ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

Matematik Eğitimi Bilim Dalı

GERÇEKÇİ MATEMATİK EĞİTİMİ TEMELLİ ÖĞRENME ORTAMINDA ALTINCI SINIF ÖĞRENCİLERİNİN PRİZMANIN HACMİ KAVRAMINI OLUŞTURMA SÜREÇLERİ

Merve DÜNDAR

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Rezan YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

07/2019

TELİF HAKKI

2547 Sayılı Yükseköğretim Kanunu Ek Madde 40 hükümleri çerçevesinde (Ek:22/2/2018-7100/10 md.) "*Lisansüstü tezler yetkili kurum ve kuruluşlar tarafından gizlilik kararı alınmadıkça, bilime katkı sağlamak amacıyla Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi tarafından elektronik ortamda erişime açılır*."

Araştırmacılar tezlerin tamamı veya bir bölümünü yazarın izni olmadan ticari veya mali kazanç amaçlı kullanamaz, yayınlayamaz, dağıtamaz ve kopyalayamaz. Ulusal Tez Merkezi Web Sayfasını kullanan araştırmacılar, tezlerden bilimsel etik ve atıf kuralları çerçevesinde yararlanırlar.

YAZARIN

Adı : Merve

Soyadı : DÜNDAR

Bölümü : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi

İmza :

Teslim Tarihi :

TEZİN

Türkçe Adı : Gerçekçi Matematik Eğitimi Temelli Öğrenme Ortamında Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Prizmanın Hacmi Kavramını Oluşturma Süreçleri

İngilizce Adı : The Formation Process of Volume Concept of Sixth Grade Students in RME Based Learning Environment: The Case of Prism

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı: ……………………..

İmza: ……………………..

KABUL VE ONAY

Merve DÜNDAR tarafından hazırlanan "**Gerçekçi Matematik Eğitimi Temelli Öğrenme Ortamında Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Prizmanın Hacmi Kavramını Oluşturma Süreçleri**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ondokuz Mayıs Üniversitesi **Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi** Anabilim Dalı, **Matematik Eğitimi Bilim Dalı'**nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: (Dr. Öğretim Üyesi Rezan YILMAZ)

(Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi) ...…………

Başkan: (Prof. Dr. Ziya ARGÜN)

(Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi, Gazi Üniversitesi) …………...

Üye: (Prof. Dr. Ali ERASLAN)

(Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi) …………...

Bu tezin **Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi** Anabilim Dalı, **Matematik Eğitimi Bilim Dalı**'nda Yüksek Lisans tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Tarihi: __/__/____

Prof. Dr. Ali ERASLAN

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

(İmza ve Mühür)

Anneme…

TEŞEKKÜRLER

Yoğun çalışma sürecinin sonunda, tezimi bitirirken öncelikle yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen herkese içtenlikle teşekkür ederim.

Tezimin her aşamasında bana destek olan, tüm ayrıntıları benimle birlikte düşünen, fikirleri ile bana yol gösteren ve akademik gelişimimde katkısı olan değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Rezan Yılmaz'a,

Her daim içtenlikle sorularımı cevaplayan, daima motivasyonumu artırarak bana destek olan değerli hocalarım Dr. Öğr. Üyesi Emine Şendurur ve Dr. Öğr. Üyesi Polat Şendurur' a,

Tezimi titizlikle inceleyerek bana yol gösteren değerli hocalarım Prof Dr. Ziya Argün ve Prof. Dr. Ali Eraslan'a,

Problemlerin hazırlanmasıda çok büyük emekleri olan değerli hocalarım Prof. Dr. Murat Altun ve Doç. Dr. Hamza ÇALIŞICI'ya,

Uygulamaların yapıldığı her iki okuldaki tüm öğrenci, idareci, öğretmenlere ve özelinde pilot uygulamaların yapıldığı, bir yıl boyunca öğretmen olarak görev yaptığım Cumhuriyet Ortaokulu'ndaki sevgili öğrencilerime, müdür yardımcımız Emre Çakır'a,

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi bölümündeki tüm hoca ve çalışma arkadaşlarıma,

Her türlü zorlukta yanımda olduklarını hissettiğim beni her daim destekleyen, seven ve güvenen sevgili annem, babam ve kardeşime,

Sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Bu tez OMÜ BAP komisyonu tarafından PYO.EGF.1904.18.009 No'lu proje ile desteklenmiştir.

GERÇEKÇİ MATEMATİK EĞİTİMİ TEMELLİ ÖĞRENME ORTAMINDA ALTINCI SINIF ÖĞRENCİLERİNİN PRİZMANIN HACMİ KAVRAMINI OLUŞTURMA SÜREÇLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Merve DÜNDAR

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz, 2019

ÖZ

Bu çalışmanın amacı 6. sınıf öğrencilerinin dikdörtgenler prizmasının hacmi kavramını yapılandırma süreçlerini Gerçekçi Matematik Eğitimi (GME) yaklaşımına uygun olarak tasarlanan öğretim ortamında incelemektir. Çalışma Karadeniz bölgesindeki büyük bir ilin merkezinde bulunan bir ortaokulda, 17 öğrencinin bulunduğu bir sınıfta gerçekleşmiş ve nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması olarak desenlenmiştir. Öğrencilerin hacim konusu ile ilgili önbilgileri ölçmek amacıyla hazırbulunuşluk testi hazırlanmıştır. Testten alınan sonuçlar doğrultusunda öğrenciler heterojen gruplara ayrılmışlardır. Öğrencilerden RME yaklaşımına uygun olarak hazırlanan ortamda iki bağlamsal problemi grup içerisinde çözmeleri istenmiştir. Öğretim sürecinde grup içi ve gruplar arası tartışmalar desteklenmiştir. Hazırbulunuşluk test sonuçları, araştırmacı gözlemleri ve öğretmen görüşleri dikkate alınarak, her gruptan birer katılımcı amaçlı örneklemeyle seçilmiştir. Belirlenen dört katılımcı ile her bağlamsal problemin sonunda ve hacim konusu ile ilgili planlanan tüm etkinliklerin sonunda olmak üzere üç klinik görüşme gerçekleştirilmiştir. Yapılan klinik görüşmeler ve grup içi tartışmalar kamera ve ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır. Elde edilen veriler transkript edilerek APOS teorik çerçevesinde analiz edilmiştir. Çalışmanın sonucunda bir katılımcının dikdörtgenler prizmasının hacmini, içini tam dolduran birim küp sayısı olarak nesne düzeyinde kavramsallaştıramadığı, bir diğer katılımcının ise, hacim formülünü nesne düzeyinde kavramsallaştırmadığı görülmüştür. Ayrıca, hacim kavramını oluşturma sürecinde eylemlerin içselleştirilmesinde ve gerçekleştirilen eylemlerin bir bütün olarak düşünülmesinde zorlanan katılımcıların nesne düzeyinde kavramsallaştıramadıkları görüldüğünden, hacmin kavramsallaştırılmasında içselleştirme ve enkapsülasyonun kritik bir role sahip olduğu saptanmıştır. Gerçekleştirilen süreçlerin enkapsüle edilebilmesi ve sürecin ürünleri üzerinde eylemlerde bulunulabilmesi için ise öğrencilerin güçlü koordinasyonlara sahip olmaları gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Son olarak, hacmin kavramsallaştırılması sürecinde birim, bölünebilme ve prizmanın katmanlara dayalı üç boyutlu yapısının anlamlandırılmasının önemli olduğu görülmüş, yapılacak olan çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler : kavram oluşumu, gerçekçi matematik eğitimi, APOS, hacim, prizma

Sayfa Sayısı : 136

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Rezan YILMAZ

İkinci Danışman :

THE FORMATION PROCESS OF VOLUME CONCEPT OF SIXTH GRADE STUDENTS IN RME BASED LEARNING ENVIRONMENT: THE CASE OF PRISM

MS Thesis

Merve DÜNDAR

ONDOKUZ MAYIS UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES

July, 2019

ABSTRACT

The aim of this study was to examine sixth grade students' formation process of volume of rectangular prism in the teaching environment designed in accordance with the Realistic Mathematics Education (RME). The study was conducted in a classroom with 17 students in a secondary school in Samsun and it was designed as a case study. In order to measure the students' preliminary knowledge about the subject of volume, readiness test was prepared and implemented. According to the results of this test, the students were divided into heterogeneous groups. The students were asked to solve two contextual problems within the group. In-group and inter-group discussions were supported during the teaching process. Four students were selected by taking one participant sample from each group considering readiness test results, the observation and the opinions of the teachers. On the other hand, three clinical interviews were conducted with four participants who were identified at the end of each clinical interview and at the end of all the planned activitiesrelated to the volume concept. Clinical interviews and in-group discussions were recorded with camera and voice recorder. The obtained data were transcripted and analysed with APOS theoretical framework. As a result of the study, one participant could not conceptualize the volume on the rectangular prism at the mathematical object level as the number of unit cubes that filled the inside, and another participant could not formulate of volume of rectangular prism at the relational level. In addition, internalization and encapsulation play a critical role in the process of constructing the concept of volume. In order to encapsulate the processes and take actions on the product of the process, it is concluded that the students should have strong coordination. Finally, in the process of conceptualizing the volume concept, it is seen that it is important to understand the unit volume as a three-dimensional structure, divisibility, and spatial understanding of prism. It is also made some suggestions for the studies to be conducted.

Key Words : concept formation, realistic mathematics education, APOS, volume, prism

Number of Pages :136

Advisor : Assistant Prof. Dr. Rezan YILMAZ

Co-advisor :

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

MEB	Millî Eğitim Bakanlığı
RME	Realistics Mathematics Education
GME	Gerçekçi Matematik Eğitimi
APOS	Action, Process, Object, Schema

BİRİNCİ BÖLÜM

I. GİRİŞ

Yeni bir bilgi öğrenildiğinde, genellikle bu bilginin gerçek yaşamdaki karşılığı yani gerçek hayatta ne işe yaracağı sorgulanır. Bu durum doğası gereği matematiksel bilgiler için daha çok gerçekleşmektedir. Matematiğin yaygın olan öğretim biçimi, günlük yaşam deneyimlerinin ve formal matematiğin birbirinden tamamen ayrı olduğu düşüncesini doğurmakta ve bu durum öğrencilerin matematiği genellikle zor ve karmaşık olarak adlandırmalarına sebep olmaktadır (Fauzan, Slettenhaar ve Plomp, 2002; van den Heuvel-Panhuizen ve Drijvers, 2014). Fakat matematiksel kavramların çoğu, günlük yaşam ve diğer disiplenlerdeki ihtiyaçlardan doğmuştur ve bu nedenle öğrencilerin edindikleri matematiksel bilgi, beceri ve deneyimlerin gerçek hayatta kullanılması, gerçek hayatla ilişkilendirilmesi Matematik Öğretim Programının genel amaçları arasında yer almaktadır (MEB, 2018).

Öğrencilerin formal matematiksel bilgiyi gerçek yaşamın doğal süreçleri ile birlikte geliştirmesi gerekmektedir (Gravemeijer, 1999). Fakat matematik eğitimcileri matematiğin uygulama alanının çok geniş olması durumunu gerekçe göstererek, öğretim sürecinde önce matematiksel bilgiyi öğretip, sonra öğrencilere bu bilgiyi günlük hayatta kullanabilecekleri problem durumlarını sunma eğilimindedirler. Bilgiler, kurallar ve formüller öğretildikten sonra uygulama yapılan, öğrencileri problem durumlarını ezberlemeye iten bu şekildeki antididaktik yaklaşım hem öğrenciler üzerindeki yükü artırmakta hem de onları gerçek matematikten uzaklaştırmaktadır. Bu yüzden, birçok öğrenci matematik dersinde edindiği deneyimleri uygulayamamakta ve gerçek hayata geçirememektedir (Freudenthal, 1968; Olkun 2001; Özdemir ve Üzel, 2011; van den Heuvel-Panhuizen ve Drijvers, 2014).

Aynı tip işlemlerin tekrarlandığı problem durumları ile uğraşmanın matematik öğretimin hedeflerine ulaşmada pek katkı sağlamadığı düşünülmektedir. Matematik aktivitelerinde süreç gerçeğin matematikleştirmesi ile başlamakta ve sonunda formal matematik elde edilmektedir (Freudenthal, 1968; 1973; Gravemeijer, 1994). Bu anlamda matematikleştirme, hazır sembol ve formüllerin dönüşümü değildir. Konuyu veya problemi organize etme sürecini ve ortaya çıkan ürünlerin tümünü içerir (Gravemeijer ve Terwel, 2000).

Matematikçiler, matematiği oluştururken kendi deneyimlerinden ve yaşantılarından yararlanırlar (Freudenthal, 1968). Bu yüzden, öğrenciler matematiği kendi yaşantılarına dayandırma ve matematikleştirme süreçlerini gerçekleştirme yoluyla öğrendiklerinde, matematik onlara daha anlamlı gelmeye başlar (Bıldırcın, 2012; Deniz ve Kabael, 2017a; Gravemeijer, 1994; 1999; Gravemeijer ve Terwel, 2000; Memnun Sezgin, 2011; Uça, 2014). Öğrencilerin matematiği yeniden oluşturma süreçlerini kolaylaştırmak için, matematiğin nasıl öğretilmesi gerektiği ile ilgili araştırmalar yapılmış ve matematiğin keşfedilerek deneyimlendiği ortamlarda öğrenmenin daha kalıcı olduğu ileri sürülmüştür (Gravemeijer, 1999). Böylece, Gerçekçi (Realistik) Matematik Eğitimi (GME-RME) olarak bilinen kuramın temeli atılmıştır (Freudenthal, 1968; Gravemeijer, 1994; 1999; Gravemeijer ve Terwel, 2000; van den Heuvel-Panhuizen, 2000). İlk olarak Hollandalı matematikçi ve eğitimci Hans Freudantal tarafından geliştirilen GME yaklaşımı öğrencilerin gerçek yaşam durumlarında veya ortamlarında öğrenmesini temel almaktadır (Wubbels, Korthagen ve Broekman, 1997). Geleneksel matematik eğitiminde, öğrencilerin genellikle daha pasif bir eğilim gösterdikleri düşünülmektedir. Ancak, GME yaklaşımını esas alınan matematik eğitiminde öğrenci merkeze alınarak onun aktif bir şekilde öğrenmesi, bir örüntüyü veya olguyu kendisinin belirlediği veya tercih ettiği yollar ve kendisinin geliştirdiği modeller ile yeniden keşfetmesi için çaba sarfedilir (Fauzan, Slettenhaar ve Plomp, 2002).

Gravemeijer'e (1994) göre matematik öğretimi sadece öğretmenin bildiklerini öğrenciye aktarmasını içermemektedir. Bu süreçte öğrenciye matematiksel kavramları kendilerinin yeniden icat edebileceği ortamlar hazırlanmalıdır (aktaran, Triyani, Ilma Indra Putri ve Darmawijoyo, 2012). Bu amaçla, GME' nin öğrenme sürecinde öğrenciye deneysel olarak gerçek durumlar veya öğrencinin hayal edebileceği ona anlamlı gelen fantastik durumlar verilir. Böylece öğrenci, geçmiş bilgi ve deneyimlerini kullanarak matematiksel kavramları ve ilişkileri özümseyerek kendisine mal edebilir (van den Heuvel-Panhuizen ve Drijvers, 2014).

Kavramların oluşturma sürecinde genelleme ve soyutlamanın önemi büyüktür. Belirli bir özelliğe sahip olan kavramların belirlenmesi ve onların gruplanması yoluyla gerçekleştirilen indirgeme süreci genelleme (Skiff, 1953); kavramın belirli özelliklerinden izole edilmesi veya bağlamdan kavrama geçiş süreci ise soyutlama (Spierska, 1994; Skemp, 1986) olarak adlandırılmaktadır. GME araştırmacıları soyutlama ve genelleme terimlerini kullanmasalar da GME, soyutlama ve genellemeyi açık bir şekilde öğreten ilk yapılandırmacı müfredat projesinden ortaya çıkmıştır. Treffers (1991b), GME ile ilgili öğretim yaklaşımlarını üç aşamada belirtmiştir. Bunlar, öncelikle alışılmış bazı günlük yaşam bağlamlarındaki işlemlerin-ilişkilerin geliştirilmesi, sonrasında aynı yapının başka bağlamlarda da olduğunun gösterilmesi ve son olarak, elde edilen ortak yapının formülize edilerek sembolleştirilmesidir. Mitchelmore (2002), bu üç adımın genelleme ve soyutlamayı oluşturduğunu belirtmiştir. Dubinsky'e (1991) göre ise iki aşamadan oluşan soyutlamanın ilk aşaması var olan bilginin daha ileri bir seviyede ifade edilmesi, diğeri bu bilginin yeniden oluşturularak ve organize edilerek yeni yapıların oluşturulmasıdır. Genelleme ise yeni bir durum ya da problem için öğrencilerin var olan şemalarını kullanmaları ya da temsil etmeleri olarak ifade edilmiştir. Sonuçta, bilgiler arasındaki koordinasyon ve sentezleme ile ilgili olan soyutlamada, kişinin eylemleri büyük bir öneme sahiptir ve kavram oluşum sürecinde bu eylemler bir araya getirilir (Piaget, 2001).

Matematiksel bilgi ve kavram oluşum süreçlerini açıklanabilmesi için, Piaget'nin reflektif soyutlama anlayışını genişletilip yeniden organize ederek, APOS (*Action, Process, Object, Schema*) teorik çerçevesi geliştirilmiştir (Arnon ve diğerleri, 2014; Asiala ve diğerleri, 1997; Dubinsky, 2002). Üç bileşenden oluşan APOS teorik çerçevesi, matematiksel bir kavramın teorik analizini, bu teorik analize bağlı olarak öğretim yaklaşımlarının ve stratejilerin geliştirilmesi ve uygulanması, son olarak da öğretimin ve başlangıçtaki teorik analizin test edilerek ve iyileştirilerek nihai verilerin toplanması ve analiz edilmesini içermektedir. Genetik çözümleme şeklinde sunulan bu teorik analizler, araştırmacıya öğrencilerin kavramın anlamlandırılması sürecinde oluşturabileceği zihinsel yapıları sunar ve öğretim, uygulama ve değerlendirme süreçlerinin planlanmasında yardımcı olabilir (Asiala ve diğerleri, 1997; Dubinsky ve McDonald, 2001).

1.1 Araştırmanın Amacı

GME kuramına göre oluşturulan bağlamsal problemler gerçek yaşamda olabilecek ya da öğrencilerin hayal edebileceği durumlardan oluştuğu için, matematikleştirme ve kavram oluşum süreçlerini desteklemektedir (Gravemeijer ve Terwel, 2000). Bu nedenle, kavramın nasıl edinildiğinin anlaşılması amacıyla öğrencilere bağlamsal bir problem durumu sunulabilir. Böylece, problem durumları, şemalar ve öğrenci cevapları incelenerek, matematiksel bir bilginin nasıl edinildiği ve hangi aşamalardan geçtiği anlamlandırılabilir (Dubinsky, 1991). Bu süreçte, öğrencilerin kavramı nasıl oluşturduklarını inceleyebilmek için, APOS teorik çerçevesinden yararlanılabilir (Arnon ve diğerleri, 1997; Asiala ve diğerleri, 2014). Bu çalışmada GME kuramına göre tasarlanan öğrenme ortamında öğrencilerin kavram oluşum süreçleri APOS teorik çerçevesi ile analiz edilerek derinlemesine incelenmesi amaçlanmıştır. Öğrencilerin üç boyutlu uzamsal yapılanmayı gerektiren hacim kavramında zorlandıkları (Clements ve Sarama, 2009), prizmanın satır, sütun ve katmanlara dayalı yapısını zihinlerinde görselleştirmede zorluk yaşadıkları (Olkun, 2003); hacmi ölçmede bazı hatalar yaptıkları, alan ve hacim kavramlarını karıştırdıkları saptanmıştır (Battista ve Clements, 1996; Ben Chaim, Houang ve Lappan, 1985). Bu yüzden bu çalışmada, hacim kavramının 6. sınıf öğrencileri tarafından nasıl yapılandırıldığı incelenmiş ve odak olarak prizmanın hacmi kavramı ve hacim formülü ele alınmıştır. Kavramın edinilmesinde yaşanılan zorluklar ve önkoşul olduğu diğer kavramlar dikkate alındığında, hacim kavramının anlamlı bir şekilde oluşturulmasının oldukça önemli olduğu düşünülmektedir. Bu yüzden kavramın nasıl yapılandırıldığı ve diğer kavramlarla nasıl ilişkilendirildiği incelenerek, öğrencilerin kavramla ilgili muhtemel yanılgıları ortaya çıkarılabilir ve etkili öğretim ortamları tasarlanabilir. Böylece, öğrencilerin anlamlı ve kalıcı bir şekilde öğrenmeleri için bir zemin hazırlanabilir. Bu çalışmada, hacim konusu ile ilgili yapılan çalışmalar incelenerek, GME yaklaşımına uygun ve kavramın etkili bir şekilde öğrenilebileceği bir öğretim tasarlanmaya çalışılmıştır. Bu amaçla 6. sınıf öğrencilerinin hacim konusu için gerekli olan kazanımları da dikkate alınarak literatürde bahsedilen doldurma ve paketleme bağlamlarından yararlanılmıştır (Clements ve Sarama, 2009). Ayrıca, öğrencilerin hacmi ölçme süresince geliştirebilecekleri stratejiler dikkate alınarak (Battista ve Clements, 1996; 1998; Clements ve Sarama, 2009) öğrencilerin kavramı yapılandırabilecekleri bir öğretim tasarlanmıştır.

1.2 Araştırma Problemi

Dikdörtgenler prizması kullanarak, öğrencilerin hacim kavramını ve bağıntısını oluşturma süreçlerinin incelendiği bu çalışmanın araştırma problemi aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

"6. sınıf öğrencilerinin hacim kavramını ve bağıntısını GME yaklaşımı ile oluşturma süreçleri nasıldır?"

Bu soruya cevap verebilmek için aşağıdaki alt problemlere cevap aranacaktır.

- 6. sınıf öğrencileri dikdörtgenler prizmasının hacmini prizmanın içini tam dolduran birim küplerin sayısı olarak nasıl oluşturmaktadırlar?
- 6. sınıf öğrencileri dikdörtgenler prizmasının hacimini nasıl formülleştirmektedirler?
- 6. sınıf öğrencilerinin dikdörtgenler prizmasının hacmini kavramsallaştırırken gerçekleştirdikleri dikey matematikleştirme süreçleri nasıldır?

1.3 Araştırmanın Önemi

Öğrenciler genellikle matematiği anlamlandırma ve kavram oluşum sürecinde pasif bir eğilim göstermektedirler (Altun 2008; Battista ve Clements, 1996; van den Heuvel Panhuizen ve Drijvers, 2014). Bu durumda öğrenciler matematiği öğrenme sürecinde, önceden çözdükleri problemlere benzer olarak verilen bir problemi çözebilir, problemin çözümü için daha önceden oluşturulan bir modelin adımlarını atlamadan uygulayabilirler. Ancak aşina olmadıkları problemleri çoğunlukla kendi kendilerine sorgulamazlar (Sierpinska, 1994). Öğrencilerin sorgulayarak iş birliği içerisinde ve aktif bir şekilde öğrendiklerinde daha başarılı oldukları, anlamlı bir şekilde öğrendikleri saptanmıştır (Akgül, 2014; Altun, 2008; Ayvalı, 2013; Battista ve Clements, 1998; Deniz ve Kabael, 2017a; Esen ve Çakıroğlu, 2012; Kaylak, 2014). Öğrencilerin daha pasif olduğu öğretmenin rolünün daha fazla olduğu öğrenme ortamında ise, öğrenciler bazı kısımları tam olarak anlamlandıramazlar, ezberlemeye veya öğretmenler tarafından verilen ipuçlarına ihtiyaç duyarlar (Wubel ve diğerleri, 1997). Matematiksel kavramlara ulaşabilmek ve bu kavramları tam olarak anlayabilmek için, öğrencilerin aktif bir rol almaları, problem durumları içerisinde verilen sembol ve temsil biçimleri üzerinde yoğunlaşmaları ve bunlarla ilgili işlem yapmaları gerekmektedir (Sierpinska, 1994). GME'de ise öncelikle bağlamsal problem üzerinde yoğunlaşarak öğrenciler kendi modellerini oluşturabilirler (*bir şey'in modeli*- "model of") ve sonrasında bu modelleri problemden bağımsızlaştırarak formalleştirebilirler (*bir şey için olan model*- "model for"). Böylece kavramla ilgili informal bilgilerini formalleştirebilir ve kavram oluşum sürecinde aktif bir rol alabilirler (Gravemeijer, 1999; Gravemeijer ve Terwel, 2000).

Kavram oluşturmak ve kavram tanımı yapmak, öğrenciler için oldukça zor olan bir süreçtir (Öztoprakçı, 2014). Hacim kavramı ile ilgili çalışmalar incelendiğinde, hacmin öğrencilere karmaşık gelen bir konu oduğu ve üç boyutlu uzamsal yapılanmayı gerektirdiği görülmüştür (Clements ve Sarama, 2009). Öğrencilerin hacim konusu ile ilgili zorlandıkları noktalar ve kavram yanılgıları incelendiğinde ise, prizmanın katmanlara dayalı yapısını zihinlerinde görselleştirmede ve hacmi ölçme konusunda zorluk çektikleri, genellikle alan ve hacim kavramlarını birbirine karıştırdıkları ve birim küpleri sayma ile ilgili yanlış stratejiler geliştirebildikleri görülmüştür (Battista ve Clements, 1996; Ben Chaim, Houang ve Lappan, 1985; Clements ve Sarama, 2009; Olkun, 2003). Prizmanın içindeki birim küp sayısını katmanlı olarak keşfedilememesi ve hacmin işlemsel olarak anlamlandırılmaya çalışılması öğrenciyi formülü anlamlandırmadan ezberlemeye sürükleyebilir (Battista ve Clements, 1996; 1998). Oysaki günlük yaşamda da çokça karşımıza çıkan, hacim kavramı ile ilgili kuralların ve formüllerin hazır olarak verilmesi yerine, öğrencilerin bu kuralları ve kavramla ilgili ilişkileri kendilerinin oluşturabileceği bir öğretim ortamının hazırlanması gerekmektedir (Olkun, 2003). GME kuramına uygun bir şekilde hazırlanan öğrenme ortamı sayesinde öğrencilerin hacmi kavramsallaştırma sürecinde informal bilgilerinden yararlanmaları sağlanabilmekte ve matematikleştirme süreçleri desteklenebilmektedir.

Yapılan çalışmalarda öğretmenlerin hacme kavramsal olarak yaklaşmalarının gerekliliği ve öğretim sürecinde öğrencilerin uzamsal yapılanmalarını desteklemelerinin önemi vurgulanmıştır (Clements ve Sarama, 2009; Esen ve

Çakıroğlu, 2012). GME kuramını esas alan bir öğrenme ortamında kavramın ilk nasıl oluştuğu, neden bu kavrama ihtiyaç duyulduğu araştırılarak, öğrencilerin matematiğin icat edildiği süreçlere benzer süreçleri deneyimlemesi sağlanmaktadır (Fauzan, 2002; Gravemeijer, 1999; Gravemeijer ve Terwel, 2000). Böylece öğrencilerin hacim kavramına neden ihtiyaç duyulduğunu hissedebilecekleri ve kavramın gerçek hayattaki karşılığını analiz edebilecekleri düşünülmektedir. Ayrıca, bağlamsal problemin çözülmesi ve matematikleştirme süreçlerinin sonucunda ulaşılan kavramın öğrencilere daha anlamlı geleceği düşünülmektedir (Gravemeijer, 1999). Öğrenmeye anlamlı bir şekilde başlayan öğrencilerin yeniden buluş süreçleri desteklenerek (Freudenthal, 1983), hacim kavramının oluşumu için temel teşkil eden bilgiler ile doğru bir şekilde ilişkilendirmeleri sağlanabilir. Heterojen gruplar içerisinde öğrenme sürecinde önbilgiler ile ilgili var olan yanılgıların ortaya çıkması durumunda, grup içi ve gruplar arası tartışmalar yapılarak öğrencilerin iş birliği ile öğrenmeleri, öğretmenin rehberliğinde yanlış olan bilgilerinin giderilmesi sağlanabilir. Böylece kavram daha sağlam temeller üzerine kurulabilir ve öğrenciye matematiksel bilgisini kendisinin oluşturabilmesi için fırsat tanınmış olur (Treffers, 1991a; van den Heuvel Panhuizen, 2000).

Öğrenciler dikdörtgenler prizmasının hacminin hesaplanması konusu ile ilk kez 6. sınıfta karşılaşmaktadırlar. Bu konunun anlamlı bir şekilde yapılandırılması, öğrencilerin alan ve hacim ile ilgili kavram yanılgılarının giderilmesini ve hacim kavramı ile ilgili zihinlerinde sağlam şemaların oluşmasını sağlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca, hacim ve daha da özelde dikdörtgenler prizmasının hacmi kavramı ve bağıntısının anlamlı bir şekilde yapılandırılması, 8. 10 ve 11. sınıfta öğrenilecek olan piramit, koni, silindir ve kürenin hacmi kavramları, formül ve bağıntıların yapılandırılmasında, üç boyutlu uzamsal yapılanmada ve dönüşüm geometrisi konusunda temel teşkil etmektedir. Bu yüzden, dikdörtgenler prizmasının hacminin anlamlı bir şekilde öğrenilmesinin oldukça önemli olduğu düşünülmektedir.

Hacmin kavramsallaştırılması ile ilgili çalışmalar incelendiğinde, GME yönteminin hacim kavramına hacim ölçme birimleri konularının öğretimine etkisinin araştırıldığı (Bıldırcın, 2012; Taş, 2018); ayrıca, hacim konusu ile ilgili kavram yanılgıları, bu yanılgıların nasıl giderilebileceği (Olkun, 1999; 2001; 2003), hacim bulma konusunda öğrencilerin hangi stratejileri kullanabileceği, bu stratejilerin etkililiği (Battista ve

Clements, 1996; Ben Chaim ve diğerleri, 1985), öğretim ortamlarının nasıl sunulması gerektiği (Clements ve Sarama, 2009; Sullivan ve Lilburn, 2002) ile ilgili çalışmaların mevcut olduğu saptanmıştır. 6. sınıf öğrencilerinin kavram oluşturma süreçlerini APOS teorik çerçevesinde inceleyen bu çalışmanın ise alan yazındaki önemli bir boşluğu tamamlayacağı düşünülmektedir. Ayrıca, çalışmanın hacim kavramının öğrenciler tarafından nasıl öğrenildiğine ışık tutarak, konu ile ilgili etkili öğretim tasarımlarının geliştirilmesine, kavramın oluşum sürecinde öğrencilerin yaşadığı güçlüklerin nedenleriyle birlikte ortaya çıkmasına ve böylece kavramın öğrenilmesi ile ilgili olası aksaklıkların giderilmesine katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Hacim kavramı sağlam temeller üzerine atılarak öğrenildiğinde, ilişkili olan diğer kavramların daha anlamlı bir şekilde yapılandırılabileceği düşünülmektedir.

1.4 Araştırmanın Sınırlıkları

Bu çalışma, çalışmanın gerçekleştirildiği ortam, gruplar, katılımcılar ve yöneltilen sorular ile sınırlandırılmıştır. Çalışmanın gerçekleştirildiği sınıftaki öğrenciler konu ile ilgili hazırbulunuşluk düzeyleri, iletişim becerileri gibi değişkenlere göre heterojen gruplara ayrılmıştır. Birbirine yakın seviyede olduğu düşünülen öğrenciler farklı gruplara atanmışlardır. Fakat bu öğrencilerin gerçekleştirdiği süreçler ve grup arkadaşlarını etkileme seviyeleri birbirinden farklı olacağından, öğretim sürecinde bu gibi kontrol edilemeyen etmenler çalışmanın sınırlılığı olarak ele alınmıştır. Ayrıca, araştırma süresince ders ve görüşme saatleri değişkenlik gösterdiğinden, öğrencilerin motivasyonu, yorgunluk ve gönüllülük düzeylerinin değişkenlik göstermesi araştırmanın sınırlıklarındandır.

1.5 Araştırmanın Varsayımları

Bu çalışmada, öğretim sürecinden önce hacmin öğrenilmesi için önkoşul olan konuları içeren hazırbulunuşluk testinin öğrencilerin düzeyini doğru bir şekilde ölçtüğü varsayılmaktadır. Hazırlanan bağlamsal problemlerin ve öğrenme ortamının GME kuramına uygun olduğu, öğrencilerin kavram oluşum süreçlerini açığa çıkaracak nitelikte olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca, araştırmacının öğrencilerin kavram oluşum süreçlerini açığa çıkaracak şekilde sorular sorduğu, grupların ve öğrencilerin süreçlerinden etkilenmeden tüm katılımcılara objektif bir şekilde yaklaştığı varsayılmaktadır.

1.6 Tanımlar

Bu tezde yer alan anahtar kavram ve terimler aşağıdaki tanımlarda açıklanmaya çalışılan anlamlarda kullanılmaktadır.

Soyutlama: Matematiksel nesneler arasındaki ilişkilerin ve ortak özelliklerin belirlenmesini ve bu ilişkilerin ayrıntılardan uzaklaşarak belirli ifadelere dönüşümünü içeren süreçtir (Sierpinska, 1994; Skemp, 1986). Yönü bağlamlar kümesinden kavrama doğru olan (Mitchelmore, 2002), bu sürecin sonunda oluşan bilişsel yapılar kavram olarak adlandırılır (Skiff, 1953; Von Glasersfeld, 1991).

GME: Matematikleştirme sürecinde yeniden buluşun nasıl yapılması gerektiği hususunda rehberlik etmeye odaklanan bir teoridir ve deneysel olarak gerçek bağlam problemleri ile öğrencilerin informal çözüm stratejilerini ve yorumlarını hesaba katar. Bu yeniden buluş sürecinin kalbinde, öğrencilere deneysel olarak gerçek görünen problem durumlarındaki matematiksel aktiviteler yer almaktadır. Yeniden buluş; iddia öne sürmeyi, hipotez kurmayı, açıklamayı ve doğrulamayı içeren tüm sınıf tartışmalarının çok önemli bir rol oynadığı, bireysel olduğu kadar kollektif bir faaliyettir. Bu yaklaşımda araştırmacılar, ilkokul ve ortaokul matematiğindeki sembolize ve modelleme üzerine yapılan çalışmaları temel almaktadır (Freudenthal, 1973; 1991; Treffers, 1991; Gravemeijer, 1994, 1999).

APOS: Piaget'nin reflektif soyutlama anlayışı genişletilerek ve yenden organize edilerek ortaya konan bir teorik çerçevedir. Buna göre, matematiksel bilgi ve kavram oluşturma ve geliştirme süreçleri eylem, süreç, nesne ve şemadan oluşan zihinsel yapıların yanında içselleştirme, koordinasyon, geri dönme, enkapsülasyon, de-enkapsülasyon ve temalaştırma gibi zihinsel mekanizmalar ile açıklanabilir (Arnon ve diğerleri, 2014; Asiala ve diğerleri, 1997).

Prizma: $\boldsymbol{G}$ uzayda bir çokgen ve $\vec{\boldsymbol{u}}$, $\boldsymbol{G}$ yi içinde barındıran düzleme ait olmayan bir vektör olsun. Doğrultusu $\vec{\boldsymbol{u}}$ olan ve $\boldsymbol{G}$ çokgenine dayanan bir $\boldsymbol{l}$ doğrusunun hareket ettirilmesi ile oluşan yüzeye prizma denir. Prizmalar isimlerini genellikle çokgenden alırlar. Örneğin; üçgen prizma, kare prizma, beşgen prizma vb. gibi. Prizma çokgensel bölge olan yan yüzlerin paralel ve eş çokgensel tabanlarla birleştirilmesi ile oluşan çok yüzlü olarak da tanımlanabilmektedir (Argün, Arıkan, Bulut, Halıcıoğlu, 2014).

Hacim: Üç boyutlu katı cisimlerin ölçülebilen niteliklerinden birisi, cismin uzayda yer işgal etmesidir. Katı cisimlerin bu niteliğine hacim adı verilmektedir (Argün ve diğerleri, 2014). Uzayda yer işgal eden her bir cisme işgal ettiği yerin miktarını ifade eden bir sayı karşılık gelmektedir. Dolayısıyla hacme katı cisimler üzerinde negatif değerli olmayan bir fonksiyon gözüyle de bakılabilmektedir.

Geometride bilinen ve sık kullanılan katı cisimlerden birçoğu onu uzaydan ayıran yüzeylerle isimlendilmektedir. Koni, piramit, silindir, prizma bunlardan bazılarıdır. Dolayısıyla dikdörtgenler prizmasının hacmi denildiğinde aslında kastedilen dikdörtgensel prizma ile uzaydan koparılan cisimin hacmidir. Bu tezde prizmaların hacminden bu anlam anlaşılmalıdır. Bu bağlamda dikdörtgensel prizmanın miktarı "tabandaki birim küp sayısı ile kat sayısı (yüksekliği oluşturan birim küp sayısı) çarpılarak belirlenir" (Doğan, 2016, s. 209).

İKİNCİ BÖLÜM

II. KURAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde öncelikle Gerçekçi Matematik Eğitimi (GME) hakkında genel bazı bilgiler verilerek, GME' nin temel ilkeleri ve öğrenme öğretme prensipleri tartışılmıştır. Devamında, kavram ve kavram oluşumu tanımlanarak matematiksel kavram oluşum süreçlerini açıklayan APOS teorik çerçevesi ile incelenmiştir.

2.1 Gerçekçi Matematik Eğitimi

Gerçekçi Matematik Eğitimi (GME) "yeni matematik" veya "modern matematiğe" tepki olarak oluşturulmuş, 1968 yılında Edu Wijdeveld, Fred Gofree ve Adri Treffers tarafından başlatılan, sonrasında Hans Freudenthal'in katılımıyla geliştirilen "Wiskobas Projesi" ile Hollanda'da yapılan araştırmalar sonucunda ortaya atılan bir eğitim kuramıdır (Freudenthal, 1973; Gravemeijer, 1994; Treffers, 1987; 1991b; van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Freudental (1968) matematiğin öğretenden öğrenene aktarılan bir konu olarak ele alınamayacağını savunarak, matematiğin ilk ve en önemli insan aktivitesi olduğunu vurgulamıştır. Günümüze değin insanlar çevresindeki olayları kontrol altında tutmak, ihtiyaçlarını karşılamak için sayı sayma, sıralama, ölçme ve sınıflama gibi matematiksel işlemler yapmışlardır. Yani, sosyal iş ve ihtiyaçlar matematik yapma ihtiyacını gerektirmiştir. Örneğin, iki sıvıdan hangisinin daha çok yer kapladığını bilme ihtiyacı hacim ölçmeyi ve dikdörtgenler prizmasının hacmini $H = e \times b \times y$ olarak formülleştirmeyi gerektirmiştir ki bu süreç matematikleştirme olarak adlandırılır (Memnun, 2011; van den Heuvel-Panhuizen, 1996).

Matematikleştirme uğraşılan çözümü ve maddeyi daha matematiksel (hale getirme) yapma olarak tanımlanabilir. "Daha matematiksel" ifadesi genelleştirilmiş, açık, kesin ve öz bir matematik anlayışını sunar. Matematikleştirme sürecinin nasıl gerçekleştiğini anlamlandırabilmek için bu özelliklerin hangi stratejileri barındırdığı irdelenebilir (Gravemeijer, 1994, akt. Gravemeijer ve Terwel, 2000, s.5):

- *Genelleştirilebilirlik*: benzerliklere bakma, sınıflandırma, yapısallaştırma,

- *Açıklık* (certainty): yansıtma, doğrulama, kanıtlama (örneğin; varsayımları test etmek ve detaylandırmak için sistematik bir yaklaşımın kullanılması),

- *Kesinlik* (exactness): modelleme, sembolleştirme, tanımlama (yorumlamanın sınırlandırılması) ve

- *Özlük*: sembolleştirme ve şemalaştırma (standart yöntem ve notasyonların geliştirilmesi) stratejileri ile bağdaştırılabilir.

Matematikleştirme hem gerçek yaşam prosedürlerini hem de matematiksel prosedürleri içerir. Yani matematikleştirme soyut matematiğin yanında uygulamalı matematiği de içerir. Fakat genç veya küçük çocuklar başlangıçta matematiksel prosedürleri gerçekleştiremezler; çünkü bu prosedürler onlar için gerçek değildir (Gravemeijer ve Terwel, 2000). Bu görüş aslında Piaget'nin Bilişsel gelişim kuramı ve bilişsel evreler ile uyumludur. Çünkü somut işlemler evresinde olan çocuklar soyut matematiksel bilgiyi edinemezler veya bu bilgiyi işleyemezler. Vygotsky' e göre ise akran veya yaşça daha büyük birinin yardımı olmadan bir üst seviyeye geçemezler (Chaiklin, 2003). Buradan genç çocukların gerçek yaşam prosedürleri (uygulamalı matematik) ile etkileşimde olmadan matematiksel prosedürleri (soyut matematik) doğru bir şekilde anlamlandırılamayacağı sonucu çıkarılabilir. Bahsedilen gerçek yaşam prosedürlerinin ve matematiksel prosedürlerin öğrenciler tarafından anlamlandırılabilmesi için, grupla ve öğretmen rehberliğinde matematiksel aktiviteler yapılmalı ve matematiksel tartışmalar içerilmelidir (Gravemeijer ve Terwel, 2000).

Freudenthal' e göre, matematik eğitiminde matematikleştirmenin anahtar süreç olmasının iki sebebi vardır. Öncelikle, matematikleştirme matematikçilerin yanında, öğrenciler için de önemli bir aktivitedir ve öğrencileri günlük yaşam durumlarında karşılaştıkları matematiksel yaklaşımlara alıştırır. Örneğin, bağlamsal problemleri çözerken uygulanan matematiksel aktiviteler, matematiksel yaklaşımın sınırlılıklarını ve ihtimallerini bilmeyi içerir; ayrıca bu yaklaşımın ne zaman uygun ne zaman uygun olmadığı bilgisine sahip olmayı gerektirir. Yani, bağlamsal problemleri çözerek matematiği öğrenmek bir başka ifade ile matematik yapmak matematik eğitiminin önemli bir parçasıdır (Fauzan, 2002; Gravemeijer, 1994). Matematikleştirmenin anahtar süreç olarak adlandırılmasının bir diğer sebebi ise, matematik yapmadaki son adım olan aksiyomlaştırma (kurallaştırma) yoluyla formalleştirme olmasıdır (Fauzan, 2002). Geleneksel matematik öğretiminde bu adım öğretmenler tarafından derse ilk başlandığında kullanılır. Örneğin, yamuğun alanı ile ilgili formül direkt olarak öğrencilere verilip, bununla ilgili aslında hepsi birbirine benzeyen kalıplaşmış ve ezbere yönelten soruları öğrencinin çözmesi istenir. Bu çeşit derslerde öğrenci soru kalıbını ve formülü ezberleyerek, hiçbir şekilde süreci anlamlandırmadan pek çok soruyu sonuca ulaştırılabilir (Fauzan ve diğerleri, 2002). Fakat GME' de, Bakker'ın da (2004: 4-5) ifade ettiği gibi "*matematik her zaman öğrencilere anlamlı gelmelidir*" cümlesi temel prensip olarak alınır. Bu yüzden, GME yaklaşımını esas alan öğretim durumlarında asıl önemli olan öğrencinin problem durumunun sonucuna ulaşması değil, çözüm sürecinde problemi anlamlandırarak ve kendinden bir şeyler katarak problemi çözmesi, sonrasında da yaptığı işlemi genelleştirmesidir. Bu süreçte, öğretmen öğrencileri yönlendirecek fırsatlar sunmalıdır; böylece, öğrencilerin matematik yaparak matematiği yeniden keşfetmelerinin önü açılabilir (van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

GME sürecinde, öncelikle öğrenciye gerçek hayatta karşılaşabileceği bir problem durumu verilir ve başlangıçta öğrenci hangi matematiksel bilgiyi öğreneceğinden habersizdir. Öğrenci problemi çözmek için gerçek yaşamda uygulayabileceği informal stratejiler geliştirir (Treffers, 1991a). Yani, bağlamsal problemleri çözerken kullanılan aktivitelerde, öğrenciler informal bilgilerini kullanarak, matematiksel bilgiyi yeniden keşfederler. Bu süreçte öğrenciler problem durumundaki ilişkileri şemalaştırak ve/veya tanımlayarak daha iyi anlamaya çalışabilirler. Problemdeki ilişkileri tanımlamak, önem derecesine göre kategorize etmek, problemin daha basit ve anlaşılır olmasını sağlar (Fauzan, 2002). Son olarak, öğrenciler geliştirdikleri informal stratejiler arasında ilişki kurarak, yani edindikleri informal bilgileri soyutlayarak formal çözüme ulaşır (Memnun, 2011). Bu süreçte matematiksel modellerin de yardımıyla gerçek bağlamdan matematiksel bağlama geçilebilir (Gravemeijer, 1999). Matematiksel bağlamda gelişen modeller, matematik dünyasının içinde çözülen problemden bağımsızlaşmalıdır. Yani öğrenci edindiği bu matematik bilgisini farklı bir problemde veya hikâyede kullanabilmeli; hatta farklı kavramların oluşumunda bu bilgiden yararlanabilmelidir (Fauzan, 2002).

Aşağıda GME' nin temel ilkeleri, öğrenme ve öğretme prensipleri ve aşamaları ayrıntılı olarak açıklanmaktadır.

2.1.1 Gerçekçi Matematik Eğitiminin Temel İlkeleri

GME kuramının temelini oluşturan ve öğretim tasarımında göz önünde bulundurulması gereken ilkeler matematikleştirme yoluyla yönlendirilmiş yeniden buluş, didaktik fenomonoloji ve kendi kendine gelişen modeller olarak adlandırılabilir (Gravemeijer, 1994). Bu ilkeler aşağıdaki bölümlerde ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

2.1.1.1 Matematikleştirme Yoluyla Yönlendirilmiş Yeniden Buluş

Matematikleştirme yoluyla yönlendirilmiş yeniden buluş prensibi, kişinin gerçek yaşam problemleriyle ilk karşılaştığı anda başlar. Bu ilke öğrencinin kendine ait, sorumlu olacağı bilgiyi oluşturmasını esas alır (Gravemeijer ve Terwel, 2000). Bu süreçte öğrenci, problemi yapılandırmaya, organize etmeye ve problemin matematiksel yanlarını bulmaya çalışır. Sürecin sonucunda matematiksel kavramlar geliştirilir ve yeniden icat edilir (Fauzan, 2002). Ayrıca, öğrencinin matematiksel icat/buluşların yapıldığı zamana benzer durum ve süreçleri deneyimlemesi sağlanmalıdır (Gravemeijer, 1994). Böylece, öğrenci matematiksel keşfe neden ihtiyaç duyulduğunu, hangi süreçlerden geçildiğini anlamlandırarak gerçek matematikçilerin süreçlerine benzer süreçleri deneyimleyebilir ve ulaşılan formülü yeniden keşfedebilir.

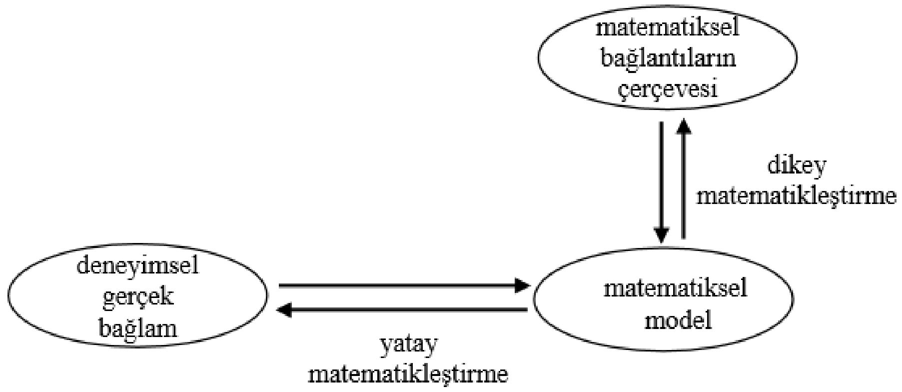
Bağlamsal (gerçek yaşam) problemler, çeşitli çözüm yolları ve çözüm yolunun matematikleştirilmesi ile öğrencileri yönlendirir ve öğrenciye yeniden keşfetme sürecini yapılandırması için olanaklar sağlar (Fauzan, 2002). Matematikleştirme olarak adlandırılan bu süreçte öğrenci, matematiksel bilgiye kendi informal bilgilerini kullanarak, problemin matematiksel yanlarını keşfederek ve çeşitli stratejiler geliştirerek ulaşmalıdır (Fauzan, 2002; Gravemeijer, 1994).

GME' de önemli bir yere sahip olan matematikleştirme, genelleme ve formalleştirme olarak adlandırılan iki önemli adımı içerir. Formalleştirme; modelleme, sembolleştirme, şemalaştırma ve tanımlama gibi süreçleri kapsarken, genelleştirme (yansıtıcı duyguyu özümseme) aşamasında öğrenci problem ve çözüm üzerinde yoğunlaşarak, yansıtıcı düşünebilir (Gravemeijer, 1994; Treffers, 1991a).

Treffers, (1987) eğitim ortamlarında matematikleştirmenin yatay ve dikey matematikleştirme olmak üzere iki temel süreçten oluştuğunu savunmuştur. Yatay matematikleştirmede öğrenci, gerçek yaşam durumlarındaki problemleri organize etme ve çözme süreçlerinde yardımcı rol oynayan matematiksel araçlarla uğraşır. Dikey matematikleştirme ise matematiksel sistem içindeki yeniden organizasyon sürecidir. Dikey matematikleştirme sürecinde öğrenci, kısaltmalara ulaşabilir, kavramlar ve stratejiler arasındaki bağlantıları keşfedebilir ve keşfedilen bağıntıları uygulayabilir (van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

Gravemeijer ve Terwel'e (2000) göre yatay matematikleştirme bağlamsal problemi matematiksel bir probleme dönüştürme süreci iken, Van den Heuvel-Panhuizen ve Drijivers (2014) bu süreci gerçek yaşamın matematiksel araç ve sembollerle ifade edilmesi olarak tanımlamıştır. Yatay matematikleştirmede öğrenciler günlük yaşamlarında gerçekleşebilecek veya sanal gerçekliklerden türetilen problemlerle uğraşırken, kendi informal bilgilerini informal bir dil ile ifade etme ve bağlamdan ayrı olarak düşünme fırsatına sahip olurlar (Fauzan, 2002; Memnun, 2011). Dikey matematikleştirmede kavram ve süreçler arasındaki bağlantılar kullanılarak, matematiksel sistemin yeniden organize edilmesi süreci söz konusudur (Gravemeijer ve Terwel, 2000; van den Heuvel-Panhuizen ve Drijivers, 2014). Kısaca, yatay matematikleştirme gerçek dünyadan semboller dünyasına bir geçiş süreci iken, dikey matematikleştirme semboller dünyasındaki zihinsel aktiviteleri içerir (van den Heuvel-Panhuizen, 2000). Sonuç olarak, yatay matematikleştirme günlük yaşam problemi veya fiziksel modelden matematiksel bilginin üretildiği safhadır. Uzun vadede, öğrenci benzer işlemleri tekrarladıktan sonra, basitleştirme ve formalleştirme yoluyla informal dil daha formal ve standartlaşmış bir dile dönüşür. Bu süreçlerin sonunda öğrenciler bir algoritmaya ulaşabilirler ise birtakım matematiksel süreçleri işleyerek dikey matematikleştirme olarak adlandırılan eylemi gerçekleştirmiş olurlar (Treffers, 1991a). Ayrıca, öğrenci keşfettiği çözümü ve metodu daha ileri bir seviyeye taşırsa, bu süreç de dikey matematikleştirme olarak adlandırılır (Gravemeijer ve Terwel, 2000).

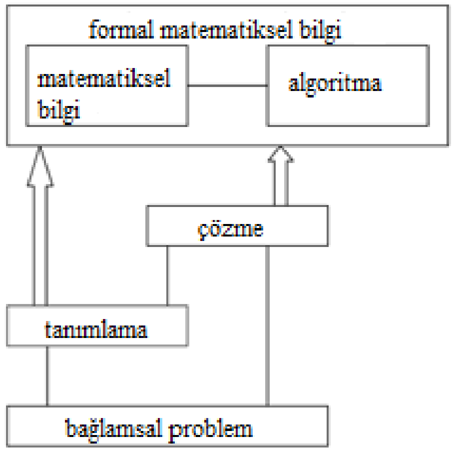
Yatay ve dikey matematikleştirme süreçleri kesin çizgilerle birbirinden ayrılmaz (van den Heuvel-Panhuizen, 2000). Freudenthal (1983), bu iki matematikleştirmenin aynı değerde olduğunu ve birinin diğerinden üstün olmadığını söylemiştir. Fakat, problem çözme sürecinde, GME' nin sadece gerçek dünya kısmına odaklanmak dikey matematikleştirme sürecinin ihmal edilmesine ve öğrenenlerin asıl matematikleştirmeyi göz ardı etmelerine sebep olabilir. De Lange'a (1987) göre yatay durumun dikey bileşenin önünde olması gerekli değildir (aktaran, Drijvers, 2003). Matematikleştirme farklı rotalar izleyebilir. Şekil 1'de yatay ve dikey matematikleşmenin izlediği rotalar ve arasındaki ilişki görülebilir (Drijvers, 2003: 54).



Şekil 1: Yatay ve Dikey Matematikleştirme (Drijvers, 2003: 54 kaynağından uyarlanmıştır)

Bir aktivitenin yatay veya dikey olmasına karar verirken kişinin matematikleştirme süreci ve matematik geçmişi göz önünde bulundurulmalıdır. Örneğin, sembolleştirme bir öğrenci için rutin bir aktivite olup yatay matematikleştirmeye örnek teşkil edebilir. Öte yandan, aynı sembolleştirme aktivitesi bir başka öğrenci tarafından yeni keşfedilmiş olabilir ve bu süreç dikey matematikleştirmeye dahil edilebilir (Gravemeijer ve Terwel, 2000).

Gravemeijer'e (1994) göre öğrencilerin informal stratejileri kullanırken, matematiksel bir dile doğru geçiş yapmaları veya belirli algoritmalara ulaşmaları dikey matematikleştirme sürecine dahil edilir (Şekil 2). Öğrenme sürecinin tamamına bakıldığında ise, öğrencilerin formal matematiksel bilgiyi yeniden oluşturma eylemlerinin tümü yeniden buluş süreci olarak adlandırılır.



Şekil 2: Yeniden İcat Süreçleri (Gravemeijer, 1994:94 kaynağından uyarlanmıştır)

Yatay Matematikleştirme (⟶); Dikey Matematikleştirme (⟹)

Yönlendirilmiş yeniden buluş ve matematikleştirme ilkesi çerçevesinde, öğrencilere matematiğin ilk keşfedildiği sürece benzer bir süreç yaşamaları konusunda fırsatlar verilmesi, öğrencilerin kendi matematiklerini geliştirmeleri için bir yol tasarlanması sayesinde mümkün olabilir. Öğrenciler kendi matematiklerini geliştirme sürecinde, akla uygun yani mantıklı tarafların geliştirilmesi ve yararsız tarafların bırakılması konusunda, matematiksel topluluk içerisinde sıradan standartlara doğru bir yakınsamayı araştırabilmek için öğretmenin rehberliğine ihtiyaç duymaktadırlar (Drijvers, 2003).

2.1.1.2 Didaktik Fenomonoloji (Sürecin Yeniden Keşfi)

Didaktik kavramı, gerçeklik olgusuyla başlama ve onunla devam etme, doğru öğretme ve öğrenme süreçlerinden bahsederken sıklıkla kullanılır (Gravemeijer ve Terwel, 2000). Freudenthal (1983) tarafından savunulan didaktik fenomonoloji, öğrenme sürecini aktif hale getirmek için öğrencinin öğrenmeye kendine anlamlı gelen olgu ve olaylardan başlaması gerektiğini belirtir. Günümüzde matematik derslerinde genellikle önce problemi çözecek olan formülün verildiği ve öğrencilerin aslında problem durumunu veya çözüm sürecini anlamlandırmadan çözüme ulaşmasının beklendiği didaktik olmayan yaklaşım benimsenmiştir.

Matematik tarihini, pratik yaşamdaki problem durumları ve bu problemlerin çözümleri oluşturur. Bu yüzden matematik derslerinde öğrenciler, matematiksel süreçleri değerlendirmeye yönlendiren bağlamsal problemlerle uğraşmalıdırlar. Didaktik fenomonolojiye göre ise öğreticinin ilk amacı duruma özgü olan spesifik yaklaşımların genelleştirilebileceği bir problem durumu bulmaktır. Ayrıca, problem durumu dikey matematikleştirmenin temelini oluşturan, paradigmatik çözüm yollarını (süreçlerini) açığa çıkaracak şekilde planlanmalıdır (Fauzan, 2002). Matematikleştirilebilecek olgu veya durumları bulmak için ise, bu olguların nasıl icat edildiği incelenmelidir (Gravemeijer ve Terwel, 2000).

Didaktik fenomonoloji ilkesine göre öğrenme sürecinde, öğrencilere anlamlı gelen gerçek problem durumu verilir. Fakat bu problem gerçek yaşam durumlarından alınabileceği gibi, aslında gerçekte olması mümkün olmayan fantastik olaylar, simultane durumlar veya matematiğin formal dünyasından gelen problemler de olabilir. Önemli olan, öğrencinin zihninde bu problem durumunu gerçekmiş gibi canlandırması ve oluşturmasıdır (Fauzan, 2002; Memnun, 2011; van den Heuvel-Panhuizen ve Drijvers, 2014). Öğrencilerin formal çözüm yollarını bulmaya çalışırken kullandığı didaktik seviyeler (fenomenler ve araçlar) öğretmenin, öğrencilerin anlama (kavrayış) düzeylerine erişebilmelerini sağlar. Böylece öğretmen, öğrencilerin anlama düzeylerini daha ileri seviyeye çıkarmak için çalışır. Bu süreçte öğretmen, bağlamsal sorulardan amaç odaklı sorulara geçer. Öğrencilerin grup içindeki stratejilerinin paylaşımalarını ve tartışmalarını destekleyerek, öğrencilerin anlama düzeylerini artırmaya çalışır (van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

2.1.1.3 Kendi Kendine Gelişen Modeller

Gerçekçi Matematik Eğitiminin üçüncü temel ilkesi kendi kendine gelişen modellerdir (Gravemeijer, 1999). Bu modeller informal ve formal bilgi arasındaki boşluğu tamamlamada ve formal matematiği oluşturmada önemli görev üstlenirler. RME hazır modellerden ziyade, uygun çözüm sürecini destekleyen işlemsel modelleri savunur. Sonrasında, bu modeller formal matematiksel akıl yürütmeyi sağlayacak şekilde karmaşıklaşır (Gravemeijer ve Terwel, 2000). Ayrıca GME'ye göre model, soyut olan formal matematiği öğrencilerin ulaşabileceği şekilde somutlaştırmak değildir. Bunun yerine, modeller öğrencinin çözeceği bağlamsal problem içerisine gömülüdür. Böylece, öğrenci çözdüğü problemi modelleyebilir. Öğrenci tanıdık olduğu modellerden başlar ve problemle uğraşıldıkça, çözüm süreci formalleştirilerek genellemelere ulaşılır. Böylece model, aşamalı olarak somut halinden ve problemden bağımsızlaştırılır (Fauzan, 2002; Gravemeijer, 1999). Gravemeijer (1994) bu süreci, “*bir şeyin modeli*” nden (*model of*) “*bir şey için model*” e (*model for*) doğru dönüşüm olarak ifade etmiştir. *Bir şeyin modeli*- “model of” informal olan matematiksel aktiviteleri içerirken, *bir şey için model*- “model for” daha formal olan matematiksel akıl yürütmeye dayanmaktadır. Streefland (1991) “bir şeyin modeli”nden “bir şey için olan model”e dönüşümü aşağıdaki gibi örneklendirmiştir. Üç pizzayı dört kişi arasında eşit olarak paylaştırma bağlamında, öğrenciler başlangıçta pizza olarak düşündükleri daireyi parçalara ayırarak çizmişler ve problemi modellemişlerdir (*bir şeyin modeli*- “model of”). Sonrasında ise, benzer çizimi tekrar kullanmışlardır, fakat bu sefer kullandıkları çizim kesirler arasındaki ilişkilerle ilgili akıl yürütmelerini desteklemektedir (*bir şey için model*- “model for”) (Streefland, 1991; aktaran Gravemeijer, 1999). Yani bu dönüşümle birlikte model öğrencinin akıl yürütme ve zihninde canlandırma süreçleri için kullanılabilir (Treffers, 1991a).

Modelin oluşturulması ve geliştirilmesi süreci dört seviyeden oluşmaktadır. İlk seviye (task setting) deki aktiviteler, problem bağlamında gerçekleştirilebilecek eylemlerin anlaşılmasına dayanan yorum ve çözümleri içerir (task setting). Bu aktiviteler genellikle okul dışında gerçekleştirilebilir. Sonraki seviyede (referential/model of), problemi çözme sürecinde gerçekleştirilen aktivitelere bağlı olarak duruma özgü bir model oluşturulur. Üçüncü seviyede (general/model for), modelin durumdan bağımsızlaşması ile farklı durumlar için çözüm ve yorumlar geliştirilebilir. Son seviyede ise (formal), öğrenci modelin desteğine ihtiyaç duymadan, matematiksel bir aktiviteyi gerçekleştirebilir ve bu süreçte formal matematiksel akıl yürütmeyi geliştirebilir (Gravemeijer, 1999; Whitenack, Bowers, Cobb ve Gravemeijer, 2012).

GME’de modelleme sürecinin doğru bir şekilde anlamlandırılması için, modelin formal matematiksel bilgi kullanılarak somutlaştırılması (embodiment) ve modelin problem içerisine gömülü olma durumu (embededness) kavramlarının ayrımının iyi anlaşılması gereklidir. Somutlaştırma, ürün temelli matematik derslerinde zaten var olan modeller olarak tanımlanır. GME’de ise model (embededness), öğrencilerin kendi aktiviteleri ve bilgileri sonucunda ortaya çıkar. Ayrıca, model kullanımının amacı matematiksel bilgiyi uzmanların bakış açısıyla sunmaktan ziyade, öğrencileri kendi fikirleri ve bilgilerini referans alarak matematiksel bilgiyi oluşturmaları yönünde teşvik etmektir (Fauzan, 2002; Gravemeijer, 1999; Treffers, 1987).

Sonuç olarak model, öğrencinin bağlamsal problemi çözme sürecinde kullandığı informal strateji ve çözümlerden ortaya çıkar ve bu stratejileri destekler. Benzer çözüm süreçleri ve yollarına maruz kalındıkça, model ve strateji problem durumundan bağımsızlaşır ve problemin matematiksel özellikleri ile ilişkilendirilir. Bu nedenle öğrenciler, daha formal bir matematiği icat edebilmeleri için teşvik edilmeli ve problemi çözme sürecinde kendi modellerini geliştirebilmeleri için kendilerine fırsat tanınmalıdır (Gravemeijer, 1999).

2.1.2 Gerçekçi Matematik Eğitiminin Öğrenme ve Öğretme Prensipleri

Bir önceki bölümde, öğretim tasarımları için temel oluşturan GME' nin ilkelerine değinilmiştir. Bu bölümde GME' ye uygun materyal tasarımından bahsedilecek, öğretmenlerin ders ortamında müfredatı nasıl sunacağı, öğrencilerin materyaller yardımıyla nasıl öğreneceği gibi sorulara cevap aranmıştır. Van den Heuvel-Panhuizen, (1996), altı öğrenme ve öğretim prensibinden bahsederken, Treffers (1991a) ise beş öğrenme ve öğretme prensibini vurgulamıştır:

Oluşturma ve somutlaştırma: GME'nin ilk öğrenme ve öğretme prensibine göre matematiği öğrenme yapılandırmacı bir aktivitedir. Bu ilkeye göre öğrenciler öğrenmeye somut bir temel ile başlamalıdırlar (Fauzan, 2002). Ayrıca, eğitim olgusal keşiflere odaklanmalıdır (Gravemeijer, 1994). GME' de öğretime, matematiksel organizasyonu destekleyen zengin içerikli problemler ile başlanmalı ve öğrencilerin bağlamla ilgili informal çözüm süreçleri izlenmelidir (van den Heuvel-Panhuizen ve Drijvers, 2014). Eğer, öğrenme sürecinde öğrenilecek kavrama uygun zihinde oluşturulan şema, yöntem ve sezgi gibi temsil biçimlerinin öğrencilerin kendilerinin keşfetmesi desteklenir, keşif ve icat/buluşlar için uygun ortam oluşturulursa, öğrencilerin matematikleştirme sürecine etkin katılımı sağlanabilir (Memnun, 2011).

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) bu prensibi aktivite prensibi olarak adlandırmış ve matematiksel kavramları üretebilecekleri problem durumları ile karşılaşan öğrencilerin, kendi informal düşünme yollarına dayanarak kendi ürünlerini oluşturduklarını savunmuştur. Öğrencilerin kendi kendilerine oluşturduğu ürünlerin ise GME'de önemli bir rol oynadığından bahsetmektedir.

Modellerin ve sembollerin kullanımı: Matematiksel kavramların öğrenilmesi uzun zaman alan bir süreçtir. Bu süreçte, öğrenciler çeşitli soyutlama seviyeleri (informalden formale; sezgisel modelden konuların sistematikleştiği modele) arasında geçişler yaparlar (Treffers, 1991a). Ayrıca, Gravemeijer'e (1994) göre bu seviyeler arasında boşlukları tamamlamak ve öğrencilerin bilişsel geçişlerini kolaylaştırmak için problemin çözüm sürecinde ortaya çıkabilecek modeller ve şemalar kullanılır.

Van den Heuvel-Panhuizen (1996) bu prensibi seviye prensibi olarak adlandırmış ve Treffers'ın (1991a) da savunduğu gibi modellerin formal matematiksel bilgiye ulaşılmasını destekleyen bir araç olduğunu savunmuştur. Ayrıca, informal ve formal seviyeler arasındaki köprüyü sağlamlaştırmak için modeller "bir şeyin modeli" nden "bir şey için model" e doğru geçiş yapmalıdırlar (Van den Heuvel-Panhuizen, 1996). Seviye prensibi matematiksel kavrama düzeyinin geliştirilmesini ve müfredatın boylamsal bir mantık içinde ilerlemesini sağlar (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

Reflektif düşünme ve özel ödevler: Öğrenci, problemle ilgili fikir veya modeller ürettikçe, verilen problem ve kendi çözüm süreçleri üzerinde derinlemesine düşündükçe, daha ileri düzeyde zihinsel yapılar oluşturabilir (Treffers, 1991a). Bu nedenle, öğrenciye kendi özgür ürün ve düşüncelerini açığa çıkaracak özel ödevler verilmelidir. Çatışma problemleri buna örnek oluşturabilir (Fauzan, 2002).

Özel ödevlerin Van den Heuvel-Panhuizen'in (1996) rehberlik ilkesi ile ilgili olduğu söylenebilir. Eğitim programları, öğrencilerin anlama düzeylerini ileri seviyeye taşıyacak şekilde işleyen senaryolar sunmalıdır. Bu senaryolar istenen amaçlara dayandırılan, uzun süreli öğrenme ve öğretme süreçlerini kapsayan bir algıyla oluşturulmalıdır. Böylece, süreç içerisinde öğrencilerin yönlendirilmesi mümkün olabilir (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

Sosyal bağlam ve etkileşim: Öğrenme yalnız yapılan bir aktivite olmayıp, sosyal (kalabalık) ortamlarda gerçekleşir (Treffers, 1991a). Freudenthal'e (1983) göre grup çalışmasının öğrenmeye etkisi yadsınamaz ve gruplar ilgili alanda güçlü ve zayıf olan öğrencileri birlikte barındırmalıdır. Böylece, bütün öğrenciler iş birliğinden yararlanabilir. Ayrıca, gruplar kendi çözüm yollarını ve stratejilerini paylaştıkça ve grup içi tartışma desteklendikçe, grup üyeleri farklı ve orijinal bir çözüm yolunu veya yeni stratejileri keşfedebilir. Sonrasında bunları kendi buldukları çözüm yolları ile karşılaştırabilirler. Grup çalışması boyunca oluşan iletişim sayesinde, sürecinin önemli öğeleri olan tartışma, iş birliği ve değerlendirme yöntemleri ile öğrencilerin ileri seviyede düşünmelerine yardımcı olan yansıtıcı öğrenme becerisi harekete geçirilebilir (Fauzan, 2002; Gravemeijer, 1994; Gravemeijer ve Terwel, 2000).

Freudenthal'e (1983) göre matematiksel bir aktivitenin matematiksel tartışmaları temel alması gerekmektedir. Grup içi yapılan matematiksel tartışmalar ise matematikçilerin soyut tartışmalarını model almalıdır. Böylece öğrenciler gerçek matematiğin icat edenlerin durumları deneyimleyebilirler (Gravemeijer ve Terwel, 2000). GME'de bütün sınıfın katılacağı aktiviteler ve oyunlar büyük öneme sahiptir. Fakat bu, her öğrencinin aynı anda aynı seviyede olacağını anlamına gelmez, aksine her öğrenci farklı bireysel özelliklere sahip olduğu gibi, farklı öğrenme yolları ve stratejilerine sahip olabilir. Grup çalışmalarında farklı seviyelerdeki öğrencileri bir arada tutmakta sorun yaşanabilir. GME sürecinde ise bu sorun farklı anlama düzeylerine uygun problemler sağlanarak çözülebilir (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000). Bunu yanı sıra grup çalışmasının farklı dezavantajları da olabilir. Örneğin, grup çalışmasında öğrencilerin bireysel çalışmalarındaki aksaklıklar göz ardı edilebilir. Fakat öğretmen, öğretim sürecinde bu aksaklıkları gözlemleyerek öğrencinin anlamlandırma seviyesi hakkında fikir sahibi olabilir (Gravemeijer ve Terwel, 2000).

Yapılandırma ve birlikte işleme (interweaving): Matematiği öğrenme alakasız bilgi ve becerilerin toplanması değil, yapılandırılmış bir başlangıç yardımıyla bilgi ve becerilerin oluşumudur (Treffers, 1991a). Gravemeijer'e (1994) göre problem çözerken konu başlıklarını sarmal şekilde ele alan bütüncül yaklaşım kullanılmalıdır. Yani, matematik bir bütündür; bir kavram öğretilirken diğer kavramlarla ile ilişkilendirilmeli ve sarmal şekilde öğretilmelidir. Öğrencilerin çeşitli matematiksel araçları ve bilgilerini kullanabilecekleri zengin içeriğe sahip problem durumlarından yararlanmaları sağlanmalıdır. Örneğin; sayı oluşumu, zihinsel aritmetik, tahmin etme ve algoritma konuları birbiriyle ilişkilidir (van den Heuvel-Panhuizen ve Drijvers, 2014). Öğretim sürecinde, öğrencilerin öğrenecekleri kavramı ilişkili ön bilgilerle sarmal şekilde öğrenmesi sağlanırsa, tam öğrenme sağlanabilir ve müfredat, öğrenciler için daha tutarlı hale gelerek öğrencilerin zihninde oluşan 'her seferinde farklı konuları öğreniyorum' çatışması giderilmiş olur (Van den Heuvel-Panhuizen, 2000).

GME ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, birçok çalışmada deney ve kontrol grubu oluşturularak, GME'nin başarı, motivasyon ve/ya tutum üzerindeki etkisinin araştırıldığı görülmüştür. Çalışmaların sonucunda, GME'nin 8. sınıf yüzey ölçüleri ve hacimler konusunda (Özdemir ve Üzel, 2011), 8. sınıf (Cihan, 2017) ve 7. sınıf olasılık ve istatistik kavramlarının öğretiminde (Ersoy, 2013), 7. sınıf oran-orantı kavramının öğretiminde (Altaylı, 2012; Gözkaya, 2015), 7. sınıf tam sayılarda çapma konusunda (Ünal ve İpek, 2010), 7. sınıf bir bilinmeyenli denklemler ve eşitsizlikler konusunda (Üzel, 2007), 7. sınıf dörtgenlerin alanlarını bulma konusunda (Kaylak, 2014), 6. sınıf kesir kavramının öğretiminde (Demirdöğen ve Kaçar, 2010), 6. sınıf cebir ve alan konularında (Çakır, 2011), 6. sınıf kesirlerde çarpma ve bölme konusunda (Uygur, 2012), 5. Sınıf uzunluk ve hacim konusunda (Bıldırcın, 2012), 4. sınıf geometrik şekiller ünitesinin öğretiminde (Çilingir ve Dinç Artut, 2016), 3. sınıf kesirler konusunda (Aydın, 2014) öğrencilerin başarılarını artırdığı sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca GME'nin öğrencilerin görsel matematik okuryazarlığı, özyeterlilik algılarını ve problem çözmeye yönelik tutumlarını (Çilingir ve Dinç Artut, 2016), kesirlerle yapılan işlemlerde hesaplamaya dönük tahmin başarılarını ve strateji kullanımını (Ayvalı, 2013), orantısal akıl yürütme becerilerini geliştirdiği (Altaylı, 2012) ve kesirler konusunda daha güçlü ve ilişkisel kavrayışlara sebep olduğu (Yazgan, 2007) sonucuna varılmıştır.

Yine GME ile ilgili yapılan bazı çalışmalarda ise, nitel desen kullanılmış ve öğrencilerin GME ile kavramsallaştırma ve anlamlandırma süreçleri incelenmiştir. Bu çalışmalarda 4. sınıf öğrencilerinin ondalık kesirlerle ilgili anlamlandırma süreçleri (Uca, 2014) incelenmiş, 3. sınıf açı kavramının öğretiminin GME ve yapılandırmacı yaklaşımla öğretim sürecinin TKO+P (Tanıma, Kullanma, Oluşturma+Pekiştirme) modeli ile karşılaştırmalı analizi (Tunalı, 2010), olasılık ve istatistik kavramlarının (Akkaya, 2010), koordinat sistemi ve doğru denklemi kavramlarının GME ve yapılandırmacı kurama göre bilgi oluşturma süreçlerinin RBC+C ile analizi (Memnun Sezgin, 2011) yapılmıştır. Yapılan çalışmalarda genel olarak kavram ve bilgi edinme sürecinde öğrencilerin nelerden yararlandığı belirtilerek, GME ve yapılandırmacı yaklaşımın bilgi oluşturma sürecine katkılarının nasıl olduğu incelenmiştir. Sonuç olarak, öğretim etkinliklerinin öğrencilerin buluş ve icatlarına odaklanmasının gerekliliği, gerçek ve oyun tarzındaki problemlerin kullanılmasının nitelikli matematiksel bilgi oluşumunda rol oynadığı, GME'nin bağlamsal yapısının bilgi oluşturmada oldukça etkili olduğu saptanmıştır (Akkaya, 2010; Memnun Sezgin, 2011; Tunalı, 2010; Uca, 2014).

2.2 Kavram Oluşumu

2.2.1 Matematiksel Kavram Oluşumu, Soyutlama ve Genelleme

Matematikçiler matematiksel kuralları, gerçeklik ve olguları oluşturmak için, kendi deneyimlerinden faydalanırlar (Freudenthal, 1968). Bu nedenle öğrenciler matematiği, matematikçilerin deneyimledikleri süreçlere benzer süreçleri deneyimleyerek ve matematiği gerçek yaşama dayandırarak anlamlı bir şekilde öğrenebilirler. GME kuramına göre matematiği öğrenmek için önemli bir yere sahip olan deneyimlerin, kavram oluşumu üzerine de yadsınamaz bir etkisi olduğu savunulmuştur (Skiff, 1953).

Kavram, yeni deneyimlerle ve bilişsel çatışmalarla ilişki kurularak oluşturulabilir (Chihara, 1963). Dolayısı ile soyutlama sonucu oluşan bilişsel yapılar olarak da adlandırılabilir (Skiff, 1953; Von Glasersfeld, 1991). Diğer bir ifade ile, soyutlamanın sonucunda kişi yeni deneyimleri tanır ve soyutlamanın sonucunda oluşan ürün kavram olarak tanımlanmıştır (Skemp, 1986). Soyutlama bir *süreç* olarak ele alınmıştır ve yönü bağlamlar kümesinden soyut kavrama doğrudur (Mitchelmore, 2002). Soyutlama, matematiksel nesneler arasındaki ilişkilerin ve ortak özelliklerin belirlenmesinin yanında, bu ilişkilerin ayrıntılardan uzaklaşarak belirli ifadelere dönüşümünü içerir. Böylece, bu ifadeler matematiksel nesneden bağımsızlaşabilir. Bu süreç, kavramın belirli özelliklerinden izole edilmesi veya bağlamdan kavrama geçiş olarak adlandırılabilir (Spierska, 1994; Skemp, 1986). Örneğin, bir kişinin yamuğun ne olduğunu bilmesi, bu kavramı edinmiş olduğunu göstermez ve bu, bir şeyin yamuk olması için ne gerekli olduğunu bilmesi ile aynı şey değildir. Bir kişinin x in ne olduğunu bilmesi birinci dereceden kavram (first order concept), bir şeyin x olarak tanımlanması için neyin gerekli olduğunu bilmesi ise ikinci dereceden kavram (second order concept) olarak tanımlanmıştır. Bir öğrencinin ikinci dereceden kavramı edinebilmesi için, o kavramın birinci derecesine sahip olması gerekmektedir. Birinci dereceden kavramı edinen bir öğrenci kavramla ilgili konuşabilir ve soru sorabilir. İkinci derecede ise artık deneyimlerinden faydalanarak, ne yaptığı üzerinde yansıtıcı düşünebilir (Barret, 1962).

Piaget (2001), iki çeşit soyutlamadan bahsetmiş, bunları emprik (deneysel) soyutlama ve reflektif soyutlama olarak tanımlamıştır: Emprik soyutlama, öğrencilerin çevrede doğrudan gözlemleyebildikleri obje ve özelliklerin soyutlanmasını içermektedir. Emprik soyutlama sürecinde öğrenciler genellikle fark etme ve anlamada zorluk çekmezler. Örneğin, çarpma işleminde öğrencinin her seferinde ne kadar eklendiğini fark etmesi bu soyutlama çeşidine örnek verilebilir. Fakat derin soyutlama olarak da adlandırılan reflektif soyutlama, bireylerin kendi *eylem* ve *koordinasyonları* sonucunda oluşan bir ya da birkaç özelliğin soyutlanmasını içermektedir. Örneğin, çarpma işlemini sorunsuz bir şekilde gerçekleştirmek için öğrenci aynı miktarı kaç kere eklemesi gerektiğini de bilmelidir.

Reflektif soyutlama kendi içerisinde üçe ayrılır. Bunlar birinci (reflecting abstraction), ikinci (reflected abstraction) ve üçüncü dereceden (metareflected abstraction) soyutlamadır. Yukarıda verilen örnekte, öğrencinin kaç kere eklemesi gerektiğini düşünmesi birinci dereceden soyutlama için geçerlidir. Bu soyutlama çeşidi Aristocu soyutlama olarak da kabul edilen emprik soyutlamaya karşıdır ve kişinin bilgiyi soyutlaması için yaptığı eylem üzerinde bilinçli olması gerekmez. İkinci dereceden soyutlamada ise kişi, birinci dereceden soyutlamanın ürünleri üzerine işlemde bulunur ve bu işlemleri bilinçli bir şekilde yapar. Örneğin, "$3 \times 2 = 2 \times 3 = 6$" eşitliğini keşfetmesi ve çarpma işleminde değişme özelliğinin anlamını kavraması ikinci dereceden soyutlamaya örnek oluşturur. Üçüncü dereceden soyutlamada ise kişi ikinci dereceden soyutlaması üzerine düşünerek bir üst aşamaya çıkabilir (Piaget, 2001). Bazen öğrenci birinci ve ikinci dereceden soyutlamayı gerektiren işlemleri ezberleyebilir. Böylece, öğrencinin asıl yaptığı işlem deneysel soyutlama olarak kısıtlanmış olur ve bu kişi üçüncü dereceden soyutlama yapamaz (Gallagher ve Reid, 1981).

Kavram oluşumu sürecinde soyutlamanın yanında genelleme de büyük öneme sahiptir. Genelleme bir kavramın daha genel bir kavramı tanımlamak için bazı özelliklerinden arınması olarak tanımlanabilir (De Villiers, 2009; aktaran, Öztoprakçı, 2014). Ya da belirli bir özelliğe sahip olanların belirlenip, gruplanması olarak ifade edilebilir. Bu yüzden genelleme bir indirgenme süreci olarak adlandırılır (Skiff, 1953). Dubinsky (1991) ise genellemeyi yeni bir durum ya da problem için öğrencilerin var olan şemalarını kullanmaları ya da temsil etmeleri olarak ifade etmiştir. Ayrıca, genelleme ve soyutlama arasında çok sağlam bir bağ vardır (Piaget, 2001). Bazı çalışmalarda genellemenin soyutlama sürecinin bir sonucu olduğunu ifade edilirken, (Piaget, 2001), genellemenin soyutlamayı geliştiren bir süreç olduğunu ve kavramın anlamlı bir şekilde öğrenilmesi için genelleme ve soyutlama süreçlerinin birlikte içerilmesi gerektiğini belirten çalışmalar da vardır. (Mitchelmore, 2002). Ayrıca, soyutlama her eyleminin daha büyük veya daha küçük genelleme sınıflarını kurmakta ve yapılan her genelleme aslında bir soyutlamayı varsaymaktadır (Piaget, 2001). Soyutlama ve genelleme süreçleri genellikle birbirine karıştırılabilir ve bu süreçler çok iç içe geçmiş gibi görünebilir. Fakat soyutlama ve genellemenin farklı yönleri vardır. Örneğin; iki bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümü, üç bilinmeyenli denklem sistemlerinin çözümüne bir genelleme sürecidir fakat soyutlama değildir. Soyutlama, kavramın spesifik özelliklerinden izolasyonudur (Piaget, 2001; Yılmaz, 2011).

Piaget, tümevarımsal (inductive) ve oluşturmacı (constructive) olmak üzere iki çeşit genelleme öne sürmüştür. Tümevarımsal genelleme, kişinin somut olarak gördükleri yani emprik soyutlama ile ilgili iken, oluşturmacı genelleme kişinin eylemlerinin genel koordinasyonu olarak adlandırılan ve sonrasında eylemlerin içselleştirildiği ve koordine edildiği reflektif soyutlama ile ilgilidir (Dubinsky, 2002; Piaget, 2001). Ayrıca oluşturmacı genelleme kuralların yeni bir anlam kazandığı, yeni sentezlerin yapılmasına da sebep olabilir (Piaget ve Garcia, 1983, s. 299; aktaran, Dubinsky, 2002). Örneğin, bir öğrenci 3 resim yaptığında bunları resim dosyasına koyarsa ve bu işlemi 2 defa gerçekleştirirse, ortaya çıkan sonuç bu öğrencinin 2 resim yaptığında resim dosyasına koyma ve bu işlemi 3 defa gerçekleştirme eyleminin sonucu ile aynı olacaktır. Yani 3×2 ve 2×3 aynı sonucu vermektedir. Bu durumda reflektif soyutlama ve oluşturmacı genelleme yapılmıştır (Piaget, 2001).

Mitchelmore (2002) ise genellemenin üç farklı başlık altında incelenebileceğini savunmuştur. Bunlar;

- Genellemenin soyutlama ya da kavramla eş anlamlı olabileceği (G1),
- Genellemenin var olan kavramın genişletilmesi ile ilgili olabileceği (empirik genişleme, matematiksel genişleme ve matematiksel buluş) (G2)
- Genellemenin var olan kavramla ilişkili bir teorem ile ilgili olabileceğidir (G3).

Hollandalı yapılandırmacı araştırmacıların öne sürdüğü Gerçekçi Matematik Projesi ve Dienes'in 1960 lardaki çalışmalarında, soyutlamanın ve genellemenin (G2)'nin öğretimi tartışılmıştır. Hollanda' da başlayan GME hareketi soyutlama ve genelleme (G2)'yi açık bir şekilde öğreten tek yapılandırmacı müfredat projesidir fakat GME araştırmacıları bu terimleri kullanmamışlardır (Mitchelmore, 2002). Bunun yerine, Treffers (1991b, s.26) öğretim yaklaşımlarını aşağıdaki gibi üç aşamada belirtmiştir:

- Öğrencilerin alışkın olduğu belirli günlük yaşam bağlamlarındaki işlemlerin kurallarının geliştirilmesi

- Aynı yapının başka bağlamlarda da olduğunun gösterilmesi

- Elde edilen ortak yapının çalışılarak formülleştirilmesi ve sembolleştirilmesi

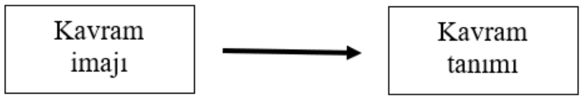
Treffers ilk aşamayı yatay matematikleştirme, son iki aşamayı da dikey matematikleştirme olarak adlandırmıştır. İlk adımda problem durumu modellenerek matematiksel anlamlar çıkarılır. İkinci adımda yapısal benzerlikler ortaya çıkarılmaya çalışılır. Üçüncü adım ise, yeni zihinsel nesnenin oluşumunu içerir (1991b). Mitchelmore (2002), bu üç adımın soyutlama ve genellemeyi (G2) oluşturduğunu belirtmiştir ve soyutlamanın öğretimindeki üç adımı aşinalık, benzerlik ve somutlaştırma (reification) olarak adlandırmıştır.

2.2.2 Kavram Tanımı ve Kavram İmajı

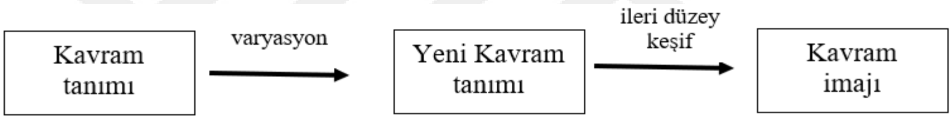
Kişinin zihnindeki kavramla ilgili sözel olmayan her şey; görsel temsil biçimleri, zihinsel resimler, etki ve deneyimler kavram imajını oluşturur (Vinner, 2002). Geçirilen deneyimler ve etkileri farklı olduğundan, kavram imajı bireylere göre farklılık gösterebilir (Öztoprakçı, 2014). Soyutlama ve genelleme süreçlerinde bireyler sıklıkla görselleştirmelere başvurabilir. Kavram oluşturma süreçlerinin gelişiminde görselleştirmenin olumlu etkileri gözlenmiş ve öğrencilerin kavram imajlarının güçlendiği ortaya çıkmıştır (Tall ve Vinner, 1981; Vinner, 2002; Vinner ve Dreyfus, 1989; Yılmaz, 2011).

Genelleme ve kavram imajı oluşumu süreçlerinde öğrenciler kavramı tanımlayabilir. Kavramın tanımını oluşturmak, kavram oluşum sürecinde önemli bir adımdır, fakat kavramın tanımlanması onun tamamen anlaşılmasını sağlamaz (Vinner, 2002).

Örneğin, kişilerin kavram imajı kavram tanımından farklı olabilir. Bu yüzden, kavram imajı ve kavram tanımı oluşturma süreçleri ve arasındaki ilişki farklı şekillerde ifade edilmektedir. Kavram tanımlama süreci betimsel (descriptive) ve oluşturmacı (constructive) olmak üzere iki ayrı başlık altında incelenmiştir. Betimsel tanımlama sürecinde, tanım geliştirilmeden önce ilgili kavramın imajı geliştirilir. Oluşturmacı tanımlamada ise, öncelikle dahil etmeme, genelleme, yeniden yerleştirme ve/veya özelleştirme yoluyla kavram tanımı oluşturulur. Sonra ileri düzey keşiflerle kavramın imajı oluşturulur (De Villiers, 2004). Betimleyici ve oluşturmacı tanımlama şemaları (De Villiers, 2004) Şekil 3 ve Şekil 4'te verilmiştir.



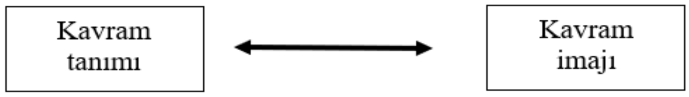
Şekil 3: Betimleyici tanımlama şeması (De Villiers, 2004 kaynağından uyarlanmıştır)



Şekil 4: Oluşturmacı tanımlama şeması (De Villiers, 2004 kaynağından uyarlanmıştır)

Sonuç olarak, doğru bir şekilde oluşturulmuş tanımlar doğru kavram imajlarının ortaya çıkmasını sağlayabilir ve oluşturulan bu tanımlar matematik öğretiminin temel amaçları arasında olan günlük yaşam bilgisinin daha formal olan matematiksel bilgiye çevrilmesi konusunda etkin rol oynamaktadır (Vinner, 2002).

De Villiers'in (2004) sunduğu kavram tanımı ve kavram imajı ilişkilerinin yanı sıra, Vinner (1983; 2002) kavram tanımı ve kavram imajının kavram öğretimi sürecinde iki yönlü bir ilişki içerisinde olması gerektiğini savunmuştur (Şekil 5). Eğer sadece kavram tanımı direk olarak sunulur ise bu ilişkinin istenen şekilde olmayabileceğini söylemiştir. Kişinin kavram tanımını anlamlı olmayan bir şekilde ezberlemesini ve kavramla ilişkili zihninde hiçbir imajın oluşmamasını bu duruma örnek olarak verilebileceğinden bahsetmiştir.



Şekil 5: Kavram imajı ve kavram tanımı arasındaki etkileşim (Vinner, 2002 kaynağından uyarlanmıştır)

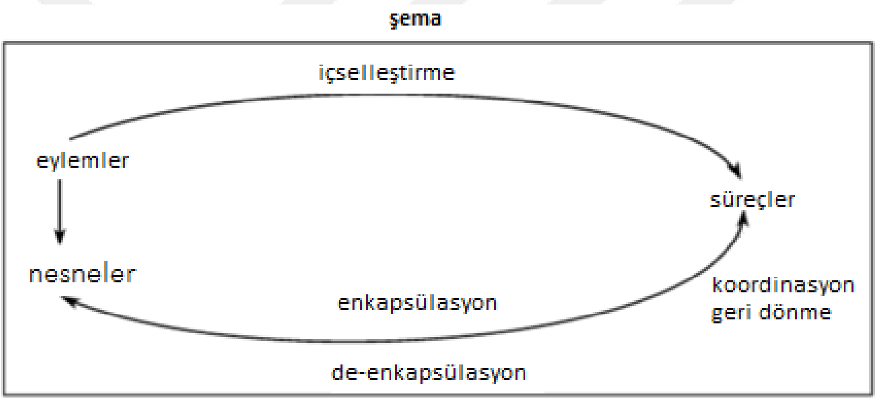
Öğrencinin zihnindeki kavram imajına dikkat edilmeksizin formal tanımı sunulursa, öğrenci formal tanımı sınırlı bir bağlamda öğrenebilir ve uygun olmayan bir kavram imajı oluşturabilir (Tall ve Vinner, 1981). Bu yüzden, kavram tanımının oluşturulması sürecinde öğretmen çok dikkatli olmalı ve bu süreçler hakkında bilgi, sahibi olmalıdır. Eğer öğrencinin kavramla ilgili zihninde oluşturduğu örnekler, formal tanım tarafından oluşturulan örneklerle aynı değilse, öğrencinin kavramla ilgili dönütü öğretmenin beklentisinden farklı olacaktır (Vinner ve Dreyfus, 1989). Bu durum öğrencinin zihninde dikkat edilmesi ve giderilmesi gereken bir çatışmaya sebep olabilir. Ayrıca öğrenci, aynı kavramla daha farklı veya daha geniş bir bağlamda karşılaşırsa, zihninde oluşan çatışmalar ile başa çıkamayabilir (Tall ve Vinner, 1981). Bu durumda kavram eksik veya yanlış öğrenilmiş olur. Sonuç olarak, kavramın öğrenilmesindeki eksiklikler, kavram hatalarına ve oluşacak olan bağlantılı kavramların öğrenilmesinde zorluklara veya yanlış öğrenmelere sebebiyet verebilir.

Kavram imajı ve tanımı arasındaki ilişkinin doğru bir şekilde oluşturulması için öğrencilerin, zengin içerikleri deneyimlemeleri sağlanmalı ve edinilen zengin deneyimler hem kavram imajı hem de kavram tanımıyla ilgili konu ile ilişkilendirilmelidir. Ayrıca, bu süreçte kavramla ilgili örnek olan ve olmayan durumlar sunulabilir. Kavramın çok karmaşık olmadığı durumlarda ise, öğrencilerin kendi tanımlarını yapmalarına izin verilebilir. Böylece, öğrenciler kavram imajlarındaki eksiklikleri fark edip, var olan kavram imajlarını yeniden şekillendirebilirler. (Vinner, 2002).

2.3 APOS Teorisi

Piaget'nin reflektif soyutlama anlayışı genişletilerek ve yeniden organize edilerek APOS (*Action, Process, Object, Schema*) teorik çerçevesi geliştirilmiştir. APOS, matematiksel bilgi ve bu bilginin edinilmesi ile ilgili genel bir teoridir ve kişinin matematiği nasıl anladığını açıklamaya çalışır. (Arnon ve diğerleri, 2014; Asiala ve diğerleri, 1997). Ayrıca, APOS öğrencilerin kavram oluşturma süreçlerine ve seviyelerine erişimi sağlayarak, öğretmen ve araştırmacıların öğretim, uygulama ve değerlendirme süreçlerini planlamalarında yardımcı olabilir (Asiala ve diğerleri, 1997).

APOS teorik çerçevesinin gelişiminde ve ilerleme sürecinde *eylem*, *süreç*, *(matematiksel) nesne* ve *şema*dan oluşan zihinsel yapıların yanında *içselleştirme*, *koordinasyon*, *geri dönme*, *enkapsülasyon*, *de-enkapsülasyon* ve *temalaştırma* gibi zihinsel mekanizmalar da oluşabilir. Dubinsky (2002) zihinsel mekanizmaların, zihinsel yapıların oluşmasında önemli bir yeri olduğunu vurgulamıştır. Bahsedilen zihinsel yapılar ve mekanizmaların ilişkisi Şekil 6' da görüldüğü gibidir (Arnon ve diğerleri, 2014).



Şekil 6: Matematiksel Bir Kavramın Oluşum Sürecindeki Zihinsel Yapılar ve Mekanizmalar (Arnon ve diğerleri, 2014 kaynağından uyarlanmıştır)

Eylem, daha önceden algılanan *nesne*(lerin) dönüşümü olarak adlandırılır. Kavramın edinilme sürecinde basit ama gerekli bir başlangıçtır. *Eylem* aşamasında öğrenciler dış uyaranların ve ipuçlarının yardımıyla verilen *nesne* üzerinde dönüşümler ve hesaplamalar yapabilir (Arnon ve diğerleri, 2014). Öğrencilerin somut *nesne*ler üzerine gerçekleştirdikleri fiziksel *eylemlerin* yanı sıra soyut *nesne*lerin sembolleri üzerinde gerçekleşen zihinsel aktiviteler de *eylem* olarak adlandırılabilir (Sierpinska, 1994). Fakat, *eylem* tekrarlandıkça, öğrenci ipuçlarına ve dış uyaranlara ihtiyaç duymaz. Böylece, öğrenci işlemi bilinçli olarak yapmaya başlar ve reflektif düşünerek *eylem* üzerinde içsel kontrol kazanır (Arnon ve diğerleri, 2014; Parraguez ve Oktaç, 2010). Dubinsky (2002) bu içsel süreçlerin algılanan *nesne*nin anlamlandırılmasına yardımcı olduğunu belirtmiştir. Bu aşamada kişi *eylem*i işlemsel olarak gerçekleştirmeye ihtiyaç duymadan sözel veya zihinsel olarak yapılandırabilir ve *eylem*(ler) *süreç* olarak içselleştirilir.

Piaget (1978) *eylem*lerin içselleştirilmesini “yapmak” ın bilmek” e dönüşümü olarak adlandırmıştır. Bu dönüşüm üç adımda gerçekleşir; ilkinde kavramsallaştırma başarılı *eylem*lerin arkasında kalmıştır. Bu adımda düşük seviyede bir kavramsallaştırma söz konusudur ve *eylem*in sonuçlarına odaklanmıştır. İkincisinde kavramsallaştırma ve *eylem* bir aradadır ve karşılıklı olarak birbirlerini etkilerler, fakat bu ikisi arasındaki fark kişi tarafından fark edilemez. Bu aşamada, *eylem*in sonuçları daima ve direkt olarak *eylem*de test edilir. Üçüncüsünde ise artık kavramsallaştırma *eylem*i aşıp geride bırakmıştır. İkinci aşamanın tersine bu aşamada varsayılan öncüllerden çıkarımlar yapılır. Bu aşamadaki oluşumlar bilinçlidir ve ikinci dereceden soyutlamanın işleyişi tarafından karakterize edilir. Ayrıca, kişi *eylem*in sonuçlarına odaklanmak yerine onun mekanizmalarına odaklanır ve “sonuca ulaşmak için ne yapmam gerekir” sorusu yerine, sürecin “neden bu şekilde ilerlediğini” sorgular (aktaran, Sierpinska, 1994).

Süreç aşamasındaki öğreci ise farklı yapıları, işlemleri veya iki yada daha fazla süreci koordine ederek sürecin farklı bir anlamını keşfedebilir. Ayrıca, bu aşamada *koordinasyonun* dışında *geri dönme* de gerçekleştirilebilir. Böylece edinilen *süreç* kullanılarak yeni ve orijinal bir *süreç* oluşturulabilir (Arnon ve diğerleri, 2014; Asiala ve diğerleri, 1997; Dubinsky, 2002). Örneğin, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ve $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$ fonksiyonlarını bilen bir öğrencinin bileşke fonksiyonunu ($\boldsymbol{fog}(\boldsymbol{x})$) oluşturması koordinasyon, ters fonksiyonu ($\boldsymbol{f^{-1}}(\boldsymbol{x})$) oluşturması geri dönme olarak adlandırılabilir (Arnon ve diğerleri, 2014).

Gerçekleştirilen *süreç*ler bir bütün olarak algılandığında veya sürecin ürünleri üzerinde *eylem*de bulunulabileceği keşfedildiğinde ise, *süreç nesne* olarak *enkapsüle* edilir. *Süreç* dinamik bir yapı iken, *nesne* durağan bir yapıdır (Arnon ve diğerleri, 2014; Dubinsky ve McDonald, 2001). Sierpinska (1994) aynı *nesne*ye ulaşmak için gerçekleştirilen *süreç* aşamasında bireylerin anlayışlarının birbirinden farklı olabileceğini savunmuştur. Öğrencinin *nesne* aşamasına geçilebilmesi için farklı bir şeye bakabileceğini, farklı bir açıdan, ya da farklı bir seviyeden bakabileceğini belirtmiştir. Ayrıca, gerektiğinde kapsüllenen *süreç*lerin tekrar incelenmesi ve üzerinde farklı bir *eylem* gerçekleştirilebilmesi amacıyla, öğrenci *nesne*yi *de-enkapsüle* edebilir (Parraguez ve Oktaç, 2010).

Belirtilen tüm bu yapıların (*eylemler*, *süreçler*, *nesneler*) uyumlu bir şekilde birleşmesi ile oluşan yapı ise *şema* olarak adlandırılır. *Şema* üzerinde dönüşümler yapılabilen dinamik bir yapıdır. Ayrıca, oluşturulan *şema* zihinsel bir *nesne* olarak temalaştırılabilir ve diğer *şema*larla ilişkilendirilebilir (Arnon ve diğerleri, 2014; Dubinsky, 1991). Böylece kişinin zihninde kavramı içeren problem durumlarıyla ilişkilendirilen bir çerçeve oluşabilir (Dubinsky ve McDonald, 2001). Eğer öğrenci başarılı bir kavram oluşturma süreci gerçekleştirmişse, problem veya edinilen yeni *nesne şema* tarafından *özümsenir* (Dubinsky, 2002). Yani var olan *şema* yeni *nesne*yi içerecek şekilde genişlemiş olur (Parraguez ve Oktaç, 2010). Fakat eğer öğrenci bu süreçte başarılı değilse, var olan *şema*sı yeni fenomenin düzenlenmesi için *uyumsanır*. Öğrenci edindiği *şema*yı daha geniş bir olgular topluluğunda uyguladığında ise var olan *şema*sını genelleyebilir. Kişi bu adımda *şema*nın daha geniş uygulamalarının farkındadır. Ayrıca, sürecin enkapsüle edilerek nesneye geçiş aşamasında da önceden edinilen *şema*(lar) genellenebilir. (Dubinsky, 2002).

APOS teorisi *eylem*ler, *süreç*ler, nesneler ve *şema*ları içeren tüm matematiksel oluşumları içerdiğinden, *şema* fikri/oluşumu Tall ve Vinner (1981)'in kavram imajı ile oldukça benzemektedir (Dubinsky ve McDonald, 2001). Genelde *şema* ile karıştırılan genetik çözümleme ise, araştırmacılar tarafından kavramın nasıl edinilebileceğini açıklamak amacıyla geliştirilen bir model olarak tanımlanır. Bu model belirlenen kavramın oluşumu için gerekli olan zihinsel mekanizmaları ve yapıları tanımlar. Kavramın genetik çözümlemesi sayesinde, kavramın edinilmesindeki farklılıklar ve zorluklar ortaya çıkabilir (Arnon ve diğerleri, 2014; Parraguez ve Oktaç, 2010).

Kavram oluşum sürecini APOS teorik çerçevesi ile analiz eden çalışmalarda öğrencilerin, GME yaklaşımı esas alınan öğretim ortamında eğim kavramını (Deniz ve Kabael, 2017a; 2017b), probleme dayalı öğrenme yaklaşımı ile kesir kavramını (Öksüz, 2018), etkinlik temelli öğrenme yaklaşımı ile oran orantı kavramını (Koçyiğit Gürbüz, 2018), ACE (activity, class discussion, exercises) öğretim döngüsüne göre planlanan öğretim ortamında denklem kavramını kavramsallaştırma süreçleri (Açıl, 2015) ve dönüşüm geometrisi konusundaki bilgi oluşturma süreçleri (Açan, 2015) incelenmiştir. Ayrıca, öğrencilerin modelleme süreçleri ve kavramı oluştururken neyi dayanak aldıkları, zorlandıkları alanlar ve hangi *eylem*, *süreç* ve *nesneyi* gerçekleştirdikleri irdelenmiştir. Sonuç olarak, otantik etkinlikler içeren öğrenme ortamlarının öğrencilerin kavrayışlarını geliştirdiği, öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarının, problem çözme ve eleştirel düşünme becerilerinin geliştiği, ilgi ve motivasyonlarının canlı kaldığı gözlemlenmiştir (Açan 2015; Açıl, 2015; Deniz ve Kabael, 2017a; 2017b; Koçyiğit Gürbüz, 2018; Öksüz, 2018).

2.4 Hacim kavramı

Hacim kavramı üç boyutlu uzamsal yapılanmayı gerektirir ve öğrencilere genellikle karmaşık gelen bir konudur (Clements ve Sarama, 2009). Olkun (2003) hacim kavramının ve formülünün öğretiminde, kuralların ve formüllerin hazır olarak verilmesi yerine, öğrencilerin bu kuralları ve kavramla ilgili ilişkileri kendilerinin oluşturabileceği bir öğretim ortamının hazırlanması gerektiğini savunmuştur. Clements ve Sarama (2009) ise öğretim ortamlarında kullanılabilen ve hacmi fiziksel olarak ölçmeyi sağlayan iki yöntem öne sürmüştür. Bu yöntemler *paketleme (packing)* ve *doldurma (filling)* olarak adlandırılabilir. Örneğin, uzayda yer kaplayan bir şeyin *paketlemesi* birim küplerle üç boyutlu dizilimi içerirken, üç boyutlu bir yerin *doldurması* kabın şeklini alan akışkan bir birimin iterasyonu ile gerçekleştirilebilir. Bir cismin hacminin bulunması için doldurma yöntemi öğrencilere çoğu zaman daha kolay gelse de paketleme hacmin formülünün edinilmesi için daha sofistike bir anlam sunar. Ayrıca, paketleme yöntemi üç boyutlu uzamsal yapılanmayı destekler.

Uzamsal yapılanma ve hacim formülünün anlamlandırılmasında birim küplerin önemli bir rolü olduğu söylenebilir. Öğrencilerin prizmanın içerisindeki veya prizmayı oluşturan birim küp sayısını bulmaları sağlanarak, hacim kavramının anlaşılması için gerekli bilişsel çerçeveyi oluşturmaları sağlanabilir (Battista ve Clements, 1998). Fakat hacim kavramının yapılandırılmasında ve özellikle birim küpleri sayma stratejilerinde öğrencilerin bazı hatalar yaptıkları görülmüştür. Örneğin, öğrenciler prizmanın kenarlarındaki ve köşelerindeki küpleri veya küplerin görünen yüzlerini iki veya daha fazla kez sayabilirler ve görünmeyen küpleri saymayabilirler (Ben Chaim, Houang ve Lappan, 1985; Clements ve Sarama, 2009). Ayrıca, öğrenciler prizmanın satır, sütun ve katmanlara dayalı düzenli yapısını zihinlerinde görselleştirmede zorluk çekebilirler (Olkun, 2003). Battista ve Clements (1996) bu hataların yanlış uzamsal yapılanmadan kaynaklandığını öne sürmüştür. Paketleme yöntemi ile de desteklenen uzamsal yapılanma "birim oluşturma, birimler arasında ilişkiler oluşturma (birbirleriyle ilişkili olarak nasıl yerleştirildikleri ile ilgili) ve oluşturulan bu yeni birleşik birimleri uygun şekilde ötelenmesini" içerir (Battista ve Clements, 1996, s.282). Öğrencilerin üç boyutlu uzamsal yapılanmayı anlamlandırabilmeleri için bu üç adımı gerçekleştirerek, tüm yapıyı oluşturabilecekleri bir öğrenme ortamı hazırlanabilir. Öğrenciler bu yapılandırmayı gerçekleştirirken, prizmaları öncelikle *bir küme yüzey* gibi, üç boyutluluk hissini kısmen oluşturduktan sonra *bir küme küp* gibi ve tüm yapıyı bütün olarak zihinlerinde oluşturduklarında ise *organize küpler* gibi anlayabilirler. Böylece, üç farklı kavramsallaştırma gerçekleştirebilirler. Fakat sadece organize küpler olarak bütüne uygun bir zihinsel modeli yapılandırabilen öğrenciler hacmi bağıntısını anlamlandırabilirler (Battista ve Clements, 1996; Clements ve Sarama, 2009).

Hacim kavramının yapılandırılmasında ve üç boyutlu uzamsal yapılanma sürecinde, öğrenciler çizim kullanmak yerine somut nesneleri kullandıklarında ve çok sayıda küp içeren prizmalar yerine daha az sayıda küp içeren prizmalar kullandıklarında, hacmi daha gelişmiş stratejiler kullanarak buldukları gözlemlenmiştir (Battista ve Clements, 1996). Olkun (1999) ise, öğrencilere *eşit paylaşım* bağlamını kullanan etkinlikleri sunarak, örneğin öğrencilerin bir apartmanı eşit olarak paylaştıklarını düşünmelerini sağlayarak, organize küpler kavramsallaştırmasına eriştiklerini gözlemlemiştir. Ayrıca, eşit paylaşım bağlamı sayesinde, öğrencilerin hacim formülünü görsel ve sezgisel kaynaklara dayandırarak, kavramın anlamlı ve kalıcı bir şekilde yapılandırılabileceğini savunmuştur (Olkun, 2001).

Battista ve Clements (1996) öğrencilerin prizmanın içerisindeki birim küpleri sayma stratejilerini araştırmışlardır ve bu stratejiler aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

- Strateji A: Öğrenciler küpler kümesini katmanlar aracılığı ile organize edilmiş üç boyutlu bir dikdörtgensel dizilim olarak kavramsallaştırırlar. Ayrıca, küpleri tek tek sayarak ya da bazı küpleri saymadan, toplayarak veya çarparak sıralayabilirler. Bu aşamada kullanılabilecek stratejiler, bir katmandaki küp sayısının hesaplanarak katman sayısı ile çarpılması, katmandaki küp sayılarının toplanması veya yinelenmesi, katmanların daha küçük bir birimini oluşturarak bu birimlerin sayılmasıdır.

- Strateji B: Dikdörtgenler prizmasını oluşturan küplerin sayısı boş yerleri doldurma olarak da kavramsallaştırılabilir. Bu aşamada öğrenci içteki ve dıştaki tüm küpleri saymaya girişebilir, fakat küpleri katmanlar içerisinde organize etmez. Strateji B' ye göre kullanılabilecek stratejiler sütun/satırların tekrarlaması, satır ya da sütunların bir alt birim oluşturularak sayılması, sistematik ve sistematik olmayan sayma olarak ifade edilebilir.

- Strateji C: Öğrenci prizmayı oluşturan küpleri, bu küplerin yüzleri olarak kavramsallaştırabilir. Bu stratejiyi temel alan öğrenciler küplerin tüm görünen yüzlerini veya görünen yüzlerin bir kısmını sayabilir; dıştan görünen küplerin bir kısmını ve görünmeyen küplerin bazılarını sayabilir, bunlara ek olarak ön katmandaki küpleri sayabilir. Bu aşamada öğrenciler üç boyutlu küplerin dizilişini, farkına vardığı yüzlerin kümesini koordine etmeden anlamaya çalışır.

- Strateji D: Öğrenci prizmanın üç ayrıt uzunluğunu çarparak,"$H = e \times b \times y$" bağıntısını katmanları anlamlandırmadan kullanabilir.

- Strateji E: Öğrenci bu stratejiler haricinde de birtakım stratejiler kullanabilir. Örneğin, bir yüzdeki kare sayısı ile diğer yüzdeki kare sayısını çarpabilir.

Bu stratejiler içerisinde doğru çözüme ulaşmak için en etkili olanlar Stratejiler A'daki, en az etkili olanlar ise C'deki stratejilerdir. Ayrıca, A stratejisini, şekli global bir şekilde yapılandırabilmiş (global restructuring) öğrenciler kullanırken, B stratejisini kullananlar genellikle şekle bağımlı (local restructuring) kalmışlardır (Battista ve Clements, 1996). Eğer öğrenci prizmanın içindeki birim küp sayısını katmanlı olarak keşfedememişse, hacim formülünün verilmesi, öğrenciyi bağıntıyı/formülü anlamlandırmadan ezberlemeye sürükleyebilir (Battista ve Clements, 1996; 1998).

Hacim kavramının öğretim sürecinde ve hacim bulma etkinliklerinde, öğrenciler aşağıdaki adımları gerçekleştirebilir (Clements ve Sarama, 2009).

- Öncelikle verilen iki kabı birbiri ile direkt olarak (birinin içerisindeki su veya kumu diğerine boşaltarak) karşılaştırmaya çalışabilir (kapasiteyi direkt kıyaslama- "*capacity direct comparer*").

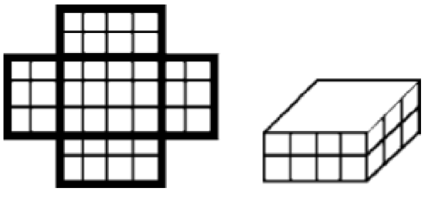
- Sonrasında, bu iki kabı başka bir kap veya kutu kullanarak karşılaştırabilir (kapasiteyi dolaylı kıyaslama – "*capacity indirect comparer*").

- Öğrenci hacmin üç boyutlu uzamsal yapısını ve dizilimini başlangıç seviyesinde de olsa fark ederek, kutunun içine bir miktar küp doldurur ve kaç tane küpe ihtiyacı olduğunu tahmin etmeye çalışabilir. Sonrasında, birim küpleri tamamen doldurarak bu tahminini kontrol edebilir. Bu adımda genellikle içteki küpleri saymayabilir ve köşedeki küpleri iki kez sayabilir (Temel düzeyde/ilkel üç boyutlu dizilişi kullanarak sayma– "*primitive 3D array counter"*).

- Ayrıca, öğrenci kabı doldurmak için basit birimler oluşturabilir ve bu birimleri tekrarlı bir şekilde doldurarak, kabın içinin kaç tane birim aldığını sayabilir (kapasiteyi birimle ilişkilendirme ve tekrarlama- "*capacity relater and repeater"*).

- Sonrasında, herhangi bir kutuyu birim küplerle tam olarak doldurabilir. Bu aşamada çarpımsal düşünme gelişmez ve katmanları kullanmaz. Fakat sistematik olmayan stratejilerden daha sistematik olanlara geçiş yapar. Örneğin, üç boyutlu bir yapıda sadece bir satır veya sütundaki küpleri sayarak, toplam küp sayısını elde edebilir (kısmi üç boyut yapılanma- "*partial 3D structurer*").

- Öğrenci üç boyutlu uzamsal yapılanmayı zihninde satır ve sütunlar olarak canlandırabilir. Böylelikle bir satırdaki küp sayısı ile katman sayısını çarparak hacmi $satır \times sütun$ olarak hesaplayabilir. Ayrıca, Şekil 7'de görüldüğü gibi bir açınım (soldaki şekil) veya örüntü elde edebilir (üç boyutlu satır ve sütun yapılanması- "*3D row and column structurer*").



Şekil 7: Üç Boyutlu Satır ve Sütun Yapılanması Örneği

- Bir sonraki aşamada ise artık öğrenciler bir şekle ya da oluşturulmuş bir cisme ihtiyacı olmadan dikdörtgenler prizmasının hacmini hesaplayabilir ve prizmanın hacminin çarpma ile nasıl elde edildiğini açıklar (üç boyutlu dizilim yapılanması- "*3D array structurer*").

Hacim formülünün ve üç boyutlu uzamsal yapılanmanın gelişim süreci uzunluk ve alan kavramlarının yapılandırılma süreçleri ile oldukça ilişkilidir. Çünkü uzamsal yapılanma öncelikle bir boyut, sonra iki, en son üç boyut olarak gelişir (Clements ve Sarama, 2009). Ayrıca, boyut kavramı ile ilgili genel olarak yapılan hatalardan biri yüzey alanı ve hacim kavramlarının karıştırılması ve birbirinin yerine kullanılmasıdır. İki boyutla üç boyutu karıştıran öğrenciler, küpleri sayarken sadece görünen yüzleri sayabilir veya görünmeyen küpleri saymayabilirler (Ben Chaim ve diğerleri, 1985). Bu tarz hataların yapılmaması ve hacim kavramının sağlam temeller üzerine kurulabilmesi için, alan kavramının iyi bir şekilde öğrenilmiş olması gerekmektedir. Alan kavramı eşit paylaştırma, zihinsel olarak iki boyutlu yüzeyi bölme (kesme) ile ilgilidir ve alanın anlamlı bir şekilde öğrenilebilmesi için, öncelikle yüzeyi eş birimlere parçalama kavramı öğrenilmelidir. Alanı ölçmeyi anlamaya çalışan bir öğrenci, bahsedilen eş birimleri öteleyebilir ve birimlerin iki boyutlu yüzeyde nasıl organize olduğunu düşünerek, alan bağıntısını çarpımsal düşünebilir. İki boyutlu uzamsal yapılanmayı geliştiren somut nesneleri kullanarak informal deneyimler gerçekleştirilebilir ve bu deneyimler alan kavramının gelişmesini sağlar. Bu süreci üç boyutlu uzamsal yapılanma takip eder. Ayrıca, öğretmenler bu süreçte uzunluk, alan ve hacim kavramları arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları tartışarak öğrencilerin kavramsallaştırma sürecine katkıda bulunabilirler (Clements ve Sarama, 2009).

Hacim kavramı ile ilgili alan yazın incelendiğinde, öğretmen adaylarının hacim kavramına yönelik bilgileri ve kavrayışları inceleyen çalışmalar göze çarpmaktadır. Gökbulut ve Ubuz (2013), sınıf öğretmen adaylarının tanım ve örneklemelerini inceleyerek, prizma kavramına ait bilgilerini ortaya çıkarmayı amaçlamışlardır. Çalışmada, öğretmen adaylarının kavram imajlarını ve tanımlarını irdelemek için örnek çizim, özelliklerin açıklanması, farklı örnekler çizilmesi, farklı tanımların oluşturulması ve günlük hayattan örnekler verilmesi ile ilgili açık uçlu sorular yöneltilmiştir. Çalışmanın sonucunda, öğretmen adaylarının konu alan bilgilerinin yetersiz olduğu saptanmıştır. Esen ve Çakıroğlu (2012) ise, matematik öğretmen adaylarının hacim ölçme konusunda standart olmayan birim kullanmaya yönelik kavramsal yapılarını incelemek amacıyla, öğrencilerin çözümleri verilerek, geliştirilen yaklaşımın doğruluğunu değerlendirmeleri istenmiştir. Çalışmanın sonunda, hacme kavramsal olarak yaklaşanların genelde öğrenci hatalarını fark ederken, işlemsel olarak yaklaşanların ise hataları fark edemediklerini belirtmiştir. Hacmin kavramsal olarak ele alınabilmesi için ise birim kavramının irdelenmesi gerektiği vurgulanmıştır. Ayrıca, öğretmen adaylarının çoğunun hacmin metrik ölçü birimleri ile ölçülmesi hususunda ısrarcı olmaları, hacim kavramını $en \times boy \times yükseklik$ bağıntısı ile bağdaştırmalarına dayandırılmaktadır.

Hacim kavramı ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, kavramın nasıl anlamlı bir şekilde öğrenilebileceği (Olkun, 1999; 2001; 2003), hacim bulma konusunda öğrencilerin hangi stratejileri kullanabileceği, bu stratejilerin etkililiği (Battista ve Clements, 1996; Ben Chaim ve diğerleri, 1985), öğretim ortamlarının nasıl sunulması gerektiği (Clements ve Sarama, 2009; Sullivan ve Lilburn, 2002) gibi konularda çalışmaların yapıldığı saptanmıştır. Ayrıca, GME yönteminin hacim kavramına (Bıldırcın, 2012) ve hacim ölçme birimleri konularının öğretimine etkisi (Taş, 2018), sekizinci sınıf öğrencilerinin hacim ölçme kavramını anlamaları ile ilgili yeterliliklerinin incelenmesi (Karaca, 2014), hacim kavramı ile ilgili doğrusal ve doğrusal olmayan problemlerdeki başarı düzeyi, çözüm stratejileri ve yanlış cevapların nedenleri (Ayan, 2014), Cabri 3D yazılımı ile hacim kavramı öğretiminin öğrenci başarısına etkisi (Akgül, 2014), 6. sınıf öğrencilerinin hacim ölçüleri konusundaki kavramsal, işlemsel bilgileri ve sözel problemleri çözme becerilerini (Tan Şişman, 2010) araştıran çalışmalara rastlanmıştır. Yapılan çalışmalar, öğrencilerin hacim kavramı, ölçme ve hacim ile ilişkilendirilen üç boyutlu uzamsal yapılanma konularında, hayal etme ve matematikleştirmede oldukça zorlandığını göstermektedir (Ayan, 2014; Clements ve Sarama, 2009). Bu yüzden, bu çalışmada hacim kavramının öğrenciler tarafından nasıl kavramsallaştırıldığı ve kavramsallaştırma sürecinde nerelerde zorluk çektiklerinin detaylı bir şekilde incelenmesi planlanmıştır.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

III. YÖNTEM

Bu bölümde araştırma türü ve deseni, pilot çalışma, katılımcıların nasıl belirlendiği, veri toplama araçları ile ilgili bilgiler verilerek, uygulamanın süreci detaylandırılmış ve verilerin nasıl analiz edildiğinden bahsedilmiştir.

3.1 Araştırmanın Türü ve Deseni

Bu çalışma 6. sınıf öğrencilerinin GME' ye dayalı öğrenme ortamında hacim kavramını oluşturma süreçlerini APOS teorik çerçevesinde incelemeyi ve öğrencilerin matematikleştirme süreçlerini incelemeyi amaçlamaktadır. Bahsedilen dinamik süreçlerin karmaşık yapısının çözümlenmesi ve derinlemesine incelenmesi için çalışma nitel olarak desenlenmiştir. Nitel olarak desenlenen çalışmalarda araştırmacı çeşitli değişkenleri kontrol etmeye çalışmaz, aksine sorgulamaların doğal ortamda ve gerçek yaşamın içinde gerçekleşmeleri önem arz etmektedir. Ayrıca, nitel araştırma sürecinde araştırmacı çalışmanın temel unsurlarından biridir ve çalışmayı oluşturan, birbiriyle etkileşim içerisinde olan tüm etmenler ve aşamalar ayrıntılı bir şekilde analiz edilir (Fraenkel, Wallen ve Hyun, 2011).

Durum çalışması olarak desenlenen bu çalışmada ele alınan durum, prizmanın hacmi kavramıdır ve ele alınan durum altıncı sınıf öğrencilerinin prizmanın hacim kavramını GME'ye uygun olarak tasarlanan öğrenme ortamında oluşturduğu süreçleri içermektedir. Durum çalışmasında ilgili durumu içeren ve bu durumla ilgili olan tüm ortam, birey ve süreçler holistik bir yaklaşımla araştırılır ve durum ile karşılıklı olarak nasıl etkilendikleri incelenir. Ayrıca, genel olarak durum çalışmalarında tüm durumlar birbirinden farklı ve kendine has olduğundan sonuçların evrene genellenmesi söz konusu değildir. Ancak, analitik genellemeler yapılabilir ve kuramsal önermelerde bulunulabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

3.2 Araştırmanın Tasarımı ve Yürütülmesi

Bu çalışmada öncelikle çalışmanın yapılacağı sınıf düzeyi belirlenmiş, GME' nin temel ilke ve prensipleri esas alınarak bağlamsal problemler ve etkinlikler oluşturulmuştur. Sonrasında, pilot çalışma gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışmanın ışığında ana çalışmanın yapılacağı ortam planlanarak katılımcılar belirlenmiş ve uygulama süreci gerçekleştirilmiştir. Çalışma planına Tablo 1'de yer verilmiştir.

Tablo 1: Çalışma Planı

Tarih	Yapılan çalışma		Katılımcı sayısı
2017-2018 Güz Dönemi	Öğrenme ortamının tasarlanması Veri toplama araçlarının hazırlanması		
2017-2018 Bahar Dönemi Nisan-Mayıs	Pilot çalışma	Öğretim süreci	15
		Klinik görüşmeler	3
	Pilot çalışmaya göre öğretim sürecinin ve veri toplama araçlarının yeniden yapılandırılması		
2017-2018 Bahar Dönemi Mayıs-Haziran	Asıl uygulamanın yapılacağı grubun gözlemlenmesi		17
	Katılımcıların belirlenmesi		4
	Asıl uygulama	Öğretim Süreci	17
		Klinik görüşmeler	4

3.3 Pilot Çalışma

Veri toplama işlemini gerçekleştirilmeden önce, araştırmacının gözlem ve görüşme yapma, veri toplama, verileri analiz etme ve yorumlama becerilerinin geliştmesi, muhtemel eksikliklerin fark edilebilmesi ve çalışmanın güvenirliğinin artırılabilmesi için pilot çalışma yapılmıştır. Ayrıca, yapılan pilot çalışmanın, GME yaklaşımının uygulamasında ve verilerin analizi sürecinde APOS teorisinden yararlanma konusundaki güçlü ve zayıf yönlerini açığa çıkaracağı, zayıf yönlerin onarılmasını sağlayacağı da düşünülmüştür.

Pilot çalışmanın katılımcılarını Karadeniz bölgesinde büyük bir ile bağlı olan merkezi bir ilçenin devlet ortaokulunda öğrenim gören üç 6. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Araştırmacının daha önce bu okulda öğretmenlik yapmış olması, öğrencileri ve okulu yakından tanıması bu okulun pilot uygulama için seçilmesinde etken olmuştur. Çalışma, aynı eğitim-öğretim yılının Mart-Nisan aylarında gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın uygulanması öncesinde hacim kazanımlarını işlenmemiş olmasının yanı sıra hacim kavramını oluşturmak için gerekli olan önbilgilere sahip olmalarına dikkat edilmiştir. Uygulama sürecinden önce gerekli izinler alınmış, gönüllü olan 15 öğrenci pilot uygulamaya katılmıştır. Öğrencilerin önbilgilerinin ölçülmesi ve hazırbulunuşluk seviyelerinin incelenmesi amacıyla Ek 1'de verilen hazırbulunuşluk testi uygulanmış, testin sonuçları ve matematik öğretmeninin görüşleri dikkate alınarak üç heterojen grup oluşturulmuştur. Her gruptan (farklı kavramsallaştırma süreçlerine sahip olacağı düşünülen) birer öğrenci seçilerek toplamda üç öğrenci ile klinik görüşmeler yapılmıştır.

Pilot çalışmanın uygulama ve analiz sürecinde hissedilen bazı aksaklıklar olmuştur ve asıl uygulamada bu aksaklıklarla karşılaşmamak için aşağıda belirtilen değişiklikler yapılmıştır. Pilot çalışmada ilk problem için dikdörtgenler prizması şeklindeki kutuların ayrıtları belirlenirken, kutuların hacimlerinin birbirine yakın olmasına ve bir ölçüm yapmadan kutuların ebatlarının tahminini güçleştirecek şekilde olmasına dikkat edilmiştir. Fakat ayrıt uzunlukları küçük olduğundan, öğrencilerin kutuların içerisine birim küp yerleştirmede zorluk çektiği fark edilmiştir. Bu yüzden asıl uygulamada hacimleri birbirine yakın olan, ebatları daha uzun kutular kullanılmıştır.

Pilot çalışmanın verileri göz önünde bulundurularak, asıl uygulamaların gerçekleştirileceği ortamın öğrencilerin tartışmalarını ve kavramsallaştırma sürecini destekler nitelikte olmasına dikkat edilmiştir. Hacim konusunun kavramsallaştırılması ve üç boyutlu uzamsal yapılanmanın oluşumu somut materyaller ile ilişkilidir. Bu yüzden, pilot çalışmada öğrencilerin kavramsallaştırma sürecini kolaylaştıracak, ihtiyaç duyulan materyaller belirlenerek asıl çalışmada bu materyallerin kullanılmasına dikkat edilmiştir. Asıl uygulamada birim küplere ek olarak, öğrencilerin ihtiyaç duyabileceği farklı ebatlarda prizmalar hazırlanarak sınıfa yerleştirilmiştir. Ayrıca, araştırmacı pilot uygulama sayesinde, sınıf içi uygulamalar ve klinik görüşmeler esnasında öğrencilerle nasıl etkili iletişim kurabileceği ve kavram oluşum süreçlerini nasıl açığa çıkarabileceği konusunda deneyim kazanmıştır. Özellikle pilot çalışmada yanlış veya erken müdahalede bulunulduğu düşünülen noktalar belirlenerek, asıl çalışmada öğrencilerin daha fazla düşünmesine olanak sağlanması gerektiğine ve öğrencilerin düşüncelerini açıklatmaya yönelik soruların daha fazla sorulması gerektiğine karar verilmiştir. Ayrıca, pilot çalışmada ilk problemden sonra ve tüm sürecin sonunda olmak üzere iki klinik görüşme gerçekleştirilirken, asıl çalışmada öğrencilerin ikinci problemle ilgili düşüncelerinin daha ayrıntılı incelenebilmesi için problem grupla çözüldükten hemen sonra görüşme yapılması ve tüm sürecin sonunda bir görüşme daha yapılması planlanmıştır.

3.4 Katılımcılar

Nitel araştırmada örneklemin geniş tutulması gerek kaynakların sınırlılığı gerekse kullanılan analiz yöntemlerinin özelliğinden dolayı çoğu zaman mümkün olmamaktadır ve gerçekçi değildir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu çalışma, Karadeniz bölgesinde, büyük bir ilde bulunan bir devlet üniversitesine bağlı vakıf kolejinde öğrenim gören dört 6. sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. GME’ ye uygun öğretimi gerçekleştirmek amacıyla okuldaki beş sınıftan biri amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme ile seçilmiştir. Sınıfın heterojen olması, sınıftaki öğrencilerin etkileşim içerisinde olması ve kendilerini iyi bir şekilde ifade edebilmeleri önemli ölçütler arasındadır. Öğretim süreci sonrasında yapılan birebir görüşmelerdeki katılımcılar ise yine amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örneklemesi ile seçilmiştir. Amaçlı örnekleme nispeten küçük örneklemler üzerinde derinlemesine araştırılmak istenen bir olgunun anlaşılması ve incelenmesi amacıyla kullanılır (Patton, 2001; Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Öğretim süreci başlamadan önce, araştırmacı hem öğrencileri tanımak hem de öğrencilerin araştırmacıya alışarak çalışmanın doğal seyrinde ilerlemesi sağlamak amacıyla bir hafta süre ile öğrencilerin matematik derslerine gözlemci olarak katılmıştır. Ayrıca, GME’nin “*sosyal bağlam ve etkileşim*” ilkesi gereğince, çalışmanın heterojen gruplarda gerçekleşmesi için hacim konusu ile ilişkili olan konuları içeren bir hazırbulunuşluk testi hazırlanmıştır. Hazırbulunuşluk testi araştırmanın yapılacağı sınıfa uygulandıktan sonra, testin sonuçları göz önünde bulundurularak 17 kişiden oluşan sınıf her grupta 4-5 öğrenci olacak şekilde dört heterojen gruba ayrılmıştır. Heterojen grupların oluşturulmasında aynı grupta bulunan öğrencilerin hacim kavramı ile ilgili önbilgilerinin farklı olmasına dikkat edilmiştir. Grup içerisindeki etkileşimin maximum düzeyde olması ve aynı grupta bulunan öğrencilerin matematiksel becerilerinin farklı olması amacıyla sınıfın matematik öğretmeninin görüşleri alınmıştır. Oluşturulan heterojen gruplar ve öğrenciler ile ilgili bilgilere Tablo 2'de yer verilmiştir.

Tablo 2: Heterojen gruplar

Grup adı	Gruptaki öğrenciler
1. Grup	Burcu, Ö1, Ö2, Ö3, Ö4
2. Grup	Zehra, Ö5, Ö6, Ö7
3. Grup	Irmak, Ö8, Ö9, Ö10
4. Grup	Mert, Ö11, Ö12, Ö13

Birebir olarak gerçekleştirilen klinik görüşmeler için öğrencilerin hazırbulunuşluk seviyeleri ve iletişim becerileri dikkate alınarak her gruptan birer katılımcı seçilmiştir (Burcu, Zehra, Irmak, Mert). Bilgi açısından zengin durumlar elde edilmesi ve çalışmanın bulgularının aktarılabilirliğinin artırılması amacı ile mümkün olduğunca farklı süreçlerin içerildiği farklı durumlar incelenmeye çalışılmıştır. Bu amaçla, kendini iyi ifade edebilen, fakat farklı hazırbulunuşluk düzeyine sahip öğrenciler seçilmeye çalışılmıştır. Bu kişilerin seçilmesinde dersin öğretmenin görüşleri ve araştırmacının uygulama sürecindeki gözlemleri de önemli ölçütler arasındadır. Öğrencilerin testten aldıkları puanların yanı sıra açık uçlu sorularda farklı ve/veya dikkat çekici açıklamalarda bulunan öğrenciler seçilmeye çalışılmıştır. Görüşme yapılan kişilerin hazırbulunuşluk testinden aldıkları sonuçlar Tablo 3'de görülmektedir.

Tablo 3: Klinik görüşmeler için seçilen katılımcıların hazırbulunuşluk test sonuçları

Katılımcılar	Cinsiyet	Doğru (tam-eksik) cevap sayısı/yanlış cevap sayısı
Irmak	Kız	14- 2 / 0
Burcu	Kız	11- 2 / 2
Zehra	Kız	13- 2 / 1
Mert	Erkek	10- 3 / 3

3.5 Verilerin Toplanması

Bu bölümde veri toplama araçları ve öğretim sürecinden bahsedilmiştir.

3.5.1 Veri Toplama Araçları

Çalışmanın veri toplama araçları öğrencilerin hazırbulunuşluk seviyelerini ve ön bilgilerini ortaya koymak amacıyla hazırlanmış olan hazırbulunuşluk testi, klinik görüşmeler, öğrencilerin ders içerisinde kullandıkları grup çalışma kâğıtları ve birebir görüşme sırasında kullanılan bireysel çalışma kâğıtlarından oluşturmaktadır.

3.5.1.1 Hazırbulunuşluk Testi

Çalışmanın öğretim süreci gerçekleştirilmeden önce, yapılan alan yazın taraması ve deneyimler doğrultusunda prizmanın hacmi kavramı için önkoşul olduğuna inanılan kavramları içeren (sekiz açık uçlu, bir doğru yanlış, bir boşluk doldurma ve beş çoktan seçmeli sorudan oluşan) bir test geliştirilmiştir. Bu test başlıca, ortak bölen ve ortak kat, uzunluk ve alan ölçme birimleri, kare ve dikdörtgenin alanı, dikdörtgenler prizması, kare prizma, küp, prizmanın yüzey alanı, konularından oluşmaktadır. Testin kapsam geçerliliğin sağlanması için alanında uzman beş kişiden uzman görüşü alınmıştır. Uzman görüşlerine göre çoktan seçmeli olan bazı sorularda daha çeldirici olması için cevap şıklarının yerleri değiştirilmiş ve şekiller birbirine daha yakın hale getirilmiştir (Ek 2, 6 ve 9. soru). Ayrıca, açık uçlu bir sorunun hikâyesi günlük hayata uygun olacak şekilde değiştirilmiştir (Ek 2, 5. soru). Bazı soru metinlerinde ise, sorunun öğrenci tarafından daha iyi anlaşılabilmesi için, uzman görüşleri doğrultusunda küçük değişiklikler yapılmıştır**.** Revize edilen test çalışmanın gerçekleştirildiği okulda çalışmaya dahil olmayan başka bir 6. sınıfa uygulanmıştır.

Bu sınıfın seçilmesinde ise çalışmanın yapılacağı sınıfın öğrenci sayısına eşit olan ve ortak matematik öğretmenlerinin görüşlerine göre hazırbulunuşlukları bakımından denk olan sınıf tercih edilmiştir. İlgili sınıfa hazırbulunuşluk testi uygulandıktan sonra, öğrencilerin zorlandıkları ve anlamadıkları noktalara da dikkat edilerek teste son hali verilmiştir (Ek 1).

3.5.1.2 Grup Çalışma Kâğıtları ve Etkinlik Kâğıtları

Oluşturulan heterojen gruplarda grup içi tartışmalar ve farklı düşünceler desteklenmiş ve öğrencilerin grup çalışma kâğıdına bireysel düşünceleri ve grubun vardığı sonuçları yazabilecekleri söylenmiştir. Grup içi tartışmalarda öğrencilerin bireysel düşünmelerini belirleyebilmek amacı ile gruptaki her bir üyeye farklı renkte kalemler verilmiş ve bunları kullanmaları istenmiştir. Grupların matematikleştirme süreçlerinin ve grup içi tartışmalarının ayrıntılı bir şekilde takip edilmesi amacı ile her grubun süreçleri birer video kamera ve ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır. GME' ye uygun olarak hazırlanan her bir bağlamsal problemin çözülmesinden sonra grup çalışma kâğıtları toplanmıştır. Ayrıca, dikey matematikleştirmenin gerçekleştirilmesi amacıyla hazırlanan çalışma sorularını ve ev ödevlerini içeren etkinlik kâğıtları her öğrenciye bireysel olarak dağıtılmış ve her dersin sonunda toplanmıştır.

3.5.1.3 Klinik Görüşme ve Bireysel Çalışma Kâğıtları

Klinik görüşme nitel araştırmalarda kullanılan en yaygın yöntemlerden biridir. Bu yöntem araştırmacıya esneklik kazandırır, araştırmacı ortamda bizzat bulunduğu için ortam üzerinde kontrol sağlar ve veri kaynağını bizzat teyit edebilir. Bu yüzden görüşme ile elde edilen verilerin anket gibi nicel araştırma yöntemlerinden elde edilen veriye göre geçerliliği daha yüksektir. Ayrıca, görüşme yöntemi araştırılan konu veya problem ile ilgili derinlemesine bilgi sağlar. Görüşülen bireyin anlık tepkilerinin ve sözel olmayan davranışları da kayıt altına alındığı için araştırmacıya zengin bir veri sunar. Görüşme yönteminde çalışma gerçekleştirilmeden önce, araştırma soruları ile ilgili tüm boyutları ve soruları kapsayacak şekilde bir görüşme formu hazırlanabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Görüşme formunda kolay anlaşılabilecek, odaklı, açık uçlu, yönlendirmeden kaçınan, çok boyut içermeyen ve farklı türden sorular olmasına dikkat edilmeli; ayrıca, alternatif sorular ve sondalar hazırlanmalıdır (Patton, 1987).

Bu çalışmada, öğrencilerin matematikleştirme ve kavram oluşturma süreçlerini derinlemesine incelemek amacıyla her gruptan birer öğrenci seçilmiş ve toplamda bu dört katılımcı ile klinik görüşmeler yapılmıştır. Klinik görüşme formu yukarıda bahsedilen ilkelere göre hazırlandıktan sonra, amaca uygunluğunu ve işlerliğini teyit etmek amacıyla uzman görüşleri alınmış ve son hali verilmiştir (Ek 2).

Çalışmada, her bir bağlamsal problemin grupla çözülmesinin ardından seçilen katılımcılarla önce klinik görüşmeler yapılmış daha sonra tüm öğretim sürecinin tamamlanmasıyla son bir görüşme daha gerçekleştirilmiştir. İlk klinik görüşmelerin bağlamsal problemlerin sonunda ve bir sonraki derse geçmeden önce yapılmasına dikkat edilmiştir. Söz konusu bağlamsal problemle ilişkili olarak, katılımcının kavramla ilgili bireysel görüş ve anlayışı açığa çıkarılmaya çalışılmış ve grup içerisindeki tartışmaları açıklanması istenmiştir. Tüm sürecin sonunda gerçekleştirilen son görüşmede ise, katılımcının etkinlik kâğıdında zorlandığı sorular üzerinde durulmuş, bu sorulardan bazılarının yeniden çözülmesi istenmiştir. Ayrıca, son görüşmede bunlara ek olarak, katılımcıların bilişsel olarak hangi düzeye çıkabileceğini araştırmak amacıyla iki problem daha sorulmuştur (Ek 2).

Yapılan klinik görüşmelerde öğrencilerin bilişsel süreçlerinin açığa çıkması amaçlanmıştır. Bu yüzden görüşmeler öğrencilerin kendilerini rahat hissedecekleri bir ortamda gerçekleştirilmiş ve öğrencilerden sesli düşünmeleri istenmiştir. Ayrıca, tüm klinik görüşmeler video kamera ve ses kayıt cihazı ile kayıt altına alınmıştır. Öğrencilerin görüşme boyunca düşündükleri tüm süreçleri ve ulaştıkları çözümleri ise bireysel çalışma kâğıtlarına yazmaları istenmiştir.

3.5.2 Öğretim Süreci

Öğretim süreci GME'nin ilke ve prensiplerine göre planlanmaya çalışılmıştır. Sosyal bağlam ve etkileşim prensibi temel alınarak, öğrenciler hazırbulunuşluk seviyelerine göre heterojen gruplara ayrılmışlardır. Öğrencilerin gruplar içerisinde serbestçe düşünebilecekleri ve gerçek matematikçilerin süreçlerine benzer süreçleri deneyimleyebilecekleri, doğal bir ortam hazırlanmaya çalışılmıştır. Araştırmacının rehber konumunda olduğu öğrenme ortamında öğrencilerin matematikleştirme süreçleri desteklenmeye çalışılmıştır. Bağlamsal problemler öğrencilere kavramın oluşumuna yardımcı olan yapılandırılmış bir başlangıç sunar ve öğrenciler verilen problemi konu ile ilgili var olan bilgi ve becerileri ile ilişkilendirebilirler. Ayrıca, problemleri çözme ve kavramı oluşturma sürecinde öğrencilerin informal çözüm stratejileri, didaktik fenomenleri ve oluşturdukları modeller açığa çıkabilir. Öğrenilecek kavramın oluşumu sürecinde, matematikleştirme süreçlerini kolaylaştırmak için, öğrencilere gerçek yaşamda olabilecek veya hayal edebilecekleri bağlamsal iki problem durumu sunulmuştur. Bu problemler, prizmanın hacmi kavramını oluşturma süreçlerinin incelenmesi amacıyla Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) tarafından sunulan kazanımlar hedef alarak GME'ye uygun şekilde hazırlanmıştır. Problemler sınıf ortamında ve grup içerisinde çözüldükten sonra, klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Klinik görüşmelerin ardından ise öğrencilerin bir araya gelerek çözümlerini ve fikirlerini tüm sınıfla paylaşmaları istenmiş ve gruplar arası tartışmalar desteklenmiştir. Yapılan bu tartışmaların sonucunda öğrencilerin kavramla ilgili eksikliklerinin giderilmesi amaçlanmıştır. Her iki bağlamsal problem için bu süreç tekrarlanmış ve dikey matematikleştirmenin gerçekleşmesini hedefleyen etkinlik kâğıtları öğrencilere bireysel olarak dağıtılmıştır (Ek 3). Etkinlik kâğıdındaki tüm sorular öğrenciler tarafından çözüldükten sonra çözüm stratejileri sınıfla paylaşılmış, farklı olan çözümler karşılaştırılarak tartışmalar desteklenmiştir. Sınıfta yapılan etkinlikleri pekiştirmek ve öğrencilerin konu ile ilgili daha derin düşünmelerini sağlamak için ise, amaca yönelik ev ödevleri verilmiştir. Bu ödevler de öğrenciler tarafından yapıldıktan sonra çözümler sınıfla birlikte tartışılmıştır.

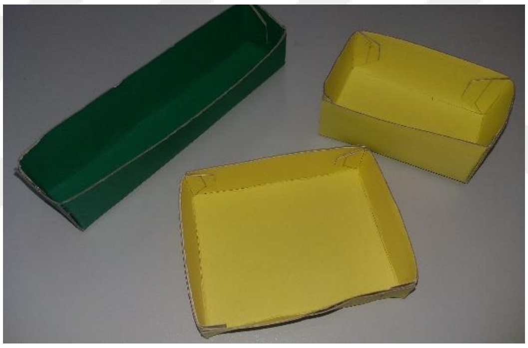
İlk bağlamsal problem *"M.6.3.4.1. Dikdörtgenler prizmasının içine boşluk kalmayacak biçimde yerleştirilen birim küp sayısının o cismin hacmi olduğunu anlar, verilen cismin hacmini birim küpleri sayarak hesaplar"* kazanımı ile ilgilidir. Bu problemin grup içerisinde bir ders saatinde çözüleceği düşünülmüştür. Problemle ilgili klinik görüşme tamamlandıktan sonra ise problem ve çözüm stratejilerinin tartışılması için bir ders saatinin yeterli olacağı düşünülmüştür.

Birinci bağlamsal problem öğrencilere direkt olarak verilmeden önce, problemin bağlamı ve hikâyesi tanıtılmaya çalışılmıştır. Tüm öğrencilerin hikâyeyi anladığı düşünüldükten sonra, problem tahtaya yansıtılmıştır. Tüm öğrencilerinin problemi istedikleri zaman görmeleri için ise gruplara aşağıdaki gibi problem metninin birer kopyası dağıtılmıştır.

> "Ali doğum günü için arkadaşına hediye almıştır. Hediyeyi bir kutuya koymak isteyen Ali, evde 3 tane kutu bulmuştur ve hediyeyi her üç kutuya da sığdırabilmektedir. Fakat hediyenin kırılmaması ve kolay taşınabilmesi için

bunlardan en küçük olanını seçmek ister. Acaba Ali en küçük kutunun hangisi olduğuna karar verebilir mi? Nasıl?”

Bu soruda öncelikle Ali’nin elindeki kutuların nasıl kutular olabileceği tartışılmış ve araştırmacı öğrencilerin ihtiyaç duyabileceğini düşünerek, dikdörtgenler prizması şeklindeki üç kutuyu örnek olarak önceden hazırlamıştır. Şekil 8’deki gibi görünen ve ayrıtları, 7, 9, 2; 13, 3, 3; 8, 5, 3 cm olan bu kutuların hacimleri birbirine çok yakın olduğu için herhangi bir ölçüm yapmadan hangisinin en küçük olduğu anlaşılmamaktadır. Öğretim sürecinde gruplar arası tartışmayı kolaylaştırmak için, tüm gruplara yukarıda ayrıtları belirtilen üç kutu verilmiştir. Bu problemin çözüm sürecinde öğrencilerin dikdörtgenler prizmasının hacminin prizmanın içini hiç boşluk kalmayacak şekilde dolduran birim küplerin sayısı olduğunu kavramsallaştırmaları istenmektedir.



Şekil 8: Dikdörtgenler prizması şeklindeki örnek kutular

İkinci bağlamsal problemi “*M.6.3.4.2. Verilen bir hacim ölçüsüne sahip farklı dikdörtgenler prizmalarını birim küplerle oluşturur, hacmin taban alanı ile yüksekliğin çarpımı olduğunu gerekçesiyle açıklar”* ve *“M.6.3.4.4. Dikdörtgenler prizmasının hacim bağıntısını oluşturur, ilgili problemleri çözer”* kazanımları ile ilgilidir. Bu problemin amacı dikdörtgenler prizmasının hacim formülünün oluşturulmasıdır. İlk problemle ilgili tüm süreç tamamlandıktan sonra, bu problemin gruplar içerisinde iki ders saati süresince çözülmesi planlanmıştır. Problem ile ilgili klinik görüşmeler tamamlandıktan sonra ise, tüm sınıf ve gruplar arası tartışmaların iki ders saati süreceği planlanmıştır.

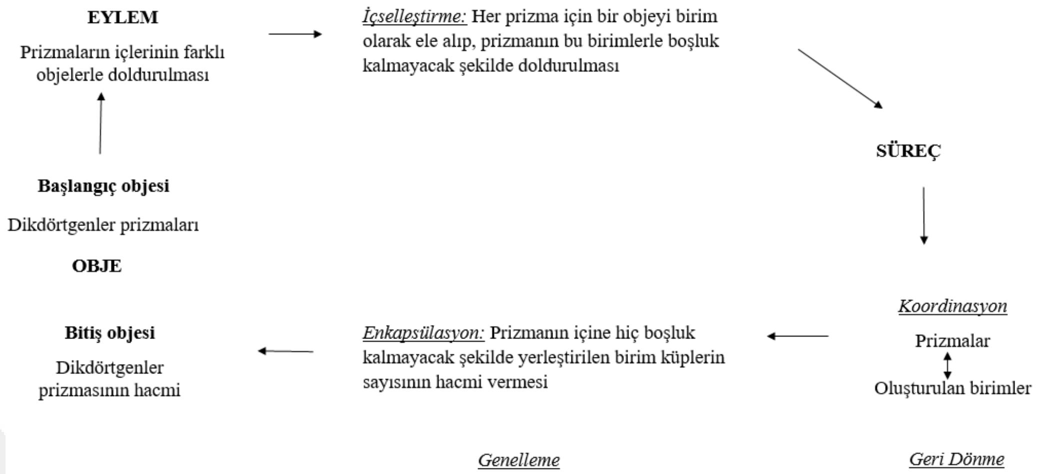
“Ali’nin babası Ahmet Bey, çikolata fabrikasında çalışmaktadır. Ahmet Bey, bayramda akrabalarına göndermek için fabrikadan eş büyüklükte ve küp şeklinde olan çikolatalardan bir miktar almıştır. Çikolataları paketlemek için babasına yardım edecek olan Ali, her akrabaya eşit sayıda çikolata göndermek istemektedir. Bunun için çeşitli şekillerde kutular tasarlayan Ali ve babası Ahmet Bey' in, her bir kutuya hiç boşluk kalmayacak şekilde belirli bir sayıda çikolata sığdırmaları gerekmektedir. Bu işlem için nasıl kutular kullanılabilir?"

Bu problemin çözüm sürecinde öğrencilerin eş sayıda çikolata sığan, farklı şekillerdeki prizmaları (somut olarak, zihinlerinde veya kâğıt üzerinde çizim yaparak) tasarlayabilecekleri düşünülmüştür. Bu prizmaları oluştururken, herhangi bir strateji belirleyen öğrencilerin prizmanın hacmi ile ilgili bir bağıntıya ulaşabilecekleri planlanmıştır.

3.6 Verilerin Analizi

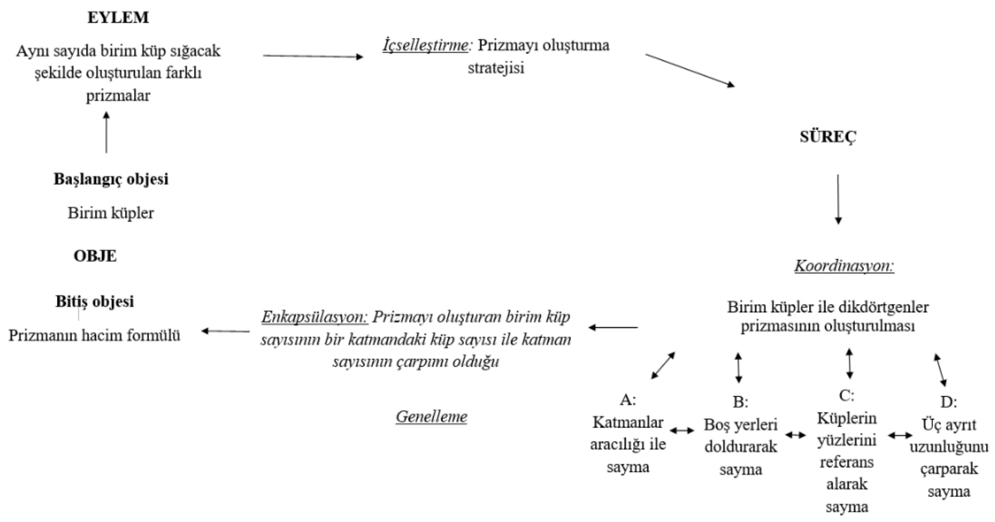
Nitel olarak desenlenen bu çalışmada, grup çalışma ve klinik görüşme sürecinden elde edilen nitel verileri analiz etmek için içerik analizi sürecinden yararlanılmıştır. Böylece, öğrencilerin GME'ye dayalı öğrenme ortamında hacim kavramını oluşturma süreçlerinin analizinde, durum olarak ele alınan prizmanın hacmi kavramının derinlemesine incelenmesi hedeflenmiş. Elde edilen verilerin anlamlı birimler halinde kodlanması amacıyla, veriler tekrarlı bir şekilde incelenmiş, karşılaştırılmış, ilişkilendirilmiş ve kavramsallaştırılmıştır. Elde edilen kavramlar ise belirli kategoriler veya temalar altında sınıflandırılarak, açıklanmaya çalışılmıştır (Strauss ve Corbin, 1990; Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Bu çalışmada öğrencilerin hacim kavramını oluşturma süreçlerini incelemek amacıyla APOS teorik çerçevesinden yararlanarak veriler kodlanmıştır. Böylece, APOS teorisinin kavram oluşumu sürecindeki zihinsel yapılanmada genetik çözümlemedeki gücünün yararlı olacağı düşünülmüştür. Verilerin analizi sürecinde, APOS teorisi referans alınarak kavramın genetik çözümlemesi hazırlanmıştır. Genetik çözümlemenin oluşturulması sürecinde kavramla ilgili matematiksel bilgi ve deneyimlere ek olarak pilot çalışmanın verileri etkili olmuştur. Uygulama sürecinden önce oluşturulan genetik çözümleme, araştırmacılara öğrencilerin kavramı nasıl oluşturabilecekleri ile ilgili fikir vermesinin yanı sıra, öğretim sürecinin ve materyallerinin hazırlanmasında yardımcı olmuştur. Bu çalışmada hacim kavramı ile ilgili ele alınan iki kazanım için iki ayrı genetik çözümleme hazırlanmıştır. Bu kazanımlardan biri öğrencilerin dikdörtgenler prizmasının hacminin prizmanın içine hiç boşluk kalmayacak şekilde yerleştirilen birim küplerin sayısı olduğu ile ilgili oluşturabilecekleri şema (Şekil 9), diğeri ise prizmanın hacim formülü ile ilgili sahip olabilecekleri düşünülen şemadır (Şekil 10).



Şekil 9: Hacim Kavramı ile İlgili Genetik Çözümleme

Oluşturulan birinci genetik çözümlemeye göre, *başlangıç nesnesi* farklı ebatlara sahip dikdörtgenler prizmaları olarak belirlenmiştir. *Eylem* aşamasında hacimlerinin ölçüsü birbirine çok yakın olan herhangi üç prizmadan (dikdörtgenler prizması şeklinde kutular) hangisinin en küçük (hacimli) olduğunun bulunması için prizmaların içlerin farklı nesnelerle doldurarak karşılaştırılabilir. Bu aşamada prizmaların (hacminin) ebatının tam olarak ölçülebilmesi için boşluk kalmaması gerektiği düşünülerek belirlenen bu prizmalar için farklı birimler oluşturulabilir. Böylece, herhangi bir prizmanın ebatının ölçülmesi için içerisinde boşluk kalmaması ve birim oluşturma fikri yani *eylem*(ler) içselleştirilebilir. Belirtilen birimler ve prizmalar arasında koordinasyon kurularak, prizmaların (hacimlerinin) büyüklüklerinin karşılaştırılabilmesi için aynı birimlerin kullanılması gerektiğini ifade edilebilir ve aynı (eş) olan bu birimin birim küp olacağını fark edilebilir. Böylece, prizmanın büyüklüğünün (hacminin), içerisine hiç boşluk kalmayacak şekilde yerleştirilen birim küp sayısı olduğu *enkapsüle* edebilir ve bu durumun tüm prizmalar için geçerli olduğu fikri *genellenerek* prizmanın hacmi *nesne*sine ulaşılabilir.



Şekil 10: Hacim Formülü ile İlgili Genetik Çözümleme

İkinci genetik çözümlemede ise, hacmin bağıntısının yapılandırılması beklenmektedir. Bunun için, ilgili bağlamsal problemin çözümüne birim küplerle (eş büyüklükteki çikolatalar) başlanabilir. Birim küpler kullanılarak belirtilen sayıda birim küpün sığacağı dikdörtgenler prizması şeklindeki farklı kutular tasarlanabilir. Bu yüzden, *eylem*de toplam birim küp sayısının bölenleri düşünülebilir ve prizmayı oluşturmak için bu birim küplerin nasıl sıralanacağı ve nasıl sayılacağının belirleneceği bir strateji geliştirilebilir. Bu stratejinin tüm prizmalar için işe yarar olup olmadığı araştırılarak, gerçekleştirilen *eylem* (algısal veya fiziksel) üzerinde reflektif düşünülebilir ve *eylem* içselleştirilebilir. *Eylem* içselleştirilirken, *eylem*de oluşturulan şekil zihinlerde görsel imaj olarak yeniden oluşturulabilir. Ayrıca, şeklin zihinde yeniden oluşturulması, süreç içerisinde ilişkilerin keşfedilmesine, kişinin kendi *eylem*lerine ve çeşitli koordinasyonların geliştirilmesine bağlıdır. Bu yüzden, şeklin oluşturulması ve birim küplerin sayılması için geliştirilen farklı stratejiler arasında koordinasyon yapılabilir. Örneğin, süreç içerisinde aynı sayıda birim küpe (aynı hacme) sahip farklı prizmalar oluşturularak, ayrıtlar ve ayrıtları oluşturan birim küp sayısı arasında koordinasyon kurulabilir. Ayrıca, birim küpleri sayma sürecinde önce, tabandaki birim küpler sayılabilir ve dikdörtgenler prizmasının hacmi, tabandaki birim küp sayısı ile yüksekliği oluşturan birim küp sayısının çarpımı olarak *enkapsüle* edilebilir ya da herhangi bir katmandaki birim küp sayısı ile prizmanın içerisindeki katman sayısının çarpımı olarak *enkapsüle* edilebilir. Böylece, bulunan bağıntıyı $uzun\ kenar\ uzunluğu \times kısa\ kenar\ uzununluğu \times yükseklik$ bağıntısı ile de ilişkilendirilebilir. Gerçekleştirilen süreçlerin genellenmesi ile tüm dikdörtgenler prizmaları için geçerli olan bir bağıntı elde edilerek prizmanın hacim formülü *nesne*sine ulaşılabilir.

Bu çalışmada APOS teorisi genel çerçeve olarak alınmış, yapılan görüşme kayıtları deşifre edilerek ve iki araştırmacı tarafından fikir birliğine varılarak kodlanmıştır.

3.7 Çalışmanın Geçerliliği ve Güvenirliliği

Nitel araştırmalarda, araştırmacının esnek olması, ek görüşmeler yapabilmesi ve verileri teyit etmek için farklı veri toplama yöntemlerini kullanabilmesi ve çalışmanın doğal ortam içerisinde gerçekleştirilmesi çalışmanın geçerliliğini artıran yönleridir. Bu çalışmanın iç geçerliliğini (inandırıcılık) sağlamak amacıyla çalışmanın bulguları tarafsız bir uzman ile incelenerek, bulguların kendi içerisinde tutarlı ve anlamlı olup olmadığı ve oluşturulan kuramsal çerçeve ile uyumlu olup olmadığı tartışılmıştır. Bu tartışmaların ürünleri neticesinde bulgular tekrar ele alınmıştır. Ayrıca, veri toplama yöntemlerinden görüşme ve doküman incelemesi bir arada kullanılarak yöntem çeşitlemesi yapılmıştır (Miles ve Huberman, 2015; Patton, 1987). Nitel araştırmalarda doğrudan genelleme yapılamadığı için dış geçerliliğin (aktarılabilirlik) zayıf olduğu söylenebilir. Fakat nitel olarak desenlenen çalışmalarda sayısal genelleme yerine analitik genellemeler yapılabilir. Bu çalışmada katılımcıların, sürecin ve ortamın ayrıntılı bir şekilde tanımlanması, araştırmanın bulgularının başka ortamlarda test edilmesini ve başka örneklemelerle karşılaştırılmasını sağlayabilir. Böylece, bu araştırmanın sonuçlarının aktarılabilirliğinin arttığı söylenebilir (Miles ve Huberman, 2015; Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Nitel araştırmalarda dış güvenirlik (teyit edilebilirlik), çalışma aynen tekrar edildiğinde aynı sonuçlara ulaşılacağı anlamını taşımaz, fakat karşılaştırılabilir sonuçlar mümkün olabilir. Ayrıca, dış güvenirliği sağlamak için çalışmada kullanılan yöntem, veri toplama, analiz etme, yorumlama gibi kısımlar açık ve anlaşılır bir şekilde yazılması önerilmektedir (Miles ve Huberman, 2015). Bu çalışmada araştırmacı gerek öğretim gerek birebir görüşme sürecinde verilerin toplanma sürecine dahil olmuştur. Bu yüzden çalışmanın güvenirliliği için araştırmacının kendi yorum ve yargılarını araştırma sürecindeki verilerden ayrı tutması gerekmektedir. Araştırmacı bu konudaki birikimini artırmak için hacim konusu ile ilgili pilot bir çalışma gerçekleştirmiş; ayrıca, farklı kavramların kavramsallaştırılması ile ilgili çalışmalara katılmıştır. Çalışmanın iç güvenirliğinin (tutarlılık) sağlanması için ise, elde edilen bulgular hiçbir yorum katılmadan aktarılmıştır ve katılımcılardan elde edilen doğrudan alıntılarla desteklenmiştir. Ayrıca, önceden oluşturulan ve açıklanan kavramsal çerçeve esas alınarak veri analizinin yapılması da iç güvenirliği artıran etmenlerin arasındadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Miles ve Huberman'a (2015) göre ise, araştırma sorularının açık bir şekilde ifade edilerek araştırmanın aşamalarının belirlenen sorular ile uyumlu olması, araştırmacının kendi konumunu, kullandığı yaklaşımları, veri toplama ve analiz sürecindeki kontrolleri açık bir şekilde ifade etmesi iç güvenirliği artıran etmenlerdendir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

IV. BULGULAR

Bu bölümde hacim kavramının öğretimi sürecindeki grup çalışma kâğıtları, klinik görüşmeler ve bireysel çalışma kâğıtlarından elde edilen veriler analiz edilmiş ve bulgulara yer verilmiştir. Çalışmanın katılımcılarını oluşturan dört öğrencinin (Burcu, Irmak, Mert, Zehra) prizmanın hacmi kavramını nasıl oluşturdukları ile ilgili bulgular, araştırma sorularına uygun şekilde organize edilmiştir. Bu yüzden, öncelikle öğrencilerin hacim kavramını prizmanın içerisindeki birim küp sayısı olarak nasıl oluşturdukları, sonra hacim formülünü nasıl yapılandırdıkları, en son da dikdörtgenler prizması, kare prizma ve küp arasındaki ilişkiyi nasıl yapılandırdıkları ve dikey matematikleştirme süreçleri incelenmiştir. Bulgularda zaman zaman grup içerisindeki veya klinik görüşmelerdeki dialoglara yer verilmiştir. Bu dialoglarda araştırmacı "A" ile, dört katılımcı baş harfleri ile, sınıf içerisindeki diğer öğrenciler ise "Ö1, Ö2 vb." kodları ile temsil edilmiştir.

Hacim kavramı ve bağıntısını oluşturma sürecinde, bağlamsal problemler öncelikle sınıf ortamında ve grup içerisinde tartışılarak çözülmüş; sonrasında ise, her gruptan birer katılımcı belirlenerek, toplamda dört katılımcı ile klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Hacim kavramının ve bağıntısının incelendiği ilk iki bölümde öncelikle belirlenen katılımcının grup içerisindeki düşünme süreçleri, grup arkadaşları tarafından etkilenebileceği süreçler ile birlikte verilerek irdelenmiştir. Birebir olarak gerçekleştirilen klinik görüşmelerde ise, katılımcılardan öncelikle soruyu hatırlamasını ve ne anladığı anlatması istenmiştir. Böylece, yanlış ya da eksik anlaşılan yerlerin başlangıçta giderilmesi amaçlanmıştır. Sonrasında ise, katılımcılardan grup içerisinde gerçekleştirdikleri süreçleri hatırlamaları istenmiştir. Böylece, katılımcının grup çalışmasındaki rolü tahmin edilmeye çalışılmıştır. Ayrıca, grup çalışmasında problemi çözme ve kavramı anlamlandırma sürecinde anlaşılamayan kısımların klinik görüşmede derinlemesine incelenmesi amaçlanmıştır. Bu süreçte, katılımcılar bazen kullandıkları yöntemi ayrıntılı bir biçimde anlatmışlar, fakat çoğu zaman bu yöntemleri uygulayarak problemi yeniden çözmüşlerdir. Ayrıca, kavramın anlamlı bir şekilde yapılandırılması hedeflendiğinden, katılımcıların zihinlerindeki tüm oluşumlar sorgulanarak açıklanması istenmiştir. Yapılan kinik görüşmeler süresince, araştırmacının da yönlendirmesi ile katılımcıların zaman zaman grup çalışmasında keşfedemedikleri sonuçlara ulaşabildikleri görülmüştür.

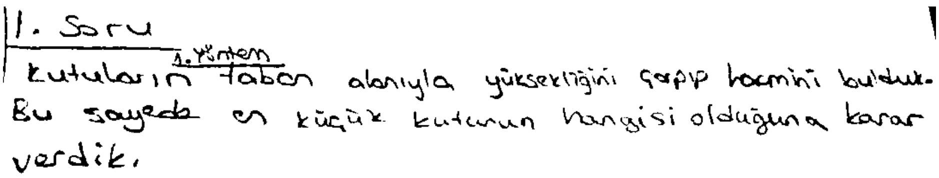
4.1 Prizmanın Hacmini İçini Tam Dolduran Birim Küp Sayısı Olarak Kavramsallaştırma Süreci

Öğretim sürecinde öğrencilerin dikdörtgenler prizmasının hacmini öncelikle prizmanın içini tam dolduran birim küp sayısı olarak kavramsallaştırmaları amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda GME' ye uygun olan, öğrencilerin matematikleştirme süreçlerini destekleyen ve informal bilgilerini kullanabilecekleri bağlamsal problemde öğrencilere üç kutudan en küçük olanı nasıl bulabilecekleri sorulmuştur. Aşağıda her bir katılımcının grup içi çalışma ve klinik görüşme süreçlerine ait bulgular alt başlıklar halinde verilmiştir.

4.1.1 Burcu'nun Prizmanın Hacmini İçini Tam Dolduran Birim Küp Sayısı Olarak Kavramsallaştırma Süreci

4.1.1.1 Burcu'nun Grup İçerisinde Gerçekleştirdiği Süreç

Burcu grubundaki arkadaşları ile birlikte öncelikle ortamdaki prizmalardan birini referans alarak, diğerleri ile karşılaştırmaya çalışmışlardır. Örneğin, üç prizmayı sadece genişliklerine göre karşılaştırıp sonra bu prizmaları birbiri içerisine koyup karşılaştırmayı denemişlerdir. Bu denemelerde başarılı olamadıklarında, Ö3 "alanlarına mı baksak" önerisini getirmiş, prizmanın taban alanını düşünürken birden "buraya inen yükseklikle tabanı çarparız" demiştir. O sırada Ö2 bu konuyu babasıyla tartıştıklarını ve derinlik ile tabanın çarparak bulabileceklerini söylemiştir. Bu şekilde grup, verilen üç prizmanın hacmini, ayrıtlarını cetvelle ölçtükten sonra çarparak hesaplamışlardır. Sonuçta $taban\ alanı\ x\ yükseklik$ ve $uzun\ kenar\ x\ kısa\ kenar\ x\ derinlik$ bağıntıları ile hacmi bulabileceklerini söylemişlerdir. Nedenini sorulduğunda "kural bu" diyerek cevap veren öğrencilerden düşünmeleri istendiğinde, Ö1 "*taban alanı tabanda olduğu için gitgide aynı şey olacak, kaç tane var bu tabandan onu bulup çarptık*" demiştir. Böylece, Ö1 grup içerisinde belirtilen $taban\ alanı\ x\ yükseklik$ bağıntısını, "taban hacmi" olarak ifade ettiği tabandaki birim küp sayısı ile prizmanın hacmini ilişkilendirerek açıklamaya çalışmıştır. Öğrencilerin bu yöntemle nasıl bulduklarını açıklamaları istendiğinde ise, Burcu'nun grup çalışma kâğıdına aldığı not Şekil 11' deki gibidir.

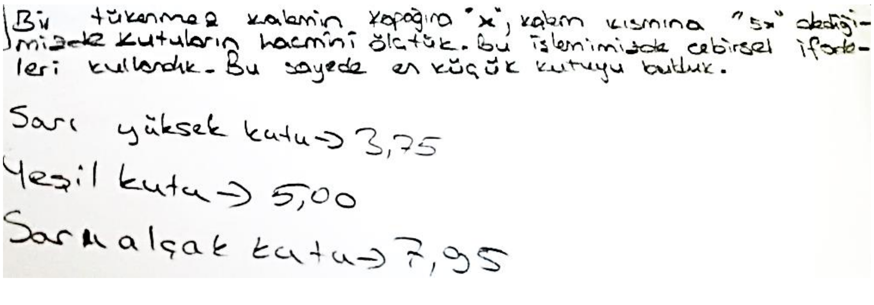

1. Soru

1. Yöntem

Kutuların taban alanıyla yüksekliğini çarpıp hacmini bulduk. Bu sayede en küçük kutunun hangisi olduğuna karar verdik.

Şekil 11: Burcu'nun Hacim Formülü ile İlgili Grup Çalışma Kâğıdına Aldığı Not

Grup daha önceden hacim formülünü duyduğu için bu bağıntıyı hatırlayarak, aslında formal bir şekilde problemi çözdükleri düşünülebilir. Fakat bu aşamada genel anlamda bağıntıyı anlamlandıramamış ve açıklayamamışlar, sadece kuralı uygulamışlardır. Gruba "başka bir şekilde ölçebilir misiniz?" diye sorulduğunda, öğrencilerin grup içerisinde tartışarak, kalemle ölçebilecekleri sonucuna ulaştıkları görülmüştür. Burcu kalemin boyunu bilmediklerini söyleyince bir öğrenci bilenmeyene x diyebileceklerini belirtmiştir. Tükenmez bir kalemle ölçmeyi deneyen öğrenciler, bazı ayrıt uzunluklarını bu kalemle ölçemeyince kalemin kapağını x kabul ederek, önce kalemin uzunluğunu ölçmeyi denemişlerdir. Yani, kalemin kapağını birim olarak kullanmışlardır. Böylece $5x$ olarak buldukları kalemin uzunluğu ile prizmaların uzun kenarlarını, x olan kapak ile de kısa kenar ve yüksekliklerini ölçmüşlerdir. Fakat yine bazı kenarlarda tam sonuca ulaşamayan öğrenciler tahmini olarak $1{,}5x$, $2{,}5x$ gibi ölçümler yapmışlardır ve tüm prizmaların hacmini yine ayrıtları çarparak $5x$; $3{,}75x$ ve $7{,}95x$ bulmuşlardır (Şekil 12). Öğrenciler burada üç tane x in çarpımını x olarak alarak, işlemsel bir hata da yapmışlardır. Ayrıca grup içerisinde bu yöntemi tartıştıklarında, Ö2 "*bu yöntemin saçma*" olduğunu, Ö3 ile birlikte tam hesaplayamadıklarını, aslında yaklaşık bir değer bulduklarını ifade etmişlerdir.


Bir tükenmez kalemin kapağına "x", kalem kısmına "5x" dediğimizde kutuların hacmini ölçtük. Bu işlemimizde cebirsel ifadeleri kullandık. Bu sayede en küçük kutuyu bulduk.

Sarı yüksek kutu → 3,75

Yeşil kutu → 5,00

Sarı alçak kutu → 7,95

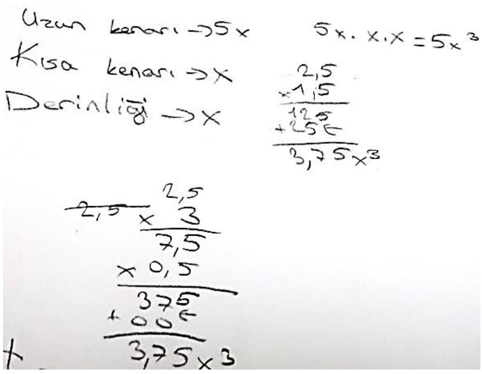
Şekil 12: Burcu'nun Kalemin Kapağını Birim Aldıkları Yöntem ile İlgili Grup Çalışma Kâğıdına Aldığı Not

Kalemi kullanarak ölçmenin tam sonucu vermediğini düşünen öğrenciler, başka bir yöntem düşünürken, Ö2 sınıf ortamında bulunan birim küpleri görerek, bu birim küpleri de kullanabileceklerini söylemiştir. Ö3 ise küplerle kutuların içini doldurabileceklerini ifade etmiştir. Öncelikle büyük (bir kenarı 2,3 cm olan) birim küpleri kullanan öğrenciler, küpün her ayrıtının x olduğunu varsayarak, kutuların sadece üç ayrıtına küpleri dizmişler, kutunun içini tamamen doldurmamışlardır. Grup içerisinde ifade ettikleri $uzun\ kenar \times kısa\ kenar \times yükseklik$ bağıntısını kullanarak kutunun içerisindeki toplam küp sayısını hesaplamaya çalışmışlardır. Fakat grup içi tartışmalar incelendiğinde, öğrencilerin boşluk kalıp kalmadığına dikkat etmedikleri görülmüştür. Ayrıca, Ö2 ve Burcu büyük birim küpleri kullandıklarında üç kutu için de benzer sonuçlara ulaştıklarını ve bu şekilde karşılaştırmayacaklarını ifade ederek, küçük (bir kenarı bir cm olan) birim küpleri de kullanabileceklerini söylemişlerdir. Fakat grup içerisinde küçük birim küplerle ilgili herhangi bir işlem yapmamışlardır.

4.1.1.2 Burcu'nun Klinik Görüşmede Gerçekleştirdiği Süreç

Burcu klinik görüşmede, problemi tekrar çözerken grup çalışmasında yaptıkları gibi, *başlangıç nesnesi* olarak ortamdaki üç prizmayı kullanmıştır. Bu prizmalardan hangisinin en küçük olduğunu bulmak için öncelikle *"kısa kenar ve uzun kenarı çarparak tabandaki dikdörtgenin alanını"* bulabileceğini, sonrasında ise *"çıkan sonuç ile derinliği çarpacağı*"nı söylemiştir. Ayrıca, üç prizma için de hangi ayrıtları çarpacağını göstermiştir, fakat bu aşamada ayrıtların uzunluklarını neden çarptığını açıklayamamıştır.

En küçük kutuyu başka nasıl bulabileceği sorulduğunda ise, grup içi tartışmalarındaki gibi Burcu kalemle ölçebileceklerini "*buna* (kalemin kapağı) *x dedik. Kapakla kalemin boyunu ölçtük.* $5x$ *çıktı.*" şeklinde ifade etmiştir. *Eylem* aşamasında kutuların daha büyük olan ayrıt uzunluğunu kalemle, daha kısa olan ayrıt uzunluğunu ve yüksekliği kalemin kapağı ile ölçen Burcu, kutuların ebatlarını karşılaştırırken "*kutuları karşılaştırmak için bunda ne kullandıysam bunda da onu kullanmalıyım"* demiştir. Böylece kutuları karşılaştırmak için kalemin kapağını (x) ve kapağın boyuyla ilişkilendirdiği kalemi $(5x)$ kullanacağını söyleyerek, aynı birimi kullanması gerektiğini *içselleştirmiştir*. Burcu kalemin kapağı ile tam ölçemedikleri kenarları "*buçuklu sayılar*" olarak ifade etmiştir. Prizmaları kalemle ölçerek yapılan hesaplamalar Şekil 13'teki gibidir.



Şekil 13: Burcu'nun Birebir Görüşmede Kalemin Kapağını Birim Aldıkları Yöntem ile İlgili Çalışması

Burcu tüm prizmalar için hesaplamalarını yaptıktan sonra, aslında tahmini bir ölçüm yaptığını söylemiştir. En küçük kutu sorulduğunda ise aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

"A: En küçük kutu hangisi buna göre?
B: Bunlar… İkisi de. Ama aynı çıktı.
A: Peki bu yöntemi kullanır mısın ölçerken, hangisi en küçük bulmaya çalışırken?
B: Hayır.
A: Niye kullanmazsın bu yöntemi?
B: Çünkü eşit çıktı yani en küçüğü bulamıyoruz… Tam çıkmıyor."

Kalemle ölçerek kutuları karşılaştıramayacağını anladıktan sonra ise, yine grup çalışmasında nasıl sonuca ulaşmaya çalıştıklarını hatırlayarak, kutulara büyük birim küpleri doldurma *eylemini* ve prizmanın içerisinde boşluk kalmaması fikrini aşağıdaki gibi *içselleştirmiştir*.

"B: …Bunların içine bunu 6 bulmuştuk. 6 küp aldı ama yani boşluklar var.
A: Bunun büyüklüğünü ölçer mi 6 küp?
B: Hayır boşluklar var.
A: Nasıl ölçersin bunun büyüklüğünü?
B: Yani buraya da bişeyler koyabilirsek.
A: Ne koyarız oraya?
B: …
A: Oraya da sığan bir şey şunu koyalım veya o kapağı koyalım... Doldu mu boşluk?
B: Hayır yani var.
A: Bir tane daha sığar mı o kapaktan?
B: Hayır.

A:O zaman ne yapacaksın…. 1.5 tane sığar diyelim... Ölçer misin bunla?
B: Yani, ölçebilirim.
A: Peki nasıl ölçersin? Buraya 6 tane sığdı. Buraya da 1.5 tane sığdı diyoruz.
B: ıı…yani ölçmem.
A: Niye karar değiştirdin?
B: Çünkü aslında buralarda da boşluk kalıyor.
A: Hmm evet şu üstlerde demi.
B: Tam olmuyor bunu kullanmam."

Böylece, Burcu kutunun ebatını tam olarak ölçebilmesi için boşluk kalmaması gerektiği fikrini de *içselleştirmiştir* ve büyük birim küplerle tam olarak ölçemeyeceğini söylemiştir. Burcu ve Ö2 grup çalışmasında küçük (bir kenarı bir cm olan) birim küpleri de kullanabileceklerini ifade etmişler, fakat denememişlerdir. Klinik görüşmede büyük birim küplerle ölçemeyeceğini anlayınca, Burcu "*şunlarla* (küçük birim küpler) *da denemiştik… Şöyle ölçmüştük*" diyerek küçük birim küpleri prizmanın içerisine doldurmuştur. Bu aşamada, örneğin, ayrıtları 8, 5 ve 3 cm olan sarı kutunun hacmini "*8 kare var burda…5 tane, 8'le 5'i çarpınca 40, ıı derinliği 3…120*" şeklinde ifade etmiştir. Ayrıca, birim küpleri prizmanın içerisine doldurarak, aşağıdaki gibi açıklamıştır.

"B: (bir katı tamamen birim küplerle doldurduktan sonra) 40…üstüne 2 tane daha koyarım… Sonra 120 tane olur.
A: Evet 40 buldun, sonra 120 olur dedin. Nasıl buldun 120 olduğunu?
B: Yani buraya 2 sıra daha gelince 120 oluyor."

Aslında bu aşamada Burcu "*8 tane 5… 2 sıra daha gelince 120 oluyor*" gibi ifadelerle prizmanın içerisindeki birim küplerin katmanlı dizilimini ifade etmiştir. Fakat süreç içerisinde hacmi bulurken uzun kenar, kısa kenar ve yüksekliği neden çarptığını sorulduğunda, cevabı bildiğini hissettirmesine ve kendi kendine hacmi yapılandırırken söylemesine rağmen, sözel olarak açıklayamamıştır.

Ayrıca, Burcu hacmi bulurken ve birim küpleri nasıl sıraladıklarını gösterirken, prizmaların ayrıtları ve birim küpler arasında *koordinasyon* kurarak, prizmanın ayrıtlarının kaç birim olduğunu ifade etmiştir. Tüm prizmaların hacmini küçük birim küplerle ölçtükten sonra, prizmanın ebatını bulmak için hangi yöntemi kullanacağı sorulduğunda ise, "*bunlarla (küçük küplerle) yaparım. Çünkü bunlarla tam açıklıyor, biz cetvelle yaptığımızda da 120 çıkmıştı mesela*" şeklinde cevap vermiştir. Böylece, bulduğu tüm yöntemler arasında *koordinasyon* kurarak, hacmi birim küplerle ölçebileceğini ve bu yöntemde elde ettiği sonucun cetvel kullandığında bulduğu sonuç ile eşlediğini söylemiştir. Süreç içerisinde prizmanın hacmini bulmak hangi yöntemi kullanacağı tekrar sorulduğunda ise, Burcu aşağıdaki gibi cevaplamıştır.

> "B: Cetvelle ölçerim… Çünkü tam emin olmak için
> A: Bunlarla niye emin olmazsın?
> B: Belki yanlış çıkar
> A: Niye yanlış çıkabilir?
> B: ıı tam mesela şöyle gelince burda açıklık kalır, yani böyle gelir falan (birim küpün yarısını göstererek işaretliyor)
> A: Cetvelde cm ler var, öyle geldiğinde aralarında ne var?
> B: ıı çizgiler
> A:O çizgilere ne diyorum cm'leri böldüğümde?"

Burcu burada aslında daha güvenilir bir ölçüm yapmak için kullanılan birimleri küçültmekten bahsetmiştir. Cetvelle kullandığı yöntem ve birim küpleri kullandığı yöntem arasında *koordinasyon* kurarak, birim küplerin bir kenarının 1 cm olduğunu, oysaki cetvelde 1 cm'den daha küçük ölçme birimleri olduğunu (mm gibi) ifade etmiştir. Süreç içerisinde ve klinik görüşme sonunda ulaştığı sonucu tanımlaması ve açıklaması istendiğinde ise Burcu aşağıdaki gibi cevaplar vermiştir.

> "A: Neyi bulmaya çalışıyorsun şu anda.
> B: Hem bu dikdörtgenin hacmini hem de prizma olduğu için içindekinin hacmini bulup hepsini birlikte.
> A: Dikdörtgenin hacmini mi dedin? Şuranın. Buranın hacmi var mı?
> B: Hayır alanı."

Aslında Burcu ayrıt uzunlukları 8,5,3; 9,7,2; 13,3,3 cm olan üç prizmanın hacmini de doğru bir şekilde bulmuştur. Fakat bulduğu şeyi tanımlarken bazı yanlış ifadeler kullandığı görülmektedir. Burcu ne bulduğunu anlatırken "*hem bu dikdörtgenin hacmini hem de prizma olduğu için içindekinin hacmini bulup hepsini birlikte"* şeklinde ifade etmesi aslında alanla hacim kavramlarını karıştırdığını değil, alan ve hacim terimlerini birbiri yerine dikkatsiz bir şekilde kullandığını göstermektedir. Çünkü daha sonra alan ve hacmi açıklaması istendiğinde Burcu, aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

> "A: Yani burası 8 burası 5 ya 8' le 5'i çarptığında nereyi buluyorsun?
> B: Şurayı *(*tabanı dışardan gösterdi*).*
> A: Buranın neyini?
> B: Alanını.
> A: Burası değil de başka bir yer olarak gösterebilir misin?
> B: Yani yine (içini gösterdi).

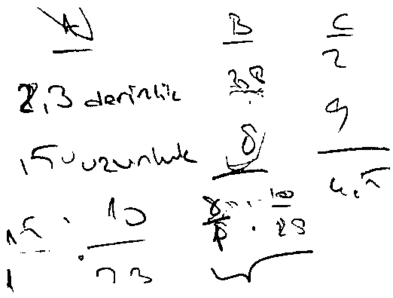
A: Evet yine aynı şey oluyor. Buranın alanını buluyorsun. Sonra derinliği de 3. 3' le niye çarpıyorsun tekrar?
B: Çünkü buraları da var (yükseklikler). Yani derinliğini tamamen prizma olduğu için hepsinin hacmini bulmak için."

Yukarıdan da anlaşılacağı gibi Burcu prizmanın üç boyutlu yapısını ve prizmanın hacmi kavramını anlamlandırmış, fakat anlamlandırdığı bu yapıyı ilk görüşmede nedenleriyle birlikte tam olarak açıklayamamıştır. Ayrıca, hacmi, "*prizmaların kapladığı alan yani bir cismin kapladığı alan... ıı yer*" şeklinde tanımlamıştır. Prizmanın içerisindeki birim küp sayısının hacmi ifade edeceğini *enkapsüle ederek* prizmanın hacminin uzun kenar, kısa kenar ve yüksekliğin çarpımı olduğu *genellemesini* yapmıştır. Ayrıca, sonuca varma aşamasında duruma özgü olarak oluşturduğu modelleri, her üç prizma için uygulayarak durumdan bağımsızlaştırdığı ve herhangi bir dikdörtgenler prizmasının hacmini ölçmek için kullanabildiği görülmektedir.

4.1.2 Irmak'ın Prizmanın Hacmini İçini Tam Dolduran Birim Küp Sayısı Olarak Kavramsallaştırma Süreci

4.1.2.1 Irmak'ın Grup İçerisinde Gerçekleştirdiği Süreç

Irmak'ın bulunduğu grup içerisinde başlangıçta alan mı hacim mi bulacakları ile ilgili tartışma yapılmıştır. Bu sırada gruptan bir öğrenci *"hacimle alakalı, içine ne kadar koyarsak o kadar alır"* diyerek hacmin anlamını kavradığını göstermiştir ve arkadaşlarını da bu konuda ikna etmiştir. Irmak prizmaların "derinlik ve uzunluklarını" cetvelle ölçüp, prizmaların ebatlarını karşılaştırmak için uzunlukları (uzun kenar), derinliklere oranlayabileceklerini söylemiştir. Fakat prizmaların kenar uzunluklarında yanlış ölçmeden kaynaklı milimetrik kaymalar olmuş, bu yüzden ölçüm sonucunda ondalık sayılar elde etmişlerdir (Şekil 14). Bu sayıları bölmekte çok zorlandıkları için, Irmak prizmaları birbiri içerisine koyarak karşılaştırmaya çalışmış, fakat bir sonuca ulaşamamıştır.



Şekil 14: Irmak'ın Oran Yöntemi ile İlgili Grup Çalışma Kâğıdına Aldığı Not

Ö10 oran hesaplamaları ile uğraşırken, Irmak cetveli alarak ayrıtları 8, 5 ve 3 br olan sarı kutunun taban ayrıtlarını ölçmüş ve alanı "*40 burası, şu alanı buldum*" şeklinde ifade etmiştir. Araştırmacının problemle ilgili tartışırken sınıftaki her şeyi kullanabilecekleri ile ilgili uyarısı üzerine, Ö8 birim küpleri kullanabileceklerini söylemiştir. Böylece grup olarak kutuların içlerine birim küpleri doldurmaya başlamışlardır. Bu *eylem*i gerçekleştirirken, Irmak prizmanın her yerini birim küplerle doldurmaları gerektiğini söylemiştir. Yani, prizmanın hiç boşluk kalmayacak şekilde birim küplerle doldurulması gerektiği fikrini *içselleştirmiştir*. Sonrasında, prizmanın ayrıt uzunluklarını birim küpleri referans alarak ölçerken, prizmayı tam doldurma ile uğraşmalarına gerek olmadığını "*direk şurayı şurayı doldurun* (taban ayrıtlarını) *sonra alanı bulun. Onu da 2 ile çarpın* (yüksekliği 2 olan prizma için)" şeklinde ifade ederek, grup arkadaşlarını da ikna etmiştir. Böylece taban ayrıtları ve yüksekliğe yerleştirilen birim küplerin sayısını çarparak, verilen üç prizmanın hacmini hesaplamışlardır. Çözüm süreçlerini ise araştırmacıya aşağıdaki gibi açıklamışlardır.

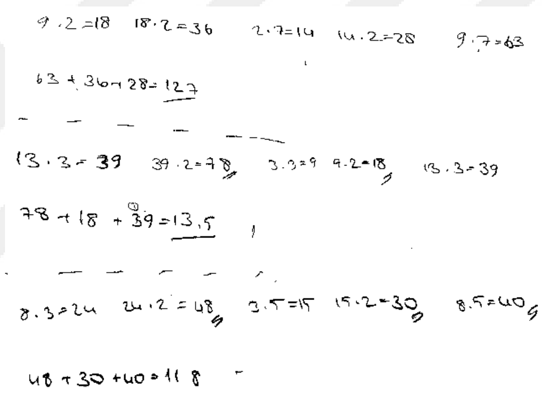
> "I: Bunları çarparız (sarı kutu için) 7 kere 5, 35. Üç tane sığıyor buraya, 35'le 3'ü çarpınca 105.
> A: Niye çarpıyorsunuz?
> I: Hacmini bulmak için.
> A: Niye hacmi bulmak istiyorsunuz?
> I: Ne kadar aldığını bulmak için.
> Ö8: Hediyeyi bulmak için.
> A: … Sonra ne yapıyorsunuz? 35'le 3'ü niye çarpıyorsunuz? …
> Ö8: Üşengeç hocam.
> I: 3 tane daha buraya sığıyor. Tabanı 35, onun üstüne 35, onun üstüne de 35 hocam."

Bu açıklamalardan Irmak'ın ve gruptaki öğrencilerin çoğunun, cevabı yanlış bulmalarına rağmen (işlem hatası ve yanlış ölçmeden kaynaklı), üç boyutlu uzamsal yapılandırmayı ve prizmanın hacim kavramını anlamlandırdıkları anlaşılmaktadır.

Ayrıca, bu açıklamalar prizmanın hacim formülünün katmanlı olarak oluşturulmasını destekler niteliktedir.

4.1.1.2 Irmak'ın Klinik Görüşmede Gerçekleştirdiği Süreç

Irmak *başlangıç nesnesi* olarak üç prizmayı kullanmıştır. Grup içerisinde ne yaptıklarını anlatması istendiğinde, öncelikle alanlarını bulmaya çalıştıklarını fakat tam sayılar çıkmadığı için vazgeçtiklerini söylemiştir. Bu işlemi nasıl gerçekleştirdiği sorulduğunda ise, "*prizmaların alanlarını*" (yüzey alanı) bulduğunu söylemiştir. Prizmaların üst yüzeyleri olmadığı için ise burayı hesaba katmadığını ifade etmiştir. Klinik görüşmede her üç prizmanın yüzey alanlarını hesaplayan Irmak yüzey alanlarını doğru bir şekilde bulmuştur, fakat bu aşamada alanları kullanarak en küçük kutuya ulaşabileceği yanılgısına kapılmıştır (Şekil 15).



Şekil 15: Irmak'ın Birebir Görüşmede Yüzey Alanı ile İlgili Çalışması

Bu yöntemle kutuların alanlarını bulduğunu söyleyen Irmak, görüşmenin başında birim küplerden bahsettiği ve grup içerisinde birkaç yol denediklerini söylediği için, denedikleri diğer yol sorulmuştur. Irmak "şu küplerle bulduk" diyerek birim küpleri göstermiş ve sonrasında, "*hacmi bulmak için içine ne kadar alacağı bulurum. Ya küplerle ya da materyallerle*" diyerek *eylem* aşamasını gerçekleştirdiğini göstermiştir. Bu aşamada Irmak, bir kenarı bir cm olan birim küpleri ve bu birim küplerden oluşan onluk blokları kullanmıştır. Hacmin üç boyutlu yapılanmasını "*Tabana sadece 39 küp sığıyor, bir 39 bunun üstüne, bi 39 bunun üstüne sığar, 39' u 3'le çarpıcam. Bunu 117 buldum bu sefer. Ama burda bunu bulmuştum*" şeklinde ifade ederek, grup çalışmasında yaptıkları gibi, hacmi bulmak için boşluk kalmaması gerektiğini de *içselleştirmiştir*. Ayrıca, kullandığı bu yöntem ile alan bulma yönteminin sonuçları aynı çıkmadığından bilişsel bir çatışma yaşamıştır. Sonrasında sorulan sorularda ise alan ve hacim arasındaki farkı "*çünkü onda* (alan) *ne kadar alacağını hesaplamıyoruz içine ne kadar sığacağını değil, kendi alanını buluyorum. Bunda* (hacim) *ne kadar yer kapladığını*" şeklinde ifade etmiştir. Ayrıca, Irmak'ın bazı ifadelerinin sebeplerini araştırmak için aşağıdaki gibi sorular sorulmuştur.

> "A: …Birinde alanı bulmuştun bunda neyi buluyorsun?
> I: Bunda içine ne kadar alabildiğini …. Bu 9, bu 7, 9'la 7
> A: Peki niye çarpıyorsun bu 9'la 7'yi?
> I: 9'la 7'yi taban alanını bulmak için çarpıyorum, yani tabana ne kadar sığacağını bulmak için….
> A: …Alan nedir?
> I: Kısa kenar çarpı uzun kenar.
> A: Niye kısa kenarla uzun kenarı çarpıyorsun alanı bulmak için?
> I: Çünkü kısa kenardan ne kadar sığar, uzun kenardan ne kadar sığar onu bulmak için... 9'la 7'mi oldu…. Bir tabanı 63 oluyor."

Irmak'ın hacim kavramı için didaktik fenomenleri "*içine ne kadar alabildiği… ne kadar sığdığı*" olarak söylenebilir. Ayrıca, yukarıdaki açıklamalardan Irmak'ın üç boyutlu uzamsal yapılanma ve alan kavramını anlamlı bir şekilde oluşturmak için temel teşkil eden, iki boyutlu uzamsal yapılanmaya sahip olduğu anlaşılmaktadır. Prizmaların içindeki birim küpleri sayarken kendi kendine "*3 şurası oluyor yani burası 40, üstüne 40. Üstüne de 40 koyabilirim*" şeklinde ifade etmesi grup çalışmasındaki bulguları ve klinik görüşmedeki daha önceki ifadelerini destekler niteliktedir ve üç boyutlu uzamsal yapılanmaya sahip olduğunu göstermektedir.

Irmak tüm prizmaların hacmini içlerine birim küpleri koyarak bulmuş ve en küçük kutuyu seçmiştir. Sonrasında neden birim küpleri kullandığı sorulduğunda "*çünkü bunların belli bir şeyi var nasıl desem. Birer cm ler ve tam bir değerleri var, onlarla şey*" şeklinde cevap vermiştir. Burada aslında birim küplerin hacmi ölçmede birim olarak kullanılabileceğinden ve prizmaların ebatları için tam değerler verdiğinden bahsettiği düşünülebilir. Ayrıca, büyük küpleri tercih edip etmeyeceği sorulduğunda bir kenarının uzunluğunu cetvelle ölçmek istemiş ve aşağıdaki süreci gerçekleştirmiştir.

> "I: Bunlar 2.5
> A: Evet kullanabilir mısın bunları?
> I: Yani kullanırdım herhalde.
> A: İstersen dene.
> I: …2.5, 2.5, 5, 7.5 buraya sığmıyor.
> A: Sence önemli mi? Boşluk kaldı.

I: Evet. Buraya da küçük koyalım…buna bir tane sığar heralde. O zaman 8.5 oluyo. 2.5, 2.5 7.5. 1 de bu (bir tane küçük küp koydu). 8.5. Buraya da burası 5. Burası 8.5
A: Peki şuna baktığında üste de bir tane koyabilir miyiz?
I: Yani koyarız heralde.
A: Ama olmuyor taşıyor. Yarım gibi bu.
I: 2.5 o zaman 3 olur.
A: Hıı ama yarım değilse?
I: Yani yarım değilse de 3'e yakın bir şey olur.
A: Peki sen hacmi hesaplarken bu şekilde mi yaparsın? Yani bunları mı kullanırsın yoksa küçük küpleri mi?
I: Küçük küpleri kullanırım
A: Neden?
I: Çünkü onlar (küçük birim küpler) tam değer veriyor yani buçuklu buçuklu (büyük birim küpler). Yani bunları (küçük birim küpler) kullanmam daha kolay olur."

Bu aşamada Irmak küçük ve büyük birim küpler arasında *koordinasyon* kurarak, bir önceki kullandığı yöntemde yaptığı gibi hacmi küçük birim küpler yardımıyla bulabileceğini söylemiştir. Ayrıca, büyük birim küpleri kullandığında veya küçük ve büyük birim küpleri birlikte kullandığında tam değil, tahmini bir değer elde edeceğini ifade etmiştir. Diğer grupların kullandığı yöntemler hatırlatılarak, örneğin kalemle ölçüp ölçmeyeceği sorulduğunda, kalemin uzunluğunu cetvelle ölçmesi gerektiğini söylemiştir ve tüm ölçümlerinde standart bir ölçü birimi kullanmaya çalışmıştır. Prizmaların hacmini bulurken ayrıtları cetvelle ölçüp ölçemeyeceği sorulduğunda ise,

"A: Peki kutunun hacmini ölçmek için bunu kullanırım dedin. Şurda (görüşmenin başında) cetvelle ölçtün cetvelle ölçebilir misin?
I: Yani sadece cetvel kullandığımda doğru sonuca varamadım yani cetvel alanı buluyor hacmi değil.
A: Hacmi bulabilir misin cetvelle?
I: Hacmi yine burda gittiğim yolla bulabilirim aslında.
A: Nasıl bulursun?
I: Yani şurayı ölçtüm 3. taban kaçtı ya?
A:13'tü.
I: 3'le 13 çarptım. 39. Buraya 3 tane sığabiliyorsa bu karelerden küplerden..."

Öncelikle, Irmak başlangıçta ayrıtları cetvelle ölçerek prizmaların yüzey alanlarını hesaplamaya çalıştığı yöntemi ve sonucu hatırlamıştır. Sonra birim küplerle hacmi nasıl bulduğunu düşünerek, ayrıtları cetvelle ölçebileceğini söylemiştir. Irmak taban ayrıtlarını cetvelle ölçtükten sonra çarpımın, tabandaki birim küp sayısı ile aynı sonucu verdiğini ifade etmiştir. Böylece, bu iki yöntemi ilişkilendirmeye çalışmıştır. Irmak'ın bu aşamada "*cetvel alanı buluyor hacmi değil*" ifadesinden ve görüşmenin başında alan ve hacim kavramları arasındaki farkı açıklayabildiğinden, aslında cetveli kullanarak alan bulduğunun farkında olduğu düşünülmektedir. Ayrıca, cetvelle ölçüm sonuçlarını kullanarak hesaplamalar yapmaya çalıştığında, aslında yine küpleri nasıl dizdiğini hayal etmiştir.

Hacmin tanımını yapması istendiğinde ise, "*bir nesnenin içine alabildiği şey…yani bir nesnenin içine bişey koyduğumuzda onu koyduğumuz yer onun hacmi*" şeklinde ifade etmiştir. Birim küplerin sayısı fikrini *enkapsüle* ederek de prizmanın hacmi *nesne*sine ulaşmıştır. Prizmalardan biri için "*örneğin bu 126 birim… ama birim hacim şeyi değil*" diyerek hacmin birimi ile ilgili düşünmeye başlamıştır ve o kutu için "*126 tane birim küp*" olduğunu söylemiştir.

4.1.3 Mert'in Prizmanın Hacmini İçini Tam Dolduran Birim Küp Sayısı Olarak Kavramsallaştırma Süreci

4.1.3.1 Mert'in Grup İçerisinde Gerçekleştirdiği Süreç

Mert'in içerisinde bulunduğu grup başlangıçta prizmaları genişliğine (kısa kenar) göre karşılaştırmaya çalışmışlardır. Fakat Ö12 bunun göz kararı olduğunu ve ölçüm yapmaları gerektiğini söylemiştir. Böylece, öğrenciler prizmaların taban ayrıt uzunluklarını ölçerek taban alanını hesaplamışlar ve buldukları sonuca göre karşılaştırmaya çalışmışlardır. Araştırmacı ortamdaki prizmalardan hareketle, taban alanları aynı, yükseklikleri farklı olan iki kutunun hayal edilmesi sağlamış ve bunların ebatlarını nasıl karşılaştırabileceklerini sormuştur. Bunun üzerine Mert yüksekliği de hesaba katmaları gerektiğini söylemiştir.

Araştırmacının "sınıftaki her şeyi kullanabilirsiniz" uyarısı üzerine, ortamda bulunan birim küpleri alarak, prizmaların içlerine birim küpleri de koyabileceklerini "*şunları içine koyun kaç tane sığarsa*" şeklinde ifade etmiştir. Ayrıca, bu küplerin "*bir birimlik*" olduğunu söylemiştir. Küpleri doldururken ve prizmanın içinde kaç tane birim küp olduğunu hesaplamaya çalışırken grup çalışmasından alınan ekran görüntüsü Şekil 16' daki gibidir. Bu aşamada grup içinde yapılan tartışma aşağıda verilmiştir.

"M: Bir tane daha verin şuraya koycaz.
Ö13: Buraya sığmaz.
M: Şimdi kaç tane olmuş burası. Onun üstüne de koymak lazım. 42 çarpı 3 (tabana 3 tane 14'lük birim küpü yerleştirdikten sonra)
Ö12: Haa bunların alanını bulduk aslında.

Ö11: Evet.
Ö13: Buna kaç tane daha sığar ki.
Ö12: Bir katı 42 tane alıyor. 3 tane kat olması gerektiği için bu şey.
M: Buraya 2 kat daha alır bu.
Ö12: Tamam işte 42 çarpı 3
Ö13: 126 oluyor saymaya gerek yok."

Şekil 16: Mert ve grubunun prizmanın içini birim küplerle doldurarak birim küpleri sayma çalışması

Yukarıdaki grup tartışmasında öğrenciler prizmalardan birini birim küplerle doldurmuşlardır. Tabanına her satırda 14 tane birim küp olacak şekilde 3 satır yerleştirdikten sonra, anlamlı bir şekilde yapılandırarak tabandaki birim küp sayısını, 14'le 3'ü çarparak bulmuşlardır. Sonrasında, her katmanın 42 birim küp olduğunu ve bu şekilde üç katman olduğunu ifade ederek, bu prizmanın 126 tane birim küp aldığını hesaplamışlar ve prizmanın üç boyutlu uzamsal yapılanmasını anlamlandırmışlardır. Öğrenciler bu aşamada prizmanın içini tam doldurmaları gerektiği fikrini *içselleştirerek*, prizmanın ayrıtları ve birim küpleri ilişkilendirmişlerdir. Böylece hangi ayrıtın kaçar birim olduğunu ölçerek, prizmaların içini tam doldurmadan, üç prizmanın hacmini hesaplamışlardır. Fakat prizmaların hacimlerini hesaplama sürecinde, Mert'in grup içerisinde aktif bir rol almadığı söylenebilir. Bu yüzden, bu aşamada prizmayı tam doldurması gerektiği fikrini *içselleştirememiş* ve büyük birim küpleri de (boşluk kalmasına rağmen) prizmanın içerisine koyarak kutunun ebatını ölçebileceklerini söylemiştir.

Mert büyük birim küpleri prizmanın içerisine doldurma fikrini öne sürdüğünde, Ö11 boşluk kaldığı için bu yöntemi deneyemeyeceklerini, Ö12 büyük birim küpleri doldurduklarında farklı bir sonuç ve küçük birim küpleri doldurduklarında farklı bir sonuç elde ettikleri söylemiştir. Mert ise bu iki küpün birbirinden farklı olduğunu, bu yüzden sonuçların farklı çıktığını ifade etmiştir. Sonrasında tartışarak, Ö13 ile birlikte büyük birim küplerden boşluk kalan yerlere küçük birim küpleri de koymaya karar vermişlerdir.

4.1.3.2 Mert'in klinik görüşmede gerçekleştirdiği süreç

Grup çalışmasında gerçekleştirdikleri süreci hatırlatması istendiğinde Mert, öncelikle küçük birim küpleri kullandıklarını söylemiştir. Fakat "*onu ilk yapmadık son yaptık ama ilk göstersem daha iyi*" şeklinde ifade ederek, büyük birim küpleri prizmanın içerisine doldurmaya başlamıştır. Küpleri doldurma *eylem*ini gerçekleştirdikten sonra, aşağıdaki gibi açıklamalar yapmıştır.

> "M: İlk böyle yaptık hocam şimdi hocam. Bastırsak da olmaz yani. Burda biraz boşluk kalıyor. Bunları koysak da olmaz şimdi o yüzden bunu boş verdik.
> A: Boşluk kaldığı için bunla (büyük birim küp) ölçemez misin?
> M: Olmaz hocam ordaki boşluk bizim için önemli.
> A: ...Hiç boşluk kalmamasını mı istiyorsun sen burda?
> M: Evet."

Mert küpleri tam olarak sığdıramadığından ve boşluk kaldığından bahsetmiştir. Boşluğun önemli olduğunu belirterek hiç boşluk kalmaması gerektiği fikrini içselleştirdiğini göstermiştir. Ayrıca, karşılaştırmak için ayrı birimi kullanması gerektiğini "*bu farklı bu farklı olmaz*" diyerek içselleştirmiştir. Sonrasında Mert grup çalışmasında yaptıkları gibi, bir kenarı bir cm olan birim küpleri doldurma *eylem*ini gerçekleştirmiştir. Bir katı birim küplerle doldurduktan sonra "*tam sığıyor altlarına*" şeklinde ifade etmiştir.

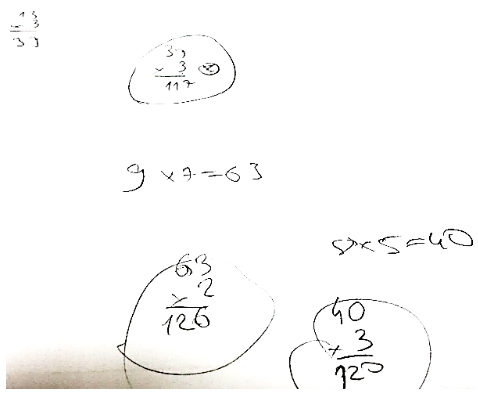
> "M: Hocam şimdi şunları doldurucam hocam.
> A: Tamam doldur bakalım.
> M: Hocam buralara da bunlar gibi 3 sığıyor…hocam şimdi bunun alanını bulucaz altını. Hocam şimdi bu burda 13 tane küp var 3 tane sıra var 13 çarpı 3 kaç oluyor
> A: Yapabilirsin onu da sana kâğıt verelim.
> M: Hocam şimdi 13 çarpı 3 yapıcaz.
> A:13 çarpı 3 dedin 3 sıra olduğu için dedin?
> M: Şu altının (taban) yeri 39 hocam."

Mert üç sıra ve her sırada 13 küp olduğu için 13'le 3'ü çarpacağını söylemiştir. Yani tabana sığan birim küp sayısını anlamlı bir şekilde yapılandırarak oluşturmuştur. Fakat neyi bulduğunu ifade ederken aşağıdaki gibi bir karışıklık yaşamıştır.

> "M:39 cm^2

A: cm mi bu uzunluk?
M: Hocam birim.
A: Birim mi?
M: Hocam buralar birim küpse buda birim olur.
A: Tamam 39 birim mi oldu orası?
M: Hocam öyle bir şey.
A: Tam ifade et bakalım. Bu 39 ne?
M: Terimini mi?
A: Yok terim olarak değil yani neyi buldun sen şimdi?
M: Hocam yüzey alanı mı?
A: Bilmem alan mı orası?
M: Hocam pek alan değil de.
A: Niye alan değil?
M: Çünkü sadece hocam tabanını."

Mert öncelikle ölçtüğü yeri birim küplerle ilişkilendirerek, "*39 birim gibi bir şey*" olarak ifade etmiştir. Ayrıca bulduğu şeyin yüzey alanı olup olmadığı konusunda kararsızdır. Burada küplerle ölçtüğü için aslında üç boyut üzerinde çalıştığının farkında olabilir. Fakat tam olarak ifade edememiştir. Sonrasında sorulan sorulara "*altını buldum. Yüzey alanını*" şeklinde cevaplandırmıştır. Ayrıca, kutunun hacmini "*sonra üstüne koyduk denedik falan filan işte hocam. Hocam üstüne böyle koyduk. Üst üste 3 tane sığıyor hocam. bunu bi daha 3 le çarptık"* şeklinde bulabileceğini ifade etmiştir. Araştırmacı açıklamasını istemeden önce, Mert kendi kendine hacmi nasıl bulduğunu açıklamış ve anlamlı bir şekilde yapılandırmıştır. Tüm görüşme boyunca kutuların hacmini aynı şekilde açıklayarak bulmuştur. Bu prizma için oluşturduğu modeli açıklarken Mert "*Burası 39, üstüne aynısını koyarız hocam aynısı zaten yine 39. Bir tane daha olduğu için hocam yine 39 olur hocam, 39 çarpı 3, 117*" şeklinde ifade etmiştir. Yukarıdaki ifadelerden Mert'in iki ve üç boyutlu uzamsal yapılanmaya sahip olduğu düşünülmektedir. Ayrıca, taban ve yükseklik arasında *koordinasyon* kurarak bahsedilen prizmaya (yeşil kutu) kaç tane birim küp sığdığını hesaplamıştır. Sonrasında diğer prizmaların da hacmini aynı şekilde bulmaya çalışan Mert "*hocam bunla bunu çarparsak bunun alanını verir zaten*" diyerek, prizmanın tamamını doldurmasına gerek olmadığını, sadece taban ayrıtlarını bildiğinde bunları çarparak alanı elde edebileceğini ifade etmiştir. Üç prizmanın da hacmini birim küpleri kullanarak Şekil 17'deki gibi hesaplamıştır.



Şekil 17: Mert'in Birebir Görüşmede Prizmaların Hacmini Birim Küpleri Kullanarak Hesapladığı Çalışması

Ne bulduğu sorulduğunda ise, "*alanı*" bulduğunu veya *"içinin alanını"* bulduğunu söyleyerek didaktik fenomenlerini belirtmiştir. Taban alanını ise birim küplerle ilişkilendirerek aşağıdaki gibi anlatmıştır.

> "M: Hocam bunu böyle alıp bi tane bişeyin içine koyarsak durun anlatayım hocam. Diyelim hocam bunlar bunun içine sığıyor…şunlarda yok. Şimdi hocam bunu alıp buna koyarsak. Buna eğer tam sığıyorsa, bu 6 ile, bunun yüzeyi ile bu aynıdır yani.
> A: Burası ne demiştin yüzey alanı mı demiştin?
> M: (kafa salladı) …hocam bunun yüksekliği önemsiz.
> A: …Evet bunun yüksekliği var niye önemsemiyoruz?
> M: Hocam çünkü ...sadece tabanını alıyoruz üstü olsa da olur olmasa da olur, buraya bişey koyarsın dışarı taşar ama hocam yüzeyi aynıdır."

Mert küpleri aslında kare gibi düşünerek taban alanını ölçtüğünü ifade etmiştir. Bu yüzden küplerin yüksekliğini hesaba katmadığını söylemiştir. Mert'in hacim ve alan kavramları birbirine karıştırdığı hacim yerine de alanı kullandığı görülmektedir. Ayrıca, neleri karıştırdığını tam olarak anlamak için yüzey alanını hesaplaması istendiğinde, "*tüm dikdörtgenlerin alanını bulup toplayacağını*" söylemiş ve prizmanın yüzey alanını doğru bir şekilde tarif etmiştir. Hacim ve yüzey alanı karşılaştırması istendiğinde ise, aşağıdaki gibi açıklamıştır.

> "A: Alanını buldun. Peki, sen bunun içini doldurduğunda da alanını bulurum dedin.
> M: Hocam fark etmez…hocam şimdi anlatayım. Bunda yüzeyden gittim hocam her yüzeyinin alanını buldum topladım. Böyle yani.
> A: Tamam bunda (birim küplerle hacmi bulduğu yol)?
> M: Bunda da hocam ya böyle yapmaktansa direk basit yoldan bunu böyle yaparak da bulabiliriz. Hocam aynı sonuçta.
> A: Aynı sonuca varır mıyız? Deneyelim mi?

M: Hocam bu daha hocam bunda yaptığımız içinin alanı, bunda yaptığımız dışının alanı.
A: Farklı şeyler mi diyorsun yani. Biri içinin alanı biri dışının alanı. İçinin alanını bulmak için ne yaparsın?
M: Bu (küpleri dizdiği şeyi gösteriyor)."

Mert başlangıçta hacim ve yüzey alanında aynı şeyi bulduğunu ifade etmiş, ikisi arasında fark olmadığını söylemiştir. Sonrasında ise, yüzey alanını "*dışının alanı*", hacmi ise "*içinin alanı*" olarak adlandırmış ve bu iki yöntemde de *süreç*te neler yaptığını tarif edebilmiştir. Görüşmenin sonunda ise prizmaların ayrıtları ve birim küpler arasında *koordinasyon* kurarak prizmaların ebatlarını karşılaştırdığı *süreç*leri *enkapsüle* etmiş ve hacim kavramına ulaşmıştır. Fakat isimlendirirken önceki öğrendiklerinden yararlanmış ve muhtemelen hacmi bulma sürecinde prizmaların içlerini birim küplerle doldurduğu için ulaştığı kavramı "içinin alanı" olarak adlandırmıştır. Bu yüzden Mert'in hacim için didaktik fenomeni daha önce de bahsedildiği gibi "içinin alanı" olarak ele alınabilir.

4.1.4 Zehra'nın Prizmanın Hacmini İçini Tam Dolduran Birim Küp Sayısı Olarak Kavramsallaştırma Süreci

4.1.4.1 Zehra'nın Grup İçerisinde Gerçekleştirdiği Süreç

Zehra ve Ö7 grup içerisindeki tartışma ve uygulamada daha aktif rol aldığı görülmektedir. Bu grup öncelikle en küçük kutuyu nasıl bulabileceklerini tartışmışlar ve gruptaki herkes bir fikir söylemiştir. Ortaya çıkan fikirler, alan hesaplama, kenar uzunluklarını ölçme, çevre hesaplama, hacim hesaplama olarak sıralanabilir. Araştırmacı bu yöntemler arasından etkili olduğunu düşündükleri bir yöntemi kullanarak en küçük kutuyu bulmalarını istediğinde ise, Zehra'nın önerdiği ve diğer öğrencilerin de katıldığı alan hesaplama yöntemini seçmişlerdir. Dikdörtgenin alanını zaten bildikleri için prizmanın yüzeyindeki her dikdörtgenin alanını kenarları çarparak bulduklarını ve bunları toplayarak toplam alana ulaşabildiklerini ifade etmişlerdir. Böylece, en küçük kutuya ulaştıklarını söylemişlerdir.

Araştırmacı bu aşamada gruba neyi ve nasıl buldukları ile ilgili sorular sormuştur. Prizmanın alanını bulduklarını ifade eden ve "buraları bulduk" diyerek gösteren grup, buldukları sonucu aslında kutuyu kaplamak için kullanabileceklerini anlamıştır. Grup soruyu tekrar gözden geçirdikten sonra, Zehra taban alanını ölçme fikrini geliştirmiş ve üç prizma için 'sadece taban alanlarını' hesaplayarak en küçük kutuya ulaşmaya çalışmışlardır. Bu aşamada taban alanları aynı ama yükseklikleri farklı olan iki kutunun karşılaştırılması istendiğinde, yüksekliğin de hesaba katılması gerektiğini fark etmişlerdir. Böylece sonuca taban alanı ile yüksekliğin oranlayarak ulaşabileceklerini düşünmüşler ve hacmi oranla ilişkilendirmişlerdir. Zehra yüzey alanı, taban alanı ve oran yöntemlerinin üçünde de en küçük kutunun "*hep aynı kutu* (sarı yüksek kutu)" çıktığını ifade etmiştir. Grup çalışmasında işlem hatası yaptıkları için, geliştirdikleri üç yöntemde de sonuç aynı çıkmış, bu yüzden yöntemler arasında herhangi bir çatışma yaşamamışlardır.

4.1.4.2 Zehra'nın Klinik Görüşmede Gerçekleştirdiği Süreç

Zehra başlangıçta kutuların alanlarını ölçerek en küçük kutuya ulaştıklarını söylemiştir ve tüm kutuların yüzey alanlarını hesaplamıştır. Yüzeydeki dikdörtgenlerin kenar uzunluklarını neden çarptığı sorulduğunda ise kısa kenar ve uzun kenar uzunluklarının çarpımının dikdörtgenin alanını verdiğini söylemiştir. Ancak, aşağıdaki açıklamalarından Zehra'nın alan kavramını ve iki boyutlu uzamsal yapılanmayı anlamlı bir şekilde öğrenmediği söylenebilir.

"Z: ıı biz ilk başta alanını böyle ölçmeyi demiştik.
A: Neyi buluyorsun peki sen?
Z: Böyle yapınca hocam bilmiyorum tam olarak neyi bulduğumu."

Başlangıçta "*alan ölçerek en küçük kutuya ulaşabiliriz*" diyen Zehra, gerçekleştireceği sürecin sonunda neyi bulduğunu tam olarak kestirememiştir. Zehra'nın aklına gelen fikirleri veya kullandığı yöntemleri anlamlandırmadığı, direkt olarak sonuca ulaşmaya çalıştığı düşünülmektedir. Ayrıca, Zehra grup çalışmasındaki tartışma süreçlerini referans alarak, bu yöntemin hatalı olduğunu ve burada "dış alanı" bulduklarını söylemiştir. Bunun sebebini ise alanı içten (taban alanı) ve dıştan (prizmanın yüzey alanı) ölçtüklerinde farklı sonuçlara ulaşmaları olarak belirtmiştir. Fakat görüşme süresince herhangi bir yüzeyin dıştan veya içten ölçülmesi arasındaki fark sorulduğunda, bunlar arasında herhangi bir fark olmadığı konusunda karar kılmıştır.

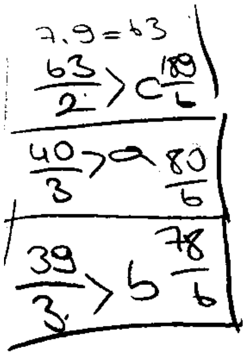
Görüşme sürecinde en küçük kutuyu nasıl bulacağı tekrardan sorulduğunda ise, "*hacminin küçük olması gerekiyor*" demiştir. Buradan Zehra'nın daha önceden hacim kavramını duyduğu ve hatırladığı anlaşılmaktadır. Fakat hacmi "*mesela atıyorum burada kapladığı alanın daha küçük olması gerekiyor*" şeklinde ifade etmesi, hacim ve alan kavramlarını karıştırdığını göstermektedir. Başlangıçta prizmaların yüzey alanını bulması bu kavram yanılgısının bir sonucu olabilir. Ayrıca, kapladığı alan nasıl bulacağı sorulduğunda ise, "*alt tabanı…sığdırmak istediğim bir şeyde boyu çok önemli değil ki*" diyerek, yüksekliğin hacim ölçümünde önemli bir ölçüt olmadığını söylemiştir. Bu aşamada, taban alanları aynı yükseklikleri farklı olan prizmalar örnek olarak verilmiş, hangisinin hacminin daha büyük olduğu tartışılmıştır. Böylece, Zehra sığdırılmak istenen hediyeye göre, yüksekliğin de değişebileceğini ifade etmiş ve hacim ölçümünde yüksekliğin önemli bir ölçüt olduğunu kavradığını göstermiştir. Aslında, Zehra'nın bulunduğu grubun çalışmaları ve grup içerisindeki tartışmaları incelendiğinde, sadece taban alanına göre karşılaştıramayacaklarına ve yüksekliği de hesaba katmaları gerektiğine karar verdikleri görülebilir. Bu yüzden, yüksekliği de hesaba katması gerektiğini anlayan ve grup içerisinde gerçekleştirdikleri *eylem*leri referans alan Zehra, aşağıda belirttiği gibi kutuların taban alanı ve yüksekliğinin oranlarına bakmıştır.

> "A: En küçüğün alanını ölçerek bulabilir misin peki?
> Z: Ya tabi bi oran da var şimdi atıyorum bunun burası (yeşil kutu için) 8 ölçseydik toplam şeyini hepsi farklı eşit bir paydaya getirmemiz gerekiyor, oranlarına da bakmamız gerekiyor. Atıyorum bununki (taban alanı) en küçük diye bu en küçük olmak zorunda değil.
> A: Tamam hadi bak bakalım oranlarına, nasıl bakıyorsun bilmiyorum.
> Z: Hocam biz ilk başta şu iç kısmını (taban alanı) ve yüksekliğin oranına bakmıştık. Yani şurdaki parça ile şurdaki yüksekliği oranlamıştık, eşit paydada şeyapmıştık."

Zehra birebir görüşmede grup çalışmasında yaptıkları gibi prizmaların taban alanlarını yüksekliklerine oranlamayı düşünmüştür. Bulduğu oranların paydalarını eşitleyerek karşılaştırabileceğini ve en küçük orana sahip olanın, en küçük prizma olacağını söylemiştir. Burada yanlış bir şekilde akıl yürütse de dikdörtgenler prizmasının üç boyutlu uzamsal yapısını hissettiği için *eylem* aşamasında olduğu söylenebilir.

> "A: Oranı küçük olan ne olacak?
> Z: Hacmi daha küçük olacak. Alanı daha.
> A: Tam anlayamadım o yüzden soruyorum. 40'a 3, oranı küçük olan, yani buranın buraya oranı küçük olan daha küçük olacak diyorsun. Neden ama?
> Z: Hocam daha hani ne denir ona…
> A: Tamam yap bakalım.
> Z: ... (yaptıktan sonra) şimdi öyle bakınca oranı en küçük olan yine b. Bu sefer…"

Oranla hacmi nasıl ilişkilendirdiği sorulduğunda, Zehra açıklayamamıştır (oranla ilgili hesaplamaları Şekil 18'deki gibidir).



Şekil 18: Zehra'nın Birebir Görüşmede Gerçekleştirdiği Oran Hesaplaması

Tüm prizmalar için oranları bulup karşılaştırdıktan sonra, taban alanının yüksekliğine oranı en küçük olan prizmanın, yüzey alanlarını hesaplayarak bulduğu sonuçtan farklı olduğunu görmüş ve yöntemler arasında bir çatışma yaşamıştır. Bu çatışmadan faydalanarak oranla hacim ilişkisi aşağıdaki gibi sorgulanmıştır.

> "A: Kutunun üstüne bi kutu daha koydun yükselmez mi?
> Z: Yani evet.
> A: …Mesela şu kutu üzerinden örnek verelim burası (yükseklik) büyüdükçe oranın napar?
> Z: Büyür (fısıldayarak).
> A: Burası büyüdükçe yani payda büyüdükçe.
> Z: Hıı pardon payda büyüdükçe küçülür.
> A: Ama bunu uzattığımda … Kutu büyüdü mü küçüldü mü?
> Z: Büyüdü.
> A: Kutu büyüdü, oranın küçüldü yani dediğin şey doğru mu?
> Z: Kutu büyüdü oran küçüldü?
> A: Sen oran küçüldükçe kutu da küçülür dedin.
> Z: Yo…tam tersi olacak.
> A: Kutu büyüdü burda oran küçüldü...oranla kutunun büyüklüğünü ölçebilir misin?
> Z: ıı tam yine bişey elde edemeyiz."

Yukarıdaki gibi düşünmelerden sonra, Zehra taban alanı aynı olan prizmaların yükseklikleri büyüdükçe, yani hacmi büyüdükçe, bahsettiği oranın küçüldüğünü anlamıştır. Böylece, taban alanını yüksekliğe oranlayarak kutunun ebatını tam olarak bulamayacağını fark etmiştir. Başka nasıl bulabileceği sorulduğunda ise aşağıda belirttiği gibi, büyük olan birim küpleri kutunun içerisine doldurma *eylem*ini gerçekleştirmiştir.

"Z: Şunlara bakalım (büyük küpler). Bu (prizma) 3 küp uzunluğunda 2 küp yüksekliğinde.
A: hıhı
Z: … Bir küpe 5 küp. Bu 3 küpe 2 küp. Pardon 2 küpe 3 küp. Bunu yapalım. Sığmadı.
A: Evet
Z: Hocam daha küçüklerle deneyebilir miyim?"

Büyük birim küpleri prizmaların içerisine yerleştiren Zehra, küplerin prizmayı tam olarak doldurması gerektiği, yani boşluk kalmaması gerektiği fikrini *içselleştirmiştir*. Bu yüzden daha küçük olan birim küpleri doldurmaya karar vermiştir. Yeşil dikdörtgenler prizmasının tabanını birim küplerle doldurduktan sonra aşağıdaki gibi saymıştır.

"Z:10, 20, 30, 39.
A: Tamam.
Z: 3 küpe 39 küp …"

Zehra tabandaki birim küplerin sayısını tekrarlı sayma ile bulduktan sonra, yüksekliğin de 3 birim küp olduğunu söylemiştir. Bu prizma ile ilgili başka bir işlem yapmadan, diğer (sarı) prizmaya geçmiştir. "*Şurası o zaman 1 2 3 4 5 6 7 oluyor. 123456789 9 oluyor. 9 çarpı 7, 63*" diyerek, taban ayrıtlarına yerleştirdiği birim küplerin sayılarını referans alarak tabandaki birim küp sayısını hesaplamıştır. Bu iki prizma için taban ve yüksekliği birim küplerle ölçerek, birim küp sayılarını çalışma kâğıdına yazmıştır. Sonrasında, birim küplerle ve cetvelle ölçüm sonuçlarının aynı olduğunu söylemiştir. Böylece, cetvelde kullandığı ölçü birimi ile birim küplerin bir kenar uzunluğunu ilişkilendirerek, ikisinin de bir cm olduğu sonucuna ulaşmıştır. Aynı birimleri kullandığından aynı sonuca ulaşacağını söyleyen Zehra, oran bulmayacağını ama ne yapacağını da bilmediğini söylemiştir. Zehra bu aşamada prizmalar ve oluşturulan birimler arasında *koordinasyon* kurmuş, tabandaki birim küp sayısını ve yüksekliğin kaç birim olduğunu her üç prizma için de hesaplamıştır. Fakat prizmanın içerisindeki toplam birim küp sayısının hacmi verdiği sonucunu *enkapsüle* edememiştir ve ne bulduğu sorulduğunda bilmediğini söylemiştir. Araştırmacı Zehra'nın hacmi nasıl bulacağını keşfetmesi için aşağıdaki gibi sorular yöneltmiştir.

"A: Hacim nedir?
Z: Kapladığı alan.
A: …Biraz önce şu kısmı doldurdun, boşluk var ama, sadece altını doldurdun.
Z: O zaman 2 ile çarpıcaz.

A:2 ile çarparsam neyi bulurum?
Z: Tamamen dolduğunu.
A: Tamamen dolduğunda bu bana neyi verir?
Z: Hacmini."

Zehra ayrıtlar ve birim küpler arasında *koordinasyon* kurarak, kullandığı yöntemi "*tabanını bulucaz önce, yüksekliği ile de çarpıcaz*" şeklinde ifade etmiştir. Böylece, prizmanın içinin hiç boşluk kalmayacak şekilde birim küplerle doldurulması gerektiğini ve prizmanın içerisindeki birim küp sayısının hacmi verdiğini *enkapsüle* ettiği düşünülebilir. Bu sorudaki prizmaların hacmini 120, 117 ve 123 birim küp olarak hesaplamış ve kullandığı yöntemi üç prizma için de uygulayarak genellemeye çalışmıştır. Fakat prizmanın içerisindeki birim küplerin sayısını nasıl bulacağı konusunda araştırmacının yönlendirmesinin etkisinin olduğu düşünülmektedir. Ayrıca, pek çok yanlış yöntem denediği (yüzey alanı oran gibi) ve bu yöntemlere fazlaca odaklandığı için bu aşamada zihinsel mekanizmalarında (*koordinasyon* ve *enkapsülasyon)* eksiklikler olduğu söylenebilir. Zehra'nın hacim kavramı için didaktik fenomeni "*tamamen doldurmak*" olarak ifade edilebilir ve hacmi "*bir cm' lik birim küplerle tamamen içi dolduğu zaman kapladığı alan*" olarak tanımlamıştır. Zehra hacmi tanımlarken alan olarak ifade ettiği için ve hacim- alan kavramlarının ayrımını ifade etmediği için bu aşamada bu iki kavramı birbirine karıştırdığı düşünülmektedir.

4.2 Dikdörtgenler Prizmasının Hacim Formülünü Yapılandırma Süreci

Bu aşamada öğrencilerin prizmanın hacim formülünü "bir katmandaki birim küp sayısı ve katman sayısının çarpımı" ve/ya "uzun kenar, kısa kenar, yükseklik çarpımı (üç ayrıtın çarpımı)" olarak anlamlı bir şekilde oluşturmaları amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda hacimle ilgili yapılmış olan çalışmalar ve MEB kazanımları da göz önünde bulundurularak GME' ye uygun bir problem hazırlanmıştır. Yöntem bölümünde de ikinci bağlamsal problem olarak karşımıza çıkan bu problemde öğrencilere, eş büyüklükte ve küp şeklindeki çikolataları, her pakete aynı sayıda çikolata olacak ve hiç boşluk kalmayacak şekilde nasıl paketleyebilecekleri sorulmuştur. Problemin çözümünü kolaylaştırması ve çikolataları modellemeleri için kullanabilecekleri birim küpler hazırlanmış ve böylece öğrencilerin somut modeller tasarlayabilecekleri bir ortam sağlanmıştır. Bu aşamada her pakette kaç tane çikolata olduğunun sorulması üzerine, öğrencilerin fikirleri dikkate alınmış ve kolay bir şekilde işlem yapmalarına olanak sağlayan bir sayı olmasına da dikkat edilerek 45 çikolata olabileceği söylenmiştir. Ayrıca, ilk problemde olduğu gibi problemin gruplar içerisinde tartışılarak çözülmesi, tüm tartışmaların ve ortaya çıkan fikirlerin grup çalışma kâğıdına not edilmesi istenmiştir. Grup içerisinde problem çözüldükten sonra ise, katılımcı olan dört öğrenci ile birebir görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

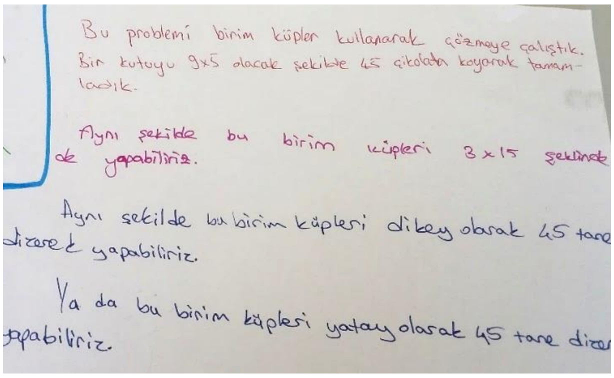
4.2.1 Burcu'nun Prizmanın Hacim Formülünü Yapılandırma Süreci

4.2.1.1 Burcu'nun Grup İçerisinde Gerçekleştirdiği Süreç

Burcu ve grup arkadaşları birim küpleri *başlangıç nesnesi* olarak kullanmışlardır. Ö1 öncelikle taban ayrıtları 6 ve 8 br, yüksekliği 1 br olan dikdörtgenler prizmasını birim küplerle oluşturduktan sonra, 6 ve 8'in çarpımı 48 olduğu için fazla birim küp koyduklarını söylemişlerdir. Bu yüzden 45 tane birim küpü saymışlar ve bunları beşerli gruplara ayırmışlardır. Öncelikle 9 tane 5'lik grubu yan yana getirerek, taban ayrıtları 9'a 5 br, yüksekliği 1 br olan dikdörtgenler prizmasını oluşturmuşlardır. Burcu ve Ö2 ise 15 ve 3'ün çarpımının da 45 olduğunu ifade etmişlerdir. Prizmayı oluştururken ise, Burcu önce 15 tane birim küpü yan yana dizerek üzerine de üç tane birim küp koymaya çalışmış, bu sırada Ö2 "öyle değil bu tarafına koy" diyerek taban ayrıtları 15 ve 3 br, yüksekliği 1 br olan prizmayı oluşturmasını istemiştir (Şekil 19).

Şekil 19: Burcu'nun grup çalışmasında ayrıtları 15, 3, 1 br olan prizmayı birim küplerle oluşturma çalışması

Burcu'nun oluşturmaya çalıştığı prizma ise taban ayrıtları 15 ve 1, yüksekliği 3 br olan bir prizmadır. Fakat Ö2 ve Ö4' ün grup çalışması süresince yüksekliği 1 birimden farklı olan prizmayı "1 birim küpü 45 tane yükselt, 45" şeklinde ifade ettikleri gözlenmiştir. Ayrıca, öğrenciler oluşturdukları prizmaları grup çalışma kâğıdına Şekil 20'deki gibi ifade etmişlerdir.



Şekil 20: Burcu'nun grubunda oluşturulan prizmalar ile ilgili grup çalışma kâğıdına alınan notlar

Öğrenciler prizmaları oluştururken hangi iki sayının çarpımının 45'i vereceğini düşünmüşler ve bu fikri *içselleştirerek* 45 tane birim küp alan diğer prizmaları da oluşturmaya çalışmışlardır. Bu aşamada Burcu "*şimdi farklı bir şekilde yapalım*" diyerek, bir birim küpü 45 kez üst üste veya yan yana koyarak da 45 birim küp alan prizmaları oluşturabileceklerini söylemiştir.

4.2.1.2 Burcu'nun Klinik Görüşmede Gerçekleştirdiği Süreç

Burcu sınıfta çözdükleri ikinci bağlamsal problem için yapılan klinik görüşmede öncelikle soruyu hatırlamaya çalışmış ve grup içerisinde bu soruyu nasıl çözdüklerini anlatmıştır. *Eylem* aşamasında "*9'a 5 olarak... 9 tane 5 kere*" şeklinde ifade ederek, grup çalışmasında yaptıkları gibi taban ayrıtları 9 ve 5, yüksekliği 1 br olan dikdörtgenler prizmasını oluşturmuştur. Burcu bu prizmanın ayrıtları olduğunu söyleyerek, taban ayrıt uzunluklarının 9 ve 5 br olduğunu ifade etmiş. Ayrıca uzun ve kısa kenarı göstererek, prizmanın bu ayrıtlardan oluştuğunu söylemiştir. Sonrasında "*şurası da var*" diyerek yüksekliği göstermiş ve burayı derinlik olarak isimlendirmiştir. Burcu'ya prizmayı nasıl oluşturduğu ne düşündüğü sorulduğunda ise "*45'i bir sayı ile bir sayının çarpımı şeklinde oluşturuyorum*" diyerek prizmayı oluşturma stratejisini ifade etmiş ve gerçekleştirdiği *eylem*i *içselleştirdiğini* göstermiştir. Ne bulduğu sorulduğunda, prizmanın hacmini bulduğunu ve bu hesaplamayı "*kısa kenar ve uzun kenarı çarptık, sonra tekrar derinliği çarptık*" şeklinde ifade ederek üç ayrıt uzunluğunu çarptıklarını söylemiştir. Burcu bu ifadesiyle strateji D'yi kullanmış gibi görünebilir. Fakat ilk görüşmede prizmayı katmanlar aracılığı ile oluşturduğu ve prizmayı oluşturma sürecinde üç boyutlu uzamsal ilişkilendirmelerde bulunduğu için strateji A'yı kullanmıştır.

Oluşturulan kutuların yüksekliğinin hep 1 birim mi olduğu sorulduğunda ise, Burcu "*yok bu şekilde"* şeklinde ifade ederek, taban ayrıt uzunlukları 15 ve 1 br, yüksekliği 3 br olan prizmayı oluşturmuş ve nasıl oluşturduğunu aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

"A: Önce nereyi oluşturdun?
B: Tabanını.
A: Tabanını. Kaç tane var tabanında?
B: 1 tane, yani 15 tane.
A: 1 neyi, bunun 15 neyi?
B: 15 uzunluğu, 1 derinliği.
A: Tabana 15 tane koydun. Sonra ne yaptın?
B: Sonra 3 tane daha aynı şekilde koydum.
A: Hacmini bulurken ne yaptın?
B: Hacmini bulurken de kısa kenar uzun kenar ve derinlik.
A: Peki kısa kenar ve uzun kenarın çarpımı sana neyi veriyor?
B: 45'i hayır... 15'i veriyor, sonra derinlikle 45.
A: Peki 15 bunun neyi bu prizmanın?
B: Uzunluğu. Yani uzun kenarı
A: Peki 15'le 1 in çarpımı?
B:15 eder…15…Uzunluğu, … Tabanı
A: Tabanı. Tabanı derken nereyi kast ediyorsun? …Önce neyi oluşturuyorum burada?
B: Tabanını
A: Sonra naptım?
B: Derinliğini
A: Derinliği ile naptım?
B: Bitirdim.
A: Tamam tabanı 15'di derinliği de 3 çıkmıştı 45'i elde etmek için ne yaptım bunları?
B: Çarptım."

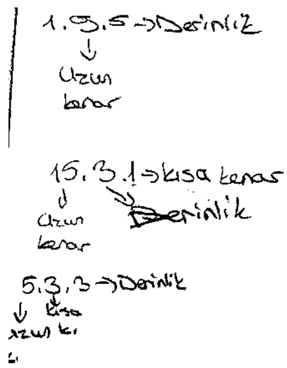
Burcu prizmanın önce tabanını oluşturduğunu sonra bu taban katmanının üzerine üç katman daha koyarak dikdörtgenler prizmasını katmanlar aracılığı ile oluşturduğunu ifade etmiştir. Fakat 15 birimin uzun kenar ölçüsü mü taban alanı mı olduğunu karıştırmış, en sonunda "*taban*" olarak ifade etmiştir. Uzun kenar ve kısa kenarın uzunluklarının çarpımının neyi verdiği sorulduğunda ise "*15'i veriyor, sonra derinlikle 45*" şeklinde ifade etmiştir. Bu aşamada Burcu'nun, formülü oluşturduğu modelden bağımsızlaştırabildiğine dair bir kanıt sunmadığı düşünülebilir. Ayrıca bu aşamada bahsettiği prizma için taban olarak ifade ettiği 15br^2 ile derinlik olarak ifade ettiği 3 br 'i çarptığını söylemesine rağmen, hacmin bağıntısını $uzun\ kenar \times kısa\ kenar \times yükseklik$ olarak ifade etmiş ve $bir\ katmandaki\ küp\ sayısı \times$

$katman\ sayısı$ genellemesine henüz ulaşamamıştır. Burcu'nun taban olarak ne ifade etmek istediği sorulduğunda ise, aslında tabandaki küpleri saydığını söylemiştir.

Hacim formülü ile ilgili genellemeye ulaşabilmesi için başka nasıl kutular oluşturabileceği sorulduğunda, 45 tane birim küpü yatay veya dikey bir şekilde sıralayarak da bulabileceğini ifade etmiş, "*9 tane yapıp üstüne 5 tane koyabiliriz, ya da 5 tane koyup 9 tane koyabiliriz…. 3 tane yapıp 15 tane*" şeklinde eklemelerde bulunmuştur. Burada başlangıçta ifade edilen sayılar tabandaki birim küplerin sayısı iken, ikinci olarak ifade edilenler üzerine kaç kat çıktığı yani, yüksekliğin kaç birim olduğudur. Burcu'nun gerçekleştirdiği süreçlerin derinlemesine incelenmesi için aşağıdaki gibi sorular sorulmuştur.

> "A: Evet nereler peki bunlar nasıl düşünüyorsun?
> B: Şu uzun kenar… bu da kısa kenar.
> A: … Hep bir ayrıtı 1 birim mi olur acaba? Herhangi bir ayrıtı 1birimden farklı olabilir mi 45'i oluşturabilmek için?
> B: Aslında 15, 3, 1 de var... Ha 1 …var.
> A: Evet içinde 1 var…. Bi düşün bakalım içinde hep 1 mi olması lazım?
> B: Olması lazım değil ama 45'i oluştururken.
> A: Nasıl oluşturuyorsun 45'i?
> B: Yani bir sayı ile bir sayının çarpımı…5'le 3 olur ama onda da 1 oluyor.
> A: 5'le 3 ün çarpımı ne?
> B:15
> A:45 oldu mu?
> B: Hayır.
> A: 45 olması için ne lazım
> B: Yani bir sayı ile bir sayının çarpımı, bir sayı ile bir sayının çarpımı… Derinliğini de
> A: Ne yapmam lazım derinliği?
> B: 1
> A: 1 olursa derinliği, kaç olur çarpımı?
> B: 15
> A: 15, 45 olmadı, 45 olmasını istiyorum
> B: Ha derinlik ha 3 haa ha..."

Burcu'nun oluşturduğu prizmalar için çalışma kâğıdına aldığı notlar ise şekil 21'deki gibidir.



Şekil 21: Burcu'nun klinik görüşmede oluşturduğu bazı prizmaların hacmi ile ilgili hesaplaması

Burcu'nun oluşturduğu bütün dikdörtgenler prizmaların ayrıtlarından biri 1 birim olduğu için, tüm ayrıtları 1 birimden farklı olan ve 45 birim küpten oluşan bir prizma oluşturup oluşturamayacağı sorulmuştur. Bunun üzerine Burcu, oluşturduğu prizmaları kontrol ederek birbirleriyle karşılaştırmış ve "bir sayı ile bir sayının çarpımı" stratejisini gözden geçirmiştir. Prizmanın içerisindeki birim küp sayısını bir sayı ile bir sayının çarpımı olarak düşünen Burcu, bu strateji ile herhangi bir ayrıtı 1 birim olan prizmaları bulabilmiştir. Böylece bu strateji ile oluşturduğu prizmalar arasında *koordinasyon* kurarak, prizmanın içerisindeki birim küp sayısını ayrıt uzunlukları 1 birimden farklı olan üç ayrıt uzunluğunun çarpımı olarak da ifade edebileceği sonucuna ulaşmış ve ayrıt uzunlukları 5, 3, 3 br olan dikdörtgenler prizmasını oluşturmuştur. Ayrıca, oluşturduğu $uzun\ kenar \times kısa\ kenar \times yükseklik$ bağıntıyı başka bir şekilde ifade edebilmesi ve genelleyebilmesi için aşağıdaki konuşma gerçekleştirilmiştir.

"B: Bu şekilde 45 tane veya dikey veya yatay olabilir.
A: ...Bu şekilde 45 tane oluştururken ne yaptın? Bir tane koydun, yanına bi tane daha koydun… önce neyi oluşturdun?
B: Tabanı.
A: …Sonra ne yaptın?
B: Üstünü yani derinliği.
A: …Şimdi geliyor mu aklına bişey?
B: Derinlik çarpı kısa kenar
A: …Bu kaç tane, 1 tane küp değil mi?
B: Evet
A: Üstüne bi tane daha koyuyorsun. 45 kere. 45'le neyi çarpıyorsun?
B: Tabanı
A: Yani, aslında söylüyorsun şu anda?
B: Derinlik çarpı taban."

Prizmanın hacim formülünü katmanlar aracılığı ile oluşturan Burcu, ulaştığı formülü "$derinlik \times taban$" olarak ifade etmiştir. Ayrıca, oluşturduğu iki bağıntı arasında *koordinasyon* kurarak bu iki bağıntı ile aynı şeye ulaştığını ve aslında aralarında fark olmadığını "*çünkü kısa kenar ve uzun kenarın çarpımı tabanı oluşturuyor. Taban ve derinlik de şeyi, prizmanın hacmini*" şeklinde ifade etmiştir. Böylece Burcu gerçekleştirdiği süreçleri *enkapsüle* ederek prizmanın hacmi için genel bir bağıntıya ulaşmıştır.

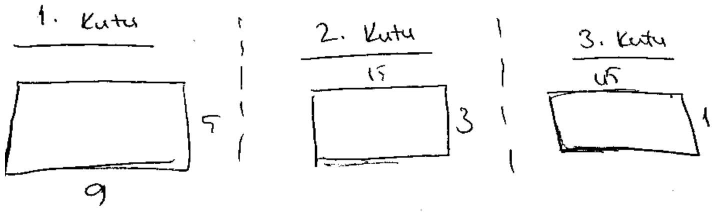
4.2.2 Irmak'ın Prizmanın Hacim Formülünü Yapılandırma Süreci

4.2.2.1 Irmak'ın Grup Çalışmasında Gerçekleştirdiği Süreç

Irmak'ın bulunduğu grupta, başlangıçta Ö8 birim küpleri kullanmadan oluşabilecek kutuları $1x45$, $2x17{,}5$ şeklinde ifade etmeye çalışmış, sonrasında, elindeki birim küpleri düşünerek buçuklu sayı olmayacağı konusunda karar kılmış ve kullandığı bu yöntemden vazgeçmiştir. Sonrasında Irmak birim küpleri kullanarak ve "*şuraya 5, şuraya 9 olur*" şeklinde ifade ederek, yüksekliği 1 br olan ve 45 tane birim küpten oluşan bir dikdörtgenler prizması oluşturmuştur (Şekil 22).

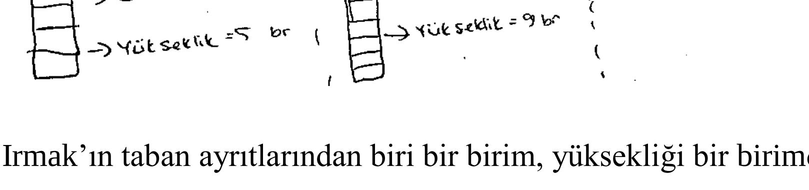
Şekil 22: Irmak'ın grup çalışmasında ayrıtları 5, 9, 1 br olan prizmayı oluşturma çalışması

Gruptaki öğrenciler kısa bir süre alan mı, yoksa hacim mi buldukları konusunda tartışmışlardır. Bu durumun yükseklik 1 br olduğu için cevabın kenar uzunlukları 9 ve 5 br olan dikdörtgenin alanı ile aynı çıkmasından kaynaklandığı düşünülebilir. Ayrıca, öğrencilerin oluşturdukları prizmanın üç boyutlu görünümünü kâğıda çizememelerinden ve bu prizmaları Şekil 23'deki gibi dikdörtgen olarak ifade etmelerinden kaynaklandığı söylenebilir. Grup içi tartışmaların sonucunda öğrenciler, cevabı değiştirmese de prizma yüksekliğe sahip olduğu için hacim buldukları konusunda karar kılmışlardır. Ö8 bu prizmayı "*5'e 9 ya da 9'a 5*" şeklinde oluşturabileceklerini söylemiş, olabilecek diğer prizmaları düşünürken ise "*45'in* *ebob, ekok'unu falan mı alsak*" demiştir. Irmak ise aslında muhtemelen bölenleri ifade etmek istemişken "*evet 45'in katlarını bulucaz*" şeklinde, başka bir öğrenci ise "*evet ya bölücez*" şeklinde ifade etmiştir. Öğrenciler buldukları bu fikri *içselleştirerek* 45'in tüm bölenlerini listeleme yöntemi ile bulmuşlar ve grup çalışma kâğıdına "*45, 15, 9, 5, 3, 1*" şeklinde not almışlardır.



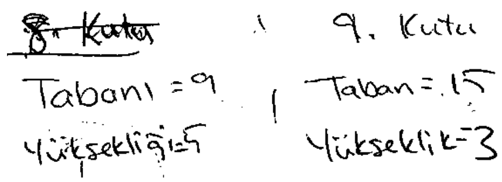
Şekil 23: Irmak'ın yüksekliği bir birim olan prizmalar için grup çalışma kağıdına yaptığı çizim

Sonrasında öğrenciler yüksekliği 1 br taban ayrıtları 15, 3 ve 45, 1 br olan prizmaları yapabileceklerini söylemişler ve grup çalışma kâğıdına Şekil 23'deki gibi ifade etmişlerdir. Bu aşamada Ö10 "ya da 5 kat yapalım" diyerek taban ayrıtları 9'a 1 birim olan, yüksekliği 5 birim olan prizmayı oluşturmaya çalışmıştır. Başka bir öğrenci ilk yaptıkları prizma ile aynı olduğunu iddia ettiğinde ise, kullanılan modellerin de yardımıyla "*yok yok bak olmuyor bu 5 ya* (üst üste 5 tane dizdikten sonra) *bundan 9 tane yan yana olacak... şekil farklı*" demiştir. Bu prizmayı da üç boyutlu bir şekilde çizemediklerinden Şekil 24'deki gibi ifade edebilmişlerdir (4. kutu). Irmak ise kutuyu oluşturduktan sonra "*bu yatay bu dikey oluyor"* diyerek arkadaşlarını ikna etmeye çalışmıştır. Ayrıca 9 tane birim küpü üst üste koyarak ve bu sütunun 5 kere tekrarlanması ile 45 birim küp sığan başka bir prizma elde edebileceklerini söylemiş ve Şekil 23'de görüldüğü gibi 5. kutuyu çizmiştir.



Şekil 24: Irmak'ın taban ayrıtlarından biri bir birim, yüksekliği bir birimden farklı olan prizmalar için grup çalışma kâğıdına yaptığı çizim

Bu çizimleri yaptıktan sonra gruptan başka bir öğrenci yine 45'in bölenlerini düşünerek *"15 yükseklik 3 şey yaptık mı"* demiştir ve şekil 23'de görülen 6. kutuyu da oluşturmuşlardır. Böylece hacmin formülünü tartışmaya başlamışlar ve gruptan bir öğrenci "*taban alanı x yükseklik* miydi?" demiştir. Öğrencilere başka bir kutu oluşturup oluşturamayacakları sorulduğunda ise, Irmak "*9 kere 5 yapalım*" demiş ve iki sıra oluşturarak 9 yapmaya çalışmıştır. Bu şekilde 9'u elde edemeyince üç satır ve üç sütundan oluşan, yüksekliği 1 br olan kare prizmayı oluşturmuş ve bu şekilde 5 kat çıkacaklarını ifade ederek prizmayı katmanlar aracılığı ile oluşturduklarını göstermiştir. Araştırmacı prizmanın içerisindeki birim küp sayısını ifade eden bir formül oluşturup oluşturamayacaklarını sorduğunda ise grup içerisinde tartışmışlardır. Irmak bu prizmanın da diğerleri ile aynı olduğunu söylerken, gruptan başka bir öğrenci "*hayır bu farklı… biz biyeri hep tek oldu*" diyerek oluşturdukları diğer prizmalarda ayrıtlardan birinin hep 1 br olduğunu ifade etmiştir. Fakat bu öğrenci de somut olarak modellemesine ve zihninde canlandırmasına rağmen üç boyutlu olarak prizmayı çizememiştir. Nasıl ifade edebileceklerini tartıştıktan sonra ise grup çalışma kâğıdına 8. ve 9. kutuyu ifade etmişlerdir (Şekil 25).



Şekil 25: Irmak'ın ayrıtlarından hiçbiri bir birim olmayan prizmalar için grup çalışma kâğıdına aldığı not

4.2.2.2 Irmak'ın Klinik Görüşmede Gerçekleştirdiği Süreç

Irmak grup çalışmasında küçük (bir ayrıtı bir cm olan) birim küpleri kullanmak istemiştir. Görüşmede bunun sebebi sorulduğunda ise, "*hani geçen seferki aldığımızda da bu* (bir ayrıtı) *iki buçuklu olduğu için, yani tam bi sayı çıksın diye. Kolay olsun diye*" şeklinde ifade etmiştir. İlk soruda küçük birim küpleri kullandıklarında tam ve kesin bir sonuca ulaşmaları, büyük olan birim küplerin (bir ayrıtı 2,3 cm olan) prizmaların içerisine tam yerleşmemesi bu sorunun çözüm sürecini etkilediği söylenebilir.

Irmak başlangıçta, grup çalışmasında yaptıkları gibi 9'a 5'lik prizmayı oluşturmuştur. Bu prizmayı grup çalışma kâğıdına Şekil 22'de görüldüğü gibi dikdörtgen şeklinde çizmelerine rağmen, yüksekliğinin 1 birim olduğunu özellikle belirtmiştir. Ayrıca, "*1 birim de yükseklik yaptık, tabanını da 45 yaptık… Yüksekliği 1, bu sefer bunu 3 aldık burayı 15 aldık*" diyerek taban ayrıtları 15, 3 ve 45,1 br olan ve yükseklikleri 1 br olan prizmaları da oluşturduklarını belirtmiştir. Bu prizmaları nasıl oluşturduğu sorulduğunda "*45'in katlarını bulduk*" şeklinde ifade etmiş ve gerçekleştirdiği *eylem*leri *içselleştirmiştir*. Irmak görüşmede ve grup çalışmasında 45'in katları olarak ifade etmesine rağmen aslında bölenleri bulmuştur. Bu yüzden bu aşamada terminolojik bir hata yaptığı, kat demesine rağmen sayının bölenlerini kastettiği söylenebilir. Ayrıca, görüşme sürecinde ne yaptığını söylerken "*Mesela 45 tane lazım 45'i yüksekliğe bölüyorum. Bundan kaç tane lazım olduğunu buluyorum*" şeklinde ifade etmesi 45'in bölenlerini referans aldığını göstermektedir. Sonrasında "*yüksekliği fazla olanlara geçtik*" diyerek yüksekliği 1 birim olan prizmalar ile yüksekliği 1birimden farklı olan prizmalar ve ayrıtlarını karşılaştırarak, bu prizmalar ve oluşturma yöntemleri arasında *koordinasyon* kurmuştur.

> "I: Sonra yüksekliği fazla olanlara geçtik, yani 9 yüksekliği 5 birim yaptık.
> A: hıhı
> I: Bu beş birim yükseklikten de 9 ar tane yaptığımızda yine 45 çikolata oluyor.
> A: Önce burayı oluşturdunuz yüksekliğini.
> I: Sonra 5 tane yanına 5 tane yanına 5 tane yanına
> A: Tamam sonra ne yaptınız?
> I: O bitti oldu. Sonra bu kutuya geçtik aynı şeyin tersini yaptık. 9 yükseklik yaptık, 9 yükseklikten de yani 9 birim küpten de 5er tane yan yana koyduk…"

Yukarıdaki konuşmalardan da anlaşılacağı üzere, Irmak prizmanın üç boyutlu uzamsal yapılanmasını anlamlandırdığını ve prizmayı katmanlar aracılığı ile oluşturduğunu açıklamıştır. Ayrıca, yüksekliği 1 birim olan prizmaları oluştururken, çarpımları 45 olan iki sayıyı düşünerek satır ve sütunlara birim küpleri yerleştirmiştir. Yüksekliği 1birimden fazla olan prizmaları oluştururken ise, önce birim küpleri üst üste koyarak yüksekliğin kaç birim olduğunu belirlediğini, sonra oluşturulan bu sütun kaç kere tekrar edecekse o kadar yanına koyduğunu ifade etmiştir. Yani bu aşamada, prizmanın içerisindeki birim küp sayısını *bir katmandaki küp sayısı x katman sayısı* olarak ifade edemese de bu stratejiyi kullandığını göstermiştir. Ayrıca, yukarıda ifade ettiği ve grup çalışma kâğıdına Şekil 24' deki (4. ve 5. kutu) gibi çizdiği bu iki prizmanın aslında birbirinin aynısı olduğunu, birini ters çevirdiğinde diğerini elde edebileceğini söylemiştir. Irmak oluşturduğu bu prizmalardan farklı olarak ayrıtlarından hiçbiri 1 birim olmayan, prizmayı da aşağıda şekilde ifade ederek oluşturmuştur.

> "I: Tabanı 9 yaparız.
> A: hıhı nasıl yaptın tabanı 9?
> I: 3 birim küp bi tarafa 3 birim küp bi tarafa… sonra bunlardan da yüksekliği 5 olacak şekilde birim küp ekleriz.
> A: …burada doğru anladıysam önce şuraya 3 tane koydun yanına 3 tane koydun.
> I: Evet yanına 3 tane yanına 3 tane. 9 tane oldu…9 tane 9 üstüne 9 üstüne 9 üstüne 9 üstüne koyunca
> A: … Nasıl oluşturuyorsun bu kutuyu önce nereyi oluşturuyorsun?
> I: Tabanını oluşturuyorum."

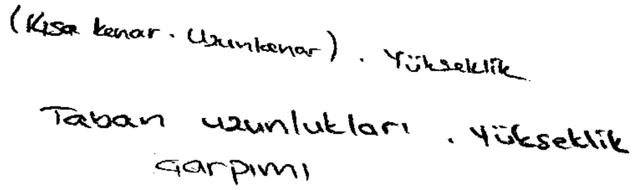
Irmak ayrıtları 1 birimden farklı olan prizmayı oluşturma sürecinde önce tabanını oluşturduğunu, sonra yükseklik kaç birim olacaksa o kadar taban katmanından üst üste koyduğunu söylemiştir. Yani yine katmanlar aracılığı ile prizmayı oluşturmuş ve strateji A'yı kullanmıştır. Ayrıca Irmak "*Hacmi bulmak için kaç çikolata lazım, o kadar koyarım onun şeyine bakarım... Şekline yani alanına kapladığı şeye*" şeklinde ifade ederek bu aşamada hacim bulma yönteminde duruma özgü bir model oluşturduğunu göstermektedir. Görüşmenin sonunda ne bulduğu sorulduğunda ise "*hacmi buluyorum içinin kaç tane birim küp aldığını*" diyerek, başlangıçta kullanılan çikolata sayısı ile ilgili durumdan bağımsızlaştığını göstermektedir. Ayrıca, oluşturduğu hacim formülünü ve kullandığı stratejiyi aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

> "I: 45 in bölenlerini buldum o bölenlerden iki tanesini seçtim, çarpınca 45 olanlardan.
> A: ...Neyle neyi seçtin burada?
> I: Yine 9'la 5'i seçtim.
> A:9 'la 5'i çarpmadan önce 9'u oluşturman için?
> I:3'le 3'ü.
> A:3'le 3'ü çarptın nereyi oluşturdun?
> I: Tabanı.
> A: Sonra ne yaptın?
> I: Bi 9 bi 9 daha, yükseklik koyduk.
> A: Yani ne yaptın?
> I: Yükseklik çarpı taban."

Irmak oluşturduğu tüm prizmaları düşünerek, prizmanın hacim formülünü "$taban\ x\ yükseklik$" olduğunu ifade etmiştir. Bu bağıntıyı açıklaması ve genelleyebilmesi için ise aşağıdaki gibi sorular sorulmuştur.

“A: Taban dediğin ne peki?
I: Taban bir yüzü kaplayan şey.
A: Peki sen hacmi nasıl bulursun ben sana ayıtları versem 3, 5, 7 br.
I: Taban çarpı yükseklik.
A: ... Mesela şuraya bak bunun ayrıtları neler? (Şekil 25, 8. Kutu)
I: 3, 3, 5 aynı diğerleri
A: Neresi 3 br?
I: 3 tabandaki ayrıtlar. 5 yükseklik.
A: ... Nasıl bir prizma bu?
I: Kare prizma
A: Kare prizma. Burası 3, burası 3, burası 5 br bunun gibi ayrıt uzunlukları 6, 7 ve 8 br olan…yani kısa kenarı 6, uzun kenarı 7, yüksekliği 8 br olan prizmanın hacmi ne, buradaki yaptığına göre?
I: ...Uzun kenarı 7 kısa kenarı 6. Önce 7 ile 6’yı çarparım.
A: Nereyi bulursun?
I: Tabanı…sonra da tabanı da yükseklikle çarparım.
A: Yani napıyorsun? Bir formül üretsen bütün prizmalar için geçerli olsa
I: ıı taban ayrıtları, 3 ayrıtı çarparım
A: hıhı bunu nasıl ifade edersin?
I: Hani taban ayrıtlarını çarparım. Evet, yükseklikle çarparım onu da.
A: Tamam nasıl yazarsın bunu.
I: Kısa kenar çarpı uzun kenar çarpı yükseklik.”

Böylece, Irmak gerçekleştirdiği tüm *süreç*leri *enkapsüle* ederek dikdörtgenler prizmasının hacim formülüne ulaşmış ve ulaştığı formülü oluşturduğu modelden bağımsızlaştırarak, herhangi bir dikdörtgenler prizması için de kullanabileceğini göstermiştir. "*Taban x yükseklik*" olarak da genelleyebildiği bu formülü görüşmenin sonunda "*kısa kenar x uzun kenar x yükseklik*" olarak da ifade etmiştir. Ayrıca, tüm prizmaların kısa kenar ve uzun kenarının olmayabileceği durumunu düşünerek, kısa kenar ve uzun kenar uzunluklarının çarpımını taban uzunlukları çarpımı olarak ifade etmiştir (Şekil 26).


(Kısa kenar . Uzunkenar) . Yükseklik
Taban uzunlukları . Yükseklik
çarpımı

Şekil 26: Irmak’ın bireysel çalışma kâğıdına prizmanın hacim formülü ile ilgili aldığı not

4.2.3 Mert’in Prizmanın Hacim Formülünü Yapılandırma Süreci

4.2.3.1 Mert’in Grup Çalışmasında Gerçekleştirdiği Süreç

Mert’in bulunduğu grupta önce boşluk kalma durumu ve 45 çikolatanın bölünerek gönderilmesi tartışılmıştır. Öğrenciler soruyu tam olarak anladıktan sonra ise, gruptan bir öğrenci öncelikle 45 tane birim küpü alarak 6 sıra dizmeye çalışmıştır. Böyle bir prizmayı oluşturamayacağını anlayınca, küpleri azaltarak her sırada 9 birim küp olacak şekilde 5 sırayı yan yana getirmiş ve yüksekliği 1 birim olan prizmayı oluşturmuştur (Şekil 27). Grup içerisinde bu kutunun dikdörtgen mi yoksa dikdörtgenler prizması mı olduğu tartışıldıktan sonra, Ö11 45’in çarpanlarını bularak diğer prizmaları da oluşturabileceğini ifade etmiştir. Böylece, ayrıtları 9, 5, 1; 15, 3, 1; 45, 1, 1 birim olan prizmaları oluşturmuşlardır. Araştırmacıya bu üç paketten başka bir şekilde paketleyemeyeceklerini ifade eden grup bu çalışma sonrasında birim küpleri rastgele dizerek, problemde istenen kutuları oluşturmaya çalışmışlardır.

Şekil 27: Mert’in de bulunduğu grubun 45’in çarpanlarını bulma çalışması

4.2.3.2 Mert’in Klinik Görüşmede Gerçekleştirdiği Süreç

Mert klinik görüşmede öncelikle 45 tane birim küpü sayması gerektiğini ifade etmiştir. 45’in yarısı kaç diye sorduktan sonra ise, 2’ye bölünemeyeceğine karar vermiş ve birim küpleri rastgele dizerek, 45’ e ulaşmaya çalışmıştır. Mert birim küplerle yüksekliği 1 br olacak şekilde ve her satır 6 birim küp alacak şekilde 7 satır oluşturduktan sonra, $6x7$’yi araştırmacıya sormuştur. 42 cevabını aldıktan sonra ise 3 tane daha birim küp almış ama bu şeklin prizma olmadığını da fark etmiştir. Oluşturacağı prizmanın içerisinde boşluk kalmaması gerektiğini ve bunun için küpleri farklı konumlandırması gerektiğini söyleyen Mert, “*eni (*6*) azalcak boyu artıcak (*7*)*” demiştir. Böylece, ayrıtları 9, 5 ve 1 birim olan prizmayı aşağıdaki gibi oluşturmuş ve *eylem* aşamasında olduğunu göstermiştir.

“M: Bunu üste doldurabiliriz evet, şimdi burda bi kutu oldu gibi neyse işte hocam dümdüz farz edelim.
A: Evet
M: Bi kutu oldu.
A: Peki bu kutunun ayrıtlarının uzunluklarını söyleyebilir misin bana?
M: 9 çarpı 5. Onları çarparsak 45 çıkar.
A: Peki 45’ den düşünürsen nasıl ulaşırsın 9 ve 5’e?
M: Bölerek.
A: Bölerek, sen sayının neyini bulacaksın?
M: Hocam anlamadım
A: Bölerek dedin ya
M: hıhı
A: 45 in nelerini düşünüyorsun. 45’i 5’e bölersen
M: 9
A: Aynen tam...
M: 9’a bölersem 5 çıkar.”

Mert oluşturduğu kutuyu tamamen birim küplerle doldurmamıştır. Fakat taban ayrıtlarının 9 ve 5 birim olduğunu bildiğinden, bunları çarparak, kutuda toplam 45 birim küp olacağını hesaplamıştır. 45’i bölerek 9 ve 5’e ulaşabileceğini söyleyen Mert, bu aşamada oluşturduğu modeli genelleyememiş, genel olarak 45’in bölenlerini bulacağını söyleyememiştir. Fakat görüşme süresince başka prizmalar oluşturan Mert’e 45’le prizmanın ayrıt uzunlukları arasındaki ilişki sorulduğunda “*var bölünce çıkıyor*” şeklinde cevaplamış ve gerçekleştirdiği *eylem*i *içselleştirdiğini* göstermiştir.

Mert bu prizmanın kısa kenar, uzun kenar ve yüksekliğinin olduğunu ifade etmiştir. Yüksekliğin 1 br olduğu için sonucu değiştirmediğini, ama hesaplamalarda yüksekliğin yazılmadığı durumu “*o zaman 2 boyutlu gibi gözükebilir*” şeklinde ifade etmiş ve üç boyutlu uzamsal yapılanmaya sahip olduğunu göstermiştir. Sonrasında, 45’i 2’ye bölerek, bölme sebebini ve ondalık sayı çıkmasını “*böldüm çünkü küçük küpler lazım hocam, öyle değil mi, onlar da bir birim çünkü*” şeklinde açıklamıştır. Yani bu birim küplerin de bölünebileceğini, böldüğü parçaların da bir birim oluşturabileceğini ve birbirine eş olmayan birim küpleri kullanabileceğini söylemiştir. Soruda eş çikolatalar olması gerektiği hatırlatıldığında ise, bu durumda eş olan birim küpleri farklı konumlandıracağını ifade etmiştir. Mert bu aşamada oluşturduğu prizmaları aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

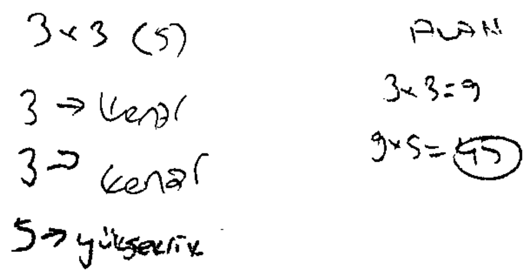
“M:4’e 4 çarpı 5’lik bir kutu.
A: Peki.
M: Hocam ama 45’lik olmadı…hocam yine boşluk kaldı…
A: Noldu? Bu kutuda da boşluk kaldı demi?

M: Hocam üst üste koya koya boşaltırız kesin (tabanı 5'e 3, üste 4 sıra koymaya çalıştı). Allah Allah hocam ne kadar koysak kalıyor işte."

Mert herhangi bir hesaplama yapmadan, küplerle deneyerek 45 birim küp alan prizmaya ulaşmaya çalışmıştır. Bu şekilde sonuca ulaşamayınca 45 tane birim küpü sayarak, farklı bir şekilde konumlandıracağını söylemiştir. Bir önceki yaptığı (taban ayrıtları 5 ve 3 birim olan) prizmada birim küplerin yerlerini değiştirerek, taban ayrıtları 3 birim, yüksekliği 1 birim olan bir prizma elde etmiştir ve sorulan soruları aşağıdaki gibi cevaplamıştır.

"A: Şurda kaç tane var Mert?
M: 3'e 3 lük
A: Kaç tane var bir sırada?
M:9
A: Bu 9'u da üst sıraya koysam olur mu?
M: Olur.
A: Boşluk kalır mı?
M: Hocam aynı olacağına göre kalmaz."

Mert böylece tabanı 9 birim küp yüksekliği 5 birim olan prizmayı oluşturmuş ve içerisindeki birim küpleri "*9, 18, 27...*" şeklinde, tekrarlı saymıştır. Çalışma kâğıdına ise Şekil 28'deki gibi not aldıktan sonra, aşağıdaki gibi açıklamıştır.



Şekil 28: Mert'in klinik görüşmede ayrıtları 3, 3, 5 br olan prizmanın hacmini hesaplama çalışması

"M: Hocam şimdi buraya parantez içindekiler yüksekliği bu da normal şeyleri yani.
A: Tamam anladım
M: Hocam bu kare prizma kenarları 3 çarpı 3. Dimi?
A: Evet
M: Kare prizma yani direk kısa kenar uzun kenar yok yani… Direk kenar"

Mert Şekil 28'de görüldüğü gibi yükseklik ve taban ayrıtlarını ayırmak için yüksekliği parantez içerisinde belirtmiştir. Ayrıca bu prizmanın kare prizma olduğunun, yani taban ayrıtlarını uzun ve kısa kenar olarak belirtemeyeceğinin farkındadır. Fakat birim küplerin sayısını 45 olarak hesapladıktan sonra, bunu alan olarak ifade etmiş ve aşağıdaki gibi açıklamalarda bulunmuştur.

> "A: Aferin sana, şimdi sen kutuyu oluştururken 45 in nelerini düşünüyorsun?
> M: Hocam, 45 alan olcak … 45 tane çikolata olucak
> A: …Burdaki çikolata sayısı kutunun neyini verecek ...alanı mı verecek?
> M: Hocam yani bunlar 1 birim olduğuna göre, küp olduğuna göre bunun da alanı olcak."

Mert prizmanın içerisindeki çikolata (birim küp) sayısını alan olarak adlandırmıştır. Fakat iki ve üç boyut kavramlarının farkındadır. Ayrıca, açıklaması istendiğinde dikdörtgenin alanını uzun kenar ile kısa kenar uzunluğunun çarpımı olarak tanımlamış, "*dikdörtgenler prizmasının alanını*" ise yukarıda yaptığı işlemleri referans alarak "*şura şura çarpımı ve şura*" olarak ifade etmiştir. Böylece Mert'in hacmi üç ayrıt uzunluğunun çarpımı olarak hesapladığı ve terminolojik bir hataya sahip olduğu söylenebilir (Bir önceki görüşmede de hacmi içinin alanı olarak adlandırmıştı). Süreç içerisinde başka nasıl prizmalar oluşturabileceği sorulduğunda ise aşağıdaki gibi açıklamıştır.

> "M: hıhı öyle yapıcaz, düşünme moduna geçeyim. Hocam şimdi bişey yapcaz da ama ebob ekok lazım işte
> A: O ne demek. Ebob ekok ne?
> M: En küçük neydi ortak kat öyle bişeydi.
> A: Niye ona geçicez?
> M: Gerek yok ki aslında yani.
> A: Şimdi niye gerek var dedin, niye gerek yok dedin, önce niye gerek var dedin?
> M: Aklıma geldi hocam bi anda. Takmayalım hocam oraya."

Oluşturacağı diğer prizmalar için bir strateji üretmeye çalışan Mert, en büyük ortak bölen (ebob) ve en küçük ortak katın (ekok) gerekli olduğunu söylemiş, açıklaması istendiğinde ise bundan vazgeçmiştir. Mert muhtemelen 45'i bölerek ayrıtlara ulaşabileceğini bildiğinden, ebob-ekok ile bölenleri ilişkilendirmiştir. Fakat hazırbulunuşluk testindeki cevap kâğıdı incelendiğinde, ortak bölen sorusunda sadece ebob bulduğu, diğer ortak bölenlerden bahsetmediği, ortak bölen ve ortak kat kavramlarını birbirine karıştırdığı saptanmıştır. Bu yüzden, Mert'in ebob-ekok konusunu tam hatırlayamadığı için bu ilişkiyi sadece hissettiği ve tam açıklayamadığı söylenebilir. Sonrasında ise oluşturabileceği prizmaları aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

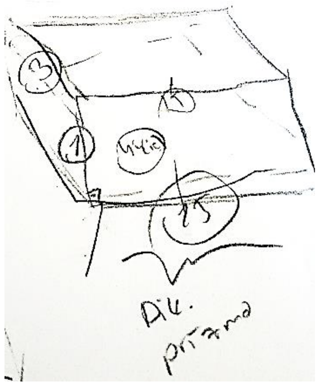
> "M: Bi kenarını 5 yaparız bi kenarını 3 yaparız yüksekliğini de 9 yaparız.

A: Yap bakalım yaz oluyor mu öyle bir kutu?
M: 5 çarpı 3 15…15 çarpı 9, 45.
A: 45 mi yapıyor 15 çarpı 9?
M: Yoo yapmıyor hocam…5 çarpı 5 yapalım.
A:25
M:25 çarpı 3
A:75
M: Aheyy ... Aman aman. Hocam aynı sayılar işte çarpınca birinin çıkması lazım. Tamam hocam o zaman 5 çarpı 9 yapalım.
A: Onu burda yaptın...Bulursun sen. Ben sana güveniyorum
M: Haa 6 çarpı 3
A: 18
M: Yok az oldu. 6 çarpı 6 mıydı o 36. 6 çarpı 7 kaç hocam?
A: 42
M: 6 çarpı 8
A: 48
M: Hocam o zaman 2 ile yapalım tamam 2 evet 2'yi seçtik.
A: 2 ye bölünüyor mu 45?
M: Hmm 3. 3'e bölünüyor mu?
A: Bölünüyor.
M: Bölünüyor. 3 çarpı 3 yapalım, yükseklik 5 olsun. Onu da yapmışız.
A: Şurda demi. Yüksekliği 1 br olsun. Ben sana ipucu vereyim.
M: Tamam yüksekliği 1 olsun. Kaç çarpı kaç 45 eder işte?"

Mert bu aşamada prizmaları oluştururken, birim küpleri sayarak ve deneyerek yapmak yerine, üç ayrıtı belirleyerek çarpımları 45 olanları bulmaya çalışmıştır. Yani yatay matematikleştirmeden dikey matematikleştirmeye geçiş yapmaktadır. Fakat aritmetik işlemlerde zayıf olduğundan, bir basamaklı sayıları bile çarpmakta zorlanmaktadır. Bu yüzden, aklına gelen sayıları tek tek söylemiş, çarpımları 45 olana ulaşmaya çalışmıştır. Pek çok denemeden sonra ise, ayrıtları 15, 3 ve 1br olan prizmayı aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

"M: Hocam şimdi …ilham geldi…45 bölü 3 yaparız ilk olarak
A: Yap bakalım.
M: 15 çıkar dimi?
A: Evet.
M: Evet 15. Bir kenarını 15 alırız bi kenarını 3 alırız yüksekliğini de 1 alırız."

Böylece Mert 45 3'e tam bölündüğü için, bir prizma oluşturabileceğini hissetmiş, taban ayrıtları 15 ve 3 birim, yüksekliği 1 birim olan prizmayı Şekil 29' daki gibi çizmiştir.



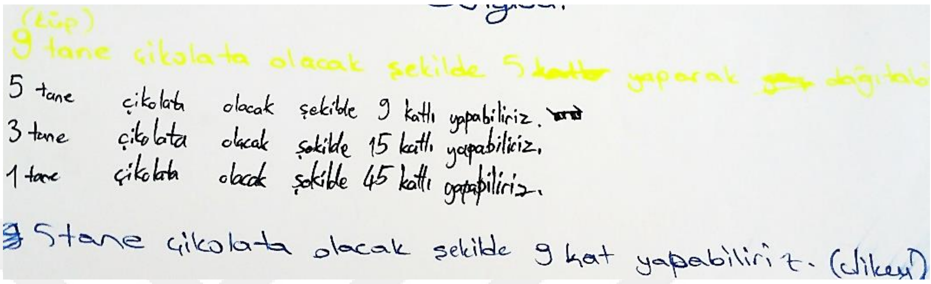
Şekil 29: Mert’in bireysel çalışma kâğıdına ayrıtları 15, 3, 1 br olan prizmayı üç boyutlu bir şekilde çizme çalışması

Mert prizmanın hacim formülünü "$uzun\ kenar\ x\ kısa\ kenar\ x\ yükseklik$" olarak ifade ettiği için gerçekleştirdiği *süreç*leri *enkapsüle* edebildiği düşünülebilir. Fakat yukarıda da belirtildiği gibi Mert, önbilgilerindeki ve aritmetik işlemleri gerçekleştirmedeki eksikliklerden dolayı daha az durumdan bahsetmiştir. Bu durumları ilişkilendirememiş ve zayıf bir *koordinasyona* sahip olduğunu göstermiştir. Bu yüzden Mert’in prizmanın hacim formülünü *nesne* düzeyinde oluşturamadığı düşünülmektedir.

4.2.4 Zehra’nın Prizmanın Hacim Formülünü Yapılandırma Süreci

4.2.4.1 Zehra’nın Grup Çalışmasında Gerçekleştirdiği Süreç

Zehra’nın bulunduğu grup, öncelikle problemde anlamadıkları bazı yerleri araştırmacıya sormuştur. Bunun üzerine Zehra “*Birçok yolu var. 45, 5’e bölünüyor ya, taban 9 olucak mesela*” demiş ve taban ayrıtları 3 birim, yüksekliği 5 birim olan prizmayı oluşturmuştur. Oluşturduğu prizmayı ifade ederken “*9 tane çikolata olacak şekilde 5 katlı yapabiliriz*” demiştir. Bu sırada Ö7 grup çalışma kâğıdına “*5 tane çikolata olacak şekilde 9 katlı yapabiliriz”* yazmış, Zehra bu prizmanın kendi oluşturduğu prizmanın farklı bir şekilde konumlandırılmış hali olduğunu ve bir şey fark etmediğini söylemiştir. Bunun üzerine grup içerisinde tartışılarak nerenin taban, nerenin yükseklik olduğu söylenmiştir. Grup olarak bu iki prizmayı oluşturduktan sonra ayrıtların 3 ve 15 br olabileceği üzerinde durulmuş, bu sırada araştırmacı ne yaptıklarını sormuştur. Zehra “*bölünebilme kurallarına baktığımız zaman 45’in bölenleri 9,5,3,1,45 var. Ordan bulduk*” diyerek *eylem*i *içselleştirdiğini* göstermiştir. Prizmaları oluştururken önce tabanı (bir katmanı) oluşturduklarını, ardından yükseklik kaç birimse o kadar katman eklediklerini söylemişlerdir. Bu sırada Ö7 gerçekleştirdikleri süreci "*bir tane katın hacmini buluyoruz...* "$yükseklik\ x\ kısa\ kenar\ x\ uzun\ kenar$" şeklinde ifade etmiştir. Grup üyelerinden biri bağıntıyı üç ayrıt uzunluğunun çarpımı olarak ifade etse de grubun prizmaları katmanlar aracılığı oluşturdukları gözlenmiş olup, strateji A'yı kullandıkları söylenebilir. Ayrıca, grup içerisinde tartışılan tüm prizmalar Şekil 30'daki gibi ifade edilmiştir.



Şekil 30: Zehra'nın bulunduğu grubun prizmaları nasıl oluşturdukları ile ilgili grup çalışma kâğıdına aldıkları not

4.2.4.2 Zehra'nın Klinik Görüşmede Gerçekleştirdiği Süreç

Yapılan klinik görüşmede Zehra, öncelikle sorudan ne anladığını söylemiş ve grup çalışmasında gerçekleştirdikleri *eylem*leri referans alarak, nasıl düşündüğünü aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

> "Z: Bölünebilme kurallarına baktık önce… Herkese eşit olarak dağıtılabilmesi için kutuların da eşit büyüklükte olması gerekiyordu…
> A: Yani kaç tane çikolata olacak her kutuda?
> Z: 45 tane… 45'e bölünebilme kurallarına 45 9'a bölünebiliyor... 5'e bölünebiliyor, 3'e bölünebiliyor, bide 1 ve kendine bölünebiliyor."

Böylece, 45'in bölenlerinin bulunması gerektiği *içselleştirdiğini* göstermiştir. Ayrıca, 1 ve kendisine bölünebilme durumunun üzerinde çok fazla durmadıklarını söylemiş, bunun sebebini ise 45 tane yatay veya dikey bir şekilde sıralanan çikolata paketlerini oluşturmanın fiziksel olarak zor olduğu şeklinde ifade etmiştir. Bu yüzden, 9, 5 ve 3'ü tercih ettiklerini söyleyen Zehra, taban ayrıtları 3 birim, yüksekliği 5 birim olan prizmayı oluşturmuştur. Oluşturduğu bu prizmayı "*tabanı 9 olcak şekilde bu 9'un üstüne 4 kat daha koyduk burası bir katı, öyle 45 tane sığmış oluyor*" şeklinde ifade etmiştir. Bunun üzerine oluşturduğu prizmanın tabanını nasıl bulduğu sorulduğunda, 3'le 3'ü çarptığını, sonrasında yükseklik 5 olduğu için 9 ile 5'i çarptığını söylemiştir.

Zehra'nın prizmayı oluşturma stratejisi incelendiğinde, grup çalışmasında yaptıkları gibi katmanları ve prizmanın üç boyutlu uzamsal yapısını düşündüğünü göstermiş ve strateji A'yı kullanmıştır. Oluşturabileceği diğer prizmalar sorulduğunda ise "*altta 5 tane üstüne 9 sıra dizmiştik*" şeklinde cevaplayarak, prizmanın tabanını ve yüksekliği referans aldığını göstermiştir. Zehra problemi çözerken duruma özgü olarak oluşturduğu modelini, durumdan bağımsızlaştırarak "*hacmi uzun kenar çarpı kısa kenar çarpı yükseklikten bulduk*" şeklinde ifade etmiştir ve yatay matematikleştirmeden dikey matematikleştirmeye geçiş yaptığını göstermiştir. Zehra'nın oluşturduğu modeli daha iyi anlamlandırmak için ise aşağıdaki gibi sorular sorulmuştur.

> "A: Peki şu an nasıl buldun hacmi?
> Z: Şu an hacmi küplerle ölçerek buldum.
> A: Küplerle ölçtün. Önce neresini oluşturdun bunun, az önce söylemiştin?
> Z: Tabanını.
> A: Tabanını nasıl buldun?
> Z: Kısa kenar ve uzun kenarı çarparak.
> A: Sonra naptın?
> Z: Sonra yüksekliğini ölçtüm, yükseklikle çarptım.
> A: Yani naptın?
> Z: Hacmini buldum.
> A: Neyle neyi çarptın?
> Z: Taban alanı çarpı yükseklik.
> A: Taban alanı mı peki burası?
> Z: Pardon taban hacmi."

Böylece, Zehra birim küplerle oluşturduğu modeli formalleştirmeye çalışmıştır. Daha önce oluşturduğu "$uzun\ kenar\ x\ kısa\ kenar\ x\ yükseklik$" formülü ile ilişkilendirerek, hacim formülünü "$taban\ hacmi\ x\ yükseklik$" olarak da ifade etmiş ve bu iki formülü çalışma kâğıdına not etmiştir. Ayrıca, tabana yerleştirdiği katmanın hacmini "taban hacmi" olarak ifade etmiştir. Ancak, ilk başta söylediği "taban alanı x yükseklik" bağıntısını düşündüğünde hacim ve alan kavramları ile ilgili tereddütleri olmuştur. Bu düşüncelerini küpün içini göstererek "*her birinin içi… Aslında alan oluyor gibi*" şeklinde açıklamıştır. Sonrasında alanın dış kısımlar olduğunu söylemiş ve 1 birim yüksekliği olan tabanın yüksekliğinin olmaması durumunda alanı ifade ettiğini belirtmiştir. Böylece bu problemde aslında hacim bulduğu konusunda karar kılmıştır. Ayrıca yapılan yönlendirmelerle birlikte Zehra, oluşturduğu modeli tekrardan düşünerek "*yüksekliği oluşturan küplerle tabanı oluşturan küpleri* *çarpıyorum*” demiştir. Çalışma kâğıdına ise "$taban\ küp\ sayısı\ x\ yükseklik$" notunu alarak bu üç formülü birbiri ile ilişkilendirmiştir.

Başka nasıl prizmalar yapabileceği sorulduğunda, “*tabanına 3 küp koyup, üstüne 15 küp sayarız…1 tane olucak, üstüne 45 yani yüksekliği*” şeklinde ifade ederek iki prizma daha oluşturabileceğini söylemiştir. Oluşturduğu prizmalarla *koordinasyon* kurması için tüm ayrıtları 1birimden farklı olan bir prizma oluşturup oluşturamayacağı sorulduğunda ise aşağıdaki gibi açıklamıştır.

> “Z: Olabilir...ıı... Kare prizma yaparsak.
> A: Nasıl olur o?
> Z: Mesela onu denedim, ama çok bulamadım yani beceremedim galiba. Şurayı 3 yaparız.
> A: Evet
> Z: Şu kısımları da 5 olcak şekilde.
> A: Neyle neyin çarpımına bakıyosun? Kare prizma dedin ya sen.
> Z: Bunda bu şey, uzun kenarla kısa kenardaki küp sayılarını çarpıp yüksekliği bunun böyle… Atıyorum şöyle olsaydı yüksekliği 2 olacaktı.
> A: Oldu mu 45 tane.
> Z: Hayır bu temsili olarak şu an. 45 tane… Bu 5, 3 daha… Şey yine koyucam… Bunun şey yapıcam bi dakka hocam şöyle... şöyle
> A: Hmm bu katı da koycaksın. Tamam, koydun varsayalım.
> Z: Hmm şimdi burda 15 tane var. Tabanında 15, 15, 15, 45 ediyor böyle yapınca ben.
> A: Neleri kaç oluyor?
> Z: Neleri, tabanı mesela uzun kenar ve kısa kenardaki küpleri çarpınca alt tabanın hacmini 15 küp buluyoruz…15 küp sonra 45’ i elde edebilmek için 45’i 15’e bölüyorum 3 çıkıyor. Yüksekliği de 3 olmuş oluyor.
> A: hıhı. 15’le 3 ü napıyosun peki?
> Z: Çarpıyorum sonra da hacmini bulmak için.”

Hiçbir ayrıtın 1 br olmaması istendiğinde, Zehra biraz düşünerek kare prizma yapabileceğini söylemiştir. Muhtemelen 45’in bölenlerini düşünerek, yaptığı şeklin kare prizma olacağına kanaat getirmiş ve prizmanın taban ayrıtlarının 3 ve 5 birim, yüksekliğinin ise 3 birim olacağını ifade etmiştir. Prizmanın tabanına 15 tane birim küp dizdikten sonra ise, üç boyutlu ve katmanlı yapıyı ifade ederek, üç tane 15 birim küpü üst üste koymuş ve böylece 45’i elde edebileceğini söylemiştir. Ayrıca, yaptığı işlemi oluşturduğu formüllerle ilişkilendirmiş, uzun kenar ve kısa kenar uzunluklarının kaçar birim olduğunu düşünerek, bunların çarpımının taban hacmini verdiğini iddia etmiştir. Fakat tabanı oluşturan birim küplerin yüksekliği 1 birim olduğu için, yüksekliğin hesaba katmaması, Zehra’nın taban hacmi olarak düşündüğü hesaplamasının sonucunu değiştirmemiştir. Yani, Zehra'nın taban hacmi hesaplamasında 1 birim yüksekliği hesaba katmamasının sebebinin, taban olarak ifade ettiği yerin üç boyutlu yapısını ihmal etmesinden kaynaklanmadığı düşünülmektedir. Zehra, 1 birim yüksekliğin (çarpıma dahil etse de) işlemin sonucunu değiştirmeyeceğinin farkındadır. Çünkü görüşme sürecinde taban alanı ve taban hacmi kavramlarını tartışmış, oluşturduğu modeli (tabanı oluşturan birim küpleri) düşünerek, taban hacmi bulduğu konusunda karar kılmıştır. Görüşmenin sonunda Zehra'nın bulduğu hacim formüllerini birbiri ile ilişkilendirerek, gerçekleştirdiği *süreç*leri *enkapsüle* ettiği ve bu formülleri farklı durumlar için kullanarak *genelleyebildiği* görülmüştür.

Birinci bağlamsal problem için yapılan ilk klinik görüşmede Zehra'nın prizmanın içerisine hiç boşluk kalmayacak şekilde yerleştirilen birim küp sayısının o prizmanın hacmi olduğu sonucunu *enkapsüle* edemediği ve zayıf bir *koordinasyona* sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Fakat klinik görüşme sonrasındaki sınıf içi tartışmalar ve sınıf içerisinde çözülen problemlerin Zehra'nın ayrıtlar ve birim küpler ilişkilendirmesini olumlu etkilediği düşünülmektedir. Böylece, prizmanın içerisindeki birim küp sayısının o cismin hacmi olduğu sonucunu *enkapsüle* ederek bu sonucu farklı problem durumları için de kullanabilmiş ve var olan şemasını geliştirmiştir. Bu görüşmede de hacim formülünü nesne düzeyinde kavramsallaştırabilmesi ve genellemeler yapabilmesi bunun bir göstergesidir.

4.3 Hacmi Kavramsallaştırırken Gerçekleştirilen Dikey Matematikleştirme Süreçleri

Çalışmanın katılımcılarını oluşturan dört öğrencinin sınıf içerisinde ve yapılan klinik görüşmelerde hacmi öncelikle prizmanın içerisindeki birim küp sayısı olarak nasıl yapılandırdıkları, sonrasında hacim formülünü nasıl yapılandırdıkları APOS teorik çerçevesinde incelenmiştir. Bu süreçte, öğrencilere verilen gerçek yaşam durumlarına uygun iki bağlamsal problemle informal bilgilerini açığa çıkarmak amaçlanmıştır. Problemlerin grup çalışmasında organize edilip çözülmesi sürecinde ve yapılan klinik görüşmelerde, katılımcıların informal bilgilerini nasıl formalleştirdikleri, yatay ve dikey matematikleştirme süreçleri incelenmeye çalışılmıştır. Sonrasında, öğrencilerin 45 birim küp kullanarak prizma oluşturma bağlamını, grup içerisinde 64 birim küp alacak prizmalar için düşünmeleri istenmiş ve genellemeye ulaşmaları amaçlanmıştır.

Ayrıca, görüşme süresince öğrencilerin yaptıkları ilişkilendirmeler, ulaştıkları algoritmalar ve gerçekleştirdikleri matematiksel süreçler incelenerek, dikey matematikleştirme süreçleri irdelenmiştir. Yapılan bu iki görüşmeye ek olarak, öğrencilerin dikey matematikleştirme süreçlerini nasıl geliştirdikleri, yani keşfettikleri çözümü ya da metodu daha ileri bir seviyeye nasıl taşıyabileceklerini incelemek amacıyla üçüncü bir görüşme gerçekleştirilmiştir. Yapılan bu son görüşmede, öğrencilerden etkinlik kâğıdındaki ve ev ödevindeki bazı soruları nasıl çözdüklerini açıklamaları istenmiştir. Ayrıca, öğrencilerin hacim kavramı ile ilgili ulaştıkları formül ve metodu kullanmalarını sağlayacak iki ayrı problemin de çözülmesi istenmiştir (Ek 2).

Bu bölümde, katılımcıların dikdörtgenler prizması, kare prizma ve küp arasındaki ilişkiyi nasıl oluşturdukları ve görüşmede verilen iki problemin çözümünü nasıl düşündükleri incelenecektir.

4.3.1 Katılımcıların Kare Prizma, Dikdörtgenler Prizması ve Küp Arasındaki İlişkiyi Oluşturma Süreçleri

Katılımcılar klinik görüşmelerde prizmalar hakkında konuşurken, kare prizma, dikdörtgenler prizması ve küpü isimlendirmiş ve kendi tanımlarını oluşturmuşlardır. Bu tanımlardan ve araştırmacının sorularından yola çıkarak ise bu üç prizmayı ilişkilendirmeye çalışmışlardır.

4.3.1.1 Burcu'nun Kare Prizma, Dikdörtgenler Prizması ve Küp Arasındaki İlişkiyi Oluşturması

Burcu ikinci bağlamsal problemin çözümü ile ilgili yapılan görüşmede, ayrıtları 3, 3, 5 br olan prizma için "*dikdörtgenler mi, yoo kare*" diyerek kare prizma olarak adlandırmıştır. Kare prizmayı tanımlaması istendiğinde ise, "*tabanları kare olan… kısa kenarları yani kenarları da dikdörtgen olan*" şeklinde, yan yüzleri kenar olarak ifade etmiştir. Ancak, bu durumun terminolojik bir hatadan kaynaklandığı düşünülebilir. Ayrıca, kendi oluşturduğu prizmayı tekrar incelediğinde tabanının değil, yan yüzlerinin kare olduğunu fark etmiş ve bu prizmanın da bir kare prizma olduğunu söylemiştir.

Dikdörtgenler prizması için, "*her iki kenarı eşit olan… Bazı kenarları farklı olan… İki kenarı bir olan*" gibi tanımlamalar yapmış, hangi kenar uzunluklarının eşit olduğu sorulduğunda ise karşılıklı olan kenarların eşliğinden söz etmiştir. Ayrıca, her kare prizmanın bir dikdörtgenler prizması olmadığını "*çünkü kare prizma ve dikdörtgenler prizması farklı şeyler, yani kare prizma bir yüzeyi kare olan diğeri de karşılıklı kenarları aynı olan prizma*" şeklinde açıklayarak söylemiştir. Sonrasında, oluşturduğu kare prizma gösterilerek, dikdörtgenler prizmasının tanımını hatırlaması istenmiştir. Burcu "*karşılıklı kenarları…*" diyerek bu tanımın kare prizma için de doğru olduğunu görmüş ve her kare prizmanın bir dikdörtgenler prizması olduğunu ifade etmiştir. Dikdörtgenler prizmasının kare prizma olmadığı durumlar olduğunu da eklemiştir.

Küpü ise "*her yüzeyi kare olan prizma*" diyerek tanımlamış, kare prizma ile ilişkilendirerek her yüzeyi kare olduğu için karşılıklı yüzeylerinin zaten kare olacağı sonucuna ulaşmıştır. Bu yüzden her küpün bir kare prizma olacağını söylemiştir. Her kare prizmanın bir küp olmayacağını ise "*küpün her kenarının eşit olması gerekiyor ama bazı kare prizmalarda dikdörtgenler de var*" şeklinde açıklamış, bu iki prizmanın ayırt edici özelliklerinin farkında olduğunu göstermiştir.

4.3.1.2 Irmak'ın Kare Prizma, Dikdörtgenler Prizması ve Küp Arasındaki İlişkiyi Oluşturması

Irmak ilk bağlamsal problemin çözümü için yapılan ilk klinik görüşmede, içini birim küplerle doldurduğu kutuların dikdörtgenler prizması olduğunu söylemiş ve "*her yüzü dikdörtgenden oluşan prizma*" olarak tanımlamıştır. Ayrıt uzunlukları 13,3,3 br olan prizmanın ne olduğu sorulduğunda ise kare prizma olduğunu söyleyerek, "*sağ sol ya da üst alt, yani iki yüzü kare olan prizma*" şeklinde tanımlamıştır. Prizmaların büyüklüğünü bulmak için kullandığı birim küplerin ise her yüzünün kare olduğunu söylemiştir. Son görüşmede ise başlangıçta her kare prizmaya dikdörtgenler prizması diyemeyeceğini söyleyen Irmak, aşağıdaki konuşmalardan sonra bu fikrinden vazgeçmiştir.

> "A: Dikdörtgenler prizmasının tanımını yapsana…
> I: Her yüzü dikdörtgenden oluşan prizma.
> A: Karşılıklı ayrıt uzunlukları ne birbirine?
> I: Eşit.
> A: Kare prizmada da karşılıklı ayrıt uzunlukları birbirine ne?
> I: Eşit
> A: ... Her kare prizma bir dikdörtgenler prizması mıdır?
> I: Öyle mi oluyor o zaman evet oluyor."

Böylece Irmak, kare prizma ile dikdörtgenler prizması arasındaki ilişkiyi fark etmiştir. Fakat bu durumun tersinin geçerli olmayacağını, "*her dikdörtgenler prizmasına kare prizma diyemeyiz*" şeklinde ifade etmiştir.

4.3.3 Mert'in Kare Prizma, Dikdörtgenler Prizması ve Küp Arasındaki İlişkiyi Oluşturması

Yapılan ilk klinik görüşmede dikdörtgenler prizmasını tanımlaması istendiğinde, Mert tanımını yapmadan önce çizmek istemiştir. Dikdörtgenler prizmasının üç boyutlu görünümünü bireysel çalışma kâğıdına çizmeye çalıştıktan sonra ise "*bildiğimiz dikdörtgenler prizması işte*" diyerek, ayrıtlardan ve kenarlardan oluştuğunu söylemiştir. Küp ve kare prizmayı ise aşağıdaki gibi ifade etmiştir.

> "A: kare prizma ne demek?
> M: bu (büyük küpü gösteriyor)
> A: küp ne demek
> M: küp kare prizması zaten
> A: … İkisi aynı şey mi?
> M: evet"

Mert'in ikinci klinik görüşmede oluşturduğu bir prizmanın (karşılıklı iki yüzü kare olan) kare prizma olduğunu söylemesi kare prizmayı bildiğini düşündürebilir. Üçüncü klinik görüşmede kare prizmanın ne olduğu sorulduğunda ise, problemi çözmek için kullandığı birim küpleri göstermesi ve küpün bir kare prizması olduğunu söylemesi, kare prizma ve küpü ilişkilendirdiği düşündürebilir. Fakat kare prizma ile küp arasında bir fark olmadığını ifade etmesi, bu iki prizmayı ayırt edemediğini göstermektedir. Somut bir şekilde gözlemleyebildiği bu üç prizma arasındaki fark sorulduğunda, "*görünüş farkı*" diyerek, prizmaları matematiksel özelliklerine göre sınıflamak yerine görünüşlerini baz aldığını göstermiştir.

4.3.4 Zehra'nın Kare Prizma, Dikdörtgenler Prizması ve Küp Arasındaki İlişkiyi Oluşturması

Zehra ikinci klinik görüşmede ayrıt uzunlukları 3, 3, 5 br olan prizmayı oluşturduktan sonra, bu prizmanın kare prizma olduğunu söylemiş ve "*karşılıklı iki yüzü kare olan*" şeklinde tanımlamıştır. Dikdörtgenler prizmasını ise "*karşılıklı yüzeyleri dikdörtgen olan bir prizma*" şeklinde tanımlamıştır. Son klinik görüşmede ise en büyük hacimli dikdörtgenler prizmasının sorulduğu soruda "*şöyle yapsak en büyük hacimli olması için dikdörtgen prizma diyor ama benim yaptığım şu an kare prizma oluyor"* diyerek, her kare prizmanın bir dikdörtgenler prizması olmadığını düşünmüştür. Bunun üzerine aşağıdaki gibi sorular yöneltilmiştir.

> "A: …Bu kare prizmayı düşündüğümde karşılıklı ayrıtların uzunlukları birbirine eşit mi?
> Z: Hayır. Bütün hepsi eşit değil.
> A: Mesela burayla bura eşit mi?
> Z: Burayla bura eşit.
> A: Burayla bura eşit mi?
> Z: Bu kenarla bu kenarı eşit.
> A: …Karşılıklı ayrıt uzunlukları eşit mi?
> Z: O zaman dikdörtgenler prizması bu.
> A: Her kare prizma dikdörtgenler prizması mıdır?
> Z: Evet.
> A: Her dikdörtgenler prizması kare prizma mıdır?
> Z: Hayır.
> A: Peki, her küp bir kare prizma oluyor mu?
> Z: Küp… Evet oluyor."

Yukarıdaki gibi düşünmelerden sonra, Zehra kare prizmanın da karşılıklı ayrıt uzunluklarının birbirine eşit olduğunu anlamıştır. Böylece, dikdörtgenler prizmasının tanımının kare prizmaya için de geçerli olduğunu fark etmiş ve her kare prizmanın bir dikdörtgenler prizması olduğu sonucuna ulaşmıştır.

4.3.2 Katılımcıların Son Klinik Görüşmede Gerçekleştirdikleri Formal Problem Çözme Süreçleri

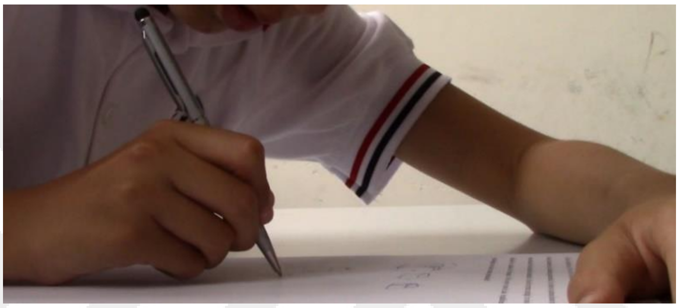
Üçüncü görüşme sürecinde katılımcılara iki ayrı problem sorulmuştur. İlk problemde ayrıtları 3, 10 ve 20 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki bir kutunun içerisindeki meyve suyunun, taban ayrıtı 5 cm olan kare prizması şeklindeki bir kaba boşaltılacağı söylenmiş ve bu işlem için kabın yüksekliğinin alabileceği en küçük değer sorulmuştur. İkinci problemde ise kenar uzunlukları 16 ve 20 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir kâğıtla oluşturulabilecek en büyük hacimli dikdörtgenler prizmasının hacminin bulunması istenmiştir. Bunun için katılımcıların ihtiyacı düşünülerek bu ebatlardaki kâğıtlar hazır bekletilmiştir (Ek 2).

Katılımcılardan Zehra, ilk problemi okumuş, "*önce kabın içindeki meyve suyunu bulmamız gerekiyor"* diyerek problemi anladığını göstermiştir. *Problemin çözüm aşamasında ise, 3 10 20, ... 30, ... 6, ... 600 oluyor*" diyerek dikdörtgenler prizması şeklindeki kabın içerisindeki meyve suyu miktarını bulmuştur. Irmak ise soruyu okuduktan sonra kare prizmanın yüksekliğinin en küçük değerini sorduğu için *"en az*

1 olabileceğini" ifade etmiştir. Sonrasında "*Sığar öbür kenar uzunluğu, ha kare prizma, ha kare prizma diyor demi. Ama bir ayrıt hmm tamam şimdi anladım, o bir ayrıt her şey olabilir diye düşünmüştüm ben, ama karenin bir kenarı olabilir"* diyerek önce soruyu yanlış anladığını ifade etmiştir. Soruyu tam olarak anladıktan sonra, üç ayrıt uzunluğunu çarparak dikdörtgenler prizmasının hacmini ve prizmanın içinde kaç cm^3 meyve suyu olduğunu bulacağını söylemiştir. Burcu ve Mert ise başlangıçta soruyu anlamamış, Mert kendi istediği ile Burcu ise araştırmacının yönlendirmesiyle soruda bahsedilen dikdörtgenler prizmasını çizerek, ayrıtlarını belirtmişlerdir. Bu çizimin Mert ve Burcu'nun soruda verilenleri zihinlerinde canlandırmalarına ve görsellemelerine yardımcı olduğu düşünülmektedir. Mert dikdörtgenler prizmasının (soruda verilen) ayrıtlarının uzunluğunu belirlemek konusunda zorlanırken, Burcu ayrıt uzunluklarını doğru şekilde belirtmiş ve hacmi bulmak için diğer iki katılımcı gibi üç ayrıtın uzunluğunu çarpmıştır. Mert ise soruyu anlamlandırmak için bu hesaplamayı yapmadan kare prizmayı da çizmek istemiş ve yüksekliğini 5 cm olarak tahmin etmeye çalışmıştır. Taban ayrıtlarının 5 cm olduğu, yüksekliğin bilinmediği söylendiğinde ise, kare prizma ile dikdörtgenler prizmasının yüksekliklerinin aynı olacağını söylemiş, sonrasında bu fikrinden de vazgeçerek kare prizmanın yüksekliğinin de en az 20 cm olacağını belirtmiştir (dikdörtgenler prizmasının en uzun ayrıtı). Bu süreçte, Mert'in problemi tam olarak anlamadığı söylenebilir.

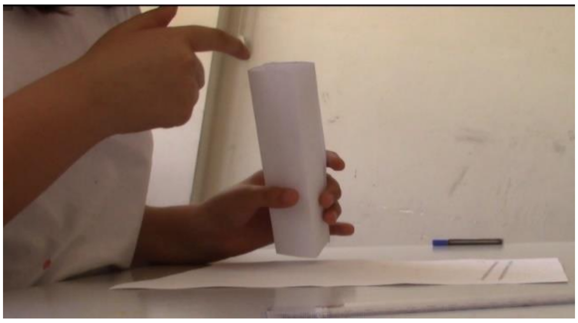
Diğer üç öğrenci, dikdörtgenler prizmasının hacmini üç ayrıtın çarpımı olarak hesaplayıp içerisindeki meyve suyu miktarını 600 cm^3 olarak bulduktan sonra, kare prizmanın taban ayrıtlarının 5 cm olduğunu ifade etmişlerdir. Kare prizmanın yüksekliğini bulmak için ise, Zehra "*yüksekliğini soruyor… 5 kere 5, 25 ediyor. 600'ü de 25'e bölücez*" demiştir. Irmak "*5, 5 25, yüksekliği yani kalan uzunluğu bulmak için tüm şeye bölerdim. 24. Bu en az herhalde yani*" şeklinde ifade ederken, Burcu "*600 bölü 25*" diyerek meyve suyu miktarını kare prizmanın taban alanına böleceklerini söylemişlerdir. Ayrıca yaptıkları çözümü değerlendirerek, yüksekliğin 24 cm'den az olma durumunda meyve suyunun taşacağını veya kaba sığmayacağını, fazla olma durumunda ise kutunun içinde boşluk kalacağını ifade etmişlerdir.

Mert, hacim formülünü üç ayrıt uzunluğunun çarpımı olarak yapılandırmasına ve kare prizmanın taban ayrıt uzunluklarını bilmesine rağmen, yüksekliği bulmak için herhangi bir hesaplama yapmamıştır. Bunun yerine yüksekliğin 20 cm olduğu konusunda ısrar etmiştir. Bu yüzden, yüksekliğin 20 cm olduğu durumda bu prizmanın hacmini hesaplaması istenmiş ve böylece bilişsel çatışma ortamı oluşturulmaya çalışılmıştır. Mert hesaplamalarını yaptıktan sonra, 500 cm^3 cevabına ulaşmış ve "*o zaman uzatcaz… En az 10 cm uzatcaz*" diyerek tahminde bulunmuştur. Bunun üzerine hacim formülünü bireysel çalışma kâğıdına yazması ve bildiklerini bu formüller üzerinden göstermesi istenmiştir. Mert "$uzunluk1\ x\ uzunluk2\ x\ yükseklik$" ve "$taban\ alanı\ x\ yükseklik$" formüllerini yazdıktan sonra, hacmi 600 cm^3-, taban alanını 25 cm^2 olarak belirtmiştir. Bu formüllerden yararlanarak, yüksekliği bulmak için 600'ü 25'e bölmesi gerektiğini söylemiştir (Şekil 31).



Şekil 31: Mert'in problem çözüm sürecine ait ekran görüntüsü

İkinci problemde, katılımcılar problemi anladıktan sonra, ihtiyaç duydukları (kenar uzunlukları 16 ve 20 cm) dikdörtgen şeklindeki kâğıt kendilerine verilmiştir. Mert' in dikdörtgenler prizmasının hacmi bağıntısını anlamlı bir şekilde yapılandırmakta zorluk çektiği düşünüldüğü için bu problem kendisine yöneltilmemiştir. Bunun yerine etkinlik kâğıdında çözmekte zorlandığı problemleri çözmeye çalışması istenmiştir. Burcu herhangi bir hesaplama yapmadan, yüzey alanı ve hacim kavramları arasında bir karmaşa yaşayarak prizmaları dikdörtgen şeklindeki aynı kâğıttan oluşturduğu için, hacim büyüklüklerinin aynı olacağını ifade etmiştir. Irmak ve Zehra ise dikdörtgen şeklindeki kâğıdı katlayarak prizma oluşturmakta zorlanmışlar, bunun yerine problemde bahsedilen kâğıdın kenar uzunluklarını dikkate alarak, oluşturabilecekleri dikdörtgenler prizmasının ayrıt uzunluklarını belirlemiş ve hacmini hesaplamayı denemişlerdir (Şekil 32).



Şekil 32: Zehra'nın kâğıdı katlayarak prizma oluşturma çalışması

Burcu başlangıçta kâğıdı 20 cm olan kenardan katlayarak taban ayrıtları 2 ve 8, yüksekliği 16 cm olan prizmaya ulaşmaya çalışmış ve hacmini 256 cm^3 olarak bulmuştur. Ayrıca, hacmi daha fazla bir prizma olamayacağını iddia etmiştir. Irmak ise taban ayrıtları 1 ve 9 cm, yüksekliği 16 cm olarak alıp, hacmi 162 cm^3 bulmuştur. Prizmanın bir kenarı 1 cm olduğu için artık azaltamayacağını ve bu yüzden oluşturduğu bu prizmanın hacminin en büyük olduğunu söylemiştir. Zehra ise arkadaşları gibi kâğıdı 20 cm olan kenardan katlamaya çalışmış fakat onların tersine dört eş parçaya katlayarak kare prizma elde etmiştir. Sonrasında, kare prizma ve dikdörtgenler prizması arasındaki ilişkiyi sorgulamış ve taban ayrıtları 5 cm olan prizmanın hacmini 400 cm^3 olarak bulmuştur.

Hacmi en büyük olan prizmayı bulduğunu iddia eden Burcu'dan emin olması istendiğinde, taban ayrıtları 6 ve 4, yüksekliği 16 cm olan prizmanın hacmini 380 cm^3 olarak bulmuştur. Hacmin hangi durumda büyüdüğü sorulduğunda ise "*sayıları değiştirdiğim zaman*" demiştir. Sonrasında sayıları nasıl değiştirmesi gerektiği ile ilgili herhangi bir strateji üretmeden taban ayrıtları 10'a 1 cm ve 7'ye 3 cm olan prizmaların hacmini hesaplamaya çalışmıştır. Irmak ise başlangıçta 1 cm olarak düşündüğü taban ayrıtının uzunluğunu birer cm artırarak, sırasıyla taban ayrıtları 2 ve 8 cm, 3 ve 7 cm olan prizmaların hacimlerini bulmuştur. Burcu'nun aksine taban ayrıtlarının uzunlukları toplamının sabit olduğunu fark eden Irmak "*kenarlar arasındaki farkı en aza indirmem gerek*" diyerek stratejisini belirlemiş ve bu durumun kare prizmada yani taban ayrıt uzunlukları 5 cm olduğu zaman mümkün olacağını söylemiştir.

Arkadaşlarının aksine direkt kare prizmanın hacmini hesaplayan Zehra, 16 cm olan kenarı katladığı durumda taban ayrıtı 4 cm, hacmi 320 cm^3 olan prizmayı bulmuştur. Ayrıca, 20 cm olan kenardan katladığında hacmin daha büyük çıktığını ifade etmiştir.

Dikdörtgenler prizmasının tabanı daha küçük olacağından dolayı hacminin de daha küçük olacağını söylemiş ve taban ayrıtları 2 ve 6 cm, 3 ve 5 cm olan prizmaların hacmini hesaplayarak örnek vermiştir. Bu durumun sebebini ise, "*taban kare olduğunda... Kenar uzunluğu arttığı için hacmi… Taban hacmi daha büyük oluyor*" şeklinde belirtmiş ve kare prizmada sayılar arasındaki farkın en aza indiğini söylemiştir. Hacmi en büyük prizmanın ayrıt uzunluklarının 6, 4 ve 16 cm olduğunu söyleyen Burcu ise birkaç denemeden sonra taban ayrıt uzunluklarının 5 cm olabileceğini söylemiş ve 400 cm^3'e ulaşmıştır. Sonrasında elindeki kâğıdı 16 cm olan kenarından katlayarak, hesaplama yapmadan yüksekliğin 20 cm, taban ayrıtlarının 4 cm olduğu durumda hacmin daha küçük çıkacağını ifade etmiştir. Burcu hacmin en büyük olabilmesi için ayrıt uzunluklarının eşitlenmesi gerektiğini ifade etmiştir fakat bunun nedenini, tam olarak açıklayamamıştır. Irmak ise hacimleri yüksekliği 20 ve 16 cm olan kare prizmaların hacmini hesapladıktan sonra, sebebini "*tabanın kenarı daha etkili, tabana daha çok alıyor çünkü*" şeklinde açıklayarak duruma özgü bir model geliştirmiştir. Görüşmenin sonunda ise "*toplamları aynı olan iki sayının çarpımı aralarındaki fark en küçük olduğunda en fazla çıkar*" diyerek genelleme yapabilmiştir.

BEŞİNCİ BÖLÜM

V. SONUÇ, TARTIŞMA ve ÖNERİLER

5.1 Sonuç ve Tartışma

Bu çalışmada 6. sınıf öğrencilerinin dikdörtgenler prizmasının hacmi kavramını oluşturmaları amacıyla GME kuramına uygun bir öğrenme ortamı hazırlanmıştır. Öğrencilerin kavramla ilgili ilişki ve kuralları kendi kendilerine oluşturma ve matematikleştirme süreçleri desteklenmiştir. Kavram oluşturma süreçlerini derinlemesine incelenmesi amacıyla ise, APOS teorik çerçevesinden yararlanılmıştır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar, araştırma soruları çerçevesinde organize edilerek ve ilgili literatür çerçevesinde tartışılarak sunulmuştur.

Öğretim ortamının GME'ye göre tasarlanması, öğrencilerin gerçek yaşamda da bu tarz problemlerle karşılaşabileceklerinin farkında olmalarını ve hacim kavramının hangi ihtiyaçtan ve nasıl ortaya çıktığını anlamlandırmalarını sağlamaktadır. Böylece öğrencilerin prizmanın hacmi kavramını anlamlı bir şekilde oluşturmaları sağlanabilir. Hacim kavramının öğretiminde öğrencilere sunulan problemlerin somut materyallerle desteklenmesi, öğrencilerin çözüme daha kolay ulaşmalarını sağlamakta ve üç boyutlu uzamsal yapılanmalarını desteklemektedir (Battista ve Clements, 1996; Clements ve Sarama, 2009). Öğretim süreci ve klinik görüşmelerin somut materyallerle desteklenmeye çalışıldığı bu çalışmada da, öğrencilerin üç boyutlu yapıları zihinlerinde daha kolay bir şekilde hayal edebildikleri ve bu materyalleri kullanarak düşüncelerini daha iyi ifade edebildikleri görülmüştür. Ayrıca, hacmi ölçmek için öğretim ortamlarında kullanılabilecek paketleme (packing) ve doldurma (filling) olarak adlandırılan iki ayrı yöntemden bahsedilmiştir (Clements ve Sarama, 2009). Bu araştırmada birinci bağlamsal problemde, öğrencilere daha kolay gelen doldurma bağlamı, ikinci problemde ise, hacim formülünün edinilmesinde daha derin bir anlam sunan ve üç boyutlu uzamsal yapılanmayı destekleyen paketleme bağlamı kullanılmıştır. Kullanılan bu bağlamların öğrencilerin üç boyutlu uzamsal yapılanmalarını desteklemede ve prizmanın katmanlara dayalı yapısını anlamlandırmalarında etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

5.1.1 Prizmanın Hacmini İçini Tam Dolduran Birim Küp Sayısı Olarak Kavramsallaştırma Süreci ile İlgili Sonuçlar

Hacim kavramı ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde, genelde alan ve hacim kavramlarının birbirine karıştırıldığı, boyut kavramının tam olarak anlamlandırılamadığı belirtilmiştir (Clements ve Sarama, 2009; Karaca, 2014). Ayrıca, bu hataların önüne geçmenin, kavramın sağlam temeller üzerine atılması ile yani alan kavramının eşit paylaştırma, yüzeyi eş birimlere parçalama bağlamları ile birlikte anlamlı bir şekilde öğrenilmesi ile mümkün olabileceği söylenmektedir. Böylece öğrencilerin, eş birimlerin, alanı hesaplanılacak olan yüzeyde nasıl organize olduğunu anlayarak çarpımsal düşünebilecekleri vurgulanmaktadır (Ben Chaim ve diğerleri, 1985; Clements ve Sarama, 2009). Bu çalışmanın ilk aşamasında dikdörtgenler prizması şeklindeki üç kutudan en küçük olanına nasıl karar verecekleri bağlamı ile ilgili bir problem sorulmuştur. Problemin çözümü sürecinde katılımcıların, hacmi prizmanın içine doldurulan birim küp sayısı ile kavramsallaştırmalarında literatürde bahsedilen durumlara benzer sonuçlar elde edilmiştir. Örneğin, katılımcılardan biri başlangıçta prizmaların yüzey alanlarını hesaplayarak kutuların ebatlarını karşılaştırmaya çalışmıştır. Fakat sonrasında, prizmaların hacmini ve yüzey alanını hesaplarken ayrımın farkına varmış ve çarpımsal düşünmeyi gerçekleştirebilmiştir. Böylece hacim kavramını prizmanın üç boyutlu uzamsal yapısı ile birlikte anlamlandırarak yapılandırabilmiştir. Ayrıca, bazı durumlarda, katılımcıların küpü kare şeklinde ifade ettikleri görülmüştür. Ancak bu durum katılımcıların kavram oluşum süreçlerini etkilemediği ve üç boyutlu uzamsal yapılanmalarında herhangi bir eksiklik olmadığı için terminolojik bir hata olarak adlandırılmıştır.

Katılımcıların APOS teorik çerçevesinin aşama ve mekanizmalarında benzer ve farklı durumlar gerçekleştirdikleri gözlenmiştir. Kavramsallaştırma sürecinin *eylem* aşamasında katılımcılardan birinin, grup içerisinde duyduğu hacim formülünde verilenleri yerine yazarak bağıntıyı anlamlandırmadan sonuca ulaştığı görülmüştür. Grup çalışmasında bağıntının anlamlandırılamaması, katılımcıyı prizmanın ebatını kalemle ölçme yöntemine yöneltmiştir. Benzer durumu aynı katılımcı klinik görüşmede de gerçekleştirmiştir. Başka bir katılımcı ise, grup çalışmasında ve klinik görüşmede prizmaların yüzey alanlarını hesaplayarak veya taban alanının yüksekliğe oranını bularak en küçük kutuya ulaşabileceğini söylemiştir. Bu iki yöntemin sonucunun aynı çıkmamasıyla birlikte bilişsel çatışma yaşayarak, oranla hacim arasındaki ilişkiyi (taban alanları aynı, yükseklikleri farklı olan kutuların oran ve hacim karşılaştırması) irdelemiştir.

Eylem aşamasında katılımcıların yüzey alanını hesaplama, oran bulma gibi yöntemlere ek olarak kutuların ebatlarını karşılaştırmak için farklı nesnelerle ölçme girişiminde bulundukları görülmüştür. Bu ölçme işlemi prizmanın içerisine nesneleri doldurma ile gerçekleştirildiği gibi, sadece kenar uzunluklarının bu nesnelerle ölçülmesi ile de gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler bu aşamada, kutuları birbirinin içerisine koyarak (capacity direct comparer), prizmanın ayrıt uzunluklarını bir kalem kapağı ve/ya kalemin kendisi ile ölçerek, farklı birim küpleri birlikte veya ayrı ayrı kutuların içerisine doldurarak (capacity relater and repeater/ partial 3D structurer) karşılaştırmaya çalışmışlardır. Öğrencilerin *eylem* aşamasında geliştirdikleri duruma özgü stratejilerin literatür ile uyumlu olduğu görülmüştür (Clements ve Sarama, 2009).

Hacim ölçmenin düzgün bir şekilde anlamlandırılması ve içselleştirilebilmesi birim kavramının oluşturulması ile oldukça ilişkilidir (Battista ve Clements, 1996; Esen ve Çakıroğlu, 2012). Bu çalışmada standart ve standart olmayan birimler kullanılmış, kalemin kapağı, farklı ölçülerdeki birim küpler prizmaların hacmini ölçmek için birim olarak kabul edilmiştir. Ayrıca, birim oluşturma fikri ile birlikte, prizmaların hacmini tam olarak ölçmek için boşluk kalmaması fikri içselleştirilmiştir. Kalemin kapağı ve büyük olan birim küplerle ölçüldüğünde boşluk kaldığı için, öğrenciler 1 br^{3}' lük küçük birim küplerin bu üç prizma için de uygun olduğunu belirterek *süreç* aşamasına geçmişlerdir. *Süreç* aşamasında ise Battista ve Clements'in fikri ile uyumlu olarak (1996), birimlerin nasıl yerleştirildiğini düşünen, birimler arasında ilişkiler oluşturup bu birimleri birleştirerek yeni birimler oluşturan ve bu yeni birleşik birimlerin uygun bir şekilde öteleyen (veya ötelemeyi hayal edebilen) öğrencilerin, üç boyutlu uzamsal yapılanmayı doğru bir şekilde anlamlandırabildiği ve doğru koordinasyonları kurabildiği görülmüştür. Ayrıca, öğrenciler kullandıkları yöntemleri ilişkilendirerek, tüm prizmalar için geçerli bir yöntem bulmaya çalışmışlardır. Prizmanın ayrıtları ve birim küpler arasında *koordinasyon* kurarak ise prizmaların katmanlara dayalı yapısını ifade etmeye çalışmışlardır. Prizmanın katmanlara dayalı yapısını anlamlı bir şekilde ifade eden katılımcılar strateji A'yı kullanarak, öncelikle taban katmanının kaç tane birim küpten oluştuğunu, satır ve sütun ilişkisi ile düşünmüşlerdir. Böylece bir katmandaki birim küp sayısını hesaplamışlardır. Sonrasında ise prizmanın içerisinde bu katmanın kaç kere tekrar ettiğini sayarak, prizmanın içerisindeki toplam birim küp sayısını hesaplamışlardır. Böylece prizmanın içerisine hiç boşluk kalmayacak şekilde yerleştirilen birim küp sayısının hacmi verdiği sonucunu *enkapsüle* etmişlerdir. *Eylem* aşamasında gerçekleştirdiği alan ve oran yöntemlerine çok odaklanan katılımcı ise, prizmanın katmanlara dayalı yapısını tam olarak anlamlandıramamış, bu hususta kafası karışmıştır. Her prizma için tabandaki birim küp sayısını ve yüksekliği oluşturan birim küp sayısını bulduktan sonra, bu iki süreci bir bütün olarak düşünememiştir. Bu yüzden bu katılımcının *koordinasyonunda* ve *enkapsülasyonunda* eksiklik olduğu düşünülmektedir. Böylece üç katılımcının bu kazanımı nesne düzeyinde kavramsallaştırdığı, sadece birinin bu klinik görüşme boyunca zayıf *koordinasyona* sahip olduğu ve *süreç* aşamasında kalarak nesne düzeyinde kavramsallaştıramadığı görülmüştür.

Katılımcıların hacim kavramı için "kutunun tamamen dolduğu durum, içinin alanı, kutunun içine ne kadar sığdığı" gibi didaktik fenomenlere sahip oldukları görülmüştür. Öğrencilerin *eylem* aşamasında oluşturdukları duruma özgü modeli, *süreç* aşamasında durumdan bağımsız ve daha dinamik bir hale getirdikleri görülmüştür. *Süreç* aşamasında birim küplere dayalı modeli somut materyallerle görselleştirerek kullanırken, nesne aşamasında somut materyallere ihtiyaç duymadan ifade edebildikleri, başka durumlarda da oluşturdukları bu modeli kullanabildikleri ve genelleyebildikleri saptanmıştır.

5.1.2 Prizmanın Hacim Formülü ile İlgili Sonuçlar

Yapılan çalışmalar, öğrencilerin hacim ile ilgili formül ve ilişkileri kendilerinin oluşturmalarının ve öğretim ortamlarının bu şekilde tasarlanmasının gerekliliği vurgulamaktadır (Olkun, 2003). Bu çalışmada da öğrencilerin kendi kavramlarını oluşturmalarını destekleyen GME yaklaşımının kullanılmasının ve oluşturulan bağlamsal problemin, hacim formülünü kavramsallaştırma süreçlerini olumlu bir şekilde etkilediği düşünülmektedir. Prizmaların içerisindeki birim küpleri sayma stratejileri ile ilgili yapılan çalışmalar incelendiğinde ise, daha az sayıda birim küp içeren prizmalarla uğraşıldığında, daha gelişmiş stratejilerin geliştirilebileceği saptanmıştır (Clements ve Sarama, 2009). Bu yüzden, çalışmanın ikinci bağlamsal probleminde, katılımcılardan öncelikle 45 birim küp kullanarak oluşturabilecekleri prizmaları tasarlamaları istenmiştir. Literatüre paralel olarak, az sayıda birim küple işlem yapmaya başlayan katılımcıların kavramsallaştırma süreçlerinin desteklendiği görülmüş ve prizmanın içerisindeki birim küp sayısını bulmak için belirli stratejiler geliştirdikleri saptanmıştır. Katılımcılar problemin çözümü için kendi strateji ve formüllerini geliştirip, hacim formülünü kavramsallaştırdıktan sonra, 64 birim küp kullanarak, buldukları strateji ve/ya bağıntıyı genelleyeme fırsatına sahip olmuşlardır.

Hacim formülünün anlamlı bir şekilde oluşturulabilmesi için, dikdörtgenler prizmasının içerisindeki birim küp sayısının katmanlı olarak keşfedilmesinin gerektiği vurgulanmıştır (Battista ve Clements, 1996; 1998). Fakat öğrenciler genellikle prizmanın satır, sütun ve katmanlara dayalı uzamsal yapısını zihinlerinde görselleştirmede zorluk çekmektedirler (Olkun, 2003). Bu çalışmada, prizmanın katmalara dayalı yapısının keşfedilebilmesi ve üç boyutlu uzamsal yapılanmayı desteklemek için, birim küpler kullanarak prizmaları oluşturma bağlamı sunulmuştur (Ek 2). Birim küpleri *başlangıç nesnesi* olarak kullanan katılımcılar, *eylem* aşamasında 45 birim küpten oluşan dikdörtgenler prizmalarını oluşturmuşlar ve bu prizmayı oluştururken farklı stratejiler geliştirmişlerdir. Bu aşamada katılımcılardan biri, 45'i iki sayının çarpımı şeklinde düşündüğünü söylemiş ve yüksekliği sonradan fark etmiştir. Diğer iki katılımcı ise prizmayı oluşturmak için yerleştirdikleri birim küpleri referans alarak, tabanın kaç birim küp aldığını, yüksekliğin kaç birim olduğunu bulmuşlardır. Böylece bu üç katılımcı 'bölünebilme kurallarını', 'sayının bölenlerini' dikkate aldıklarını ifade ederek *eylem*i *içselleştirmişlerdir*. Matematiksel hesaplamalarda ve çarpım tablosunda zorluk çeken diğer bir katılımcı ise, başlangıçta 45'in 2 ile bölünemeyeceğini söylemiş olmasına rağmen, 45'i bölen diğer sayıları dikkate almamış, bunun yerine somut materyallerle deneme yanılma ile bulmayı tercih etmiştir. Aslında, bu katılımcının verilen sayının bölenlerini bularak prizmanın ayrıtlarını oluşturabileceğinin farkında olduğu düşünülmektedir. Fakat 45'in bölenlerini ezbere bilmediğinden veya kolaylıkla hesaplayamayacağından, deneyerek 45 birim küp içeren prizmayı oluşturmaya çalışmıştır. Farklı prizmaları oluştururken, nasıl yaptığı sorulduğunda bölünce çıktığını söylemesi, prizmayı deneyerek oluşturduktan sonra, kontrol etmek için sayıları belirterek çarpımlarını araştırmacıya sorması bu katılımcının da diğerleri gibi geliştirdiği stratejiyi *içselleştirerek süreç* aşamasına geçtiğini göstermektedir.

Süreç aşamasında başka nasıl prizmaların oluşturulabileceği düşünülmüştür. Katılımcılardan biri sistematik olarak yüksekliği bir birim olan, yüksekliği bir birimden fazla olan ve herhangi bir ayrıtı bir birim olmayan prizmaları oluştururken, diğer üçü sistematik bir şekilde ilerlemekten ziyade, 45'in bölenlerini düşünerek farklı prizmaları oluşturmaya çalışmıştır. Dört katılımcı da birim küplerle prizmayı oluşturma ve/ya birim küpleri sayma ile ilgili belirli stratejilere sahiptirler. Bu stratejiler arasında *koordinasyon* kurarak veya stratejilerle ilişkilendirip oluşturdukları formüller arasında *koordinasyon* kurarak, tüm prizmalar için geçerli olduğunu düşündükleri bir hacim formülüne ulaşmaya çalışmışlardır.

Bu aşamada, yüksekliği baz alarak çözümünde sistematik bir şekilde ilerleyen katılımcı, 45'in bölenlerini düşünerek grup çalışmasında oluşturdukları prizmaların yüksekliğinin 1 birim olduğunu fark etmiş ve yüksekliği 1 birimden farklı olan prizmaları oluşturmaya çalışmıştır. Bunun için prizmayı oluştururken, önce yüksekliğin kaç birim olduğunu belirleyerek ve birim küpleri üst üste koyarak bir sütun oluşturacağını, sonra bu sütuna eş olan sütunları yan yana koyarak 45 birim küpe ulaşabileceğini söylemiştir. Ayrıtları 1 birimden farklı olan prizmaları oluştururken ise, önce tabandaki birim küp sayısını belirleyerek bir katman oluşturacağını, sonrasında yükseklik kaç birimse o kadar bu katmandan (tabandan) ekleyeceğini söylemiştir. Sistematik bir şekilde ilerlemeyen, fakat prizmayı oluştururken kullandığı modeli formalleştirmeye çalışan iki katılımcı da önce tabanı oluşturup, sonra yükseklik kaç birimse o kadar üzerine birim küp koyacaklarını ifade etmişlerdir. Hacmi başlangıçta, üç ayrıtın çarpımı şeklinde formülleştiren bu katılımcılardan oluşturdukları modeli ve formülü açıklamaları istendiğinde ise, hacmi $'taban\ x\ derinlik'$ ve $'taban\ hacmi\ x\ yükseklik'$ olarak ifade etmişlerdir. Yani katılımcıların oluşturdukları formülü açıklarken, kullandıkları modeli referans aldıkları görülmektedir. Sonrasında bu iki katılımcıdan biri, alan ve hacim arasındaki ayrımı düşünmüş ve oluşturduğu modelle ilişkilendirerek formülü $tabanı\ oluşturan\ birim\ küp\ sayısı\ x\ yüksekliği\ oluşturan\ birim\ küp\ sayısı$ şeklinde düzeltmiştir. Böylece bu üç katılımcının hacmi bir katmandaki küp sayısı ve katman sayısının çarpımı olarak (strateji A) formülleştirdikleri söylenebilir.

Başlangıçta prizmayı oluşturan birim küpleri katmanlar içerisinde organize ederek saymayan katılımcı ise, bazen satırları daha küçük birimlere ayırarak, bazen de tek tek saymaya çalışmış (strateji B), sonrasında ise katmanlara dayalı yapıyı belirtmiştir (strateji A). Aslında bu katılımcının birinci bağlamsal problemde prizmanın katmanlara dayalı yapısını kolaylıkla keşfettiği ve araştırmacı sormadan her prizma için açıkladığı görülmektedir. Fakat bu soruda hazır olarak oluşturulmuş bir prizma olmadığından ve katılımcının prizmayı oluşturmada zorluk çekmesinden dolayı bütünü görmede zorlandığı, bu yüzden var olan stratejisini etkin bir biçimde kullanamadığı düşünülmektedir.

Katmanlara dayalı yapıyı kolaylıkla oluşturabilen üç katılımcı, oluşturdukları formüller ('üç ayrıt uzunluğunun çarpımı' ve 'tabandaki birim küp sayısı ile yüksekliğin çarpımı') arasında *koordinasyon* kurarak, formülleri ilişkilendirmiş ve ikisinin de aynı olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Ayrıca, her prizmada "uzun kenar" ve "kısa kenar" olmayabileceği ifade edilmiş ve ulaşılan bağıntı $taban\ uzunlukları\ çarpımı\ x\ yükseklik$ ve $kenar\ x\ kenar\ x\ yükseklik$ olarak genellenmiştir. Böylece tüm katılımcılar prizmanın hacmi için genel bir bağıntıya ulaşmışlardır. Fakat bir katılımcı, aritmetik işlemlerde zorluk çektiği ve bu işlemlere çok fazla odaklandığı için bütünü görmekte zorlanmış, kafası karışmış ve daha az durumu incelemiştir. Bu yüzden, *enkapsülasyon*unda eksiklikler olduğu düşünülmektedir. Ayrıca, bu katılımcının karşılaştığı her problemin çözümünde somut olarak modeli ortaya koyma ihtiyacı duyduğu (model of) saptanmıştır. Yaptığı işlemlerde sürekli olarak, dış uyaranlara ihtiyaç duyduğu için ve önbilgilerindeki eksiklikten dolayı bu katılımcının süreç aşamasındaki işlemler üzerinde yoğunlaşamadığı düşünülmektedir. Diğer üç katılımcı ise, hacim formülü için farklı temsil biçimlerini oluşturmuş, bu temsiller arasında ilişki kurarak, geçiş yapabilmişlerdir. Ayrıca, farklı problem durumları için kendi kendilerine geliştirdikleri modelleri problem durumundan bağımsızlaştırmış (model for) ve böylece modelin desteğine ihtiyaç duymaksızın, oluşturdukları bağıntıyı kullanabilmişlerdir (formal). Böylece, bu üç katılımcının ulaştıkları formül ve stratejileri bir araya getirerek *enkapsüle* ettikleri ve genelledikleri bu formülleri başka problem durumlarında kullanmak üzere nesne haline getirdikleri düşünülmektedir. Katılımcıların nesne düzeyinde kavramsallaştımaya sahip olabilmesi için ulaşılan nesnenin başka kavramların oluşumunda kullanılması gerekmektedir (Arnon ve diğerleri, 2014; Oktaç ve Çetin, 2016). Bu çalışmada dikdörtgenler prizmasının hacim formülü için nesneleşme aşamasında olan bu üç katılımcının, oluşturdukları nesneyi farklı kavramların oluşumu için kullanma fırsatları olmamıştır. Örneğin, dikdörtgenler prizmasının hacim formülünün, silindir ve piramitin hacim formülünü oluşturma sürecinde kullanılması nesneleşme aşamasının tamamlandığının bir göstergesidir.

Çalışmanın sonucunda, öğrencilerin gerçekleştirdikleri *içselleştirme* ve *enkapsülasyon*un hacim formülünü oluşturma süreçlerinde kritik bir rol oynadığı saptanmıştır. Bu iki zihinsel mekanizma pek çok çalışmada olduğu gibi öğrencilerin kavram oluşum süreçlerine katkı sağlamaktadır (Arnon ve diğerleri, 2014; Dubinsky ve diğerleri, 2005). Ayrıca, gerçekleştirilen *süreç*lerin düzgün bir şekilde *enkapsüle* edilebilmesi için öğrencilerin güçlü *koordinasyonlara* sahip olmaları gerekmektedir. Bu çalışmada hacim formülünün kavranması için öğrencilerin öncelikle bağlamsal durumu anlamlandırmış olmaları ve sonrasında gerçekleştirdikleri *eylem*leri *içselleştirebilmeleri* için bölünebilme kavramı ile ilgili şemalarının güçlü olması gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca, öğrencilerin geliştirdikleri stratejilerin farkında olmaları ve bu stratejiler arasında ilişkilerin güçlü olması kavram oluşum süreçlerini etkileyen bir diğer önemli faktördür.

Yapılan çalışmalarda öğrencilerin genellikle hacmi üç boyutlu olarak kavramsallaştırma ve birim küpleri sayma sürecinde (görünen küpleri veya yüzeyleri sayma gibi) hatalar yaptıkları görülmüştür (Battista ve Clements, 1996; Ben Chaim ve diğerleri, 1985; Clements ve Sarama, 2009; Karaca, 2014). Bu çalışmada öğrencilerin kavramsallaştırma sürecinde genellikle bu tarz hatalara düşmemelerinin tasarlanan öğrenme ortamından kaynaklandığı düşünülmektedir. Bu bakımdan yapılan çalışmanın sonuçları, GME' nin hacim ölçme konularının öğretimi üzerindeki pozitif etkisini savunan çalışmaları destekler niteliktedir (Bıldırcın, 2012; Taş, 2018).

5.1.3 Dikey Matematikleştirme Süreçleri ile İlgili Sonuçlar

5.1.3.1 Dikdörtgenler Prizması, Kare Prizma ve Küp Arasındaki İlişkiyi Oluşturma Süreçlerine İlişkin Sonuçlar

Öğrencinin önceki öğrenmelerine bağlı olarak öğrendiği veya öğreneceği kavramla ilgili zihninde bir kavram imajı olabilir. Öğrencinin zihnindeki kavram imajına dikkat edilmeden formal kavram tanımının sunulması ise kavramın sınırlı bir bağlamda öğrenilmesine, anlamlandırılmamasına ve/ya uygun olmayan kavram imajının oluşmasına sebep olabilir (Tall ve Vinner, 1981; Vinner 1983; 2002; Vinner ve Dreyfus, 1989). Bu yüzden kavramın çok karışık olmadığı durumlarda öğrencinin kendi kavram tanımını oluşturmasına izin verilebilir (Vinner, 2002). GME kuramında öğrencilerin kendi kavram tanımlarını oluşturmaları desteklendiğinden (Fauzan, 2002, Gravemeijer ve Terwel, 2000), bu çalışmada katılımcıların dikdörtgenler prizması, kare prizma ve küp ile ilgili tanımlamaları ve bu üç prizmayı nasıl ilişkilendirdikleri incelenmiştir.

Bu çalışmada çoğu katılımcının kare prizmayı yanlış tanımladığı, kısıtlı algılamaya sahip oldukları görülmüştür. Yani başlangıçta kare prizmanın tanımı için gerek ve yeter şartlara dikkat etmemişlerdir. Başlangıçta sadece bir katılımcı kare prizmayı doğru bir şekilde tanımlamıştır. Bir diğer katılımcının ise kare prizma ile ilgili kendi oluşturduğu (yan yüzleri kare olan) prizmayı incelemesi ve açıklaması istenmiş, böylece kare prizmanın sadece tabanlarının kare olmadığını anlamlandırması sağlanmıştır. Dikdörtgenler prizması için ise başlangıçta özel dikdörtgenler prizmaları düşünülerek, "her yüzü dikdörtgenden oluşan prizma" gibi tanımlar yapılmış, sonrasında üç katılımcı karşılıklı ayrıt uzunluklarının eşit olduğu konusunda karar kılmışlardır. Daha önceki görüşmelerde de modeli somut bir şekilde ortaya koyma ihtiyacı hisseden katılımcı ise, dikdörtgenler prizmasını tanımlamadan önce çizme ihtiyacı duymuştur. Sonrasında bu prizmanın ayrıt ve kenarlardan oluştuğunu söylemiş, prizmayı tanımlayan başka bir özelliğine değinmemiştir.

Küpü tanımlarken ise, genellikle her yüzü kare olan prizma olarak tanımlamışlardır. Buradan Vinner'ın da savunduğu gibi (1983; 2002), öğrencilerin zihinlerindeki kavram imajlarının, tanımlamalarını oldukça etkilediği anlaşılmaktadır. Bu yüzden, öğretim sürecinde sunulan örneklerin kısıtlı algılamaya sebebiyet vermeyecek şekilde olması zengin içeriklerin deneyimlenmesi ve kavramla ilgili örnek ve örnek olmayan durumların sunulması önem arz etmektedir (Vinner, 2002).

Kare, dikdörtgenler prizması ve küpün ne olduğunun bilinmesi birinci dereceden; bir şeklin kare, dikdörtgenler prizması ve küp olarak tanımlanabilmesi için neyin gerekli olduğunun bilinmesi veya bu şekli oluşturmak için gerek ve yeter şartların bilinmesi ise, ikinci derecen kavram olarak tanımlanmıştır. Birinci dereceden kavrama sahip olan bir öğrenci kavramla ilgili sadece konuşabilir ve soru sorabilirken, ikinci derecede ise deneyimlerinden faydalanarak, ne yaptığı üzerinde reflektif düşünebilir (Barret, 1962). Bu yüzden kare, dikdörtgenler prizması ve küpü tanımlayan öğrencilerin bu prizmaları nasıl ilişkilendirdikleri incelenerek, bu süreçteki reflektif düşünmeleri desteklenmiştir. Ayrıca, bu çalışmanın asıl amacı kavram tanımlarını araştırmak olmasa da, katılımcıların dikey matematikleştirme süreçlerini nasıl gerçekleştirdiklerini irdelemek adına öğrendikleri kavramlar arasındaki ilişkileri nasıl oluşturduklarını incelemenin önemli olduğu düşünülmektedir. Katılımcıların kare, dikdörtgenler prizması ve küp arasındaki ilişkiyi doğru bir şekilde oluşturamamasının en önemli sebeplerinden biri prizmalar için özel durumları düşünmeleri ve kısıtlı algılamalarıdır. Başlangıçta bu üç şekli birbirinden tamamen ayrı olarak düşünseler de şekillerden birinin özellikleri düşünülerek diğeri için bu özelliklerin geçerli olup olmadığı sorulduğunda, katılımcılardan üçü doğru ilişkilendirmelere ulaşmışlardır. Bu aşamada somut materyallerden yararlanmışlar ve zihninde şekilleri canlandırarak sonuca ulaşmaya çalışmışlardır. Şekilleri çizerek veya somut bir şekilde görselleyerek tanımlamaya veya tarif etmeye çalışan katılımcı ise, prizmalar arasında görünüş farkı olduğunu ve kare prizma ile küp arasında fark olmadığını belirtmiştir. Yani şekilleri sadece görsel olarak birbirinden ayırmış ve şekle ait olan özellikleri analiz edememiştir. Katılımcıların hacmi kavramsallaştırma süreçleri düşünüldüğünde, bu katılımcının süreç üzerinde yoğunlaşamadığı ve nesne düzeyinde kavramsallaştırmaya sahip olamadığı görülmüştür. Süreç aşamasında kare, dikdörtgenler prizması küp ilişkilendirmesinin yapılarak, oluşturulan formülün bu üç prizma için geçerli olduğunu anlamlandırmak, karşılaştırma ve genellemeler yapabilmek sürecin bir bütün olarak düşünülebilmesi için önem arz etmektedir. Bu açıdan, bu üç prizmayı ilişkilendiremeyen katılımcının süreç düzeyinde kavramsallaştırmaya sahip olması, nesne aşamasında olmaması çalışmanın sonuçlarını destekler niteliktedir.

5.1.3.2 Katılımcıların Son Klinik Görüşmede Gerçekleştirdikleri Formal Problem Çözme Süreçlerine İlişkin Sonuçlar

Katılımcıların kavramsallaştırma süreçleri incelendikten sonra, matematiğin kendi içerisindeki ilişkilendirmeler ve formülleştirmeleri anlamlandırmalarına ek olarak dikey matematikleştirme süreçlerinin detaylı analizi için dikdörtgenler prizmasının hacmi ile ilgili sorular çözülmüştür. Böylece, oluşturdukları formül ve kavramları nasıl kullandıklarını incelenerek, *nesne* düzeyinde kavramsallaştırmaya erişip erişmediklerinin kontrolü ve kavramla ilgili *şema*larında var olan yanılgıların veya eksikliklerin giderilmesi planlanmıştır. Öğrencilerin kavramsallaştırmalarının APOS ile incelenmesi sürecinde yapılan görüşmelerde hangi aşamada olunduğunun belirlenmesi için yenilik ifade eden matematiksel aktivitelerin kullanılması önem arz etmektedir (Oktaç ve Çetin, 2016). Ayrıca, eylemlerin daha üst düzeyde uygulamalarda gerçekleştirilmesinin gerekliliği vurgulanmıştır (Zembat, 2016). Bu amaçla katılımcılara daha önce karşılaşmadıkları fakat var olan bilgileriyle çözebilecekleri iki problem sorulmuştur.

Gruplar içerisinde çözülen bağlamsal problemlerde ve klinik görüşmelerde somut modellere ihtiyaç duyan katılımcı, bu görüşmede sorulan ilk problemi anlamlandırma sürecinde de öncelikle kare prizmayı çizme gereksiniminde bulunmuştur. Aynı zamanda herhangi bir hesaplama yapmadan kare prizmanın yüksekliği için soruda verilen sayıları rastgele söylemiştir. Bu katılımcı hacim formülünü sözel olarak ifade edebilmesine rağmen, nesne düzeyinde kavramsallaştıramamıştır. Bu problemde hacmini ve iki ayrıt uzunluğunu bildiği bir dikdörtgenler prizmasının üçüncü ayrıt uzunluğunu bulması için ne yapması gerektiğini söyleyememesi bu sonucu destekler niteliktedir. Katılımcının çözüme ulaşabilmesi için bilişsel çatışma yaşaması sağlanmış, keşif süreçleri desteklenmiştir. Fakat hacim formülünü kavramsallaştırma sürecinde eksiklikler olduğu, problemin çözümünde zorlandığı ve kare/dikdörtgenler prizması arasındaki ilişkiyi yapılandıramadığı için son klinik görüşmede bu katılımcıya ikinci problem yöneltilmemiştir.

Diğer üç katılımcı ise, problemi anlamlandırdıktan sonra, prizmanın hacmini bulmak için üç ayrıt uzunluğunun çarpımı formülünü kullanmışlardır. Aynı formülü düşünerek hacmini ve taban ayrıt uzunluklarını bildikleri kare prizmanın yüksekliğini bulmak için, hacmi taban ayrıt uzunluklarının çarpımına bölmeleri gerektiğini söylemişlerdir. Problemi çözdükten sonra prizmanın yüksekliğinin en az bu değeri alabileceğini bu değerden küçük olduğunda meyve suyunun taşacağını büyük olduğunda ise prizmanın içerisinde boşluk kalacağını belirterek çözümlerini değerlendirmişler ve problemi anlamlandırarak çözdüklerini göstermişlerdir. Bu üç katılımcı hacim formülünü nesne düzeyinde kavramsallaştırmışlardı. Problemi eksiksiz ve akıcı bir şekilde çözmeleri bu sonucu destekler niteliktedir.

Dikdörtgen şeklindeki bir kâğıdı katlayarak, en büyük hacimli dikdörtgenler prizmasına ulaşılması istenen ikinci problemde ise, üç katılımcı da doğru cevabı bulmuş fakat farklı çözüm süreçlerini gerçekleştirmişlerdir. Bu katılımcılardan ikisi herhangi bir strateji üretmeden sayıları deneyerek, diğeri ise birkaç denemeden sonra ayrıt uzunlukları arasındaki farkın en az olması gerektiğini ifade ederek en büyük hacimli prizmaya ulaşmaya çalışmıştır. Bu katılımcı kullandığı stratejisi sayesinde çok fazla deneme yapmadan kare prizma olan durumları inceleyerek sonuca ulaşabilmiştir. Diğer iki katılımcıdan biri deneme yanılma yoluyla sonuca ulaşmaya çalıştığından pek çok deneme yapmış ve taban ayrıt uzunluklarının eşitlenmesi gerektiği sonucuna ulaşmıştır, fakat sebebini açıklayamamıştır. Arkadaşlarının aksine başlangıçta rastlantısal bir şekilde kare prizma durumunu düşünerek çözüme başlayan katılımcı ise, taban kare olduğunda hacmin daha büyük olduğunu ifade etmiş fakat bu durumu matematiksel açıklamasını yapamamıştır. Problemin çözümü için strateji oluşturan katılımcı ise çözüm sürecinin sonunda, toplamları aynı olan iki sayının arasındaki farkın en az olduğu durumda, sayıların çarpımının en büyük olacağını ifade ederek kare prizmanın hacminin daha büyük olmasının sebebini açıklamış ve ulaştığı sonucu genelleyebilmiştir. Bu üç katılımcının kavram oluşum süreçleri incelendiğinde daha sistematik bir şekilde ilerleyen ve diğerlerine göre daha sağlam bir şemaya sahip olduğu düşünülen katılımcı bu problemi kolaylıkla çözmüş ve genelleyebilmiştir. Diğer iki katılımcı ise zaman zaman araştırmacının yönlendirmesine ihtiyaç duymuş, sonuç olarak problemi çözebilmişler fakat sebebini tam olarak açıklayamamışlardır. Bu bakımdan, katılımcıların problem çözme süreçlerinde ulaşılan sonuç kavram oluşum süreçlerini de destekler nitelikte olduğu düşünülmektedir.

5.2 Öneriler

Öğrencilerin dikdörtgenler prizmasının hacmi kavramını oluşturma süreçlerinin incelendiği bu çalışmanın sonuçları doğrultusunda, aritmetik işlemlerde zorlanan, kavramla ilgili önbilgilerinde eksiklikler veya yanlışlıklar olan katılımcıların kavram oluşum sürecinde özellikle gerçekleştirilen eylemlerin koordinasyonu ve süreci bir bütün olarak algılamada zorlandıkları görülmüştür. Bu yüzden kavram oluşum sürecinde veya öncesinde önbilgilerdeki yanlış veya eksik anlamaların giderilmesi önem arz etmektedir. Ayrıca, süreç içerisinde ilişkilerin tam olarak kurulamasından, eksik ya da yanlış aktarmalardan kaynaklanan, öğrencinin kavramı öğrenmesine ket vuran problemler ortaya çıkmıştır. Alan kavramını çarpımsal olarak düşünemeyen iki ve üç boyutu anlamlandıramamış olan katılımcıların alan ve hacim kavramlarını birbirlerine karıştırdıklarını, en küçük kutuyu bulmak için dikdörtgenler prizması şeklindeki kutuların yüzey alanını hesapladıkları görülmüştür. Bu yanılgının önüne geçmek amacıyla, öğrencilerden bu paketi renkli kağıtla kaplamak istedikleri söylenerek, ne kadar renkli kâğıt almaları gerektiğini hesplamaları istenebilir. Böylece, öğrenci bağlamsal durumlar aracılığıyla alan ve hacim arasındaki farkı kavrayabilecek veya hissedebilecektir. Öğrencilerin kavram yanılgılarını giderilmesi amacıyla onlara gerçek yaşamda olabilecek onları ilgilendiren problem durumları verilerek problemi hissetmeleri sağlanabilir. Problemi çözme sürecinde ise bilişsel çatışma yaşayarak yanılgılarını kendilerinin gidermeleri için rehber olunabilir. Ayrıca, bu çalışmada öğrencilerin grup içerisindeki tartışmalarda birbirlerinin hatalarını düzelttikleri, bilgi paylaşımında bulunarak birbirlerinin öğrenmelerine destek oldukları görüldüğünden, öğretmenlerin öğrenme sürecinde grup çalışmasını desteklemeleri önerilmektedir.

Öğrencilerin hacmi kavramsallaştırma süreçlerinin, üç boyutlu uzamsal yapılanma, şeklin farklı yönlerden görünümlerinin koordinasyonu ve zihinde hayal etme ile oldukça ilişkili olduğu saptanmıştır. Bu yüzden, 6. sınıf düzeyinde verilen hacim kavramının öğretim sürecine yedinci sınıf düzeyinde verilen cisimlerin farklı yönlerden görünümleri konusu da dahil edilebilir. Böylece, hacim kavramı ve hacim formülünün yapılandırılma sürecinde uzamsal yapılanma ile ilgili zorlukların önüne geçilebilir. Ek olarak, öğrencilerin tanımlama ve prizmaları birbiri ile ilişkilendirme süreçlerinde zorlandıkları ve genel olarak prizmaya ait olan özellikleri düşündükleri saptanmıştır. Bu yüzden, kavram öğretiminde sadece prototip örnekler verilmemeli ve formal tanımın direk olarak verilmesinden ziyade tanım için gerek ve yeter özellikler tartışılmalıdır.

APOS teorik çerçevesinde kavramı anlanlandırma sürecinde öğrencilerin süreci nasıl nesne haline dönüştürdüklerinin tanımlanması oldukça zor olduğu düşünülmekte, bu yüzden süreç ve nesne arasında bütünlük (totality) şeklinde bir zihinsel aşamanın var olabileceğinden bahsedilmektedir (Arnon ve diğerleri, 2014; Dubinsky, Arnon, Weller, 2013; Oktaç ve Çetin, 2016). Bu çalışmada da hacmi kavramsallaştırma sürecinde bazı katılımcıların süreci bir bütün olarak düşünebildikleri (enkapsülasyon) fakat süreci bir nesne haline getirip başka kavramların oluşumu için kullanamadıkları veya sürecin ürünleri üzerinde eylemde bulunamadıkları görülmüştür. Bu katılımcıların nesneleşme aşamasında oldukları, kavramla ilgili zihinsel yapılarının gelişmekte olduğu düşünülmektedir. Yapılacak olan çalışmalarda ise, öğrencilerin süreci bir bütün olarak düşünerek, bu bütünün üzerinde dönüştürmeler (işlemler) yapmaları için fırsat tanınması önerilmektedir.

Günümüze değin, farklı kavramların incelenmesi amacıyla APOS teorik çerçevesinden yararlanılmıştır. APOS teorisi kavramla ilgili öğrencilerin zihinlerindeki *eylem, süreç, nesne* ve *şema* aşamalarını irdelemeye yardımcı olduğu için başka matematiksel kavramların nasıl oluştuğu veya öğrencilerin öğrenmiş oldukları kavramla ilgili zihinlerindeki *şema*ları APOS ile incelenebilir. Bu çalışmada da dikdörtgenler prizmasının hacmi kavramı için iki genetik çözümleme ortaya konulmuş ve kavram oluşum *süreç*leri derinlemesine incelenmeye çalışılmıştır. Fakat kavramla ilgili genetik çözümlemenin başka teorik çerçevelerle incelenmesi gerektiği düşünüldüğünden 6. sınıf düzeyinde veya daha üst sınıflarda hacim kavramının nasıl yapılandırıldığının incelenmesi ve çalışmaların sonuçlarının karşılaştırılmasının alana büyük katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

KAYNAKÇA

Açan, H. (2015). *8. sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisinde bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, İzmir.

Açıl, E. (2015). *Ortaokul 3. sınıf öğrencilerin denklem kavramına yönelik soyutlama süreçlerinin incelenmesi: APOS Teorisi.* Yayınlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Erzurum.

Akgül, A. (2014). *Ortaokul 6, 7 ve 8. sınıflarda geometrik cisimlerin alan ve hacimlerinin öğretiminde Cabri 3D yazılımının öğrenci başarısı ve tutumuna etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Anabilim Dalı, Elâzığ.

Akkaya, R. (2010). *Olasılık ve istatistik öğrenme alanındaki kavramların gerçekçi matematik eğitimi ve yapılandırmacılık kuramına göre bilgi oluşturma sürecinin incelenmesi*. Doktora tezi, Uludağ Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Bolu.

Altaylı, D. (2012). *Gerçekçi matematik eğitiminin oran orantı konusunun öğretimi ve orantısal akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesine etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı, Erzurum.

Altun, M. (2008). *İlköğretim İkinci Kademe (6, 7 ve 8. Sınıflarda) Matematik Öğretimi.* Bursa: Aktüel Yayınları.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., ve Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel matematik kavramların künyesi.* Ankara: Gazi Kitabevi.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M. ve Weller K. (2014). *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A, DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D. ve Thomas, K. (1997). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. Schoenfeld ve Dubinsky (Eds.), *Research in Colllegiate Mathematics Education II, CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol 2, pp. 1-32). American Mathematical Society, Providence, RI.

Ayan, R. (2014). *Ortaokul öğrencilerinin doğrusal ve doğrusal olmayan problemlerdeki başarı düzeyleri, çözüm stratejileri ve yanlış cevaplarının nedenleri*. Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İlköğretim Fen ve Matematik Eğitimi Alanları Anabilim Dalı, Ankara.

Aydın, G. (2014). *Gerçekçi matematik eğitiminin ilkokul 3. sınıf öğrencilerine kesirlerin öğretiminde başarıya kalıcılığa ve tutuma etkisi*. Yayınlanmamış yüksek lisans tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eğitim Programları ve Öğretimi Anabilim Dalı, Bolu.

Ayvalı, İ. (2013). *Gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımıyla yapılan öğretimin hesapsal tahmin başarısına ve strateji kullanımına etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, İstanbul.

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools* (Doctoral dissertation). Freudenthal Institute Utrecht, The Netherlands: CD-β Press.

Battista, M. T. ve Clements, D. H. (1998). Finding the number of cubes in rectangular cube buildings. *Teaching Children Mathematics*, *4*(5), 258-64.

Battista, M. T. ve Clements, D. H. (1996). Students' understanding of three-dimensional rectangular arrays of cubes. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(3), 258-292.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. ve Houang, R. T. (1985). Visualizing rectangular solids made of small cubes: Analyzing and affecting students' performance. *Educational Studies in Mathematics*, *16*(4), 389-409.

Bıldırcın, V. (2012). *Gerçekçi matematik eğitimi (GME) yaklaşımının ilköğretim beşinci sınıflarda uzunluk alan ve hacim kavramlarının öğretimine etkisi*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Ahi Evran Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Kırşehir, Türkiye.

Chaiklin, S. (2003). The zone of proximal development in Vygotsky's analysis of learning and instruction. *Vygotsky's educational theory in cultural context*, 1, 39-64.

Chihara, C. S. (1963). Mathematical discovery and concept formation. *The Philosophical Review*, 72(1), 17-34.

Cihan, E. (2017). *Gerçekçi matematik eğitiminin olasılık ve istatistik öğrenme alanına ilişkin akademik başarı, motivasyon ve kalıcılık üzerindeki etkisi.* Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Adana.

Clements, D. H. ve Sarama, J. (2009). Geometric Measurement. *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach* (pp. 173-187). New York, NY: Routledge.

Çakır, Z. (2011). *Gerçekçi matematik eğitimi yönteminin ilköğretim 6. sınıf düzeyinde cebir ve alan konularında öğrenci başarısı ve tutumuna etkisi.* Yüksek Lisans Tezi, Karaelmas Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Eğitim Programları ve Öğretimi Anabilim Dalı, Zonguldak.

Çilingir, E. ve Artut, P. D. (2016). Gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımının ilkokul öğrencilerinin başarılarına, görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarına ve problem çözme tutumlarına etkisi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *7*(3), 578-600.

De Villiers, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 35(5), 703-724.

Demirdöğen, N. ve Kaçar, A. (2010). İlköğretim 6. sınıfta kesir kavramının öğretiminde gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımının öğrenci başarısına etkisi. *Erzincan Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *12*(1), 56-74.

Deniz, Ö. ve Kabael, T. (2017a). Eğim Kavramının Gerçekçi Matematik Eğitimi Yaklaşımı Altında Matematikleştirilme Süreci. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 31*(1), 123-142.

Deniz, Ö. ve Kabael, T. (2017b). 8. Sınıf Öğrencilerinin Eğim Kavramını Oluşturma Süreçleri. *Eğitim ve Bilim*, *42*(192), 139-172.

Doğan, M. (2016). *6. Sınıf Matematik Ders Kitabı*. TÜBİTAK-MEB, Milli Eğitim Bakanlığı. Erişim adresi: www.eba.gov.tr

Drijvers, P. H. M. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter (Doctoral dissertation). Freudenthal Institute Utrecht, The Netherlands: CD-β Press.

Dubinsky, E. (1991). Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. In L. P. Steffe (eds.), *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 160-202). Springer, New York, NY.

Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (eds.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Springer, Dordrecht.

Dubinsky, E., Arnon, I. ve Weller, K. (2013). Preservice teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The case of $\mathbf{0}\cdot\overline{\boldsymbol{g}}$ and 1. Canadian Journal of science, mathematics and Technology education, 13(3), 232-258.

Dubinsky, E. ve McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (Ed.), *The Teaching And Learning of Mathematics at University Level: An ICME Study* (pp. 275-282). Springer, Dordrecht.

Ersoy, E. (2013). *Gerçekçi matematik eğitimi destekli öğretim yönteminin 7. sınıf olasılık ve istatistik kazanımlarının öğretiminde öğrenci başarısına etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eğitim Bilimleri ve Programları Anabilim Dalı, Sakarya.

Esen, Y. ve Çakıroğlu, E. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının hacim ölçmede birim kullanmaya yönelik kavrayışları. *MATDER Matematik Eğitimi Dergisi*, *1*(1), 21-30.

Fauzan A., Slettenhaar D. ve Plomp, T. (2002). Traditional mathematics education vs. Realistic mathematics education: hoping for changes, In P. Valero and O. Skovmose (eds.), *proceedings of the 3rd International mathematics education and society conference.* Copenhagen, Denmark: Center for research in learning mathematics, 1-4.

Fauzan, A. (2002). *Applying realistic mathematics education (rme) in teaching geometry ın ındonesian primary schools*. Doktora tezi, Universiteit Twente, Indenesia.

Fraenkel, J. R., Wallen, N. E. ve Hyun, H. H. (2011). *How to design and evaluate research in education*. New York: McGraw-Hill Humanities/Social Sciences/Languages.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1, 3-8.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. The Netherlands, Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, the Netherlands: Riedel Publishing Company.

Gallagher, J. M. ve Reid, D. K. (1981). *The learning theory of Piaget and Inhelder*. Monterey, CA: Brooks/Cole Publishing Company.

Gökbulut, Y. ve Ubuz, B. (2013). Sınıf öğretmeni adaylarının prizma bilgileri: Tanım ve örnekler oluşturma. *İlköğretim Online*, *12*(2), 401-412.

Gözkaya, Ş. (2015). *Gerçekçi matematik eğitimi destekli öğretim yönteminin 7. Sınıf oran orantı konularının öğretiminde öğrenci başarısına ve öğrenmenin kalıcılığına etkisi.* Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Kayseri.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics, *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155-177.

Gravemeijer, K. ve Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *J. Curriculum Studies, 32*(6), 777-796.

Gravemeijer, K.P.E. (1994). *Developing realistic mathematics education*. The Nederlands, Utrecht: Freudenthal Institute.

Karaca, A. Ö. (2014). *8. Sınıf öğrencilerin uzunluk, alan ve hacim ölçme kavramlarını anlamaya ilişkin yeterliliklerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Trabzon.

Kaylak, S. (2014). *Gerçekçi matematik eğitimine dayalı ders etkinliklerinin öğrenci başarısına etkisi.* Yüksek Lisans Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Konya.

Koçyiğit Gürbüz, M. (2018). *Yedinci sınıf öğrencilerinin etkinlik temelli öğrenme yaklaşımı altında oran-orantı kavramlarını oluşturma süreçlerinin incelenmesi: APOS teorisi*. Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Eskişehir.

Laurens, T., Batlolona, F. A., Batlolona, J. R. ve Leasa, M. (2018). How does Realistic Mathematics Education (RME) improve students' mathematics cognitive achievement. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14*(2), 569-578.

Memnun, Sezgin, D. (2011). *İlköğretim altıncı sınıf öğrencilerinin analitik geometrinin koordinat sistemi ve doğru denklemi kavramlarını oluşturması süreçlerinin araştırılması*. Doktora tezi, Uludağ Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Bolu.

Miles, M. B. ve Huberman, A. M. (2015). *Nitel veri analizi.* (Çev. S. Akbaba Altun ve A. Ersoy). Ankara: Pegem Akademi.

Millî Eğitim Bakanlığı [MEB]. (2013-2018). *Matematik Dersi Öğretim Programları (İlkokul ve Ortaokul 1-8. Sınıflar*). Erişim adresi: http://mufredat.meb.gov.tr/ProgramDetay.aspx?PID=329.

Mitchelmore, M. (2002). The role of abstraction and generalisation in the development of mathematical knowledge. Paper presented at *the Proceeding of The East Asia*

Regional Conference on Mathematics Education (2 nd) and The Southeast Asian Conference on Mathematics Education (9 th, Singapore, May, 27–31).

Oktaç, A. ve Çetin, İ. (2016). APOS teorisi ve matematiksel kavramların öğrenimi. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Yay. Haz.). *Matematik eğitiminde teoriler içinde*, (s. 163-181). Ankara: Pegem Akademi.

Olkun, S. (1999) Stimulating Children's Understanding of Rectangular Solids Made of Small Cubes, Yayınlanmamış Doktora Tezi, Arizona State University.

Olkun, S. (2001). Öğrencilerin hacim formülünü anlamlandırmalarına yardım edelim. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri Dergisi*, *1*(1), 181-190.

Olkun, S. (2003). Öğrencilere hacim formülü ne zaman anlamlı gelir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *25*, 160-165.

Öksüz, R. (2018). *5. Sınıf Öğrencilerinin Kesir Kavramını Oluşturma Süreçlerinin APOS Teorik Çerçevesinde İncelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Eğitimi Anabilim Dalı, Eskişehir.

Özdemir, E. ve Üzel, D. (2011). Gerçekçi matematik eğitiminin öğrenci başarısına etkisi ve öğretime yönelik öğrenci görüşleri. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *40*(40), 332-343.

Öztoprakçı, S. (2014). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının tanımları ve aralarındaki ilişkiler aracılığıyla dörtgenleri kavrayışları.* Doktora Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İlköğretim Matematik Eğitimi Bölümü, Ankara.

Parraguez, M. ve Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, *432*(8), 2112-2124.

Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. London, Sage.

Piaget, J. (2001). *Studies in reflecting abstraction*. R. L. Campbell (Ed.). Psychology Press.

Sierpinska, A. (1994). *Understandings in mathematics.* London, English: Falmer.

Skemp, R. (1986). *The psychology of learning mathematics* (2nd. Ed.). Harmondsworth: Penguin.

Skiff, S. (1953). Concept formation and education. *Peabody Journal of Education*, *30*(5), 296-299.

Strauss, A. L. ve Corbin, J. (1998). Basic qualitative research: grounded theoryprocedures and techniques. Newbury Park, CA: Sage.

Sullivan, P. ve Lilburn, P. (2002). *Good questions for math teaching: Why ask them and what to ask, K-6.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

Tall, D. ve Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151–169.

Tan Şişman, G. (2010). *Altıncı sınıf öğrencilerinin uzunluk, alan ve hacim ölçüleri konusundaki kavramsal ve işlemsel bilgileri ve sözel olmayan problem çözme* *becerileri*. Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Eğitim Programları ve Öğretimi Anabilim Dalı, Ankara.

Taş, T. (2018). *Gerçekçi matematik eğitimi destekli öğretim yönteminin ilköğretim altıncı sınıf öğrencilerinin matematik başarılarına ve tutumlarına etkisi.* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics education.* The Wiskobas Project (Vol. 3). Springer Science & Business Media.

Treffers, A. (1991a). Didactical background of a mathematics program for Primary Education. In L. Streefland (Eds.), *Realistic Mathematics Education in Primary Schools* (pp. 21-57). Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Treffers, A. (1991b). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980- 1990. In L. Streefland (Ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary Schools.* Utrecht: Freudenthal Institute, Utrecht University.

Triyani, S., Ilma Indra Putri, R. ve Darmawijoyo, (2012). Supporting student's ability in understanding Least Common Multiple (LCM) concept using storytelling. *Journal on Mathematics Education*, *3*(2), 151-164.

Tunalı, Ö. K. (2010). *Açı kavramının gerçekçi matematik öğretimi ve yapılandırmacı kurama göre öğretiminin karşılaştırılması.* Yüksek Lisans Tezi, Uludağ Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Bursa.

Uça, S. (2014). *Öğrencilerin ondalık kesirleri anlamlandırmasında gerçekçi matematik eğitimi kullanımı: Bir tasarı araştırması.* Doktora tezi, Adnan Menderes Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Eğitim Bilimleri Anabilim Dalı, Aydın.

Uygur, S. (2012). *6. sınıf kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin öğretiminde gerçekçi matematik eğitiminin öğrenci başarısına etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Anabilim Dalı, Erzurum.

Ünal, Z. A. ve İpek, A. S. (2010). Gerçekçi matematik eğitiminin ilköğretim 7. sınıf öğrencilerinin tam sayılarla çarpma konusundaki başarılarına etkisi. *Eğitim ve Bilim, 34*(152). Erişim adresi: http://eb.ted.org.tr/index.php/EB/article/view/8

Üzel, D. (2007). *Gerçekçi matematik eğitimi (RME) destekli eğitimin ilköğretim 7. sınıf matematik öğretiminde öğrenci başarısına etkisi*. Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Balıkesir.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. H. A. M. ve Drijvers, P. (2014). Realistics Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525). Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. H. A. M. (1996). *Assessment and Realistic Mathematics Education* (Vol. 19). Utrecht University.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. H. A. M. (2000). Mathematics education in the Netherlans: a Guided Tour. *Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9.* Utrecht: Utrecht University.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293–305.

Vinner, S. (2002). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In: Tall D. (eds.), *Advanced Mathematical Thinking*. Mathematics Education Library, vol 11. Springer, Dordrecht.

Vinner, S. ve Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(4), 356–366.

Von Glasersfeld, E. (1991). Abstraction, re-presentation, and reflection: An interpretation of experience and Piaget's approach. In *Epistemological foundations of mathematical experience* (pp. 45-67). Springer, New York, NY.

Whitenack, J., Bowers, J., Cobb, P. ve Gravemeijer, K. (2012). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. In *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms* (pp. 235-284). Routledge.

Wubbels, T., Korthagen, F. ve Broekman, H. (1997). Preparing teachers for realistic mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(1), 1-28.

Yazgan, Y. (2007). *10-11 yaş grubundaki öğrencilerin kesirleri kavramaları üzerine deneysel bir çalışma.* Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Bursa.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2016). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri* (10. baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yılmaz, R. (2011). *Matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerinde görselleştirme ve rolü.* Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Ankara**.**

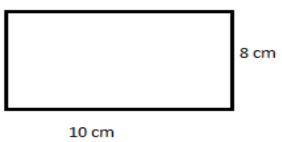
Zembat, İ. Ö. (2016). Piaget'ye göre soyutlama ve çeşitleri. E. Bingölbali, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Yay. Haz.). *Matematik eğitiminde teoriler içinde*, (s. 447-457). Ankara: Pegem Akademi.

EKLER

Ek 1: PRİZMANIN HACMİ HAZIRBULUNUŞLUK TESTİ VE BELİRTKE TABLOSU

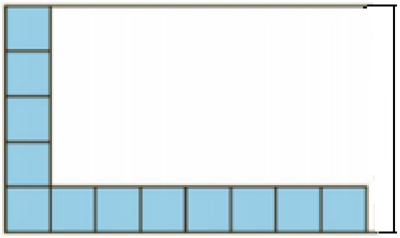
K. düzeyi / İçerik	BİLGİ	KAVRAMA	UYGULAMA	ANALİZ	Toplam
5.2.3.1 Uzunluk ölçme birimlerini tanır.			1		1
5.2.4.1. Dikdörtgenin alanını hesaplar.			2		2
5.2.4.2 Belirlenen alanı tahmin eder.			1		1
5.2.4.3 Verilen alana sahip farklı dikdörtgenleri oluşturur.			1		1
5.2.4.4. Dikdörtgensel bölgenin alanını hesaplamayı gerektiren problem çözer.			1		1
5.2.5.1 Dikdörtgenler prizmasını tanır.	2	1	1		4
5.2.5.2 Dikdörtgenler prizmasının yüzey açınımı çizer farklı açınımlar üzerinde karar verir.			1	2	3
5.2.5.3 Dikdörtgenler prizmasının yüzey alanını hesaplar.			1		1
6.1.2.5 Ortak kat ortak bölen problemlerini çözer.			1	1	2
6.3.2.5 Alan ölçme birimlerini tanır ve birimler arasında dönüşüm yapar.			1		1
Toplam	2	1	11	3	17

1) Aşağıda verilen dikdörtgenin alanını bulunuz.

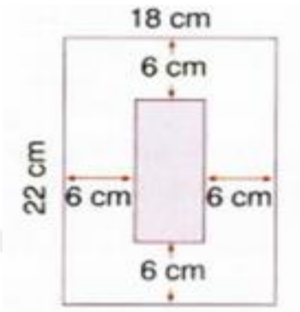


2) Bir kenar uzunluğu 9 cm olan karenin alanı kaç cm^2 dir?

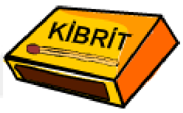
3) Alanı 90 m^2 olan dikdörtgen şeklindeki arsanın etrafına çit germek isteyen bir çiftçi kaç m lik çit kullanabilir?
4) Aşağıdaki dikdörtgensel bölgenin bir kısmı kenar uzunluğu 3 cm olan eş karelerle kaplanmıştır. Buna göre dikdörtgensel bölgenin alanına en yakın tahmini nasıl yaparsınız? Açıklayınız.

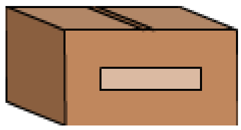


5) Kenar uzunlukları 22 ve 18 cm olan dikdörtgen şeklindeki fotoğraf çerçevesine daha küçük bir fotoğraf sığdırabilmek için her bir kenarından aşağıda gösterildiği gibi 6 cm kısaltılırsa yeni oluşan çerçevenin çevrelediği bölgenin alanı kaç cm^2 olur?

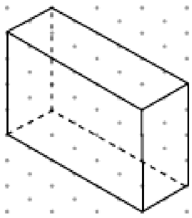
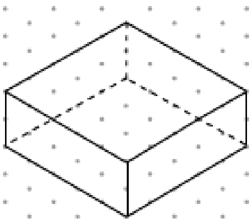
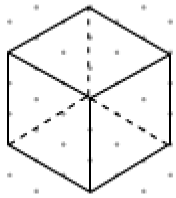
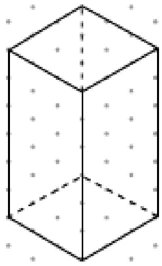


6) Aşağıdakilerden hangisi dikdörtgenler prizmasına model olamaz? Açıklayınız veya gerekçelerini paylaşınız.

A) 

B) 
C) 
D) 

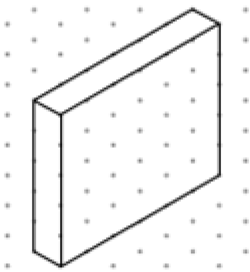
7) Aşağıda verilen geometrik cisimlerden hangisi küptür?

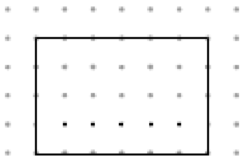
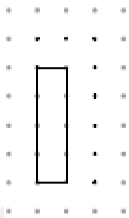
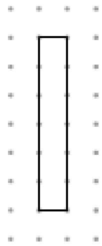
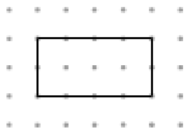
A) 
B) 
C) 
D) 

8) Noktalı yere aşağıdakilerden hangisi yazılmalıdır? Tüm yüzleri kare olan dikdörtgenler prizmasına …………. denir.

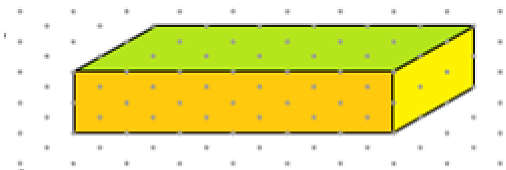
A) Küp B) Koni C) Kare Prizma D) Küre

9) Aşağıda izometrik kâğıt üzerinde verilen şekil bir dikdörtgenler prizmasına aittir. Bu dikdörtgenler prizmasını oluşturmak için aşağıdaki geometrik şekillerden hangisi kullanılmıştır? Nedenlerini açıklayınız.

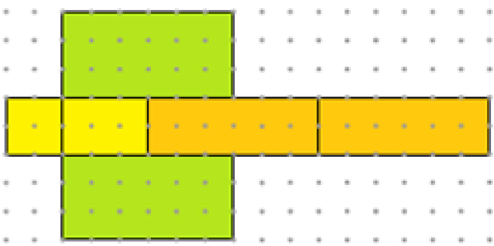


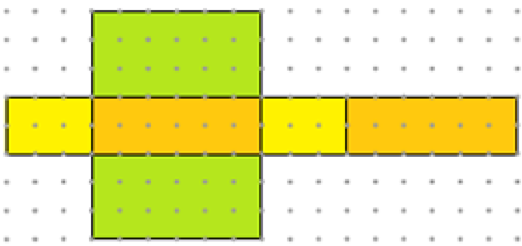
A)  B)  C)  D) 

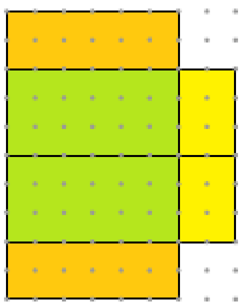
10) Zehra küp şeklindeki bir kutuyu renkli kâğıt ile kaplamak istemektedir. Küpün bir ayrıt uzunluğu 6 cm olduğuna göre bu iş için kaç cm^2 kâğıt gereklidir? Kullanacağınız işlemleri gösteriniz.

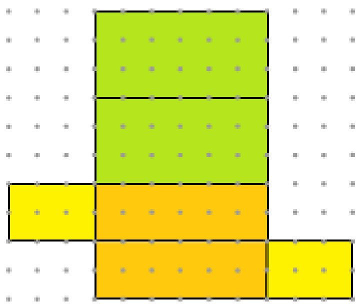


11) Yanda verilen dikdörtgenler prizmasının açınımı aşağıdakilerden hangisidir? Seçim sebeplerini paylaşınız.

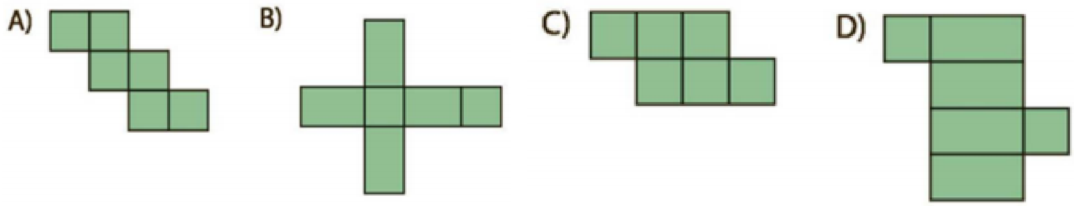
A 

B 

C 

D 

12) Aşağıdakilerden hangisi bir prizmanın açınımı olamaz? Seçiminize etki eden etmenleri yazınız.



13) Aşağıda verilen boşlukları doldurunuz.

5 km =…. m	5 km^2 =…. m^2
90 m =…. cm = …….. mm	90 m^2 =…. cm^2 = …….. mm^2
4000 mm =…. cm = …….. m	4000 mm^2 =…. cm^2 = …….. m^2
130000 m =…. km	13000 m^2 =…. km^2

14) Aşağıdaki ifadelerde parantez içine ifade doğru ise D, yanlış ise Y yazınız. Nedenini açıklayınız.

( ) Her dikdörtgenler prizması bir kare prizmadır.

( ) Her kare prizma bir dikdörtgenler prizmasıdır.

( ) Her küp bir dikdörtgenler prizmasıdır.

( ) Her dikdörtgenler prizması bir küptür.

( ) Her küp bir kare prizmasıdır.

( ) Her kare prizma bir küptür.

15) Aynı güvenlik şirketinde çalışan Ayşe ve Mert belirli aralıklarla gece nöbetine kalmaktadırlar. Mert Bey 5 günde bir kez, Ayşe Hanım 8 günde bir kez nöbet tuttuğuna göre, ikisi birlikte nöbet tuttuktan en az kaç gün sonra birlikte nöbet tutarlar? Açıklayınız.

16) Bir bakkal işleten Hazal Hanım yağ firmasından 36 litrelik zeytinyağı, 60 litrelik Ayçiçek yağı sipariş etmiştir. Firmanın sipariş edilen yağları, birbirine karıştırmadan ve hiç artmayacak şekilde eşit boyutlardaki şişelere doldurması gerekmektedir. Bu iş için firma kaç litrelik şişeler kullanabilir?

Testi bitirdin ☺

Cevaplarını gözden geçirebilirsin.

Ek 2: Görüşme Formu

1 ve 2. Klinik Görüşme Soruları

- İlk derste sınıfta çözdüğünüz 1. (bağlam) problemini hatırlayınız, bu problemi çözerken neler yapmıştınız, ne düşünmüştünüz? Neyi bulmuştunuz? Nasıl bulmuştunuz? Neden öyle olduğunu düşünmüştünüz? (*Gerekirse kendi çözüm kâğıdı gösterilerek süreç hatırlatılacak*)
- Bu problemde kutunun içini ne ile doldurmuştunuz? Neden? Nasıl doldurmuştunuz?
- Kutunun içini dolduran birim küp sayısı neyi ifade etmektedir?
- Üçüncü derste sınıfta çözdüğünüz 2. (bağlam) problemini hatırlayınız. Çikolata doldurulan kutularda 45 tane çikolata sığan kutuyu bulmak için nasıl bir yol izlemiştiniz, çözüme nasıl ulaşmıştınız?
- Farklı ebatlarda kutular oluşturdunuz mu? Neden? Bu durum sizce ne ifade etmektedir?
- 45 çikolata yerine farklı sayıda çikolata koyulursa değişim olur mu? Nasıl?
- Sonuçta ulaştığınız kavramı tanımlayabilir misin?
- Dikdörtgenler prizmasının hacim formülü nedir? Nasıl bulmuştunuz? Bulduğunuz formül bütün prizmaların (kare prizma, küp, dikdörtgenler prizması) hacmi için geçerli midir?

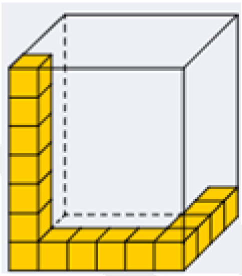
3. Klinik Görüşme Soruları

1) Ali'nin, boyutları 3 cm, 10 cm ve 20 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki meyve suyu kutusunu teknoloji tasarım dersi için kullanması gerekmektedir. Bu yüzden hiç açılmamış kutunun içindeki meyve suyunu başka bir kaba boşaltmak istemektedir. Ali evde bir ayrıtının uzunluğu 5 cm olan kare prizması şeklindeki bir saklama kabı bulmuştur. Ali'nin meyve suyunu bu kaba boşaltabilmesi için kabın yüksekliğinin en az kaç cm olması gerekmektedir?

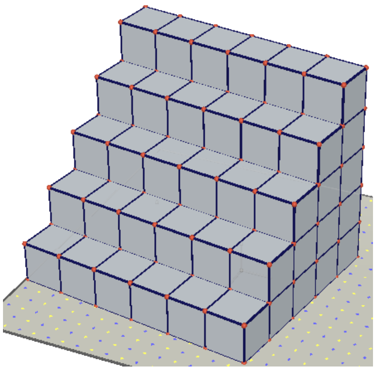
2) Kenar uzunlukları 16 cm ve 20 cm olan dikdörtgen şeklindeki bir kâğıdı katlayarak en büyük hacimli dikdörtgenler prizması oluşturuluyor. Bu prizmanın hacmi kaç cm^3 olabilir?

Ek 3: Etkinlik Kâğıdı

1) Zeynep kardeşi Kayra ile kahvaltı hazırlarken şekerlikteki şekerin bittiğini fark etmiş ve kardeşinin kilerdeki yeni küp şeker paketini açarak şekerliği doldurmasını istemiştir. Kayra aşağıdaki gibi dizili şeker kutusunu açarken içerisindeki küp şekerleri yere dökmüştür ve ablasına fark ettirmeden dökülen şekerleri alıp çöpe atmıştır. Kardeşinin gelmediğini fark edince Zeynep kilere gitmiş ve kutudaki şekerlere bakıp azaldığını fark etmiş ve kutu şekerle dolu iken olması gereken şeker sayısını söylemiştir. Sizce Zeynep kutudaki toplam şeker sayısını saymadan nasıl bulmuştur? Sizin hesabınıza göre kutuda toplam kaç şeker vardır?



2) Ahmet Bey evden bahçeye geçmek için kullandığı tahta merdiven eskimeye başladığı için daha sağlam bir merdiven yaptırmak istemektedir. Merdiveni yapacak usta Ahmet Bey'e hangi malzemeden ve nasıl bir merdiven istediğini sorduğunda, Ahmet Bey ona merdivenin aşağıdaki şekildeki gibi olmasını ve bu merdivenin tuğlalardan yapılmasını söylemiştir. Usta aşağıdaki gibi tasarladığı beş basamaklı bu merdiveni yapmak için, küp şeklindeki tuğlalardan kaç tane kullanmalıdır?

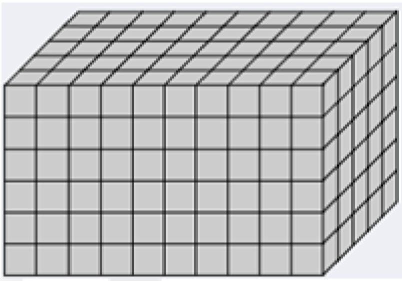


3) Taban çevresinin uzunluğu 20 cm ve yüksekliği 8 cm olan kare dik prizmanın hacmi kaç cm^3 olabilir?

4) Selin öğretmen yüzmeye ilk kez başlayan öğrencilerine 128 m^3 su alan havuzla ilgili genel bilgiler vermektedir. Selin öğretmen havuzun uzun kenarının 12 kısa kenarının 3 metre olduğunu söyledikten sonra, Hilal ve Ayşe dikdörtgenler prizması şeklindeki bu havuza giren bir kişinin ayağı yere bastığında boğulmaması için boyunun en az kaç m olması gerektiğini hesaplamaya çalışır. Sizce bu hesaplamayı nasıl yaparlar?

5) Bir çiftlik, günlük ürettiği sütü, ayrıt uzunlukları 2, 4, 5 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki karton kutulara doldurmaktadır. Bu kutular da bunlardan 12 tane alan kolilere koyularak pazarlanmaktadır. Buna göre her bir kolinin hacmi kaç cm^3 tür?

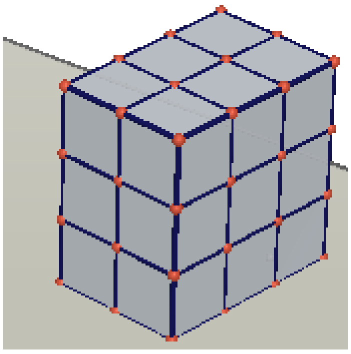
6) Aşağıdaki dikdörtgenler prizması ile aynı hacme sahip olan bir dikdörtgenler prizmasının tabanının bir kenar uzunluğu 5 birim, yüksekliği 15 birim olduğuna göre, tabanının diğer kenar uzunluğu kaç birimdir?

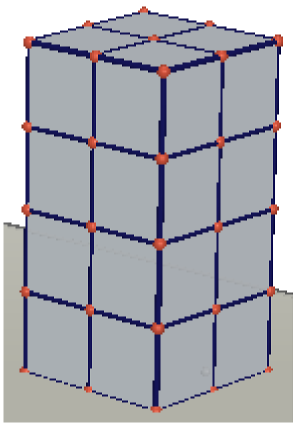


7) Dört öğrencinin her birine 20 tane lego küp veren Şeyma öğretmen, öğrencilerinden geometrik cisimler oluşturmalarını istemektedir. Ayla kare prizma, Ceren dikdörtgenler prizması ve Demet küp oluşturacağını söylemiştir. Verilen 20 lego küpün tamamı kullanılmak üzere, hangi öğrenciler söyledikleri cismi oluşturabilirler?

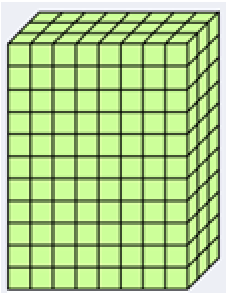
EV ÖDEVİ

1) Annesi ile markete giden Sevda, küp şeker almak istemektedir. Markette aşağıdaki gibi görünen, eş büyüklükteki küp şekerleri içeren ve fiyatları aynı olan iki şeker kutusu vardır. Sizce Sevda ve annesi hangi kutuyu alırlarsa daha karlı olurlar? Neden?

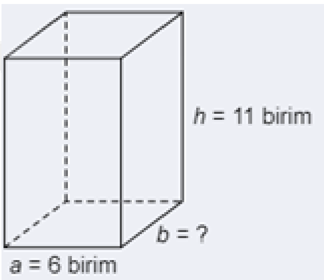




2) Aşağıdaki dikdörtgenler prizması ile aynı hacme sahip başka bir dikdörtgenler prizması oluşturuluyor. Oluşturulan dikdörtgenler prizmasının tabanına 44 birim küp yerleştirildiğine göre, bu prizmanın yüksekliği kaç birim küptür?



3) Aşağıdaki dikdörtgenler prizmasının hacmi 462 birim küptür. Ayrıt uzunlukları şekildeki gibi olan bu dikdörtgenler prizmasının bilinmeyen ayrıt uzunluğu kaç birimdir?



4) Ayrıt uzunlukları 5, 8 ve 10 cm olan bir dikdörtgenler prizmasından bir ayrıtının uzunluğu 4 cm olan 2 tane küp çıkarılıyor. Bu durumda dikdörtgenler prizmasında kalan kısmın hacmi kaç cm^3 olur?

5) Boyutları 15, 25 ve 10 cm olan dikdörtgenler prizması şeklindeki sandıklar bir kamyon kasasına yerleştirilecektir. Kamyonun kasasının boyutları 2, 3 ve 5 m olduğuna göre, kasaya en fazla kaç tane sandık sığar?

Ek 4: Etik kurul kararı ve MEB izni

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER ETİK KURUL KARARLARI

KARAR TARİHİ	TOPLANTI SAYISI	KARAR SAYISI
27.12.2017	12	2017/ 272-322

KARAR NO: 2017 – 297

Üniversitemiz Eğitim Fakültesi öğretim üyesi Yrd. Doç. Dr. Rezan YILMAZ'ın danışmalığında Eğitim Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi Arş. Gör. Merve DÜNDAR'ın "Ortaokul Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Prizmanın Hacmi Kavramını Oluşturma Süreçleri" konulu yüksek lisans tezine ilişkin mülakat, gözlem,video/film kaydı, ses kaydı ve etkinlik çalışmaları okunarak görüşüldü.

Üniversitemiz Eğitim Fakültesi öğretim üyesi Yrd. Doç. Dr. Rezan YILMAZ'ın danışmalığında Eğitim Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi Arş. Gör. Merve DÜNDAR'ın "Ortaokul Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Prizmanın Hacmi Kavramını Oluşturma Süreçleri" konulu yüksek lisans tezine ilişkin mülakat, gözlem,video/film kaydı, ses kaydı ve etkinlik çalışmalarının kabulüne oybirliği ile karar verilmiştir.

ASLI GİBİDİR.

T.C.
SAMSUN VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

26.02.2018

Sayı : 27485554-821.01-E.4072440
Konu : Merve DÜNDAR Hk.

DAĞITIM YERLERİNE

İlgi : a) Millî Eğitim Bakanlığı Yenilik ve Eğitim Teknolojileri Genel Müdürlüğünün 22/08/2017 tarihli ve 35558626-10.06.01-E. 12607291 - 2017/25 sayılı Genelgesi,
b) Ondokuzmayıs Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğünün 12.02.2018 tarih ve 42301062-302.08-E.3453sayılı yazısı.

Ondokuzmayıs Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Merve DÜNDAR'ın İlimiz, Atakum İlçesi Ondokuzmayıs Üniversitesi Vakıf Kolejindeki 6.sınıf öğrencilerine yönelik "Ortaokul Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Prizmanın Hacmi Kavramını Oluşturma Süreçleri" başlıklı tez uygulama çalışması yapmak istediğine ilişkin ilgi (b) yazı ve ekleri, ilgi (a) genelgeye göre incelenmiş ve komisyon tarafından uygun görülmüştür.

Söz konusu çalışmanın komisyon kararı doğrultusunda, (veli izin belgeleri alınmalıdır) alınan sonuçların çalışmayı yapan kişi tarafından raporlanarak, Müdürlüğümüz Ar-Ge Birimine gönderilmesine dikkat edilerek, Türkiye Cumhuriyeti Anayasası, Millî Eğitim Temel Kanunu ile Türk Millî Eğitiminin genel amaçlarına uygun olarak, ilgili yasal düzenlemelerde belirtilen ilke, esas ve amaçlara aykırılık teşkil etmeyecek şekilde, duyurusu ve denetimi ilçe millî eğitim müdürlüğünüz tarafından gerçekleştirilmek üzere okul müdürlüğü sorumluluğunda, eğitim-öğretimi aksatmadan gönüllük esasına bağlı olarak yapılmasının sağlanması hususunda;

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Coşkun ESEN
Vali a.
İl Millî Eğitim Müdürü

EKLER :
1- İlgi (b) dilekçe ve ekleri (21 sayfa)
2- 22.02.2018 tarihli komisyon kararı (1 sayfa)

DAĞITIM:
Gereği:
Atakum İlçe Kaymakamlığına
(İlçe MEM)

Bilgi:
Ondokuzmayıs Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü