olabilir mi onu bilmiyorum. Bunların oturma hızı nasıl olur? Önce hangisini yollayacaksınız? Bunu mu(birinci sınıf) bunu mu (ekonomi sınıfı) yollayacaksınız?

Öğretmenler ilk defa burada uçaktaki koltuk sayısına ve birinci sınıf ile ekonomi sınıfındaki yan yana olan koltuklar arasındaki farka odaklanmışlardır. Ekonomi sınıfında yan yana üç koltuk varken birinci sınıfta iki koltuk vardır. İlk anda uçaktaki koltuk sıra sayısını da 26 olarak belirlemişlerdir. Ayşen çapraz yerleştirme fikrine alternatif bir strateji olarak önce uçağın sağ bölümünün sonra da sol bölümünün doldurulması fikrini önermiştir. Uçağa yolcuları alırken sınıf ayrımı yapıp yapmayacakları konusunda oldukça tereddüt etmişlerdir. Önce birinci sınıfı mı yoksa ekonomi sınıfını mı alacaklar, yoksa iki sınıfı bir arada mı alacakları konusunda bir karara varamamışlardır. Bu aşamada Seda yolcuların ilerleme hızına dikkat çekmiştir. En hızlı şekilde en fazla kaç yolcuyu alabileceklerine odaklanmaları gerektiğini söylemiştir. Öğretmenler bu kısımda oluşturacakları modeli etkileyen değişik faktörleri ortaya atmaya ve tartışmaya devam etmektedirler.

Aşağıda bir başka faktör yani yolcuları çapraz olarak veya arka arkaya almanın zaman açısından bir şey değiştirip değiştirmeyeceği, hangisinde daha fazla yolcu alınabileceği konusu şu şekilde tartışılmıştır.

Arda: Zaman olarak bir şey fark edecek mi acaba?
Ayşen: Önce şuradaki (D26) oturursa…
Arda: Sonuçta bu adamın buraya gelmesi için biraz zaman geçecek. Bu başta da otursa sonda da otursa bir şey fark eder mi?

Seda: O zaman buradaki yolcuların alınış sırası da önemli.
Ayşen: Yolcuları sıraya koymak gerekiyor bence. Başında birileri olacak, onunla ilgilenen birisi olacak yolcuları sıraya koyacak. Çünkü bu kadar kişi kafasına göre bu sıraya giremez.
Arda: Tek sıra haline mi koyacak? Öyle bir şey olabilir mi acaba?
Seda: Bizim orada öyle bir plan yapmamız lazım ki gelen yolcular tak tak yerine geçecekler ve girişi yapacaklar. Şimdi ben diyorum ki eğer buradan…
Arda: Ama bunları sıraya koymanın da zor olmaması lazım...
Seda: Şöyle düşünelim. Diyorsunuz ki mesela en çok 26 kişi alınabilir bir kerede.
Arda: Bence öyle…
Ayşen: Daha fazla da alabiliriz belki.
Seda: İşte ben de onu diyorum daha fazla da alabilir miyiz? Onu düşünmemiz lazım. Bir de şunu düşünmemiz lazım bence. Şuradan (giriş kapısı) giren kişinin, ilk gönderdiğimiz kişinin geriye gidinceye kadar bir zaman kaybı olacak ya…
Ayşen: İşte ilk başta buraya (birinci sınıf) oturtalım diyorum gelen kişiyi.
Seda: Zaman kaybını önlemek için seri bir şekilde tak tak tak tak bunların oturması lazım. Çünkü ilk gönderdiğim kişiyi düşün. İlk buraya (F26) gönderdik, daha sonra buraya (F25) gönderdik. Bu kişiler buraya (26. sıra-25. sıra) gelinceye kadar, buradakiler (giriş) bekleyecekler. Ama bu adamın şuradan (giriş) şuraya (birinci sınıf) gelmesi…
Arda: O zaman burayı (birinci sınıf) komple mi dolduralım diyorsunuz yani? D1 i koydun, yanına C1'i de koymak istiyorsun yani.
Seda: Evet D1-C1aynı anda gönderilebilir yani yan yana olanlar. Ama bunları aynı anda gönderdiğimiz zaman koridorda yan yana duramıyorlar ve ikisi de aynı yere bagaj koyacaklar. İşte o yüzden ben diyorum ki aynı sıradakileri değil de, çapraz koysak daha iyi olacak.
Arda: Şimdi bizim buradan (26. Sıra) başlatmamızın sebebi koridordaki adamlar yolu tıkamasın diye.
Seda: Evet yolu tıkamasınlar diye.
Arda: Zaman geçecek diyoruz ama bu adam buraya (26. sıra) mecbur gelecek bir kere.
Ayşen: Peki o zaman 26 kişiden fazla mı oluyor? Çapraz koysak belki fazla olur.
Seda: Hayır yine bir sıra karşıdaki sıraya atlıyorum ya yine aynı olacak.
Arda: Şimdi bu adamı (D1) buraya yerleşene kadar bagajını koyana kadar birisi bekleyecek arkasında. Ama bu adamı (F26) kimse beklemeyecek. Bu (F26) direkt yürüyor. Kimseyi etkilemiyor.
Seda: Evet bu adam (D1) buraya yerleşene kadar zaman geçecek burayı tıkayacak.
Ayşen: Bir de şu çapraz oturma yerine grup grup düşünebiliriz. Şu grup (F26-E26-D26) bir anda gelir işte.
Seda: O grup bir anda gelemez. Çünkü bagaj yerleştirecekler. Koridorda bekleme yapamazlar. Biri burada (26. sıra) bekleyecek, biri burada (25. sıra), biri burada (24. sıra) bekleyecek. Zaman kaybolacak.
Arda: Hiç kimsenin beklememesi için en mantıklısı şu sırayı (F sütunu) koymak.
Seda: Ya o sırayı koyacağız, ya da çapraz çapraz oturtacağız.

Arda: Çapraz olmasının bir avantajı olacak mı?
Seda: Aslında sizin dediğinize benzer oluyor.
Ayşen: Her ikisinde de kimse birbirinin sahasını ihlal etmiyor. Ayşennda bir farkı yok.
Arda: Bir de binenler açısından da bir karmaşıklık olmaması lazım. Diyelim birisi sıraya koydu, D26'dan itibaren D1'e kadar koydu. Millet bilecek ki benim önümden yürüyenin bir ön sırasındayım ben de. Yerini aramayacak bir de.
Ayşen: Yani bu benim grubum diyecek.
Arda: Girişte sıraya koyulacaklar. D26 girecek arkasından D25. Neredeyse herkes aynı anda yerleşecek. Ve yürürken de hiç kimsenin zaman kaybı yok.
Seda: Ben çapraz olmasını şey için düşünmüştüm. Kimse koridoru işgal etmesin önündeki adamı beklemesin diye. Ama bu koşulda da beklemeyecek.
Arda: Beklemeyecek tabii. Belli bir düzen olması önemli…
Seda: Çapraz olsa kaç kişi yerleştirebileceğiz en çok. Yine aynı olacak sayı olarak.

Seda yolcuların uçağa alınış sırasına dikkat çekmiştir. Hepsi yolcuların girişte sıraya konulması fikrine sıcak bakmıştır. Yolcular uçağa alındığında çapraz oturmalarının mı daha mantıklı yoksa arka arkaya oturmalarının mı daha mantıklı olacağı üzerinde tartışmışlardır. Sonunda her iki şekilde de uçağa alınan kişi sayısının aynı olacağı sonucuna ulaşmışlardır. Daha sonra Ayşen alternatif olarak grup grup (F26-E26-D26) yerleştirmeyi önermiştir. Fakat yolcuların koridorda aynı anda bekleme yapmasının zaman kaybına yol açacağı düşünülerek bu öneriden vazgeçilmiştir. Öğretmenler burada farklı varsayımlar ortaya atmakta, bunları değerlendirmekte, tercihler yapmakta ve bu şekilde oluşturmaya çalıştıkları modeli yapılandırmaya çalışmaktadırlar. Devamında çapraz yerleştirme konusu aşağıda bir kez daha tartışılmıştır.

Seda: Şimdi önce şuna karar verelim. Çapraz almak yolcuların girişteki durumu açısından daha karışık olacak.
Ayşen: Bence de.
Seda: Öyle mi diyorsunuz?
Arda: Evet.
Seda: Tamam. Öyle bir şey de olabilir aslında ama bu (arka arkaya oturma) daha kolaylarına gelebilir. Değil mi? Çünkü neden? Benim yerim neresiydi diye ayarlama yaparken, düşünürken de bir zaman geçecek.
Arda: Bu sırada verdiğin zaman düşünmeye bile gerek yok. Önündekinin bir ön koltuğunda olacak
Seda: Evet. O zaman…

Öğretmenler yolcuları uçağa yerleştirirken arka arkaya veya çapraz da yerleştirseler aynı sayıda kişi alabileceklerini fark ettiklerinden yolcular açısından karışıklık olmaması için Seda'nın önerdiği çapraz yerleştirme fikrini elemişlerdir. Ayrıca beklemeye neden olacağı için Ayşen'in önerdiği grup grup yerleştirme fikrinden de vazgeçmişlerdir. Bu noktada uçağın en arkasından başlayarak sıra ile yerleştirme fikrinde birleşmiş olsalar da hala sınıf ayrımı konusunda ne yapacaklarına tam karar verememiş durumdadırlar. Ayrıca en arkadan yerleştirmeye başladıklarında yolcuların uçağın sağ ve sol tarafındaki koltuklarına aynı anda mı yerleştirileceklerine veya sırasıyla cam kenarları, orta, koridorlar olacak şekilde mi yerleştirileceklerine de karar vermemişlerdir. Yani öğretmenler durumu daha anlaşılır hale getirmiş, tercihler yapmış, durumu basitleştirmiş ve ne yöne gideceklerini sınırlı da olsa planlamışlardır. Modelleme sürecinin problemi basitleştirme ve yapılandırma aşamasını gerçekleştirmişlerdir.

4.3.3 Matematikselleştirmek

Bu süreç grup üyelerinden Seda'nın bir kişinin yerine yerleşene kadar toplamda ne kadar süre geçeceğinin hesaplanması gerektiği önerisi ile başlamış ve bu konu üç öğretmen arasında aşağıdaki şekilde tartışılmıştır.

Seda: Bir şey söyleyeceğim. Zaman açısından dedik ya. Mesela bir kişinin şuradan (giriş) şuraya (26. sıra) gelinceye kadar tahmini bir zaman belirleyelim.
Ayşen: O zaman uçağın yaklaşık uzunluğunu bilmemiz gerekiyor.
Arda: Bize soruda herhangi bir zaman belirleyin diyor mu? Sadece metot bulun diyor. Nasıl yani?
Seda: Yani toplamdaki hızları… O kişilerin yerleşmesi için toplam kaç dakika gerekiyor? Yani bir kişi buradan buraya gelinceye kadar atıyorum…
Arda: Yürüyecek sadece.
Seda: Yürüyecek, bir buçuk iki dakika…
Arda: Sürmez. 26 koltuk geçiyor sadece ya.
Seda: Koltukların arasında da mesafe var.
Arda: Bir otobüste 45 koltuk var mesela. 45'i 11 sıra demek ki.
Seda: 11 sıra var.
Arda: 11 sıranın bu 2 katı. 40 saniye ancak sürer bir kişinin şuraya gelmesi ya. Sürmez bile belki. 20 saniye sürüyor mu ki? Bir saniyede bir adım atar mı insan ya? Hem de koşturmacalı…
Seda: Ben diyorum ki bir kişinin bir koltuktan diğer koltuğa gelmesi, oturması, yerleşmesi, valizini bırakması ne kadarlık bir süre eder? Kişiden kişiye değişir ama ortalama 10-15 saniye…
Ayşen: 10-15 saniye de olmaz ya. Ne bileyim bana çok kısaymış gibi geliyor.
Arda: Bence bu adamın buraya gelmesini hesap etmeye gerek yok (iki koltuk arası mesafe). Çünkü bu buraya gelmeden daha, şunlar yerleştiği zaman ikinci 26… bu peş peşe olacak bir şey bence. Hiç durmayacak yani. Hani ilk 26'yı aldık biraz bekleyelim onlar yerleşsin demeye gerek yok bence. En son binen

adam bu… Bu yerleşene kadar öbürlerinin hepsi yerleşmiş olacaktır zaten. Bakın şöyle izah edeyim. C26 buraya geldiği anda C1(birinci sınıf) buraya yerleşmiş olur zaten.
Seda: Evet olur.
Arda: Biz sadece şu adamın (C26) şuraya gelip yerleşmesini hesap edersek işlem biter.
Seda: Hayır olmayabilir. Neden biliyor musun? Çünkü bunları buradan sırayla salacaklar. Peş peşe insanlar geliyor. Bu (birinci sınıf C1) bunların arasında en son gelecek kişi. Bu (C26) önce yerleşmiş olacak.
Ayşen: En son gelecek ama bu (C1) bunun (C26) kadar yürümeyecek ki Seda. İkisi aynı anda oturabilir. C26 bu kadar yol gidiyor.
Seda: Yürümeyecek ama önündeki insanların da ilerlemesini bekleyecek. Yani şuradan ilerlemesini bekleyecek (koridor).
Arda: Kim bekliyor?
Ayşen: Ama içeride beklemeyecek dışarıda bekleyecek.
Arda: Bence hiç ara olmaz. Sadece D1'in yerleşmesi kadar, ancak bir 5 sn. bekler.
Seda: Şunu yarıdan böldüğümüzü düşünelim. Bu kişi (C26) gelip de buraya yerleşene kadar şu ikinci 15 kişi yerleşir mi?
Arda: Yerleşir.
Seda: Yani sadece zaman açısından düşünüyorum.
Arda: Belki 5 sn. dediğim gibi. O da şurada (giriş) bekler zaten. Yürüme mesafesi olur şurada bekler biraz. Şunu (D1) biraz bekleyecek sadece. Bu geçtiği anda hepsi için açılmış olacak yolun. Öyle olmaz mı?
Seda: Evet öyle olur.
Arda: 40 sn. gibi bir şey düşünmüştük herhalde bu adamın buraya gelip yerleşmesi için. 40 sn.'de 26 kişi yerleşir. Hem bu adamların yerleşmesi daha kolay olur (birinci sınıf).
Seda: Geniş olduğu için mi?
Arda: Geniş olduğu için değil. İki koltuk var. Bir koltuk atlıyor kendi koltuğuna geçiyor. Önemli olan valizini yerleştirip araya girmesi. Koltukların arasına girdikten sonra kendi koltuğuna kaç saniyede geçerse geçsin ya. Önemli olan valizini koyması ve koridordu boşaltması.

Yukarıdaki alıntılarda grup üyeleri bir kişinin yerine yerleşmesi için gereken süreyi hesaplamak için bir yöntem geliştirmeye çalışmışlardır. Seda bir yolcunun iki koltuk arasındaki mesafeyi geçmesinin, yerine gelmesinin, valizini bırakmasının ve yerleşmesinin hesaplanmasını gerektiğini söylemiş ve bunun için kendi tahmini 10-15 saniye olarak ifade etmiştir. Ayşen bu sürenin yetersiz olduğunu düşünürken, Arda ise bu yönteme gerek olmadığını, uçağın en son sırasına (C26) yerleşecek kişinin oraya ulaşmasının ne kadar süreceğini hesaplamanın yeterli olduğunu ifade etmiştir. Arda'nın en arka sıradaki kişi koltuğuna gelip yerleştiğinde arkasından gelen herkesin yerleşmiş olacağını ve bu sürenin yaklaşık 40 saniye süreceği tahmini grup üyeleri tarafından kabul edilmiştir. Grup üyeleri burada gerçek modelden matematiksel bir model oluşturma yolunda hareket ederken bir başka faktör olan sınıf ayrımının nasıl olacağı konusunda aşağıdaki şekilde tartışmışlardır.

> **Ayşen:** Acaba biz ekonomi sınıfını önce mi yollasak?
> **Seda:** Neden?
> **Arda:** Yani şuradakileri (birinci sınıf) almamanın ne faydası olacak ki zaman açısından? Peş peşe gitsinler işte.
> **Ayşen:** Birinci sınıfı ve ikinci sınıfı dışarıda düzenlerken belki bir sorun olur. Nasıl anlatsam. Seda az önce çaprazlama yapalım dedi. Ama çaprazlamada karışıklık olur dedik. Bunda da bölmeler birbirinden farklı. Birbirlerini görmüyorlar.
> **Arda:** Bunları da (birinci sınıf) dışarıda bunların (ekonomi sınıfı) arkasına koyalım.
> **Ayşen:** O zaman tüm D'leri birlikte mi alsak? (birinci sınıf ve ekonomi sınıfı). Bu insanları dışarıda birisi düzenleyecek. Nasıl toplayacak bunları. Diyecek ki tüm D'ler bura gelsin. Böyle olursa kafa karışıklığını kaldırmış oluruz.
> **Seda:** Doğru diyorsun. Ama o zaman ne olacak biliyor musun? Mesela A'lar dolunca nereler dolacak? Önce onu işaretleyelim. A'lar dolunca burası dolacak (ekonomi sınıfı ve birinci sınıf A sütunu).
> **Arda:** B'ler dolunca ikinci sıra doldu.
> **Seda:** C'ler dolunca şurası dolacak (ekonomi sınıfı ve birinci sınıf C).
> **Arda:** Olmadı. Önce D'yi doldurmamız lazım burada. Cam kenarının önce dolması lazım ya… Sen C'leri önce oturtursan D'ler geldiğinde C'lerin kalkması gerek.
> **Ayşen:** O zaman yine öbür türlü olacak. Birinci sınıf D ve ekonomi sınıfı F, birinci sınıf A ile ekonomi sınıfı A, birinci sınıf C ile ekonomi sınıfı E…

Grup üyelerinden Ayşen birinci sınıf ve ekonomi sınıfı yolcuların ayrı bölümlerde oturmalarından dolayı bir karışıklık olmaması adına ekonomi sınıfını önce almayı önermiş, Arda ise zaman açısından bir faydası olmayacağını düşünerek ayrım yapmaya gerek olmadığını birici sınıf yolcuların hemen ardından ekonomi sınıfı yolcuların uçağa alınması gerektiğini ifade etmiştir. Daha sonra grup üyeleri sınıf ayrımı yapmadan öncelikle tüm A'ları, tüm B'leri, tüm C ve D'leri aynı anda almayı düşünmüş olsalar da Arda buna itiraz ederek önce cam kenarlarının dolması gerektiğini, eğer öncelikle tüm C'leri yerleştirirlerse D'ler geldiğinde C'lere yol vermek için kalmak zorunda kalacaklarına dikkat çekmiştir. Ayşen cam kenarları öncelikli olmak üzere birinci sınıf ve ekonomi sınıfını ayrı ayrı düşünerek yerleştirme için şöyle bir sıra teklif etmiştir: Birinci sınıf D ile ekonomi sınıfı F, birinci sınıf A ile ekonomi sınıfı A, daha sonra orta kısımlar olmak üzere birinci sınıf C ile ekonomi sınıfı E. Daha sonra öğretmenlerden Arda farklı alternatifler düşünmek gerektiğini söylemiş ve diğer grup üyeleri ile hava yolu şirketinin ve birinci sınıf yolcuların beklentilerinin neler olabileceği konusunda aşağıdaki şekilde bir tartışma başlatmıştır.

Arda: Bence iki farklı şey düşünmek lazım... Havayollarının nasıl bir şey düşündüğünü biz tam bilemiyoruz. Birinci sınıfı mesela B1' i en son bindireceğiz. Beklemesi 5 dakika gibi bir şey sürüyor herhalde. 5 dakika sürüyor mu binmesi?
Ayşen: Kim birinci sınıf birinci sınıf dedikleri ne?
Arda: Ya biz sunalım cevap olarak. Paşa gönülleri bilir ondan sonra. Birinci sınıfın önerilmesi senin için önemli değilse…
Ayşen: Birinci sınıfta oturan insan oturma planından ne bekler? Belki birinci sınıf olduğu için beklentisi farklı olabilir.
Seda: Birinci sınıf da önde daha rahat koşularda oluyor.
Ayşen: Daha rahat olduğu için belki daha rahat bir beklentisi olabilir.
Seda: Beklentisi olabilir ama uçaklara binenler arasında ben birinci sınıfım bir dakika ben önden bineceğim diye bir şey olabilir mi? Diyemezler herhalde.
Arda: O diyemez ama havayolları ona öyle bir hava verdirebilir yani.
Seda: Nasıl verdirecek? Orada o kadar yolcunun arasından bu birinci sınıf diye mi seçecek?
Arda: Yok. Sayıyor A1 buraya gelsin dediği zaman gelir.
Seda: Birinci sınıflar ücret olarak farklı fiyat ödedikleri için daha rahat olmak isteyebilirler. Onları da öncelikli düşünmeler gerekiyor. Hem onları memnun edecekler hem zamandan kazanacaklar.
Arda: Bunlara bir alternatif ayırmak gerekiyor. Bizim yaptığımız düz mantık. Otobüsteki gibi düşünüyoruz sanki burası birinci sınıf değilmiş gibi.
Ayşen: Biz iki alternatifi de sunarız. Otobüslerde birinci sınıf diye bir şey yok. Ama neden uçaklarda var? Demek ki talep var. İstiyorlar bunu. O yüzden daha farklı bir oturma düzeni de isteyebilir adam.
Seda: Evet.

Burada grup üyelerinden Ayşen birinci sınıf yolcularının beklentilerinin ne olabileceğini sorgularken, Seda birinci sınıfların farklı ücret ödediklerine dikkat çekerek daha rahat etmek isteyebileceklerini ama aynı zamanda yolcu yerleşimini de en kısa sürede yapmaları gerektiğinin altını çizmiştir. Arda da bu görüşe katılarak şimdiye kadar otobüste yolcuların yerleşimi gibi düşündüklerini sınıf ayrımına dikkat etmeleri gerektiğini ifade ederken Ayşen ise benzer şekilde uçaklarda sınıf ayrımının yolcular tarafından talep edildiğini ve farklı oturma düzeni sunmaları gerektiği görüşünü ortaya koymuştur. Bu düzenin nasıl olacağı, yolcuların beklentilerinin neler olabileceği grup üyeleri arasında aşağıdaki gibi tartışılmıştır.

Ayşen: Mesela ben birinci sınıf olsam en son kişi olmak isterim. Uçağı beklemek istemem. Öyle değil mi?

Seda: Uçağa bütün yolcuların binmesini beklemek istemezsin değil mi? Sen nasıl istersin Arda?
Arda: Ben önce binmeyi tercih ederim.
Ayşen: Uçak çok zahmetli bir şey… Çok bekliyorsun. Otobüs gibi değil. Otobüste geliyorsun otogara, koyuyorsun çantanı, hadi kalk otobüs, hadi git. Öyle değil.
Arda: Ama bizim şu anda konuştuğumuz 5 dakika gibi bir şey. O adamın onu ayarlaması bence imkânsız. Tam kılı kılına geleceğim saatime bakacağım. Uçak 6 da kalkıyor. 6'ya bir kala gelip uçağa bineceğim. Öyle bir şey değil ki uçak.
Ayşen: Öyle bir şey değil ama öyle bir beklentisi olabilir dedim.
Arda: Orada bir kere ayakta bekleyecek o adam.
Seda: Sen ilk önce binmek isterim dedin, sen en son binmek isterim dedin.
Arda: İlk gelip yerleşmek isterim şahsen.
Ayşen: Ben şahsen otobüsün içinde beklemek istemem. Oturur oturmaz kalkmasını istiyorum. Sevmiyorum çünkü insanların gelmesini beklemeyi.
Seda: O zaman şöyle düşünmek lazım. Nasıl birinci sınıftakiler beklemeyi sevmiyorsa o zaman hiç kimse beklemeyi sevmiyor. O zaman en kısa sürede herkesin yerleşmesi lazım. Çünkü birinci sınıftaki adamların önünden geçecek bu kadar insan.
Arda: Geçmesin mi?
Seda: Bunları ilk başta yerleştirsem, madem birinci sınıfların da rahatlığını düşünüyorum. Şu kadar insanı onların önünden geçireceğim.
Ayşen: Az önce dediğim gibi, bence ekonomi sınıfını önceden yerleştirip sonra… burada kişi sayısı da az çok pratik olacak ve çok yakınlar kapıya bakın. O kadar yakınlar ki kapıya. Önemli olan aslında şu kısmı (ekonomi) yerleştirmek… Kalabalık kısmı yerleştirince bunlar ne ki hemen iki dakikada yerleşir buraya. Hosteste yardım eder.
Seda: Mesela siz kendinizden düşünün. Biz mesela otobüste özellikle kapı açılan kısma bindiğin zaman, sürekli kapı açılıyor insanlar önünden geçiyor. Ben hoşlanmıyorum mesela. O yüzden her zaman en öne oturmayı tercih ediyorum ki arkamdan gelen yolcular benimle temas etmesin onları görmeyeyim. Sürtünmesinler yanımdan geçmesinler. Ben öyle tercih ediyorum mesela. Ki bunların hepsi bunların yanından geçecek.
Arda: En son mu bindirelim onları?
Ayşen: Bir de bunlar çok az kişi ve kapıya çok yakınlar. Yani önemli olan şuradaki fazlalığı atmak… Yani bu fazlalıktan sonra bunları yerleştirmek çokta zor olmasa gerek diye düşünüyorum. Çünkü kapıya çok yakınlar yani.
Seda: Bence en son yerleştirelim.
Ayşen: Dediğim gibi ilk başta ekonomi sınıfını yerleştirip daha sonra birinci sınıfı yerleştirebiliriz.
Arda: Öyle olabilir.

Öğretmenlerden Ayşen eğer birinci sınıf yolcu olsaydı beklemeyi sevmediği için uçağa en son binmeyi tercih edeceğini söylemiştir. Ayrıca bunun yolcuları yerleştirmek için de kolaylık sağlayacağını çünkü birinci sınıf yolcuların çok az olduklarını ve kapıya yakın oturduklarının altını çizmiştir. Arda ise ilk olarak yerine yerleşmek istediğini söylerken Seda birinci sınıfların rahat etmeleri açısından en son yerleştirmeleri gerektiğini ifade etmiştir. Seda kendisinin yaptığı otobüs yolculuğu deneyiminden hareketle en önde oturup da önünden bir sürü yolcunun geçmesini ve onlarla bir şekilde temas etmek istemeyeceğini belirtmiştir. Grubun diğer üyeleri de Seda'yı destekleyerek bu konuda ortak bir karara varmışlardır. Bundan sonraki süreçte grup üyeleri birinci sınıf yolcuların ekonomi sınıfından sonra uçağa alındığında bu kez de birinci sınıf yolcuların uçağın dışında diğerlerini beklemeleri gerektiğini öne sürerek alınan son kararı yeniden tartışmaya açmışlardır.

> **Seda:** Bir de şöyle düşünme gerekiyor. Tamam, birinci sınıfı şimdi memnun edebilmek adına diğer yolcuları yerleştirdik. Bunları en son yerleştirdik diyelim ki. Bu arada tamam buradaki rahatsızlığı düşündük ama bir de bunları beklerken bu kadar kişinin binmesini bekleyecek bu adamlar dışarıda. Bir de öyle düşünün.
> **Arda:** Onu dedim ben de biraz önce. Altıya bir kala gelip de hemen yerim hazırmış geçeyim olmayacak. Bu adam on dakikayı ha içeride beklemiş ha dışarıda beklemiş. Mutlaka bekleyecek. Ayakta beklemektense…
> **Seda:** Yani o zaman şunu düşünmek lazım. Dışarıda beklemesi mi daha iyi olur bir kişinin kendisi için…
> **Arda:** Elinde valiziyle…
> **Seda:** Elinde valiziyle, içeride beklemesi mi?
> **Ayşen:** Yani haklısınız ama atıyorum, ekonomiyi birinci sınıfı ayrı ayrı almasak grup grup yapsak birinci sınıftakilerin bazıları yine bekleyecek.
> **Seda:** Yine bekleyecek ama oturarak bekleyecek.
> **Arda:** Bence üç farklı cevap olabilir. Birincisi o ilk düşündüğümüz, sınıf ayrımı yapmadan normal sıralamak…
> **Ayşen:** Birinci sınıf kimdir? Ne zaman gelir bu adam havaalanına?
> **Seda:** Yani böyle hani işadamları var, özel şirketlerde çalışanlar…
> **Ayşen:** Bunların özel arabaları yok mu özel araçları yok mu?
> **Seda:** Özel araçları ile geliyorlar ama beklediği yere kadar araçları girmiyor ki. Araçlar havaalanının girişinde indiriyor yolcuyu. Ondan sonrası onlara kalmış bir şey.
> **Arda:** Bir de şey var. İşadamıysa zaten ve çok önemli dakik bir işi varsa jet tutuyor zaten.
> **Seda:** Konuyu çarpıtmayalım (gülüşmeler).
> **Arda:** Yani birinci sınıfta sadece iş adamları oturuyor değil yani.
> **Seda:** Birinci sınıftaki adamın havaalanındakilerden beklentisi uçağa bindikten sonraki koşullarda rahat etmesi değil mi? Uçağa binene kadar geçen sürede şirketin ona sağlamış olduğu rahatlıktan ne yapar? Memnun olur.
> **Ayşen:** Eğer önce ekonomiyi değil de birinci sınıfı yerleştirirseniz ekonomi yerleşene kadar birinci sınıfın önünden geçecek. Hostes olarak ben bu insanlara nasıl yardımcı olabilirim önlerinden hala insanlar geçerken? Bu durumda sadece koltuğunda oturur.
> **Seda:** Şimdi uçak şirketleri birinci sınıfa yolcu alıyorum diye uçağa bindiği andan itibaren birinci sınıftır bu. Uçağa binmeden önceki…

Arda: Bana kalırsa bileti aldığından itibaren birinci sınıftır.
Seda: O zaman, ama ne olacak? Mecburen herkes gibi bunlarda…
Arda: Parayı verdiği anda o iş bitmiştir bence.
Ayşen: Demek istediğim şu. Az önce yanlış anladın Seda. Oturduğu anda hizmet almak ister dedin ya. Mesela birinci sınıf D ile ekonomi F'yi yerleştirdik ya, bu D'deki adam bir talep bekliyor ama ben uçağı doldurana kadar bununla ilgilenemem.
Arda: Oturduğu zaman ne işi olabilir ki onun? 5 dakika da ne isteyebilir ki o adam? Bence bir şey istemez.
Seda: Bizim burada o kişilerin rahatlığını konforunu düşünmemiz gerekiyor.
Arda: Artı zaman…
Seda: Zamanını da düşünmemiz gerekiyor. Yani bu adamların buraya ilk başta mı gelmesi onlar için daha iyi olur, sonra gelmesi mi? Bence önünden sürekli sürekli insanların geçmesi hoş olmayacaktır. Siz mesela bir otobüsün en arkasında oturduğunuz zaman sürekli kapı açılıp kapanıyor, sürekli önünüzden insanlar geçiyor.
Arda: Ama burada kapı sürekli açılıp kapanmıyor.
Seda: Açılıp kapanmıyor ama bildiğimiz otobüs gibi düşünelim. Sen burada (birinci sınıf) oturuyorsun, bu kadar insan sürekli senin önünden geçiyor sana sürtüne sürtüne.
Arda: Sürtünmez çünkü hizasına bak. Buranın koridorunu geniş yapmışlar.
Seda: Aaa evet.
Arda: Buranın koridoru geniş, koltuklar geniş. Buradan bir kişi geçecek ve geçen kişi kesinlikle sürtmez bu adamlara.
Ayşen: Ben birinci sınıf olsaydım önümden birilerinin geçmesini istemezdim açıkçası.
Seda: Ben de istemezdim.
Ayşen: Kendimi düşünüyorum. Ben otobüsteyken beklemeyi sevmiyorum.
Arda: Dışarıdayken önünden böyle 26 lı insanların geçmesini ister miydin peki? Ben onu da istemem şahsen.

Ayşen: O zaman şöyle yaparız. Üç farklı seçenek sunarız. Bir tanesi de birinci sınıfa özel bir oturma planı düzenleyebiliriz. Ama benim düşündüğüm şey bu insanları bu şekilde oturtabilmek için dışarıda bir planlama yapılması gerekiyor.

Yukarıdaki alıntılar gösteriyor ki grup üyelerinden Seda birinci sınıf yolcuları içeride beklemezlerse dışarıda beklemeleri gerektiği üzerine vurgu yaparken Arda kendisinin önce binmeyi tercih edeceğini dışarıda el bagajıyla ayakta beklemektense oturarak yerinde beklemenin daha iyi olacağını ifade etmiştir. Daha sonra birinci sınıf yolcuların kimler olduğu, onların beklentileri ve beklentilerin uçağın içinde mi yoksa dışından itibaren mi karşılanması gerektiği gibi birçok faktör tartışılmış ama kesin bir karara varılamamıştır. Bunun üzerine grup üyelerinden Ayşen de Arda gibi üç farklı alternatif (*sınıf gözetmeksizin, ekonomi sınıfı önce veya birinci sınıf önce*) üzerinde düşünebileceklerini fakat yolcuları uçağa yerleştirmek için dışarıda bir planlama yapılması gerekliliğine dikkat çekmiştir. Dışarıda yapılacak planlama ile ilgili konuşmalar aşağıdaki gibi gelişmiştir.

> **Seda:** O planı nasıl yapacağız?
> **Ayşen:** Bu kişiler kendi kafasına göre sıra olmayacak. Mesela biz çocuklara ne diyoruz? Önceden sıraya sokuyoruz. Kısadan uzuna doğru sıralanıyorlar ama onun öncesinde bir plan var. Sen bu adamlar kendi biletine bakıp evet ben A6yım sen A7sin, gel benim önüme demez. Öyle değil mi? Dışarıda bunu planlayan birisinin olması lazım madem bu çok önemli.
> **Arda:** Tamam onu da biz düşünelim o zaman. Nasıl yapacağız? O adama da biz söyleyelim, şu şekilde insanları sıraya sok, oradan gelsinler. Sen yolla.
> **Seda:** Şöyle yapılabilir. Bence uçakların binme yerlerinden önce aynı bu şekilde şablon çizilip, yani herkes o sırada girebilir. Nasıl? Mesela bizim okullarımızda öğrencilerin taşıt servisleri için, karışıklık olmasın diye herkesin yeri belli olsun diye hemen bekledikleri yerin karşısında duvar var. Duvara mesela plakasını yazıyor. Servis geldiği zaman orada duruyor. Onu takip eden öğretmen de onun orada olduğunu biliyor ve oraya gidiyor.
> **Arda:** Evet o mantıklı.
> **Seda:** Mesela bu uçaksa, uçak burada duruyor. Uçakta en öndeki burada en arkada kalacak şekilde…
> **Arda:** Ama pistte öyle kalıcı bir şey olmaz ki.
> **Seda:** Uçağın şekline göre değişir o.
> **Arda:** Uçak sonuçta her zaman aynı yerde durmuyordur.
> **Seda:** Uçak tabii aynı yerde durmuyordur. Doğru.
> **Arda:** Orası pist…
> **Seda:** Ama illa üzerine bir çizim yapmalarına gerek yok. Uçak modeline göre böyle plastiklerden bir şeyler yapıp oraya yerleştirebilirler, uçak nerede durduysa serebilirler yani hemen.
> **Arda:** O değişik bir şey o zaman.
> **Seda:** Güzel bir şey olur.
> **Arda:** Güzel bir şey olur. Ya da yansıtsınlar o daha güzel olur.
> **Seda:** Evet. Yukarıdan yansıtılabilir.
> **Arda:** Herkes kendi koltuğunun olduğu yere ayağını bassın.
> **Ayşen:** Yalnız ben dinlemedim. Şuraya bir şeyi siyah siyah yazmışlar da acaba niye dedim.
> **Arda:** Şey yaptık ya. Şunun (uçağın koltuk düzeni) aynısını, uçak şeklini değil de, şöyle oturdukları koltuğu binecekleri yere ya da sıra olacakları yere, hani daha kolay sıra olsunlar diye şöyle yansıtsak dedik. Ya da bir şey atsak…
> **Seda:** Bizim zaten yapacağımız, oluşturacağımız planın aynısı oraya yansıtılabilir. Önemli olan bizim önce planı oluşturmamız.
> **Arda:** Tamam. Karar verelim o zaman.

Grup üyelerinden Ayşen yolcuları uçağa almadan önce onların belli bir sıra ve organizasyon içinde uçağa binmelerini sağlamak için dışarıda bunu planlayan birinin olması gerektiğini söylemiştir. Bunun üzerine Seda kendi okul-servisi deneyiminden hareketle uçak pistlerine yolcuların nerede durması gerektiğini gösterir kalıcı bir şablon çizilebileceğini ve yolcuların bu şablon üzerinde sıralanabileceği fikrini ortaya atmıştır. Fakat Arda yolcuların uçağa alındığı yerde kalıcı bir şablonun olamayacağını, uçakların modeline göre bu şablonun değişebileceğini ve uçağın hep aynı yerde duramayacağını söyleyerek karsı çıkmıştır. Bunun üzerine Seda da bu fikre katılarak her uçağın modeline göre hemen serilip kaldırılacak *plastik bir şablon* yapılabileceğini önerirken, Arda ise bu fikri daha da geliştirerek şablonun yere yansıtılabileceğini söylemiştir. Öğretmenler yolcuların uçak dışında sıra olabilmesi için teknolojiden de faydalanarak her yolcunun yere yansıtılmış şablon üzerinde kendi koltuğunun olduğu yere basarak sıra olabileceği bir sistem konusunda ortak bir fikre ulaşmışlardır. Daha sonra öğretmenler farklı oturma planları üzerinde su şekilde tartışmışlardır.

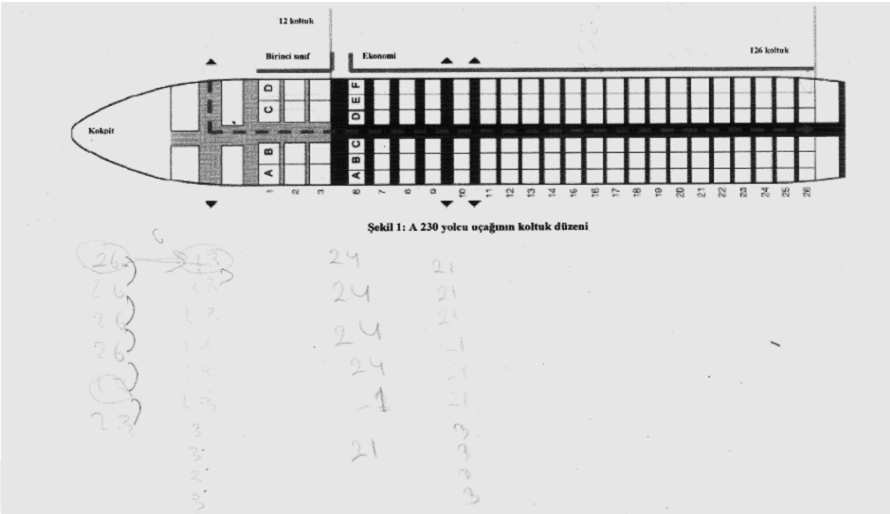
Seda: Şimdi şunu düşünüyorum ben. Birinci sınıfları en önce mi en son mu alalım ya da şu sırada (karışık) alsak ne olur? Üç seçeneğimiz var. Ya ilk başta ilk 6'sını alırız…
Arda: 12'sini
Seda: Kaç kişi var burada?
Arda: 12.
Seda: 12 koltuk var. 3 kere 4, 12. Bu ne A1 mi?
Ayşen: Hı hı…
Seda: İlk 12 kişiyi alıp, ondan sonra diğer kişileri aldığımız zaman bu adamların önünden geçecek bunlar.
Arda: Evet bu bir…
Seda: Bu bir… Şu sırada alsak, yani önce cam kenarlarından alsak…
Arda: Birinci sınıf ikinci sınıf ayırt etmeden.
Seda: Evet birinci sınıf ikinci sınıf ayırt etmeden alsak…
Arda: Bu ikinci yol.
Seda: Bu ikinci yol. Bir de ne var?
Arda: Ekonomiyi önce…
Seda: Ekonomiyi önce, ondan sonra şu 12 kişiyi yerleştirmek lazım. Şimdi şöyle düşünelim o zaman. Şunları teker teker alsak, mesela 26-26 almasak da…
Ayşen: F23 ü mü alsak?
Seda: He mesela 23 23 alsak, bunları cam kenarından itibaren yerleştirsek.
Ayşen: F23, A23, E23, B23, D23…
Seda: Kaç defada? Bakın 4 defada 3 kişiyi almamış oluyoruz. 3 kişi eksik olmuş oluyor. Yani birinci sınıftakileri almamış oluyoruz. Yani 23 kişi 23 kişi yerleştireceğiz. Ondan sonra 12 kişiyi yerleştirsek.
Arda: O da olur.
Seda: Burada aynı zamanda adamların konforunu da düşünmüş oluyoruz. Öyle değil mi?
Arda: Ama şey, zaman açısından…
Seda: Kişilerin tercihine göre de değişen bir durum aslında.

Arda: Zaman açısından uygun bir çözüm değil bu. Zamana uygun olanı birinci sınıf ikinci sınıf diye ayırmadan yapmak.
Seda: İkinci dediğimiz mi?
Arda: Evet.
Seda: Zaman açısından onu diyorum işte şimdi.
Arda: Ya sorunun bizden istediği aslında ikinci çözüm bence.
Ayşen: Ayrım yapmadan mı?
Arda: Evet. Ayrım yapmadan. Soru diyor ki, en kısa sürede bunları yerleştirin. Sorunun çözümü o. Ama biz alternatif sunabiliriz. Biz işte böyle de düşündük ama bu sizin kendi kararınıza bağlı bir şey. Birinci sınıflara ayrı muamele yapmak sizin için daha önemli ise ya en önce onları yerleştirirsiniz ya da en son onları yerleştirirsiniz. İkisini de şey yapalım. Öyle de olur böyle de olur diyelim. 3 farklı…
Seda: Şeyi hesaplıyorsun değil mi? Kaç kişi artıyor? Ne kadar sürede alır?
Ayşen: Normal Arda'nın dediği gibi yapsak, 26-26-26-26. 4 tane 26 oluyor. Sonra 23-23 oluyor.
Arda: Evet.
Ayşen: Değil mi? İlk önce ekonomi sınıfını koysak, kaç tane 23 olacak? 6 tane mi?
Seda: Hı hı.
Ayşen: Sonra ne olacak 3-3-3-3 mü olacak? Belki bu daha da sekteye uğratabilir (sınıf ayrımı yapmak).
Arda: Zaman açısından bu daha mantıklı ya... (Ayşen' in kırmızı ile yazdığı yere bak)
Seda: Evet. Bir kere de 26 kişiyi yollayacağız bak. Bunu kaç sefer yapacağız? Bunu 1-2-3-4…
Ayşen: Ama şu 26 kişinin yerleşmesi ile şu 23 kişinin yerleşmesi aynı sürmeyecek. Bu daha kısa sürecek. O da var. Yani şunla şunun süresi aynı değil ki.
Seda: Evet o daha kısa sürecek. Arada bak 3 kişilik bir gönderim farkı var.

Grup üyeleri yukarıda üç farklı oturma planı üzerinde tartışmışlardır. Bunlar sırasıyla birinci sınıfın önce yerleştirilip arkasından ekonomi sınıfının alınması diğeri cam kenarlarından başlayarak sınıf ayrımı yapmaksızın yolcuların alınması ve son olarak ise ekonomi sınıfının önce yerleştirilip arkasından birinci sınıfın yerleştirilmesi seklindedir. Öğretmenlerden Arda zaman açısından uygun olan çözümün sınıf ayrımı yapılmayan ikinci çözüm olacağı şeklinde fikrini ortaya koymuştur. Arda soruda en kısa sürede yerleşim yapılmasının istendiğini bu yüzden farklı alternatifler sunabileceklerini ve son kararı hava yolu şirketine bırakmayı önermiştir. Grup üyeleri sondan başlamak şartıyla iki sınıfı *aynı anda yolladıklarında* 26-26-26-26-23-23 olacak şekilde altı grup, *ayrı ayrı yolladıklarında* ise 23-23-23-23-23-23-3-3-3-3 seklinde on grup olacağını ve sınıf ayrımı yapmanın daha fazla zaman kaybına yol açacağı tahmininde bulunmuşlardır. Devamında zaman açısından bir değerlendirme yapılırken grup üyelerinden Arda uçak krokisi üzerinde birinci sınıf ile ekonomi sınıfı arasında 4 ve 5 numaralı koltukların yer almadığını fark etmiş ve bu durum şu şekilde bir tartışmayı başlatmıştır.

Seda: Peki zaman açısından…
Arda: Çokta fark etmez bence. Çünkü şurada aralarda hep en baştaki adamı bekleyecekler. Burada D6'daki adamı bekleyecekler. Niye 6 olmuş burası? 1,2,3… 4,5 yok şurada bak. Boşluk. İki koltukluk yer mi boş acaba burada? Onu mu anlatıyor?
Ayşen: Evet (koltukları saymaya başlayarak).
Arda: 26 değil mi orası? Şurada 21 çarpı 6 tane var. 126. Hmm.
Ayşen: 24 sıra var.
Arda: Bir şey fark etmez biz metodu yaptıktan sonra.
Ayşen: Bir dakika 24 sıra varsa şurası 24. 24-24-24-24.
Arda: O bir şey fark ettirmez. İki kişi oradan da eksilecek.
Ayşen: Şuralar ne olacak o zaman 21-21 mi olacak?
Arda: 22-22. 22 dediğimiz yer neresi? Pardon. 21-21.
Ayşen: 21 olacak tabii ki. Burası nasıl olacak? 21-21-21-21-21-21. 6 tane 21 (ekonomi sınıfı). 1-1-1-1 mi olacak?
Arda: 1-1 ne?
Ayşen: Bir dakika biz bunu nasıl düşünmüştük?
Arda: 3-3 yine aynen devam ya.
Seda: 3-3 aynı. Sadece iki eksik (ekonomi sınıfından).
Ayşen: Ha o ekonomi sınıfı tamam. Şurada 21 koltuk var. Ha evet 3-3 olacak 1-1 olmayacak.
Arda: Biz burayı 23 koltuk varmış gibi düşündük. 4-5 olmadığını şimdi fark ettik.
Seda: Ya o önemli değil. Önemli olan şey, yerleşim…
Ayşen: Belki şu iki grup arasındaki mesafenin fazla olması tekrar iki gruba dönmemizi gerektirebilir (ekonomi sınıfı ve birinci sınıf arasındaki mesafe). Gerektirebilir mi acaba?
Arda: İki grup dediğin?
Ayşen: Yani ekonomi ve birinci sınıf…
Arda: Yoo. Bence gerek yok. Zaman açısından bence en pratik olanı yine 24-24…
Seda: Şimdi arkadaşlar o zaman şimdi şöyle düşünelim. İki koşulda da şurayı şöyle bölsek diyelim ki (ekonomi sınıfı ve birinci sınıf). Biz ilk 26 değil artık. 24 değil mi?
Arda: Hı hı. Karar verdik 24 müş (gülüşmeler). Geçte olsa fark ettik.

Öğretmenlerden Arda'nın soru metnini incelerken uçak krokisinde 4 ve 5 numaralı sıraların olmadığını fark etmesiyle grup üyeleri uçakta bir sütunda 26 sıra yerine aslında 24 sıranın olduğunu belirlemişlerdir. Değişikliğin sadece ekonomi sınıfını etkilediğini birinci sınıfla ilgili bir değişikliğin söz konusu olmadığını tespit ettikten sonra öğretmenler aşağıdaki şekilde de görüldüğü gibi 26-26-26-26-23-23 olarak belirledikleri altılı grubu 24-24-24-24-21-21 olarak, 23-23-23-23-23-23-3-3-3-3 olarak belirledikleri onlu grubu da 21-21-21-21-21-21-3-3-3-3 olarak düzeltmişlerdir.



Şekil 27: *Sınıf Ayrımı Yapılmadığında ve Yapıldığında Oluşacak Gruplardaki Kişi Sayılarındaki Düzeltmeler*

Bu bölümde grup üyeleri öncelikle bir kişinin en arkaya gitmesinin ve yerleşmesinin yaklaşık 40 saniye süreceği tahmininde bulunarak gerçek modelden matematiksel bir model oluşturma yolunda önemli bir adım atmışlardır. Birinci sınıf ve ekonomi sınıfı hakkında uzunca bir süre tartışan öğretmenler sınıf ayrımı yapmadan yolcuları almanın daha kısa süreceğini tahmin etseler de birinci sınıfın fiyat farkından dolayı beklentileri olabileceği düşüncesi ile üç farklı alternatifi olan bir çözümü havayolu şirketine sunmaya karar vermişlerdir. Öğretmenler yolcuların uçağa alınmadan önce uçak dışında organize edilmelerinin ve bununda planlanması gerektiğini vurgulamışlardır. Öncelikle uçak dışında kullanılacak kalıcı bir şablon fikri ortaya atılsa da uçak modellerinin farklı olduğu ve uçakların sabit yerleri olmadığı gerekçesiyle bu fikirden vazgeçilmiştir. Daha sonra her uçak için portatif bir plastik şablon fikri üzerinde tartışan öğretmenler, yerleşim planının daha teknolojik olan yere yansıtılma şeklinde hazırlanmasına karar vermişlerdir. Dışarıda yapılacak sıralama konusunda fikir birliği sağlandıktan sonra üç alternatif üzerinde tartışmaya devam etmişlerdir. Bunlar ilk olarak birinci sınıfın önce yerleştirilip arkasından ekonomi sınıfının alınması; ikinci olarak cam kenarlarından başlayarak sınıf ayrımı yapmaksızın yolcuların alınması ve üçüncü olarak ekonomi sınıfının önce yerleştirilip arkasından birinci sınıfın yerleştirilmesi seklindedir. Grup üyeleri zaman açısından uygun olan çözümün sınıf ayrımı yapılmayan ikinci çözüm (24-24-24-24-21-21 olacak şekilde altı grup) olacağını tahmin etseler de son kararı uçak şirketinin yetkililerine bırakmışlardır. Bu aşamada bireyler sözlü ifadeler yerine yazılı dış temsiller kullanmaya başlayarak matematiğe geçişi tamamlamışlar yani matematikselleştirme aşamasını gerçekleştirmişlerdir.

4.3.4 Matematiksel İşlemlerle Çalışmak

Grup üyelerinden Seda belirlemiş oldukları üç farklı oturma alternatifi içinden birinci sınıf ve ekonomi sınıfını aynı anda yerleştirmek ile ayrı ayrı yerleştirmek arasındaki *zaman farkına* bakmayı önererek aşağıdaki şekilde yeni bir tartışmayı başlatmıştır.

> **Seda:** İlk 24 kişiyi buraya (ekonomi sınıfı ve birinci sınıf birlikte) yerleştirmek için geçen zaman ile önce şurayı (ekonomi sınıfı) ondan sonra burayı (birinci sınıf) yerleştirmek için geçen zaman arasındaki farka bakalım. İkisinin arasındaki fark şu: Sıradaki insanlar her ikisine de yollanacak mı? Yollanacak.
> Birinci durum diyelim. Birinci durum, ikinci durum…
> **Ayşen:** Hı hı…
> **Seda:** Birinci durumda birinci sınıf ekonomi sınıfı var. Bunların hepsi beraber… Şuraya parantez içinde beraber yollanması…
> **Ayşen:** Yani şu şekil 24-24-24-24…
> **Arda:** Evet.
> **Seda:** Evet beraber... İkinci durumda ayrı yollanması… Birinci sınıf ve yine ekonomi… Şimdi her ikisinde de bu… Kaç kişi var burada? (ekonomi sınıfı)
> **Arda:** 24. Yok 21.
> **Ayşen:** 21 kişi var.
> **Seda:** 21 kişi. Bu 21 kişinin şuraya yerleşmesi, diyelim ki ne kadar zaman alsın? a kadar zaman alsın.
> **Arda:** Evet.
> **Seda:** Sonuçta bu 21 kişinin buraya yerleşmesi ile hep beraber yolladığımızda bu 21 kişinin buraya yerleşmesi a kadar zaman alacak. Öyle değil mi? Sadece farklılık şu 3 kişiden (birinci sınıftaki) kaynaklanacak.
> **Ayşen:** Peş peşe geliyor ya. Sonuçta bu buraya gidene kadar bu buraya yerleşecek.
> **Seda:** Peş peşe geliyor.
> **Arda:** Bence ondan ziyade bekleme zamanına bakmamız lazım. Şimdi birinci kişi bindi ya, nereden bindi o birinci kişi? (Ayşen eliyle giriş kapısını gösterir)
> **Seda:** İşte ben o yüzden dedim en başta bunlara zaman koysak diye.
> **Arda:** Bak. Birinci kişi bindi ya buradan (giriş kapısı). Birinci kişi bindi arkasındakiler de yürüyor onunla beraber. Yürüyo[r]lar yürüy[r]olar yürüyo[r]lar…
> **Seda:** Herkes kendi yerinde durdu.

Arda: Herkes kendi yerinde durdu. Bak şuradaki adamın peşindeki adam bunu bekleyecek. Onun haricindekiler burada bekleme (koridor) yok hiç.
Ayşen: Nasıl peşindeki onu bekleyecek?
Seda: Kimin peşindeki bekleyecek? Hiç kimse birbirini beklemeyecek ki. 2. sırada yollananlar mı?
Arda: Buraya kadar yolladıysak ya (6. Sıra). Buraya kadar yolladıysak buradaki şu F yerleşecek ya, bak, F yerleşene kadar bu (arkadan gelen) bekleyecek. Öbür sırayı da yolladığımızı düşünüyorum ben ya.
Seda: Ha. Arkasındakiler şey yaptı.
Arda: Hee... Bak, yani şu adamla (F1) şuradaki, yani E26, peş peşe değil mi bunlar?
Seda: Hı hı…
Arda: Buradaki adam (E26) bunu (F6) bekleyecek. Bunların bekleme zamanına bakmamız lazım sadece. Bu geçtiği anda, bence 5 saniyede yerleşir. Yani şöyle bak (ayağa kalktı). Biz seninle arka arkaya yürüyoruz. Sen en arka sıraya gideceksin. E26'ya gideceksin. Ben de kaçtayım F6'dayım. Buraya yerleşeceğim. Biz peş peşe değil miyiz?
Seda: Evet.
Arda: Şimdi ben geldim (F6'ya), şunu şöyle koydum (bagajını üste yerleştirir gibi yaparak) ve kenara çekildim. Ondan sonra sen en arkaya kadar gidiyorsun ve büyük ihtimal ben yerleştiğime göre benden daha önce giden adamların hepsi yerleşmiştir.
Seda: Hayır. Haa önce gidenler yerleşmiştir.
Arda: Koridor açık yani…
Seda: Evet.
Arda: Şimdi sen benim arkamdasın ya.
Seda: Evet.
Arda: Ben yerleşip kenara çıktığım anda (ayakta göstererek), 5 saniye 10 saniye, neyse ona bakalım diyorum ben, ondan sonra senin yürüdüğün koridor bomboş. Değil mi?
Seda: Evet.
Arda: Orada kaç saniye geçiyor onu söyleyelim işte.
Seda: Ama bizim o ikinci sırayı yollayabilmemiz için en son yolladığımız kişinin yerine oturmasının beklenmesi gerekiyor.

Seda yolcular sınıf ayrımı yapılmadan beraber alındığında (21+3) ekonomi sınıfındaki 21 kişinin hepsinin yerleşmesi için geçen zamanın *"a"* olarak kabul ederek toplam süreye bakmayı önermiştir. Arda ise buna itiraz etmiş toplam süreye değil gönderilen gruplar arasındaki bir kişilik bekleme zamanına bakmayı önermiştir. Seda önerisini açıklarken ekonomi sınıfı ve birinci sınıf ayrı ayrı yollandığı zaman ekonomi sınıfı 21-21-21-21-21-21 yerleşecek, beraber yollandıklarında ise bir seferde 21+3 kişi gönderileceğinden burada artı 3 kişilik bir bekleme olacağını söylemiştir. Beraberde yollansalar ayrı ayrı da yollansalar ekonomi sınıfındaki 21 kişinin aynı anda yerleşeceğini sadece beraber yollandıklarında birinci sınıftan kaynaklanacak 3 kişilik farka bakmaları gerektiğini ifade etmiştir. Arda ve Seda arasındaki bu tartışma aşağıdaki şekilde devam etmiştir.

> **Arda:** Hani zaman olarak şöyle gönderilmesi mi (iki grup birlikte), şöyle gönderilmesi mi (ayrı ayrı)? Benim anladığım şu bak. Benim anlatmak istediğim şu. Burada 1,2,3,4,5, 6' lı grup var. Burada da 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 tane var.
> **Seda:** Evet.
> **Arda:** Aradaki zamanlara bakalım diyorum ben yani.
> **Seda:** İşte ben de onun için bunu yaptım ya.
> **Arda:** Hah oradaki zamana a dedik ya. Artısını bu şekilde, bir kişi olarak belirleyelim sadece.
> **Seda:** Bir kişi olarak… Ben orada şunu anlatmaya çalıştım aslında a diyerek. Şu ikisinde de…
> **Arda:** Sen tamamına a dedin.
> **Seda:** 24 kişi var ya. Buraya bir 24 kişi yollamakla, beraber yollandığında 24 kişi oluyor. Beraber 24 kişi yollandığında 21 kişi buraya (ekonomi sınıfı) oturacak. Öbür durumda da zaten şuraya, ayrı ayrı yolladığımızda da zaten ilk 21 kişi gelecek. Yani beraber yolladığımızdaki 21 kişinin, şur[a]daki 21 kişinin yerleşmesi ile ayrı yolladığımızdaki 21 kişinin yerleşmesi aynı zamanda olmayacak mı?
> **Arda:** Evet.
> **Seda:** Sadece gerinde 3 kişi olacak değil mi?
> **Arda:** Evet doğru…
> **Seda:** Şimdi ikisinde de 21. Şimdi beraber yollandığı zaman bu 21. Şuradaki 3 kişi de yerleşecek değil mi buraya. Şimdi şunu düşün. Eğer ben beraber yolluyorsam, buraya 21 kişiyi yolladım ama ardından 3 kişinin daha oturması gerek. 3 kişilik bekleme var burada, değil mi? Peki bunun ne farkı var? Burada 21 kişiyi yolladıktan sonra ikinci 21'i yollayacağız biz değil mi?
> **Arda:** Evet.
> **Seda:** Burada bekleme yapmayacağız.
> **Arda:** Tamam. Ama yine şey olmayacak mı? Sen bu 21'i yolladıktan sonra koridor hemen açık değil yine. Bu adam F6 oturana kadar yine bir zaman alacak.
> **Seda:** Tabiî ki de bekleyecek.
> **Arda:** Yine bekleyeceksin yani.
> **Seda:** O zaman orada beklemek… Bu oturana kadar… Ama öbür türlü de 3kişi beraber yerleştirirsek şuradaki (C1) oturana kadar bekleyeceğiz.
> **Arda:** Her halükarda bana kalırsa en baştaki, yani en son binen adamı bekleyeceğiz.
> **Seda:** Evet en son binen adamı bekleyeceğiz.
> **Arda:** En son binen adam yerleşene kadar bekleyeceğiz. En son binen sayısı burada daha az. Ayrı ayrı değil beraber olduğunda daha az en son adam biniyor.

Arda yolcuların ayni anda gönderildiğinde altı grup, ayrı ayrı gönderildiğinde ise on grup oluştuğu için surenin on kişilik grupta daha uzun zaman alacağını çünkü sureyi her grubun sonundaki kişinin belirlediğini savunurken, Seda bunlar arasında herhangi bir fark olmayacağını çünkü beraber 24 kişi yollamakla ayrı ayrı 21 ve 3 kişilik gruplar göndermenin ayni şey olduğu görüsünü ileri sürmüştür. Birbirlerini ikna edemeyen Arda ve Seda tartışmalarına aşağıdaki şekilde devam etmişlerdir

Seda: Niye daha az? Daha çok kişi eklediğin zaman en sondaki adamı daha çok bekleyeceksin ya. Çok kişi oldukları için… Bi[r] buradakini bekleyenleri düşün (F6'yı bekleyenler). Bi[r] 21 kişilik bir posta yollandı yolcular, ondan sonra pat diye bi[r] 21 daha yollayacaksın…
Arda: Hemen yollayamıyorsun.
Ayşen: Niye?
Seda: Bunun oturmasını bekliyorsun (F6).
Arda: F6'nın oturmasını bekliyorsun.
Seda: Tamam. Ama öbür türlü de bunun (C1) oturmasını bekliyorsun.
Arda: Sayalım istersen bak.
Seda: Zaman verelim diyorum işte. Çözüme kavuşturmak için zaman vermemiz lazım.
Arda: F6'nın oturmasını bekliyorsun, E6'nın oturmasını bekliyorsun. Bir sonraki 21'de…
Seda: Evet.
Arda: Bunun, bunun, bunun… 6 tane bekliyorsun (F6,E6,D6, C6, B6, A6). Artı burada da (birinci sınıf) bunu (C1) oturtuyorsun. Burada bekletiyorsun. 7, 8, 9, 10 tane bekleme kişisi var burada (D1,C1, B1, A1). Öbür türlü (birinci sınıf ve ekonomi sınıfı aynı anda) sadece 4 kişiyi bekletiyorsun.
Seda: Şimdi bak 3kişilik bekleme, buradaki ilk koyduğumuz zamanki bekleme, şuradan sonraki gelecek olan 21 kişinin yerleşmesinde etkili olacak mı olmayacak mı? (iki gurup aynı anda gönderilirse) Bunun cevabını vermemiz gerekiyor.
Arda: Bence olmayacak. Çünkü ben şöyle düşündüm. Bunları böyle bak şunu yolladık ya (F26), D1'in peşine şunu (E26) gönderdik. Peş peşeler bunlar.
Seda: Evet evet.
Ayşen: D1 buraya girdiği anda (koltuğuna yerleştiği anda), bu (E26) arkadan devam edecek.
Seda: Evet devam edecek.
Ayşen: Yani beklemeyecek.
Arda: Yani buradaki adam (E26) sadece şunu (D1) bekleyecek.
Seda: Tamam doğru diyorsun. Şu adam (E26) şu koridora (koltukların arası) girdiği anda bunun (D1) yanından geçebilecek.
Arda: Dolayısıyla 4 kişi bekleyecek yani.
Ayşen: Burada daha fazla bekleme olacak yani (iki grup ayrı ayrı yollandığında).
Arda: Evet burada 10 kişi bekleyecek.
Ayşen: Bi[r]şey diyeceğim. 1,2,3,4… bir bekleme daha olacak ama.
Arda: Evet orada bir gariplik oldu. 6 sıra yollayacağız yine.
Seda: Evet 6 sıra yollayacağız.

Arda: Ama öbüründe 10 sıra yollayacağız. Ayrı ayrı olduğu zaman 10 sıra yollayacağız.
Ayşen: Şimdi şurada Arda diyor ki, şurada 6 kişi beklenecek diyor (ekonomi sınıfı), şurada 4 kişi bekleyeceksin (birinci sınıf) ama şu iki grup tekrar peş peşe (ekonomi sınıfının iki sırası) gelecek.
Seda: Arkadaşlar bakın. Şöyle düşünün. Bir 21 kişinin şurada bunu beklemesi ile (birinci sınıfın 3 kişisi) (beraber yollanırlarsa) , bunların hepsinin 21, 21 seri yollandıktan sonra şunların beklemesi (birinci sınıftakilerin) (ayrı ayrı yollanırlarsa)… Bu 3 kişi buraya hemencecik yerleşebilir. 3 kişi yerleşsin diye bizim 21 kişiyi bekletmemiz daha çok zaman kaybı.
Arda: Bence hemen yerleşemez. Oradaki bekleme süresi sadece valizi koyup koridoru boşaltması… O buradaki 21'de de aynıdır 24'de de aynıdır bence. Valizi koyup koridoru boşaltması buradaki adam içinde aynıdır buradaki adam içinde aynıdır (D1, F6 ve F26 yı eliyle göstererek).
Seda: O zaman şöyle yapalım. Bakın hangisi zaman açısından daha az, daha çok buna karar vermemiz için biz her 21 kişinin buraya kaç saniyede yerleşeceğini hesaplayalım. Tahmini olarak yani… Değer verelim. Tamam mı?
Arda: Farkına baksak…
Seda: Tamam işte ondan sonra da farkına bakacağız. Toplamda geçen süreyi karşılaştıracağız. Birinci ve ikinci durumda…
Arda: Tamam.
Seda: Yani bizim için en doğru en kısa zaman hangisi diye… Tamam?

Yukarıdaki alıntılar gösteriyor ki bir önceki kısımda yer alan tartışma burada da devam etmektedir. Seda ekonomi sınıfında arka arkaya gönderilecek olan 21 kişilik grupların yerleşmesi sırasında bekleme olmayacağını farz ederek beklemenin sadece birinci sınıftaki 3 kişilik gruptan kaynaklanacağını düşünmektedir. Arda ise her durumda beklemenin yaşanacağını, gönderilen her grubun kendilerinden önce uçağa binen gruptaki en son kişinin yerleşmesini beklemek zorunda olduğunu ifade ederek en son binen kişi sayısının *ekonomi* ve *birinci sınıf* beraber alındığında daha az olacağını söylemiştir. Birinci sınıf D sütunu ve ekonomi sınıfı F sütununu beraber aldıklarında en son binecek olan kişi D1'in arkasından ikinci grubun ilk yolcusu olan E26'nın sadece D1'i bekleyeceğini, D1 koridordan çekildiği anda E26 ve arkasından gelen herkesin koridorda rahatça ilerleyebileceğini ifade etmiştir. Arda ilk anda altılı grupta 4 kişinin, onlu grupta ise 10 kişinin bekleyeceğini ifade etmiş, öğretmenlerden Ayşen ise buradaki mantık hatasını fark ederek altılı grupta 4 kişi değil 5 kişinin bekleyeceğini ifade etmiştir. Bekleyecek kişi sayısının 10'lu grupta kaç olacağı konuşulmadan grup üyelerinden Seda, Arda'nın dediği şekilde birinci ve ikinci durumda toplamda geçen süreyi bulup karşılaştırmayı önermiştir. Bununla ilgili öğretmenler arasında geçen tartışma aşağıdaki gibi gelişmiştir.

Seda: Bunun (yolcunun) buraya gelmesi 40 saniye. Gelip yerleşmesi mi 40 saniye diyelim?
Arda: Evet.
Ayşen: Evet oturması 40 saniye.
Seda: İkisinin arasında ne kadar fark var? Bu adam buraya geldiği anda (arkasındaki yolcu) aynı yolu alacak, biraz daha bir koltukluk daha az yol alacak ve yerleşecek. Bir koltukluk mesafeyi ne kadar zamanda alır? Arada kaç saniyelik bir fark olur?
Arda: 1,5 saniye gibi bir şey.
Seda: 2 saniye diyelim.
Arda: Tamam.
Seda: Girmesi önemli çünkü… Buraya gelip girmesi önemli (koltukların arasına). Değil mi?
Arda: Hı hı…
Seda: Biz bi kalkıp bir koltuktan diğer koltuğa giderken… (Arda ve Seda ayağa kalkarak). Bak bakalım… Saatiniz var mı?
Ayşen: Yok saatim.
Arda: (Oturdukları sandalyeleri uçaktaki koltuklar gibi mesafeli bir şekilde arka arkaya koyarak) Koltuklar böyle duruyor değil mi?
Seda: Sen oradan yürü şimdi (düzenledikleri iki sandalyenin arkasından öne doğru).
Ayşen: Peş peşe gelin bence.
Seda: Peş peşe gelelim. Saatime bak (Ayşen'e saati uzatarak). (Seda önde Arda arkada durarak) koltukların arasındaki mesafe en az bu kadar vardır değil mi?
Arda: Olmayabilir. Çünkü orası bayağı geniş bir yer ya (kendi düzenledikleri sandalyelerin arasını kastederek).
Seda: İnsanlar geçecek ya koltuklar o kadar dar değil uçaklarda benim bildiğim.
Arda: Tamam öyle olsun.
Seda: (Arkadaki sandalyeyi öne doğru hafifçe iterek) Tamam biraz daha…
Arda: Tamam öyle olsun.
Seda: Şimdi (Ayşen'e dönerek) tuttun mu?
Ayşen: Şimdi başla.
İkisi arka arkaya yürüdüler…
Seda: (Elindeki hayali çantayı üste yerleştirir gibi yaparak) şuraya yerleştim. (Arda hemen arkasında – Arda'nın yerini işaret ederek) sen oraya geçeceksin. Sen niye benim yanıma geliyorsun?
Arda: Şey açısından… Hani biz şeye bakmıyor muyuz? (Koltuklar arasındaki mesafeyi iki elini yana açıp göstererek) bu mesafeyi kaç saniyede geçiyor?
Seda: Hayıır…
Ayşen: Ama siz aynı anda yapacaksınız neredeyse biliyor musunuz? Aynı anda oturulacak bence.
Arda: Bana aynı andaymış gibi geliyor. Onun için ben şöyle dedim.

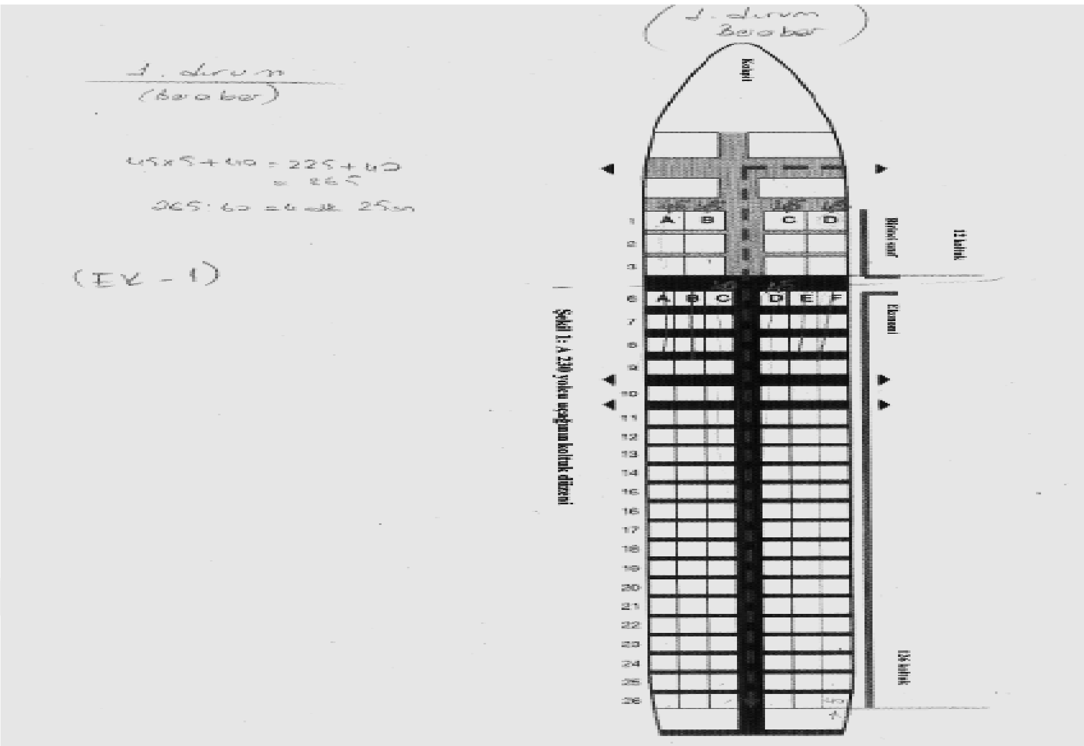
Ayşen: Uçağa giriş zamanınız farklı ama aynı anda oturuyorsunuz.
Seda: Evet.
Arda: Buradaki adamla (son koltuktakini işaret ederek) en sonra giren adamın yerleşmesi de aynı olacak yani.
Seda: Aynı olacak.
Ayşen: Uçağa farklı zamanlarda giriyoruz. Aynı zamanlarda girmiyoruz.
Seda: O zaman bizim için önemli olan ilk kişinin buraya kaç dakikada geldiği. Kaç saniyede geldiği değil mi?
Arda: Artı bir de son binenden sonra kaç saniye bekleyecek? Sadece onu bekleyecek çünkü.
Seda: Evet.
Arda: Benim söylemek istediğim 40 saniye bizi ilgilendirmeyecek zaten. O sadece toplam süreyi bulmak için. Toplam süre de lazım değil.
Seda: Evet.
Arda: İlk sen oturdun ve en son da ben oturdum ve koydum bunu (hayli el bagajını yukarı kaldırarak) buraya. Beni kaç saniye bekliyor? 5 saniye…
Seda: Seni 5 saniye bekliyordur ancak.
Masadaki yerlerine geri yerleştiler…
Seda: O zaman herkes aynı anda geliyor.

Grup üyeleri bir yolcunun giriş kapısından başlayıp en arkadaki yerine gelip yerleşmesi için gereken süreyi tahmini olarak 40 saniye olarak belirlemişlerdir. Seda en arkanın bir önünde oturan kişinin koridorda daha az yol alacağından dolayı yerine yerleşmesinin daha kısa süreceğini öne sürmüştür. Arda ve Seda arka arkaya giden iki yolcu için aradaki farkın yaklaşık olarak 2 saniye olabileceği tahmininde bulunmuşlardır. Seda iki yolcunun yerine yerleşmesini canlandırmak istemiş bunun üzerine Arda kendi oturdukları sandalyeleri uçaktaki arka arkaya olan iki koltuk gibi yerleştirmiştir. Diğer grup üyesi olan Ayşen süreyi tutarken Seda ve Arda hayali koltuklarına doğru peş peşe yürümeye başlamışlar ve yerlerine geldiklerinde ellerindeki hayali bagajları yerleştirmek için kollarını yukarı kaldırmışlardır. Ayşen her ikisinin de neredeyse aynı anda oturacağını belirtmiş ve sebebini uçağa giriş zamanlarındaki farklılık olarak göstermiştir. Diğer grup üyeleri de bu konuda hem fikir olunca Seda onlar için ilk kişinin en arka sıraya ne kadar sürede ulaşacağının bilinmesinin yeterli olacağını ifade etmiştir. Arda ise bir kişinin uçağın girişinden en arkaya gelmesi için belirledikleri 40 saniyenin toplam süreyi bulmak için gerekeceğini ayrıca farkı bulmak için en son yerine yerleşecek kişinin koltuğuna ulaştıktan sonra koridoru boşaltması için ne kadar süre gerektiğini bilmeleri gerektiğini ve bunun için de 5 saniyelik bir sure tahmininde bulunmuştur. Daha sonra grup üyeleri elde ettikleri sonuçları yazmaya başlamışlardır. Bu sonuçlarla ilgili tartışma aşağıdaki gibi gerçekleşmiştir.

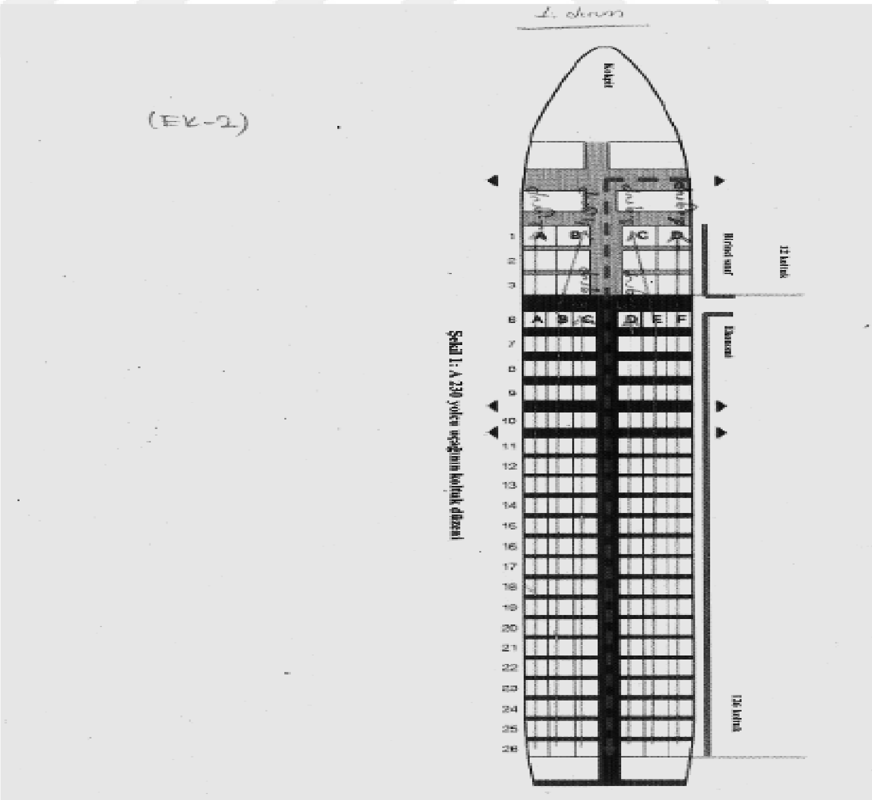
Seda: Birinci sıranın yerleşmesi… Yine birinci gurup ikinci gurup diyeyim mi?
Ayşen: Diyelim.
Seda: Evet. O zaman şöyle yapıyoruz. İlk gelen kişinin buraya gelmesi 40 saniye (uçağa girişten en arkaya gidene kadar olan zaman) , ilk burayı beklemekte 5 saniye (önündeki sıranın en sonunda bulunan kişinin yerleşip koridoru boşaltması için geçen zaman).
Ayşen: Yani 45 saniye.
Seda: İlk baştaki birinci durumda beraber yolluyorduk ama. Burası ile beraber (birinci sınıf ile beraber)
Arda: Tamam 45 saniyede yerleştirdik mi?
Seda: Burayı yerleştirdik (birinci sınıf D sütunu ve ekonomi sınıfı F sütunu).
Arda: Toplam geçen süreye bakalım o zaman.
Ayşen: Bir sıra 45 saniye sürecek yani.
Seda: Şuraya yazayım ben ya 45… (birinci sınıf D sütunu ve ekonomi sınıfı F sütunu). 45' te burayı yerleştirdik.
Ayşen: Tamam 45 de şu…
Arda: 45 de burası (birinci sınıf C sütunu ve ekonomi sınıfı E sütunu).
Ayşen: Ondan sonra bir şey değişecek ama.
Seda: Ondan sonra cam kenarını yolluyoruz.
Arda: İki tane daha 45 koy.
Seda: İki tane daha 45 koyuyorum (birinci sınıf A ve ekonomi sınıfı A, birinci sınıf B ve ekonomi sınıfı B).
Ayşen: Şimdi şu C ile D mi kaldı? (ekonomi sınıfı)
Seda: Sonra…
Ayşen: C ile D kaldı. Şimdi şöyle yaptık değil mi? D (birinci sınıf) ile F'yi (ekonomi sınıfı) gönderdik. Sonra A (birinci sınıf) ile A'yı (ekonomi sınıfı) gönderdik. C (birinci sınıf) ile E'yi (ekonomi sınıfı) gönderdik. B (birinci sınıf) ile B'yi (ekonomi sınıfı) gönderdik. Şu C (ekonomi sınıfı) ile D (ekonomi sınıfı) kaldı.
Seda: Evet. Biz önce cam kenarlarını yerleştiriyoruz değil mi? Şimdi önce şu sıra şura gitti (D-F ile A-A). Sonra bu sıra bu sıra gitti (C-E ile B-B). 45'er saniye. Sonra burası (ekonomi D)… Bunların buraya gelmesi… Buradan tekrar gelecek 40 saniyede gelecek bu adam buraya. Ama şu kadarlık (birinci sınıfın arasındaki koridor kadar) 3 kişi daha gelmeyecek. Buradan zaman şey olacak… Buradan 3 kişi gelmeyecek. Şuraya gelecek olan kişi (D26) daha az bekleyecek.
Ayşen: Yine aynı yolu yürüyecek Seda.
Arda: Yine 40 saniye. Bi 45 daha koy peşine 40 koy. (D için 45, C için 40)
Seda: Neden ona 45 sonra 40 koyuyorsun?
Arda: Çünkü sonradan onu (C) bekleyecek kimse yok. 5 saniye bekletmeye gerek yok.
Seda: Ama aradakini bekliyor. Ha 40 saniye… Oraya gelmesi 40 saniye (girişten oturduğu yere).
Arda: O şey ya. 40 saniye + 5 ya.
Seda: 45, 40 tamam… Beraber olması durumunda…
Arda: 45 ile 6'yı çarp.
Ayşen: 180, 6 tane 45.
Seda: 45 çarpıı… Kaç tane? 5 tane 45 var.

Arda: 5 tane… artı 40.
Seda: 5 kere 45, 225. Artı 40, 265 saniye.
Ayşen: Kaç dakika ediyor yaklaşık olarak? 4 dakika… 4 küsür oluyor.
Arda: Ben de 5 dakika gibi bir şey düşünmüştüm şahsen. 5 dakikada yerleşirler diye düşünmüştüm.
Ayşen: 25 saniye mi oluyor? 4 dakika 25 saniye. Bu beraber olma durumunda.
Seda: 1. durum diyelim. Beraber diyelim. Beraber geliyorlar.
Arda: Yaz şimdi. 45 çarpı 5 artı 40. Eşittir 225 artı 40 eşittir 265 saniye.
Ayşen: Birinci sınıf ile ekonomi sınıfı aynı anda geçecek.
Seda: Beraber olunca 45 çarpı 5 artı 40… (işlemi yaparak) 265 bölü 60. 4 dakika 25 saniye.

Öğretmenler uçağa girişten en arkaya gidene kadar geçen süreyi 40 saniye olarak, arka arkaya gönderilecek gruplarda öndeki grubun en sonunda bulunan yolcunun yerine geçip koridoru boşaltması için gereken bekleme süresini de 5 saniye olarak belirlemişlerdir. Birinci durumda yolcuların sınıf ayrımı yapılmadan beraber uçağa alınma durumlarını incelemişlerdir. Yolcuların yerleşimini önce cam kenarlarındaki birinci sınıf D ve ekonomi sınıfı F (*ilk sıra*), birinci sınıf A ve ekonomi sınıfı A (*ikinci sıra*) şeklinde, daha sonra ortadaki birinci sınıf C ve ekonomi sınıfı E (*üçüncü sıra*), birinci sınıf B ve ekonomi sınıfı B (*dördüncü sıra*) olacak şekilde düzenlemişlerdir. En sona da koridorları bırakmışlardır. Koridorda yer alan ekonomi sınıfı D (*beşinci sıra*) ve arkasından ekonomi sınıfı C'yi (*altıncı sıra*) göndermişlerdir. En son gelecek olan ekonomi sınıfı C sütunun arkasından gelecek kimse olmadığı için 5 saniyelik bekleme süresini o grup için kullanılmamıştır. Diğer 5 grubun arkasından gelecek bir grup olduğu için bunların hepsine artı 5 saniye eklemişler ve bir grubun yerine yerleşip koridoru boşaltması için gereken süreyi 45 saniye olarak belirlemişlerdir. Uçağa en son girecek olan C grubu için bu süre 40 saniye olarak belirlenmiştir. Bu durumda altılı grubun uçağa yerleşmesi için gereken süre 45.5 + 40 = 265 saniye olarak hesaplanmıştır. 265 saniye ise 4 dakika 25 saniye olarak dakikaya çevirmişlerdir. Arda buldukları sonucun kendi tahminine yakın olduğunu kendisinin de yaklaşık olarak 5 dakika gibi bir süre düşündüğünü belirtmiştir.



Şekil 28: *Öğretmenlerin Birinci Durum İçin Yaptıkları Çözüm*



Şekil 29: *Öğretmenlerin Birinci Durum İçin Belirledikleri Grupların Uçak Krokisi Üzerinde Gösterimi*

İlk durumda yolcular arasında sınıf ayrımı yapmaksızın
pencerelerden koridora ve arkadan öne doğru yerleştirilmesini
esas aldık. Buna göre bir yolcunun giriş kapısından en arka
sırasına ulaşması için geçen sürenin ortalama 40 sn olduğunu kabul
ettik. İlk olarak pencere kenarındaki "Birinci Sınıf D" ile "Ekonomi
Sınıfı F" peşpeşe gelmek koşuluyla 24 kişi 40 sn de yerlerine
yerleşmektedir. Bu grubun ardından gelen D1 yerleşirken E26 nın
beklemesi için gereken sürenin en az 5 sn olacağını düşündük. Bu
durumda birinci 24 kişinin yerleşmesi için toplam 45 sn zaman
alacağını gördük.

1.grup → F-26 ⟷ D-1 (45 sn)
2.grup → A 26 ⟷ A-1 (45 sn)
3.grup → E-26 ⟷ C-1 (45 sn)
4.grup → B-26 ⟷ B-1 (45 sn)
5.grup D-26 ⟷ D-6 (45 sn)
6.grup C-26 ⟷ C-6 (40 sn)

Toplam zaman
45x5+40
225+40 = 265 sn
265 sn = 4 dk 25 sn

Şekil 30: *Öğretmenlerin Birinci Durum İçin Yaptıkları Açıklamalar*

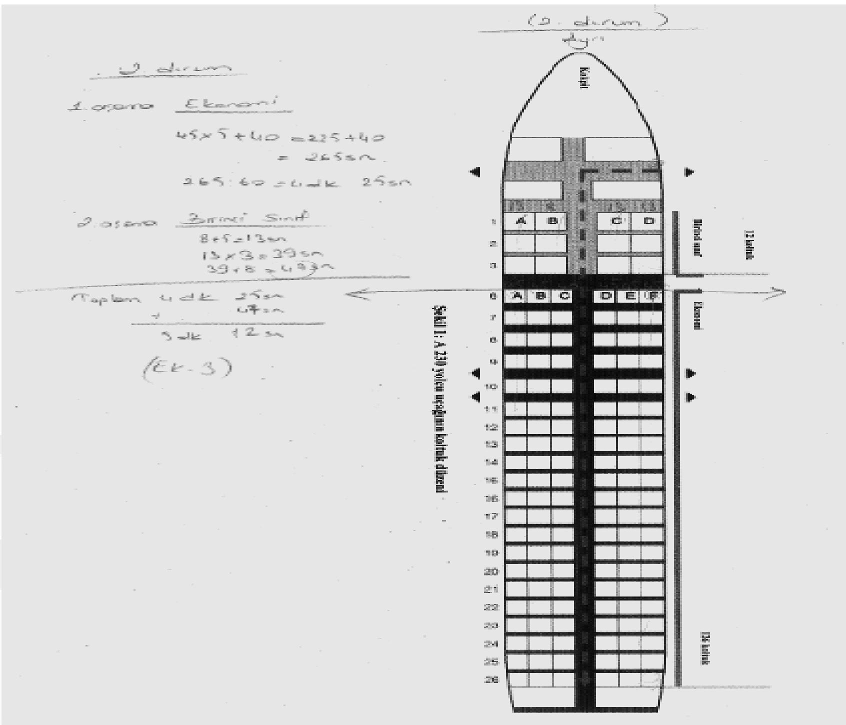
Daha sonra grup üyeleri ikinci durum için yani ekonomi sınıfı öncelikli olmak üzere birinci sınıf ve ekonomi sınıfının ayrı ayrı uçağa alınması durumunu aşağıdaki şekilde tartışmışlardır.

Ayşen: Tamam şimdi ikinci duruma geçelim.
Seda: Şimdi ikinci durum… İkinci durumda…
Ayşen: Ayrı ayrı beraber değil. İlk önce ekonomi sınıfını yerleştiriyoruz. Mektupta da yazmayacak mıyız zaten?
Seda: Ayıracağım ya şimdi. Mektupta da yazacağız zaten.
Ayşen: İlk olarak ekonomi sınıfı yaz başına. Ama açıklayalım mektupta neden önce ekonomi sınıfı…
Seda: Tamam canım açıklarız.
Arda: Mektup işi kolay şurayı hallettikten sonra…
Seda: O zaman şöyle yapalım ya… Aşama aşama yapalım. 1 aşama ekonomi sınıfı.
Ayşen: Saniye yine değişmeyecek. Yine aynı yolu yürüyecek adam değil mi?
Seda: Biraz önce biz buna dedik ki aynı yolu yürüyecek. Bu adamın buraya gelmesi (F26) 40 saniye alacak dedik.
Ayşen: Yine bekleyecek mi peki?
Seda: Bu sefer 40 saniyede buradaki adam buraya kadar yürüyecek. Herkes aynı anda yerleşecek. Ondan sonraki kişiler ne olacak?

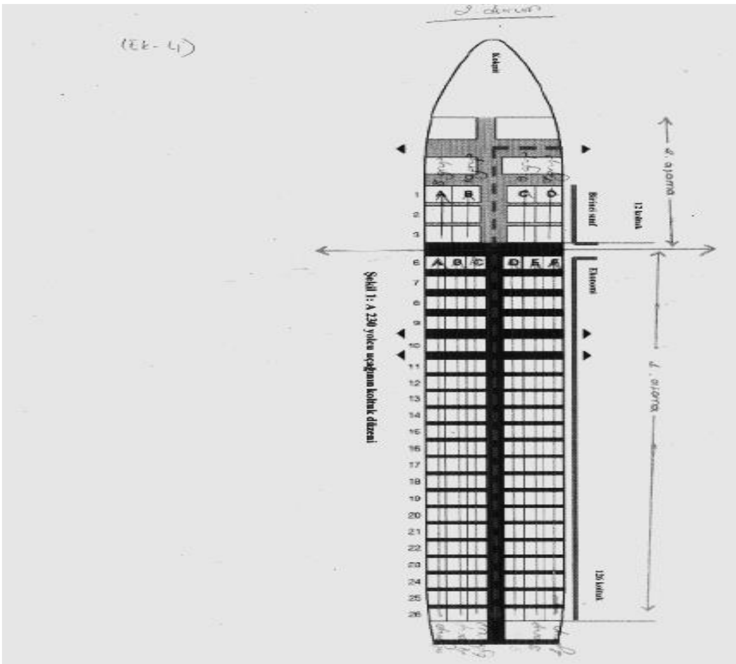
Arda: Yine F’yi bekleyecek. 5 saniyede oradan var.
Ayşen: F, A, E, B, C şeklinde olsun.
Arda: Her halükarda bekleyecek.
Seda: Bekleyecek. 40 saniye çünkü bizim buradan buraya kadar (girişten en arkaya) gelme süremiz. Şuradakine (F) eğer biz 45 verdiysek bir öncekinde burada da aynısını vereceğiz.
Ayşen: Burada 6 tane 45 olacak. Bir de şuradan (birinci sınıf) fazla çıkacak.
Seda: Şimdi ama yine de yazalım.
Ayşen: O yolu yürüyecek yine. 5 (tane) 45 artı 40 olacak yine.
Seda: Tamam şimdi hesaplayalım bunu. 6 tane 45…
Ayşen: 5 (tane) 45 olmayacak mı?
Seda: Neden?
Ayşen: Ha sonra özel (birinci) sınıfta gelecek doğru.
Arda: Hayır hayır… Buradaki en sonu beklemeyecek buradaki şey (birinci sınıf). Beklemeyecek.
Seda: Şimdi arkadaşlar durun. Evet, buradakini beklemeyecek.
Ayşen: 5 (tane) 45 artı 40 olacak.
Arda: 5 (tane) 45 sadece buranın (ekonomi sınıfı) yerleşmesi için. Artı bir de business class’ın yerleşmesi…
Seda: Evet. Buraya (F) 45, buraya (A) 45, buraya (E) 45,buraya (B) 45, buraya (D) 45, buraya (C) 40.
Ayşen: Yani evet… Ekonomi sınıfının yerleşmesi sadece şunun (1. durumun) yerleşmesi ile aynı olacak.
Seda: Evet.
Arda: Ya ama işte o kaldırılabilir bir durum mu? Ama birinci sınıfın durumu da önemli tabii…
Seda: 5 tane 45 artı 40. Aynı hesaba geliyor.
Ayşen: Yine aynı hesaba geliyor. 265 saniye fakat artı birinci sınıfın yerleşmesi.
Arda: Birinci sınıfın yerleşmesi külfet olacak. En kısası bu bir kere… Birinci durum.
Seda: Ama yine de şunu hesap edelim bak (2. durum). Bu 4 dakika 25 saniye.
Ayşen: Şimdi ikinci aşama de.
Arda: Artı ikinci aşamada…
Ayşen: İkinci aşamada 40 saniye sürmeyecek çok daha az sürecek.
Seda: O adamın çünkü oradan oraya gelmesi… Kaç saniyede? 10 saniyede gelir mi bu adam buradan buraya? (girişten birinci sınıf son sıraya). Uzunluğuna bakalım. Orantı yapalım.
Arda: Tamam.
Ayşen: Oradan oraya 40 saniyede gidiyorsa oraya çok daha kısa sürede gider.
Seda: (cetvelle uçağı koridor boyu ölçerek) son koltuğa kadar 20. 20 cm.
Arda: Şuraya da (birinci sınıf) bakalım. 4 cm.
Ayşen: 2 saniyede mi gidecek o zaman?
Seda: 2 katı ya…
Arda: 8.
Seda: 8 saniyede.
Arda: Tamam. Yerleşmesine de 5 saniye veriyorsun ama değil mi?
Seda: Yerleşmesine ha… Gitmesi 8… 5… 13 saniye.
Arda: 13 saniye ver şuna (birinci sınıf D sütununu göstererek)

Seda: Buraya yazıyorum. 13 (saniye) (D),13 (saniye) (A), 13 (saniye) (C), 8 (saniye) (B)…
Arda: Onu bekleyen yok (birinci sınıf B sütunu).
Ayşen: Bu fazla oldu.
Seda: Ooo! O zaman 13 ile 3'ü çarpıyorum. 39 saniye. 39'a 8'i eklediğim zaman da…
Arda: 47 saniye. 47 saniye fazlası var onun.
Seda: Toplamda hepsi beraber…
Arda: 1 dakika bile değil ya (fazlalığı kastederek).
Seda: Bir dakika... Aradaki fark 47 saniye. 47 saniye ile topladığımız zaman… 5 dakika 12 saniye yapıyor.

Grup üyeleri ikinci durumu aşama aşama incelemişlerdir. Birinci aşamada ekonomi sınıfını yerleştirmişler ve bu yerleşimi cam kenarları öncelikli olmak üzere sırasıyla F-A-D-B-C şeklinde düzenlemişlerdir. F-A-D-B gruplarının yerleşmesi için gereken süreyi her biri için 45 saniye, en son yerleşecek grup olan C için 40 saniye olarak belirlemişlerdir. Çünkü C grubunun arkasından ekonomi sınıfına gelen kimse olmayacaktır. Bu durumda ekonomi sınıfının yerleşme süresinin birinci durumdaki ile aynı sürede ve 265 saniye olması gerektiğine karar vermişlerdir. Birinci sınıfın yerleşmesi için de ayrıca bir zaman gerekeceğinden Arda bu durumu zaman açısından külfet olarak değerlendirmiş en kısa sürenin birinci durumda yani yolcuların sınıf ayrımı yapmadan beraber gönderilmeleri ile elde edileceğini vurgulamıştır. Grup üyeleri bir yolcunun uçağın giriş kapısından en arkasına gitmesi için gereken süreyi 40 saniye olarak belirlemişlerdi fakat ekonomi sınıfı yerleştikten sonra arkadan gelecek olan birinci sınıf yolcuları uçağın en arkasına kadar yürümelerine gerek olmadığından bu sürenin birinci sınıfın yerleşmesi için ayrıca hesaplanması gerektiği sonucuna ulaşmışlardır. Grup üyelerinden Seda uçağın boyunu ölçerek orantıdan faydalanmayı teklif etmiştir. Öğretmenler cetvel yardımıyla kroki üzerinde girişten en arka sıraya kadar uçağın boyunu 20 cm ve girişten birinci sınıfın son sırasına kadar olan bölümde 4 cm olarak ölçmüşlerdir. Daha sonra orantı yardımıyla 20 cm'yi 40 saniyede giderse 4 cm'yi 8 saniyede gideceğini hesaplamışlardır. 5 saniye bekleme süresini birinci sınıf yolcuların yerleşmesinde de hesaba katmışlardır. Birinci sınıfta cam kenarları öncelikli olmak üzere sırasıyla D-A-C-B gruplarını yerleştirmişlerdir. D-A-C gruplarının her biri için 8+5=13 saniye, en son girecek olan C grubunun arkasından kimse gelmeyeceği için 8 saniye süre belirlemişlerdir. Toplamda 13.3 + 8 = 47 saniye süre gerektiğini hesaplamışlardır. Birinci aşamada elde ettikleri 265 saniye ile ikinci aşamada elde ettikleri 47 saniyeyi topladıklarında sonuç olarak 5 dakika 12 saniye bulmuşlardır.



Şekil 31: *Öğretmenlerin İkinci Durum İçin Yaptıkları Çözüm*



Şekil 32: *Öğretmenlerin İkinci Durum İçin Belirledikleri Grupların Uçak Krokisi Üzerinde Gösterimi*

İkinci durumda ise; pencereden koridora ve arkadan öne yerlestirilmesi tekrar göz önünde bulundurularak farklı bir alternatif sunulmustur. Bu öneride ilk olarak ekonomi sınıfının tamamının yerlestirildikten sonra birinci sınıfın yerlestirilmesi düsünülmüstür. Bunun nedeni ise birinci sınıf yolcuların vermis oldukları ücretler düsünülerek, konforları göz önünde bulundurulmustur. Bu yolcuların diğer yolcuların oturmasını beklemek istemeyecekleri düsünülmüstür. Bunun için ekonomi sınıfındaki ilk 21 kisilik grubun yerleşmesi için 40+5 sn sürmüstür.

1. Asama (Ekonomi sınıfının yerlestirilmesi)

1. grup ; F-26 ⟷ F-6 (45 sn)
2. grup , A-26 ⟷ A-6 (45 sn)
3. grup , E 26 ⟷ E-6 (45 sn)
4. grup ; B-26 ⟷ B-6 (45 sn)
5. grup , D-26 ⟷ D-6 (45 sn)
6. grup , C-26 ⟷ C-6 (40 sn)

Ekonomi sınıfın yerlesiminin toplam süresi,
5×45+40 = 225 sn = 4 dk 25 sn

2. Asama (Birinci Sınıfın Yerlestirilmesi)

7. grup , D-3 ⟷ D-1 (8+5 sn)
8. grup , A-3 ⟷ A-1 (8+5 sn)
9. grup , C-3 ⟷ C-1 (8+5 sn)
10. grup , B-3 ⟷ B-1 (8 sn)

Birinci sınıfın yerlesiminin toplam süresi,
3×13+8 = 39+8 = 47 sn

NOT: Giris kapısından en arka koltuğa geçen bir yolcunun koltuğuna yerlesmesi 40 sn'dir ve bu 40 snlik mesafe elimizdeki uçak seklinin 20 cmlik yerini kaplamaktadır. En arka birinci sınıf koltuğuna oturan yolcu ise kapıdan koltuğuna kadar 4 cmlik yol almaktadır. Bir önceki durumda oranladığımızda bu yolcu bu mesafeyi 8 snde gideceğini bulduk.

İkinci durumda tüm yolcuların uçağa yerlesmesi için gereken toplam süre,

$$\begin{array}{r} 4 \text{ dk } 25 \text{ sn} \\ + \quad 47 \text{ sn} \\ \hline 5 \text{ dk } 12 \text{ sn} \end{array}$$ olarak bulunmustur.

Şekil 33*: Öğretmenlerin Birinci Durum İçin Yaptıkları Açıklamalar*

Öğretmenler birinci durumda iki sınıfı beraber incelemiş, ikinci durumda ise önce ekonomi sınıfı daha sonra birinci sınıf olacak şekilde iki aşamada inceleme yapmış ve arada 47 saniye fark bulmuşlardır. Grup üyeleri önceden belirledikleri üç stratejiden ikisini incelemiş, birinci sınıf önce ekonomi sınıfı sonra yerleştirildiğinde oluşacak durumu incelememişlerdir. Son stratejileri ile ilgili tartışmalar aşağıdaki gibidir.

> **Seda:** Benim dediğim 3. durumu da yapalım mı? Onu da yapalım mı?
> **Arda:** Aynı şey olacak bence.
> **Ayşen:** O esnekliği de sağlayalım o zaman.
> **Seda:** 45, 45 olacak. İlkiyle mi aynı olacak?
> **Arda:** Yok şimdi…
> **Seda:** Bi dakka şimdi. 45,45… Önce yanlar…
> **Arda:** Birinci sınıfı önce yollayıp da sonra ekonomiyi yollasaydık şunla aynı olacaktı bence süresi (ikinci durum). Hani şu ikisi, aşamalar yer değişse yani. Biz normalde başlangıçta 3. duruma öyle söylemiştik.
> **Seda:** Tamam. Anladım. Bak şöyle yapsak? Şimdi önce burayı yerleştirmemiz bizim kaç saniye? (F ve A sütunu için) 45, 45 diyeceğiz yine ona.
> **Arda:** Evet.
> **Seda:** Sonra yine buraya da 45 diyeceğiz (E sütunu için). Şuna benzeyecek sonuçta. Eğer burada biz 45'lerde değişiklik yapmadıysak. Değil mi?
> **Arda:** Bence bu sorunun çözümü şudur yani (birinci durum). Sanki bana öyleymiş gibi geliyor.

Grup üyeleri üçüncü durumun ikinci durumla aynı süreyi alacağını tahmininde bulunarak bununla ilgili hesaplama yapmamışlardır.

Bu bölümde öğretmenlerin sözlü ifadeleri gerçekliğe gönderme yapmaktan daha çok matematiksel bir düzeydedir. Grup üyeleri kendi matematiksel yeteneklerini kullanmışlar, elde ettikleri sonuçları yazıya dökmüşlerdir. Böylece grup üyeleri matematiksel sonuçlara geçiş aşamasını burada tamamlamışlardır. Bir başka deyişle dördüncü aşama olan matematiksel işlemlerle çalışma süreci gerçekleşmiştir.

4.3.5 Yorumlamak

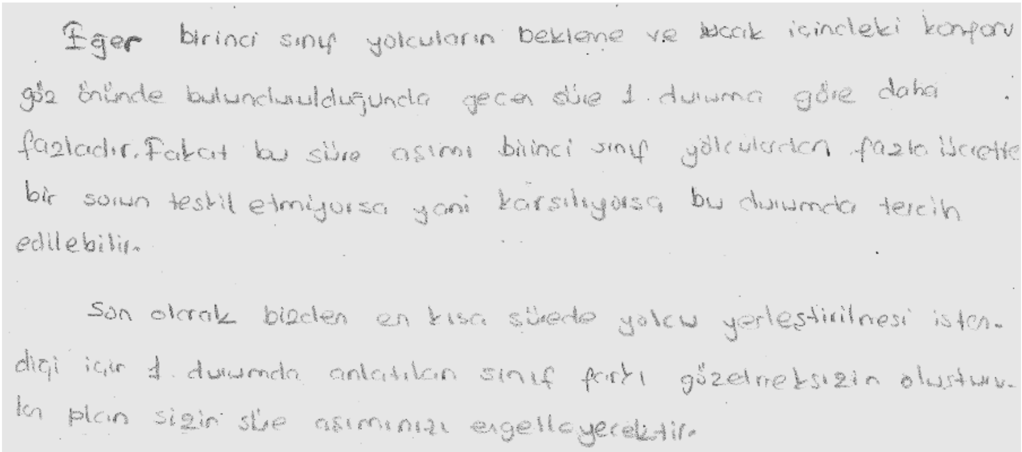
Bu bölümde grup üyeleri elde ettikleri sonuçların gerçek sonuçlar olup olmadığını sorgulamaya başlamışlardır. Grup üyelerinin bu konu hakkındaki tartışmaları aşağıdaki gibi gerçekleşmiştir.

> **Ayşen:** Önemli olan verilen süreyi aşmamak. Diyelim sana 6 dakikada kalkman gerek dediler. İstersen 3 dakikada kalk, istersen 5 dakika içinde kalk. Öyle değil mi? O 6 dakikayı geçmedikten sonra…

Arda: Ama 6 dakika mı orası? Bilmiyoruz ki.
Ayşen: Ama şunu da göz önünde bulunduralım. Dendi ki 6 dakika içinde kaldıracaksın. Sonuçta isterse 5,5 dakikada kaldırabilir, isterse 2 dakikada kaldırır. O süreyi aşmadıktan sonra…
Arda: 5 dakika içinde diyorsa ama… Bak o zaman fark eder. 5 dakika içinde diyorsa o zaman şunla şu fark eder (birinci durum ve ikinci durum).
Ayşen: Havaalanında artık kaç dakikada istiyorsa o esnekliği yapabilir mesela.
Seda: Bende şunu düşünüyorum. Eğer dediğin gibi benim de ilk aklımdan zamandaki farkı görünce… 47 saniye. Şimdi toplamda 4 dakika 25 saniye (birinci durum)… Onların yerleşmesi 47 saniyelik fark (ikinci durum). Arada kaç yapıyor? Yüzde kaçı yapıyor? Oranladığımızda, yüzdesini bulduğumuzda… Eğer şu dakikadan sonra, 5 dakikadan sonrakiler için şu kadar… Geç kalkılan bir dakika için, şu kadar saniye için, şu kadar ücret ödenir deniyorsa eğer ve o ücret birinci sınıftan aldıkları paraya karşılık geliyorsa, karşılıyorsa birinci sınıfı yollayalım.
Arda: (soruya bakarak) 220 milyon dolar diyor.
Seda: Ne kadar? Bir yılda…
Arda: Bir yılda… Bir tane hava şirketi… Mesela Türk Hava Yolları sadece geç kaldırdığı için uçağını 220 milyon dolar veriyor. Sadece geç kaldırdığı için…
Seda: Zamanı ne acaba bunun. Dakika olarak… Geç kalmaktan kastı kaç dakika. Bir şey söylenmiş miydi onunla ilgili?
Arda: Hayır yok.
Ayşen: Hiç bir şey söylenmemiş.
Arda: Şeyi de bilmiyoruz aslında biz. Bu şeylerin, 3 kişinin valizi oraya nasıl konuyor. Onu da bilmiyoruz.
Seda: Oranın da bi zaman şeyi olabilir.
Arda: Belki daha fazla… 5 saniyeden daha fazla bir zaman olacak. Dolayısıyla bunun…
Seda: Ama hepsi aynı olacak.
Arda: Sonuçta belki de bu (ikinci durum) kabul edilemeyecek bir zamana çıkacak yani.
Seda: Tabii.
Arda: Kabul edilemeyecek bir zamana çıkınca sonuçta yöntem yine bu (birinci durum) olacak.
Ayşen: Ama sonuçta bunlar küçük bagajlar elde olan. Büyük bagajları taşımıyorlar ki yanlarında.
Seda: Ne koyuyorlar yukarıya? Laptoplar koyabilirler. El çantasını herkes yanına alır.
Arda: İlk koyan adamla… Şimdi nasıl koyduklarını bilmediğimden, ilk koya adamla, ikinci koyan üçüncü koyanın koyma süresi aynı mı yani?
Seda: Aynı değil. Mesela adam pat diye öne koyduysa diyecek ki, ya diyecek siz en öne koymuşsunuz. Bunu diyecek biraz daha geri alabilir miyiz? Adam kalkacak bu sefer belki. Ya da onu arkaya doğru itekleyecek. İlkin göre biraz daha zaman artabilir. Ama sonuçta bunda da artacak onda da artacak (birinci ve ikinci durum).
Ayşen: Ama artsa da sonuçta bu daha şey olacak.

Seda: Evet. Ancak şunu diyemeyiz. Belki biz saniye olarak kendimize göre bir sayı belirledik ama koyduğumuz zaman belki 4 dakika değil de, atıyorum 6 dakikaya çıkacak orada. Ama burada da ona paralel olarak artış olacak (her iki durumda da).
Arda: Ama işte aradaki fark 4 kere zannedersem, birisinde 6, birisinde 10 kere. Burada 6 kişiyi bekliyor (birinci durum) burada 10 kişiyi bekliyor ya (ikinci durum), her birinde iki saniye artsa 20 saniye daha artacak yani. Veya da işte 3 saniye olsa şu kadar saniye olacak yani. Dolayısıyla çözümü yazmaya başlayalım bence.
Seda: Evet.

Grup üyeleri yolcuların uçağa yerleşmesi için birinci durumda 4 dakika 25 saniye ikinci durumda ise 5 dakika 12 saniyelik süreler hesaplamışlardır. Ayşen hava yolu şirketinin yolcuların yerleştirilmesi için tanıyacağı süreyi kendi buldukları sürelere paralel olarak 6 dakika şeklinde düşünmüş ve 6 dakikayı aşmadıktan sonra her iki durumda olabilir diye görüş bildirmiştir. Bunun üzerine Arda hava yolu şirketi 6 dakikanın kesin bir ölçü olmadığını, 6 dakika değil de 5 dakika süre tanınırsa sıkıntı olacağını dile getirmiş ve birinci çözümün doğruluğunu savunmuştur. Fakat soru metninde şu kadar dakikayı geçerse geç kalmış olursunuz şeklinde bir açıklama göremediklerinden kesin bir yargıda bulunmakta zorlanmışlardır. Ayrıca öğretmenler gruplar arasındaki bekleme süresini 5 saniye olarak düşünmüşlerdir ancak bu sürenin yolcular bagajlarını yerleştirirken artabileceği su şekilde örneklendirilmiştir: yolculardan birinin bagajını yerleştirdikten sonra arkadan gelen yolcunun ilk gelen yolcuya bagajının yerini değiştirmesini rica edebileceğini ve bunun da bu sürenin artmasına sebep olabileceği dile getirilmiştir. Arda ise birinci durumda ikinci duruma göre daha az bekleyen yolcu olacağından zaman artışının birinci durumda daha az olacağını vurgulamıştır. Öğretmenler elde ettikleri sonuçların gerçek hayatta uygulanabilirliği üzerinde tartışmışlar ve meydana gelebilecek aksaklıkların sonuçlarını bu şekilde yorumlamışlardır.


Eğer birinci sınıf yolcuların bekleme ve uçak içindeki konforu göz önünde bulundurulduğunda geçen süre 1. duruma göre daha fazladır. Fakat bu süre aşımı birinci sınıf yolculardan fazla ücretle bir sorun teşkil etmiyorsa yani karşılıyorsa bu durumda tercih edilebilir.

Son olarak bizden en kısa sürede yolcu yerleştirilmesi istendiği için 1. durumda anlatılan sınıf farkı gözetmeksizin oluşturulan plan sizin süre aşımınızı engelleyecektir.

Şekil 34: *Öğretmenlerin Buldukları Sonuçlar İle İlgili Yorumları*

4.3.6. Geçerliğini Doğrulamak

Öğretmenler kâğıt üzerinde yaptıkları hesaplamalara rağmen gerçek uygulamalar esnasında oluşabilecek aksaklıklar neticesinde sürenin artabileceğini görmüşlerdi. Grup üyelerinden gerçek uygulamalar esnasında sürede oluşabilecek farklılık yüzünden tereddüt yaşamıştır. Bununla ilgili tartışmalar aşağıdaki gibi gerçekleşmiştir.

Seda: Ama bir şey söyleyeceğim. Hani o bagajlardan dolayı zaman kaybından bahsettik ya. Onun için bu süre, mesela 4 dakika 25 saniye bulduk. Bu farklı bir dakika da olabilir o zaman. Zaman kaybına bağlı olarak…
Arda: Zaten bizden şey istiyor. Bunları yerleştirebileceğimiz bir metot istiyor. Bize göre…
Seda: Ama en kısa zamanda istiyor ya.
Arda: En kısa zaman tartışmasız bu (birinci durum) değil mi? Sizce de öyle değil mi bilmiyorum?
Ayşen: Öyle öyle…
Seda: Ama şunu diyemeyiz işte. 5 dakikadan kısa süredeyse… Onu diyemeyiz.
Arda: Onu diyemeyiz ama bunların içinde en kısa yerleştirilecek yöntem bu.
Seda: Evet. Yöntem bu.
Arda: Bunu istiyor zaten adam bizden.
Seda: Yöntemi istiyor.
Arda: Değil mi? Aha burada da söylüyor. Metodu… Şuradan bakalım. En kısa sürede havalanmasını sağlamak için uçağa binen yolcuların koltuklarına yerleşmesini sağlayan bir oturma planı oluşturmanız, bu planı neden seçtiğinizi açıklayan bir metot… Neden seçtiğimizi de açıklayalım, metodumuzu da yazalım bence. Ne dersiniz?
Seda: Aklınıza gelen bir şey var mı?
Arda: Bende yok.
Ayşen: Yalnız biraz daha düşünelim. Sonuçta bunu yazacağız (birinci durumu) öyle değil mi? Elimizdeyken soru daha farklı…

Seda: Bence önce düşünelim sonra yazalım. Yazamaya her zaman yazarız.
Arda: Olur.
Seda: Çünkü bir eksik görürsek düzeltme imkânımız olur. Sonra bütününde yazdığımız şeyle tutarlı olması için hepsini değiştirmemiz gerekecek.
Arda: Varsa sesli düşünün.
Ayşen: Yani ben şunu düşünüyorum. Sadece bir tanesini yazmak zorunda mıyız? Bence bir esneklik sağlayıp ikinci durumu da yazalım.
Seda: Bence de ikisini aynı anda yazalım. Birinci sınıf müşterilerinizin memnuniyeti, uçağa binmeden öncesi de dâhil olmak üzere göz ününde bulunduruyorsanız ve bu aradaki zaman kaybı size maddi açıdan ödeyeceğiniz paradan daha az ise o zaman onların memnuniyeti sizin için önemli. Çünkü neden? Daha çok tercih edilecek. Bunları en son alırken (birinci sınıfı) bu adamları da hızlıca yerleştirmiş oluyoruz(ekonomi sınıfını). İki kısma da hitap etmiş oluyoruz aslında aynı anda.
Arda: Evet.
Seda: Hem bunları önce alıyoruz hem de bunların rahatını bozmuyoruz.
Ayşen: Ee o zaman ne yapıyoruz? Yazalım mı?
Seda: Yazalım o zaman.
Arda: Bence yazalım bir aksaklık görmediyseniz.
Seda: Arda sen yaz.

Seda zaman kaybına tekrar dikkat çekmiş fakat Arda kendilerinden istenenin metot olduğunu, bir zaman sınırlaması getiremeyeceklerini ama çözümlerinin içinde en kısa süren yöntemin birinci durum olduğunu söylemiştir. Diğer grup üyeleri de birinci durumun en kısa süreyi alacağını kabul etmiş fakat Ayşen alternatif sunmanın hava yolu şirketine esneklik sağlayacağını dile getirmiştir. Seda ikinci durumdaki zaman kaybının hava yolu şirketinin kârını etkilememesi şartıyla birinci sınıf yolcuların yolcularının ödediği fiyat ve konforları da göz önünde bulundurularak ayrıca yerleştirilebileceklerini söylemiştir. Grup üyeleri yaptıkları hesaplamalar neticesinde *bilgi temelli doğrulama* yaparak en uygun metodun birinci durum olduğunu görmüşler ikinci durumu da alternatif olarak sunmaya karar vermişlerdir. Elde ettikleri sürelerin tahmini süreler olduğunu bunların uygulama esnasında değişebileceğini önemli olanın metot olduğunu dile getirmişlerdir.

4.4. Uçak Probleminin Süreç Analiz Özeti

Ortaokul Matematik Öğretmenleri "Uçak Problemi" üzerindeki matematiksel model oluşturma sürecinde ilk olarak kendilerine verilen problemde ne istendiğini anlamak için soru üzerinde hep birlikte tartışmışlar, problemi daha anlaşılır kılmak için kendi deneyimlerinden de örnekler vermişlerdir. Problemde kendilerinden istenenin uçağın yolcularını alıp en kısa sürede havalanmasını sağlamak için uçağa giren yolcuların koltuklarına yerleşmesini sağlayan bir oturma planı oluşturmaları gerektiği konusunda hemfikir olmuşlardır. Bir başka deyişle grup üyelerinde problemde verilen durum için örtülü bir düzeyde zihinsel bir yapılandırma meydana getirmişlerdir. Öğretmenler ilk anda problem durumunu tam olarak anlamamış olsalar bile verilen görev üzerinde çalışmaya devam edebilecek duruma gelmişlerdir. Böylece modelleme sürecinin ilk basamağı olan problemi anlama aşamasını gerçekleştirmişlerdir.

İkinci aşamada öğretmenler problemde verilen durum için her biri kendi deneyimlerine göre zihinsel bir temsil geliştirmiştir. Bu temsiller onların matematiksel düşünme biçimlerine göre farklılık göstermektedir. Öğretmenler yolcuların uçağa en hızlı şekilde yerleştirilmesi için bir strateji belirleyebilmek amacıyla neleri dikkate alacaklarını ve bunları nasıl değerlendirecekleri konusunda kendi düşünme biçimlerine göre çeşitli önerilerde bulunmuş ve bunlar üzerinde tartışmışlardır. Öğretmenler yolcuları uçağa yerleştirirken arka arkaya veya çapraz da yerleştirseler aynı sayıda kişi alabileceklerini fark ettiklerinden yolcular açısından karışıklık olmaması için Seda'nın önerdiği *çapraz yerleştirme* fikrini elemişlerdir. Ayrıca beklemeye neden olacağı için Ayşen'in önerdiği *grup yerleştirme* fikrinden de vazgeçmişlerdir. Uçağın en arkasından başlayarak sıra ile yerleştirme fikrinde birleşmiş olsalar da hala sınıf ayrımı konusunda ne yapacaklarına tam karar verememişlerdir. Ayrıca en arkadan yerleştirmeye başladıklarında uçağı sağ ve sol tarafı olarak mı yerleştirecekler yoksa cam kenarı- orta - koridor sırasında mı yerleştireceklerine de karar verememişlerdir. Bu aşamada öğretmenler durumu daha anlaşılır hale getirmiş, tercihler yapmış, durumu basitleştirmiş ve ne yöne gideceklerini planlamışlardır. Modelleme sürecinin ikinci basamağı olan problemi basitleştirme ve yapılandırma aşamasını bu şekilde gerçekleştirmişlerdir.

Grup üyeleri öncelikle bir kişinin en arkaya gitmesinin ve yerleşmesinin yaklaşık 40 saniye süreceği tahmininde bulunarak gerçek modelden matematiksel bir model oluşturma yolunda önemli bir adım atmışlardır. Birinci sınıf ve ekonomi sınıfı hakkında uzunca bir süre tartışan öğretmenler sınıf ayrımı yapmadan yolcuları almanın daha kısa süreceğini tahmin etseler de birinci sınıfın fiyat farkından dolayı beklentileri olabileceği düşüncesi ile üç farklı alternatifi havayolu şirketine sunmaya karar vermişlerdir. Öğretmenler yolcuların uçağa alınmadan önce uçak dışında organize edilmelerinin ve bununda planlanması gerektiğini vurgulamışlardır. Öncelikle uçak dışında kullanılacak kalıcı bir şablon fikri ortaya atılsa da uçak modellerinin farklı olduğu ve uçakların sabit yerleri olmadığı gerekçesiyle bunu reddetmişlerdir. Daha sonra her uçak için portatif bir şablon fikri üzerinde tartıştılar ve sonuç olarak yerleşim planının daha teknolojik olan yere yansıtılma şeklinde hazırlanmasına karar vermişlerdir. Dışarıda yapılacak sıralama konusunda fikir birliği sağlandıktan sonra uc alternatif üzerinde tartışmaya devam etmişlerdir. Bunlar ilk olarak birinci sınıfın önce yerleştirilip arkasından ekonomi sınıfının alınması, ikinci olarak cam kenarlarından başlayarak sınıf ayrımı yapmaksızın yolcuların alınması, üçüncü olarak ise ekonomi sınıfının önce yerleştirilip arkasından birinci sınıfın yerleştirilmesi seklindedir. Grup üyeleri zaman açısından uygun olan çözümün sınıf ayrımının yapılmadığı ikinci çözüm olacağını tahmin etseler de kararı yetkililere bırakmışlardır. Uçağın en sonundan başlamak şartıyla, iki sınıfı aynı anda yolladıklarında 26-26-26-26-23-23 olacak şekilde altı grup, ayrı ayrı yolladıklarında ise 23-23-23-23-23-23-3-3-3-3 on grup olacağını görmüşlerdir. Daha sonra uçak krokisinde 4 ve 5. sıraların olmadığını fark edip 26-26-26-26-23-23 olarak belirledikleri altılı grubu 24-24-24-24-21-21 olarak, 23-23-23-23-23-23-3-3-3-3 olarak belirledikleri onlu grubu da 21-21-21-21-21-21-3-3-3-3 olarak düzeltmişlerdir. Bu aşamada grup üyeleri sözlü ifadeler yerine yazılı dış temsiller kullanmaya başlamışlar matematiğe geçişi tamamlamışlar ve matematikselleştirme aşamasını gerçekleştirmişlerdir.

Öğretmenler uçağa girişten en arkaya gidene kadar geçen süreyi 40 saniye olarak, arka arkaya gönderilecek gruplarda öndeki grubun en sonunda bulunan yolcunun yerine geçip koridoru boşaltması için gereken bekleme süresini de 5 saniye olarak belirlemişlerdir. Birinci durumda yolcuların *sınıf ayrımı yapılmadan* beraber uçağa alınmalarını incelemişler ve bu süreyi 4 dakika 25 saniye olarak bulmuşlardır. İkinci durumda ise önce ekonomi sınıfı daha sonra birinci sınıf olacak şekilde iki aşamada inceleme yapmış ve ikinci durumun 47 saniye daha uzun süreceğini yani 5 dakika 12 saniye olacağını bulmuşlardır. Grup üyeleri 3. durumun ikinci durumla aynı süreyi alacağını tahmininde bulunarak bununla ilgili hesaplama yapmamışlardır. Artık öğretmenlerin sözlü ifadeleri gerçekliğe gönderme yapmaktan daha çok matematiksel bir düzeydedir. Grup üyeleri kendi matematiksel yeteneklerini kullanmışlar, elde ettikleri sonuçları yazıya dönüştürmüşlerdir. Böylece grup üyeleri matematiksel sonuçlara geçiş aşamasını bitirerek matematiksel işlemlerle çalışma sürecini tamamlanmışlardır.

Kâğıt üzerinde yaptıkları hesaplamalara rağmen gerçek uygulamalar esnasında oluşabilecek aksaklıklar neticesinde uçağa yerleşme sürenin artabileceğini görmüşlerdir. Grup üyeleri elde ettikleri sonuçların gerçek sonuçlar olup olmadığını sorgulamışlar, elde ettikleri sonuçların gerçek hayatta uygulanabilirliği üzerinde tartışmışlar ve meydana gelebilecek aksaklıkları yorumlamışlardır. Grup üyeleri yaptıkları hesaplamalar neticesinde *bilgi temelli doğrulama* yaparak en uygun metodun birinci durum olduğunu görmüşler ikinci durumu da alternatif olarak sunmaya karar vermişlerdir. Elde ettikleri sürelerin tahmini süreler olduğunu bunların uygulama esnasında değişebileceğini önemli olanın metot olduğunu dile getirmişlerdir.

Uçağa Binme Probleminin süreç analiz özetini gösterir tablo aşağıdadır:

Tablo 9: Uçağa Binme Probleminin Süreç Analiz Özeti

1- Problemi Anlama ✓ *"Uçağın yolcularını alıp en kısa sürede havalanmasını sağlamak için uçağa giren yolcuların koltuklarına yerleşmesini sağlayan bir oturma planı oluşturmaları"* gerektiğini anlama
2- Problemi Basitleştirmek / Yapılandırmak (gerekli ise EMB kullanımına karar vermek) ✓ Yolcuları en kısa sürede uçağa yerleştirmek için gerekli stratejiyi belirlemek amacıyla alternatifleri değerlendirme, süzgeçten geçirme, yeni sorular sorma ✓ Çapraz yerleştirme, grup grup yerleştirme stratejilerini eleyerek "*Uçağın en arkasından başlayarak sıra ile yerleştirme"* konusunda hemfikir olma ✓ *"Sınıf ayrımı"* konusunda ne yapılacağına karar verememe *"Uçağın hangi tarafından yerleştirmeye başlanacağına"* karar verememe
3- Matematikselleştirmek (burada EMB'ye güçlü şekilde ihtiyaç duyulur) ✓ *"Bir kişinin uçağın en önünden en arkasına gidebilmesi için gereken sürenin 40 saniye süreceğini tahmin etme"* ✓ *"sınıf ayrımına hala karar verememe"* bunun üzerine üç farklı oturma düzeni önerme. ✓ *"birinci sınıfın önce yerleştirilip arkasından ekonomi sınıfının yerleştirilmesi"* ✓ *"sınıf ayrımı yapmadan yolcuların yerleştirilmesi"* ✓ *"ekonomi sınıfının önce yerleştirilip arkasından birinci sınıfın yerleştirilmesi"*

- ✓ *“sınıf ayrımı yapmadan yolcuların yerleştirilmesinin daha kısa süreceğini tahmin etme, kararı THY yetkililerine bırakma”*
- ✓ Sınıf ayrımı yapmadan yerleştirildiğinde *6 grubun,* sınıf ayrımı yapılarak yerleştirildiğinde *10 grubun* oluşacağını görme

4- Matematiksel İşlemlerle Çalışmak (kişisel matematik bilgi ve deneyimlerinin kullanımı)

- ✓ Bir kişinin uçağın en arkasına gitmesi için gereken sürenin *40 saniye*, ek bekleme süresini de *5 saniye* olarak belirleyerek toplam sürenin *45 saniye* süreceğini hesaplamak.
- ✓ Orantı kullanarak giriş kapısından birinci sınıfın en arkasına gitmek için gereken süreyi *8 saniye* olarak hesaplamak
- ✓ Yolcuların sınıf ayrımı yapılmadan yerleştirilmesini *4 dakika 25 saniye* olarak hesaplamak
- ✓ Yolcuların ekonomi sınıfı önce birinci sınıf sonra yerleştirilmesi halinde gereken süreyi *5 dakika 12 saniye* olarak hesaplamak
- ✓ Birinci sınıf önce ekonomi sınıfı sonra yerleştirildiğinde yine *5 dakika 12 saniye* süreceğini tahmin ederek bunu hesaplamaktan vazgeçmek

5- Yorumlamak

- ✓ Yaptıkları hesaplamaların gerçek uygulamalar esnasında çıkabilecek aksaklıklardan dolayı değişebileceğini görmek

6- Geçerliğini Doğrulamak

- ✓ Buldukları sürelerin en uygun metodu bulmak için bir araç olduğunu söyleyerek, yolcuları en kısa sürede yerleştirmenin yolunun sınıf ayrımı yapmamak olduğunu *bilgi temelli doğrulamak*

4.5 Birinci ve İkinci Model Oluşturma Etkinliğinin Karşılaştırılması

Uçağa binme problemi ve *kablo makarası problemi* yüksek lisans eğitimi alan ortaokul matematik öğretmenlerinden oluşan üç kişilik gruba arka arkaya uygulanmış, öğretmenlerinin sözlü ve yazılı işlem yoluyla ortaya koydukları model oluşturma süreçlerinin her bir aşaması meydana geldiği sırada incelenmiştir.

Problemi anlama aşamasında grup üyeleri kendilerine verilen problemde ne istendiğini anlamak için soru üzerinde hep birlikte tartışmışlardır. Uçağa binme probleminde kendilerinden istenenin uçağın yolcularını alıp en kısa sürede havalanmasını sağlamak için uçağa giren yolcuların koltuklarına yerleşmesini sağlayan bir oturma planı oluşturmaları gerektiği konusunda hemfikir olmuşlar, problemi daha anlaşılır kılmak için kendi deneyimlerinden de örnekler vermişlerdir. Kablo makarası probleminde ise kendilerine verilen örnek makara ve kablolar üzerinde problem metninde verilen R_1, R_2, L, r değişkenlerinin yerlerini belirlemeye çalışmışlardır. Problemde kendilerinden istenenin bir kablo makarasına *en fazla* kabloyu sarmak için bir model geliştirmeleri gerektiği konusunda fikir birliği sağlamışlardır. Öğretmenler her iki problemde de verilen durum için örtülü bir düzeyde zihinsel bir yapılandırmaya gitmiş ve böylece modelleme sürecinin ilk basamağını gerçekleştirmişlerdir.

Uçağa binme probleminde, problemi basitleştirmek ve yapılandırmak için öğretmenlerin her biri kendi deneyimlerine göre zihinsel bir temsil geliştirmiştir. Bu temsiller onların matematiksel düşünme biçimlerine göre farklılık göstermiştir. Öğretmenler yolcuların uçağa en hızlı şekilde yerleştirilmesi için bir strateji belirleyebilmek amacıyla neleri dikkate alacaklarını ve bunları nasıl değerlendirecekleri konusunda çeşitli önerilerde bulunmuşlar ve farklı oturma planları üzerinde tartışmışlardır. Yolcuları uçakta arka arkaya yerleştirme, çapraz yerleştirme, gruplar halinde yerleştirme, uçağın arkasından başlayarak sıra ile yerleştirme fikirleri üzerinde tartışmışlardır. Yolcuları uçağa yerleştirirken arka arkaya veya çapraz da yerleştirseler aynı sayıda kişi alabileceklerini fark ettiklerinden yolcular açısından karışıklık olmaması için çapraz yerleştirme fikrini elemişlerdir. Ayrıca beklemeye neden olacağı için grup grup yerleştirme fikrinden de vazgeçmişlerdir. Bu noktada uçağın en arkasından başlayarak sıra ile yerleştirme fikrinde birleşmiş olsalar da hala sınıf ayrımı konusunda ne yapacaklarına tam karar verememişlerdir. Ayrıca en arkadan yerleştirmeye başladıklarında yolcuların uçağın sağ ve sol tarafındaki koltuklarına aynı anda mı yerleştirileceklerine veya sırasıyla cam kenarları, orta, koridorlar olacak şekilde mi yerleştirileceklerine de karar vermemişlerdir. Yani öğretmenler durumu daha anlaşılır hale getirmiş, tercihler yapmış, durumu basitleştirmiş ve ne yöne gideceklerini *sınırlı* da olsa planlamışlardır. Diğer problemde grup üyeleri bir kablo makarasına en fazla kabloyu sarabilmek için bir strateji belirleyebilmek amacıyla hangi faktörleri dikkate alacaklarını ve bunları nasıl değerlendirecekleri konusunda kendi düşünme biçimlerine göre çeşitli önerilerde bulunmuş ve bunlar üzerinde tartışmışlardır. İlk olarak *yüzey alanı* daha sonra *hacim* ve kablo makarasının *tasarımından* faydalanmayı strateji olarak tartışmış olsalar da hiç birinde ortak karara varamamışlardır. Son olarak *kablo makarasının genişliği (L) ve makarada kablonun* *sarılacağı boşluk (R_1-R_2)* üzerinden bir model oluşturmaya karar vermişlerdir. Ayrıca makara yüzeyinin her sarımda *kablonun çapı kadar artacağını* dikkate alacaklarını belirtmişlerdir. Öğretmenler durumu daha anlaşılır ve basit hale getirmek için birçok faktörü belirlemiş, sonra bunları tartışarak bazılarını seçip bazılarını eleyerek nasıl hareket edeceklerini planlamışlardır. Öğretmenler her iki problemde de modelleme sürecinin problemi basitleştirme ve yapılandırma aşamasını gerçekleştirmişlerdir.

Uçağa binme probleminde grup üyeleri öncelikle bir kişinin en arkaya gitmesinin ve yerleşmesinin yaklaşık 40 saniye süreceği tahmininde bulunarak gerçek modelden matematiksel bir model oluşturma yolunda önemli bir adım atmışlardır. Birinci sınıf ve ekonomi sınıfı hakkında uzunca bir süre tartışan öğretmenler sınıf ayrımı yapmadan yolcuları almanın daha kısa süreceğini tahmin etseler de birinci sınıfın fiyat farkından dolayı beklentileri olabileceği düşüncesi ile üç farklı alternatifi olan bir çözümü havayolu şirketine sunmaya karar vermişlerdir. Öğretmenler yolcuların uçağa alınmadan önce uçak dışında organize edilmelerinin ve bununda planlanması gerektiğini vurgulamışlardır. Öncelikle uçak dışında kullanılacak kalıcı bir şablon fikri ortaya atılsa da uçak modellerinin farklı olduğu ve uçakların sabit yerleri olmadığı gerekçesiyle bu fikirden vazgeçilmiştir. Daha sonra her uçak için portatif bir plastik şablon fikri üzerinde tartışan öğretmenler, yerleşim planının daha teknolojik olan yere yansıtılma şeklinde hazırlanmasına karar vermişlerdir. Dışarıda yapılacak sıralama konusunda fikir birliği sağlandıktan sonra üç alternatif üzerinde tartışmaya devam etmişlerdir. Bunlar ilk olarak birinci sınıfın önce yerleştirilip arkasından ekonomi sınıfının alınması; ikinci olarak cam kenarlarından başlayarak sınıf ayrımı yapmaksızın yolcuların alınması ve üçüncü olarak ekonomi sınıfının önce yerleştirilip arkasından birinci sınıfın yerleştirilmesi seklindedir. Grup üyeleri zaman açısından uygun olan çözümün sınıf ayrımı yapılmayan ikinci çözüm (24-24-24-24-21-21 olacak şekilde altı grup) olacağını tahmin etseler de son kararı uçak şirketinin yetkililerine bırakmışlardır. Kablo makarası probleminde ise öğretmenler L uzunluğuna 10 cm ve kablo çapına (2r) 0,5 cm değerlerini vererek yan yana gelecek halkaların sayısını 20 tane olarak hesaplamışlardır. L uzunluğunu kablo çapına bölerek yan yana gelecek halka sayısını bulabileceklerini söylemişler ve gerçek modelden matematiksel model oluşturma aşamasına geçmişlerdir. Devamında grup üyeleri kablo makarasında bir üst sıraya geçildiğinde kabloların üst üste gelmesinin mümkün olmayacağını görmüşler ve kablo sarılırken bir üst sıraya geçildiğinde, artışın kablo çapı kadar olamayacağını fark etmişlerdir. Öğretmenler kablo makarasına bir sıra kablo sardıklarında yan yana kaç halka olacağını L/2r ve bu halkaların toplam uzunluğunu $\mathbf{2\pi}R_2$ .L/2r formüllerini kullanarak bulabileceklerini ifade etmişlerdir. Grup üyeleri üst üste gelecek kabloların kaç kat olabileceğini sorgulamışlar bunu çizim yaparak görmeye çalışmışlardır. Spiral sarım ve normal sarım ile ilgili tartışmışlar ve sonunda spiral sarıma karar vermişlerdir. Her iki soruda da öğretmenler sözlü ifadeler yerine yazılı dış temsiller kullanmaya başlayarak matematiğe geçişi tamamlamışlar yani matematikselleştirme aşamasını gerçekleştirmişlerdir.

Öğretmenler yolcuları uçağa yerleştirmek için üç temel durum üzerinde tartışmışlardır. Birinci durumda sınıf ayrımı yapılmaksızın pencerelerden koridora ve arkadan öne doğru yerleştirme yapmışlardır. Yaptıkları hesaplar sonucu tüm yolcuların yerleşmesi için geçen süreyi 4 dk 45 sn olarak belirlemişlerdir. İkinci durumda ekonomi sınıfı öncelikli olmak üzere birinci sınıf ve ekonomi sınıfının ayrı ayrı uçağa alınması durumunu incelemişlerdir. Yine pencereden koridora arkadan öne doğru yerleştirme yaparak toplam süreyi 5 dk 12 sn olarak bulmuşlardır. Arada 47 saniyelik bir fark olduğunu görmüşlerdir. Üçüncü stratejileri olan birinci sınıfı önce yollayıp ekonomi sınıfını sonra yollamayı ise hesaplamadan bırakmışlar ikinci strateji ile aynı süreyi alacağını söylemişlerdir. Öğretmenlerin sözlü ifadeleri gerçekliğe gönderme yapmaktan daha çok matematiksel bir düzeydedir. Grup üyeleri kendi matematiksel yeteneklerini kullanmışlar, elde ettikleri sonuçları yazıya dökmüşlerdir. Kablo makarası sorusunda ise öğretmenler spiral sarımda bir sarımın uzunluğunu (x) bulmak için, oluşan dik üçgende Pisagor bağıntısını uygulayarak $\sqrt{(\mathbf{2\pi R_2})^2 + (\mathbf{2r})^2}$ = x formülünü elde etmişlerdir. Bu bölümde öğretmenler varsayımlarını matematiksel olarak ifade ederken kendi matematik bilgilerini kullanmışlardır. Grup üyeleri matematiksel sonuçlara geçiş aşamasını tamamlamışlar, dördüncü aşama olan matematiksel işlemlerle çalışma süreci gerçekleşmiştir.

Yorumlama aşamasında öğretmenler yaptıkları çalışmaları gözden geçirmeye elde ettikleri sonuçların gerçek sonuçlar olup olmadığını sorgulamışlardır. Uçak binme probleminde öğretmenler birinci sınıf yolcuların bekleme ve uçak içindeki konforunu tekrar gözden geçirmişlerdir. Birinci sınıf yolcuların konforu göz önüne alınırsa geçen sürenin hesapladıkları birinci duruma göre daha da artacağını belirtmişlerdir. Fakat bu süre aşımının hava yolu şirketine getireceği maddi külfetin birinci sınıf yolculardan alınacak ücret farkıyla karşılanabileceği bir durumda sınıf ayrımı yapılabileceğini yani ikinci durumun uygulanabileceğini söylemişlerdir. Grup üyelerinden istenen en kısa sürede uçağa yolcuları yerleştirip kalkması olduğu için birinci durumda belirtilen sınıf farkı gözetmeksizin oluşturulan planı önermişlerdir. Diğer problemde ise kendilerine verilen görevin kablo makarasına en fazla kabloyu sarmak için bir model geliştirmek olduğundan düz sarım ve spiral sarımı karşılaştırıp, spiral sarımın daha avantajlı olduğunu ve kablonun düz sarılamayacağını, sarmaya çalışsalar bile kabloların birbirini itmesinden dolayı kayacağını ve spiral hale geleceğini belirtmişlerdir. Sarım şekli olarak spiral sarımı seçmişlerdir. Öğretmenler spiral sarımda her bir sarımın için x uzunluğunu hesaplamış, bir kattaki sarım sayısını da $\frac{L-2r}{2r}$ formülü ile belirlemişlerdir. Grup üyeleri kablo makarasına toplam kaç kat kablo sarabileceklerini kabloların üst üste gelmesi durumunda makaranın yarıçapından (R_1), makaranın göbek yarıçapını (R_2) çıkarıp kablo çapına bölerek ($\frac{R_1-R_2}{2r}$) bulabileceklerini; sarım biçiminin spiral olması gerektiğini ve kablo makarasına $\frac{(R_1-R_2)-2r}{r\sqrt{3}}$ +1 kat kablo sarılacağını genelleyerek formüle etmişlerdir

Öğretmenler yaptıkları tartışmalar esnasında kâğıt üzerinde yaptıkları hesaplamalara rağmen gerçek uygulamalar esnasında oluşabilecek aksaklıklar neticesinde sürenin artabileceğini görmüşlerdir. Grup üyeleri gerçek uygulamalar esnasında sürede oluşabilecek farklılık yüzünden tereddüt yaşamıştır. Birinci problemde öğretmenler zaman kaybına tekrar dikkat çekmiş fakat kendilerinden istenenin metot olduğunu, bir zaman sınırlaması getiremeyeceklerini ama çözümlerinin içinde en kısa süren yöntemin birinci durum olduğunu belirtmişlerdir. Birinci durumun en kısa süreyi alacağını fakat alternatif sunmanın hava yolu şirketine esneklik sağlayacağını dile getirmişlerdir. İkinci durumdaki zaman kaybının hava yolu şirketinin kârını etkilememesi şartıyla birinci sınıf yolcuların yolcularının ödediği fiyat ve konforları da göz önünde bulundurularak ayrıca yerleştirilebileceklerini söylemişlerdir. Grup üyeleri yaptıkları hesaplamalar neticesinde *bilgi temelli doğrulama* yaparak en uygun metodun birinci durum olduğunu görmüşler ikinci durumu da alternatif olarak sunmaya karar vermişlerdir. Elde ettikleri sürelerin tahmini süreler olduğunu bunların uygulama esnasında değişebileceğini önemli olanın metot olduğunu dile getirmişlerdir. Öğretmenler kablo makarasında birinci, ikinci ve üçüncü sıradaki kablo uzunluğunu belirlemek suretiyle genelleme yoluna gitmeye çalışmışlar, kablo makarasında ilk sıradaki kablo uzunluğunu $\left[\sqrt{(2\pi R_2)^2 + (2r)^2}.\left(\frac{L-2r}{2r}\right)\right]$ formülü ile bulmuşlardır. Bu formülü sarılacak her sıra için ayrı ayrı uygulamaları, buldukları sonuçları ise toplamaları gerektiğini ifade etmişlerdir. Her yeni sarımda göbek yarıçapında $r\sqrt{3}$ kadar bir artış olacağından öğretmenler bunu tüm katlara uyguladıklarında *n.* katta *(n-1).* $r\sqrt{3}$ kadar bir artış olacağı ortak kararına varmışlar ve buldukları sonuçları toplam sembolü ile göstermişlerdir. Daha sonra buldukları formülün geçerliliğini doğrulamak için toplam formülünü açarak kontrol etmiş ve doğrulamaya çalışmışlardır. Konunun daha iyi anlaşılması için Tablo 10'da her iki model oluşturma etkinliğinin karşılaştırması verilmiştir.

Tablo 10: Her İki Model Oluşturma Etkinliğinin Karşılaştırması

Uçağa Binme Problemi	Kablo Makarası Problemi
1- Problemi Anlama ✓ *"Uçağın yolcularını alıp en kısa sürede havalanmasını sağlamak için uçağa giren yolcuların koltuklarına yerleşmesini sağlayan bir oturma planı oluşturmaları"*	**1- Problemi Anlama** ✓ *"Bir kablo makarasına en fazla kabloyu sarmak için bir model geliştirmeleri" gerektiği anlama"*
2- Problemi Basitleştirmek / Yapılandırmak (gerekli ise EMB kullanımına karar vermek) ✓ Yolcuları en kısa sürede uçağa yerleştirmek için gerekli stratejiyi belirlemek amacıyla alternatifleri değerlendirme, süzgeçten geçirme, yeni sorular sorma ✓ Çapraz yerleştirme, grup grup yerleştirme stratejilerini eleyerek "*Uçağın en arkasından başlayarak sıra ile yerleştirme"* konusunda hemfikir olma	**2- Problemi Basitleştirmek / Yapılandırmak (gerekli ise EMB kullanımına karar vermek)** ✓ Bir kablo makarasına en fazla kabloyu sarabilmek için gerekli stratejiyi belirlemek amacıyla faktörleri belirleme ve ayrıştırma, alternatifleri değerlendirme, yeni sorular sorma ✓ *Kablo makarasının genişliği (L) ve kabloda makaranın sarılacağı boşluk (R_1-R_2)*

3- Matematikselleştirmek (burada EMB'ye güçlü şekilde ihtiyaç duyulur) ✓ *"Bir kişinin uçağın en önünden en arkasına gidebilmesi için gereken sürenin 40 saniye süreceğini tahmin etme"* ✓ *"sınıf ayrımına hala karar verememe"* bunun üzerine uc farklı oturma düzeni önerme. ✓ *"birinci sınıfın önce yerleştirilip arkasından ekonomi sınıfının yerleştirilmesi"* ✓ *"sınıf ayrımı yapmadan yolcuların yerleştirilmesi"* ✓ *"ekonomi sınıfının önce yerleştirilip arkasından birinci sınıfın yerleştirilmesi"* ✓ *"sınıf ayrımı yapmadan yolcuların yerleştirilmesinin daha kısa süreceğini tahmin*	**3- Matematikselleştirmek (burada EMB'ye güçlü şekilde ihtiyaç duyulur)** ✓ Düz sarımda *makara genişliği (L)* ve *kablo çapına (2r)* değer verip, *L/2r* formülünü kullanarak yan yana gelecek halka sayısını bulma ✓ Düz sarımda yan yana gelen halkaların toplam uzunluğunu $\mathbf{2\pi}R_2.L/2r$ formülünü kullanarak bulabileceklerine karar verme ✓ Kablo makarasında bir üst sıraya geçildiğinde kabloların üst üste gelmesinin mümkün olmayacağını görme ve *düz sarımdan* vazgeçme ✓ Sarım şekli olarak *spiral sarımı* kabul etme
4-Matematiksel İşlemlerle Çalışmak (kişisel matematik bilgi ve deneyimlerinin kullanımı) ✓ Bir kişinin uçağın en arkasına gitmesi için gereken sürenin 40 saniye, ek bekleme süresini de 5 saniye olarak belirleyerek toplam sürenin 45 saniye süreceğini hesaplamak. ✓ Orantı kullanarak giriş kapısından birinci sınıfın en arkasına gitmek için gereken süreyi 8 saniye olarak hesaplamak ✓ Yolcuların sınıf ayrımı yapılmadan yerleştirilmesini 4 dakika 25 saniye olarak hesaplamak	**4- Matematiksel İşlemlerle Çalışmak (kişisel matematik bilgi ve deneyimlerinin kullanımı)** ✓ Spiral sarımda bir sarımın uzunluğunu (x) bulmak için, oluşan dik üçgende Pisagor bağıntısını uygulayarak $\sqrt{(\mathbf{2\pi R_2})^2 + (\mathbf{2r})^2}$ = x formülünü elde etme
5- Yorumlamak ✓ Yaptıkları hesaplamaların gerçek uygulamalar esnasında çıkabilecek aksaklıklardan dolayı değişebileceğini görmek	**5- Yorumlamak** ✓ Düz sarım ve spiral sarımı karşılaştırma ✓ Spiral sarımda her bir kattaki sarım sayısını belirleme ✓ Sarılan her yeni katta yeni bir göbek oluşacağını ve oluşan göbeğin ne kadar artacağını belirleme ✓ Düz ve spiral sarımda kablo makarasına toplam kaç kat kablo sarabileceklerini belirleme
6- Geçerliğini Doğrulamak ✓ Elde ettikleri sürelerin en uygun metodu bulmak için bir araç olduğunu söyleyerek, yolcuları en kısa sürede yerleştirmenin yolunun sınıf ayrımı yapmamak olduğunu doğrulamaya çalışmak	**6- Geçerliğini Doğrulamak** ✓ Formülün geçerliliğini test etmek için toplam formülünü n = 1, 2, 3 için açarak doğrulamaya çalışmak

BEŞİNCİ BÖLÜM

V. SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER

5.1 Sonuç ve Tartışma

Araştırma sonuçları odak grupta yer alan matematik öğretmenlerinin model oluşturma süreçleri olan problemi anlama, basitleştirme ve yapılandırma, matematikleştirme, matematiksel işlemlerle çalışma, yorumlama ve doğrulama süreçlerinde başarılı bir şekilde çalışabildiklerini ortaya koymuştur. Aynı zamanda model oluşturma süreçleri içerisinde uygun matematiksel kavramları kullanma, doğru matematiksel işlemler yapma, farklı varsayımlar ve fikirler öne sürerek savunma, takım olarak beraber uyum içinde çalışabilme, etkili iletişim kurabilme ve kendini ifade edebilme becerilerinde başarılı oldukları belirlenmiştir.

Model oluşturma süreçlerinin ilki olan *problemi anlama* sürecinde her iki model oluşturma etkinliğinde de öğretmenlerin problemi başarı ile anladıkları gözlenmiştir. Bu sonuç, Bukova-Güzel (2011) ve Carlson, Larsen ve Lesh (2003)'in çalışmalarında elde edilen sonuçlar ile paralellik göstermektedir. Öğretmen adaylarının matematiksel modelleme problemlerini oluşturma ve oluşturdukları problemleri çözme yaklaşımlarını belirlemeye çalışan Bukova-Güzel (2011) 'in çalışmasında öğretmen adayları, matematiksel modellemenin tüm basamaklarında deneyim kazanmış, öğretmenlerin problemi anlama, basitleştirme/yapılandırma, matematikselleştirme, matematiksel çalışma, yorumlama, değerlendirme gibi basamakları öğrenmeleri ile matematiksel modelleme becerilerinin geliştiğini vurgulanmıştır. Carlson, Larsen ve Lesh (2003) öğretmen adaylarının ortaya koyduğu çözümlerin, akıl yürütme becerilerinin ve soruyu tamamlamakta istekli ve kararlı oldukları sonuçlarının altını çizmişlerdir. Öğretmen adaylarının çalışmalarında bu derece başarılı olmasının nedenlerinden birinin de model oluşturma etkinlikleri olduğu vurgulanmıştır (Carlson, Larsen ve Lesh, 2003)

Model oluşturma süreçlerinin ikincisi olan *problemi basitleştirme ve yapılandırma* sürecinde, öğretmenlerin her iki model oluşturma etkinliğinde de bireysel olarak farklı öneriler getirdikleri, elde ettikleri sonuçları gruptaki diğer öğretmenler ile paylaştıkları ve sonuçta grup olarak en uygun *gerçek modele* karar vererek bu süreci gerçekleştirmişlerdir. Bireysel olarak farklı fikirler önermelerine karşılık en iyi fikir üzerine modellerini geliştirmeye önem veren öğretmenlerin bu durumları, özellikle grup çalışmalarının bu noktada çok önemli olduğunu ortaya koymaktadır. Diğer bir ifade ile problemi basitleştiremeyen öğretmenler grup içerisindeki aktif tartışma ortamı sayesinde çok daha verimli çözümler ortaya koymuşlardır. Bu durum, Carlson, Larsen ve Lesh (2003) ve Kertil (2008)'in çalışması ile benzerlik göstermektedir. Carlson, Larsen ve Lesh (2003) çalışmalarında model oluşturma etkinliklerinin katılımcıların akıl yürütmelerini sözlü olarak ifade edebilmelerini, karşılıklı olarak dönüt alıp verebilmelerini ve mantığa uygun rasyonel bir cevap üretene kadar çözümlerini sürekli gözden geçirip düzenlemelerini sağladığını belirtmişlerdir. Kertil (2008) de matematik öğretmen adayları ile yaptığı çalışmada modelleme etkinliklerinde grup çalışmasının çok önemli bir rolü olduğunu ortaya koymuştur. Bazı gruplardaki grup üyelerinin bireysel çalışmalarda bir ürün ortaya koymakta zorlandıklarını fakat grup çalışmaları yaptıklarında çok daha başarılı ürünler ve çözümler ortaya koyduklarını vurgulamıştır (Kertil, 2008)

Modelleme konusunda eğitim almış olan öğretmenlerin model oluşturma süreçlerinin üçüncüsü olan *matematikleştirme* sürecinde, her iki model oluşturma etkinliğinde de öğretmenler sözlü ifadeler yerine yazılı dış temsiller ve matematiksel dili kullanarak matematikleştirme aşamasını başarı ile gerçekleştirmişlerdir. Aynı şekilde *matematiksel işlemlerle çalışma* sürecinde de öğretmenlerin konuyla ilgili matematiksel kavramları doğru olarak seçip üzerinde başarıyla çalıştıkları belirlenmiştir. Modelleme sürecinde öğretmenlerin matematikleştirme yaparak başarılı şekilde probleme çözüm geliştirdikleri sonucu öğretmen adayları ile çalışan Bukova-Güzel (2011)'in ve Kertil'in (2008) çalışmasındaki sonuçlarla paralellik göstermektedir.

Her iki model oluşturma etkinliğinde de en çok zaman ayrılan aşama olan *Yorumlama* sürecinde öğretmenlerin süreci başarıyla gerçekleştirildiği ortaya konmuştur. Bukova-Güzel (2011)'in çalışmasında hedef kitle olan öğretmen adayların yorumlama ve doğrulama süreçlerinde zorlandıkları belirtilmiş olmasına karşın bu çalışmada öğretmenler gerek yorumlama gerekse doğrulama aşamalarını güçlük çekmeden tamamlayabilmişlerdir. Son aşama olan *doğrulama* süreci için her iki model oluşturma etkinliği açısından da doğrulama işlemlerini başarı ile gerçekleştirilmiştir. Elde edilen sonuçlar, Carlson, Larsen ve Lesh (2003)'in çalışmasında olduğu gibi öğretmenlerin akıl yürütme becerilerini ve kararlılıklarını ortaya koymuştur.

Özetle, çalışmanın araştırma soruları dikkate alındığında, çalışmaya katılan öğretmenlerin modelleme sürecinde etkin rol aldıkları, problemi ortadan kaldırabilmek için her aşamada etkin ve yapıcı çözümler düşündükleri gözlemlenmiştir. Elde edilen bulgular da bu gözlemleri destekler niteliktedir. Bu noktada modelleme sürecinin herhangi bir aşamasında ciddi bir sorun ile karşılaşılmadığı, öğretmenlerin her iki çalışmada da verimli çalışarak istenen çözümlere ulaştıkları görülmüştür. Tüm bu sonuçlar öğretmenlerin yüksek lisans eğitimlerinde modelleme eğitimi almalarının olumlu etkisinin olduğu sonucunu destekler niteliktedir. Model oluşturma etkinlikleri üzerine yapılacak yeni araştırmaların özellikle modelleme eğitimi almış öğretmenlerin yetiştirdiği öğrencelerin akademik performansı ile öğrenilen bilgilerin hayata aktarılması hususunda ne kadar başarılı olduklarının incelenmesi bu konuda çok kısıtlı olan ulusal literatürün derinleşip zenginleşmesine katkıda bulunacaktır.

Son olarak yapılan çalışma, elde edilen veriler ve bulguların tümü belli sınırlılıklar dâhilinde gerçekleştirilmiştir. Bu kapsamda çalışmanın sonuçları üniversitelerin eğitim fakültelerinde yer alan matematik öğretmenliği lisans bölümünden mezun olan ve çalışmaya katılan ortaokul matematik öğretmenleri ve çalışmada kullanılan model oluşturma etkinlikleri ile sınırlıdır.

5.2 Öneriler

Bu çalışmanın amacı ortaokul matematik öğretmenlerinin model oluşturma süreçlerini incelemek ve varsa karşılaşılan sorunları ortaya koyup önerilerde bulunmaktır. Çalışmanın sonuçları modelleme dersi almış olan öğretmenlerin model oluşturma süreçleri olan problemi anlama, basitleştirme ve yapılandırma, matematikleştirme, matematiksel işlemlerle çalışma, yorumlama ve doğrulama süreçlerinde başarılı bir şekilde çalışabildiklerini ortaya koymuştur. Sonuçlar dikkatle incelendiğinde, öğretmenlerin bu altı süreçte en çok problemi anlama ve yorumlama aşamalarında zorlandıkları görülmektedir. İlk aşamada ne yapmaları gerektiğine tam olarak hâkim olmayan öğretmenlerin kendi fikirlerini söyleyip ortak fikir oluşturma noktasında zorlandıkları görülmüştür. Beşinci aşama olan yorumlama aşaması ise öğretmenlerin yaptıkları çalışma ile ilgili yorum yapmada zorlandıkları söylenebilir.

Bu aşamada özellikle bu ve benzer model oluşturma etkinliklerine katılacak öğretmen ve öğrencilere yönergelerin çok net bir biçimde açıklanması benzer sıkıntıları azaltabilecektir. Model oluşturma etkinliğine dâhil olan öğretmen ve öğrencilerin, bu etkinlikleri yapma sıklıkları arttığında da benzer sorunların azalacağı düşünülmektedir. Aynı zamanda model oluşturma süreçleri içerisinde farklı matematiksel işlemler yapmak, farklı fikirler öne sürmek, grup çalışmasına yatkınlık, iletişim becerileri ve kendini ifade edebilme konularında da öğretmenlerin oldukça başarılı olduğu belirlenmiştir. Bu durum, daha önce modelleme konusunda eğitim almış bireylerin üzerinden geçen zamana rağmen hala modelleme uygulamalarında başarı ile çalışabileceklerini göstermektedir. Bundan dolayı özellikle modelleme konusunda lisans döneminden çok daha önce bir eğitimin verilmesi, hatta seviyesine uygun olmak şartıyla ana sınıfından itibaren müfredata eklenmesinin tüm eğitim alan bireylerin günlük hayatlarında karşılaşacakları problemlere hızlı ve etkili çözümler üretmede faydalı olacağı düşünülmektedir (Şahin, 2014; Şahin ve Eraslan, 2016, Şahin ve Eraslan, 2017).

Bu kapsamda başta Milli Eğitim Bakanlığı olmak üzere, konuyla ilgili tüm paydaşların bir araya gelerek modelleme eğitiminin müfredatta her seviyede uygulanması noktasında birlikte çalışması hayati önem taşımaktadır. Üniversitelerin eğitim fakültelerinde de modelleme konusunda verilecek eğitimlerin, öğretmen adaylarının bu konuda daha donanımlı yetişmelerine ve zamanı geldiğinde eğitim-öğretim ortamlarında uygulayarak daha fazla verim almalarına fırsat verecektir. Modelleme eğitimi almamış öğretmenlerin yetiştirilmesi için de yaz aylarında uygulamalı modelleme seminerleri düzenlenebilir veya TUBITAK kapsamında yürütülen projelerle küçük gruplar şeklinde öğretmen eğitimleri sağlanabilir. Eğitimcilerin eğitimi şeklinde gerçekleşecek olan bu seminer ve projelerin uygulamalı ve her yıl tekrar edecek şekilde planlanması gerekmektedir. Bundan sonra ilerde yapılacak çalışmaların öğretmenlerin bilişsel, üst-bilişsel ve motivasyonel yeterliklerinin belirlenmesi ve değerlendirilmesine yönelik olması bu konudaki eksikliklerin belirlenmesi ve giderilmesine katkı sağlayacaktır. Ayrıca modelleme eğitimi almış öğretmenlerin yetiştirdiği öğrencilerin hem genel olarak matematik başarısı hem de modelleme ve üst-düzey düşünme süreçlerinin incelenerek gelişimlerinin araştırılmasına yönelik yeni çalışmaların alana önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

Akgün, L., Çiltaş, A., Deniz, D., Çiftçi, Z. ve Işık, A. (2013). İlköğretim matematik öğretmenlerinin matematiksel modelleme ile ilgili farkındalıkları. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi,* 12, 1-34. Erişim adresi: http://dergipark.gov.tr/download/article-file/15138

Australia Ministry of Education. (2008). *Australian curriculum,* Erişim tarihi: 10 Kasım 2017, Erişim adresi: http://www.australiancurriculum.edu.au/mathematics/rationale

Aydın, H. (2008). *İngiltere'de öğrenim gören öğrencilerin ve öğretmenlerin matematiksel modelleme kullanımına yönelik fenomenografik bir çalışma*, Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Orta Öğretim Bölümü Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, Ankara.

Aydın Güç, F. (2015). *Matematiksel modelleme yeterliklerinin geliştirilmesine yönelik tasarlanan öğrenme ortamlarında öğretmen adaylarının matematiksel modelleme yeterliklerinin değerlendirilmesi*, Doktora Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Trabzon.

Aydın, İ. ve Özgürtaş, T. (2007). Bilim ve modelleme, *Türk Biyokimya Dergisi*, 32(4), 185-189. Erişim adresi: http://www.turkjbiochem.com/2007/185-189.pdf

Bal, A. P., ve Doğanay, A. (2014). Sınıf öğretmenliği adaylarının matematiksel modelleme sürecini anlamalarını geliştirmeye yönelik bir eylem araştırması, *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 14 (4), 1363-1384. Erişim adresi: http://www.turkjbiochem.com/2007/185-189.pdf

Berry, J. and Houston, K. (1995). *Mathematical modelling.* Bistrol: J. W. Arrowsmith.

Biccard, P. (2010). *An investigation into the development of mathematical modelling competencies of grade 7 learners,* Unpublished Master Thesis. Stellenbosh University, Stellenbosh.

Biembengut, M. S. and Faria, T. M. (2011). Mathematical Modelling in a Distance Course for Teachers, In: KAISER, G. et al. (Orgs.). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling: International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling*. London, New York: © Springer, v. 1, 269-278. doi: 10.1007/978-94-007-0910-2.

Blomhoj, M., and Jensen, T. H. (2007). What's all the fuss about competencies? Experiences with using a competence perspective on mathematics education to develop the teaching of mathematical modelling, In W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn, and M. Niss (Ed.), *Modelling and applications in mathematics education* (45-56). New York: Springer. Erişim adresi: https://pure.au.dk/ws/files/216/THJ07-MB-ICMI-study-14-paper.pdf

Blomhøj, M., and Kjeldsen, T. H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work. *The International Journal on Mathematics Education, 38* (2), 163-177. doi: 10.1007/BF02655887

Blum, W. (1991). Applications and modelling in mathematics teaching - A review of arguments and instructional aspects. In M. Niss, W. Blum, and I. Huntley (Ed.), *Teaching of Mathematical Modelling and Applications* (10-29). England: Ellis Horwood.

Blum, W., and Leiß, D. (2007). How do students' and teachers' deal with modelling problems? C. Haines, P. Galbraith, W. Blum and S. Khan (Ed.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering And Economics* (222-231). Chichester: Horwood Publishing.

Blum, W., and Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, application, and links to other subjects-state, trends, and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (1), 37-68. Erişim adresi: https://link.springer.com/article/10.1007/BF00302716

Borromeo-Ferri, R., and Blum, W. (2011). Are integrated thinkers better able to intervene adaptively? – A case study in a mathematical modelling environment. In M. Pytlak, T. Rowland, and E. Swoboda (Ed.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Rzesow, Poland: University of Rzeszow. Erişim adresi: http://www.cerme7.univ.rzeszow.pl/WG/6/CERME7-Borromeo-Blum.pdf

Bukova-Güzel, E. (2011). An examination of pre-service mathematics teachers' approaches to cunstruct and solve mathematical modelling problems. *Teaching Modelling and Its Applications*, 39, 19-36. doi: 10.1093/teamat/hrq015

Carlson, M., Larsen, S., ve Lesh, R. (2003). Integrating models and modeling perspective with existing research and practice. In R. Lesh veH. Doerr (Ed.), *Beyond constructivism: A models and modeling perspective* (465-478). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Creswell, J. W. (1998). Qualitative Inquiry and Research Design: Choosing Among Five Traditions. Thousand Oaks, CA: Sage.

Creswell, J. W. (2013). *Nitel araştırma yöntemleri* (M. Bütün ve S. B. Demir. Çev.), Ankara: Siyasal Kitapevi (orijinal çalışma basım tarihi 2013).

Department for Education and Employment. (1999*). Mathematics: The national curriculum for England*. London: HMSO.

Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L. ve Allen, S. T. (1993). *Doing Naturalistic Inquiry: A Guide To Methods.* Beverly Hills, CA: Sage.

English, L.D. (2006). Mathematical modeling in the primary school. *Educational Studies in Mathematics, 63*(3), 303-323. doi: 10.1007/s10649-005-9013-1

English,L. D., ve Watters, J. J. (2005). Mathematical Modeling in Third-Grade Classrooms. *Mathematics Education Research Journal,* 16, 59-80.

Eraslan, A. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının model oluşturma etkinlikleri (Model Eliciting Activities) üzerinde düşünme süreçleri.* IX. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Kongresi'nde sunulan bildiri, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.

Eraslan, A. (2011). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının model oluşturma etkinlikleri ve bunların matematik öğrenimine etkisi hakkındaki görüşleri. *Elementary Education Online*, *10*(1), 364-377. Erişim adresi: http://ilkogretim-online.org.tr/vol10say1/v10s1m29.pdf

Eraslan, A. (2012). Prospective Elementary Mathematics Teachers' Thought Processes on a Model Eliciting Activity. *Educational Sciences: Theory & Practice*, 12(4), 2953-2968.

Erbaş, A. K., Kertil, M., Çetinkaya, B., Çakıroğlu, E., Alacacı, C., ve Baş, S. (2014). Matematik eğitiminde matematiksel modelleme: Temel kavramlar ve farklı yaklaşımlar. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, *14* (4), 1-21. Erişim adresi: http://oldsite.estp.com.tr/pdf/tr/192d30661474f49d85ef0eaaa94c449f71627.pdf

Eric, C. C., Dawn, N. K., Wanty, W. and Seto, C. (2012). Assessment of primary 5 students' mathematical modelling competencies. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia, 35* (2), 146-178. Erişim adresi: https://repository.nie.edu.sg/bitstream/10497/16257/4/JSMESEA-35-2-146.pdf

Ferri, R. B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. In Kaiser, G., Sriraman B. ve Blomhoij, M. (Ed.) *Zentralblattfür Didaktik der Mathematik.*38(2), 86-95. Erişim adresi: http://centroedumatematica.com/ciaem/articulos/universitario/conocimiento/Theoretical%20and%20empirical%20%20differentiations%20of%20phases%20in%20the%20%20modelling%20process.*Borromeo%20Ferri,%20Rita.*Rita%20Borromeo%20Ferri%20(Germany).pdf

Föerster, F. ve Kaiser, G. (2010). The cable drum — description of a challenging mathematical modeling example and a few experiences. In B. Kaur ve J. Dindyal (Ed.), *Mathematical Applications and Modeling: Yearbook 2010 Association of Mathematics Teachers* (276–299). Singapore: World Scientific. doi: 10.1142/9789814313353_0015.

Galbraith, P., and Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *The International Journal on Mathematics Education, 38* (2), 143-162. Erişim adresi: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.503.1261verep=rep1vetype=pdf

Galbraith, P., Stillman, G., Brown, J., and Edwards, I. (2007). Facilating middle secondary modelling competencies. In L. Haines, P. Galbraith, W. Blum, and S. Khan (Ed.), *Mathematical Modelling: Education, Engineering And Economics* (130-140). Chichester, UK: Horwood Publishing. doi: 10.1533/9780857099419.3.130.

Glesne, C. (2013). *Nitel Araştırmaya Giriş* (A. Ersoy ve P. Yalçınoğlu, Çev.) Ankara: Anı. (orijinal basım tarihi 2011.)

Grünewald, S. (2012). Acquirement of modelling competencies – First results of an empırical comparison of the effectıveness of o holistic respectıvely an atomistic approach to the development of (metacognition) modelling competencies of students. *12th International Congress on Mathematical Education Program.* COEX, Seoul, Korea. Erişim adresi: http://icme12.org/upload/UpFile2/TSG/0629.pdf

Güzel, E. B. ve Uğurel, I. (2010). Matematik öğretmen adaylarının analiz dersi akademik başarıları ile matematiksel modelleme yaklaşımları arasındaki ilişki. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi,* 29 (1), 69-90. Erişim adresi: https://www.pegem.net/dosyalar/dokuman/124619-2011082216754-omuje-29-1-2010-69-90-moaa.pdf

Henn, H-W. (2007). Modelling in School-Chances and Obstacles, *The Montana Mathematics Enthusiast*, Monograph 3, 125-138. Erişim adresi: https://pdfs.semanticscholar.org/0512/b4a6f9d18692789c31b3ef65b8ae6a17d407.pdf

Hoyles, C. (1985). What is the point of group discussion in mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 16(2),205-214.

Izard, J., Haines, C., Crouch, R., Houston, K., and Neil, N. (2003). Assessing the impact of teachings mathematical modeling: Some implications. In S. J. Lamon, W. A. Parker, and K. Houston (Ed.), *Mathematical Modelling: A Way of Life* (165-177), Chichester: UK: Horwood Publishing.

Jorgensen, L., and Ryan, S. (2004). Relativism, values and morals in the New Zealand curriculum framework. *Science and Education, 13*, 223- 233. doi: 10.1023/B:SCED.0000025565.96803.0c.

Justi, S. R., and Gilbert, K. J. (2002). Modelling teachers' views on the nature of modelling and implacations for the education of modellers. *International Journal of Science Education, 24* (4), 369-387. doi: 10.1080/09500690110110142.

Kaiser, G., and Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *The International Journal on Mathematics Education, 38* (3), 302-310. Erişim adresi: https://pdfs.semanticscholar.org/7de2/228181c12a7914038c07f3a3730f65112f9d.pdf

Kaiser, G., Blomhøj, M., and Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *The International Journal on Mathematics Education, 38* (2), 82-85. Erişim adresi: http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm062a1.pdf

Kaiser, G., Schwarz, B., and Tiedemann, S. (2010). Future teachers‘ Professional knowledge on modeling. In R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines, and A. Hurford (Ed.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (433-444), New York: Springer. doi: 10.1007/s11858-008-0150-8

Kapur, J. N. (1982). The art of teaching the art of mathematical modeling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 13* (2), 185-192. doi: 10.1080/0020739820130210

Kereluik, K., Mishra, P., Fahnoe, C., & Terry, L. (2013). What knowledge is of most worth: Teacher knowledge for 21st century learning. *Journal of Digital Learning in Teacher Education,* 29(4), 127-140.

Kertil, M. (2008). *Matematik öğretmen adaylarının problem çözme becerilerinin modelleme sürecinde incelenmesi.* Yayınlanmamış Doktora Tezi. Marmara Üniversitesi, İstanbul.

Keskin, Ö. Ö. (2008). *Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel modelleme yapabilme becerilerinin geliştirilmesi üzerine bir araştırma*, Doktora Tezi. Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Ankara.

Learning and Education in and through Modelling and Applications [LEMA]. (2007). *What is modelling? Teachers' diary page 1*, Erişim adresi: www.lema-project.org.

Lesh, R. A., and Doerr, H. (2003). Foundations Of Model And Modelling Perspectives On Mathematic Teaching And Learning. In R. A. Lesh, and H. Doerr (Ed.), *Beyond Constructivism: Amodels and Modelling Perspectives on Mathematics Teaching, Learning and Problem Solving* (3-33). Mahwah, NJ: Lawrance Erlbauum. Erişim adresi: http://blog.ncue.edu.tw/sys/lib/read_attach.php?id=4311.

Lesh, R. A., ve Lehrer, R. (2003). Models and modelling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(2-3), 109-130. doi: 10.1080/10986065.2003.9679996

Lesh, R. A., ve Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A. and Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In R. Lesh, and A. Kelly (Ed.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (591-645). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum. Doi: 10.4324/9781410602725.

Lester, F. K., ve Kehle, P. (2003). From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. In R. Lesh ve H. Doerr (Ed.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching* (501-517). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lincoln, Y.S., ve Gruba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry.* Beverly Hills, CA: Sage.

Lingefjard, T. (2002). Mathematical modeling for preservice teachers: A problem from anesthesiology. *The International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(2), 117-143. Doi: 10.1023/A:1021122431218.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *The International Journal on Mathematics Education, 38* (2), 113-142. Erişim adresi:

https://pdfs.semanticscholar.org/0303/d30d25016a810887169b23259d7aa83683d1.pdf

Mason, J. (1988). Modelling: What do we really want pupils to learn? In D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (201-215). London: Hodder and Stoughton.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2005). *PİSA 2003 projesi ulusal nihai rapor, Ankara*. Erişim adresi: http://pisa.meb.gov.tr/wp-content/uploads/2013/07/PISA-2003-Ulusal-Nihai-Rapor.pdf

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2005a). *İlköğretim matematik dersi öğretim programı ve kılavuzu*. Ankara: Milli Eğitim Basımevi. Erişim adresi: http://mufredat.meb.gov.tr/Dosyalar/201813017165445-MATEMAT%C4%B0K%20%C3%96%C4%9ERET%C4%B0M%20PROGRAMI%202018v.pdf

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2009). *Ortaokul matematik dersi (5, 6, 7 ve 8. Sınıflar) öğretim programı.* Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2010). *PISA 2009 projesi ulusal ön raporu*. MEB Eğitimi Araştırma ve Geliştirme Dairesi Başkanlığı. Erişim adresi: http://pisa.meb.gov.tr/wp-content/uploads/2013/07/PISA-2009-Ulusal-On-Rapor.pdf

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2011). *Ortaöğretim matematik dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) öğretim programı.* Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2012a). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik uygulamaları I. Dönem öğretmenler için öğretim materyali.* Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2012b). *Ortaokul ve imam hatip ortaokulu matematik uygulamaları II. Dönem öğretmenler için öğretim materyali.* Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013). *PISA 2012 ulusal ön raporu*. MEB Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğü. Erişim adresi: http://pisa.meb.gov.tr/wp-content/uploads/2013/12/pisa2012-ulusal-on-raporu.pdf

Milli Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2018). *Matematik Dersi Öğretim Proglramları (İlkokul ve Ortaokul 1-8. Sınıflar).* Erişim adresi: http://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=329

Mehraein, S., and Gatabi, A. R. (2014). Gender and mathematical modelling competency: primary students‘ performance and their attitude. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. 128, 198-203. Erişim adresi: https://ac.els-cdn.com/S1877042814022344/1-s2.0-S1877042814022344-main.pdf?_tid=1e72c184-b27b-4784-bc91-91ce6c3943a5veacdnat=1526674508_ec1cf0ff4a18fb82d23d2fd47815046c

Merriam S.B. (2013). *Nitel araştırma desen ve uygulama için bir rehber* (Selahattin Turan, Çev.). Ankara: Nobel. (Orijinal çalışma basım tarihi 2009).

Mousoulides, N., Christou, C., ve Sriraman, B., (2006). *From problem solving to modelling- a meta analysis*. Erişim adresi: http://www.umt.edu/math/reports/srireman/MousoulidesChristouSriraman.pdf

Mousoulides, N. (2007). *A modeling perspective in the teaching and learning of mathematical problem solving*. Unpublished Doctoral Dissertation. University of Cyprus.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Niss, M., Blum, W., and Galbraith, P. L. (2007). Introduction. In M. Niss, W. Blum, H. Henn, and P. L. Galbraith (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (3-32). New York: Springer.

Oliveira, A., M., P., ve Barbosa, J.,C. (2009*)* The teachers' tensions in mathematical modelling practice. Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. *Proceedings from Topic Study Group 21 at the 11th International Congress on Mathematical Education in Monterrey,* 6-13, July-Mexico.

Pan, M. (2007). Erişim adresi: http://www.public.asu.edu/~dbvan1/papers/MatthewPanEssay.pdf .

Patton, M. (2002). Qualitative Research and Evaluation Methods, 2nd ed. Newbury Oaks, CA: Sage Publications

Pollak, H. O. (2007). Mathematical modeling-A conversation with Henry Pollak. In W. Blum, P. L. Galbraith, H-W, Henn, M. Niss, (Ed.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (109-120). New York, NY: Springer.

Sandalcı, Y. (2013). *Matematiksel modelleme ile cebir öğretiminin öğrencilerin akademik başarılarına ve matematiği günlük yaşamla ilişkilendirmelerine etkisi*, Yüksek Lisans Tezi. Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Sınıf Öğretmenliği Anabilim Dalı, Rize.

Schleicher, A. (2012). Preparing teachers and developing school leaders for the 21st century: *Lessons from around the world.* OECD Publishing. 2, rue Andre Pascal, F-75775 Paris Cedex 16, France.

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematical education.* Dordrecht: Kluwer.

Siriraman, B. (2005). Conceptualizing the notion of model eliciting. *Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Spain: Sant Feliu De Guíxols. Erişim adresi: http://fractus.uson.mx/Papers/CERME4/Papers%20definitius/13/sriraman.pdf

Stillman, G., Galbraith, P., Brown, J., ve Edwards, I. (2007). A framework for success in implementing mathematical modelling in the secondary classroom. *Mathematics: Essential Research, Essential Practice 2*, 688- 697. doi: 10.1.1.508.7464.

Swetz, F. and Hartzler, J.S. (1991). Mathematical modeling in the secondary school curriculum. *The National Council of Teachers of Mathematics*: Reston, Virginia. ISBN 0-87353-306-2.

Şahin, N. (2014). *İlkokul 4.Sınıf Öğrencilerinin Model Oluşturma Etkinlikleri Üzerindeki Düşünme Süreçleri*, Yüksek Lisans Tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Eğitimi Anabilim Dalı, Samsun.

Şahin, N., & Eraslan, A. (2016). Modeling Processes of Primary School Students: The Crime Problem. *Education & Science*, 41 (183), 47-67.

Şahin, N., & Eraslan, A. (2017). Fourth-grade primary school students' thought processes and challenges encountered during the butter beans problem. *Educational Sciences: Theory & Practice,* 17(1), 105–127. http://dx.doi. org/10.12738/estp.2017.1.0038

Şahin, N., & Eraslan, A. (2018). İlkokulda Model Oluşturma Etkinlikleri Nasıl Uygulanmalı? *Eğitim Kuram ve Uygulama Araştırmaları Dergisi,* 4 (1), 99-117.

Şen-Zeytun, A. (2013). *In partial fulfillment of the requirements for the degree of doctor of philosophy in secondary science and mathematics education (Öğretmen adaylarının matematiksel modelleme süreçlerinin ve bu sürece etki eden faktörlere ilişkin görüşlerinin incelenmesi)*, Yüksek Lisans Tezi. Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Ankara.

Tekin-Dede, A., ve Yılmaz, S. (2013). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının modelleme yeterliliklerinin incelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 4* (3), 185-206. Erişim adresi: https://www.researchgate.net/profile/Ayse_Tekin_Dede/publication/261487731_Ilkogretim_Matematik_Ogretmeni_Adaylarinin_Modelleme_Yeterliliklerinin_Incelenmesi/links/0c960534672468e068000000/Ilkoegretim-Matematik-Oegretmeni-Adaylarinin-Modelleme-Yeterliliklerinin-Incelenmesi.pdf

Thomas, K., and Hart, J. (2010). Pre-service teacher perceptions of model eliciting activities. R. In Lesh, P. L. Galbraith, and C. R. Haines (Ed.), *Modelling Students' Mathematical Modelling* (531-539). New York, NY: Springer Science and Business Media. doi: 10.1007/978-1-4419-0561-1_46.

Ubuz, B. ve Haser, Ç. (2002). "Matematik öğretiminde rol yapılarının değişimi". *V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, 16-18 Eylül 2002, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara. Erişim adresi: http://old.fedu.metu.edu.tr/ufbmek-5/ozetler/d257.pdf

Van Driel, J. H. and Verloop, N. (1999). Teachers' knowledge of models and modeling in science, *International Journal of Science Education,* 21, 1141-1153. doi: 10.1080/095006999290110.

Verschaffel, L., De Corte, E. ve Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. *Learning and Instruction*. 7(4), 339-359. doi: 10.1016/S0959-4752(97)00008-X.

Verschaffel, L., Greer, B., and De Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. In K. P. Gravemeijer, R. Lehrer,H. J. Van Oers, and L. Verschaffel (Ed.), *Symbolizing, Modeling And Tool Use In Mathematics Education* (s. 171-195). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. doi: 10.1007/978-94-017-3194-2_16.

Victorian Curriculum and Assessment Authority [VCAA]. (2005). *Victorian Essential Learning Standards: Discipline-Based Learning Strand Mathematics.* Melbourne: Author.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2011). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (6.bs). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yılmaz, E. (2016). 21. Yüzyıl becerileri kapsamında dönüşen okul paradigması. *Eğitim Bilimlerinden Yansımalar*, s. 5-17, Konya: Çizgi Kitabevi.

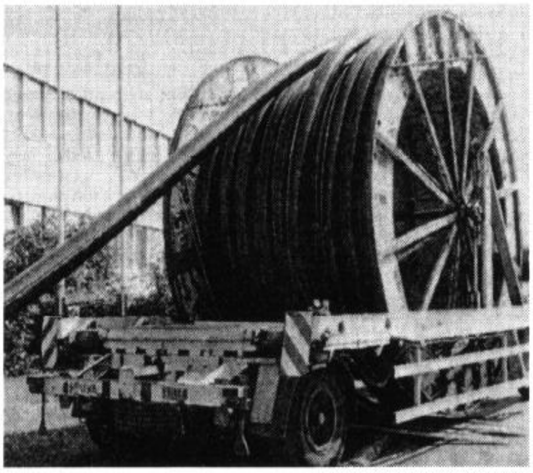
Yükseköğretim Kurulu . (2018). İlköğretim Matematik Öğretmenliği Lisans Programı. Erişim adresi: http://www.yok.gov.tr/documents/10279/41805112/Ilkogretim_Matematik_Lisans_Programi.pdf

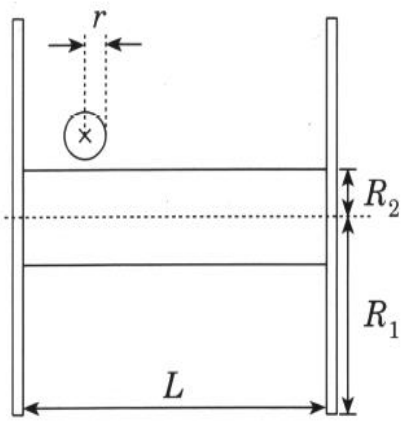
Zawojewski, J. S., Lesh, R., ve English, L. (2003). A models and modeling perspective on the role of small group learning activities. In R. Lesh ve H. Doerr (Ed.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspective on mathematics problem solving, learning, and teaching* (337–358). Mahwah, NJ: Erlbaum. ISBN: 9780805838213.

EKLER

Ek-1: Kablo Makarası Etkinliği

Özellikle yol inşaatlarında kamyon arkasında taşınan çok büyük kablo makaraları görmek mümkündür. Elektrik veya telefon kabloları bu makaralar ile taşınır ve yol inşaatı sırasında zemine döşenirler. Bahçe veya yangın hortumları da çok büyük makaralarla olmasa da taşınmalarını kolaylaştırmak için yine kablo makaraları kullanılmaktadır. Çok daha küçük boyutlarda emaye veya bakır tellerin sarıldığı makaraları da görmek mümkündür.





Sizin göreviniz bir kablo makarasına en fazla kabloyu sarmak için bir model geliştirmek ve bunu nasıl yaptığınızı ilgililere yazarak açıklamaktır?

Ölçüler:

Makaranın genişliği: L

Makaranın göbek yarıçapı: R_2

Makaranın yarıçapı: R_1

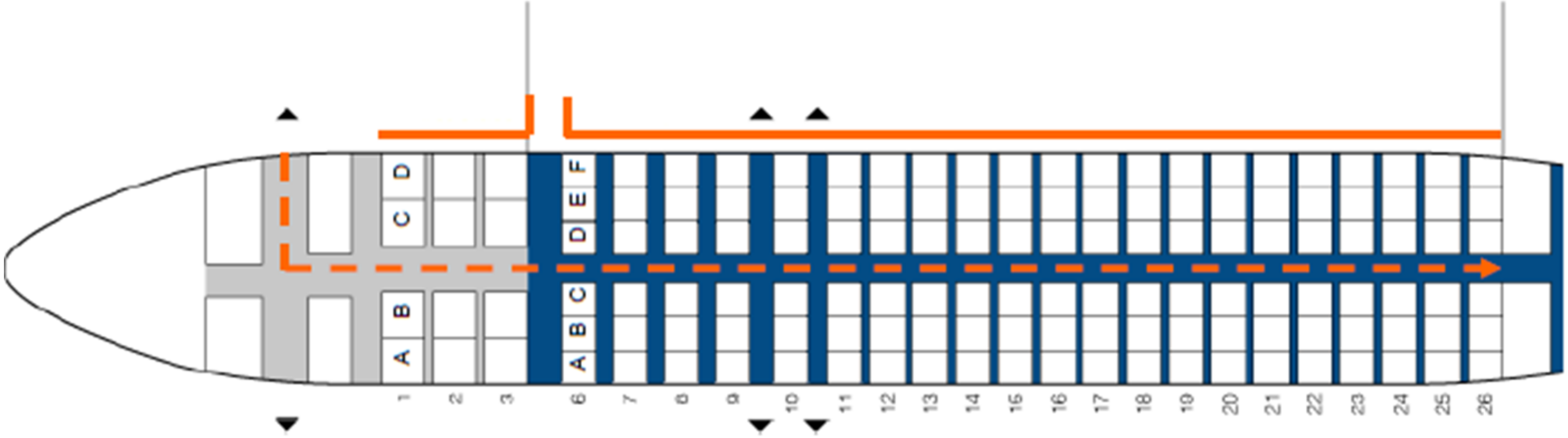
Kablo yarıçapı: r

Ek 2: Uçağa Binme Etkinliği

Günümüzde hava yolu seyahatlerinde hemen hemen her zaman gecikmeler yaşanıyor ve yolcular bir girişten diğer girişe doğru giderken kendilerini sanki 100 metre koşusunda gibi hissediyorlar. Özellikle aktarmalı uçuşlarda, ilk uçuşta bir gecikme yaşandıysa yolcular diğer uçuşa yetişebilmek için çok hızlı hareket etmek zorunda kalmaktadırlar. Bu durumda yolcular hava alanlarında sanki her şey aleyhlerine işliyor gibi bir hisse kapılmaktadırlar. Uçakların gecikmeli kalkması yolcuyu zor durumda bırakırken hava yolları şirketlerini ise çok büyük bir zarara sokmaktadır. Havayolu şirketleri için zaman para demektir. Uçağın hava alanından gecikmeli kalktığı her dakika için havayolu şirketi gecikme bedelini ödemek zorunda kalmaktadır. Örneğin Amerika' da bu tutar bir hava yolu şirketi için bir yılda yaklaşık 220 milyon dolara ulaşmaktadır.

Dünyada uçak üreten en büyük kuruluşlardan biri olan *Boeing*' in raporuna göre alana iniş yapan bir uçağın en kısa sürede yeniden alandan ayrılabilmesi için yapılması gereken pek çok farklı işlem var. Bunlardan bazıları, *uçak içindeki yolcuların uçaktan ayrılması, yakıt ve su ikmalinin yapılması, bagajların boşaltılması ve yüklenmesi, yiyecek içecek servisinin hazır hale getirilmesi, uçağın temizlenmesi ve yeni yolcuların uçağa yerleştirilmesi.* Bu rapora göre yolcuların uçağa yerleştirilmesi en uzun süreyi almaktadır. Bu yüzden hava yolu şirketlerinin çoğu uçağın kalkışındaki gecikmeleri en aza indirmek amacıyla yolcuların uçağa en kısa sürede yerleşmelerini sağlayan yeni metotlar aramaktadırlar.

Aşağıda THY (Türk Hava Yollarının)' nin genellikle yurt içi uçuşlarda kullandığı *Airbus A230* yolcu uçağının oturma düzenini gösteren bir çizim verilmiştir. Sizden bu uçağın yolcularını alıp <u>en kısa sürede</u> havalanmasını sağlamak için uçağa giren yolcuların koltuklarına yerleşmesini sağlayan bir oturma planı oluşturmanız ve bu oluşturduğunuz oturma planını <u>neden</u> seçtiğinizi açıklayan bir mektubu THY'na yazılı olarak bildirmeniz istenmektedir.



Şekil: A 210 yolcu uçağının koltuk düzeni