ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

Matematik Eğitimi Bilim Dalı

GERÇEKÇİ MATEMATİK EĞİTİMİ TEMELLİ ÖĞRENME ORTAMINDA 8.SINIF ÖĞRENCİLERİNİN KAREKÖK KAVRAMINI OLUŞTURMA SÜREÇLERİ

Elif Nur OCAKBAŞI

Danışman

Dr. Öğrt. Üyesi Rezan YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Temmuz, 2019

TELİF HAKKI

YAZARIN

Adı : Elif Nur

Soyadı : OCAKBAŞI

Bölümü : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi

İmza :

Teslim Tarihi :

TEZİN

Türkçe Adı : Gerçekçi Matematik Eğitimi Temelli Öğrenme Ortamında 8.Sınıf Öğrencilerinin Karekök Kavramını Oluşturma Süreçleri

İngilizce Adı : The Formation Process of Square Root Concept of 8th Grade Students in RME Based Learning Environment

ETİK İLKELERE UYGUNLUK BEYANI

Tez yazma sürecinde bilimsel ve etik ilkelere uyduğumu, yararlandığım tüm kaynakları kaynak gösterme ilkelerine uygun olarak kaynakçada belirttiğimi ve bu bölümler dışındaki tüm ifadelerin şahsıma ait olduğunu beyan ederim.

Yazar Adı Soyadı:	Elif Nur OCAKBAŞI
İmza:	……………………..

KABUL VE ONAY

Elif Nur OCAKBAŞI tarafından hazırlanan "**Gerçekçi Matematik Eğitimi Temelli Öğrenme Ortamında 8.Sınıf Öğrencilerinin Karekök Kavramını Oluşturma Süreçleri"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından Bir öğe seçin. ile Ondokuz Mayıs Üniversitesi **Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi** Anabilim Dalı, **Matematik Eğitimi Bilim Dalı'**nda Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: (Unvanı Adı Soyadı)

(Anabilim Dalı, Üniversite Adı) ...…………

Başkan: (Unvanı Adı Soyadı)

(Anabilim Dalı, Üniversite Adı) …………...

Üye: (Unvanı Adı Soyadı)

(Anabilim Dalı, Üniversite Adı) …………...

Bu tezin **Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi** Anabilim Dalı, **Matematik Eğitimi Bilim Dalı**'nda Yüksek Lisans tezi olması için şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

Tarihi: __/__/____

Prof. Dr. Ali ERASLAN

Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

(İmza ve Mühür)

Canım Aileme…

TEŞEKKÜRLER

Teşekkürlerimi ilk önce canım annem Fatma OCAKBAŞI'ya sunmak istiyorum; beni her düştüğümde kaldırdığı ve bana sonsuz, karşılık beklemeden sevgisini verdiği, sarıp sarmaladığı ve her ümitsizliğe kapıldığımda beni yeniden yüreklendirdiği için. Ayrıca tüm çalışmalarım boyunca benden bilgilerini esirgemeyen, her türlü yardımda bulunan ve yanımda olan canım danışmanım Dr. Öğrt. Üyesi Rezan YILMAZ'a çok teşekkür ediyorum. Bağlamsal problemlerin oluşturulmasında ve problemlerin seçilmesinde değerli fikirleri ile her zaman yardımcı olan Prof. Dr. Murat ALTUN'a ve Doç. Dr. Hamza ÇALIŞICI'ya, teze yaptıkları değerli katkılardan dolayı jüri üyeleri Prof. Dr. Ali Eraslan ve Doç. Dr. Abdullah Çağrı BİBER'e teşekkür ederim. Yine beni hoşgörü ile karşılayıp bana destek olan sevgili arkadaşım Arş. Gör. Merve DÜNDAR'a, uygulama esnasında bana her türlü yardımda bulunan sevgili Belören Ortaokulu Müdürü Bayram DEMİRCİ'ye ve okul zümrem Ömür CAN'a ve diğer arkadaşlarıma çok teşekkür ediyorum. Sevgili ağabeyim Emre OCAKBAŞI ve sevgili babacığım Şahmeran OCAKBAŞI'ya yine her zaman, her durumda yanımda yer aldıkları ve bana destek verdikleri için çok çok teşekkür ediyorum. Son olarak, beni her zaman desteklediği ve bana güvendiği için sevgili hayat arkadaşım Bora AKGÜL'e ve bende emeği olan tüm herkese en içten teşekkürlerimi sunuyorum. İyi ki varsınız.

GERÇEKÇİ MATEMATİK EĞİTİMİ TEMELLİ ÖĞRENME ORTAMINDA 8.SINIF ÖĞRENCİLERİNİN KAREKÖK KAVRAMINI OLUŞTURMA SÜREÇLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Elif Nur OCAKBAŞI

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz, 2019

ÖZ

Bu araştırmanın amacı 8.sınıf öğrencilerinin Gerçekçi Matematik Eğitimi (GME) yaklaşımına uygun şekilde hazırlanan öğretim ortamında karekök kavramını oluşturma süreçlerini incelemektir. Çalışma, Karadeniz Bölgesi'nde bir ilin merkez ilçesine bağlı bir devlet ortaokulunun 16 kişilik bir 8. sınıfında gerçekleştirilmiştir. Araştırma, nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması ile desenlenmiştir. Öğrencilerin karekök kavramı ile ilgili önbilgilerini ölçmek amacıyla hazırbulunuşluk testi hazırlanmıştır. Testten elde edilen sonuçlar, araştırmacı gözlemi ve ders öğretmeninden edinilen bilgiler doğrultusunda öğrenciler sınıf içi heterojen gruplara ayrılmışlardır. Öğrencilerden GME temelli hazırlanan öğrenme ortamında, oluşturulan iki bağlamsal problemi grup içerisinde çözmeleri istenmiştir. Öğretim süreci grup içinde ve gruplar arası tartışmalarla desteklenmiştir. Gruplardan amaçlı örneklemeyle seçilmiş ve hazırbulunuşluk düzeyleri iyi, orta ve ortanın altında-düşük olan 3 katılımcı ile 3'er kez klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğretim sürecinin, grup içi tartışmaların ve yapılan klinik görüşmelerin kamera ve ses kayıtlarının transkriptinden, bireysel ve grup çalışma kâğıtlarından ve gözlemlerden elde edilen veriler, APOS teorik çerçevesinde içerik analiziyle değerlendirilmiştir. Çalışmanın sonucunda, tam-kare sayıların karekökü kavramını üç düzeydeki katılımcının da nesne olarak oluşturduğu ve tam-kare olmayan tam sayıların pozitif kareköklerinin hangi iki

doğal sayı arasında olduğunu da yine üç katılımcının belirleyebildiği görülmüştür. Eylemlerin içselleştirilmesinde ve enkapsülasyonunda güçlü koordinasyonlara sahip olmanın oldukça önemli olduğu saptanmış, karekök kavramının oluşumunda üslü ifadeler, alan ve çevre ölçümü, birim, rasyonel ifadeler ve ondalık gösterimleri kavramlarının ise bu koordinasyondaki yerinin oldukça önemli olduğu tespit edilmiştir. Araştırma kapsamında elde edilen bulgulara göre, karekök kavramının öğretiminde ileride yapılabilecek araştırmalara ilişkin öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler : kavram oluşumu, soyutlama, APOS, karekök, bağlamsal problem, gerçekçi matematik eğitimi, hazırbulunuşluk düzeyi

Sayfa Sayısı : 197

Danışman : Dr. Öğrt. Üyesi Rezan YILMAZ

İkinci Danışman : -

THE FORMATION PROCESS OF SQUARE ROOT CONCEPT OF 8th GRADE STUDENT IN RME BASED LEARNING ENVIRONMENT

MS Thesis

Elif Nur OCAKBAŞI

ONDOKUZ MAYIS UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF EDUCATIONAL SCIENCES

July, 2019

ABSTRACT

The aim of this study is to examine the process of formation of square root concept of eighth grade students in the instructional environment designed in accordance with the Realistic Mathematics Education (RME) approach. The study was carried out in a 8th grade classroom within 16 students from a secondary school in a city of the Black Sea Region. The qualitative research was designed as a case study. In order to measure preliminary knowledge of students about square root concept, a readiness test was prepared. The students were grouped heterogeneously according to the results obtained from the test, observation of the researcher and information obtained from their teacher. The students were asked to solve two contextual problems in the groups in the RME based environment. The teaching process was supported by in-group and inter-group discussions. Clinical interviews were conducted three times with three participants who were selected from the groups by purposeful sampling and whose readiness levels were good, mid and low. The camera and audio recordings of teaching process, in-group discussions and clinical interviews were transcripted. The data from these transcripts, individual and group worksheets and observations were evaluated with content analysis within the framework of APOS theory. As a result of the study, it was found that the concept of square root of square numbers was formed as an object by all of the participants. It was also observed that three participants could determine the place of the positive square roots of non-square integers between two natural numbers. It has been determined that having strong coordination in internalization and encapsulation of the actions is very important. And the roles of the concepts of numbers exponential numbers, area and perimeter measurement, unit, rational-decimal numbers are very important in this coordination. According to the findings of the study, suggestions for future researches for teaching the concept of square root are presented.

Key Words : concept formation, abstraction, APOS, square root, contextual problem, realistic mathematics education, readiness level

Number of Pages : 197

Advisor : Assistant Prof. Dr. Rezan YILMAZ

Co-advisor : -

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

MEB	Milli Eğitim Bakanlığı
WEF	World Economic Forum
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
GME	Gerçekçi Matematik Eğitimi
PISA	Programme for International Student Assessment
APOS	Action-Process-Object-Schema
TIMSS	Third International Study of Science and Mathematics

BİRİNCİ BÖLÜM

I. GİRİŞ

Bilim ve teknolojide yaşanan hızlı değişimler, bireyin ve toplumun değişen ihtiyaçları, öğrenme ve öğretme teori ve yaklaşımlarındaki yenilik ve gelişmeler bireyden beklenen rolleri de doğrudan etkilemiştir (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2018). Bu değişim beraberinde bilgi üreten, ürettiği bilgiye hayatta işlevsellik kazandıran, problem çözebilen, yaratıcı, değişen dünyaya hızlı adapte olabilen, girişimci ruhlu gibi özelliklere sahip olan bireylere olan ihtiyacı artırmıştır. Böyle bireylerin yetişebilmesi için okullarda sadece aktarılan ve tek yönlü olan bilgi akışının yeterli olmadığı ise yapılan uluslararası kuruluş sınavlarında kendini göstermektedir.

Dünya Ekonomik Forumu'nın (World Economic Form [WEF], 2018) yayınladığı "Matematik ve Fen Eğitimi Kalitesi 2018" raporuna göre Türkiye 137 ülke arasından 104. sırada yer almış, 21.yüzyılın ilk çeyreğinde diğer ülkelere göre eğitim kalitemizin ortalamanın aşağısında olduğu görülmüştür. Bu anlamda değişen dünyaya ayak uydurabilmek için matematiği anlayabilen ve yaşamlarında kullanabilen insanlar önemli yere gelecek ya da geleceklerini en uygun şekliyle yapılandırma imkânına sahip olabileceklerdir (National Council of Mathematics of Teachers [NCTM] , 2000).

Değişen ve gelişen dünyaya uyum sağlamak için kaçınılmaz bir gereklilik olan matematik, çoğu öğrenci tarafından sadece bir ders olarak görülmektedir. Öğrencilerin çoğu okulda öğrenilen bilgiler ile günlük hayat arasında bağ kuramamaktadır. Dolayısıyla bu düşünce, zaten yapısı gereği soyut ve öğrenilmesi zor olan matematiği anlaşılamayan, işe yaramayan bilgi yığını, gereksiz uğraşı olarak göstermektedir (Baykul, 2009). Bu yüzden, matematiğin hayatın bir parçası olduğunun öğrencilere hissettirilmesi ve öğrencilerin okulda öğrendiği bilgileri hayatlarına uygulayabilmesine olanak tanınması gerekmektedir (Karakurumer, 2003).

Matematiğin, günümüzde, öğrenilmesi gereken bir takım soyut kavramlar ve beceriler olarak değil, gerçekliğin modellenmesini temel alan, problemi anlamlandırma ve çözme süreci ile oluşturulan bilgi ve beceriler olarak algılanması gereklidir (Altun, 2006). Böylece bireylerin yaratıcı düşünceleri gelişecek; fiziksel ve sosyal çevrelerini, dünyayı anlamada bireyler bilgi, beceri ve estetik duygular kazanacaktır (Baykul, 2009).

Bireylerin bir şeyi gerçekleştirebilmeleri için o şeye ihtiyaç durmaları önemlidir. Bu şekilde, birey ihtiyacını giderebilmek için harekete geçebilir. Öğrenmeler de böyle olmaktadır. Aksi takdirde, bilginin yorumlanması ve kalıcılığı için bu durum ezberin ötesine geçmeyerek olumsuzluk oluşturabilir. Bundan dolayı öğretilecek olan bilgiler için ilk önce ihtiyaç oluşturulması önemlidir. Gerçekçi (Realistik) Matematik Eğitimi – GME (RME) kuramı içinde yer alan bağlamsal problemler de öğrenmeyi bu bakış açısı ile ele almaktadır. Diğer bir ifade ile öğrenmenin gerçek yaşam durumlarından ortaya çıkarak, öğretmen rehberliğinde, kavramın matematikleştirilmesiyle, yeniden buluş yapılarak oluşacağı vurgulanmıştır (Freudenthal, 1968). Böylece, kavramın oluşumu bireyin bilgiyi soyutlayabilmesi ve matematikleştimesi ile mümkündür. Dahası bu yaklaşım, öğrenen üzerinde modelleme, problem çözme, grup çalışması gibi önemli becerilerin gelişmesine de katkı sağlamaktadır. Treffers'a (1987) göre, kavramları gerçek hayattaki bir problem durumundan matematiksel bir problem durumuna dönüştürme amacıyla kullanılan matematikleştirme sürecinde, öğrenci matematik bilgisine kendisi ulaşmalıdır. Freudenthal'e (1968) göre öğretimde matematikleştirme önemli bir role sahiptir. Çünkü matematikleştirmede öğrenen başroldedir ve süreç içerisinde aktif olup bilgiyi kendisi yapılandırmaktadır.

Kavramların soyutlanmasıyla oluşan matematik biliminde, bireylerin matematiği öğrenebilmeleri için zihinlerinde bu kavramları anlamlı bir şekilde yapılandırmaları gerekmektedir. Bu anlamda kavramların gerçek yaşam durumlarından ortaya çıkarak öğretmen rehberliğinde bir matematikçi gibi yeniden buluşu önem arz etmektedir. Bu nedenle, matematiksel kavramların oluşumunda köprü görevi gören bağlamsal problemlere dayalı olarak öğretimin yapılandırılması bireyin kavramı anlamlandırabilmesinde gereklidir. Diğer taraftan kavramın zihinlerde nasıl oluştuğunun irdelenmesi de bir o kadar karmaşık ve önemli bir süreçtir. Skemp (1991) ve Spierska (1994), kavramın belli özelliklerinden izole edilip ayrıştırılması veya bağlamdan kavrama geçiş olarak tanımlanan soyutlama sürecinin iki aşamada oluştuğunu söylemişlerdir (Dubinsky, 1991). İlk aşamada var olan bilgi daha ileri bir seviyede ifade edilir. Diğerinde ise bu bilgi yeniden oluşturulup organize edilerek yeni yapılar inşa edilir.

Matematiksel bilgi ve kavramların nasıl oluştuğunun yani soyutlama sürecinin betimlenmesinde APOS (Action, Process, Object, Schema) teorik çözümleme olarak farklı ve temel bir perspektif getirmektedir (Arnon ve diğerleri, 2014; Asiala ve diğerleri, 1997). APOS, kavramların öğretimi sırasında bireyin edindiği zihinsel yapıları eylem, süreç, nesne ve şema olarak adlandıran bir teori olup bu yapılar ile matematiksel kavramların nasıl öğrenildiğini açıklar. Genetik çözümleme yardımıyla açıklanmaya çalışılan bu zihinsel yapılar öğrencilerin kavramları nasıl oluşturduğu ile ilgili sürecin analizinde yardımcı olup öğretimin nasıl tasarlanması ile ilgili planlamaların oluşmasında yol gösterici olur (Asiala ve diğerleri, 1997; Dubinsky, 2002; Dubinsky ve Mc Donald, 2001)

1.1. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmada GME kuramına göre planlanmış bir öğrenme ortamında öğrencilerin karekök kavramını APOS teorik çerçevesiyle nasıl oluşturduklarının incelenmesi amaçlanmaktadır. Bu anlamda GME ortamında matematikleştirme sürecine hizmet eden bağlamsal problemlere odaklanılmıştır. Öğrencilerin irrasyonel sayı ve gerçek (reel) sayı kümelerini fark edip bu kümeler ve üzerlerinde işlemleri anlamlı şekilde gerçekleştirebilmeleri için karekök kavramını doğru ve sağlam bir şekilde inşa etmiş olmaları gerekmektedir. Bu nedenle, yapılan araştırmada kavram olarak 8.sınıf müfredatından karekök kavramı ele alınmıştır. Bu kavramın edinilmesinde kendi doğasından ve öğrenme-öğretim ortamından kaynaklanan zorluklar ve ön koşul olduğu diğer kavramlar düşünüldüğünde karekök kavramının anlamlı ve sağlam bir şekilde oluşturulması oldukça önemlidir. Bu nedenle, karekök kavramının zihinlerde nasıl oluşturulduğu ve diğer kavramlarla nasıl ilişkilendirildiği incelenip doğru öğretim ortamları tasarlanabilir. Öğrenciler bu kavramı kazanırken günlük hayatta karşılaşılmayan durum gibi düşünmemeleri için bu kavramı, GME çatısı altında oluşturulan bağlamsal problemlerle öğretilmeye çalışması amaçlanmıştır. Böylece öğrenciler daha önceden öğrenmiş oldukları formal bilgilerle, günlük hayattan edindikleri informal bilgileri bu süreçte kullanmaları hedeflenmiş ve bilgiler arası ilişki kurmaları sağlanmaya çalışılmıştır.

Bu çalışmanın amacı, GME temelli hazırlanan öğrenme ortamında bağlamsal problem etkinlikleriyle 8.sınıf öğrencilerinin karekök kavramını oluşturma süreçlerini APOS teorik çerçevesinde incelemektir.

1.2 Araştırmanın Problemi

Araştırma problemi "8.sınıf öğrencilerinin karekök kavramını GME temelli öğrenme ortamında bağlamsal problemler ile oluşturma süreçleri nasıldır?" olan çalışmanın alt problemleri ise şu şekildedir:

1. 8.sınıf öğrencileri tam-kare pozitif tam sayılarla bu sayıların karekökleri arasındaki ilişkiyi nasıl oluştururlar?
2. 8. sınıf öğrencileri tam-kare olmayan pozitif bir tam sayının karekökünün hangi iki doğal sayı arasında olduğu bilgisini nasıl oluştururlar?
3. 8.sınıf öğrencileri karekök kavramını oluştururken geçirdikleri dikey matematikleştirme süreçleri nasıldır?

1.3 Araştırmanın Önemi

21.yüzyıl içinde yaşanan gelişmeler, her alanda bilginin değişimine ve gelişmesine, bizlerinde bilgiye duyduğumuz ihtiyacın sürekli artmasına, eğitimin farklı amaçlar doğrultusunda gelişmesine sebep olmuştur. Gelişen dünya, edinilen bilgilerin günlük yaşamda kullanılmasını, yeni karşılaşılan bir duruma bilgilerin uyarlanmasını istemektedir. Öğrencilerin okullarda edindikleri bilgileri günlük yaşama ne derece aktarabildiklerini, ne derece bu bilgilerden yararlanabildiklerini görebilmek için uluslar arası kuruluşlar Programme for International Student Assestment (PISA) ve Third Internatıonal Study of Science and Mathematics (TIMSS) adlarıyla sınavlar gerçekleştirmektedir.

TIMSS'in temel amacı, dünya çapında matematik ve fen eğitim öğretiminin gelişmesine yardımcı olmak ve bu alanlarda kazanılan bilgi ve becerilerin değerlendirilmesine yönelik bir tarama araştırması yapmaktır. TIMSS, katılımcı ülkelere öğrencilerinin matematik ve fen alanında ne durumda olduğunu, zaman içinde durumlardaki değişimini ve diğer ülkeler içindeki durumunu göstermektedir. TIMSS 2015 sonuçlarına göre Türkiye tüm alanlarda puanını artırsa da dünya ortalamasının altında kalmıştır (MEB, 2016).

PISA'nın temel amacı, öğrencilerin okulda öğrendikleri bilgi ve becerileri günlük yaşamda kullanma becerisini ölçmektir. 15 yaş grubu öğrencilerinin matematik okuryazarlığı, fen bilimleri okuryazarlığı ve okuma becerileri konu alanları dışında, öğrencilerin motivasyonları, kendileri hakkında görüşleri, öğrenme biçimleri, okul ortamları ve aileleri ile ilgili veriler toplamaktadır. PISA 2015'te Türkiye'de alt düzeyde yer alan öğrenci sayısı artmışken, üst düzeyde yer alan öğrenci sayısı azalmış, Türkiye yine ortalamanın altında kalmıştır (MEB, 2015).

TIMMS ve PISA sonuçları öğrencilerin hedeflenen kazanımlara ulaşamadıklarını, hedefe ulaşanların ise bu bilgileri günlük hayata aktaramadıkları sadece işlemsel bilgi olarak çalışmalarına devam ettirdiklerini göstermektedir. Diğer bir ifade ile öğrenciler edindikleri bilgileri nerede, nasıl kullanacaklarını kavrayamamışlar, kısacası okulda öğrenilen bilgiler ezber bilgi olmanın önüne geçememiştir.

Van Den Heuvel-Panheuizen (2003), GME yaklaşımında öğrencilerin matematiği esas olarak, matematiksel kavramları ve araçları günlük hayattan problem durumlarına uyarlayıp geliştirerek öğrenmeleri gerektiğini vurgulamıştır. Öğrencilerin, birçok kavramla günlük hayatta bir şekilde karşılaştıkları ve bu kavramlarla ilgili informal bilgilere sahip oldukları bilinmektedir. Fakat bu bilgilerle, okulda öğrendikleri formal bilgiler arasında ilişki kuramamaları, sanki onların öğrendiklerinin günlük hayatla bir ilgisi yok şeklinde düşünmelerine sebep olmaktadır. Bunun sonucu olarak da hem ulusal sınavlarda hem de uluslararası sınavlarda başarısızlıklar ortaya çıkmaktadır. Dolayısı ile bilgiler arası ilişkilendirmeler yapılamamakta, muhakeme etmede yetersiz kalınmakta ve kavramların soyutlanmasında eksiklikler ortaya çıkmaktadır. Ancak, matematiğin, yapısı gereği soyut olması dolayısı ile öğrencilerin en çok bu derste soyutlama yapmaları ve matematiğin kurallarını, örüntülerini, ilişkilerini fark etmeleri ve genellemelere varması gerekir. Bunu yaparken ise günlük hayattan kopmadan, matematiğe ihtiyaç oluşturarak matematik yapmalarını sağlamak amaç olmalıdır. Bu durumu Freudenthal (1968), matematiksel etkinliklerin öğrencilerin günlük hayatta karşılaşabilecekleri durumların matematiksel anlayışa ve sınıf seviyelerine uygun olarak düzenlenen sınıf ortamında öğrencilere sunulması olarak açıklamıştır. Öğrencilerin gerçek yaşamla ilişkilendirmelerini sağlayan etkinlikleri, matematiği bir düşünme ve problem çözme olarak algılamasına, alternatif çözüm yolları oluşturmasına ve bu yolla eleştirel düşünme becerilerini geliştirmelerine yardımcı olur (Bıldırcın, 2012; Tunalı, 2010). Bu anlamda GME yaklaşımı, öğrencilerin bu becerileri edinmesinde ve kavramı gerçek yaşam durumları ile ilişkilendirerek yapılandırmada bağlamsal problemler aracılığı ile uygun öğretim ortamının hazırlamakta önemli bir bakıştır.

GME ile ilgili yapılan literatür incelendiğinde; çalışmaların genel olarak nicel desenli gerçekleştirildiği görülmektedir. Bu çalışmalarda GME ortamında gerçekleştirilen derslerin başarıyı artırdığı görülmüştür (Akkaya, 2010; Akyüz, 2010; Ayvalı, 2013; Bıldırcın, 2012; Can, 2013; Cansız, 2016; Cihan, 2017; Çakır, 2011; Çakır, 2013; Çilingir, 2015; Demir, 2017; Demirdöğen, 2007; Ersoy, 2013; Gelibolu, 2008; Gözkaya, 2015; Kütküt, 2017; Özkaya, 2016; Taş, 2018; Üzel, 2007). Aynı zamanda GME'ye dayalı gerçekleşen derslerde öğrencilerin matematik dersine karşı olumlu tutum ve davranış geliştirdikleri, motivasyonlarını artırdıkları ve GME yaklaşımı altında gerçekleşen öğrenmenin kalıcı olduğu da edinilen bulgular arasındadır (Çilingir, 2015; Demir, 2017; Gözkaya, 2015; Özkaya, 2016; Taş, 2018). GME'nin öğrenme ortamı olarak tasarlandığı nitel desenli çalışmalar az olmakla beraber bu araştırmalarda ise öğrencilerin ilerleme kaydettikleri, kavramları anlamlı bir şekilde oluşturdukları görülmüştür (Atasoy, 2017; Deniz, 2014; Uça, 2014; Ülker, 2018; Yazgan, 2007). Sonuç olarak, GME yaklaşımını temel alan öğrenme ortamlarında başarının arttığı ve yaklaşımın kavram oluşumlarında etkili olduğu görülmüştür.

Matematik, güçlü bir sıralı yapıya sahip olduğu için bir kavram, onun ön şartı olan diğer kavramlar kazandırılmadan tam olarak verilemez (Altun, 1998). Kavram oluşumu kadar, kavramın nasıl oluştuğu, kavram oluşumu sürecinde hangi aşamalardan geçildiği, ne gibi güçlükler yaşandığı ve öğrenilecek kavramın hangi diğer kavramlarla ilişkilendirildiği ve bu süreçlerin ortaya konması da önemli olan diğer bir durumdur. Bu anlamda APOS teorisinin bu durumları ortaya koyduğu eğim, oran-orantı, denklem, dönüşüm geometrisi ve kesir kavramları ile ilgili olarak az sayıda da olsa yapılan araştırmalarda ortaya konmuştur (Açan, 2015; Açıl, 2015; Çetin, 2009; Deniz, 2014; Ercire, 2014; Gürbüz, 2018; Öksüz, 2018).

Bu araştırmanın konusu olarak seçilen karekök kavramı ilk kez 8.sınıfta oluşturulmakta ve bu kavram daha sonraki birçok kavramın oluşumunda veya ilişkilendirilmesinde temel teşkil etmektedir. Literatür incelendiğinde karekök kavramının oluşumu ile ilgili herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Kareköklü ifadeler ile ilgili yapılan çalışmalar; karekök hesaplaması (Başıbüyük, 2012; Koca, 2012), karekök ile ilgili kavram yanılgılarının incelenmesi (Özcan, 2004) ve bir öğretim modeli kullanılarak akademik başarıya bakılması (Özkök, 2010) başlıkları altında karşımıza çıkmaktadır. Bunun yanında irrasyonel sayılarla ilgili yaşanılan güçlüklerin incelendiği çalışmalar da mevcuttur (Ercire, 2014; Kuru, 2014).

Öğrencilerin karekök kavramını anlamlı şekilde oluşturmaları ve muhtemel kavram yanılgılarının giderilmesinin, öğrencilerin zihinlerinde birçok düzgün şemanın oluşumuna katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Bu nedenle karekök kavramının oluşumunun incelenmesinin öğrencilerin kavramı nasıl öğrendiğini ve karşılaştıkları zorlukları anlamaya ve bunun beraberinde öğrenme ortamlarının tasarlanmasına ışık tutacağı düşünülmektedir. Ayrıca, kareköklü ifadeler ile ilgili yapılan çalışmaların gerek çok az olması ve gerekse karekök kavramının oluşumu ile ilgili çalışmanın yapılmamış olması yapılan bu çalışmanın literatüre önemli katkılar sağlayacağı düşünülmektedir.

1.4 Araştırmanın Varsayımları

1- Oluşturulan bağlamsal problemlerin ve hazırlanan öğrenme ortamının GME ye uygun olduğu düşünülmektedir.
2- Kullanılan veri toplama araçlarının amacına uygun olduğu düşünülmektedir.
3- Kontrol edilemeyen değişkenlerin her öğrenciyi aynı derecede etkilediği düşünülmektedir.
4- Öğrencilerin uygulanan etkinliklerde ve yapılan görüşmelerde samimi cevaplar verdiği düşünülmektedir.

1.5 Araştırmanın Sınırlılıkları

1- Bu araştırmanın çalışma grubu Karadeniz Bölgesi'nin büyük bir ilinin bir ilçesine bağlı bir devlet ortaokulun 2018/2019 eğitim- öğretim yılının 8.sınıf öğrencileri ile sınırlıdır.
2- Çalışmada ele alınan kavramla ilgili kazanımlar ortaokul matematik dersi 8.sınıf matematik öğretim programındaki sayılar ve işlemler öğrenme alanına ait kareköklü ifadeler konusunda belirlenen iki kazanım ile sınırlıdır.
3- Araştırma; hazırlanan öğrenme ortamı, uygulanan etkinlikler ve çözülen problemler ile sınırlıdır.

1.6 Araştırmadaki Tanımlar

Bağlam Problemi: Gerçek dünyadan kurgulanmış hikâyeler yoluyla kişinin aşina olduğu gerçek yaşam durumlarında sunulan matematiksel problemlerdir. Bu problemler sözel bir problem şeklinde olabileceği gibi, bir oyun, bir çizim, bir gazete kupürü, bir grafik veya bu unsurların kombinasyonlarını içerebilir. Buradaki ana nokta, sorunun ne ölçüde genişletilebileceği, deneyimsel olarak gerçek veya otantik olma kriterlerini ne derece yerine getirdiği ve yeni bir kavram ya da beceriye yönelik somut bir yönelimi ne kadar sağladığı ve önceki bilgilerin kullanılmasına ne kadar izin verdiğidir (De Corte, 1995; Doorman, Drijivers, Dekker, van den Heuvel-Panhuizen, de Lange ve Wijers, 2007; Gravemeijer, 1999).

Realistic Mathematics Education (RME): Freudenthal tarafından ortaya atılan, yönlendirilmiş yeniden buluş, didaktik fenomenler ve geliştirilen modelleri ele alan alana özgü bir öğretim kuramıdır (Gravemeijer, 1994, 1999).

Soyutlama: Nesnelerin sahip olduğu ortak bir özelliği ya da özellikleri nesnelerden ayırıp bu özelliğe ya da özelliklere isim verme sürecidir. Kavramın spesifik niteliklerden izalosyonuyla bağlam kümesinden kavrama doğru yönlenir (Mitcelmore, 2002; Sierspinka, 1994; Tall, 1988).

APOS Teorisi: Piaget tarafından ortaya atılan, çocuklardaki mantıksal düşünmenin gelişimini tanımlamak için ifade edilen reflektif soyutlama mekanizmasını açıklama amacıyla üretilen bir teoridir (Dubinsky, 1991). Matematiksel bilginin oluşumu, zihinsel eylemler (actions), süreçler (processes), nesneler (objects) ve şemaların (schemas) beraberinde içselleştirme (interiorization), koordinasyon (koordination), geri dönme (reversal), enkapsülasyon (encapsulation) ve temalaştırma (thematization) şeklinde adlandırılan zihinsel mekanizmalarla açıklanabilir (Arnon ve diğerleri, 2014; Dubinsky ve McDonald, 2001).

Genetik Çözümleme: Öğrencilerin matematiksel düşünme oluşumlarını ve bu oluşumlarda kullanılan bilişsel mekanizmaları tanımlamada, APOS teorisi ile ilgilenen araştırmacılar tarafından öne sürülen bir kavramdır (Dubinsky, 1991). Bir kavramın genetik çözümlemesi, bireyin zihindeki kavramın nasıl geliştiğini tanımlayabilen yapılandırılmış zihinsel oluşumların grubudur (Arnon, ve diğerleri, 2014).

Karekök: "(R, 0, 1, +, . , <) bir sıralı tamlık bölgesi ve a, b ∈ R olsun. Eğer b^2= a ise o zaman b∈ $R\ ye\ a \in R$ nin bir karekökü denir ve $\sqrt{a}$ ya da $a^{1/2}$ şeklinde gösterilir" (Argün, Arıkan, Bulut ve Halıcıoğlu, 2014, s. 263). Kavramın ortaokul seviyesinde tanıtılmasında ve yapılandırılmasında ise ele alınan tanımı şu şekildedir: "$a \in R^{+} \cup \{0\}$ olmak üzere $x^2 = a$ denkleminin negatif olmayan çözümüne a'nın karekökü denir ve $\sqrt{a}$ ya da $a^{1/2}$ şeklinde gösterilir" (Argün, Arıkan, Bulut ve Halıcıoğlu, 2014, s. 266).

İKİNCİ BÖLÜM

II. KURAMSAL ÇERÇEVE

Bu bölümde GME, soyutlama ve kavram oluşumu, APOS teorisi ve kareköklü ifadeler ile ilgili teorik bilgiler verilmiştir.

2.1 Gerçekçi Matematik Eğitimi (GME)

GME, 1971 yılında Hollanda'da Wiskobas (ilköğretimde matematik) Projesi kapsamında, Freudenthal Enstitüsü kurucusu olan eğitim bilimci ve matematikçi Hans Freudenthal tarafından eğitimde reform gerçekleştirmek için ortaya atılan, alana özgü bir matematik öğrenme ve öğretme kuramıdır (Freudenthal, 1973; Gravemeijer, 1994; van den Heuvel-Panhuizen, 1996). İngilizcesi Realistic Mathematics Education olan bu kuram Türkçeye Gerçekçi Matematik Eğitimi olarak çevrilmiştir. Gerçekçi kelimesinden anlatılmak istenen bağlamın, öğrenenin ya günlük hayatta karşılaştığı ya da zihninde canlandırabileceği bir yapı içinde olması gerektiğidir (Van den Heuvel-Panhuizen ve Drijvers, 2014). Gerçek dünyada var olmayan ama gerçeklik temelinde köklendirilmiş olan bir problem de bağlamsal bir problem olabilir (Altun, 2007). Daha da açıklamak gerekirse, bireyin üzerinde düşünebileceği, hayal edebileceği, kendisinin rol alabileceği bir yapının var olması anlatılmak istenmektedir.

Freudenthal (1973), matematiksel bir etkinliğin konusunun, matematikten veya gerçek hayattan alınan bir problemde çözüm arayışı ile olacağını ve matematik öğretiminin matematik yapma diğer bir ifade ile matematikleştirme şeklinde olması gerektiğini belirtmiştir. Freudenthal'e göre matematiksel yapılar insanlar tarafından inşa edilir, tasarlanır. Bu yüzden matematiği aktarma şeklinde değil, matematik yapma şeklinde öğretimlerin olmasını savunmuştur. Bu anlamda, öğrenciler değişik çözüm stratejileri geliştirecek ve matematikleştirme yapmaya uygun bağlam problemler ile yeniden icat süreçlerine imkân tanınacaktır (Gravemeijer, 1994).

Freudenthal'e (1968) göre; matematik öğrenilmesi gereken kapalı bir sistem olmamalı, bir etkinlik olarak düşünülmelidir. Bu yaklaşıma göre matematik, bir insan aktivitesi olarak hayatın gerçeği içinde yaparak ve yaşanılarak öğrenilmelidir. Matematik yapmaya, gerçek hayat problemleri ile başlamalıdır. Bu süreçte öğrenen, bir bilim insanı rolündedir ve icat edilmiş olan matematik bilgilerini sanki yeniden buluş yapıyormuş (reinvention) gibi bir görev üstlenmiştir (Treffers, 1987).

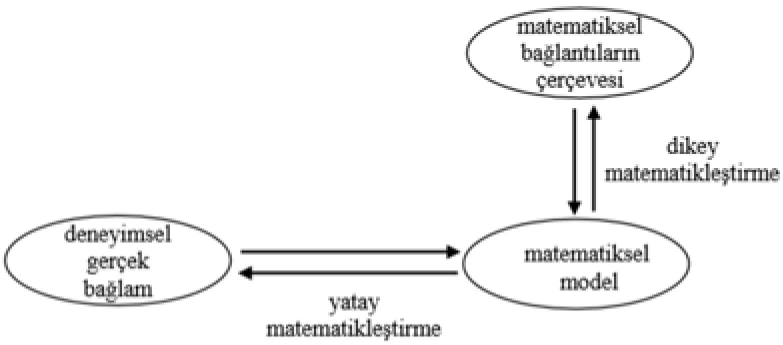
GME, mekanistik eğitime karşı olan bir kuramdır. Bireyin pasif durumda olduğu, matematiğin ezbere kurallar bütünü olduğu, öğrenmeye ulaşılması gereken son nokta olan formal bilgi ile başlanılan öğrenmenin birey için anlam ifade etmeyeceğini dile getiren Freudenthal (1991), gerçek öğrenmenin gerçek yaşam durumlarından ortaya çıkarak öğretmen rehberliğinde kavramın matematikleştirme sonucu yeniden buluş yapılmasıyla olacağını vurgulamıştır. Bireyin ancak bu şekilde anlamlandırabildiğini ve öğrendiğini dile getiren Freudenthal, öğrenen için her safhada bu anlamlandırmanın esas alınması gerektiğinin üzerinde durmuştur (Altun, 2006). "Freudenthal'e göre matematik bir insan aktivitesidir, keşfedilmez icat edilir" (Altun, 2007, s.22). Matematik tarihine bakıldığı zamanda matematiğin insan ihtiyacı ve uğraşısı sonucu, gerçek hayattaki problemleri çözebilmeleri için ortaya çıktığı görülebilir. "Kısacası matematik yapma gereksinimi matematik öğretiminin ana ilkesi olmalıdır" (Altun, 2007, s.22). Matematik yapmak için çevresel bir uyarana gereksinim duyan birey, uyarıcıyı anlamlandırdığında, soyutlamayı kendi geliştirdiği modellerle gerçekleştireceğinden öğrenme birey için anlamlı hale gelecektir (Zulkardi, 2002).

GME kuramında, Freudenthal, gerçek yaşam durumlarından başlayarak istenilen kavrama ulaşma şeklinde ilerleyen sürece matematikleştirme adını vermiştir. GME'de, matematikleştirme matematik öğrenmenin merkezinde yer almaktadır ve kilit bir role sahiptir (Altun, 2009). Bu öneme sahip olmasının iki nedeni vardır: Birincisi matematik sadece matematikçilerin değil tüm insanlığın işidir. Yani tüm insanlar matematik yapabilir çünkü matematik bir insan aktivitesidir ve insanlığın uğraşı sonucu ortaya çıkmıştır. İkincisi ise kavramın yeniden buluşuyla ilgilidir. Birey, matematik tarihindeki gibi, matematiksel bilgiye kendisi ulaşmalıdır. Her birey farklı seviyede yükselme yaşayacağı için öğrencilere farklı düşünme seviyelerinde çözülebilecek problemlerin sunulması önemlidir (Van den Heuvel-Panhuizen ve Wijers, 2005). Bu yüzden öğrenme ortamının farklı düşünmelere uygun olarak tasarlanması, öğrenenin çalışıp denemeler yapabileceği yönde olması önemlidir.

Uygun ortam ve rehber kontrolünde öğrenen, matematiksel bilgiye ulaşarak gerekli matematikleştirmeyi kendisi yapmış olacaktır (Freudenthal, 1991).

GME yaklaşımında, matematikleştirme iki başlık altında incelenebilir. Bunlar; yatay matematikleştirme ve dikey matematikleştirmedir. Yatay matematikleştirme, gerçek yaşam durumlarını içeren bağlamsal problemi anlama ve çözme isteği duyan bireyin var olan informal ve formal deneyimlerini kullanarak duruma özgü stratejiler geliştirmesi ve probleme matematiksel bir anlam kazandırmasıdır (Gravemeijer ve Terwel, 2000; Heuvel-Panhuizen ve Drijivers, 2014). "Yatay matematikleştirme, fiziksel modelden matematik bilginin üretildiği safhadır ve burada en önemli iş, matematikleştirmeye uygun fiziksel bir model seçmektir" (Altun, 2007, s.24). Freudenthal'e göre yatay matematikleştirme, gerçek dünya durumlarından sembolik dünyaya geçişi anlatır. Dikey matematikleştirme ise, yatay matematikleştirme ile elde edilen soyut yapılar hakkında akıl yürütme, genelleme ve formülleştirme etkinliklerini içerir (Rasmussen, 2005). Dikey matematikleştirme sembolik dünya içindeki hareketlerdir ve daha üst düzey kavram oluşumları için gereklidir. Altun'a (2009) göre ise, dikey matematikleştirme, matematiğin kendi içindeki işlem ve düzenlemelerin değiştirilmesi ve sembolle ifade etme sürecidir.

Yatay ve dikey matematikleştirmenin yönü ve birbiri arasındaki ilişki aşağıdaki Şekil 1'de verilmektedir (Drijvers, 2003).



Şekil 1: Yatay ve Dikey Matematikleştirme (Drjivers, 2003'ten uyarlanmıştır.)

2.1.1 GME'nin İlkeleri

GME'nin üç temel ilkesi vardır. Bunlardan ilki *yönlendirilmiş yeniden buluş* ilkesidir. Bu ilke kavramı bireyin kendisinin icat etmesini ifade eder. Bireye matematikçi gibi düşünme fırsatı verilerek kendi modelini oluşturabilmesi sağlanmalıdır (Gravemeijer, 1994). Bunun için öğretmen öğrenciyi yönlendirici ve hedefe ulaştırıcı sorular sormalıdır. Öğrenme ortamı da yine bu keşfi destekleyici bir şekilde oluşturulmalıdır. Eğer matematiğin tarihsel süreçte, problemlere bulunan pratik çözümlerden geliştiğini öğrenene kavratırsak, günümüzde de bu yaklaşımla matematiksel bilgi geliştirebileceğimizi düşünebiliriz (Drjivers, 2003). Öğrenenlerin, informal bilgilerinden yola çıkarak formal stratejilere ulaşmaları sağlanmalıdır (Fauzan, 2002). Bunun için iyi bir çevresel uyaranın bulunması gereklidir.

İkinci ilke olan *didaktik fenomonoloji*, kavramın analizini yapmak suretiyle onun nasıl oluştuğunu açıklar (Altun, 2006). Öğretene, öğrenen bireyin hangi adımda bulunduğunu gösterir. Freudenthal, öğrenme sürecini aktif hale getirmek için öğrencinin öğrenmeye kendine anlamlı gelen olgu ve olaylardan başlaması gerektiğini didaktik fenomenolji olarak adlandırmıştır (1983). Fenomonolojik açıdan zengin olan durumlar birey için anlamlı öğrenme sağlar. Bu yüzden bağlam problemlerinin iyi seçilmesi gerekmektedir. Süreçte kullanılacak ve matematikleştirmenin gerçekleşmesi için ele alınacak olgu veya durumları bulmak için bu olguların nasıl icat edildiği incelenmesi uygun olacaktır (Gravemeijer ve Terwel, 2000). Böylece, bağlam problemleri uyarıcı olmakta ve kavram sürecin yeniden buluşu ile kazanılacaktır. Kısacası, bağlam problemi olarak öğrencilerin iyi tanıyabildikleri ve ilgisini çeken şeylerin öğrenme ortamına getirilerek iyi bir öğrenme zemininin hazırlanması gerekmektedir.

İlkelerden üçüncüsü *kendiliğinden gelişen modelleri* içerir. Bu ilke, formal bilgi ile informal bilgi arasında köprü gören modelleri içerir (Gravemeijer, 1999). Birey bağlam durumuna ilişkin modeller geliştirirken bildiği şeyler üzerinden yola çıkar ve model oluşturur; daha sonra bu modeller genelleştirme ve formülleştirme sayesinde zihinde kendi başına bir yapı haline gelir. Yani önceden bir şeyin modeli (model of) iken artık bir şey için model (model for) olmuştur (Gravemeijer, 1994). Bu model of'tan model for'a geçiş durumununu Streefland (1991) kritik bir öneme sahip olduğu şeklinde vurgulamıştır.

2.1.2 GME'de Öğretim Süreci

Gerçekçi matematik eğitiminde, öğretim sürecinde olması gereken ilkeleri Heuvel-Panhuizen (1998) altı başlık altında incelemiştir.

- Bunlardan birincisi *etkinlik* ilkesidir. Öğretim süresince öğrenen birey aktif olmalıdır. Bilgi kendi geliştirdiği modeller sayesinde kişi tarafından oluşturulmalıdır.
- İkinci ilke *gerçeklik* ilkesidir. Bu ilkeye göre birey kendi için anlamlı olan, gerçek yaşamdan gelen ya da zihinde canlandırabilir olan problemler ile öğrenmeye başlamalıdır. Bu ilke öğrencilerin "ben bunu neden öğreniyorum, bu benim ne işime yarayacak" gibi sorulara yanıt verdiği ilkedir.
- Üçüncü ilke *seviye* ilkesidir. Her öğrenciden aynı seviyede soyutlama yapması ya da aynı şekilde anlamlandırma yapması beklenemez. Ama bu bağlamsal problemlerle her öğrenci kendine göre soyutlamalar ve anlamlandırmalar yapabilir. Bu yüzden seçilen uyarıcının önemi büyüktür. Yani oluşturulan bağlam problemleri bireyin kendi ürünlerini vermesine olanak sağlamalıdır. Öğrenenin model of'tan model for'a doğru sıçrama yapması bu ilkede kritik davranıştır.
- Dördüncü ilke *birbirine geçmişlik* ilkesidir. Bu ilkeye göre matematiğin konuları birbirinden ayrı düşünülemez. Matematikte tek bir konu yoktur, konu bütünlüğü vardır. Bağlamsal problemler oluşturulurken onun çözümü için hangi kavramların ya da bilgilerin gerekli olduğu bilinmelidir, etkinlikler buna göre düzenlenmelidir.
- Beşinci ilke *etkileşim* ilkesidir. Öğrencilerin grup içi, gruplar arası ve tüm sınıf tartışmalarına katılması, arkadaşlarının düşünce yapılarını görmesi, oluşturulan farklı yöntem ve stratejilerin yorumlanması gibi durumlar öğrencilerin birbirinden öğrenmesini sağlar ve etkin katılım desteklenmiş olur.
- Son ilke ise *rehberlik* ilkesidir. Burada öğretene önemli işler düşmektedir. Öğreten tüm süreç boyunca rehber rolünü elden bırakmamalıdır. Öğrenenlere yönlendirici sorular sormalıdır. Onları hedefe götürecek yönlendirmeler yapmalıdır. En önemlisi amaca uygun bağlamsal problemler oluşturmalıdır. Bireye kavrama özgü zengin bağlar kurduran problemler seçmelidir.

2.1.3 Bağlamsal Problemler

Bağlamın Latince kökü “contexere”dir. Türkçeye çevrildiğinde ise “birlikte örmek” ya da “parçalarıyla tutarlı olan” anlamını vermektedir (Finkelstein, 2001; aktaran Çekiç-Toroslu, 2011). Bağlamın; konu, hikâye, durum gibi birçok tanımı olsa da en yaygın olarak kullanılan karşılığı “durum”dur (Pilot ve Bulte, 2006; aktaran Çekiç-Toroslu, 2011). Literatürde, “contextual approach”, “context-based teaching”, “context-based learning” olarak geçen kavramlar Türkçeye “bağlam temelli öğrenme ya da yaşam temelli öğrenme” şeklinde çevrilmiştir (İlhan, 2010). Bağlam kelimesini, Gramer Terimleri Sözlüğü (TDK, t.y.) şöyle tanımlamıştır:

> “Bir cümlede, bir konuşmada veya bir metin içinde yer alan herhangi bir kelimenin anlamının daha iyi belirlenebilmesi ve başka anlamlarından ayırt edilebilmesi için, kendisini çevreleyen ve karşılıklı ilişkide bulunduğu öteki öge veya ögelerle oluşturduğu bütün.”

Güncel Türkçe Sözlük (TDK, t.y.) ise bağlamı; herhangi bir olguda olaylar, durumlar, ilişkiler örgüsü veya bağlatışı, kontekst olarak tanımlamıştır. Yani bağlamı kısaca tümce içinde birlikte geçtiği ve anlamının belirlenmesi için gerekebilen tümce kesimleri olarak tanımlayabiliriz.

Finkelstein (2001), bağlamı halat ve onu oluşturan iplikler analojisi ile tanımlamaktadır. Ona göre halata, halat özelliği veren şey ipliklerin bir araya gelişi değil, ipliklerin bir araya gelerek nasıl bir etkileşime girdiğidir. Benzer şekilde öğrenme ile o öğrenmenin temsili olan bağlamın da birbirinden ayrılmaz bir bütündür. Öğrenciler bağlam içinde kavramı anlamakta ve bağlam, konunun anlaşılmasına yardımcı olma özelliği taşımaktadır.

Palmiotto (2003), öğrencinin okulda öğrendiği kavramın önemi ne olursa olsun eğer öğrenci bu kavramı günlük hayatta kullanamıyorsa o kavramın anlamsızlığını dile getirmiştir (aktaran Önal, 2015). Bu yüzden, öğrencinin öğrendiği her kavramın günlük hayatla ilişkilendirilmesi çok önemlidir. Bu da gerçek bağlam durumlarına odaklanan, konunun içeriği ile gerçek hayatı ilişkilendiren, öğrenilen bilgileri gerçek yaşamda kullanabilmeyi amaçlayan ortamlarda mümkündür (Berns ve Erıcson, 2001; aktaran Önal, 2015).

Bağlamsal öğrenme, kazanılması hedeflenen kavramın gerçek hayat durumlarından ya da problemlerinden ya da olaylarından yola çıkılarak öğrenilecek şeyin ihtiyaç haline getirilmesi ile başlar. Birey bildiği kavramları ya da var olan ön bilgilerini (formal ya da informal) bu olayı çözmede kullanır. Böylece öğrenciler hem bildiklerini uygulamada fırsat bulacak hem de bilgilerinin işlevselliğini görmüş olacaktır. Bu anlamda birey bilgilerini anlamlı hale getirecek; neyi, nerede, nasıl kullanacağını görecektir. Acar ve Yaman'a (2011) göre böyle bir öğretim daha eğlenceli ve daha yararlı olacaktır.

Gerçek anlamda öğrenme, kişinin öğrendiğini uyguladığı zaman gerçekleşir. Neyi, ne amaçla yaptığının farkında olması öğrenmenin gerçekleştiğinin göstergesidir. Bağlamsal öğrenmeye göre zihin, kavramları kişinin çevresiyle ilişkilendirme arayışı içindedir. Süreç, kavramlara anlam kazandırma ya da kavramların kullanışlı olduğunu ortaya çıkarma şeklinde yürür (The Center for Occupational Research of Development [CORD], 2013).

Bağlamsal öğrenmelerde öğrencilerin sıklıkla karşılaştığı durumlar ele alınabilir. Örneğin; kesirleri somut hale getirmek için öğrencilerle bir doğum günü kutlamasının olduğu bir problem durumu verilip pastanın bütünü ve dilimleri hakkında yorumlar yaptırılıp daha somut hale getirilerek kesirleri günlük yaşamda kullandırabiliriz. Yaşamla ilişkili bir öğrenme ortamı oluşturmak için bağlamların, kişisel ilgilere veya cinsiyet farklılıklarına dayanması önemlidir (Bülbül ve Matthews, 2012).

Bağlamsal öğrenme alanları sınıflar ile sınırlı değildir. Öğrenme alanı bazen bir laboratuvar, bazen bir pazar, bazen bir bahçe, bazen de bir çalışma alanı olabilir. Bu durum, eğitimcilere farklı birçok tecrübeyi birleştirebilecekleri alanlar oluşturmaya teşvik etmektedir (CORD, 2013). Bağlamsal öğrenmede en iyi öğrenme ortamlarının oluşturulmasında sosyal ilişkiler, tecrübeler ve gerçek yaşamı temel alan bağlamlar etkili olmaktadır (Lave, 1996; aktaran Ayvacı, 2010).

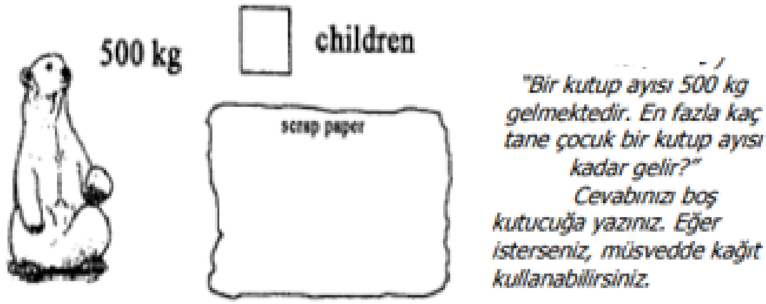
Bağlamların öğrenme ortamında başlangıç noktası olarak kullanılması çok önemlidir. Amaç, bilimsel kavramları günlük yaşamdan seçilen bağlamlar aracılığıyla sunmaktır. Böylece günlük hayattaki bir "durumdan" yola çıkarak, öğrenilen bilgiler ihtiyaç haline getirilecek, böylece kavram ve ilişkileri bu "durumların" çözümü için araç olarak kullanılacaktır (Glynn ve Koballa, 2005; aktaran Acar ve Yaman, 2011).

Bağlamsal problemler, bir bağlam içinde yer aldığı için bu tür problemlerle karşılaşan öğrenciler problemi çözme ihtiyacı hissedeceklerdir. Yalnız böyle problemler, normal problem tiplerinden farklı olduğu için öğrenciler bildiği çözümlerden bir sayı ya da bir sonuç bulmaya odaklanacaklardır. Bu yüzden bu problemlerin anlaşılması için normal problem çözümlerine göre öğrencilerin biraz daha fazla zamana ihtiyaçları olacaktır. Aynı zamanda grup ile çalışıldığı için grup arkadaşları birbirlerini olumlu yönde güdüleyeceklerdir.

Problemin çözülebilmesi için çocuğun bağlamla bütünleşmesi gerekmektedir. Yani problemin zor ya da kolay olmasını, çözülebilir ya da strateji geliştirilemeyebilir olmasını, kısacası anlaşılabilmesi için bu bağlam ile öğrencinin tanış olması belirler. O yüzden bağlam problemlerinin seçimi oldukça önemlidir. Benckert'e (1997) göre bağlamsal problemlerin özellikleri aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Her problem öğrencinin başrolde olduğu bir öykü durumu içermelidir.
- Her problem cümlesi öğrenciyi problem çözmeye teşvik edici olmalıdır.
- Problemdeki tüm nesneler tamamen gerçek hayatla ilgili olmalıdır.
- Problemi çözmek için gerektiğinden fazla bilgi problemde verilebilir.
- Problemde cevabı aranan durum açık bir şekilde ifade edilmemelidir.
- Problemin çözülebilmesi için birtakım varsayımlarda bulunulmalıdır (aktaran Tekbıyık ve Akdeniz, 2010).

Bağlam problemleri; çocukların gördükleri, tanık oldukları, hayal ettikleri ya da hayal edebilecekleri durumların geniş bir çerçevede sunulduğu matematiksel problemler olarak da ifade edilebilir. GME'ye uygun örnek bağlam problemi Şekil 2'de gösterilmiştir.



Şekil 2: Bağlam Problemi Örneği (Heuvel-Panhuizen, 1996)

Heuvel-Panhuizen'e (1996) göre bağlam problemlerinin sahip olması gereken özellikler ise; problemde tüm bilgi verilmemiş olabilir. Yukarda verilen örnekte de bir çocuğun makul ağırlığına karar verilmeli ve problem buna göre çözülmelidir. Genelde bu tip problemlerin tek bir cevabı yoktur. Üstteki örnekte de bunu görebilmekteyiz. Çocuğun sahip olduğu kiloya göre problemin çözümü değişiklik gösterebilecektir. Öğrencilere böyle problemlerin çözümünde müsvedde kâğıt verilerek benzer problemlerin çözüm süreçleri de gözlenebilir. Bu tür sorular, çözenlere kendi çözüm yollarını üretmeleri için şans tanımaktadır.

GME yaklaşımı altında oluşturulan bağlam problemleri yardımıyla birey, bir matematikçi gibi problemin içindeki süreç içinde aktif rol alarak, öğrenmesinin sorumluluğunu alır ve bir matematikçi gibi düşünmeye başlar. Problem çözümü için kendi çözüm yolunu geliştirir ve kendi model oluşturur. Böylece süreci kendisi deneyimleyerek kavram oluşumu sağlar. Öğrencinin kavram oluşumunun gerçekleşebilmesi için bireyin bilgiyi özümsemesi dolayısıyla bir soyutlama gerçekleştirmesi gerekmektedir.

2.2 Soyutlama ve Kavram Oluşumu

Genel Türkçe Sözlük (TDK, t.y.) soyutlamayı, bir nesnenin özelliklerinden veya özellikleri arasındaki ilişkilerden herhangi birini tek başına ele alan zihinsel işlem, gerçeklikte ayrılamaz olanı düşüncede ayırma olarak; Sierpinska (1994), nesnelerin sahip olduğu ortak bir özelliği veya özellikleri nesnelerden ayırma ve bu özelliğe veya özelliklere isim verme sanatı olarak; Tall (1988) bir kavramın spesifik özelliklerinden izolasyonu olarak tanımlamıştır. Monaghan ve Ozmantar (2006) ise yeni yapıları ortaya çıkarmak için konsolide edilmiş bir yapılanma olduğundan bahsetmiş ve Mitcelmore (2002) ise bu sürecin yönünün, bağlamlar (contexts) kümesinden soyut bir kavrama (concept) doğru olduğunu söylemiştir (aktaran Yılmaz, 2011).

Kavram, soyutlama sonucu oluşan bilişsel yapılar olarak adlandırılabilir (Skiff, 1953; Von Glasersfeld, 1991). Bu anlamda matematik kavramlarının öğrenebilmesi için bu kavramların soyutlanması gerekmektedir. Diğer bir anlamda, matematik konuları birbirleriyle bağlantılı olduğundan konular arası ilişki kurma, yapıyı bu şekilde zenginleştirme ve eski öğrenmelerle yeni öğrenmeler arasında köprü kurma iyi bir öğrenme için ihtiyaç duyulan durumları oluşturmaktadır.

İnsan beynini bir apartman gibi düşünürsek her odayı da bir durum olarak ele alırsak her odanın farklı bir dünyaya açıldığını temsili söyleyebiliriz. İnsanlar bu bölümlerden hangisini hangi zamanlarda kullanacağını bildiği durumlardan yola çıkarak kendi geliştirdiği strateji ve modeller yardımıyla kendi dünyasının inşasını yapabilir. Matematik de bir apartman yapısına benzer. Katlar birbirinin üzerine kurulur ve her kat kendinden önce ve kendinden sonra gelen katlarla, dairelerle bir ilişki içindedir ve her katın, her odanın kendine özgü kuralları vardır. Soyutlama ve genelleme bizim bu kuralları ve gizemleri çözmemizi sağlayan bir durumdur. Bu yüzden matematik eğitiminde soyutlama oldukça önemli bir kavramdır. Eğer kişi durumu soyutlayabildiyse kavramı anlamış olarak nitelendirilmektedir. Çocuklar, çok farklı tecrübeler üzerinden matematiksel kavramları öğrenebilirler.

Matematik, soyut kavramları içerdiği için genellemeyi ve soyutlamayı birlikte gerçekleşmesi gereklidir (Dienes ve Golding, 1971). Bireyin kavramları kendisinin genelleyebilmesi ve soyutlaması, matematik öğreniminin aktif ve dinamik bir yapı içinde gerçekleşmesi ve bireyin kavramı kendisinin oluşturmasına izin verilen ortamın oluşturulması bu anlamda önemli görülmektedir.

Van Oers (2001), Locke'nin soyutlama ile ilgili genel bir bakış açısı oluşturduğunu ve bu bakış açısının Aristotle'dan bu yana günümüze kadar taşınmasını sağladığını vurgulamaktadır. Bu klasik görüşün içerdiği özellikler şu şekilde sıralanabilir (aktaran Yeşildere ve Türnüklü, 2008):

- Soyutlamalar, nesnelerin kategorilerle temsil edilmesiyle oluşmaktadır.

- Soyutlamalar bağlamdan bağımsız temsillerdir.
- Soyut düşünme, düşünce gelişiminin daha ileri adımlarının ayırt edici bir özelliğidir.

Soyutlamanın özelliklerini değerlendirecek olursak, soyutlama üst düzey düşünmelerin gerçekleşebilmesi için gerekli ve ulaşılması gereken bir nokta olduğu ve soyutlamaların ortamdan, bağlamdan bağımsız kendi başına bir temsil olduğudur. Soyutlama yapma (abstracting) bir aktivite ve soyutlama (abstraction) bu aktivitenin sonucu olarak elde edilen bir nesne olarak düşünülürse, elde edilen bu nesne de bir kavram olarak ele alınabilir (Skemp, 1986; aktaran Yılmaz, 2011). Van Oers (1998), bağlam dışında düşünmenin soyutlamanın temeli olarak görmüş ve içeriğin daima bireyle ilgili olması gerektiğini öne sürmüştür.

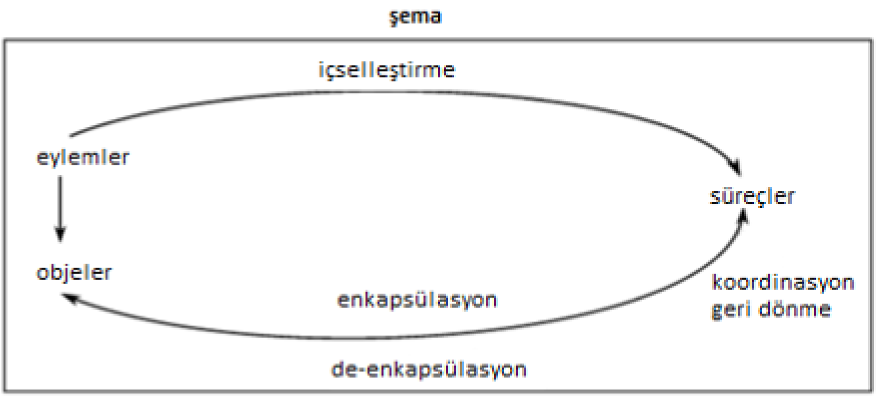
Günümüzde soyutlama iki farklı başlık altında incelenmektedir. Bunlardan birinci bilişsel soyutlama, ikinci ise sosyo-kültürel soyutlamadır. Soyutlamayı bilişsel bakış açısı altında inceleyen isimlerin başında Piaget gelmektedir. Bu bakış, öğrenmenin verilen örneklerin ortak özelliklerinden yola çıkarak oluştuğunu söylemektedir. Piaget, soyutlamayı *empirik soyutlama ve reflektif soyutlama* olarak iki başlık altında incelemiştir (1977). *Empirik soyutlama*, kavramlar arası yüzeysel benzerliklere dayanmaktadır. Yani günlük yaşamdaki kavramları soyutlamada kullanılan bir soyutlama çeşitidir (Mitchelmore, 2002). Örneğin; kaktüs, bir kişinin tecrübelerinde belirli bitkiler arasındaki benzerliğin bir enkapsülasyonudur. *Reflektif soyutlama* ise kişinin bilişsel hareketlerindeki yansımayı ele alır (Yılmaz, 2011). Yani eylemler arasındaki çok yönlü ilişkiyi göz önünde bulundurmaktadır (Yeşildere ve Türnüklü, 2008).

Reflektif soyutlama ile empirik soyutlamanın birbirinden farklı bazı özellikleri vardır. Empirik soyutlamada, gerçek objeler arasındaki benzerliklere temel teşkil eden durumların farkına varma vardır. Reflektif soyutlamada ise incelemelerden çıkan genellemelere ihtiyaç duyulur. Emprik soyutlamada hareketler objeler üzerinde olurken, reflektif soyutlamada bu hareketleri yeni hareketler ve sonunda yeni objeler oluşturmak için içselleştirilir ve koordine edilir (Yılmaz, 2011).

Dubinsky (2000), Piaget'in reflektif soyutlama hakkında yaptığı çalışmalar ile soyutlamayı APOS teorisi çerçevesinde şekillendirmiş ve reflektif soyutlamayı eylem, süreç, obje ve şema yapılarında, içselleştirme, koordinasyon, enkapsülasyon, genelleme ve geri dönme mekanizmalarında incelemiştir.

2.3. APOS Teorisi

APOS, Piaget' nin reflektif soyutlama (yansıtıcı soyutlama) hakkında fikirlerini anlama ve bu fikirleri üniversite düzeyindeki matematik bağlamında tekrardan yapılandırma düşüncesiyle geliştirilen, bir kavramın öğrenilme sürecinde zihindeki bilişsel oluşumları ortaya koyan bir teorik çerçevedir (Arnon ve diğerleri, 2014; Asiala ve diğerleri, 1996; Dubinsky, 1991). APOS teorisine farklı bir açıdan bakıldığında ise matematiksel bir kavramın nasıl öğrenilmesi gerektiğini anlatan, bilginin doğasını ortaya koyan, bilginin gelişimini yapılandırmacı yaklaşım altında inceleyen bir teoridir (Dubinsky, 2001). Şekil 3'te kavramın oluşumunda soyutlamada kullanılan bilişsel yapı ve mekanizmalar verilmiştir.



Şekil 3: Soyutlama Sürecindeki Kullanılan Bilişsel Yapı ve Mekanizmalar (Arnon ve diğerleri, 2014'ten uyarlanmıştır.)

2.3.1 Bilişsel Yapılar

Bilişsel yapılar eylem (action), süreç (process), nesne (object) ve şema (schema) olarak adlandırılmış ve APOS ismi bu bilişsel yapıların İngilizcelerinin baş harflerinin bir araya gelmesiyle ortaya çıkmıştır. APOS teorisine göre kavramın oluşturulması eylemlerle başlar, daha sonra eylemlerin içselleştirilmesiyle dinamik süreçlere ve dinamik süreçlerin enkapsülasyonundan nesnelere doğru gelişir (Tall, 1999).

Kavram oluşurken soyutlama süreci eylemle başlamaktadır. Bu basamak bir kavramın oluşması için ilk basamaktır ve sadece belirli algoritmaları takip ederek işlem becerisi gerektirir. Eylem düzeyindeki kavramlar durağandır ve üzerinde başka işlemler yapılmaz. Eylem basamağındaki bir birey için tüm talimatlar açıkça belirtilmiş olunmalıdır (Arnon ve diğerleri, 2014).

Birey eylemi yansıttığında, sürekli tekrar ettiğinde ve içsel bir süreç oluşturduğunda, eylemi sürece içselleştirmiş olur (Kabael, 2011). Tüm eylem, bireyin zihninde algoritmaları takip etmeksizin yer aldığı zaman artık eylem, süreç düzeyinde oluşturulmuş olur. Süreç düzeyinde kavrama sahip olan bir birey, gerçekten süreci ortaya koymadan, onu uyguluyormuş gibi düşünebilir (Dubinsky ve McDonald, 2001). Matematikte birçok başka oluşumların gerçekleştirilmesi için kavramın en az süreç düzeyinde olması gerekmektedir.

Birey sürecin tamamının farkındaysa ve gerekli dönüşümleri yapabiliyorsa süreci bilişsel nesne içine enkapsüle etmiştir. Kavramın nesne oluşumu tamamlandığında artık değişmez özellikler kazandığı düşünülür ve bireyden nesneyi, yeni kavram oluşumlarında çağırıp, üzerine eylemler gerçekleştirilebilmesi beklenir (Tziritas, 2011).

Şema, yeni bir matematiksel problem durumu ile başa çıkmak için çağırılan eylemler, süreçler, nesneler ve diğer şemaların uyumlu bir topluluğudur (Clark ve diğerleri, 1997). Dubinsky (2005), şemanın statik bir varlık olmadığını ileri sürerek, kendi dinamikliğinden ve sürekli gelişim ve değişim içinde oluşundan ayrılamadığını vurgulamaktadır.

Şemanın oluşması için eylem, süreç ve nesnenin bir arada bulunması gerekmektedir (Birinci, 2010). Matematikte bazen birden fazla süreç, birden fazla eylem yer alabilir. Bu sistem düzenli bir şekilde ilerlemeyebilir, süreç aşamasına giren birey bir anda eylem aşamasına geri dönebilir ya da oluşturulan nesne bozularak yeni kapsülasyonlarla yeni objelere dönüştürülebilir. Ama tüm bunlar için genel bir çatıya ihtiyaç vardır ve bu çatı şemadır. Şema, bir matematiksel problem durumunda hangi yapı gerekliyse onun uygun bir şekilde kullanılmasını sağlar (Dubinsky, 2005).

2.3.2 Bilişsel Mekanizmalar

Dubinsky (1991), reflektif soyutlamayı zihinsel nesnelerin ve zihinsel nesneler üzerinde eylemlerin yapılandırılması olarak ifade etmiştir (aktaran Çekmez, 2013). Reflektif soyutlamaya göre özne bilgiyi kopya eden değil, bilgiyi oluşturan, inşa eden durumdadır. Dubinsky, reflektif soyutlama içinde yer alan kavramlara ek olarak geri dönme (reversal) kavramını ortaya atmıştır.

İçselleştirme, bireyin algıladığı bir durumu anlamlandırma olayıdır. Bireyin bir durumu anlamlandırabilmesi için içsel süreçler oluşturması gerekmektedir (Arnon ve diğerleri, 2014). Örneğin; çarpma işlemini düşünürsek, çarpma işleminde bireyin sayıların yerlerini değiştirerek sonucun değişmediğinin görmesi ve bu eylemleri içselleştirerek, tüm eylemlerin aynı sonucu verdiğinin farkına varması bu durumu anlatır.

Koordinasyon, bireyin bir kavramı ya da bir yapıyı elde edebilmesi için iki ya da daha fazla kavramı veya yapıyı koordine etmesi ya da birleştirmesi ile ortaya çıkan mekanizmadır. Örneğin; sayılar üzerine bölme işlemi uygulanarak oran kavramının oluşturulması bu reflektif soyutlama çeşidine örnek gösterilebilir (Arnon ve diğerleri, 2014). Yine Dubinsky ve Lewin (1986) sınıflama ve sıralamanın koordinasyonu ile sayı kavramının oluşturulmasını bu duruma örnek olarak vermişlerdir (aktaran Deniz, 2014)

Enkapsülasyon, sürecin nesneye dönüşümünü ifade eder. Nesne kendi içinde bir bütündür ve üzerine başka eylemler ve süreçler organize edilebilir, var olan nesneler üzerinde yeni enkapsülasyonlar yapılarak yeni nesneler oluşturulabilir (Arnon ve diğerleri, 2014). Dubinsky'ye göre enkapsülasyon, nesneleri bir araya getirerek küme oluşturmadır (Çekmez, 2013).

Genelleme, birey var olan şemasını daha geniş bir topluluğa uyguladığı zaman bireyin şeması daha genellenmiş olur. Kişi bu adımda şemanın daha geniş uygulamalarının farkındadır (Dubinsky, 2002).

Geri dönme, var olan bir sürecin tersine çevrilerek yeni bir süreç elde edilmesidir. Böylece edinilen süreç kullanılarak yeni bir süreç oluşturulabilir (Arnon ve diğerleri, 2014).

2.3.3 Genetik Çözümleme

APOS, matematiksel bir kavramın oluşumunda bireyin kullandığı bilişsel yapılarla ilgilenir. APOS teorisinde bireylerin kavram oluşumunda gerekli yapıları öğrenebilmeleri için takip edebilecekleri yolları gösteren bir model oluşturulur. Bu modele "genetik çözümleme" denir. Genetik çözümleme; bilişsel yapılar (eylem-süreç-nesne-şema) ve mekanizmaları (içselleştirme-kapsülasyon-genelleme-geri dönme-koordinasyon) içeren bir modeldir. Genetik çözümleme, araştırmacıların matematiksel kavramları öğretme ve öğrenme deneyimlerini, kavramın öğrenme ve öğretme sürecinde yaşanılan zorlukları ve kavramın tarihsel gelişimini alır (Arnon ve diğerleri, 2014).

İlk genetik çözümleme, kavramın bireyler tarafından nasıl algılandığını açıklamak amacıyla yapılır. Kavramla ilgili öğretim sürecinde ve yapılan klinik görüşmelerde zihinlerinde oluşturmuş oldukları zihinsel yapılar belirlenir. Bu belirlenen zihinsel yapılar ile ilk genetik ayrışmadaki zihinsel yapılar karşılaştırılır ve bireylerin kavrama dair algıları, kavram oluşumları ve yaşanılan güçlükler açıklanmaya çalışılır. Eğer bireylerin performansları ilk genetik çözümlemeye göre açıklanamıyorsa bu çözümlemede bazı değişikliklere ve düzeltmelere gidilir.

Genetik çözümleme derse katılmış öğrencileri sorgulayarak ya da öncelikle genetik çözümlemeye göre ders tasarlayıp sonrasında bu öğrencileri sorgulayarak yapılabilir. Elde edilen veriler her iki durumda da APOS'a göre analiz edilir (Açıl, 2015).

2.4. Karekök Kavramı

Matematik tarihinde Pythagorasçılar sayıya ilişkin mistik bir inanca sahiptirler. Onlara göre evrenin özü sayılardır. Pythagorasçıların bu inançları ve irrasyonel sayıların keşfini Cemal Yıldırım'ın Matematiksel Düşünme (2010) adlı kitabında şöyle açıklanmaktadır:

> "Pythagorasçıların $\sqrt{2}$ irrasyonelini bulmasıyla karenin kenarı ile köşegeninin ölçüştürülemeyeceğini keşfetmişlerdir. Bu keşif matematiğin gelişimi

> açısından son derece önemli bir olay olmuştur. Pythagorasçılar, mistik öğretilerine ters düşen bu sonucu gizli tutarak işin içinden çıkmaya bakarken, matematik ilk büyük bunalımını yaşar…Rasyonel sayı ile dile getirilemeyen bir büyüklük nasıl olabilirdi?...Pythagorasçıların bir türlü içlerine sindiremedikleri bu beklenmedik durum…mantıksal ispat yönteminin belirginlik kazanmasında başlıca etkenlerden biri olmuştur. Nitekim dönemin ünlü bilgini Eudoxus'un, $\sqrt{2}$ 'nin bir rasyonel sayı olamayacağına ilişkin verdiği ispattır ki, bunalıma son vermiştir" (s.24).

Anlaşılacağı üzere yıllar öncesinde de irrasyonel sayıların keşif yolculuğunda sıkıntılar yaşanmış, insanların öğretilerine ters düştüğü için bu keşfin gizli tutulması gerektiği düşünülmüştür. İrrasyonel sayılar o zamanlarda anlamlandırılamamış ve bu sonucu gizli tutmaya karar vermişlerdir (King, 1998; aktaran Ercire, 2014). Ne var ki Eudoxus çıkıp bu durumun anlamsızlığına son verene kadar… Bu durumu kareköklü ifadeler üzerine yapılmış olan çalışmalar açıkça ortaya koymaktadır.

Karekök kavramı, irrasyonel sayı ve rasyonel sayı ile bu sayı kümelerinin birleşimi ile oluşan reel (gerçek) sayı gibi kavramların oluşumunda kilit bir role sahiptir. Bu kavramı soyutlayamayan bireyin, bu sayı kümelerinin oluşum süreçlerinde de sıkıntılar yaşamasına sebep olduğu yine yapılan araştırmalarda ortaya konmuştur (Arbour, 2012; Ercire, 2014; Fishbein, Jehaim ve Cohen, 1995; Kara ve Delice, 2012; Zazkis ve Sirotic, 2007). Bu nedenle kareköklü ifadeler ve bu sayıların diğer sayı kümeleriyle olan ilişkilerini anlayabilmek oldukça önemlidir.

Matematiğin anlaşılması ve kullanılması sayıların algılanmasıyla gerçekleşir (Kaminski, 2002; aktaran Eroğlu ve Temel, 2014). Öğrenciler okul öncesi dönemden başlayarak ilköğretimin son kademesine kadar yoğun bir şekilde sayılar ve sayı kümeleri ile karşı karşıya kalmaktadır. Öğrencilerden 8.sınıfta bildiği kabul edilen sayı kümelerine (sayma sayısı, doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı) yeni bir küme daha (irrasyonel sayı) eklemesi ve rasyonel sayı ile irrasyonel sayı kümelerinin birleşmesiyle oluşan reel sayılar kavramını oluşturması beklenmektedir. Bireyler sayıları bildiklerinde, o sayıların hangi anlamı ifade ettiğini anladıklarında, yani sayıların hangi çokluğun temsili olduğunu kavradıklarında düşünmelerinden emin olurlar ve anladıkları için doğru kullanırlar. Peled ve Hershkovitz (1999) irrasyonel sayılar üzerine yaptıkları çalışmada öğrencilerin irrasyonel sayıların yaklaşık olarak değerlerini doğru tahmin edemediklerini ve sayı doğrusunda sayıların yerlerini doğru bir şekilde gösteremediklerini ortaya koymuşlar; yine Seyhan ve Gür (2004), Stafylidou ve Vosniadou (2004), Ubuz ve Argün (2007) yaptıkları çalışmalarda rasyonel ve irrasyonel sayıların sıralanmasında, karşılaştırılmasında ve yaklaşık değerinin hesaplanmasında öğrencilerin kavram yanılgılarına sahip olduklarını gözler önüne sermişlerdir (aktaran Eroğlu ve Temel, 2014).

Köklü sayılarla ilgili yapılan araştırmalar incelendiğinde (Cengiz, 2006; Orhun, 1998; Sirotic, 1998; Şenay, 2002), öğrencilerin karşılaştıkları güçlükler şöyle özetlenebilir; köklü sayının büyüklüğüne karar verememe ve sayı doğrusuna yerleştirememe, köklü bir sayıyı üslü bir biçimde ifade edememe, her a sayısı için $\sqrt{a^2}$=a eşitliğinin doğru olduğunu düşünme, bir sayının karesinin karekökü ile karekökünün karesi arasındaki farkı ayırt edememe, üslü sayıların karekökünü bulmada zorlanma gibi durumlar karşımıza çıkmaktadır.

Dikici ve İşleyen'e (2004) göre, herhangi bir konuda öğrenme güçlüğü çeken bir öğrencinin daha sonra işlenecek olan konularda başarıya ulaşması zordur. Matematik konuları sarmal bir yapıya sahip olduğu için herhangi bir kavram onun ön şartı durumundaki kavram verilmeden kazandırılamaz (Altun, 1998). Karekök kavramı irrasyonel sayı kavramını oluşturmak için ön şart durumunda olduğu için bu kavramın nasıl oluştuğu ve bu süreçte yaşanılan güçlükler oldukça önemlidir.

Matematik Öğretim Programında öğrencilerin bazı becerileri kazanmaları hedeflenmektedir. Bunların içerisinde matematiksel kavramları anlayabilmek ve bu kavramları günlük hayatta kullanabilmek önemli bir yere sahiptir (MEB, 2018). Karekök kavramı ise öğrencinin ortaokulda kazanması gereken önemli kavramlardan biridir. Sayılar ve işlemler öğrenme alanının ortaokulda son basamağı olan kareköklü ifadeler alt öğrenme alanı ile öğrenci tarafından kazanılması beklenen davranış; öğrencilerin kareköklü ifadeleri anlaması, bu ifadelerle işlem yapabilmesi ve ondalık gösterimlerin kareköklerini belirlemesidir. Son olarak gerçek sayıları tanımaları ve rasyonel sayılar ile irrasyonel sayılar arasında ilişkiler kurabilmeleri yine 8. sınıfta ele alınmaktadır.

8.sınıf matematik konuları içinde kareköklü ifadeler 8 kazanım sayısıyla 25 ders saatlik bir süreye yayılmıştır ve 8.sınıf konularının %13'ünü kapsamaktadır. 8.sınıf matematik konuları içinde doğrusal denklemler konusundan sonra en çok ders saatine sahip ikinci konu olarak yer almaktadır (MEB, 2108). 8.sınıf kareköklü ifadeler konusu altında yer alan kazanımlar ise şu şekildedir:

- Tam-kare pozitif tam sayılarla bu sayıların karekökleri arasındaki ilişkiyi belirler.
- Tam-kare olmayan kareköklü bir sayının hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirler.
- Kareköklü bir ifadeyi $\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{b}}$ şeklinde şeklinde yazar ve $\boldsymbol{a}\sqrt{\boldsymbol{b}}$ şeklindeki ifadede katsayıyı kök içine alır.
- Kareköklü ifadelerde çarpma ve bölme işlemlerini yapar.
- Kareköklü ifadelerde toplama ve çıkarma işlemlerini yapar.
- Kareköklü bir ifade ile çarpıldığında, sonucu bir doğal sayı yapan çarpanlara örnekler verir.
- Ondalık ifadelerin kareköklerini belirler.
- Gerçek sayıları tanır, rasyonel ve irrasyonel sayılarla ilişkilendirir.

Yapılan bu araştırmada, karekök kavram oluşumu sürecinin derinlemesine incelenmesi amaçlandığı için ilk iki kazanıma odaklanılmış ve bu iki kazanım ele alınmıştır.

2.5 İlgili Çalışmalar

Bu bölümde GME, APOS ve kareköklü ifadeler ile ilgili yapılan çalışmalara yer verilmiştir.

2.5.1 GME İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Ülker (2018) yaptığı çalışmada sözsüz ispatların, formal ispata geçişi kolaylaştıracak ve söz konusu didaktik boşluğu dolduracak bir araç olarak nasıl kullanılabileceğini incelemiştir. Çalışmada GME'nin sunduğu teorik çerçeveden yararlanılmış ve nitel bir araştırma yöntemi olan öğretim deneyi kullanılmıştır. Bu bağlamda ortaokul 7. sınıf seviyesine uygun altı tane sözsüz ispat seçilmiş ve teorinin sunduğu etkinlik tasarımı yaklaşımı bağlamında birer sözel problem durumu şeklinde öğretimleri planlanmıştır. Çalışmanın verileri öğrenci defterleri, araştırmacı gözlem notları ve bir öğrenci grubunun çalışmalarının video kaydı ile toplanmıştır. Veriler teorinin belirlediği aşamalara göre hem tüm sınıfın çalışmasını hem de odak grubun çalışmasını yansıtacak şekilde analiz edilmiştir. Çalışmanın sonuçları öğrencilerin ispatla ilişkili pek çok matematiksel süreci yaşadığını, alanlar arası ilişkilendirmeler gerçekleştirdiklerini ve yaşadıkları süreçlerde bir ilerleme kaydettiklerini göstermektedir.

Atasoy (2017) yaptığı çalışmada GME'nin öğretim ilkeleri doğrultusunda Talim ve Terbiye Kurulu tarafından onaylanmış ortaokul son sınıf matematik ders kitabı ile Singapur ortaokul son sınıf matematik ders kitabını karşılaştırmalı analize tabi tutmuştur. Amacı, GME'nin özünü oluşturan ilkeleri ortaya çıkararak bu ilkelerin bahsi geçen kitaplarda nasıl bir dağılım gösterdiğini araştırmaktır. Genel olarak, Türkiye'yi temsil eden kitap %21 oranında gerçekçi durumlara sahipken, bu oran Singapur için %60'tır. Ayrıca Türkiye'yi temsil eden matematik ders kitabındaki gerçekçi durum içeren örnek soruların %50'sinde, Singapur'u temsil eden matematik ders kitabındaki örnek soruların ise %55'inde model kullanılmıştır. Kitaplar, öğrencilerin aktif katılımını gerektiren bölümler açısından kıyaslandığında Singapur'u temsil eden kitabı kullanan öğrencilerin daha aktif olduğu sonucu elde edilmiştir.

Cihan (2017) yaptığı çalışmada 8.sınıf öğrencilerinin GME yaklaşımının öğrencilerin olasılık ve istatistik öğrenme alanına ilişkin başarı, motivasyon ve kalıcılık üzerine etkisini araştırmıştır. Nicel araştırma yöntemlerinden öntest-sontest kontrol gruplu desene göre yapılan çalışma sonucunda GME yaklaşımının akademik başarıya ve öğrenmenin kalıcılığına olumlu yönde etkisi olduğu ve motivasyon ölçeği sonucuna göre deney grubu ile kontrol grubu arasında deney grubunun lehine anlamlı bir farklılığın ortaya çıktığını görmüştür.

Demir (2017) yaptığı çalışmada, GME destekli öğretimin, ortaöğretim 10. sınıf "Katı Cisimlerin Yüzey Alanları ve Hacimleri" konusunda, öğrencilerin matematik kaygısına, matematik özyeterlik algısına, akademik başarısına ve öğrenilen bilgilerin kalıcılığına etkisi ve GME destekli öğretime ilişkin öğrenci görüşlerini incelemiştir. Çalışmada, GME destekli öğretimin, mevcut öğretim programına dayalı öğretime göre öğrenci akademik başarısında daha etkili olduğu ve kalıcılığı olumlu yönde etkilediği görülmüştür. Ayrıca deney ve kontrol grubu öğrencilerinin matematik kaygısı puan ortalamaları arasında istatistiksel olarak anlamlı bir fark gözlenirken, matematiğe yönelik öz yeterlik algısı puan ortalamaları arasında anlamlı bir farkın gözlenmediği ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin GME yaklaşımına yönelik görüşlerinin olumlu olduğu sonucuna varılmıştır.

Kütküt (2017) yaptığı çalışmada ortaokul matematik derslerinde, GME yaklaşımının kullanılmasının incelenmesini ve bu yaklaşımın öğrencilerin matematik başarılarına etkisinin araştırılmasını amaçlamıştır. Nitel ve nicel yöntemlerin bir arada olduğu karma desenli bir çalışmadır. Sonuç olarak, ortaokul matematik dersinde çoğunlukla geleneksel yöntemin kullanıldığı görülmüştür. GME yaklaşımı temele alınarak kazanımların verildiği deney grubu öğrencilerinin mevcut öğretim yönteminin uygulandığı kontrol grubu öğrencilerine nazaran matematik başarı testinde daha başarılı oldukları bulunmuştur.

Cansız (2016) yaptığı çalışmada GME yaklaşımının 12.sınıf öğrencilerinin matematik başarılarına ve yaratıcı düşünme becerilerine olan etkisini araştırmıştır. Çalışma, tam deneysel araştırma deseninden oluşmaktadır. Araştırma sonucunda elde edilen bulgulara göre; GME yaklaşımının öğrencilerin yaratıcı düşünme becerilerini olumlu yönde etkilediği görülmüştür. Türev Başarı Testi analizine göre gruplar arasında anlamlı bir fark bulunamamıştır. Araştırma sonunda yapılan mülakatlara göre öğrencilerin dersleri GME yaklaşımı ile işlenmesinin kendilerine fayda sağlayacağı yönünde görüş bildirmişlerdir. Ayrıca süreç içerisinde öğrencilerin tartışma becerilerinin ve birbirleri ile olan iletişimlerin geliştiği ve başarıya olan inançlarının da olumlu yönde etkilendiği görülmüştür.

Özkaya'nın (2016) yaptığı çalışmada 5.sınıf öğrencilerinin sayılar ve işlemler ünitesinde GME destekli öğretimin öğrenci başarısına, tutumuna ve matematik özbildirimine etkisi araştırılmıştır. Nicel araştırma yöntemlerinden öntest-sontest kontrol gruplu denkleştirilmiş gruplar deseni kullanılmıştır. Araştırma sonucunda GME ile öğrenen öğrencilerin akademik başarıları, matematik tutum ve öz bildirimlerinin klasik yöntemle öğrenen öğrencilere göre daha yüksek olduğu konusuna varılmıştır.

Çilingir'in (2015) yaptığı çalışmada 4.sınıf öğrencilerinin geometrik şekiller ünitesinin GME yaklaşımıyla öğretilmesinin görsel matematik okuryazarlığı düzeyine ve problem çözme becerisine etkisi incelenmiştir. Nicel araştırma yöntemlerinden öntest-sontest kontrol gruplu yarı deneysel desen kullanılmıştır. Araştırma bulgularında, GME destekli öğretim yapılan öğrencilerin matematik başarı testinde daha başarılı oldukları, görsel matematik okuryazarlığı öz yeterlik algılarında ve problem çözmeye yönelik tutumlarında daha çok gelişim gösterdikleri ortaya çıkmıştır.

Gözkaya (2015) yaptığı çalışmada GME yönteminin kullanımının öğrenci başarısına, tutumuna ve bilginin kalıcılığına etkisini araştırmıştır. Araştırmada nicel araştırma yaklaşımı benimsenmiş ve araştırma sonucunda; GME yönteminin öğrencilerin başarılarını anlamlı bir şekilde artırdığını ve kalıcılığı olumlu yönde etkilediği görülmüştür. Bununla birlikte GME yönteminin, öğrencilerin matematiğe karşı olumlu tutum geliştirmelerine yardımcı olduğu sonucuna da ulaşılmıştır.

Deniz'in (2014) yaptığı çalışmada 8.sınıf öğrencilerinin eğim kavramını matematikleştirme ve oluşturma süreçlerinin incelenmesi amaçlamıştır. Eğim oluşturma süreçlerini APOS teorik çerçevesinde incelemiştir. Öğrencilerin informal bilgilerini kullanabilmeleri için çalışma RME yaklaşıma göre planlanmış ve yürütülmüştür. Elde edilen sonuçlara göre, APOS teorisine göre yapılan genetik ayrışmada eylem düzeyinde olan öğrencilerin eğimi, yüksekliğin yatay mesafeye bölüneceği bir algoritma şeklinde ezberledikleri ve eğim hesabında bu algoritmayı kullandıkları görülmüştür. Süreç düzeyindeki katılımcıların eğimi bir oran olarak yapılandırabildikleri ve aynı doğru veya doğrusal bir görsel üzerinde alınan farklı noktalarda değişmeyeceğini anlamlandırabildikleri görülmüştür. Kavramın süreç düzeyini tamamladığı düşünülen ya da nesne sürecine geçen katılımcıların eğimi, onunla doğrudan ilişkisi olmayan bir problem durumuna yansıtabildiği görülürken başka kavramlarla ilişkilendirildiği sonucuna da varılmıştır.

Uça (2014) yaptığı çalışmada GME yönteminin kullanıldığı 4.sınıf ondalık kesirlere ilişkin anlamlandırma süreçlerinde nasıl bir yol izlediğinin ortaya konulmasını amaçlamıştır. Ondalık kesirlerin gösterimleri ve karşılaştırılmasına yönelik etkinlikler aracılığıyla anlamlandırma süreçleri incelenmiştir. Araştırma, tasarı araştırması ile desenlenmiştir. Çalışmada GME etkinliklerinden kütle tartma etkinlikleri ile parçadan bütüne ulaşabildikleri, ondalık kesirleri sezgisel olarak okuyabildikleri, parça ile bütün arasında ilişki kurabildikleri, tam sayılı kesirlerin okunuşlarından yola çıkarak ondalık kesirlerin okunuşlarını ifade edebildikleri, kesir ve ondalık kesir bağlantılarından yola çıkarak ondalık kesir bilgilerine ulaşabildiklerine ilişkin bir yol izledikleri sonucuna ulaşılmıştır.

Ayvalı (2013) yaptığı çalışmada kesirlerle yapılan işlemleri strateji kullanarak tahmin etme kazanımını GME ile uygulanan öğretim sonucunda, 6.sınıf öğrencilerinin sözel tahmin problemlerindeki ve pür sayısal problemlerindeki hesapsal tahmin başarısındaki ve strateji kullanımındaki değişimi araştırmıştır. Kesirlerle yapılan hesapsal tahmin stratejileri kullanma konusunda GME yaklaşımıyla yapılan öğretimin; öğrencilerin tahmin başarılarını, kullandıkları strateji çeşitlerini geliştirmede geleneksel öğretime göre daha etkili olduğu sonucuna varmıştır.

Ersoy (2013) yaptığı çalışmada matematik dersi istatistik ve olasılık kazanımlarının öğretiminde GME yaklaşımının öğrenci başarısına etkisini ve GME destekli öğretime ilişkin öğrenci görüşlerini incelemiştir. Araştırma sonucunda istatistik ve olasılık kazanımlarının öğretiminde GME yönteminin başarıyı artırdığı ve yöntemin kalıcılığa etki ettiği sonuçlarına ulaşılmıştır. Bununla birlikte, öğrencilerin GME yöntemine ilişkin görüşlerinin olumlu olduğu ve matematik dersine karşı olumlu tutumlar geliştirdiğine yardımcı olduğu gözlemlenmiştir.

GME ile ilgili yapılan diğer çalışmalar da incelendiğinde (Çakır, 2013; Can, 2012; Bıldırcın, 2012; Çakır, 2011; Akkaya, 2010; Akyüz, 2010; Gelibolu, 2008; Üzel, 2007; Demirdöğen, 2007) bu yaklaşımla yapılan çalışmaların çoğu nicel araştırma olup yapılan öğretimin etkililiğine bakılmıştır.

2.5.2 APOS İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Günaydın (2018) yaptığı çalışmada 5.sınıf öğrencilerinin kesir kavramını oluşturma süreçlerini APOS teorisi çerçevesinde değerlendirmiştir. APOS teorisine göre kesir kavramının ilk genetik çözümlemesi ortaya konmuştur. Eylem düzeyinde olan öğrencilerin kendilerinden istenen paylaştırma durumlarını yapabildiği ancak ulaştığı sonuçları kesir olarak ifade edemedikleri, aynı kesrin farklı gösterimleri arasında dönüşüm yapamadıkları görülmüştür. Süreç aşamasında olan bir öğrencinin eşit paylaştırmalar yaparak kesir elde edebildikleri, istenen dönüşümleri yapabildikleri görülmüştür. Nesne düzeyinde geçen bir öğrencinin herhangi bir dışsal uyarana ihtiyaç duymadan kesir kavramını soyut bir şekilde oluşturabildiği, bir kesre denk kesirleri rahatlıkla oluşturabildiği, bütünden parçaya ve parçadan bütüne gitme konusunda zorlanmadıkları görülmüştür. Çalışmanın sonuçlarına göre oluşturulan genetik çözümlemenin elde edilen öğrenci verileri ile uyumlu olduğu görülmüştür. Ayrıca probleme dayalı öğrenme yaklaşımının öğrencilerin matematiğe karşı tutumlarını olumlu yönde etkilediği; problem çözebilme ve eleştirel düşünme becerilerini geliştirdiği gözlenmiştir.

Gürbüz (2018) yaptığı çalışmada yedinci sınıf öğrencilerinin oran ve orantı kavramlarını yapılandırma süreçlerini incelemiştir. Öğretim sürecinde matematiksel kavramlarının gerçek yaşam durumları dikkatte alınarak, sınıf ortamında derin bir anlayışla geliştirilmesini amaçlayan otantik öğrenme yaklaşımına dayalı etkinlikler ile planlanmış ve uygulanmıştır. Eylem basamağında olduğu düşünülen öğrencilerin oran kavramını çarpımsal ilişki olarak yapılandıramadığı; orantı kavramını ise açıklayamayıp; sadece verilen durumun doğru ya da ters orantılı çokluklar olup olmadığını belirleyebildikleri görülmüştür. Süreç düzeyine geçmiş olduğu düşünülen öğrencilerin oran kavramını iki çokluk arasındaki sabit bir ilişki olarak yapılandırabildiği; orantı kavramını günlük hayat durumlarıyla ilişkilendirerek çoklukların nasıl değişebileceğini yorumlayabildikleri görülmüştür. Nesne düzeyine geçme sürecinde ise öğrencilerin oran kavramını matematiksel bir nesne olarak farklı problem durumlarında ve sahip olduğu ilişkili matematiksel kavramlarla kullanabildiği; orantı kavramını ise iki oranın eşitliğiyle açıklayabilirken, günlük hayat durumlarında ve diğer derslerde orantı kavramına uygun örnekler verebildikleri görülmüştür.

Açan (2015) yaptığı çalışmada sekizinci sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisinde bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesini amaçlamıştır. Verilerin analizi sonucunda öğrencilerin daha çok dönüşüm hareketleri ile ilgili olarak yansıma çizgisine dikkat etmede, dönme merkezini belirlemede, dönüşüm hareketlerinin özelliklerine dikkat etmede sıkıntı yaşadıkları tespit edilmiştir.

Açıl (2015) yaptığı çalışmada denklem kavramının öğretiminde ACE öğretim döngüsünün ve MEB kılavuzluğundaki öğretimin ortaokul 3.sınıf öğrencilerinin soyutlama süreçlerine, matematiksel başarı düzeylerine etkisini araştırmış ve öğrencilerin soyutlama süreçlerini Yenilenmiş Bloom Taksonomisine göre incelemiştir. Araştırmanın sonucunda, ACE öğretim döngüsünde öğretim gören öğrencilerin kontrol grubuna göre daha iyi düzeyde olduğu görülmüştür. Ayrıca, öğrencilerin soyutlama süreçlerinin dikkate alınarak hazırlanan bir ders planının öğrenme için gerekli olabileceği ifade edilmiştir.

Deniz (2014) yaptığı çalışmada ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin eğim kavramını matematikleştirme ve oluşturma süreçlerini incelemiştir. Bu süreç APOS teorik çerçeve ile analiz edilmiştir. Öğrencilerin günlük yaşamdan gelen bir bağlam durumunda informal bilgilerini kullanmalarına izin veren RME yaklaşımına uygun ders ortamı hazırlanmıştır. Elde edilen sonuçlarda APOS öğrenme teorisine göre eğim kavramının genetik ayrışması ortaya konmuş ve eylem düzeyinde olduğu düşünülen katılımcıların eğimi yüksekliğin yatay mesafeye bölüneceği bir algoritma şeklinde ezberledikleri ve eğim hesabında, bu algoritmayı kullandıkları görülmüştür. Süreç düzeyine geçmiş olduğu düşünülen katılımcıların ise eğimi bir oran olarak yapılandırabilmiş ve eğimin aynı doğru ya da doğrusal bir görsel üzerinde alınan farklı noktalara göre değişmeyeceğini anlamlandırmıştır. Kavramın süreç düzeyinde oluşumunu tamamladığı ya da nesne düzeyine geçme aşamasında olabileceği düşünülen öğrencinin ise eğimi, onunla doğrudan ilişkili olmayan bir problem durumunda yansıtabildiği görülürken, başka kavramlarla da ilişkilendirebildiği sonucuna varılmıştır.

Kabael (2011) yaptığı çalışmada Analiz-II dersini alan öğrencilerin fonksiyon kavramını tek değişkenden iki değişkene genelleme süreçlerini incelemiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını oluştururken, genel fonksiyon kavramını anlama seviyelerinin temel oluşturduğu tespit edilmiştir. APOS teorisine göre süreç düzeyinde anlayış sergileyen öğrencilerin iki değişkenli fonksiyon kavramını anlama düzeylerinin zayıf olduğu ifade edilmiştir.

Yılmaz (2011) çalışmasında görselleştirmelerin, matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerindeki yeri, önemi ve etkisini belirlemeyi incelemeyi amaçlamıştır.

Böylece öğretmen adaylarının bu süreçlerde hangi görselleştirmeleri kullandıkları, ne tür görsel imajlara sahip oldukları ve kullanılan görselleştirmelerin matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerine etkileri araştırılmıştır. Her bir öğretmen adayı ile dört görüşme yapılan bu çalışmada araştırmacı, soyutlama ve genelleme yaparken görselleştirmelerden sıklıkla yararlanıldığına ve farklı şekillerde görselleştirme kullanıldığına yönelik bulgular elde etmiştir. Ayrıca kullanılan görselleştirmelerin kavramlar ve aralarındaki ilişkilerin tamamlanmasında önemli bir role sahip olduğu ve süreçlerin gelişiminde olumlu etkilerinin bulunduğu tespit edilmiş ve öğretmen adaylarının görsel imajlarını güçlendirdiği gözlenmiştir.

Çetin (2009) yaptığı çalışmada birinci sınıf analize giriş dersi öğrencilerinin limit konusunu nasıl kavradıklarını incelemiş ve araştırmacı tarafından APOS teorisi kullanılarak tasarlanan öğretim ortamının uygulamasından sonra nasıl değiştiğini araştırmıştır. Araştırmada durum çalışması yöntemi kullanılmıştır. Çalışmanın sonuçlarına göre oluşturulan genetik çözümlemenin bu çalışmadan elde edilen verilerle uyumlu olduğu görülmüştür. Ayrıca araştırmacı tarafından hazırlanan öğrenme ortamının öğrencilerin limit konusunu kavramalarına olumlu etkisi olduğu belirtilmiştir.

2.5.3 Karekök İle İlgili Yapılan Çalışmalar

Özdemir'in (2015) yaptığı çalışmada ortaokul 8. sınıf matematik dersinde kareköklü sayılar konusunun öğretiminde kavram haritası destekli eğitiminin geleneksel öğretim yöntemine kıyasla öğrenci başarısına, öğrenmelerin kalıcılığına ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi araştırılmıştır. Araştırma sonucunda; kareköklü sayılar konusunu kavram haritası destekli öğretimle işlemenin, öğrencilerin akademik başarısını ve bilgilerin kalıcılığını arttırdığı aynı zamanda matematiğe karşı tutumlarını da olumlu yönde etkilediği sonucuna ulaşılmıştır.

Ercire'nin (2014) yaptığı çalışmada 8. ve 9.sınıf öğrencilerinin irrasyonel sayılara ilişkin yaşadığı güçlüklerin belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu çalışma betimsel türde olan bir nitel çalışmadır. Çalışmada öğrencilerin irrasyonel sayı ile ilgili kareköklü ifade kavram imgesinin ağır bastığı görülmüştür. Ayrıca sayı kümelerinin birbiri ile olan ilişkilerini anlamada, verilen bir sayının irrasyonel sayı olup olmadığına karar vermede, pi sayısını nesneleştirmede, sayıların yoğunluklarını kavramada ve çoklu temsillerinde güçlükler yaşandığı görülmüştür. İrrasyonel sayıların toplanması ve çarpılması sürecinde öğrencilerin birçoğunun eylem aşamasında kaldığı belirlenmiştir.

Kuru'nun (2014) yaptığı çalışmada ilköğretim 8. sınıf matematik dersinde yaşanan öğrenme güçlükleri, bu güçlüklerin sebepleri ve güçlüklerin giderilme yollarının neler olduğunu belirlemek amaçlanmıştır. Araştırmada nitel analiz türlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Araştırmada öğretmen, öğrenci görüşmeleri ve sınav verilerinden elde edilen sonuçlara göre en çok öğrenme güçlüğü yaşanan öğrenme alanları; sayılar, cebir, ölçme ile istatistik ve olasılıktır. En çok öğrenme güçlüğü yaşanan konular; geometrik cisimler, üslü sayılar, benzerlik, özdeşlikler, eşitsizlikler, çarpanlara ayırma, kareköklü sayılar ve denklemlerdir. Öğretmen ve öğrenci görüşleri analiz edildiğinde 8. sınıf matematik dersinde yaşanan öğrenme güçlüklerinin sebepleri; öğrenciden kaynaklanan sebepler, öğrenme ortamından kaynaklanan sebepler, öğretim programından kaynaklanan sebepler ve öğretmenden kaynaklanan sebepler olmak üzere 4 ana kategoride toplanmıştır.

Eroğlu ve Temel'in (2013) yaptığı araştırmada ilköğretim 8.sınıf öğrencilerinin sayı, doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı ve irrasyonel sayı kavramlarını nasıl anlamlandırdıklarının ve bu kavramlarla ilgili sahip oldukları kavram yanılgılarının ortaya konulması amaçlanmıştır. Yapılan mülakatlardan elde edilen veriler içerik analiz yöntemi kullanılarak öğrencilerin sayı, doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı ve irrasyonel sayıları hangi özelliklerine göre sayı, doğal sayı, tam sayı, rasyonel sayı ve irrasyonel sayı kümelerine dahil ettikleri ortaya konulmaya çalışılmıştır.

Koca'nın (2012) yaptığı çalışmada ilköğretim matematik etkinliklerinde hesap makinesi kullanımının öğrenci başarısı üzerine etkisi incelenmiştir. Elde edilen bulgular, matematik etkinliklerinde hesap makinesi kullanan grubun, hesap makinesi kullanmayan gruba göre daha başarılı olduğunu göstermiştir. Ayrıca deney grubundaki öğrencilerin hesap makinesi kullanımı konusundaki düşüncelerinin olumlu yönde geliştiği, hesap makinesini kullanmaya isteklerinin ve ilgilerinin arttığı gözlenmiştir. Çalışmanın bütünü ele alındığında ilköğretim matematik etkinliklerinde hesap makinesi kullanımının öğrencilerin genel matematik başarılarını arttırdığı sonucuna ulaşılmıştır.

Başıbüyük’ün (2012) yaptığı araştırmada kareköklü sayıların yaklaşık değerlerini bulmak için kullanılan, İbrahim Hakkı'nın kullanmış olduğu yöntem, Babil yöntemi ve MEB ders kitaplarında yer alan eski ve yeni yöntemlerin öğrenci başarısına etkilerinin araştırılması ve matematik tarihinden faydalanılarak öğretim yapılan gruplardaki öğrencilerin matematik derslerinde matematik tarihinin kullanılmasına yönelik tutumlarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Uygulama sonrasında elde edilen verilerin analizi yapıldığında, İbrahim Hakkının kullanmış olduğu yöntemin uygulandığı gruptaki başarı ile MEB ders kitabında bulunan yöntemin uygulandığı grup arasında anlamlı bir fark oluşmuştur. Babil yönteminin uygulandığı grup ile MEB grubu arasında bir fark olmasına rağmen bu fark anlamlı bulunmamıştır. Uygulamanın ikinci kısmında birleştirilen ve deney grubu olarak değerlendirilen Babil grubu ile İbrahim Hakkı grubunun tutum puanlarının kontrol grubundaki MEB grubuna göre daha yüksek olduğu belirlenmiş ve grupların tutum puanları arasında anlamlı bir fark ortaya çıkmıştır.

Özkök’ün (2010) yaptığı araştırmada ilköğretim 8.sınıflar matematik dersinde, sayılar öğrenme alanının kareköklü sayılar alt öğrenme alanında Gagne'nin öğretim modeliyle oluşturulan öğretim yazılımının bilgisayar destekli öğretim yöntemi yardımıyla uygulanarak, geleneksel öğretim yöntemine kıyasla öğrenci başarısını ve tutumunu belirlemek amaçlanmıştır. Araştırmanın sonucunda; Gagne'nin öğretim modeliyle hazırlanan öğretim yazılımlı bilgisayar destekli öğretim yönteminin geleneksel öğretim yöntemine göre daha başarılı olduğu belirlenmiştir. Ayrıca Gagne'nin öğretim modeliyle hazırlanan öğretim yazılımlı bilgisayar destekli öğretim yönteminin öğrencileri derse daha iyi motive ederek, öğrencilerin başarısını ve derse olan ilgisini artırdığı görülmüştür.

Özcan’ın (2004) yaptığı çalışmada ise ilköğretim sekizinci sınıfta okutulmakta olan öğrencilerin kareköklü sayılar konusunda bilgi eksiklikleri ve kavram yanılgılarını belirlemek ve bunların giderilmesine katkıda bulunmak, ayrıca ilköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin matematik dersinde kullanılan ölçme ve değerlendirme teknikleri, teknolojiden yararlanma şekilleri konusunda düşüncelerini tespit etmek amaçlanmıştır. Sonuçta öğrencilerin kareköklü sayılarla ilgili temel kavramlar konusunda bilgi eksikliklerinin olduğu görülmüş, bu bilgi eksiklerinin ve kavram yanılgılarının neden kaynaklanabileceği konusunda yorumlar yapılmıştır. Ayrıca öğrencilerin ölçme ve değerlendirme yöntemleri ve teknolojinin kullanılma şekilleri konusunda düşünceleri tespit edilmiştir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

III. YÖNTEM

Bu bölümde araştırma türü ve deseni, katılımcılar, araştırmada kullanılan veri toplama araçları, veri toplama süreci ve verilerin analizi hakkında bilgiler verilmektedir.

3.1 Araştırmanın Türü ve Deseni

Bu çalışmada sekizinci sınıf öğrencilerinin GME yaklaşımına dayalı olarak düzenlenen bir öğretim ortamında bağlamsal problemler aracılığı ile karekök kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi amaçlanmıştır. Bu araştırma öğrencilerin bu çerçevede kavramı oluşturma süreçlerinin derinlemesine incelenmesinin yanı sıra matematikleştirme becerilerinin de araştırılması ve karekök kavramını oluştururken karşılaşılan güçlüklerin ne olduğunun belirlenmesi amacıyla nitel olarak planlanmıştır. Böylece katılımcıların düşünme biçimlerinin açıkça ortaya konması ve bu sürecin derinlemesine incelenmesi hedeflenmiştir. "Nitel araştırma, gözlem, görüşme ve doküman analizi gibi veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir şekilde ortaya konmasına yönelik bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanabilir" (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s.41). Nitel çalışmalar detaylı bilgi toplayıp durumu derinlemesine incelemek için önemlidir.

Katılımcıların karekök kavramını oluşturma süreçleri ve bu süreçte zihinlerinde oluşan yapılandırmaları derinlemesine incelemek amacıyla çalışma nasıl ve niçin sorularını temelinde barındırdığı, araştırmacı tarafından kontrol edilemeyen olgu ve olayların derinlemesine incelenmesini sağladığı için durum çalışması yöntemi kullanılmıştır (Yin, 2003). "Durum çalışması; güncel bir olguyu kendi gerçek yaşam çerçevesi içinde çalışan, olgu ve içinde bulunduğu içerik arasındaki sınırların kesin hatlarıyla belirgin olmadığı ve birden fazla kanı veya veri kaynağının mevcut olduğu durumlarda kullanılan, görgül bir araştırma yöntemidir" (Yin, 1984, s.23; aktaran Yıldırım ve Şimşek, 2016, s.289). Nitel durum çalışmasının en temel özelliği bir durumu derinlemesine araştırmaktır. Yani "Bir duruma ait etkenler (bireyler, ortam, süreçler, durumlar, vb.) bütüncül bir yaklaşımla araştırılır ve ilgili durumu nasıl etkiledikleri üzerine odaklanılır" (Yıldırım ve Şimşek, 2016, s.73).

Durum çalışması yaparken izlenebilecek belli başlı aşamalar aşağıdaki gibidir (Yıldırım ve Şimşek, 2006):

- Araştırma sorularının geliştirilmesi: Durum çalışmaları için en uygun soru alanı "nasıl" ve "niçin (neden)" sorularıdır (Yin, 1984).
- Araştırmanın alt problemlerinin geliştirilmesi: Her alt problem araştırmacının ilgisini nereye odaklaştıracağını gösterir. Durumları daha derinlemesine incelemek için problem alanını alt alanlara bölmek ve ayrıntılı cevaplar bulmak mümkün olacaktır.
- Analiz biriminin saptanması: Bu aşama, araştırmacı için sorun kaynağı olan "durum"un ne olduğunu tanımlayamaya ilişkin bir boyuttur.
- Çalışılacak durumların belirlenmesi: Araştırmacı, durumu en iyi araştırabileceği durumları belirlemek için hangi durumların araştırma problemine uygun olup olmadığını ve düşünülen durumların araştırma için mümkün olup olmayacağını dikkate almak zorundadır.
- Araştırmaya katılacak bireylerin seçimi: Bu ilke, durum çalışmasının ayrıntılı ve derinlemesine bir araştırma yöntemi olmasından kaynaklanmaktadır. Örneklem seçiminde çoğunlukla nitel araştırmayla özdeşleşmiş olan amaçlı örnekleme yöntemi de kullanılabilir.
- Verilerin toplanması ve toplanan verilerin alt problemlerle ilişkilendirilmesi: Verilerin toplanması araştırmanın başında belirlenmiş olan ana ve alt problemlere göre yapılarak araştırmacının problemlerle ilgisiz olabilecek verileri toplamaktan kaçınması sağlanabilir.
- Verilerin analiz edilmesi ve yorumlanması: Verilerin analizinde araştırmacının çalıştığı problemle ilgili alanyazını etkili bir şekilde kullanması beklenir. İlgili alanyazından alıntılar yapmak, yorumların başka araştırmacı yorumlarıyla ne derece uyuştuğu veya çeliştiği konusunda tartışmalar yapmak veri analizini ve yorumlamayı zenginleştirecektir.
- Durum çalışmasının raporlaştırılması: Durum çalışması raporları, genellikle geniş açıklama ve betimlemelerle dolu olmaktadır. Burada araştırmacıdan

beklenen durum “doğru bir betimleme ve analiz dozu”nu tutturmasıdır. Yani bu raporlar hem araştırma problemlerine ve alt problemlerine doyurucu yanıtlar vermeli, hem de gereksiz bilgilerden arınmış olmalıdır.

Çalışmada durum olarak karekök kavramı ele alınmış ve bu durum öğrencilerin karekök kavramını oluşturduğu tüm süreçleri kapsamaktadır. Öğrencilerin karekök kavramını nasıl ve ne düzeyde oluşturdukları, oluştururken hangi güçlüklerle karşılaştıkları araştırmanın çatısını oluşturmaktadır. Kavram oluşumu esnasında gözlem, görüşme ve dokümanlar oldukça kapsamlı ve uzun olduğu, katılımcıların süreçlerinin derinlemesine incelenmesi ve bütüncül bir çerçevede yorumlanması gerektiği için durum çalışmasının daha anlamlı sonuçlar vereceği düşünülmüştür.

3.2 Katılımcılar

Araştırmanın katılımcılarını, Karadeniz’in büyük bir ilinin merkez bir ilçesine bağlı devlet ortaokulun 2018/2019 eğitim-öğretim yılındaki üç 8. sınıf öğrencisi oluşturmaktadır. Katılımcıların okulu, araştırmacının öğretmen olarak görev yaptığı okul olarak seçilmiştir. Bunun nedeni, öğrenme ortamını amacına uygun olarak daha planlı ve kolay hazırlanabilmesi ve katılımcılarla ilgili daha fazla bilgiye sahip olunmasıdır. Dolayısıyla okul seçimi amaçlı örnekleme yöntemlerinden kolay ulaşılabilir durum örneklemesiyle gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın yapıldığı okulda tek bir sekizinci sınıf bulunmaktadır ve çalışma bu sınıfta gerçekleşmiştir. Araştırmacı, çalışmanın yürütüldüğü süreçte sınıfın matematik öğretmeni olmamasına rağmen önceki senelerde öğrencileri girdiği derslerden ve okul ortamından tanımaktadır.

Öğretim süreci başlamadan önce gerek sınıftaki tüm öğrencileri tanımak, öğrencilerin araştırmacıya alışarak çalışmanın doğal seyrinde ilerlemesi sağlamak ve gerekse katılımcıları seçebilmek için araştırmacı bir hafta süre ile öğrencilerin matematik derslerine gözlemci olarak katılmıştır. Çalışmanın öğrenme ve öğretim ortamı heterojen gruplarla gerçekleşeceği için grupları belirlemek için tüm sınıfa karekök kavramı ile ilişkili konuları içeren hazırbulunuşluk testi uygulanmıştır. Böylece öğretimin gerçekleşeceği sınıf ortamının ve bu sınıfta oluşturulacak heterojen grupların hazırlanması ve belirlenmesi sağlanmıştır. Hazırbulunuşluk testi uygulandıktan sonra test sonuçları, matematik dersi öğretmeninin görüşleri ve araştırmacının genel gözlemleri dikkate alınarak 16 kişilik sınıf dörder kişilik heterojen gruplara ayrılmıştır. Heterojen grupların oluşturulmasında aynı grup öğrencilerinin karekök kavramı ile ilgili hazır bulunuşluklarının farklı olmasına dikkat edilmiştir. Grup içerisindeki etkileşimin en üst düzeyde olması ve aynı gruptaki öğrencilerin matematiksel becerilerinin farklı olması amacıyla sınıf matematik öğretmenlerinin görüşleri dikkate alınmıştır.

Klinik görüşmeler için öğrencilerin hazırbulunuşluk durumları ve düşüncelerini açık şekilde ifade edecekleri iletişim durumları dikkate alınarak her gruptan en az 1, her seviye grubundan (iyi düzey-orta düzey-ortaya yakın düşük düzey) 2 olmak üzere toplam 6 katılımcı seçilmiş ve elde edilen veriler analiz edildikten sonra bu 6 katılımcının en çok veri sağlayan 3'ü ile araştırma devam etmiştir. Bu katılımcıların farklı hazırbulunuşluk düzeylerine sahip olmaları ve çalışmaya gönüllü olarak katılma istekleri de dikkate alınmıştır. Ayrıca, genel akademik durumları ve kişisel özellikleri hakkında diğer ders öğretmenlerinin de fikirlerine başvurulmuştur. Dolayısıyla katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden maksimum çeşitlilik örneklemesinden yararlanılmıştır. Buna göre seçilen katılımcılara ait bilgiler Tablo 1'de verilmiştir.

Tablo 1: Katılımcılara Ait Bilgiler

Öğrenciler	**Hazırbulunuşluk Düzeyleri**
Ö1	İyi
Ö3	Orta
Ö5	Ortaya yakın düşük

Ö1 kodlu öğrenci tüm derslerde başarı gösteren bir erkek öğrencidir. Öğrenci fikirlerini açıkça beyan eder. Anlayıp anlamadığı şeylerin farkındadır. Soru sorulduğunda uzun düşünme zamanları olabilmektedir. Karşıdan bakıldığında bilmediği için cevap vermediği düşünülebilir, ama o an öğrenci içinden problemi çözmek ile meşguldür. Öğretmenleri tarafından "sınıfın lokomotifi" olarak adlandırılmaktadır. Matematik başarısı iyi olan bir öğrencidir.

Ö3 kodlu öğrenci her derste performans gösteren bir erkek öğrencidir. Yalnız ders öğretmenlerinin ortak fikri olarak sadece derste ders dinleyen, evde ek çalışma göstermeyen, okulda aldığı eğitimle sınırlı kalan bir öğrencidir. Sınıftaki en hızlı öğrenen bireydir. Sınıfın "pratik zekâsı" olarak adlandırılmaktadır. Matematik başarısı genel olarak iyi, ama daha iyi olabilecek düzeydedir. Sosyal ve sportif aktiviteleri, derslere tercih etmektedir.

Ö5 kodlu öğrencinin başarı performansı diğer seçilen arkadaşlarına göre daha düşük olan bir kız öğrencidir. Genel olarak sessiz bir yapıdadır. Ona direk soru sorulmadan parmak kaldırmaz, sınıfta saklanma çabası içindedir. Fikirlerini sormazsanız beyan etmeye çekinir. Matematik başarısı ortalamaya yakın olan bir öğrencidir. Öğretmenleri başarı performansının düştüğü ile ilgili hemfikirdir.

3.3 Araştırmanın Planı

Bu çalışmada öncelikle araştırmanın yapılacağı sınıf düzeyi belirlenmiş, hedeflenen öğrenme ortamına dayalı olarak bağlamsal problemler ve etkinlikler oluşturulmuştur. Araştırmanın hazırlama ve uygulama takvimi (Tablo 2) ve uygulama planı (Tablo 3) tasarlanıp katılımcılar seçilerek uygulama süreci gerçekleştirilmiştir.

Tablo 2: Araştırmanın Hazırlık ve Uygulama Takvimi

	Tarih	**Yapılan Çalışmalar**
2017/2018 Bahar ve Yaz Dönemi		Öğrenme ortamının tasarlanması ve veri toplama araçlarının oluşturulması
2018/2019 Güz Dönemi	Ekim 1.hafta	Sınıf ortamının gözlenmesi
	Ekim 2.hafta	Katılımcıların belirlenmesi
	Ekim 3. ve 4.hafta	Uygulama ve görüşmelerin yapılması

Tablo 3: Araştırmanın Uygulama Sürecinin Planı

Yapılan çalışma	Uygulama zamanı	Uygulanan öğrenci sayısı
Hazırbulunuşluk testi	08.10.2018	16
Bağlam problemi 1	22.10.2018	16
Klinik görüşmeler 1	22-23.10.2018	6
1.kazanım ile ilgili problem çözümü	23.10.2018	16
Bağlam problemi 2	23.10.2018	16
Klinik görüşmeler 2	23-24.10.2018	6
Kazanımlarla ilgili karışık soru çözümleri	24.10.2018	16
Klinik görüşmeler 3	24-29.10.2018	6

3.4 Verilerin Toplanması

Bu bölümde veri toplama araçları ve veri toplama sürecinden bahsedilmiştir.

3.4.1 Veri Toplama Araçları

Çalışmada kullanılan veri toplama araçları; hazırbulunuşluk testi, gözlem, klinik görüşmeler, katılımcıların öğrenme ortamında kullandıkları grup çalışma kâğıtları ve bire bir görüşmelerde kullandıkları bireysel çalışma kâğıtlarından oluşmaktadır.

3.4.1.1 Hazırbulunuşluk Testi

Çalışmanın uygulanmasından önce karekök kavramına temel teşkil eden kavramlar ve özelliklerini içeren biri doğru/yanlış, diğerleri kısa cevap ve açık uçlu sorulardan oluşan 14 soruluk bir test geliştirilmiştir. Bu testte genel olarak uzunluk ve alan ölçme birimleri ve bu birimlerin dönüşümleri, kare ve dikdörtgenin çevre ve alanı, rasyonel sayılar ve ondalık gösterimleri, asal sayılar, çarpanlar ve katlar, üslü ifadeler ve özellikleri konularını içermektedir. EK-1’de hazırbulunuşluk testine ait belirtke tablosu verilmiştir. Testin kapsam geçerliği için araştırmacı haricinde nitel çalışmalar konusunda deneyimli 4 matematik eğitimcisinin uzman görüşü alınmıştır. Uzman görüşlerine göre düzenlenen test başka bir okulun sekizinci sınıf öğrencilerine uygulanmış ve öğrencilerin testte anlamadığı ya da zorlandığı herhangi bir durum olmamasından dolayı test son halini almıştır (EK-2).

Hazırbulunuşluk test sonuçlarına, araştırmacının yaptığı gözleme ve diğer ders öğretmenlerinin görüşlerine göre görüşme yapılan öğrenciler ve seçilen katılımcıların yer aldığı gruplar ve grup arkadaşları Tablo 4'de verilmiştir.

Tablo 4: Hazırbulunuşluk Testine Göre Oluşan Gruplar ve Gruplardaki Öğrenciler

Grup Numarası	**Grupta Yer Alan Öğrenciler**	**Görüşme Yapılan Öğrenciler**	**Seçilen Katılımcılar**
1.grup	Ö1, Ö7, Ö8, Ö9	Ö1	Ö1
2.grup	Ö2, Ö3, Ö10, Ö11	Ö2, Ö3	Ö3
3.grup	Ö4, Ö6, Ö12, Ö13	Ö4, Ö6	-
4.grup	Ö5, Ö14, Ö15, Ö16	Ö5	Ö5

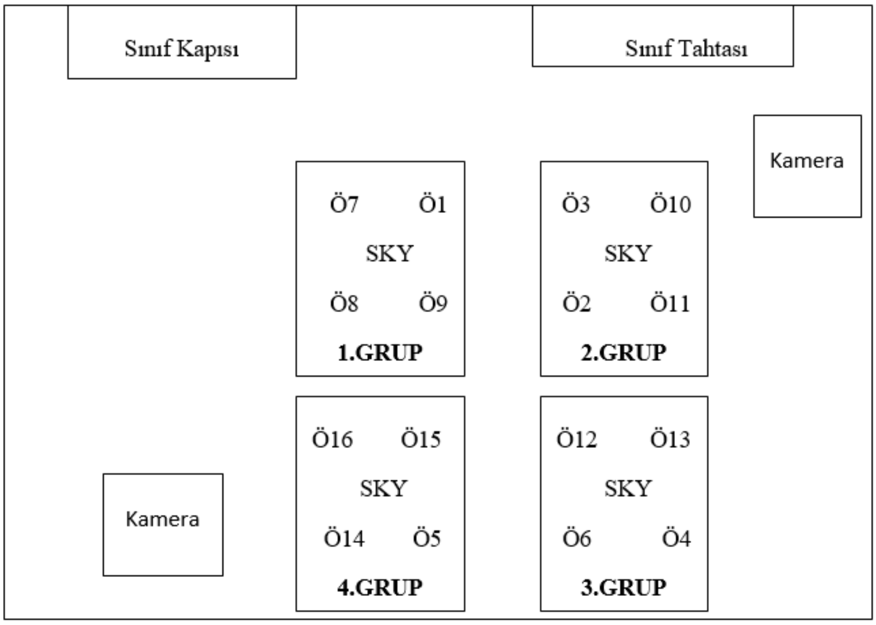
3.4.1.2 Gözlem

Durum çalışmalarında araştırmacının kendisi de bir veri toplama aracı olduğundan yapılan bu çalışmanın her aşamasında araştırmacı öğrencilerin problemi anlama ve algılama durumlarına yönelik uygulama süresince grup aralarında dolaşarak ne düşündükleri ile ilgili bilgi toplaması yapmıştır. Araştırmacı burada "katılımcı gözlemci" rolündedir ve araştırdığı konunun içine girmeye ve bir parçası olmaya çalışmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Araştırmacı öğrenciler hakkında dönem başından itibaren düzenli olarak ders öğretmenlerinden ve sınıf rehber öğretmeninden bilgiler almıştır. Araştırmacının nöbetçi olduğu günlerdeki uygun derslerde ve soru çözümlerinde öğrencileri gözlemleme fırsatı bulmuştur. Bu bilgiler ışığında araştırmacı sınıf ortamını tanımış, öğrencilerin gerek akademik durumları ve gerekse kişisel durumları hakkında bilgi sahibi olmuş ve beraberinde hangi öğrencileri katılımcı olarak seçeceği konusunda fikir edinmiştir.

Araştırmada, öğrenciler araştırmacı tarafından tüm süreç boyunca gözlemlenmiştir. Öğrencilerin ders esnasında bağlam problemleri ile karşılaştıklarında ne düşündüklerini, neler yaptıklarını, grup arkadaşlarıyla ne gibi konuşmalar gerçekleştirdiklerini, nasıl tepkiler verdikleri tüm süreç boyunca herhangi bir veri kaybının olmaması için her grup masasına koyulan ses kayıt cihazıyla kayıt altına alınmıştır. Ayrıca sınıf ortamı 2 kamera ile videoya çekilerek anlaşılmayan durumların desteklenmesi amaçlanmıştır. Uygulama sürecinde araştırmacı her grup masasını defalarca ziyaret ederek süreçten haberdar olup öğrencilerle etkileşime girmiştir. Dikkatini çeken durumlarda öğrencilerle diyalog kurmuştur.

Şekil 4'te etkinliklerin gerçekleştirildiği sınıf düzeni gösterilmiştir. Öğrenci masaları ile öğretmen masası ve akıllı tahta önüne getirilerek tüm grupların kameralar tarafından kayda alınması sağlanmıştır.



Şekil 4: Sınıf Düzeni (SKY: Ses Kayıt Cihazı)

3.4.1.3 Grup Çalışma ve Etkinlik Kâğıtları

Öğrencilerin grup çalışma kâğıtlarına ve gruptaki bireysel kâğıtlarına her türlü düşüncelerini yazabilecekleri söylemiştir. Öğrencilerin grup içinde neler yaptıklarını ve neler düşündüklerini belirleyebilmek için her öğrenciye farklı renkte bir kalem ve her gruba grup çalışma kâğıtlarını koymaları için bir dosya verilmiştir. Böylece hangi öğrencinin ne düşündüğü kolay takip edilebilecek ve kâğıtların birbirine karışmasının önüne geçilebileceği düşünülmüştür. Bu kalemlerle düşündüklerini kâğıtlarına yazmaları istenmiştir. Grup çalışması boyunca her öğrencinin kullandığı kalemin aynı renkte olmasına dikkat edilmiştir. Gruplara verilen dosyalar ve öğrencilere verilen kalemler Tablo 5'te gösterilmiştir. Grup çalışma kâğıtları her ders sonunda öğrencilerden toplanmıştır. Ayrıca, dikey matematikleştirmeyi içeren sorulardan oluşan çalışma kâğıtları öğrencilere bireysel olarak dağıtılmış ve tekrar toplanmıştır.

Tablo 5: Grup Dosya ve Öğrenci Kalem Renkleri

	Grup-1	**Grup-2**	**Grup-3**	**Grup-4**
Dosya rengi	Pembe	Mor	Yeşil	Mavi
Öğrenci kalem renkleri	**Ö1-** Mavi (tükenmez kalem) **Ö7-** Mavi (simli kalem) **Ö8-** Siyah **Ö9-** Kırmızı	**Ö2-** Mavi (tükenmez kalem) **Ö3-** Zümrüt yeşili **Ö10-** Kırmızı **Ö11-** Siyah	**Ö4-** Mavi **Ö6-** Mor **Ö12-** Açık pembe **Ö13-** Turuncu	**Ö5-** Mavi (tükenmez kalem) **Ö14-** Sarı **Ö15-** Fıstık yeşili **Ö16-** Pembe

3.4.1.4 Klinik Görüşmeler ve Bireysel Çalışma Kâğıtları

Araştırmacı klinik görüşmelerde doğrudan gözlemci rolünde olduğu için ortamda gerçekleşen olayları takip eder ve kontrolünü sağlar. "Görüşme, sözel soru cevap formatı kullanılarak, yüz yüze gerçekleştirilen veri toplama formatıdır" (Payne ve Payne, 2004, s.129; aktaran Açıl, 2015). Görüşme yapılırken, katılımcının ne söylediği, ne için söylediği, ne yaptığı, ne için yaptığı araştırılırken, ayrıca araştırmacının da bu söylenen ve yapılanları nasıl yorumladığı da araştırılmaktadır. Bu veri toplama yöntemi, katılımcının düşüncelerini derinlemesine incelemeye fırsat tanımaktadır. Bize katılımcının düşünceleri ile ilgili daha ayrıntılı bilgi sunmaktadır. Görüşme yönteminde konu hakkında daha fazla bilgi edinmek ve araştırılan konuyu tüm boyutlarıyla ele alacak bir görüşme formu kullanılabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu görüşme formunda yer alan soruların anlaşılır ve herhangi bir yönlendirmeden uzak ve açık uçlu olmasına dikkat edilerek görüşme esnasında gerçekleşen beklenen dışındaki durumlara özgü de alternatif sorular üretmeye olanak sağlayan bir yapıda olmasına dikkat edilmiştir (Patton, 1987). Bu görüşme formu için dört matematik eğitimi uzmanının görüşü de alınarak forma son hali verilmiştir (EK-3).

Katılımcıların bağlam problemleri yardımıyla kavram oluşumlarını ve bu süreçte gerçekleştirdikleri matematikleştirmeleri daha detaylı incelemek için hazırbulunuşluk düzeylerine göre oluşturulmuş heterojen her gruptan seçilen farklı seviyelerde birer öğrenci ile klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Her ders öğretim sürecinin sonunda ve bir sonraki derse geçmeden önce seçilen öğrencilerle klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Okul ders saati içinde yapılan görüşmeler, bilgisayar odasında, okul çıkış saatinden sonra yapılanlar ise özel eğitim sınıfında gerçekleştirilmiştir. Her bir katılımcı ile toplamda 3 görüşme yapılmıştır ve bu görüşmeler ve tüm sınıf içi etkinlikler için ailelerden veli onay formu alınmıştır (EK-11). Öğrencilerle gerçekleştirilen klinik görüşme süreleri aşağıda Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 6: Katılımcılarla Gerçekleştirilen Görüşme Süreleri

Öğrenciler	**Klinik Görüşme-1 Süreleri (dk)**	**Klinik Görüşme-2 Süreleri (dk)**	**Klinik Görüşme-3 Süreleri (dk)**
Ö1	35.01	23.26	41.30
Ö3	26.12	14.23	27.21
Ö5	37.00	45.14	42.18

Katılımcılara rahatça düşünebilmeleri için zaman tanınmış olup, acele etmelerine gerek olmadığı, okul çıkışında yapılan görüşmeler sonunda öğrencilerin evlerine araştırmacı tarafından bırakılacağı söylenmiştir. Öğrencilerin evlerine nasıl dönecekleri konusunda duyacakları endişenin böylelikle önüne geçileceği düşünülmüştür. Bu yönde ailelerine de bilgi verilmiştir.

İlk görüşmede katılımcıların "tam-kare pozitif tam sayılarla bu sayıların karekökleri arasındaki ilişkiyi belirleme" durumları incelenmiştir. Katılımcıların, bu kazanıma uygun hazırlanmış olan bağlamsal problemle karşılaştığında neler düşündüklerini, çözüm için nasıl bir yol izlediklerini, çözerken hangi ön bilgilerden yararlandıklarını ve bu bilgileri nasıl kullandıklarını anlatmaları istenmiştir. Bunun için hazırlanmış yarı yapılandırılmış görüşme soruları kullanılmıştır.

İkinci görüşmede katılımcıların "tam-kare pozitif tam sayı olmayan kareköklü bir sayının hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirleme" durumları incelenmiştir. Katılımcıların, bu kazanıma uygun olarak hazırlanmış olan bağlamsal problemle karşılaştıklarında birinci problemdeki bilgileri kullanıp kullanamadıkları, öğrendiklerini bu probleme ne derece aktarabildikleri, karekök kavramını oluşturup oluşturamadıkları, neler düşündükleri, nasıl bir yol izledikleri, genellemeye varıp varamadıkları gibi durumları araştırılmıştır. Yine bu görüşme için de hazırlanan yarı yapılandırılmış görüşme formu kullanılmıştır.

Üçüncü görüşmede katılımcıların "karekök" kavramını ne derecede oluşturabildikleri araştırılmıştır. Bu konuda ne kadar üst düzeye çıkabilecekleri incelenmiştir. En uzun görüşmeler bu yüzden 3. görüşmeler olmuştur. Bu görüşmelerde katılımcılara hem açık uçlu sorular sorulmuştur hem de ulusal sınavlarda çıkmış çoktan seçmeli sorular yöneltilmiştir.

Görüşmeler sırasında katılımcıların düşünme süreçleri esnasında isteyebilecekleri ve ders etkinliklerinde de ihtiyaç duyabilecekleri düşünülen cetvel, satranç takımı, kare şekiller ekstra kâğıt, hesap makinesi gibi araç gereçler ise hazır olarak bekletilmiştir.

Görüşmeler yapılmadan önce öğrencilerle yapılacak olan bu görüşmelerde kimliklerinin saklı kalacağı, hiçbir not ile değerlendirme yapılmayacağı, bu yüzden düşüncelerini çekinmeden söyleyebilecekleri anlatılmıştır. Görüşmeler esnasında verecekleri cevaplarda samimi olmaları, söylediklerinin yanlış veya doğru olmasıyla ilgilenilmediği; buradaki amacın onların düşünme biçimlerini ve kavram oluşumlarının nasıl olduğunu incelemek olduğu, bu yüzden düşündükleri her şeyi sesli bir şekilde ifade etmelerini, böylece onların ne düşündüğü araştırmacının anlayabileceği ve karşılıklı etkileşim içinde olacakları anlatılmıştır.

3.4.2 Öğretim Süreci

Bu çalışmanın öğretim süreci GME'nin ilke ve prensiplerine göre planlanmıştır. Öğrenciler hazırbulunuşluk düzeylerine göre heterojen gruplara ayrılmıştır.

Öğrencilerin grup içinde düşündüklerini çekinmeden dile getirebilecekleri rahat bir ortam hazırlanmıştır. Her katılımcının bu öğretim sürecinde matematiği yeniden keşfeden bir rol üstlenmesine, bir bakıma her öğrencinin bir matematikçi olmasına dikkat edilmiştir. Araştırmacı, bu çalışmada rehber rolündedir ve grupların öğrenimleri desteklemektedir. Oluşturulan bağlamsal problemlerin kavram oluşumu için bir temel sunmasına ve öğrencinin bu problemlerle var olan bilgi ve becerilerini öğrenme ortamına getirilmesine çalışılmıştır. Ayrıca, öğrencilerin bu süreçte oluşturdukları modellerin de ortaya çıkması hedeflenmiştir. Öğrenilmesi amaçlanan durum, gerçek hayatta karşılaşabilecekleri ya da en azından hayal edebilecekleri bir yapıda iki ayrı bağlamsal problemle sunulmuştur.

Bağlamsal problemler, karekök kavramının oluşum süreçlerini incelemek amacıyla MEB tarafından hazırlanan matematik müfredatının kazanımları temel alınarak, GME'ye uygun bir şekilde oluşturulmuştur. Grup içi tartışmalardan sonra öğrencilerden grup kâğıtları toplanmış ve ders sürecinde grupların neler yaptıkları, grup öğrencileri tarafından söz alarak anlatılmış ve gruplar arası etkileşimin de en üst düzeyde olması sağlanmıştır. Her iki bağlamsal problem için bu süreç tekrarlanmıştır. Her ders sürecinden sonra öğrencilere ev ödevleri bireysel olarak dağıtılmış ve öğrenciler çözdükten sonra sınıf içerisinde tartışılmıştır.

İlk bağlamsal problem "Tam-kare pozitif tam sayılarla bu sayıların karekökleri arasındaki ilişkiyi belirler" kazanımı ile ilgilidir. Bu problemin en fazla bir ders saati içinde çözülebileceği düşünülmüştür. Öğrencileri problemle direk karşı karşıya bırakmamak için bağlam probleminin bağlamını oluşturan satranç oyunu ile ilgili kısa bir konuşma yapılmıştır. Bu konuşmadan sonra problem durumu tahtaya yansıtılmış ve öğrenciler istedikleri zaman tahtadan problemi okumaya fırsat bulabilmişlerdir. Aynı zamanda her gruba bu problemi içeren kâğıtlar dağıtılmıştır (Şekil 5).

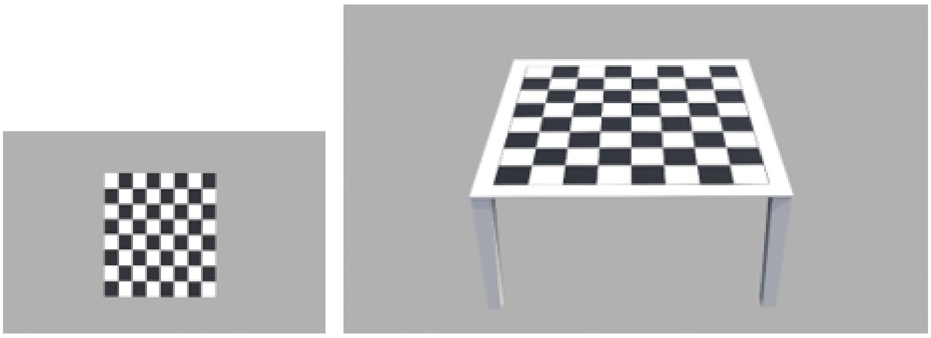
Bir okul müdürü, öğrencilerin satranç oyununa ilgi ve merakını artırmak için okul bahçesinde satranç oynayabilecekleri bir yer hazırlamayı düşünmektedir. Bunun için bahçede uygun bir yere siyah ve beyaz renkli fayanslarla satranç tahtası döşetmiştir. Müdür, kuruyana kadar üzerine basılmaması için bu alanın etrafını koruma şeridi ile çevirmek istemektedir. Döşenen fayanslardan alanın ölçüsünü bildiğine göre sizce bunun için en az ne kadar uzunlukta şerit kullanması gerekir?

Şekil 5: Bağlam Problemi 1

Bu problemde satranç tahtasının alanının ne kadar olabileceği tartışılmış ve araştırmacı öğrencilerin ihtiyaç duyabilmeleri halinde örnek satranç altlıklarını hazır olarak bulundurmuştur. Burada öğrencilerden beklenen davranış, satranç altlığının alanına göre satranç altlığının kenar uzunluklarının neler olabileceği ve buna göre okul müdürünün ne kadar uzunlukta şerit kullanması gerektiğini öğrencilerin yorumlayabilmesidir. Çözüm sürecinde alanı bilinen karenin kenar uzunluğunu bulma durumunun o sayının karekökünü bulmak demek olduğu bilgisini öğrencilerin matematikleştirmesi beklenmektedir.

İkinci bağlamsal problem "Tam-kare pozitif tam sayı olmayan kareköklü bir sayının hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirler" kazanımı ile ilgilidir. Yine bu kazanım için 1 ders saatinin yeterli olacağı düşünülmüştür. Problemin bağlamı öğrencilere tanıdık geldiği için okul müdürünün yardımımıza tekrar ihtiyacı olduğu söylenerek problem durumu tahtaya yansıtılmış ve problemi içeren kâğıtlar gruplara dağıtılmıştır (Şekil 6).

Okul müdürü satranç oyununa artan ilgiden memnun kalmış ve öğrencilerin soğuk havalarda da oynamaya devam edebilmeleri için sınıflara birer satranç masası yaptırmaya karar vermiştir. Önce, masaların üst yüzeylerine yapıştırmak için yapışkanlı satranç altlığı resimleri almıştır. Sonra, marangozdan bu altlıklar yapıştırıldığında kenarlarında eşit şekilde boşluk kalacak masalar yapmasını istemiştir. Sizce marangoz masanın maliyetini azaltmak için bir kenarını en az ne kadar uzunlukta yapabilir?



Şekil 6: Bağlam Problemi 2

Bu problemin amacı ise, hazır olarak alınan satranç altlıkların yapıştırılacağı bir masanın tasarlanması fakat bu masayı tasarlarken de maliyetinin en az olmasına da dikkat edilmesidir. Burada öğrenciden beklenen davranış, tam kare pozitif tam sayı olmayan sayıların kareköklerinin hangi doğal sayılar arasında olduğunu belirleyebilmesidir. Problemle ilgili ders süreci bitiminde diğer derse geçilmeden tüm klinik görüşmelerin bitirilmesi planlanmıştır.

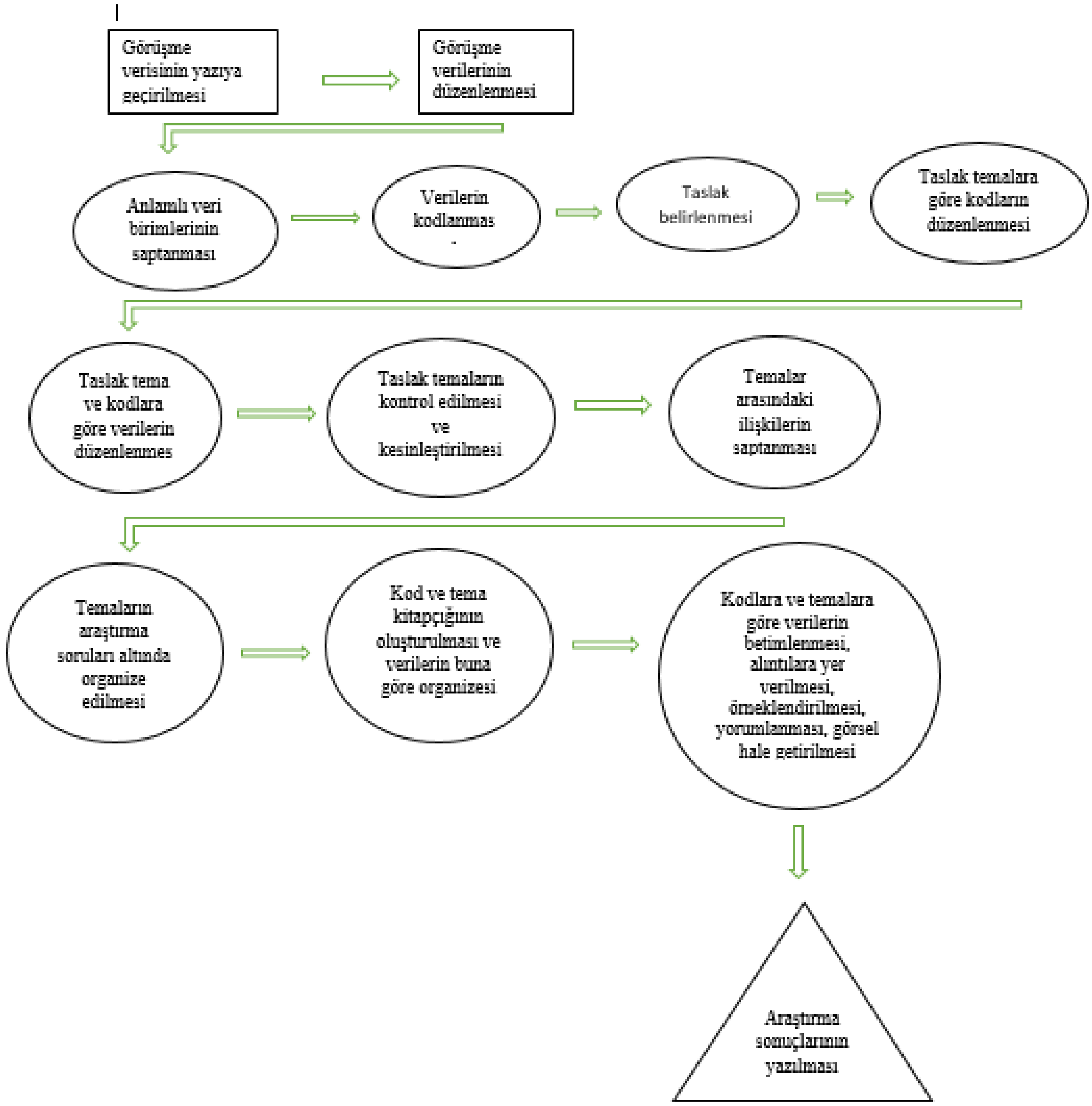
3.5 Verilerin Analizi

Nitel olarak desenlenen bu çalışmada elde edilen veriler içerik analizi ile değerlendirilmiştir. İçerik analizinde temel amaç, toplanan verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Bu nedenle toplanan verilerin önce kavramsallaştırılması, daha sonra da ortaya çıkan kavramlara göre mantıklı bir biçimde düzenlenmesi ve buna göre veriyi açıklayan temaların saptanması gerekmektedir.

İçerik analizinin ilk aşaması verilerin kodlanmasıdır. Elde edilen veriler incelenerek anlamlı bölümlere ayrılır. Her bölümün kavramsal olarak neyi ifade ettiği bulunur. Verilerin kodlanması süreci genelde veri setinin birkaç kez okunması ve ortaya çıkan kodlar üzerinde tekrar çalışmayı gerektirir. Burada önemli olan kullanılacak kodların o bölümde geçen anlamı ya da olayı en etkili biçimde yansıtabilmesidir. Daha sonra ortaya çıkan bu kodları genel düzeyde açıklayabilen ve kodları belirli kategoriler altında toplayabilen temaların bulunması gerekmektedir. Bu iş bir bakıma tematik kodlama işlemidir. Üçüncü aşamada ise araştırmacı, bu sisteme göre elde edilen verileri düzenler ve belirli olgulara göre verileri tanımlar ve yorumlar (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Ayrıntılı bir biçimde tanımlanan ve sunulan bulguların araştırmacı tarafından yorumlanması ve bazı sonuçların çıkarılması ise araştırmacının yaptığı son aşamadır.

Öğretim sürecinin ve klinik görüşmelerin video ve ses kayıtlarının transkript edilmesinden elde edilen veriler tekrarlı okumalar ve video kayıtlarının tekrarlı izlemeleri sonucunda ilişkilendirilip kavramsallaştırılmaya çalışılarak kodlanmış ve APOS teorisinin bileşenleri altında temalaştırılmaya çalışılmıştır.

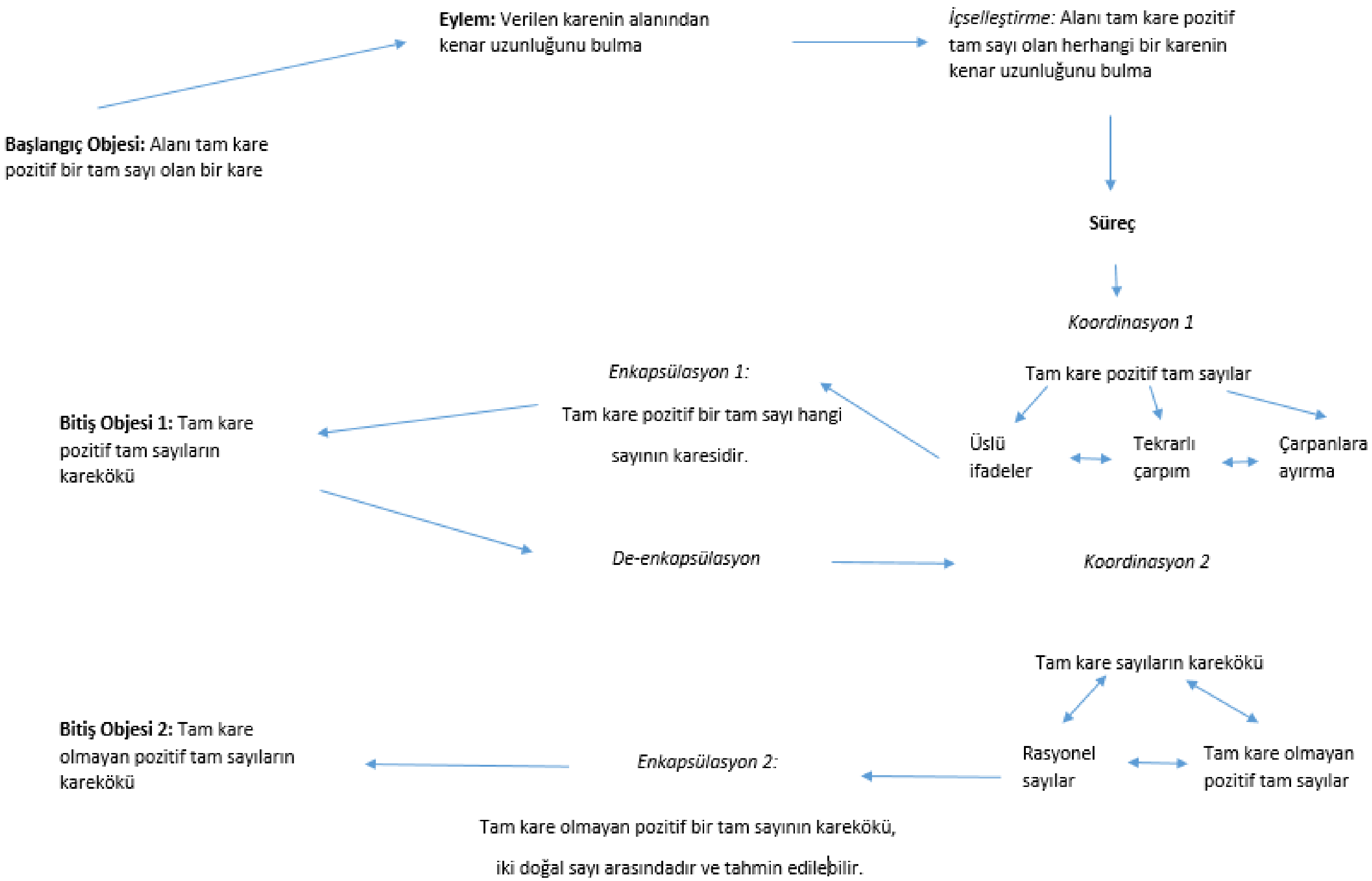
Aşağıda Şekil 7'de veri analiz sürecinin genel olarak nasıl yapılandığının şeması verilmiştir.



Şekil 7: Görüşme Verilerinin Analizinde İzlenen Aşamalar (Collins, 1999; aktaran Yıldırım ve Şimşek, 2016)

Veriler yukarda bahsedildiği gibi içerik analizi ile değerlendirilmiştir. Öncelikle öğrencilerin dersteki öğretim sürecinde ve görüşmeler sırasındaki konuşmaları ses kayıt cihazı ve kamera kayıtları yardımıyla yazılı dokümanlar haline getirilmiştir. Daha sonra bu dokümanlar birkaç kez okunarak cümleler analiz edilmiştir. Ses kayıt cihazlarının ve kamera kayıtlarının farklı zamanlarda incelenerek veri kaybının önlenmesi çalışılmıştır. Yazılı dokümanları tekrar tekrar okuyarak araştırmacı, fark edemediği durumları ve konuşmaları ya da öğrencinin anlatmak istediğini daha iyi anlamaya çalışmıştır. Görüşme metinlerinin yanında öğrencilerden toplanan yazılı dokümanlardan elde edilen bilgiler de araştırma sürecine katılmıştır. Yine araştırmacının öğretim süreci esnasında gruplar arası gezerken yaptığı gözlemler de analiz sürecine dâhil edilmiştir. Buradaki amaç farklı veri toplama kaynaklarından elde edilen bilgilerle veri havuzu oluşturmak ve çeşitlemeyi sağlamaktır.

Çalışmada öğrencilerin karekök kavramının nasıl oluştuğunu inceleyebilmek için APOS teorik çerçevesi temelinde veriler kodlanmıştır. Bu çerçeve referans alınarak taslak bir genetik çözümleme oluşturulmuştur. Öğretim süreci öncesinde hazırlanan bu genetik çözümleme katılımcıların kavramı nasıl oluşturabilecekleri ile ilgili fikir vermiş ve öğretim sürecinin tasarlanmasında faydalı olmuştur. Çalışmada her iki kazanımı da içine alan bir genetik çözümleme hazırlanmıştır. Aşağıda karekök kavramının oluşumu ile ilgili genetik çözümleme örneği verilmiştir (Şekil 8). Bu araştırmanın genetik çözümlemesi hazırlanırken, araştırmacı haricinde iki uzman görüşü daha alınarak karekök kavramının oluşumu için katılımcıların oluşturabileceği muhtemel bilişsel yapılanma örneği son halini almıştır.



Şekil 8: Karekök Kavramı İle İlgili Genetik Çözümleme

3.6 Çalışmanın Geçerliği ve Güvenirliği

Sonuçların inandırıcılığı, bilimsel araştırmalar için geçerlik ve güvenirlik ölçütleriyle sağlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2016). Nitel araştırmalarda Lincoln ve Guba (1985) nitel araştırmanın niteliğini artırabilmek için uzun süreli etkileşim, derin odaklı veri toplama, çeşitleme, uzman incelemesi ve katılımcı teyidi gibi bazı stratejiler önermektedirler (aktaran Yıldırım ve Şimşek, 2016). Böylece araştırmanın inandırıcılığı sağlanmış olacaktır.

Araştırmacı görev yaptığı okulda uygulama yaptığı için uygulama ortamı ve katılımcılarla uzun süreli bir etkileşim içinde olmuştur. Böylece veri kaynakları üzerinde öznel algılarından kaynaklanabilecek etkiyi anlayabilme olanağı elde etmiştir. Ayrıca araştırmacı ve katılımcı tanışıklığından dolayı güven ortamının sağlandığı ve sorulara daha samimi cevaplar verildiği düşünülmüştür.

Diğer taraftan araştırmacının alanda uzun süre kaldığı için olay, olgu ve durumları katılımcıların bakış açısıyla ortaya koyma fırsatı olmuştur. Araştırmanın veri toplama kaynağı olarak kullanılan gözlem, görüşme ve dokümanların bir arada incelenerek verilerin birbirini doğrulamasına, öğrenci kâğıtlarından ve konuşmalarından doğrudan alıntılar yapılmasına ve uzman görüşlerinin alınmasına dikkat edilmiştir. Bu anlamda, veri kaynaklarının çeşitlendirilmesiyle farklı özelliklere sahip katılımcıların araştırmaya dâhil edilmesi ve bu şekilde farklı algıların ve yaşantıların ortaya konularak çoklu gerçekliklere ulaşılması sağlanmaya çalışılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

Ortamın başka ortamlara benzer şekilde aktarılabilmesi için, tüm aşamalar net bir şekilde anlatılmış ve açıklanmış, araştırma sonucunun böylece genellebilirliğinin artırıldığı düşünülmüştür. Çalışmanın güvenirliği için araştırmanın temel aşamaları, araştırmacının konumu, araştırmadaki bireylerin açık bir şekilde tanıtılması ve araştırmacının yaklaşımı ile ilgili bilgiler açık ve ayrıntılı bir şekilde verilerek sağlanmaya çalışılmıştır (Yıldırım ve Şimşek, 2016).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

IV. BULGULAR

Bu bölümde katılımcıların ders sürecinde ve klinik görüşmeler esnasında elde edilen verilerin analizi sonucunda ortaya çıkan bulgulardan bahsedilmiştir.

4.1 Tam-kare Pozitif Tam Sayıların Karekökünü Kavramsallaştırma Süreci

Kareköklü ifadelerin ilk kazanımı olan *"tam-kare pozitif tam sayılarla bu sayıların karekökleri arasındaki ilişkiyi belirler"* ile ilgili bağlamsal problemi (EK-4) tahtaya yansıtmadan önce öğrencilerle satranç oyunu ile ilgili kısaca sohbet edilmiştir. Sınıfta kaç kişinin satranç oyunundan haberdar olduğu, daha önce satranç oyununu oynayıp oynamadıkları, satranç oyunuyla ilgili ne bildikleri gibi sorularla sohbet havası oluşturulmuştur. Sınıftaki her öğrencinin satranç oyununun ne olduğunu bildiği, bazı öğrencilerin satranç oynamasını bildiği bazılarının ise bilmediği, okulun her sınıfında satranç masasının bulunduğu sohbet esnasında paylaşılmıştır. Öğrencilerin hepsinin satranç oyunuyla ilgili bir yaşantısının olduğu bu sohbetten anlaşılmıştır. Daha sonra araştırmacı "Acaba okul bahçemizde de bir satranç oyunu bölgesi yapsak nasıl olurdu?" sorusu üzerine sınıfta kısa bir sessizlik oluşmuş ve bu fikrin bir okul müdürünün aklına gelmesiyle oluşturulmuş olduğu varsayılan problem tahtaya yansıtılmıştır. Bir öğrenci seçilerek problem sesli bir şekilde okutulmuş ve problemi tüm sınıfın duyması sağlanmıştır. Bu esnada araştırmacı gruplara problem kâğıdını dağıtmıştır. Öğrenciler problem kâğıdını alır almaz problemi içlerinden tekrar okumayı tercih etmişlerdir. Araştırmacı bu esnada öğrencilere tekrar hatırlatmalarda bulunmuş, düşüncelerini çekinmeden dile getirebileceklerini, her şeyi kâğıda yazmaları gerektiğini, kameranın ve ses kayıt cihazının veri kaybını önlemek amacıyla çalışır durumda olduğunu, yanlış yazdıkları şeyleri karalamamaları gerektiği gibi durumlar yeniden açıklamıştır.

4.1.1 Ö1'in Grup İçi Kavramsallaştırma Süreci

Ö1, dağıtılan problem kâğıdını alıp incelemeye başlamışken kâğıtta dikkatini çeken ilk şey problemin görseli olmuştur. Çünkü problemdeki görselde eğitim ve öğretim gördükleri okulun bahçesi yer almaktadır. Problemde kendi okulunu görmek ilgisini çekmiş ve bu durum hoşuna gitmiştir.

> "Ö1: Burası bizim okul değil mi ya?
> Ö8: Evet, bizim okul, baksana ne güzel olmuş.
> Ö7: Keşke gerçekten okul bahçesini böyle çim kaplasalar. Çok güzel olmamış mı ya?
> Ö1: Çok güzel olmuş yaa!"

Resim ile ilgili grup üyelerinin konuşmaları bitince Ö1 *"Hadi probleme bakalım artık!"* sözüyle grup üyelerinin dikkatini probleme çekmiş ve problemi içlerinden tekrar okumuşlardır. Okumalarını bitirdikten sonra Ö1 tepkisini *"Ama burada hiç sayı yok."* diyerek dile getirmiştir.

Belli bir süre sonra alan ölçü biriminin "metrekare" olması gerektiğinden yola çıkarak satranç tahtasının alanının içinde bulunan 64 kare bölüm, bu tahtanın alanının 64 metrekare olacağı fikrini ilk akla getirmiştir. Araştırmacı, grup üyelerinin alan ölçü birimlerinin farkında olduğunu düşünmüş fakat aralarında geçen konuşmanın devamında ölçü birimi olan metrekare ile satranç tahtasını oluşturan kareler arasındaki ilişkilendirmenin eksikliği araştırmacı tarafından anlaşılmıştır. Her iki ifadede de geçen "kare" kelimesinin ve görselin bu şekilde düşünmelerine sebep olduğu görülmüştür. Ayrıca alanı verilen satranç tahtası şeklindeki karenin kenar uzunluğu bulunurken "alanı 2'ye bölme" şeklindeki kavram yanılgısına rastlanılmıştır.

> "Ö8: Alan diyor, metrekare olacak o zaman.
> Ö1: Kaç tane kare var?
> Ö7: 64 kare var.
> Ö9: O zaman 64 bölü 2'den 32 olur. Bir sırayı sayalım ilk.
> Ö1: Yaa, sorunun şuraya kadarki kısmı gereksiz *(ilk cümleye kadar olan kısmından bahsetmektedir)*. Burası hikâye. Burayı okumaya gerek yok. Bundan sonrasına dikkat edeceğiz.
> Ö9: Soru neyi soruyor?
> Ö1: Şeritin uzunluğunu soruyor.
> Ö7: 8 çarpı 8'den 64 olur o zaman.
> Ö1: O zaman 8 metre ya da 8 santim olur. Ama 8 santim olmaz. 8 metre olur *(bahçede 8 santimin küçük bir uzunluk olacağını düşünmektedir)*.
> Ö7: Alan içindeki kare miktarına bakacağız.
> Ö1: 8'in karesi işte. 8'in karesi 64. Bundan yola çıkmamız lazım. Ama bize santim ya da metre lazım. Karenin bir kenar uzunluğu lazım bize. Uzunluğu bilmeden çözemeyiz."

Grup üyelerinin düşünmelerini, satranç tahtasını oluşturan kare fayans sayısı etkilemektedir. Alanının sayısal değerinin 64 olacağı konusunda hemfikir olmalarına rağmen birimi ile ilgili düşünceleri sürmektedir. Ö1, karenin alanının kenar uzunlukları çarpımından bulunacağını hatta kenar uzunluğunun karesine eşit olacağını ifade etmiştir. Ö1, karenin alanı ile kenarı arasında ilişki kurmada *üslü sayılar* ile ilgili bilgilerini kullanmıştır. Bir sıradaki kare sayısı 8 olduğundan dolayı bir kenar uzunluğunun 8 santimetre ya da 8 metre olması gerektiğini, 8 santimetrenin bahçe için çok küçük bir uzunluk olacağını, bu yüzden kenarının 8 metre olmasının uygun olacağı fikrini grup arkadaşlarıyla paylaşmıştır. Bir yandan bu düşünceleri gerçekleştirmesi bir yandan da kenar uzunluklarını kendisinin belirlemesi, ona yaptığının doğru olmadığını düşündürtmüştür. Bu sorunun çözülmesi için karenin bir kenar uzunluğunun kesinlikle verilmesi gerektiğini, başka türlü bu sorunun çözülemeyeceğini arkadaşları ile paylaşmıştır. Ö1, bu soruyu ilk okuduğunda da hiç sayı olmadığını görmesi onda benzer bir tepkiye sebep olmuştur. Alışık olduğu eğitim sistemindeki problemler sayılardan oluştuğu için bu problemde hiç sayı olmaması, ona bu sorunun çözümünün olamayacağını düşündürtmüştür.

Ders esnasında bu grup üyelerinin diğer grup üyelerine *“Soruyu çözdünüz mü?”* diye sorması araştırmacının dikkatini çekmiştir. Kendilerinin yanlış yolda olup olmadıklarını teyit etme gereksinimi duymuşlardır. Çünkü bu gruptaki Ö1’e göre şuan bu sorunun çözümü imkânsız gibi görünmektedir. Bu durumu grup arkadaşı Ö8’in araştırmacıya sormasını istemiş ve Ö8 *“Bunun bir kenarı ne kadarmış?”* diye araştırmacıya sormuştur.

Diğer taraftan Ö9 *“64’ü 4’e bölmeliyiz.”* diyerek fikir öne sürmüştür. Ö1 bunu neden yaptığını grup arkadaşına sormuştur. Grup arkadaşı ise bunu *çevresini bulmak için* yaptığını dile getirmiştir. Burada öğrenci, kare fayans sayısı olan 64’ü sanki çevreymiş gibi kabul edip 4’e bölerek bulduğu 16 sayısına yine çevre demiştir. Grup arkadaşı Ö1, bu yaptığının yanlış olduğunu dile getirmiştir. Bu durumda Ö9, *“64’ü 8 ile çarpmayı”* teklif etmiştir. Ö9, var olan sayılarla sürekli işlem yaparak bir sonuç bulmaya odaklanmıştır. Yaptıklarını ne için yaptığını düşünmemiştir. Herhangi bir sayı bulmayı hedef haline getirmiştir. Bu da yine eğitim sistemimizin öğrencileri bir sonuca ulaşma odaklı yetiştirdiğini göstermektedir. Düşünmeden, irdelemeden, sorgulamadan var olan sayılarla birtakım işlemler yaparak bir an önce problemi çözme rutini sınıftaki bazı diğer öğrencilerde de gözlemlenmiştir.

Araştırmacının, grup üyelerine neler yaptığını sorduğunda aşağıdaki konuşmalar gerçekleşmiştir.

> "A: Neler yaptınız, neler düşündünüz?
> Ö7: Alanı 64 diye düşündük, 8 çarpı 8, 64 olur.
> A: 8 dediğiniz ne?
> Ö1: Şu kareler *(bir sırayı oluşturan kareleri gösteriyor)*.
> A: Soru ne soruyor?
> Ö7: Şeriti.
> Ö1: Bize santim ya da metre lazım öğretmenim.
> A: Onu nasıl buluruz?
> Ö1: Onu bulamıyoruz işte öğretmenim. Onu bulsak zaten soruyu çözeceğiz.
> A: Neyi bulsak?
> Ö1: Kenar uzunluğunu işte.
> A: Verilmesi gerekiyor mu illa kenar uzunluğunun?
> Ö9: Öğretmenim, bence 64'ü 4'e bölmeliyiz. 4 tane kenar olduğu için.
> Ö7: O zaman kafamızdan sayı verebilir miyiz, öğretmenim?
> Ö9: x diyelim, sonra buluruz.
> Ö7: O zaman 4 diyelim bir tanesine.
> Ö1: 4 olsa 16 metre olur bir tanesi *(bir kenarı)*, bahçeye sığmaz, çok büyük.
> A: Soru ne vermiş, ne istiyor?
> Ö1: 64 tane kare var.
> Ö9: Tam kare burası.
> Ö1: Şeriti bulmamız gerek."

Öğrencileri, problem verilerinde sayı olmaması oldukça zorlamıştır. Aslında kare ile ilgili temel bilgilere sahip olmalarına rağmen karenin alan hesabı yapılırken modelleme konusunda alanı birim karelere ayırma durumu ile satranç tahtasının kare fayanslardan oluşması durumu zihinlerde karışıklığa sebep olmuştur. Burada bu kare fayansların bir birime dolayısıyla bu birime göre bir kenar uzunluğuna sahip olma fikri (8 santimetre, 8 metre, 8 birim gibi) sadece Ö1 tarafından dile getirilmiştir. Daha sonra Ö7 kodlu katılımcının *"Kafamızdan sayı verebilir miyiz?"* sorusu üzerine Ö9, bunun ne olacağının uzun iş olduğunu, bir tanesinin uzunluğuna x diyerek genel ad vermeyi teklif etmiş ve ayrıca *"burası tam-kare"* demesi durumun farkındalığını düşündürtmüştür.

Ö8, bu durumun karenin açılarıyla ilgili olup olmadığını sorgulamış, tüm açıları toplayıp 360° bulmuştur. Ö7, bunun ne işe yarayacağını sormuş, bunun üzerine Ö8, 360°'yi 4'e bölüp 90° bulmuştur. Bu duruma gülerek yanıt veren Ö1, *"Eee, ne oldu şimdi? Başa döndün. Açıyla ne alakası var?"* diyerek yaptığının yanlış olduğunu arkadaşına söylemiştir. Ö1 daha sonra arkadaşlarına *"çevresinin 32"* olduğunu söylemiştir. Yine kendisi araştırmacıyı Ö9'dan çağırmasını istemiş, bulduğu 32 sonucunun doğruluğunu teyit ettirmek için araştırmacıya sormasını söylemiştir. Bunun üzerine Ö9, araştırmacıyı çağırarak yaptıklarını anlatmaya başlamıştır.

> "Ö9: Öğretmenim, çevresi 32.
> A: Nasıl buldunuz, ne yaptınız?
> Ö7: 64'ü 4'e böldük. 4 tane köşesi var ya.
> Ö1: Hayır ya, alanında 64 kare var. Kenarı 8. O zaman çevresi 32 olur.
> A: Kenarı 8 derken?
> Ö1: Bir tanesi 1 oluyor yani.
> A: 1 ne ama?
> Ö9: Bir tane karenin…
> Ö1: 1 metre. 8 tane var. 8 metre.
> A: Alanı ne dediniz?
> Ö1: 64.
> A: O zaman kenarı neydi?
> Ö7: 8.
> Ö1: 32 değil mi hocam cevap?"

Ö1 düşündüklerinden emin olarak konuşmuştur. Neyi, neden yaptığını bilmektedir. Diğer grup arkadaşlarının düşünceleri karışıklığını korumuş, her seferinde arkadaşlarının yaptığı yanlışları düzeltmiş ve yaptıklarının bu durumla ilgili olmadığını grup arkadaşlarına anlatmaya çalışmıştır. Ancak, Ö1 sorunun cevabını merak etmektedir. Sonuç bulmaya odaklı olan Ö1'e problemin cevabını bulmaktan ziyade ne düşündüğünün, bunu nasıl bulduğunun daha önemli olduğu, sonucun doğru ya da yanlış olmasının önemli olmadığı tekrar hatırlatılmıştır. Ö1, bu konuşmanın üzerine düşüncelerini kâğıda aktarmaya başlamıştır.

> "Ö1: Az bekle, burası 8 metre. Burası 8 metre. Burası 8 metre. Burası 8 metre. Her kenar 8 metre yani. O zaman çevresi buradan 32 metre çıkar. Alanı zaten 64 metrekare. Bir kenar uzunluğu 8 metre çünkü."

Burada Ö1 her bir kare fayansın bir kenarını 1 m alarak satranç tahtasının bir kenar uzunluğunu 8 m olarak bulmuştur. Buradan karenin alanını ve çevresini hesaplama bilgilerini bu problem üzerinde kullanmış ve alanı ile çevresinin ne olabileceğini söylemiştir. Grup arkadaşlarına göre Ö1 in alan ölçü birimi ile uzunluk ölçü birimlerinin de farkında olduğu anlaşılmaktadır. Katılımcıyı bu soruda hiçbir sayı olmaması ilerleyen zamanlarda yine rahatsız etmiş ve tepkisini *"Daha kolay soru olamaz mıydı ya! Burada hiç cm ya da m yok."* diyerek dile getirmiştir.

Araştırmacı grup kâğıdında 64'ün 4'e bölündüğünü görmüş ve grup üyeleriyle aşağıdaki gibi konuşmalar gelişmiştir.

> "A: Burada neden 64'ü 4'e böldünüz?
> Ö7: İki kenarının toplamı.
> A: Tüm yaptığınız sorularda bu doğru olur mu peki? Neden 8 aldınız burayı?
> Ö8: Çünkü bir kenarda 8 tane var.
> A: 8 tane kare olması demek onun uzunluğunu 8 olması demek mi?
> Ö1: 16 metre de olur öğretmenim. Bir tanesi 2 metre olur. O zaman 16 olur. Ya da küçültürüz. Yarım metre olur. O zaman da 4 metre olur.
> A: Evet, bunlar da olabilir."

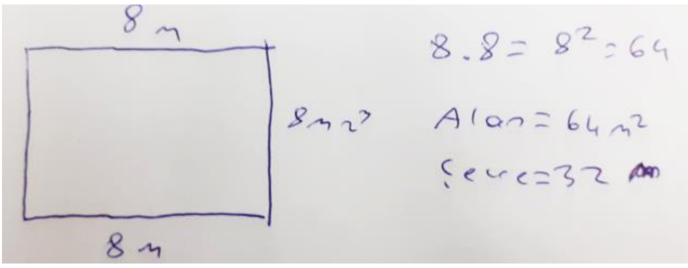
Ö1, satranç altlığının bir kenarı boyunca bulunan kare fayans sayısı ile altlığın bir kenarının uzunluğu arasındaki ilişkilendirmede, fayansların ebatlarının değişebileceği düşüncesi ile birim kare fikrine sahip olabileceğini düşünmüştür. Fakat bu düşüncelerini genelleştirmeye gidememiştir. Sayılar üzerinde kalmıştır. Ayrıca, problemin verilerinde sayısal değerlerin olmaması, muhtemel durumlarda farklı sayısal sonuçlar elde edileceğini düşündürtmüş ve bu da düşüncelerinin doğruluğundan emin olmamasına sebep olmuştur. Ö1'e göre bu sorunun cevabı kesin olmalıdır. Kendisi veri olarak istediği sayı almamalıdır. Her seferinde farklı sonuçların çıkıyor olması Ö1 için *"Sayıdan da gidilmiyor ama."* yakınmasına sebep olmuştur. Ö1'i, bu sorunun tek bir cevabı olması gerektiği düşüncesi sınırlamış ve genellemeye ulaşmasını engellemiştir.

4.1.2 Ö1'in Bireysel Görüşme Süreci

Ö1'den problemden ne anladığı, çözüm için neyi nasıl düşündüğü ve ders sürecinde kullandığı kâğıtlar da gerekli zamanlarda gösterilerek burada gerçekleştirmiş olduğu süreçleri, araştırmacı kendisine anlatmasını istemiştir.

> "Ö1: Burda sekiz kare olduğu için öğretmenim her kenarında her birini 1 metre olarak kabul ettim. Sonra alanını buldum 8 kere 8, 64 metrekare. Sonra çevresi her kenarı 8 olduğu için hepsini topladım 8, 8, 8, 8, 32. Çevreyi öyle buldum."

Katılımcı satranç tahtasının bir kenarında *8 kare olmasından* dolayı her karenin kenar uzunluğunu 1 metre alarak satranç tahtasının bir kenar uzunluğunu 8 metre olarak bulmuş ve bu kenar uzunluğuna göre doğru olabilecek bir alan ve çevre hesabı yapmıştır. Ö1, burada *başlangıç objesi* olarak satranç tahtasının kare bölümlerinden etkilenerek alanını bildiği bir kare (64 m^2) şekli oluşturmuş ve buna göre hesaplamalarını yapmıştır (Şekil 9).



Şekil 9: Ö1'in 1. Bağlamsal Problemdeki Grup Çalışmasındaki Bireysel Kâğıdından Görüntü

Araştırmacı katılımcıya çevresinde kare fayansların kullanıldığı yerleri sormuş, bunun üzerine katılımcı okulun yer döşemelerinin kare şeklinde olduğunu söylemiştir. Araştırmacı ondan laboratuvarın kapısından çöp kutusunun oraya kadar olan uzunluğu tahmin etmesini istemiştir. Burada araştırmacının amacı, öğrencinin kare fayansların kenarlarının 1 metre, 1 santimetre gibi sayılardan farklı uzunluklar da alabileceğini fark etmesini sağlayabilmektir.

> "A: Çevreyi öyle buldum diyorsun. Peki, çevremizde fayans kullandığımız yerler var mı?
> Ö1: Var öğretmenim.
> A: Neresi?
> Ö1: Mutfak.
> A: Daha var mı?
> Ö1: Lavabo.
> A: Peki, okulda kullandığımız yer var mı?
> Ö1: Var öğretmenim, sınıflar *(yeri göstererek).*
> A: Sınıflarda kullanılan fayanslar neye benziyor sence?
> Ö1: Kareye benziyor.
> A: Kareye benziyor, ımmm, peki o zaman kapıdan çöp kutusuna kadar olan yeri düşünelim. Kapıdan çöpün oraya kadar olan uzunluk sence nedir tahmini olarak?
> Ö1: *(sessizlik),* bir metre falan.
> A: Bir metreye yakın diyorsun… Peki, eee senin burada *(sınıfta kullandığı kağıdı göstererek)* dediğine göre diyecek olursak kapıdan çöpün oraya kadar 1, 2, 3, 4, 4 buçuk *(kapı ile çöp kutusu arasındaki fayans sayılarını sayarak)* olması gerekiyor bunun uzunluğu."

Araştırmacı bu soruyla, karenin kenar uzunluklarının fayansın kenar uzunluklarına göre değişebileceğini fark ettirmeye çalışmıştır. Katılımcı bir süre sessiz kalmış, sessizliğini *"Ben burdaki karelerin her birinin uzunluğunu 1 metre saydım."* diyerek bozmuştur. Ö1 böylece neden 8 m olduğunu ve alanın neden 64 m^2 çıktığını açıklamaya çalışmıştır. Araştırmacı, satranç tahtasının alanının başka bir sayısal değerde olup olamayacağını sorusunu katılımcıya yöneltmiştir.

> "A: Peki, bunun *(satranç resmi gösterilerek)* alanı başka bir değer olabilir miydi?
> Ö1: 16 çarpı 16 olabilirdi.
> A: Daha başka olabilir miydi?
> Ö1: 24 … *(duruyor)* çarpı 24 olabilirdi. 8'in katları olabilirdi.
> A: İlla 8'in katları mı olmalı? Başka bir şey olamaz mı?
> Ö1: 8 fayans var ama öğretmenim ondan dolayı"

Ö1 satranç tahtasının kenar uzunluklarına ve dolayısıyla alanlarına farklı sayısal değerler verebilmeye başlamıştır. Grup içinde de bu katılımcı her bir karenin kenar uzunluğunu 2 m alırsa satrancın bir kenar uzunluğunun 16 m ya da her bir karenin kenar uzunluğunu yarım metre alırsa bu sefer de satrancın bir kenar uzunluğunun 4 m olacağını söylemiştir. Ö1, 8'in katı olan her sayının kenar uzunluğu olabileceğini, çünkü kenarında 8 tane fayans olduğunu ifade ederek kenar uzunluğu ve alan için bir genellemeye varmıştır. Ö1, buradaki 8 sayısının katları tam sayı katı olarak düşünmüştür. Katılımcının alan ve kenar arasındaki ilişki ile ilgili yapılanmasını ortaya çıkarabilmek için görüşme süreci şöyle devam etmiştir.

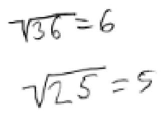
> "A: Mesela sen burada *(problem çözüm kağıdında)* alanı 64 (br^2) aldın, değil mi?
> Ö1: Evet.
> A: Kenar uzunluğu ne oldu o zaman peki?
> Ö1: Sekiz.
> A: Alanı 64 (br^2) olmasaydı da başka bir şey olsaydı, ne olabilir alanı?
> Ö1: x olabilir öğretmenim.
> A: x ne olabilir?
> Ö1: Her şey olabilir öğretmenim.
> A: Tamam o zaman bir örnek verebilir misin, ne olabilir mesela?
> Ö1: 50.
> A: Tamam, alanı 50 (br^2) olsaydı kenar uzunluğu ne olurdu?
> Ö1: …… *(düşünüyor)*
> A: Ne olabilir?

Ö1: Bilemedim.
A: Neden bilemedin?
Ö1: İki aynı sayının çarpımı 50 etmiyor."

Araştırmacı bu süreçte katılımcının kendisinin alınan kenar uzunluğuna göre alanın sayısal değerinin değişebileceği düşüncesini katılımcının kendisinin fark edebilmesi için birim kare (br^2) kelimesini kullanmamıştır. Ö1 durumu *içselleştirip* alanı 64 br^2 olma eyleminden farklı olarak herhangi bir sayı olabileceğini düşünmeye başlamış ve bunu *"x olabilir"* diyerek genellemiş ve cebirsel ifade kullanarak durumu özetlemiştir. Araştırmacının x'e örnek istemesi üzerine Ö1, 50 sayısını söylemiş, *"Alanı 50 (br^2) olması durumunda kenar uzunluğu ne olurdu?"* sorusuna ise cevabı bilemediğini, sebep olarak ise *iki aynı sayının çarpımının 50 edemeyeceğini* söylemesi Ö1'in doğru yol üzerinde ilerlediğini göstermektedir. Ö1'in örnek olarak verdiği sayı bir tam-kare sayı olmadığı için Ö1, bu alana sahip bir karenin de kenar uzunluğunu bulamamıştır. Bunun üzerine araştırmacı *"Öyle bir sayı alsan ne olurdu?"* sorusunu yöneltmiş ve Ö1 "*25 olur. 25 olsa kenarı 5 olur."* yanıtını vermiştir. Burada katılımcının nasıl sayılar alması gerektiğini (tam-kare sayılar) fark ettiği düşünülmektedir. Ö1 alanı verilen karenin kenar uzunluğunu bulmaya çalışırken kullandığı yöntemi ise *"iki aynı sayının çarpımı olan sayıları arama"* olarak anlatmıştır. Burada katılımcının, tam kare sayıları bulmaya çalışırken *"aynı sayıların çarpımı (tekrarlı çarpım)"* yöntemini kullandığı düşünülmektedir. Ö1 durumu *içselleştirmeye* başlamış ve *süreç* aşamasına geçmiştir. Burada öğrenci tam-kare pozitif tam sayıların hangi sayının karesi olduğunu bulurken *tekrarlı çarpım yöntemiyle koordinasyon* sağlamıştır.

Ö1'e bu durumu nasıl gösterebileceği sorulduğunda ise öğrenci derste öğrendiği bilgileri görüşmede kullanabilmiş ve karekök gösterimi doğru bir şekilde gerçekleştirebilmiştir.

"A: Bunu nasıl gösterebilirsin peki?
Ö1: Kareköklü olarak mı?
A: Sen bilirsin.
Ö1: $\sqrt{\mathbf{25}}$ = 5
A: Başka ne olabilir?
Ö1: 36 olur öğretmenim. 36 olsa 6 olur.
A: Onu nasıl gösterebilirsin?
Ö1: $\sqrt{\mathbf{36}}$ = 6 (Şekil 10)"



Şekil 10: Ö1'in Karekök İşaretini Gösterimi

Bunun üzerine araştırmacı, Ö1'e karekök sembolünün ne işe yaradığını, karekökü nasıl tanımladığını sormuştur. Katılımcı ise en son verdiği örnek olan $\sqrt{\mathbf{36}}$ = 6 eşitliğinden yola çıkarak açıklamaya devam etmiştir.

"Ö1: 36'nın karesinin kaç olduğunu ifade ediyor.
A: 36'nın karesi nedir?
Ö1: *(duruyor)…* yanlış söyledim. 6'nın karesi.
A: 6'nın karesi… Peki, nasıl yani 6'nın karesi?
Ö1: İçi 6'nın karesi."

Katılımcı *"karekök"* kavramı için *bir sayının karesinin kaç olduğunu* ifade ettiğini dile getirmiştir. Bir süre sonra dediğindeki yanlışlık dikkatini çekmiş ve yanlışını düzeltmiştir. *Karekökün içindeki ifadenin, karekökün dışındaki ifadenin karesi* olduğu *genellemesine* varmıştır. Araştırmacının tekrar karekökü nasıl tanımladığını sorması üzerine Ö1 in cevabı *"içi bir sayının karesi"* olmuştur. Katılımcı bir sayının hangi sayının karesi olduğunu *üslü sayılar* bilgisini kullanarak açıklayabilmiştir. Örnek olarak aldığı 25 sayısının, 5 sayısının karesi olduğunu söylemiştir. Bu yaptığı işlem bir sayının karesini alarak değerini bulma durumudur. Ö1 de bu durumun farkındadır.

"A: Peki, bu karekök mü?
Ö1: Değil
A: Kareköke alsan ne olur bu?
Ö1: Bu öğretmenim *(önceden $\sqrt{\mathbf{25}}$ =5 yazdığı kısmı gösteriyor)."*

Ö1 bir sayının karesi ile karekökünün farklı şekilde gösterildiğinin farkındadır. Bunun üzerine araştırmacı, Ö1 in 25 yerine 5^2 yazsa ne olacağı ile ilgili nasıl bir fikir yürüteceğini merak etmiştir.

"A: Peki, *(5^2 yazdığı yeri göstererek)* bunu kareköke alsak ne olur?
Ö1: Bunu nasıl kareköke alabiliriz ki?
A: Niye alamayız ki?
Ö1: Üssü var.

A: Üssü olsun. Ne değişir ki?
Ö1: *(susuyor)*
A: 5^2 neye eşit?
Ö1: 25.
A: Peki, 25 neye eşit?
Ö1: $5^{2.}$
A: Peki üslü şeklinde olup olmaması sayının değerini değiştirdi mi?
Ö1: Değiştirmedi. Hayır."

Ö1 üslü sayının karekök içine alınamayacağı, üssün karekök almaya engel bir durum teşkil ettiğini düşünmüştür. Araştırmacı, Ö1'e 25 ile 5^2 sayılarını karşılaştırmayı sormuş; Ö1 bu ifadelerin birbirine eşit olduğunu söylemiştir. Bu eşitliğe rağmen karekök içine 25 değil de 5^2 sayısının yazılması öğrencinin zihninde birtakım karışıklıklara yol açmış ve bu sayıların kareköklerinin birbirine eşit olamayacağı yönünde fikir oluşturmuştur.

"A: O zaman ne olur? 5^2'yi kareköke alırsan?
Ö1: $(\sqrt{5})^2$.
A: Neden 2 karekök dışında kaldı?
Ö1: 2'yi de mi alacağız? *…(düşünüyor)…* $\sqrt{5^2}$ *(karekök içine alırken hala düşünüyor)…*
A: Ne oldu bu şimdi?
Ö1: 5 üzeri 2'nin karekökü.
A: 5 üzeri 2 neye eşit?
Ö1: 25'e.
A: Yani sen burada neyi buluyorsun?
Ö1: 25'i …… 25'in karekökünü.
A: Ne çıkacak peki bunun sonucu?
Ö1: 25 (Şekil 11).
A: Burada ($\sqrt{25}$ = *5 yazdığı yeri göstererek)* neden sonuç 25 çıkmadı?"

Şekil 11: Ö1'in 5^2 İfadesinin Karekökünü Bulması

Ö1, 25 ile 5^2 sayılarının aynı şeyi temsil ettiğini bilmesine rağmen, karekök alırken 25'in karekökünü 5 olarak rahatlıkla bulmuş fakat 5^2 sayısının kareköküne cevabı 25 demiştir. Araştırmacı katılımcıya içinde bulunduğu durumu fark ettirebilmek için 25'in karekökünün neden 25'e eşit olmadığını sormuştur. Ö1 uzun bir süre sessiz kalıp düşünmüştür. Araştırmacı, katılımcının uzun süre sessiz kalmasından dolayı Ö1'e durumu yeniden özetleme ihtiyacını hissetmiştir.

> "A: Mesela burada ne yaptın? *($\sqrt{25}$ = 5 yazdığı yeri göstererek)*
> Ö1: Karekök 25'i 5 olarak çıkardım.
> A: Tamam peki burada *($\sqrt{5^2}$ göstererek)* 25'i ne olarak yazdın?
> Ö1: 5'in karesi olarak.
> A: Sayının değeri değişti mi peki?
> Ö1: Hayır.
> A: $\sqrt{25}$ ya da $\sqrt{5^2}$ o halde nasıl sayılar?
> Ö1: Eşit.
> A: O zaman $\sqrt{25}$ nasıl çıkıyordu karekökten?
> Ö1: 25.
> A: Emin misin?
> Ö1: 5.
> A: O zaman $\sqrt{5^2}$ nasıl çıkar kökten?
> Ö1: 25."

Katılımcı $\sqrt{25}$'in değerinin görüşmenin başlarında 5'e eşit olduğunu söylerken şimdi değerine 25 demiştir. Ö1, 25 sayısının 5^2 sayısına eşit olduğunu her seferinde söylemesine rağmen karekök içinde bu sayıları farklı bir sayı gibi düşünmüş ve bu durumu *içselleştirememiştir.* Aksine bu durum öğrencinin zihninde daha da karışıklığa yol açmıştır. Katılımcının üslü sayılarda eşit ifadeler oluşturmasında sorun yaşamadığı, fakat bu ifadelerin karekök sembolü altında farklı sayılara eşit olacağını, ifadelerin eşit olduğunu fark ettikten sonra da her iki soruya da "*25'e eşittir.*" cevabını vermesi, araştırmacının Ö1'e sorduğu *"O zaman karekök 25 ($\sqrt{25}$) neden 25'e eşit çıkmadı?"* sorusunun katılımcıyı yönlendirdiğini düşündürtmüştür. Araştırmacı katılımcının bu durumunu fark etmiş ve ona farklı bir soru sormayı tercih etmiştir.

> "A: Peki, o zaman sana şöyle bir soru sormak istiyorum. Diyelim ki karekök içinde bir sayımız var ama bu sayının ne olduğunu bilmiyoruz, ama bu sayının 7'ye eşit olduğunu biliyoruz. Bunu nasıl buluruz? *($\sqrt{a}$ = 7, a'yı nasıl buluruz?)*
> Ö1: 49 mu öğretmenim (Şekil 12)?
> A: Neden?
> Ö1: 49'un karekökü 7'dir çünkü.
> A: Tamam, o zaman şuraya geri dönelim *($\sqrt{5^2}$ yazan yer)* bu sayının sen neye eşit olduğunu söyledin?
> Ö1: 25'e.
> A: Tamam. O zaman eğer şöyle olsaydı *($\sqrt{a}$ = 25),* karekök içindeki sayı ne olmalıydı?
> Ö1: 5 olması lazım.

A: O zaman $\sqrt{\mathbf{5}}$ kaça eşit olur?”

Şekil 12: Ö1’in 7’nin Hangi Sayının Karekökü Olduğu ile İlgili Cevabı

Katılımcı tam-kare sayıların kareköklerini bulurken başarılı olmuş fakat üssü kare olan sayıların karekökünü alamamıştır. Dolayısı ile üslü sayılar ve bu sayıların karekökleri arasında ilişkiyi *içselleştirememiştir.* Hangi sayının karekökünün 7’ye eşit olacağını bulabilen öğrenci, hangi sayının karekökünün 25’e eşit olacağı konusunda tereddüt yaşamış ve 5 olarak cevap vermiştir. Araştırmacı tersten sorarak öğrenciyi düşünmeye sevk etmiş ve bu soru üzerine öğrenci bir süre sessiz kalmıştır. Görüşmeyi derinleştirmek isteyen araştırmacı öğrencinin sessizliğini bozmak için öğrenciye farklı bir soru daha sormuştur.

> “A: O zaman şunu sorayım sana, karekök içinde bir sayım var ve bu dışarı 5 diye çıkmış. O zaman karekök içindeki sayım ne olmalı?
> Ö1: 25.
> A: Peki buradaki sayım 25 olsaydı *(karekök dışındaki sayıyı kastederek)* karekök içindeki sayı ne olmalıydı?
> Ö1: 25 çarpı 25’in sonucu olmalıydı.
> A: 25 çarpı 25’i biz nasıl gösterebiliriz?
> Ö1: 25 üssü 2.
> A: Yazar mısın bana dediklerini?
> Ö1: $\sqrt{\mathbf{25^2}} = 25$
> A: Karekök 25 üzeri 2 nasıl çıkmış dışarı?
> Ö1: 25 diye.
> A: O zaman karekök içinde 5 üzeri 2 ($\sqrt{\mathbf{5^2}}$) nasıl çıkar?
> Ö1: 5.
> A: Peki, karekök 13 üssü 2 ne diye çıkmalıydı?
> Ö1: 13.
> A: O zaman sence karekök ne işe yarıyor?
> Ö1: *(sessizlik)*
> A: Neyi bulmamıza yarıyor?
> Ö1: Sayının karesi…
> A: Cümlenin devamı nedir?
> Ö1: Sayının karesini bulmaya yarıyor.”

Ö1 araştırmacının sorduğu sorular üzerine gerekli düşünmeleri gerçekleştirmiş fakat istenilen yorumları tam olarak yapamamıştır. Karekökün ne işe yaradığı konusunda soruyu karekök sembolü üzerinden düşündüğü için hep karekök içindeki sayıyı dikkate alarak cevap verdiği düşünülmüştür. Gerekli matematiksel işlemleri yapabilen Ö1, aynı sayıya eşit olan farklı gösterimlerdeki sayıların kareköklerinin de eşit olacağının zor da olsa fark edebilmiştir. Daha sonra sorulan sorulara hiçbir işlem yapmadan cevap verebilmiş, karekök içinde "kare üsse sahip bir sayı" varsa bu sayının karekökün değerinin tabandaki sayıya eşit olacağını söyleyebilmiş ve bu durumu her sayı için gerçekleştirebilmiştir. Araştırmacı, karekökün ne işe yaradığı ile ilgili Ö1'in düşünmelerini derinleştirebilmek için soru sormaya devam etmiştir.

> "A: O zaman 2'nin karesi desem, nasıl bulursun?
> Ö1: 4.
> A: Karekök kullandın mı o zaman burada?
> Ö1: Hayır.
> A: Ne kullandın?
> Ö1: Üs.
> A: O zaman karekök kare buldurmaya mı yarar?
> Ö1: Hayır."

Katılımcı bir sayının karesini bulurken karekök kullanmadığını fark etmiştir. Bu durumu *"üs"* kullandığını söyleyerek dile getirmiştir. Karekökün, Ö1'in deyimiyle "kare buldurmak" için olmadığını söylemiştir. Bu farkındalığın üzerine araştırmacı, tekrar karekökün ne işe yaradığını sormuş, yine uzun bir sessizlik anı yaşayan katılımcının dikkatini tekrar görüşmeye çekmek için Ö1'e farklı bir soru sormuştur.

> "A: Peki, kare ile karekök arasında nasıl bir ilişki vardır ya da bunların birbirinden farkı nedir?
> Ö1: Kare 2 öğretmenim, karekök sembol.
> A: Yani? Ne demek istiyorsun? Ne farkları var?
> Ö1: *(yine sessizlik)*
> A: Kare bulunca ne yapıyoruz, karekök bulunca ne yapıyoruz?
> Ö1: Kare bulunca sayıyı iki kere yazıp çarpıyoruz öğretmenim, karekök bulunca da o sayıyı ımmm *(düşünüyor söyleyeceği kelimeyi)* o sayıyı hangi iki aynı sayıyı çarparak bulabiliriz.
> A: Yani, o zaman ne yapıyor karekök?
> Ö1: *(yine susuyor…)* yani ($\sqrt{49}$ = *7)* yazan yeri göstererek, şurdaki sayıyı *(7'yi ifade ediyor)* iki kere çarparak, şuradaki sayıyı elde ediyoruz *(49'u göstererek).*
> A: Yani buradaki sayının *(49'u göstererek),* buradaki sayının *(7'yi göstererek)* neyi olduğunu söylüyor?
> Ö1: Sayının karesi olduğunu söylüyor.
> A: O zaman karekök neyi bulduruyor bize?
> Ö1: Karesini.
> A: Emin misin?

Ö1: Evet."

Ö1 kodlu katılımcı kare almanın bir *işlem süreci olduğunu,* karekökün ise bir *sembol* olduğunu söylemiştir. Karekök alma sürecinde karekök içindeki sayıyı *"hangi iki sayının çarpımıysa o sayıya eşit"* olarak tanımlamaktadır. Bu durumu daha da açıklamasını istenilince Ö1, karekök alma işlemini tersten başlayarak anlatmıştır. Yani *karekök dışındaki sayıyı iki kere çarparak karekök içindeki sayıyı bulabileceğini* ifade etmiştir. Ö1'in söylemleri incelendiğinde katılımcının sürecin farkında olduğunun sadece işlemleri *tersinden* düşündüğü için karekök içindeki sayıyı yorumladığı anlaşılmıştır. Araştırmacı, katılımcıya son olarak bir Parkur problemi (EK-3) sunmuş ve problemi okumasını istemiştir.

"Ö1: Tam sayıların kareleri olan yerlere bayrak dikiyorlarmış. 10 metrelik dilimlerle.
A: Evet, peki ilk soru ne diyor?
Ö1: 10 metrelik dilimlerin kaç tanesinde birden fazla bayrağın yer aldığını soruyor.
A: Ne düşünüyorsun?
Ö1: Sayılara bakarım öğretmenim.
A: Tamam, bakalım. Nerelere dikebilir mesela?
Ö1: *(susuyor)…*
A: Nerelere dikebiliyorduk bayrak?
Ö1: Pozitif tamsayıların kareköklerine.
A: Kareköklerine mi dikiyorduk?"

Ö1 problemi okumuş fakat bayrak dikme kuralı ile puan alma kuralını birbirine karıştırmıştır. Bu nedenle araştırmacı, soruyu tekrar okumasını istemiştir. Okumasını bitirdikten sonra tekrar bayrakları nerelere dikebileceğini Ö1'e sorulmuştur. "*Pozitif tam sayıların karelerine"* cevabını veren Ö1, aralıkların uç noktalarına odaklandığı için (10-20-30-40…) bir sayının karesi olan sayı bulamamış ve araştırmacıya bu sayılar arasındaki sayıların da dâhil olup olmadığını sormuştur. Araştırmacı o sayıların dilimlerin sınırları olduğunu söylemesi üzerine Ö1 düşüncelerini açıklamaya başlamıştır.

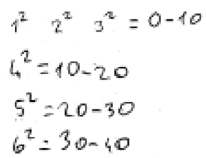
"Ö1: Bunların arasında var öğretmenim *(20-30 arasını göstererek).*
A: Ne var onların arasında?
Ö1: 25 var. 5'in karesi.
A: Evet, peki daha başka var mıdır?
Ö1: Burada var. *(30-40 arasını göstererek)*

A: Ne var?
Ö1: 6'nın karesi 36 var öğretmenim.
A: Daha?
Ö1: Burada var.*(10-20 arasını göstererek).* 4 ün karesi 16 vardır. Sonra burada vardır *(0-10 arasını göstererek)*. 2'nin ve 3'ün karesi vardır. Başka yoktur."

Katılımcı parkur sorusunda örnek olarak verilen aralıklara dikkat ederek bu aralıkta var olan kare sayıları bulmuş ve bu sayıların hangi aralıkta yer aldıklarını söylemiştir. 0 ile 10 arasında kalan 1 sayısını kare sayı olarak söylememesi araştırmacının dikkatini çekmiş ve bu durumu sormuştur.

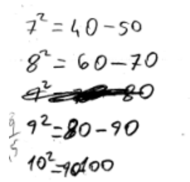
"A: Neden 2'ye kadar indin?
Ö1: Pozitif diyor öğretmenim.
A: Evet, pozitif diyor. Neden bunu söyledin?
Ö1: *(düşünüyor)..* 1 var öğretmenim. 0-10 arasında. 1'in karesi 1.
A: Peki, onu neden ilk başta demedin?
Ö1: Karesi aynı sayı olduğu için."

Ö1, problemde istenilen "pozitif tam sayıların karelerini" bulurken 1 sayısını almamasının nedeni olarak *"karesinin kendisine eşit"* olmasından kaynaklandığını söylemiştir. Araştırmacının karesi kendisine eşit sayı olamaz mı sorusu üzerine, Ö1 olabileceğini söylemiş ve 1 sayısını da tam-kare sayı olarak kabul etmiştir; bulduğu tüm sayıları kâğıdına yazmıştır (Şekil 13).



Şekil 13: Ö1'in Bayrakların Olduğu Noktaları Belirlemesi-1

Araştırmacı, katılımcıya neden 40 metrede bitirdiğini sormuş, öğrenci parantez içinde yer alan sayılara odaklanarak sayıların oraya kadar gittiğini söylemiştir. Bunun üzerine araştırmacı hattın kaç metre olduğunu ve bu hat üzerindeki bayrak dikilebilecek tüm sayıları işaretlemesini istemesi üzerine, katılımcı aralıkları 100 metreye kadar devam ettirmiş ve bu hat üzerindeki diğer pozitif tam sayının kareleri olan sayıları da bulmuştur (Şekil 14).



Şekil 14: Ö1'in Bayrakların Olduğu Noktaları Belirlemesi-2

Katılımcı yazma işlemini bitirdikten sonra araştırmacı tekrar söze girerek öğrenciye nerelere bayrak dikilebileceğini sormuştur. Ö1, 100'e kadar olan tam-kare tam sayıları bulmuş ve bu sayıları sırasıyla söylemiştir.

> "A: Tamam o zaman bayrakları nerelere dikti?
> Ö1: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100."

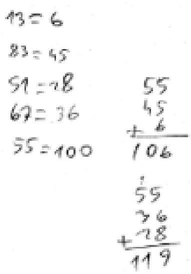
Katılımcı, pozitif tam sayıların karelerini bulma işleminden sonra parkur sorularını çözmeye geçmiş ve ilk iki soruyu takılmadan çözmüştür. Sıra üçüncü parkur sorusuna gelmiştir. Parkur-3'te de hiç zorlanmadan 57.metrede yarışı terk eden yarışmacının toplamda yedi bayrak alabileceğini ve bu bayrakların 1., 4., 9., 16., 25., 36. ve 49.metrelerdeki bayraklar olduğunu söylemiştir. Parkur-4 sorusunda ise biraz zorlanmış, soruyu tekrar okuma hissi duymuştur.

> "Ö1: *(Sesli şekilde bir daha okuyor.)* Nasıl yani öğretmenim?
> A: Bir daha okuyabilirsin.
> Ö1: Yok anladım öğretmenim.
> A: Tamam o zaman anlat bana ne düşünüyorsun.
> Ö1: A'nın oyuncuları 13. ve 83. metrelerde.
> A: Evet, 13.metrede terk edeni düşünelim. Hangi bayrakları dikmiştir?
> Ö1: 1, 4 bi de 9'a.
> A: Peki, puan alma kuralı neymiş?
> Ö1: Bayrakların dikili olduğu sayının karekökü kadar puan alıyor.
> A: 13. metrede yarışı terk eden birinin alacağı puan ne olur o zaman?
> Ö1: *(susuyor)*
> A: Bu yarışmacı nerelere bayrak dikiyordu?
> Ö1: 1, 4, 9.
> A: Evet, peki 1'e diktiği bayraktan kaç puan alır?
> Ö1: 1.
> A: Neden?
> Ö1: 1'in karekökü 1'dir.
> A: 4'e diktiğinde ne alır?
> Ö1: 16.
> A: Neden?

Ö1: 4’ün karekökü 16.
A: Emin misin?
Ö1: Yok. 4’ün karesi 16. 2.
A: Neden?
Ö1: 4’ün karekök 2’dir.
A: 9’a diktiğinde ne alır?
Ö1: 3.
A: Peki, bu yarışmacı toplamla kaç puan alır?
Ö1: 6.”

Ö1 4.parkur sorusunu çözümlerden anlamadığını dile getirmiş fakat araştırmacının sorduğu sorulara cevap vermeyi başarmıştır. Ö1, kare ile karekök kavramları arasında karışıklık yaşamaya devam etmiş, yine hatasının farkına varmış ve hatasını düzeltebilmiştir. Katılımcı, diğer yarışmacıların puanlarını da hesaplamak için bayrakların dikili olduğu sayıların tabanlarındaki sayılarla işlemleri yürütmüştür. Bu anlamda, araştırmacı Ö1 in kare (üs) sayıların kareköklerinin sayının tabanındaki sayıya eşit olduğu bilgisini *içselleştirdiği* ve bu bilgiyi tüm tam kare pozitif sayılara uygulayabildiği görülmüştür.

Ö1 her iki takımda yarışan üç yarışmacının da ayrı ayrı aldığı bayrakları bulmuş ve bu bayraklardan topladığı puanları hesaplamıştır. Tüm yarışmacıların puanları hesapladığında takımların toplamda elde ettikleri puanları; A takımı için 106 puan, B takımı için 119 puan olarak belirlemiştir (Şekil 15). Katılımcı kazanan takımın B takımı olduğunu söylemesi üzerine araştırmacı görüşmeyi bitirmiştir.



Şekil 15: Ö1’in Parkur-4’e Cevabı

Sonuç olarak Ö1 in geçirdiği aşamalar özetlenecek olursa; Ö1 satranç tahtasının kare bölümlerinden etkilenerek problemin çözümüne başlamıştır. Grup çalışmasında da ilk önce herhangi bir birim veya uzunluktan bahsetmeden kare bölüm sayısı 64 olduğu için alanını 64 birim kare, dolayısıyla kenarında da 8 kare dizili olduğu için 8 br olduğunu ifade etmiştir. Fakat bu birimleri kendisinin alması, problemde herhangi bir sayısal verinin olmayışı, bu problemin çözümü için her ne kadar doğru düşünmeler gerçekleştirmiş olsa bile kesin bir sonucun çıkmaması Ö1'de huzursuzluk yaratmıştır. Bir süre sonra bu sayılara birim vermiş; her bir karenin uzunluğunu 1 metre alarak satranç tahtasının bir kenar uzunluğunu 8 metre, alanını ise 64 metrekare olarak bulmuştur. Daha sonra satranç tahtasının kenar uzunluğunun 8'in katı olan herhangi bir sayı (16, 24 gibi) olabileceğini ifade etmiştir. Alan üzerinden kenar bulmaya çalışırken ise ilk önce tam-kare olmayan bir sayı (50 sayısını) seçmiş ve bu sayının aynı iki sayının çarpımı şeklinde yazılamadığını söylemiştir. Dolayısıyla Ö1, bundan sonra aldığı alanları bir sayının karesi olan sayılar (25, 36 gibi) arasından seçmiş ama bunu sözel olarak ifade etmemiştir. Tam-kare pozitif tam sayıları bulurken ilk önce aynı sayıları çarpım (tekrarlı çarpma düşünerek ve aynı sayıların çarpımının 50'ye eşit olmadığını görerek), daha sonra ise üslü sayılarla *koordinasyon* kurarak kare sayıları oluşturma yöntemlerini kullanmıştır. Sonuç olarak alanı bir sayının karesine eşit olan karenin, bir kenar uzunluğunun tabandaki sayıya eşit olduğunu fark etmiştir. Bu durumu *içselleştiren* Ö1, bağlamdan bağımsız hale gelerek tam-kare sayıların karekökünün tabandaki sayıya eşit olacağı *genellemesini* oluşturmuş ve karekök işlemini tersten yorumlayarak karekök dışındaki sayının karesi, karekök içindeki sayıya eşittir bilgisini yorumlayabilmiştir. Bundan dolayı Ö1'in tam-kare pozitif tam sayılar ile bu sayıların kareköklerini ilişkilendirdiği ve tam-kare sayıların kareköklerini *nesne* düzeyinde oluşturduğu düşünülmüştür.

4.1.3 Ö3'ün Grup içi Kavramsallaştırma Süreci

Dağıtılan problem kâğıtlarına bakan grup üyelerinin yine dikkatini çeken ilk şey problemin resmidir. Bazı öğrenciler resimdeki okulun kendi okulları olduğunu anlamışken, bazı öğrenciler ise diğer arkadaşlarının uyarmasıyla bunu fark edebilmişlerdir.

> "Ö10: Fark ettiniz mi, bizim okul?
> Ö3: Bizim okul mu?
> Ö11: Fark etmedin mi gerçekten?
> Ö3: Bence bunun bizim okul olduğunu kimse anlamamıştır.
> Ö10: Çok güzel olmuş yaa."

Problemi okuyan öğrenciler problemi anlamadıklarını dile getirmişlerdir. Hepsi soruyu tekrar okumak istemişlerdir. Sorunun giriş kısmındaki bölümü Ö3 de Ö1 gibi gereksiz bulmuştur. Ö3, sorunun giriş kısmının hikâye olduğunu, önemli olan bundan sonrasını anlamaları gerektiğini, anlarlarsa çözebileceklerini dile getirmiştir. Soruda önemli olan kısmı tekrar sesli okuyan Ö3'ün sözünü Ö2 kesmiştir.

> "Ö3: Alan ölçüsü bilindiğine göre…
> Ö2: Bilmiyoruz ki ama…
> Ö3: Evet biz bilmiyoruz ama o biliyor.
> Ö10: Alanını bulalım o zaman.
> Ö11: 4 kenarı var. O zaman 4 tane şerit gerekir.
> Ö3: Bence de 4 şerit gerek."

Burada katılımcılar sorudaki okul müdürünün alanı bildiğini ama bunu kendilerinin bilmediğini söylemişlerdir. Kendilerini sorunun öznesi olarak görememişlerdir. Bu yüzden genel bir çıkarımda bulunamamışlardır. Ö11, satranç altlığının kenar uzunluğundan ziyade kenar sayısı miktarına bakarak 4 tane şeritin gerekli olduğunu, çünkü 4 tane kenarının olduğunu söylemiştir. Grup arkadaşları da Ö11 in fikrine katılmış ve onaylamışlardır. Araştırmacı grubu ziyaret edip, grup üyelerine neler yaptıklarını sormuştur.

> "A: Ne düşünüyorsunuz?
> Ö3: Öğretmenim, her kareye bir şerit mi yoksa kenara bir şerit mi bilmiyoruz ki.
> A: Bunları bilsen ne işine yarar?
> Ö3: Eğer 64 ise o zaman 1 metre.
> Ö10: Eğer 1 metreyse o zaman kenarı 8 metre. 8, 16, 24, 32 mi?
> Ö3: Bu ne biçim bir şey ya.
> Ö11: Durun ben bi kareleri sayayım *(Satranç altlığının etrafındaki kareleri sayıyor. 32 ettiğini görüyor.)*
> Ö3: Bari kurşun kalem verilseydi. Şimdi bu tükenmez kalem silinmez de."

Ö3 in şerit uzunluğundan çok şerit sayısına takılmış olduğu görülmüştür. Burada kullanılacak şerit sayısının eğer her bir kare (fayans) için ayrı ayrı alınacaksa toplamda kullanılacak şerit sayısının 32 olması gerektiğini, eğer satranç tahtasının kenarını bütün olarak düşüneceklerse o zaman her bir kenara bir şerit kullanılacağından toplamda 4 şerit kullanılması gerektiğini düşünmüştür. Soruda sayısal değer olarak hiçbir değerin verilmemesi problemin çözümünün gerçekleşememesine sebep olduğunu Ö3 *"Bu ne biçim soru ya!"* sitemiyle dile getirmiştir. Yine problemin çözümü için bir şey yapamadığını Ö2 ise *"Donduk valla!"* sözüyle anlatmaya çalışmıştır.

Ö3, bu resmin kare olup olmadığı ile ilgili duyduğu kuşkuyu grup arkadaşlarıyla paylaşmıştır. Ö10 arkadaşına cevap olarak resmin satranç tahtası ve satranç tahtalarının şeklinin de kare olduğunu söylemiştir. Bu soruya şaşıran Ö10, arkadaşı Ö3'e *"Hiç mi sanki satranç görmedin?"* diye sormuştur. Arkadaşı ise gördüğünü hatta satranç oynamayı bildiğini fakat şekline hiç dikkat etmediğini söylemiş ve şeklin kare olduğu üzerine hemfikir olmuşlardır.

Ö11 her bir karenin kenar uzunluğunu 1 santimetre almaları gerektiğini, böylece kenar uzunluğunun 8 santimetre olacağını grup arkadaşlarıyla paylaşmıştır. Bunun üzerine Ö3 grup arkadaşına sert bir tepki vererek *"1 santimin çok küçük olduğunu, 1 santimin içine küçük taşların bile sığamayacağını, 1 santim almanın saçma olacağını"* ifade etmiştir. Sayılar üzerinden çözüme ulaşamayacaklarını söyleyen Ö3, x ve y değişkenlerini kullanarak formül bulacağını grup arkadaşlarına söylemiştir. Bu fikri duyan araştırmacı bu gruba doğru giderek neden x dediğini sormuştur. Ö3'ün cevabı şu şekilde olmuştur:

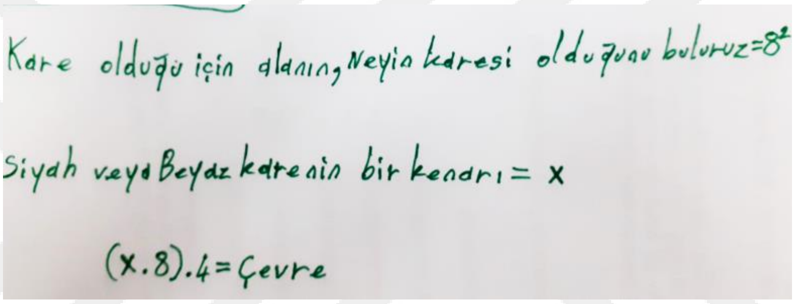
> "Ö3: Öğretmenim, biz bir kenarının ne olduğunu bilmiyoruz. Biz sadece bir kenarında kaç tane kare olduğunu biliyoruz. Kare sayısıyla uzunluğu nasıl ilişkilendirebiliriz ki. Kenarı x olsa, alanı x çarpı x'ten x^2, çevresi de 4x olur o zaman."

Ö3 düşündüğü fikirleri çok güzel anlatabilmiştir. Kare sayısıyla kenar uzunluğunun farklı şeyler olduğunu, bunları birbirinin yerine kullanamayacağını, burada herhangi bir sayı olmamasından dolayı bunu temsil edebilecek gösterimin bir denklemle sağlanabileceğini söylemesi durumun farkında olduğunu göstermektedir. Kenar uzunluğu bilinmediği için kenar uzunluğuna x diyerek, x cinsinden hem alan ölçüsünü hem de bu x'e göre değişen çevre ölçüsünü cebirsel ifade olarak gösterebilmiştir. Bu şekilde her sayı için alanı ve çevresini bulabileceğinin farkında olduğu göstermiştir. Problemin çözümünü cebirsel ifade olarak bulup bu grup çözümü sonlandırmıştır.

4.1.4 Ö3'ün Bireysel Görüşme Süreci

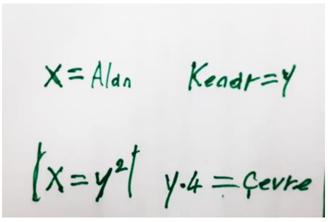
Ö3 e ilk önce grup içindeki kâğıt gösterilerek burada neler yaptığı sorulmuştur. Katılımcı problemi çözebilmek için *satranç tahtasının bölümleri olan kare fayans* *sayılarından* etkilenerek çözüme başlamış, fakat problemde herhangi bir uzunluğun verilmemesi nedeniyle denklem kurmanın daha mantıklı olacağını söylemiştir. Ö3 satranç tahtasının bölümlerini oluşturan kareler ile satranç tahtasının bir kenarını ilişkilendirmiş ve ne kadar şerit kullanılması gerektiğini bu ifadeler üzerine kurduğu *cebirsel ifadeler* ile ifade etmiştir.

Ö3, satranç tahtasının alanını *'neyin karesi olduğunu'* bulma ile ilgili olduğunu yazmış ve sayısal değer olarak da 8^2'yi örnek vermiştir. Satranç tahtasının bölümlerini oluşturan karelerin kenar uzunluğuna x demiş ve bu durumda satranç tahtasının bir kenar uzunluğu 8.x olarak bulmuştur. Dolayısıyla satranç tahtasının çevresinin tahtayı oluşturan kare bölümler cinsinden 4.(8.x)'e eşit olduğunu söylemiştir (Şekil 16).



Şekil 16: Ö3'ün 1. Bağlamsal Problemdeki Grup Çalışmasındaki Bireysel Kâğıdından Görüntü-1

Daha sonra Ö3, bu çözümünün altına başka bir çözüm daha geliştirmiş (Şekil 17) ve anlatmaya bu çözüm üzerinden başlamıştır.



Şekil **17**: Ö3'ün Bağlamsal Problemdeki Grup Çalışmasındaki Bireysel Kâğıdından Görüntü-2

> "Ö3: Alanı biliyormuşuz. O yüzden alana x verdim. Kenara da y verdim. Sayıları bilmediğimiz için. Sonra alanın kenarın karesine eşit olduğunu biliyorduk ve şeey çevre de şeey dört kenarın toplamıydı. Bende y ile 4'ü çarptım, çevreyi buldum.
> A: Yani, ne oldu sonuçta? Bir karenin alanı ne olabilir mesela?

Ö3: 12 olabilir…
A: 12 olursa kenarı ne olabilir?
Ö3: 3. *(kalemini çevre= 4×y denkleminin üstünde tutarak)*
A: Kenarı 3 olursa alanı 12 mi olur?
Ö3: Yok olmuyor, 3'ün karesi 9. Alanı 9 olur. 12 olmuyor.
A: Ne yaparız o zaman?
Ö3: 12'nin hangi sayının çarpımı olduğunu bulacağız.
A: Tamam ne olur o zaman?
Ö3: Olmuyor işte, hiçbir sayının çarpımı 12 değil.

Ö3 kurduğu cebirsel ifade ve denklem içinde yer alan değişkenlerin farkında olarak düşüncelerini anlatmıştır. Neyin neye göre değişeceğinin farkında olan Ö3'ten örnek istenmesi üzerine 12 sayısını söylemiş ve bir an çevre bulma ile karıştırıp kenarını 3 olarak cevaplamıştır. Araştırmacının sorusu üzerine yanlışını fark eden Ö3 hemen kenarının 3 olması durumunda alanın 9'a eşit olacağını söylemiş, alanın 12 olması durumunda ise *"iki aynı sayının çarpımı"*nın 12'ye eşit olamayacağını ifade etmiştir. Ö3, kare sayıları bulurken Ö1 gibi hangi iki aynı sayının çarpımı olduğunu araştırmış, kare sayılarla *tekrarlı çarpım* arasında *koordinasyon* kurmuştur.

"Ö3: 25 olabilir.
A: O zaman kenarı ne olabilir?
Ö3: 5 olur.
A: Çevresi ne olurdu o zaman?
Ö3: 20.100 de olabilir. Kenarı 10 olur."

Araştırmacının herhangi bir soru sormamasına rağmen katılımcının kare sayılardan örnekler vermesi öğrencinin alan ve kenar arasındaki ilişkiyi ve tam-kare sayılar kavramını telaffuz etmese dahi farkında olduğu düşünülmektedir. Ö3 bu sayıları karekök sembolü kullanarak da doğru bir şekilde gösterimini yapmıştır (Şekil 18).

$\sqrt{25} = 5$ $\sqrt{16} = 4$

Şekil 18: Ö3'ün Karekök İşaretini Gösterimi

Bunun üzerine Ö3'e karekökün ne işe yaradığı, ne buldurduğu sorulduğunda cevabı *'alandan kenarı bulma'* olmuş ve hemen bir örnekle durumu açıklamıştır. Ö3, kendi örneğini verebildiği için durumu *içselleştirdiği* düşünülmektedir.

"A: Peki, hani şurada karekök içinde 25 var ya, o 25'i başka nasıl gösterebiliriz?

Ö3: 5'in karesi
A: Tamam yazabilir misin o zaman dediğini.
Ö3: $\sqrt{5^2}$.
A: Peki bu neye eşit olur?
Ö3: 5'e.
A: Neden?
Ö3: İlk önce üslü sayıyı normal sayıya çeviririz, 25 olur, sonra karekökünü alırız, yani yine aynı olur.
A: O zaman bir sayının karesi ile karekökü arasında nasıl bir ilişki var?
Ö3: Karesi çarpıyor, yani 5 kere 5. Karekökü ise bölüyor.
A: Neye bölüyor?
Ö3: *(düşünüyor)* aynı sayı…. *(cümleyi toparlayamıyor)* karekökünü bulmaya yarıyor."

Katılımcı üslü sayılarda birbirine denk ifadeler oluşturma kazanımı *içselleştirdiği* için aynı sayıların farklı gösterimlerinin karekökünün de birbirine eşit olması gerektiği bilgisini yapılandırmış ve doğru cevap verebilmiştir. Bir sayının karesi ile karekökü arasındaki ilişkiyi açıklamasını istediğinde ise, karesini almayı aynı sayıyla çarpma, karekökü ise aynı sayıya bölme olarak tanımlamıştır. Ö3 içinde bulunduğu durumu sayıyı, aynı sayı çarpanlarına (bölenlerine) ayırarak çözümlemeye çalışmış, *çarpanlara ayırma* ile *koordinasyon* kurduğu düşünülmüştür. Katılımcıdan düşüncelerini daha net açıklaması istenmiş ve bunun üzerine açıklamaya 5 sayısı üzerinden devam etmiştir. 5 sayısının karesinin alınmasını 5'in 5.katını almak, 25 sayısının karekökünün alınmasını da 25'in 5.böleni almak (aslında bu sayının 5'in karesi olduğunu bildiği için bu sayıyı 5'e bölerek de karekökünün bulunulabileceği) olarak açıklamaya çalışmıştır.

"A: Karesi alındığında neye götürür, karekökü alındığında neye götürür?
Ö3: Karesi alındığında katlarına götürür, karekök ise bölenlerine…
A: Nasıl katları ve bölenleri yani?
Ö3: 5'in 5.katı ve 25'in 5.böleni gibi."

Ö3 bir sayının karesini veya karekökünü alma durumunu *çarpanlara ayırma* konusu ile ilişkilendirmiş, önceki öğrenmeleri ile yeni öğreneceği konu arasında *koordinasyon* oluşturmuş ve araştırmacının bunu sormasında *sayının katı veya sayının böleni* olarak bu durumları açıklamaya çalışmıştır. Daha sonra araştırmacı, Ö3'e parkur probleminin olduğu kâğıdı sunmuş ve öğrenciden problemi çözmesini istemiştir. Katılımcı problemi okuduktan sonra konuşmaya başlamıştır.

"Ö3: *(soruyu sessiz bir şekilde okuyor)…* burada *(30-40 yazan yeri göstererek)* iki tane bayrak olur.
A: Nasıl yani?
Ö3: Birincisi 30'a, ikincisi 40'a.
A: Neye göre yaptın? Bayrak dikme kuralı nedir?
Ö3: 10 metrelik dilime.
A: Emin misin? 10 metrelik dilime mi dikiliyor?
Ö3: *(soruyu tekrar okuyor sesli bir şekilde).* Bir sayının karesi olması gerekiyormuş.
A: O zaman ne yapacağız?
Ö3: Bir sayının karesi olan sayıları bulacağız.
A: O zaman nelerdir bunlar sence?
Ö3: 20'nin karesi yok *(10-20 yazan yere kalemi götürüyor),* 10'un…
A: Neden 20'nin karesi yok?
Ö3: 4 kere 4 16, 5 kere 5 25. Yok. 10'un yok. 30'un yok. 40'ın yok. Hiçbirinin yook."

Ö3 problemi ilk önce yanlış anlamış, bayrakların her 10 metrenin başına dikildiğini düşünmüştür. Araştırmacı katılımcıdan problemi tekrar okumasını istediğinde yanlış düşündüğü anlamış ve bayrak dikilecek yerlerin *"bir sayının karesi olması gereken yerler"* olarak düzeltmiştir. Fakat yine uç noktalara odaklanmış ve 10, 20, 30, 40 sayıları içinde kare sayı olan sayıları bulmaya çalışmış, hiçbirinin kare sayı olmadığını fark edince tepkisini *"sayıların karesi yok"* diyerek dile getirmiştir. Ö3*, "20'nin karesi yok"* derken 20 sayısının hiçbir sayının karesi olmadığı ya da 20 sayının karekökünün tam sayıya eşit olmadığını anlatmaya çalışmış fakat bunu tam olarak ifade edememiş ve yanlış kelime kullandığının farkında olamamıştır.

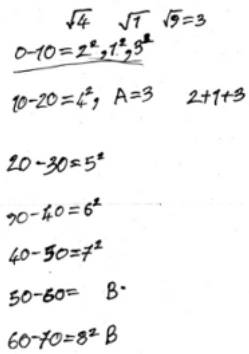
"A: O zaman ilk aralığım 0-10. Burada neler var, kaçıncı metreler var?
Ö3: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10.
A: Peki bunların içinde … *(söz kesiyor öğrenci)*
Ö3: Karesi olanları mı bulacağız?
A: Nasıl buluruz onları?
Ö3: 1'in karesi yok. 2'nin karesi yok.
A: 1'in karesi yok mu? Kaça eşit 1'in karesi?
Ö3: 1'in karesi 1. O zaman var. Burada *(0-10 aralığı)* 1'in karesi var. 4'ün karesi var.
A: Neredeدir 4'ün karesi?
Ö3: 2 kere 2, 4. Buradadır *(0-10 aralığını göstererek)*
A: 2 kere 2, 4. Bu 4'ün karesi midir?
Ö3: *(düşünüyor ama cevap yok)….*
A: Tamam bana onu yazabilir misin?
Ö3: 2.2=4
A: Bu 4'ün karesi mi?
Ö3: Bu *(2.2 göstererek)* buna *(2^2 yazarak)* eşit.

A: Tamam bunu nasıl okursun?
Ö3: 2'nin karesi.
A: O zaman bu 4'ün mü karesi?
Ö3: Yok. 2'nin karesi 4'e eşit.
A: 4'ün karesi neye eşit?
Ö3: 4'ün karesi 16'ya eşit."

İlk 10 metrelik dilim içinde hangi noktaların olduğunu bulmuş ve bu sayıları tek tek incelemeye başlamıştır. Yanlış ifade kullanımı *("1'in karesi yok, 2'nin karesi yok")* devam etmiş ve bu hatasının farkına varamamıştır. *Karekök* kavramı yerine *kare* kavramını kullanmaya devam etmiştir. Ö3 de Ö1 gibi 1 sayısının karekökünün olmadığını düşünmüştür. Bu durumu 1'in karesinin 1'e eşit olduğunu söyleyerek açıklamış daha sonra ifadesini hemen değiştirmiş, 1 sayısının da pozitif sayı olduğunu söyleyerek "*1'in karesi var*" demiştir. Bu katılımcı da karesi kendisine eşit *(diğer taraftan karekökü kendisine eşit)* sayı olamayacağını düşündüğü için 1 sayısını başlangıçta tam-kare sayı olarak almamıştır. Aynı yanlış söylemine devam ettiği *(karekök yerine kare kavramını kullanması)* için araştırmacı hatasını fark ettirmeye çalışmış, 4'ün karesinin ne olduğunu sormuştur. Katılımcı açıklama olarak 2 kere 2'nin 4'e eşit olacağını söylese de bunun 4 sayısının karesi olup olmadığı sorusuna cevap verememiş, sessiz kalmış ama yaptığı işlem 4'ün hangi sayısının karesi olduğunu bulma olmuştur. Araştırmacı, öğrenciden bu söylediklerini yazmasını istemiş ve öğrenciye yazdıklarını okutmuş ve hangi sayı hangi sayının karesi olduğunu fark ettirmeye çalışmıştır.

"Ö3: *(0-10 aralığını yazarak)* burada 1'in karesi var, 2'nin karesi var, dahaaaaaa ımm daha yok. *(10-20 aralığını yazarak)* 4'ün karesi, *(20-30 aralığını yazarak)* 5'in karesi, *(30-40 aralığını yazarak)* 6'nın karesi.. 100'e kadar gidecek miyiz?
A: Hattımız ne kadardı?
Ö3: 100. Tamam. *(40-50 aralığını yazarak)* 7'nin karesi, *(50-60 aralığını yazarak)* 8 kere 8 64 eder. Burada yok. *(60-70 aralığını yazarak)* 8'in karesi, *(70-80 aralığını yazarak)* burda da yok 9 kere 9 81 çünkü, *(80-90 aralığını yazarak)* 9'un karesi, *(90-100 aralığını yazarak)* 10'un karesi. *(0-10 aralığını göstererek)* burada sadece birden fazla *(bayrak)* var.
A: Tüm bayraklarımız tamam mı?
Ö3: *(kontrol ediyor)*. 3'ün karesi. O da burada *(0-10 aralığından bahsediyor).* Yine en fazla bayrak burada sonuç değişmedi."

Ö3 sonunda söylemlerini düzeltmiş ve hat üzerinde yer alan tüm bayrakların dikilebileceği yerleri bulmuş (Şekil 19); parkur-1, parkur-2 ve parkur-3 sorularına hemen doğru cevap vermiştir. Son parkura geçtiğinde problemi ilk önce anlayamamış, sonra hangi bayrakların dikilebileceğini bulmuş fakat bu sefer de puan alma konusunda sıkıntı yaşamıştır.



Şekil 19: Ö3'ün Bayrakların Olduğu Noktaları Belirlemesi

"Ö3: Önce 13'ün hangi sayılar arasında olduğunu buldum. Bu A kaç bayrak kazanmış şimdi onu bulcam.
A: Tamam kaç bayrak kazanmıştır?
Ö3: *(1^2, 2^2, 3^2 sayılarını göstererek)* 3 bayrak kazanmıştır. Bunu *(4^2'yi göstererek)* alamamıştır.
A: Peki, kazandığı puan nedir öyleyse?
Ö3: Karekökü kadarmış.
A: Neyin karekökü kadarmış?
Ö3: Bulunduğu sayının.
A: Devam edelim…
Ö3: 0 ile 10 arasında.
A: Tamam peki hangi metrelerde?
Ö3: 4.metrede, 1.metrede, 9.metrede.
A: Peki burada aldığı puanlar ne olacak?
Ö3: Toplamının mı bulcaz?
A: Ne soruyor soruda?
Ö3: *(soruyu yine okuyor)* Her bayrak kendi ayrı. Bu 4. 4'ün karekökü 2, 2 puan. 1'in karekökü yok.
A: Yok mu?
Ö3: 1.
A: Neden 1?
Ö3: 1 kere 1, 1. Çünkü 1'in karesi 1 ediyor. 3'ün karesi 9, 9'un karekökü 3. *(2+1+3 yazarak)* 6 puan aldı. *(1.A=6 yazdı.)* şimdi 2. A'yı bulcaz.
A: Dinliyorum seni.
Ö3: 83… *(kalemini 9^2 yazan yere götürüp biraz duraksayarak)* bunu da kazandı. İlk önce bunları almış *(ilk A'nın aldığı bayraklardan bahsetmektedir,*

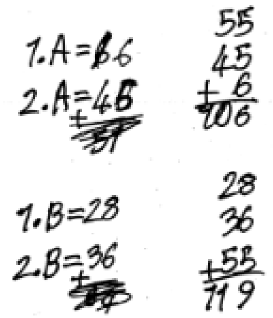
2+1+3 yazıyor direk), öğretmenim bunlar *(1^2,2^2,3^2,4^2…)* hep alttaki sayılar *(1,2,3,4…)* çıkıyor. Tesadüf mü bunlar?*)*
A: Acaba? Neden o sayılar çıktı hep?
Ö3: Bunu ilk karesini alıyoruz, sonra kareköküne çeviriyoruz sonra yine bunu buluyoruz. Tesadüf değil o zaman.
A: Peki o zaman sayının karesinin karekökü nasıl bir ilişki sunar bize?
Ö3: Ters işlem gibi. Mesela 1 ile toplayıp çıkarmak gibi bir şey. Ters işlem bunlar. O zaman burası *(4^2'nin karekökünden bahsetmektedir)* 4, burası 5, burası 6 burası 7, burası 8, burası 9."

Bir an önce problemi çözmek istediği için problemin ondan ne istediğine odaklanamadığından süreç içerisinde sık sık probleme geri dönüp okuma ihtiyacı hissetmiştir. Problemi anlayan katılımcı, dikili olan her bayrağın bulunduğu sayının karekökünü bulup alacağı puanları hesaplamaya başlamıştır. Parkur 1'de *"1'in karesi yok"* diyen katılımcı, bu parkurda da *"1'in karekökü yoktur"* demiştir. Ö3, bayrakların dikileceği yerleri bulurken 1 sayısı hakkında yaşadığı tereddüdü sonlandırmıştır. Bu sayıyı da tam-kare sayı olarak kabul eden fakat puan hesaplamaya gelince 1'in karesinde dikili olan bayraktan gelecek puan olarak 1'in karekökünün olmadığını dile getiren Ö3'ün, *1 sayısını tam-kare sayı olarak içselleştiremediği* düşünülmektedir.

Diğer taraftan Ö3, bayrakların dikili olduğu yerlerden alınacak puanları hesaplarken; alınan puanların hep tabandaki sayıya eşit olduğunu fark etmiş ve bu durumun tesadüflüğünü sorgulamıştır. Durumu edindiği bilgileriyle kontrol etmiş, 2.dereceden üsse sahip üslü sayının değerini açarak bulmuş ve bu sayıların kareköklerini aldığında, ilk baştaki üslü ifadenin tabandaki sayıya eşit olduğunu görmüş ve bu olayın tesadüfen olmadığını söylemiştir. Burada Ö3, kendi öğrenmelerinin kontrolünü ve bilginin *enkapsülasyonunu s*ağlamıştır.

Araştırmacı, bir adım daha öteye gidebilmek için bir sayının karesinin karekökünün neye eşit olabileceği durumunu sormuş, katılımcı ise bu durumu *"ters işlem"* olarak tanımlamıştır. Yani Ö3*, bir sayının karesiyle bu sayının karekökünü* ilişkilendirmiş ve bu iki durumun birbirinin tersi işlemler olduğunu toplama işleminden örnek vererek açıklamaya çalışmıştır. Bu durumu daha iyi açıklamak için öğrenci *"Mesela 1 ile toplayıp çıkarmak gibi"* örneğini vermiştir. Yani katılımcı burada, bir tam sayının karesinin karekökü bulunurken aslında tabandaki bu tam sayıya herhangi bir işlem yapmadığını açıklamaya çalışmıştır.

Ö3 her yarışmacının aldığı puanı ayrı ayrı hesaplamıştır (Şekil 20). Hesaplama sonucunda takımların puanlarını belirlemiş, hangi takımın kazandığını bulmuş ve araştırmacı görüşmeyi bitirmiştir.



Şekil 20: Ö3’ün Parkur-4’e Cevabı

Sonuç olarak Ö3, problemde herhangi bir sayı verilmemesinden dolayı çözümü genel bir şekilde ifade ederek denklem kurmuş ve kurduğu bu denklemi hem satranç tahtasının içindeki kare sayılarına bağlı olarak hem de satranç tahtasının kenar uzunluğu üzerinden ifade etmiştir. Katılımcı satranç tahtasının kenar uzunluğu ile satranç tahtasının alanı arasındaki ilişkiyi görebilmiş ve dahası bu durumu daha soyut düşünerek farklı denklemler oluşturabilmiştir. Problemden bağımsız bir duruma gelen Ö3, tam-kare pozitif tam sayıları aynı sayıların çarpımı olarak aramıştır. Daha sonra tam-kare pozitif tam sayıları 2.dereceden üslü ifadelerinin kareköklerinin tabandaki sayıya eşit olduğunu fark etmiş ve bu durumu ters işleme benzetmiştir. Ö3, önceki öğrenmelerinden toplama ve çıkarma işlemlerinin birbirinin tersi olma bilgisini, bir tam sayının karesinin karekökünü alma işlemine aktarmış ve iki farklı durumun ortak özelliğini açıklayabilmiştir. Bundan dolayı, Ö3’ün tam-kare pozitif tam sayılar ile bu sayıların karekökleri arasındaki ilişkiyi keşfettiği ve tam-kare sayıların karekökünü *nesne* düzeyinde oluşturabildiği düşünülmüştür.

4.1.5 Ö5’in Grup İçi Kavramsallaştırma Süreci

Bu grup üyeleri birbirleriyle az düzeyde iletişim kurmuş, hiçbir düşüncelerinden emin olamamış ve problemi birkaç defa okumalarına rağmen hepsinin ortak fikri problemi anlamadıkları üzerine olmuştur. Ö5 önyargılı olmamalarını, problem hakkında düşünmeleri gerektiğini grup arkadaşlarıyla paylaşmış ve ilk konuşmayı başlatmıştır.

“Ö5: Kaç kareden oluşuyor, ona bakalım bi.

Ö15: 64.
Ö5: Nereden biliyorsun?
Ö15: Kardeşim oynuyordu.
Ö14: 8 kere 8'den 64 kare var. Doğru. Bu şeyler sığacak şekilde olmalı.
Ö5: Koruma şeridi derken neyi diyor ya? Şu sarı şey mi ya?
Ö14: Herhalde yani, kenarı büyüdükçe o da büyüyecek değil mi?
Ö5: Alanın ölçüsü diyor ya.
Ö14: Okuyorum dur.
Ö5: Şu yeşil şeyi niye koymuşlar ki onu ya. Şu kare şeyler var ya. Onun kenar uzunluğunu bulmak gerek. 4 kenarı var. 64 kare var. Bunların uzunlukları ne ama…
Ö14: Dikdörtgen ediyor.
Ö5: Offf ya, anlamadım ben. Bu şerit en az ne ya?"

Araştırmacı, gruba doğru yaklaşıp problemi bir daha okumalarını önermiştir. Bunun üzerine Ö5 soruyu yeniden sesli bir şekilde gruba okumuş ve okumayı bitirdikten sonra Ö14 söz almıştır.

"Ö14: Öğretmenim, satrancın sığacağı karenin kenarını mı soruyor?
A: Ne soruyor soru?
Ö5: Şerit soruyor.
A: Şeridin neyini soruyor?
Ö5: Karelerden.
Ö14: Öğretmenim 8 kere 8'den 64.
A: 64 ne?
Ö5: Alanı.
A: Alanı mı yoksa içindeki kare sayısı mı?
Ö5: Alanı.
Ö15: Bir kenarı 8 değil mi ya? Çevresi 8 kere 4'ten 32 olmuyor mu?
Ö14: Çevresi 32 ya zaten, o belli oluyor. Zaten burada 64 tane kare var. 64 çarpı 4 yapmalıyız. 256 olmalı."

Ö5, şeridin en az uzunlukta olması gerektiğini, kendilerinin santimetre olarak düşünmelerinin yanlış olacağını, metre olarak düşünmeleri gerektiğini grup arkadaşları ile paylaşmıştır. Ö5, çevreyi bulduğunu fark etmiş ve bunu grup üyeleriyle paylaşmıştır. Sesli bir şekilde konuşması araştırmacının dikkatini çekmiş ve araştırmacı katılımcının yanına gitmiştir.

"Ö5: Alanı bildiğimize göre 64. 64 bölü 8 kaç? 8 değil mi? 8 kere 8, 64. Alanı 64 kare. Çevresi 32 kare. Aaaa, çevresi 32 kareyse o zaman çevre 32 olur ya..
A: Alanı 64 kare demişsin. Neyin alanı bu?
Ö15: Bunların şeyleri. Her tarafında 8 tane var.
A: O zaman 64 ne olur?
Ö14: Bu bir karenin uzunluğu…

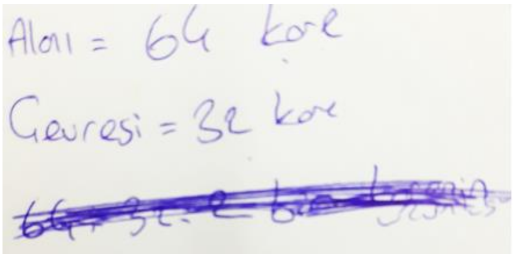
A: Alanı 64 olduğunu düşündüren ne?
Ö14: Saydık.
A: O zaman kenarı ne? Çevre 32'yi nasıl buldunuz?
Ö5: Kenarı 8. 4 tane kenarı var. O zaman çevresi 8 çarpı 4, 32 olur."

Satranç tahtasının içindeki kare fayans sayısı, alanı ölçmek için birim kare olarak düşünmüşler ve alanın 64 br^2 olması gerektiği fikri üzerinde yoğunlaşmışlar fakat bu fikir üzerine farklı düşünmeler gerçekleştiremedikleri için satranç tahtasının alanının 64 br^2 olması fikrinden uzaklaşamamış ve bu durumu *içselleştirememişlerdir.*

4.1.6 Ö5'in Bireysel Görüşme Süreci

Ö5'e görüşmede problemden ne anladığı ve çözüm için neler düşündüğü sorularak süreç hatırlatılmıştır.

"Ö5: Öncelikle alanını buldum ben karelerden yola çıkarak. Bir kenarında 8 tane olduğu için alanını 64 buldum. Sonrasında çevresini buldum. Bir kenarında 8 tane kare olduğu için 4 tane de kenarı olduğundan çevresini de 32 buldum (Şekil 21)
A: Peki 8 kare kenar uzunluğu ne demek?
Ö5: Satranç tahtasının bir kenarının 8 tane kare olması.
A: Peki, bir karenin kenarında 8 kare olması onun kenarının 8 birim olduğunu mu gösterir?
Ö5: Öyle düşünmüştüm."



Şekil 21: Ö5'in 1. Bağlamsal Problemdeki Grup Çalışmasındaki Bireysel Kâğıdından Görüntü

Ö5'te de diğer katılımcılar gibi satranç altlığı içindeki kare fayansları *"birim kare"* gibi düşünüp alanının içindeki *"toplam kare sayısına"* eşit olacağı fikri vardır. Araştırmacı, bu kare fayansların kenar uzunluğunu 1 cm, 1 m gibi bir birim olarak kabul ettiklerinde bu düşüncelerinin doğru olacağını fark ettirmek istemiş ve bu yüzden çevrelerindeki kare nesnelerden örnekler isteyerek görüşmeye devam etmiştir.

"A: Sınıfın yerleri nelerden oluşmuştur?

Ö5: Kare fayanslardan.
A: O zaman bunun bir kenarının uzunluğu nedir?
Ö5: x *(satranç tahtasını oluşturan kare fayanslar için söylüyor).*
A: Yerdeki fayansları sorsam. Bu fayansların bir kenarının uzunluğu 1(br) midir?
Ö5: Evet.
A: O zaman sınıfın kapısından çöpün oraya kadar olan bölüm (yaklaşık 4,5 kare fayans sığmıştır) 4,5 (br) mu oluyor?
Ö5: Bilemedim.
A: 4,5 ne olur o zaman?
Ö5: Uzunluk.
A: Ne uzunluğu olur?
Ö5: Fayans.
A: O zaman fayansın bir kenarı 1 (br) mi? 1 ney?
Ö5: Fayansın uzunluğu.
A: Peki birimi ne olur?
Ö5: Nasıl yani?
A: Şimdi mesela sence tahminen kapı ile çöpün oranın uzunluğu kare fayanslar olmasaydı ne derdin?
Ö5: Yaklaşık 1 metre derdim.
A: Şimdi ne diyosun?
Ö5: Şimdi 4,5 kare ama.
A: O zaman bir karenin bir kenarının uzunluğu 1 mi?
Ö5: Hayır.
A: Ne olabilir?
Ö5: 100 santimi böleriz 4'e. 20 gibi."

Ö5, uzunluğa 1 demiş ve hiçbir birim kullanmamıştır. Eğer sınıfın tabanındaki kare fayanslar olmasaydı, aynı uzunluğu yaklaşık 1 metre olarak görebilen katılımcı, o uzunluğun kare fayanslarla ölçmeye çalışması öğrencinin zihninde karışıklığa sebep olmuştur. Araştırmacı, kare fayansın kenar uzunluğunu birim kullanarak düşünüp uzunluğu bulmasını istemiş; Ö5, bir süre düşündükten sonra bir karenin kenar uzunluğunun yaklaşık 20 cm olduğunu söylemiştir. Sonuçta fayans sayısı, bir fayansın kenar uzunluğu ve toplam fayansların kenar uzunluğu gibi durumları birbirleriyle ilişkilendirebilmiş, var olan uzunluğu kare sayısına bölerek bir kenarının uzunluğu ile ilgili fikir yürütmüş ve birim kullanmıştır. Araştırmacı bu bilgilerini probleme aktarmasını ve problemi bu dedikleri üzerinden yorumlamasını istemiş ve tekrar probleme geri dönülmüştür.

"Ö5: Öğretmenim, 64 şimdi alanı. Çevresi 32 kare. Burası 8 kare ama metre olarak mı düşüneceğim ben bunu?
A: Nasıl istersen öyle düşünebilirsin.
Ö5: Her biri 1 metre olsa karenin, 8 metre olur. Çevresi o zaman 32 metre olur.

A: Kenarı başka bir şey olsa?
Ö5: Nasıl yani sayısal olarak mı?
A: Evet.
Ö5: O zaman 9 kare olsa her biri 1 metreden 9 metre mi olur?
A: 9 kare olsa, o zaman satranç olur mu?
Ö5: Olmaz.
A: O zaman, kenardan gitmeyelim de alandan gidelim. Biz zaten ilk başta neyi biliyorduk?
Ö5: Alanı. 8 metre çarpı 8 metreden 64 metre olur alanı çarparsak *(burada metrekare alan ölçüsünü kullanmıyor).*
A: İlla 64 mü olur bunun alanı? Başka bir şey olamaz mı?
Ö5: Olabilir. Yarısı olabilir.
A: Yani?
Ö5: 4.
A: Alan ne olur o zaman?
Ö5: 4 kere 4, eeee, karıştırdım şu an, 16 olur. 16 metre alanı olur.
A: 16 metre alanı mı olur?
Ö5: Çevresi. Iıı *(dediğinden emin değil)…* alanı olmaz mı öğretmenim? Yarıya indirmiştik çünkü.
A: Neyi indirmiştin?
Ö5: Kenarı. 4 almıştım. 4 kere 4, 16 olur alanı *(yanlış birim kullandığını düşünmüyor).*
A: Peki, tersinden düşünsek, kenarından değil de alandan gitsek çünkü biz alanı biliyoruz ya? Kenar uzunluğunu ilk başta bilmiyoruz. O zaman nasıl yaparsın?
Ö5: *(düşünüyor).* Çevresini mi bulacağız o zaman."

Ö5 satranç altlığındaki kare fayansların ebatlarına 1 m derse, satranç altlığının bir kenar uzunluğunun 8 m olacağını, bu sebepten ötürü çevresinin de 32 m olacağını söyleyebilmiştir. 8 ve 64 sayılarından uzaklaşmasını isteyen araştırmacı, ona başka sayıların olup olamayacağını sormuş; bu durumda da katılımcı kare sayısını artırarak bir kenardaki kare sayısını 9 yapmıştır. Burada katılımcıyı kare bölümlerin sayısından bağımsızlaşamadığı görülmüştür. Ö5, bunu yaparken satranç tahtasının şeklini bozduğunu sonradan fark etmiştir. Daha sonra kenar uzunluğunu yarıya indirmiş ve satranç tahtasının bir kenar uzunluğunun 4 m olabileceğini, bu durumda da alanının 16 $m^{(2)}$ olduğunu söylemiştir. Örnekler verirken alan ölçü birimi yerine uzunluk ölçü birimi kullanmaya devam etmiş ama hatasının farkına varamamıştır. Sorulan soru üzerine yanlış bir değer bulduğunu düşünmüş, bulduğu 16 metreyi çevresi olarak söylemiştir. Sonra alan bulduğunu yenilemiş ama yine de yanlış birim kullanmaya devam etmiştir.

"A: O zaman şöyle düşünelim. Bu satranç tahtasının alanını biliyoruz ya, bu alan neler olabilir?

Ö5: 64 olabilir.
A: Alanını değiştirirsek ne olabilir daha?
Ö5: *....(cevap yok)*
A: Şimdi sen alanına 64 dediğinde kenarı ne olur?
Ö5: 8.
A: Alanı 64 değil de başka bir sayısal değer olsa ne olabilir?
Ö5: Yarısı.
A: Nasıl yarısı?
Ö5: 32 mi?
A: 32 olsa bir kenar uzunluğu ne olurdu?
Ö5: 32'nin çarpanlarını bulacağız da şuan bulamıyorum. Kaç ile kaç… 32 bölü 2 desen o da olmuyor yanlış oluyor herhalde. 32'nin çarpanları olması gerek.
A: Nasıl çarpanları olması lazım?
Ö5:….. kafam durdu yaa…"

Ö5 karenin alanını yine 64 sayısı ile ilişkili farklı sayılar alarak kenar uzunluğunu bulmaya çalışmış ve *"çarpanlarına ayırmayı"* düşünmüştür.

"A: Tamam, 32 (br^2) olmasın başka bir sayı olsun alanı.
Ö5: 64'ün katı olabilir mi?
A: İstediğini alabilirsin.
Ö5: 128. 64'ün iki katı. Kaçla kaçın çarpımı ama onu bulamıyorum.
A: O zaman bulabileceğin bir sayı al.
Ö5: 56 olabilir mi?
A: 56 (br^2) olursa bir kenar uzunluğu ne olur?
Ö5: Olmaz. Bir tarafı 7 olur ama diğeri olmuyor.
A: Ne olmasını istiyorsun sen?
Ö5: 32.
A: 32 (br^2) olursa ne olur bir kenarı?
Ö5: Bu da olmuyor ama yaaaa….
A: Olan al o zaman. Kaç olabilir mesela?
Ö5: …. *(Cevap yok)"*

Ö5, 64 ile ilgili sayılar üzerinden örnekler almaya bir süre devam etmiş fakat hiçbirinde sonuca gidememiştir. Seçtiği sayıların hepsi tam-kare olmayan sayılar olmuştur. Seçtiği 56 sayısının ise çarpanlarını bulmaya çalışmış ama aynı iki pozitif sayının çarpımına eşit olamayacağını anlamıştır. Katılımcı tam-kare sayıya eşit olan bir alan değeri söyleyemediği için araştırmacı, katılımcıdan kenar uzunluğunu bildiği bir karenin alanını bulma örneği üzerinden konuşmaya devam etmiştir.

"A: Tamam kenardan git. Ne olsun mesela kenarı?
Ö5: 6.
A: Kenar 6 (br) olursa alan ne olur?

Ö5: Alanı 36 olur alanı.
A: Bunun gibi alanı şu kadar dediğim zaman bana kenar uzunluğu şudur diyebileceğin başka sayılar söyleyebilir misin? Var mıdır böyle sayılar?
Ö5: Var. 7 olabilir.
A: 7 olursa ne olur alanı?
Ö5: 7 kere 7, 49 olabilir. 9 olur. 9 olursa 81 olur.
A: Alan değişmesine rağmen farkına vardığın bir şey oldu mu?
Ö5: Karesi oluyor yani.
A: Nasıl gösterirsin bu durumu?
Ö5: 7 üzeri 2 olur.
A: Bu neye eşit olur?
Ö5: 49'a
A: Kenarı bildiğimiz zaman alanı bu şekilde bulabiliyoruz. Peki, ya sadece alanı bilseydik, kenarı nasıl bulabilirdik?
Ö5: Şöyle bir işaret yapıyorduk galiba *(karekök işaretinden bahsediyor).* Karekök 49 ($\sqrt{\mathbf{49}} = 7$) eşittir 7'ye (Şekil 22).
A: Yani bu yaptıklarınla ne buldun? Ne işe yarıyormuş bu sembol?
Ö5: Bir sayının karesini bulmaya.
A: Sen burada kare mi buldun? Emin misin?
Ö5: ….
A: Bu 49 ne?
Ö5: 7'nin karesi.
A: O zaman bu işlem ne işe yarıyor?
Ö5: Karenin kendi sayısını… nasıl desem… karekök zaten bu işlem, 49 sayısının kendi şeyini buluruz, yani 7'yi buluruz. Kökünü.

Şekil 22: Ö5'in Karekök İşaretini Gösterimi

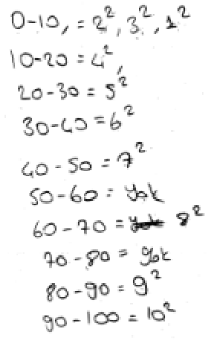
Katılımcı alanının ölçüsü bilinen bir karenin kenar uzunluğunu bulma durumuyla ilgili örnekler vermekte zorlanırken, kenar uzunluğu bilinen bir karenin alanını hesap etmekle ilgili örneklerde herhangi bir zorluk yaşamamıştır. Ö5, *alanın her zaman kenar uzunluğunun karesine eşit* olduğunu söylemiş ve *üslü sayılar* ile koordinasyon kurmuştur. Bu durumu karekök sembolünü kullanarak da ifade edebilen katılımcıya karekök sembolünün görevi sorulduğunda ise *"sayının karesini bulmaya yaradığı"*, *"karenin kendi sayısını…"* gibi cümleler söylemiştir. Ö5'e daha sonra parkur problemi sunulmuş ve bu problemle ilgili düşünceleri alınmıştır.

"Ö5: 4 bayrak mı?
A: Nasıl buldun anlatır mısın?
Ö5: *(0-10 yazan yerde 10'u göstererek)* 1 bayrak.

A: Bayrakları nasıl dikiyor?
Ö5: 100 metrelik doğrusal hat üzerine.
A: Tamam, peki ne olunca dikiyormuş?
Ö5: 10 metre olunca.
A: Öyle mi diyor soruda? 10 metre olunca mı dikiliyormuş bayrak?
Ö5: Pozitif tamsayıların kareleri olan sayılara. Yani karekök şeyi mi var.
A: Bilmem, o mu var? Nerelere dikebilir mesela bayrak?
Ö5: 20. Şuraya. 5'in karesi olur. Yok olmaz. Pardon.
A: Ne olur o zaman?
Ö5: *….. (10, 20, 30, 40 sayılarına odaklanıyor ve bir sayının karesi olmadıkları için bulamıyor).*
A: 5 olursa ne olur?
Ö5: 25 olur.
A: 25 olursa nereye dikmeli onu?
Ö5: 25 olursa mı? 20 ile 30 un arasına.
A: O zaman nerede olur o bu aralıklarda?
Ö5: 20 ile 30 arasında 1 bayrak vardır o zaman.
A: Daha başka bayrak var mıdır? Ya da bayraklar?
Ö5: Ee 2'nin karesi 4 varr. Bunda da *(30-40 aralığı)* var. 6 'nın karesi 36."

Ne yapacağını anlayan Ö5, ilk önce 40.m ye kadar düşünmüş, daha sonra araştırmacı hattın uzunluğunun ne kadar olduğunu sormuş, hattın 100 m ye kadar gittiğini gören katılımcı daha sonra 100.m ye kadar olan tam-kare sayıları da bulmaya başlamıştır.

"Ö5: o zaman burda da var (30-40 aralığında başka olduğunu düşünüyor bir an). Yok yok. 40-50 aralığında 7'nin karesi var 49. 50-60 aralığında 8'in karesi 64 olur, bunda yok o zaman. 60-70 aralığında, bunda da yok. Oluyo pardon öğretmenim. 8'in karesi oluyo. 70-80 bunda da 9'un karesi… bunda da yok öğretmenim, 81. 80-90 bunda var öğretmenim 81, 90-100 de oluyoo. 10'un karesi öğretmenim (Şekil 23).
A: Evet, sen kaçtan başladın?
Ö5: 2'den.
A: Neden 2'den başladın?
Ö5: 1 nasıl desem öğretmenim, 1 kere 1 yine 1, etkisiz eleman gibi."



Şekil 23: Ö5'in Bayrakların Olduğu Noktaları Belirlemesi

Ö5 yine diğer çoğu katılımcı gibi 1 sayısının karesinin kendisine eşit olmasından dolayı tam-kare sayı olarak almamış, onu *"etkisiz elemana"* benzetmiştir. Daha sonra 1 sayısını da kare sayı olarak kabul edip bayrakların dikilebileceği yerleri bulmuş ve parkur sorularına geçmiştir. Parkur-1, parkur-2 ve parkur-3 sorularına hemen yanıt vermiş ve parkur-4 sorusuna gelmiştir.

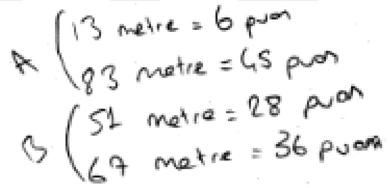
> "A: Tamam devamında ne diyor?
> Ö5: Her iki takımın birer yarışmacıları yarışı tamamlıyor. Her bayraktan dikili bulunduğu sayının karekökü kadar puan alıyor. Her geçilen bayraktan, bunları *(karelerinden bahsetmektedir)* açmam gerekiyor mu?
> A: Gerekiyor mu?
> Ö5: Karekökü…
> A: Mesela 13.metrede yarışı terk eden kişi nerelere bayrak dikmiştir?
> Ö5: Buraya *(0-10 aralığını gösteriyor).*
> A: O aralıkta nerelerdedir bayraklar?
> Ö5: 4, 6, 1.
> A: 4, 6, 1, öyle mi?
> Ö5: Pardon 9, 6 değil.
> A: Tamam, şimdi oldu. Evet, o zaman şimdi kaç puan alır bu yarışmacı?
> Ö5: Bunların karekökü kadar puan alacak. 13'ün karekökü *(yarışmayı terk ettiği anda olabilir, 4+9+1 toplamından da bahsediyor olabilir).*
> A: Puan alma kuralı neydi?
> Ö5: *(düşünüyor).* 14 *(toplamından bahsediyormuş).* Bunları açarak yaptım da. Topladım sonra da.

Katılımcı puan alma kuralını tam olarak anlayamadığı için ilk önce bayrakların dikili olduğu metrelerin toplamının karekökü kadar puan alacağını düşünmüş ve bu yüzden bu değerleri toplamıştır.

> A: Diktiği bayrakların toplamından mı alıyor, yoksa diktiği her bayraktan ayrı ayrı mı puan alıyor?
> Ö5: Her bayraktan. O zaman 2'nin karesi 4. 4'ün karekökü 2. 9'un karekökü 3. 1'in karekökü 1.
> Ö5: Diğeri 83.metrede terk ediyor *(içinden toplama işlemi yapıyor, 1'den 9'a kadar olan kare sayıların üzerlerine kalemini götürüyor).* 45 puan alır öğretmenim.
> A: Nasıl buldun?
> Ö5: 80-90 aralığına kadar geldi.
> A: 9'u da aldın mı?
> Ö5: Evet.
> A: Neden aldın?
> Ö5: Yok almadım öğretmenim.
> A: O zaman bana aldıklarını söyler misin?

Ö5: 2^2, 3^2, 1^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2 ve 8^2.
A: Nereye kadar gelecektin sen peki?
Ö5: 83.
A: Nerede peki 83?
Ö5: 9 kere 9, 81… o zaman 80 ile 90. Ama 9'u da almam gerekiyor.
A: O zaman kaç puan alır bu kişi?
Ö5: 54.
A: Nasıl topladın bana söyler misin?
Ö5: Kareköklerini bularak topladım. 2'nin karesi 4, 4'ün karekökü 2. 3'ün karesi 9, 9'un karekökü 3. 1'i zaten söylemiştik. 4'ün karesi 16, 16'nın karekökü 4 *(bu şekilde 9'a kadar alıyor)* Kısayol olarak tabanları alırız. Yanlış mı? Bi dakka. 42,..,48."

Katılımcı kendince bir kısa yol geliştirmiş ve *"Kısayol olarak tabanları alırız."* demiştir. Bir sayının karesinin karekökünün (üslü ifade olarak) tabandaki bu sayıya eşit olacağını fark etmiştir. Her takım yarışmacısının puanlarını hesap eden Ö5, takımların toplamda aldığı puanları bulmuş (Şekil 24) ve B takımının yarışmayı kazandığını söylemiş ve görüşme burada sonlanmıştır.



Şekil 24: Ö5'in Parkur-4'e Cevabı

Ö5'in tam-kare sayıların kareköklerinin değerlerinin neye eşit olduklarını bulurken zorlanmadığı, tam olarak tanımlama yapamasa da karekök içindeki sayının bir sayının karesi olduğunu ve tabandaki sayının kareköklü ifadeye eşit olduğunu *içselleştirdiği* ve bu bilgiyi parkur sorularında kullanabildiği gözlemlenmiştir. Katılımcının satranç probleminde zorlanmasının sebebinin alan, birim kare gibi kavramlarda var olan önbilgi eksikliklerinin olduğu düşünülmektedir. Bu anlamda Ö5'in karekök kavramını soyutlayabildiği ve *nesne* düzeyinde oluşturabildiği düşünülmektedir.

4.2 Tam-Kare Olmayan Sayıların Karekökünü Kavramsallaştırma Süreci

Araştırmacı, ders sürecinde bir probleme daha beraber çözüm üreteceklerini, okul müdürünün yine onların yardımına ihtiyacı olduğunu dile getirerek öğrencilerin dikkatini probleme çekmeye çalışmıştır. Kareköklü ifadeler konusunun "*Tam-kare* *olmayan kareköklü bir sayının hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirler.”* kazanımı ile ilgili olan bu bağlamsal problem öğrencilere sunulmuş (EK-5), problem kâğıtları grup üyelerine araştırmacı tarafından dağıtılırken Ö10 kodlu öğrenci tarafından da problemin sesli bir şekilde okutulması sağlanmıştır.

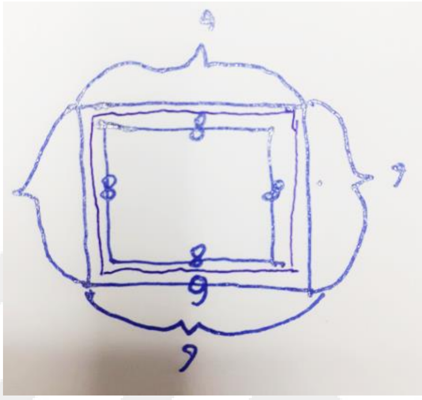
Diğer taraftan öğrenciler önceki kazanımla ilgili ders ortamında ne yapacaklarının farkında oldukları için daha hızlı bir şekilde düzene girmiş ve dağıtılan problem kâğıtlarından da problemi bireysel olarak okumaya başlamışlardır. Bu esnada araştırmacı yine öğrencilere her türlü fikirlerini ifade etmelerini, düşünmekten korkmamalarını, yazdıkları ifadeleri silmemelerini ya da karalamamalarını ve ses kayıt cihazı ile kameradan etkilenmemelerini, bu cihazların veri kaybını önlemek için olduğunu bir kez daha hatırlatmış ve problemle daha odaklanarak ilgilenmeleri gerektiğini söylemiştir.

4.2.1. Ö1’in Grup İçi Kavramsallaştırma Süreci

Grup üyeleri dağıtılan problem kâğıtlarını alarak incelemeye başlamışlardır. Bu problemle diğer derste yaptığı problem arasında ilişki kurmuş ve fikrini dile getirmiştir.

> “Ö1: Yine sorudan gereksiz yerleri atalım. Asıl sorulan yere bakalım. Dünkü sorudan yola çıkalım. Bi dinleyin beni. Şimdi bu satranç. 8 çarpı 8’den 64 idi bunun alanı. O zaman şuralar eşit uzunlukta di mi, şu beyazlıklar *(masanın kenarında kalan boşluklardan bahsetmektedir)?*
> Ö7: Evet eşit boşluk, ama gereksiz deme. Gereksiz dediğin yerden çıkıyor sorunun cevabı. Hepsine dikkat edelim bence.
> Ö1: Ya bi dinleee, buralar da boşluk eşit olacağı için o zaman bu da bir kare olacak. Kareyse 9 olacak. Bir kenarı 9 santim o zaman bir önceki probleme göre.
> Ö7: Ama biz şimdi bunu neden 9 kare aldık ki?
> Ö1: 8 tane kare var. 8 kere 8, 64 eder. 8’den büyük en küçük sayı hangisi 9. O zaman 9 kere 9 da 81 eder masanın alanı.
> Ö7: Anladım, 8’den sonra 9 geldiği için.”

Ö1 ile Ö7 arasında geçen diyaloga bakıldığında Ö1 bir önceki derste yaptıklarıyla bu dersi ilişkilendirmiştir. Yine başlangıç olarak içindeki yapışkanlı satranç altlığının alanını 64 (birim kare) olarak almış ama burada herhangi bir birim belirtmemiştir. Kenarlarının 8 sayısından büyük olması gerektiği düşündüğü masanın şeklinin, satranç altlığı ile masanın arasında kalan boşlukların eşit uzunlukta olması istendiğinden dolayı kare olması gerektiğini grup arkadaşlarıyla paylaşmış ve masanın bir kenar uzunluğunun 8 sayısından büyük ama en küçük tam sayı olan 9 olması gerektiğini söylemiştir. Araştırmacı, grubun yanına giderek düşüncelerini resmetmelerini istemiştir. Ö7, bu masayı resmetmeye çalışırken çizdiği resmin kareden çok dikdörtgene benzemesi grup arkadaşı Ö1'in dikkatini çekmiş ve arkadaşını uyarmıştır. Çizerken kenar boşluklarının eşit olması gerektiğini arkadaşına hatırlatmıştır (Şekil 25).



Şekil 25: Ö1 ve Ö7'nin 2. Bağlamsal Problemdeki Grup Çalışmasındaki Kâğıdından Görüntü

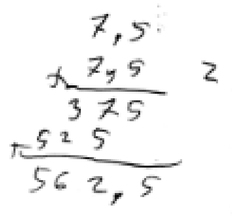
Ö1, çizdikleri resimde masanın ve satranç yapışkanın kenar uzunluklarını belirtirken birimlerine dikkat etmeden *"Buralar hep 8, 8, 8, 8. Burası da 9 olur."* demiştir. Fakat biraz zaman sonra bu uzunluklara bir birim vermesi gerektiğini düşünmüş ve arkadaşlarına *"Bu santim mi, metre mi? Hoca şimdi bunu soracak."* diyerek düşüncesini grup arkadaşlarıyla paylaşmıştır. Grup arkadaşlarından Ö7, "*santim*" olması gerektiğini söylemiştir, bunun üzerine Ö1 *"Evet, santim olmalı. Metre olursa çok büyük olur. Ama biz yine de bir şey yazmayalım. Hoca sorarsa söyleriz. Şimdi yanlış falan olur."* diyerek arkadaşına yanıt vermiştir. Aslında katılımcı doğru çıkarımlarda bulunmuş fakat kendine tam güvenemediği için düşüncelerini kendisi dile getirmekten çekinmiştir. Bu konuşmaları duyan Ö9 satranç oynamayı bildiğinden, bir santimlik karenin bir kenarı için küçük olduğunu, bu şekildeki bir kareye bir taşın sığmayacağını fikrini dile getirmiştir. Fakat diğer grup üyeleri Ö9'un bu söylediğine dikkat etmemiştir.

> "Ö7: Öğretmenim buralar 8 santim, o zaman bu masada 8 santimden büyük olacağına göre 9 santim olmalı. O zaman masanın alanı da 9 çarpı 9'da 81 olur.
> A: Başka olamaz mı yani?
> Ö1: Ama en az diyor öğretmenim.
> A: Satrancın alanını ne aldınız?
> Ö7: 64.
> A: O zaman masanın alanı ne olmalı?
> Ö1: 64'ten büyük olmalı.
> A: Ne olabilir yani?
> Ö7: 65 olur, 68 olur, sonra 72 olabilir.
> Ö8: Evet 72 olur, 8 kere 9 72 olur.
> A: 8'e 9 olan şekil kare midir?
> Ö8: Hayır, dikdörtgendir.
> Ö1: O olmaz, kare olmalı.
> A: Alanı 72 olsaydı masanın kenarı ne olurdu?
> Ö7: Bunların arasında olurdu *(yapışkanlı satranç altlığı resmi ile masanın arasında).*
> Ö1: Ama o zaman tamsayı olmazdı ki.
> A: Ne olurdu peki?
> Ö1: Ondalıklı olurdu. 8 ile 9 arasında.
> A: Neden?
> Ö1: 72. 64 ile 81 arasında.
> A: Peki alanı eğer 50 olsaydı ne olurdu masanın kenarı?
> Ö8: 5'yi 2'ye bölerdik.
> Ö7: Hayır 50'yi 4'e bölmeliyiz."

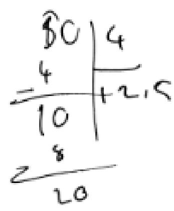
Öğrencilerin masanın kenarının tam sayı olması gerektiği düşüncesinde olmaları dikkat çekmiştir. Bu fikri Ö1 dile getirmiştir. Ö1, yapışkanlı satranç altlığı resminin bir kenar uzunluğunun 8 santimetre alınabileceğini, buna uygun masanın da 8'den büyük sayı olan 9 santimetre olmasının uygun olacağını, çünkü masanın en az alana sahip olması istendiği fikrini dile getirmiştir. Burada dikkat çeken diğer bir durum ise problemde ilk önce masanın alanının ne kadar olabileceği, buna göre kenar uzunluğunun ne olması gerektiğinin sorulmasına dikkat edilmeden kenar uzunluklarına değer verilerek alanını bulmaya çalışmış olmalarıdır. Araştırmacının yapışkanlı satranç altlığı resmine göre masanın yapılacağını ve yapışkanın alanını ne kadar aldıklarını ve buna göre masanın alanının en az ne olacağını sorması üzerine grup üyeleri 64 sayısından büyük sayıları saymaya başlamışlardır. Burada Ö1 kenar uzunluğu için çıkarımda bulunarak, *bu uzunluğun tam sayı çıkmadığını düşünmesi*, bu öğrencinin gerekli *içselleştirmeyi* gerçekleştirdiğini düşündürmektedir.

> "Ö1: Alanı 50 br^2 ise bir kenarını bulalım. 7 kere 7, 49. O zaman 7,5 birim olabilir. 7,5 kare çarpı 7,5 kare. Bi bu sonucu bulalım.

Ö8: Oooo, çok büyük çıktı (Şekil 26).
Ö1: Virgülü sonradan koyacağız, öğrenmedin mi? 56,… çok çıktı bu da.
Ö7: Ya sen 50'yi 4'e bölsene.
Ö1: İyi de ondalıklı çıkması lazım. Aa, tamam bölelim. Belki ondalık çıkar (Şekil 27)."



Şekil 26: Ö1'in 7,5 Sayısının Karesini Hesaplaması



Şekil 27: Ö1'in Masanın Kenar Uzunluğunu Bulma Çalışmalarından Görüntü

Ö1 doğru çıkarımlarda bulunmuştur. Hesaplayacakları masanın kenar uzunluğunun tam sayı olmayacağını söyleyen Ö1, önceki derste gördüğü karekök kavramını burada kullanabilmiş ve alanının 7'nin karesi 49 ile 8'in karesi 64 arasında olduğunu, o zaman kenarının da 7 ile 8 arasında olması gerektiği fikrini geliştirmiştir. 7 ile 8 sayıları arasında 7,5 sayısının olacağını *(7,5 sayısı tam ortaladığı için- arasında olması demek eşit bölmek demek anlayışında olduğunu düşündürtmektedir)* ve 7,5 ile 7,5 sayısının çarpımının da alanı vereceğini düşünerek çarpma işlemini gerçekleştirmiştir. Sonucun 50 sayısından büyük bir sayı çıkması öğrencinin tereddüt yaşamasına sebep olmuştur. 7 ile 8 arasında olan başka sayı denemeden arkadaşı Ö7'nin fikrini düşünmüş ve 50'nin 4'e bölümünün de tam sayı çıkmaması, bu durumun olabilirliğini Ö1'e düşündürtmüştür. 50'nin 4'e bölünmesi sonucu ortaya çıkan 12,5 sayısının 7 ile 8 sayısı arasında olup olmadığı konusu hakkında hiçbir grup üyesi fikir yürütmemiştir.

"A: Bu 7,5 nedir?
Ö1: Siz hani alanı 50 birim kare olan karenin bir kenar uzunluğunu sormuştunuz ya

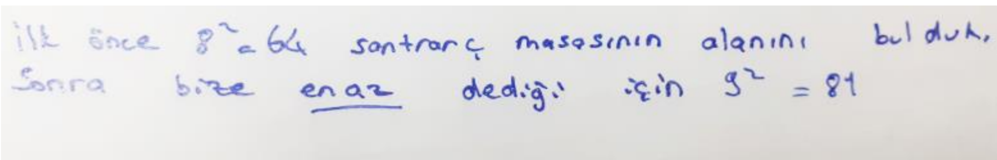
A: Evet
Ö7: 7 kere 7, 49. Burayı da birleştirdik *(buçuk ile buçuğun çarpımının 1 olacağını söylüyor, ama çarpımsal değil toplamsal düşünüyor)*. 50 oldu işte.
A: Yani alanı 50 birim kare ise, kenar uzunluğu ne oluyormuş?
Ö1: 7 ile 8 arasında bir şey oluyor işte öğretmenim.
A: Hangisine daha yakın diye sorsam o zaman?
Ö1: 7'ye daha yakındır öğretmenim.
A: Neden?
Ö1: 7 kere 7, 49. 50, 49'a daha yakın çünkü.
A: 7 ile 8 arasını daha da daraltmak istesem ne dersiniz?
Ö1: 7'ye daha yakınsa o zaman 7,5'dan da küçüktür."

Ö7'nin sayıların ondalık gösterimleri ile çarpma işlemi yapmakta sıkıntı çektiği düşünülmektedir. Hazırbulunuşluk testinde ondalık gösterimlerle dört işlem içeren soruya Ö6 haricindeki diğer tüm öğrenciler yanlış cevap vermiş; çoğunda hata ve kavram yanılgılarının olduğu tespit edilmiştir.

Ö1'in yaptığı işlemleri hangi amaçla yaptığının bilincinde olduğu görülmüştür. Önceki öğrenmelerini bu ders esnasında doğru bir şekilde kullanmıştır. Alanı 50 br^2 olan bir kareyi, alanı 49 br^2 olan bir kareden yola çıkarak düşünmüş, eğer alanı 49 br^2 olsaydı karenin bir kenarının uzunluğunun 7 br olacağını, bu yüzden alanı 50 br^2 ise kenar uzunluğunun 7 br'den büyük olması gerektiğini, yani kenar uzunluğunun 7 br ile 8 br arasında bir sayı olacağı düşüncesini geliştirmiştir. Fakat 7 ile 8 arasında örnek verebildiği tek sayının 7,5 olmuştur. Ondalık gösterim konusunda ilişkilendirmeleri doğru olan Ö1'in alanın 49 br^2'ye daha yakın olduğunu ve bu yüzden kenar uzunluğunun 7'ye daha yakın olması gerektiğini söylemesi ve 7 br'e yakın olan bir sayının 7,5 br'den küçük olması gerektiğini savunması, alan-kenar ilişkisini *içselleştirdiğini* göstermektedir.

4.2.2 Ö1'in Bireysel Görüşme Süreci

Ö1, problemin çözümü için bir önceki derste öğrendiği bilgilerle ilişkilendirme yapabilmiş ve 2.bağlamsal problemi çözmeye çalışmıştır (Şekil 28).



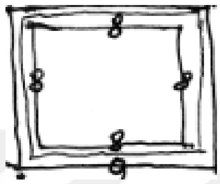
Şekil **28**: Ö1'in 2. Bağlamsal Problemdeki Grup Çalışmasındaki Bireysel Kâğıdından Görüntü

"Ö1: 8 kare olduğu için öğretmenim 8 cm öğretmenim, bir tanesini 1cm saydık öğretmenim, o yüzden 8 tane olduğu için hepsini toplayınca 8 cm ediyordu. Bize masanın alanını sorduğu için bi de en az dediği için 8 kere 8, 64…ondan sonra 9 kere 9 geliyor, o da 81 ediyor. Öyle yaptım öğretmenim."

Ö1 yapışkanlı satranç altlığının *alanı için yine içindeki kare bölümlerden etkilenerek bir kenarını 8 cm* olarak seçmiş, bu durumda alanının 64 cm^2 olacağını söylemiştir. Masanın kenar uzunluğunun, bu *satranç altlığından büyük ama maliyetin de en az olması için küçük*, bu yüzden *8'den sonra gelen sayı 9(br)'un* masanın bir kenar uzunluğunun olması gerektiğini ifade etmiştir. Bu durumda masanın bir kenar uzunluğunun 9 cm ve alanının da 81 cm^2 olabileceğini söylemiştir.

"A: Peki masa 9 cm'den daha küçük olabilir mi?
Ö1: Olamaz öğretmenim.
A: Neden olamaz?
Ö1: Çünkü satranç tahtasından küçük olamaz.
A: Yani neyden küçük olamaz?
Ö1: 8'den küçük olamaz.
A: 9'dan küçük olabilir mi?
Ö1: Evet
A: Nasıl küçük olabilir?
Ö1: Ondalık olur öğretmenim.
A: Mesela?
Ö1: 8,5 olur öğretmenim.
A: Masanın kenar uzunluğu 8,5 cm olsaydı bana bu masayı bu resimde çizer misin? Nasıl olurdu masa?
Ö1: Daha yakın olur öğretmenim satranç tahtasına.
A: Nasıl yani?
Ö1: Şurdan başlar yani öğretmenim *(doğru çiziyor)* (Şekil 29)
A: Ne oldu şimdi bu masanın bir kenar uzunluğu?
Ö1: 8,5 oldu öğretmenim.
A: Peki alanı için ne söyleyebilirsin?
Ö1: Hesaplamam lazım, 8 buçuuk..
A: Tamam hesapla bakalım.
Ö1: *(8,50 ile 8,50'yi çarpıyor. Virgülü sondan iki basamak ayırıp koyuyor)* 7225,00
A: Neden virgülü oraya koydun?
Ö1: Bu virgül iki basamak sonrasında olduğu için öğretmenim o yüzden bunu da buraya yaptım öyle.
A: Hımm. Alanı ne oldu yani?
Ö1: Çok büyük çıktı. Ama kenarı küçük öğretmenim. 8,5 küçük sayı öğretmenim.
A: 8,5'tan büyük sayı ne olabilir?
Ö1: 9.
A: 9 olsaydı alan ne olurdu?

Ö1: 81.
A: Kenar 8,5 olursa alan ne olmalı?
Ö1: 64 ile 81 arasında olmalı.
…
A: Peki, 8 ile 9 arasında sadece 8,5 mi var?
Ö1: Hayır.
A: Neler var peki?
Ö1: 8,4; 8,3; 8,2; 8,1…
A: Peki bunların alanları için ne söyleyebilirsin?
Ö1: Onların alanları da 64 ile 81 arasında."



Şekil 29: Ö1'in Kenar Uzunluğu 8,5 cm Olan Bir Masa Çizimi

Ö1, araştırmacı sormadan genellemeye varabilmiş ve kenar uzunlukları 8 ile 9 değerleri arasında olan her karenin alanının 64 ile 81 değerleri arasında olması gerektiğini söyleyebilmiştir. Ö1'in, tam-kare sayıların karekökü bulunurken tam-kare sayıların karekökü ile rasyonel sayıların ondalık gösterim arasında *koordinasyon* oluşturmuştur. Bu koordinasyon sonucunda katılımcı masanın alanı ve bu alana göre alacağı kenar uzunluğu arasında yorum yapabilmiştir.

"A: Peki sana bir işlem sorsam; $2+\sqrt{14}$ bu işlemle ilgili ne düşünürsün? Kaça eşit olabilir?
Ö1: 9'a öğretmenim

Katılımcı burada 14 sayısını, 2×7 çarpımına eşit olduğunu ve 14 sayısının çarpanı olan 2'nin aynı çarpan olarak düşünmüş, bu yüzden $\sqrt{14}$'ün değerini 7 olarak hesap etmiş, cevaba 9 demiştir.

"Ö1: Bu 14'ün şeyleri yok öğretmenim. Yani aynı sayı çarpanı.
A: O zaman nasıl çözebiliriz bu soruyu?
Ö1: Ondalıklı sayı olmalı öğretmenim.
A: Ne olabilir ondalıklı?
Ö1: 9 ile 16 arasında bu sayı.
A: Yani?
Ö1: ….
A: Neden 9 ile 16 arasında dedin?

Ö1: Çünkü bunun en küçük karekökü 9. Karekökü değil öğretmenim. Bundan önceki 9 yani öğretmenim. Sonraki de 16.
A: Mesela orası 2 artı karekök 9 olsaydı ne derdin bana cevabı?
Ö1: 5 öğretmenim.
A: Neden?
Ö1: Karekök 9'un şeyi.. kökü 3.
A: Peki orası kök 16 olmuş olsa ne derdin?
Ö1: 6.
A: Neden?
Ö1: 16'nın kökü 4 öğretmenim.
A: Peki orası 14 olsa ne söyleyebilirsin?
Ö1: 3 ile 4 arasında bir sayı kökü.
A: Peki tahmini nedir?
Ö1: 4'e daha yakın olması lazım öğretmenim.
A: Neden?
Ö1: Çünkü 14, 16'ya daha yakın öğretmenim.
A: Ne olabilir o zaman yaklaşık olarak?
Ö1: 3 tam onda 8 olabilir öğretmenim.
A: Peki bu toplam için ne dersin?
Ö1: 5 tam onda 8 olur öğretmenim."

Ö1'in yaptığı genellemenin ne kadar anlamlı olduğunu test etmek için araştırmacı, bir işlem sorusu sormuştur. Ö1'in tam-kare olmayan sayıların kareköklerinin hesaplarken *karekök içindeki sayıdan bir önce ve bir sonra gelen tam kare sayılardan* yararlandığı görülmüştür. Bununla birlikte tahmini olarak değeri bulunması istendiğinde Ö1, sorulan sayının *hangi sayının karesine daha yakın olabilirliğini* irdelemiş ve *yakın olan tam-kare sayının kareköküne yaklaşık* olarak bir değer söylemiştir. Bu sayının tam-karelere olan yakınlıklarının (aralarındaki birim sayısı) yaklaşık değer hesaplanırken yararlanıldığı bir durum olduğu görülmüştür. Araştırmacı bunun üzerine katılımcıya başka bir problem yöneltmiş ve çözmesini istemiştir (Ben Bilirim Rakibim Bilmez Oyunu, EK-3).

"Ö1: İki kişi var. Bunlara karekök soruyorlar. Doğru cevap veren puan kazanıyor öğretmenim.
A: Merve'nin sorusu neymiş?
Ö1: 46'nın karekökü nedir diye sormuş.
A: Merve ne cevap vermiş?
Ö1: 6 ile 7 arasında demiş.
A: Doğru mu söylemiş?
Ö1: Doğru öğretmenim.
A: Neden?
Ö1: 6'nın karekökü 36, 7'nin 49.
A: 6'nın karekökü 36 mı?

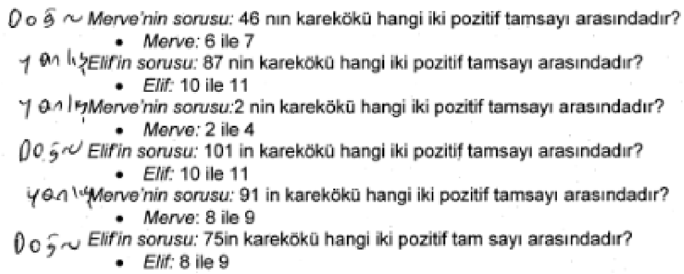
Ö1: Kökü mü?
A: 6'nın karekökü ne olur?
Ö1: Karesi 36 öğretmenim 6'nın.
A: 6'nın karesi 36, 6'nın karekökü nedir?
Ö1: *(düşünüyor)* 4 ile 9 arasında bir sayı öğretmenim.
A: Yani?
Ö1: 2 ile 3 arasında."

Ö1 soruyu okumuş ve çözüme başlamıştır. Problemde Elif ve Merve'nin sorulara verdikleri cevapları tek tek incelemiş ve hangisinin doğru hangisinin yanlış cevap verdiğini bulmuştur. Çözüm esnasında bazen karekök yerine kare kelimesini kullansa da daha sonra bu hatasının farkına varıp düzeltmiştir. Ö1'in bu hatasının dikkatsizlikten kaynaklandığını düşünülmektedir.

"Ö1: 2 hiçbir sayının şeyi değil.
A: Neyi değil?
Ö1: Karekökü.
A: 2 hiçbir sayının karekökü değil derken ne demek istiyorsun?
Ö1: 1'in karekökü 2, aayyy 1'in karekökü 1. 2'nin karekökü 4. Onu geçiyor zaten 2'yi.
A: O zaman ne olmalıydı doğru cevap yani?
Ö1: 1 ve 4.
A: 1 ve 4 mü?
Ö1: Evet öğretmenim.
A: 4'ün karesi ne?
Ö1: 16.
A: 1'in karesi ne?
Ö1: 1
A: 1 ile 4 arasında olsa, kendisi 1 ile 16 arasında olmalı. Öyle mi?
Ö1: Değil.
A: O zaman?
Ö1: 1 ve 2 mi öğretmenim?
A: Neden?
Ö1: 1 kere 1, 1. 2 kere 2, 4. 2 bunların arasında.
A: Peki bana 2 ile 4 arasında olan kareköklü bir sayı söyler misin?
Ö1: 9 öğretmenim.
A: Nasıl karar verdin?
Ö1: 16 ile 4 arasında.
A: Peki karekök 9 mu? 9 mu?
Ö1: Hayır öğretmenim, 2 ile 4 arasında 3 var, 16 ile 4 arasında 9 var öğretmenim.
…
A: Karekök 2? 2'nin karekökü? Nedir?
Ö1: Yok öğretmenim. Ondalıklıdır yani.
A: Tamam nedir o hali? Karekök 2 nedir?
Ö1: 1 ile 2 arasında bir sayı.

A: Nasıl karar verdin?
Ö1: 1 kere 1, 1 eder öğretmenim. 2 kere 2 de 4 eder öğretmenim. 1 ile 2 arasında bir sayıdır yani öğretmenim.
A: O zaman cevabı nedir?
Ö1: Yanlıştır öğretmenim."

Ö1'in, Merve'nin sorusu olan 2'nin karekökünün hangi iki pozitif tam sayı arasında olacağı sorusunda düşünceleri karışmıştır. Ö1, ilk önce bu sayı için hiçbir sayının karekökünün olamayacağı söylemiş (burada tam-kare sayı olmadığını söylemek istiyor ama yine yanlış ifade kullanıyor), daha sonra karekök 2'nin 1 ile 4 arasında olması gerektiğine karar vermiştir (1'in karesi 1, 2'nin karesi 4). Ö1, bunu derken sayıların kareleri üzerinden düşünmüş, ama istenilen sayının karekökü olduğuna dikkat etmemiştir. Araştırmacı, katılımcının söylediği sayıların (1 ve 4) karelerini bulmasını istediğinde, çıkan sonucun 1 ve 16 olduğunu görmüş ve cevabını yine değiştirip 1 ve 2 arasında olduğunu söylemiştir. Karışıklığı gidermek ve karesi ile karekökü arasındaki farklı daha iyi anlaması için araştırmacı katılımcıdan 2 ile 4 arasında olan kareköklü bir sayı istemiş; öğrenci ilk önce 9 demiş, daha sonra ise dediğini düzeltip 2 ile 4 arasında 3 sayısının, 4 ile 16 (sayıların kareleri) arasında ise 9'un olduğunu söyleyip durumun farkında olduğunu göstermiştir. Daha sonra oyuna geri dönen Ö1, karekök 2'nin 1 ile 2 sayıları arasında olduğunu söylemiş ve Merve'nin yanlış söylediğine karar vermiştir. Diğer sorularda zorlanmayan Ö1, yarışmacıların doğrularını ve yanlışlarını belirleyip Elif'in kazandığını ifade etmiştir (Şekil 30).


Merve'nin sorusu: 46 nın karekökü hangi iki pozitif tamsayı arasındadır?
- *Merve:* 6 ile 7

Elif'in sorusu: 87 nin karekökü hangi iki pozitif tamsayı arasındadır?
- *Elif:* 10 ile 11

Merve'nin sorusu: 2 nin karekökü hangi iki pozitif tamsayı arasındadır?
- *Merve:* 2 ile 4

Elif'in sorusu: 101 in karekökü hangi iki pozitif tamsayı arasındadır?
- *Elif:* 10 ile 11

Merve'nin sorusu: 91 in karekökü hangi iki pozitif tamsayı arasındadır?
- *Merve:* 8 ile 9

Elif'in sorusu: 75in karekökü hangi iki pozitif tam sayı arasındadır?
- *Elif:* 8 ile 9

Şekil 30: Ö1'in Ben Bilirim Rakibim Bilmez Oyununa Verdiği Cevap

Oyun ile ilgili son soruya geçen Ö1, soruda ne sorulduğunu anlamaya çalışmıştır. Yine yarışmacıların verdikleri cevapları incelemiş, hangisinin doğru ve hangisinin yanlış söylediğine karar vermiş, hatta 195 sayısının karekökünün hangi iki pozitif tam sayı arasında olduğunu ve hangisine daha yakın olduğu gibi sorulara da cevap verebilmiştir.

“Ö1: Çünkü 12nin karesi 144 ediyor. 13’ününki 169. 195 bunlardan büyük bir sayı.
A: Evet.
Ö1: Merve’ninki doğru öğretmenim.
A: Neden?
Ö1: Çünkü 10 kere, 10’un karesi 100 öğretmenim. 20’nin 400. 195 bunların arasında öğretmenim.
A: O halde?
Ö1: Merve’nin cevabı doğru öğretmenim.
A: Sonra Elif ne diyor?
Ö1: Tekrar yanlış öğretmenim. Zaten bunlar *(12 ile 13 cevabı)* yanlıştı, bu daha küçük olduğu için *(11 ile 12)* bu da yanlış öğretmenim. Gene yanlışlar.
A: Peki moderatör ne diyormuş?
Ö1: Elif’in cevabının doğru olduğunu onaylıyormuş öğretmenim. Ama yanlış.
A: Kim itiraz ediyormuş?
Ö1: Merve.
A: Merve haklı mı?
Ö1: Evet.
A: Neden haklı Merve?
Ö1: Doğru cevabı vermiş öğretmenim.
A: Peki ben sana 195’in karekökünün hangi iki tamsayı arasında olduğunu sorsam bana ne dersin?
Ö1: *(düşünüyor)*…14 ile 13’ün öğretmenim.
A: Peki hangisine daha yakın?
Ö1: 14’e öğretmenim.”

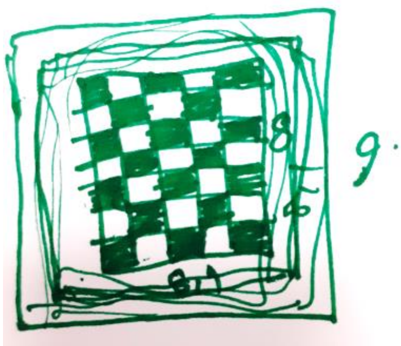
Ö1’in, istenilen sayıların hangi tam-kare pozitif sayılar arasında olduğunu, bu sayıların hangi tam-kare pozitif tam sayının kareköküne daha yakın olduğunu hatta yaklaşık olarak değerini hesaplayabildiği görülmüştür. Ö1 in bazen karekök yerine kare, bazen de karesini alma yerine karekökü alma kavramını kullandığı görülse de, bunun dikkatsizlikten kaynaklandığı düşünülmektedir. Dolayısıyla Ö1’in tam-kare olmayan kareköklü bir sayının hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirlediğini, hatta hangi doğal sayıya daha yakın olduğunu ve tahmini değerini hesapladığı görüldüğünden tam-kare olmayan sayıların karekökünü *ikinci obje* olarak oluşturabildiği düşünülmüştür.

4.2.3 Ö3’ün Grup İçi Kavramsallaştırma Süreci

Grup üyelerinden problem kâğıdı dağıtıldıktan sonra problemi okuyup ne sorulduğunun anlaşılması istenmiştir. Ö11 ile Ö10 ise problemi anlamadıklarını ifade etmişler ve ders boyunca gruba katılmakta çekimser davranmışlardır. Çözüm için ilk fikri ortaya atan yine Ö3 olmuştur.

“Ö3: Alanını mı biliyoruz? Kare olması için böyle olması gerek *(kare resmi çiziyor)* Bir kareyi mi soruyor? 64, 8’in karesine eşit.
A: Niye 8 aldın?
Ö3: Bunun küçük olması lazım. En az olması için en küçük almalıyız.
A: 8 olarak neyi aldın?
Ö3: Satrancın bir kenar uzunluğu. 8’e en yakın ve kare olması için 8’den sonra 9 var. 9’un karesini buldum. 81. O zaman masanın alanı 81.
A: 9 ne oluyor yani?
Ö3: Masanın alanı. Alandan kenar bulmak için karekökünü bulmam lazım.
A: Tamam bana bu anlattıklarının resmini çizer misin?”

Gerçekleştirilen bu konuşmada Ö3 de Ö1 gibi bir önceki derste öğrendiği bilgileri bugünkü derste kullanabilmiştir. Yine bu grupta 1.grup gibi masanın kenar uzunluğunun yapışkanlı satranç resminin kenar uzunluğundan büyük olması gerektiğini, resmin kenar uzunluğunu 8 br alırlarsa, masanın kenar uzunluğunun 8 br’den büyük ama en küçük olan 9 br olması gerektiğini, masanın kenar uzunluğu 9 br olursa, masanın alanının 81 br^2 olacağını söylemiştir. Burada Ö3’ün karekökü, alandan kenarı bulurken kullanılan bir işlem olduğunu *içselleştirmiş* olduğu görülmüştür. Araştırmacının isteği üzerine, tasarlanan masayı resmetmeyi gerçekleştiren Ö3, satranç altlığını ve buna uygun masayı çizmeye çalışmıştır.. Çizdiği masa resminin içerisindeki kare bölümlerin sayısının gerçek satranç tahtası resmini modellemediği görülmüş ancak bu durumun dikkatsizlikten ve sadece genel olarak temsil etme düşüncesinden kaynaklandığı düşünülmüştür.(Şekil 31).



Şekil **31**: Ö3’ün 2. Bağlamsal Problemdeki Grup Çalışmasındaki Bireysel Kâğıdından Görüntü

“A: 9’dan küçük bir masa uzunluğu olamaz mı?
Ö3: Ama 8 ile 9 arasında virgüllü sayılar var.
A: Virgüllü sayı?

Ö3: Sayı ama… Virgüllü olabilir mi yani?
A: Neden olmasın?”

Bu grup üyeleri de ilk önce masanın uzunluğunu 9 br olarak düşünmüşlerdir. Öğrencilerdeki bu durum masanın kare olmasının ancak masanın kenar uzunluklarının tam sayı olmasıyla sağlanabileceğini fikrinde olduklarını düşündürtmüştür. Bunun sebebinin ise bu kare masayı birim karelere ayırmak istedikleri zaman kalan ondalık kısmın tam sayı olmayacağı için tam kare şeklinde yazılamayacağını düşünmeleridir. Bu durum üzerine düşünen Ö3, 8 ile 9 arasında ve 8’e en yakın sayı olarak 8,1 sayısının olabileceğini ifade etmiş ve araştırmacıyı yanına çağırarak bu fikrini paylaşmıştır.

“A: Bu 8,1 ne?
Ö3: Bir kenarı.
A: Neyin bir kenarı?
Ö3: Hayır, alanı… Ama alanı olursa çok küçük olur.
A: Nasıl küçük olur?”

Grup arkadaşları kendi arasında konuşurken Ö3, *“Bu sefer buldum.”* diyerek araştırmacıyı yanına çağırmıştır.

“A: Satranç resminin alanı ne?
Ö3: 64. Alanı bu.
A: Masanın alanı ne?
Ö3: İlk 81 aldım. O zaman kenarı 9 oluyor.
A: Yapmak istediğim masa bu değil de bu olsa, ne dersin bu masa için?
Ö3: Mesela 8,1 olsa. Alanı 8,1 çarpı 8,1 olur.
A: Peki herhangi bir işlem yapmadan sadece bu resme bakarak bir şey söyleyebilir misiniz?
Ö3: O zaman 64’ten büyük olur. 81’den küçük olur alanı.
A: Kenar uzunluğu için ne diyebilirsin?
Ö3: O zaman ona da 8 ile 9 arasında derdim.
A: Peki bu arada sadece çizilen masa mı var?
Ö3: Hayır, bir sürü masa olabilir.
A: O zaman o masalar için ne diyebilirsiniz?
Ö3: Hepsinin alanı 64 ile 81 arasında, kenar uzunluğu da 8 ile 9 arasında olur (Şekil 32).”

$$64 = 8^2 < 9^2 = 81$$

Şekil **32**: Ö3’ün Satranç Masaları İçin Genel Bir Yorumu

Araştırmacı, grup üyelerinin bu durumu genelleyebilmeleri için bu aralıkta sadece bu karenin mi olduğunu grup üyelerine sormuştur. Bunun üzerine söz alan Ö3 kodlu öğrenci, *bu aralıkta birçok masa olduğunu, ama hep bu iki alan arasında kaldığını (64 ile 81), bu yüzden de kenar uzunluğunun 8 ile 9 arasında* olacağını söylemiştir. Katılımcının bu genellemeyi yapabilmesi, süreci *enkapsüle* ettiğini göstermektedir.

4.2.4 Ö3'ün Bireysel Görüşme Süreci

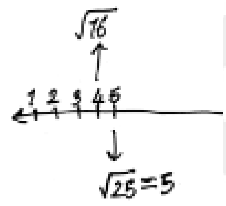
Ö3 ile gerçekleştirilen bu görüşme bağlamsal problem üzerindeki düşünmeleri üzerine gerçekleşmiştir.

> "Ö3: Şimdi buraları 1 santim olarak aldım, o zaman burası 8 santim oldu, masa bundan büyük olmalı. O zaman masanın bir kenarı 9 olur. 9 kere 9 alanı 81 olur. Ama 81 den küçük de olabilir. 8'den büyük olacak. 8 ile 9 arasında 9'dan küçük 8,1 var. Yani 8,2 var; 8,3 var; ama bunların şartları var. Bu sayıların alanları 8'in karesi 64 ile 9'un karesi 81 arasında olur. Kenarı da 8 ile 9 arasında olması lazım yani. Böyle yani.
> A: Peki alanı başka bir şey olsaydı?
> Ö3: 25 olurdu. 25 olsaydı bir kenarı 5 olurdu. Masa da o zaman 36 olabilirdi. Bir kenarı 6 santim olurdu.
> A: 6'dan başka bir şey olabilir miydi?
> Ö3: Evet olabilirdi.
> A: O zaman alanı ne olabilirdi, kenarı ne olabilirdi?
> Ö3: O zaman bir kenarı 5 ile 6 arasında sayılar olabilirdi, alanı da o zaman 25 ile 36 arasında olmalıydı.
> A: Mesela alanı 25 ile 36 (br^2) arasında bir alan alsan ne alırdın?
> Ö3: 30.
> A: Alanı 30 (br^2) olan karenin kenar uzunluğu ne olurdu?
> Ö3: 5 ile 5 buçuk arasında olurdu.
> A: Neden?
> Ö3: 30, 25'e daha yakın çünkü."

Ö3'ün, gerekli çıkarımları yaptığı hatta bu çıkarımları başka örnekler üzerinde de kullanabildiği görülmüştür. Seçilen satranç altlık ebatlarına göre alanın nasıl değişeceği, bu alana göre tasarlanacak olan masanın kenar uzunluğunun ne olabileceği hakkında gerekli yorumlarda bulunabildiği düşünülmüştür. Ayrıca, masanın kenar uzunluğunun hangi tam-kare sayıya daha yakın olacağını ve buna göre yaklaşık değerinin ne olması gerektiği ile ilgili yorumlarda da bulunmuştur. Problemin bağlamından bağımsız olarak düşünmesini isteyen araştırmacı, tam-kare olmayan sayıların karekökünü ne kadar anlamlı soyutladığını anlayabilmek için Ö3'e de sayı doğrusu üzerinde gösterimlerini incelemek istemiştir.

“A: Peki, bana karekök 25’i sayı doğrusunda gösterir misin?
Ö3: *(sayı doğrusu çiziyor ve doğru yeri gösteriyor).*
A: Neden bana orada olduğunu anlatır mısın?
Ö3: Çünkü karekök 25, 5’e eşittir. Burası da 5 olduğu için karekök 25 burasıdır.
A: Peki karekök 20 nerdedir o zaman?
Ö3: *(4’ü göstererek)* Burası 16 olduğuna göre *(karekök 16’dan bahsediyor),* 4 ile 5’in arasında, 4 ile 4 buçuk arasında, 4’e daha yakın olduğundan, çünkü 16’ya daha yakın.
A: Bana bir değer söylesen ne olabilir?
Ö3: 4,4 olabilir.”

Ö3’ün bu sayıları, sayı doğrusunda doğru bir şekilde gösterebildiği görülmüştür (Şekil 33). Bunun üzerine ilk problem ile ikinci problemi karşılaştırması ve yorumlaması istenmiştir.



Şekil 33: Ö3’ün Kareköklü İfadeleri Sayı Doğrusunda Gösterimi

“A: Peki ilk problemle bu problem arasında bir fark var mı?
Ö3: Pek hatırlamıyorum.
A: Orada ne buluyorduk?
Ö3: Alandan kenar buluyorduk.
A: Peki ordaki sayılar nasıl sayılardı?
Ö3: Tam sayılardı, yani virgülsüz sayılar.
A: Bir örnek verebilir misin?
Ö3: Karekök 25, tamsayı 5’e eşit.
A: Peki, burada ne oldu?
Ö3: Daha da küçülttük. Virgüllüye geçtik.
A: Peki bu sayılara ne dersin?
Ö3: Alandan virgüllü sayıya geçmek.
A: Yani karekök 20’ye ne diyorsun?
Ö3: Virgüllü sayı.”

Bir önceki problemde karekökü, *alandan kenarı bulmak* olarak yorumlayan Ö3, bu problemdeki karekökü ise *alandan virgüllü sayıya geçmek* olarak yorumlamıştır. Daha sonra diğer probleme geçilmiştir.

"A: Tamam, şöyle bir problemi senden çözmeni istesem, bana nasıl çözdüğünü ya da neler düşündüğünü anlatır mısın?
Ö3: *(soruyu okuyor)…* Merve'nin sorusu 46'nın karekökü hangi iki tamsayı arasında. 46… neyle neyi çarparsam…hangi iki sayıyı çarparsam 46 eder, 6 kere 6, 36 eder, 7 kere 7, 49 eder, 6 ile 7 arasında. Doğru. Elif'in sorusu 87'nin karekökü hangi iki pozitif sayı arasındadır, iki pozitif diyooor, 87'nin karekökü, 9 kere 9, 81, 10 kere 10, 100, bu yanlış, Merve'nin sorusu 2'nin karekökü hangi iki sayı arasındadır, 1 kere 1, 1, 2 kere 2, 4. 1 ve 4.
A: 1 ve 4 mü oluyor? 4'ü nasıl buldun?
Ö3: 2'nin karekökü.
A: 4, 2'nin karekökü mü?
Ö3: 4'ün karesii.. yooo.. 2'nin karesi ile bulduk.
A: O zaman hangi sayılar arasında olur?
Ö3: 1 ve 4.
A: 4 olsa neye dönmesi gerekiyor?
Ö3: 2 olacak. 4 çünkü 2'nin karesi. O zaman 1 ve 2 arasında olacak. O zaman bu yanlış…"

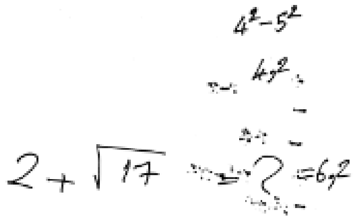
Ö3, diğer katılımcılar gibi $\sqrt{2}$'nin sorulduğu durumda kısa süre bir karışıklık yaşamış, ama sonra doğru cevap vermiştir. Ö3, $\sqrt{195}$ için aralığı daha da daraltıp hangi ardışık tam sayılar arasında yer alacağının da yorumunda bulunabilmiştir.

"Ö3: Bu sefer oyun değişmiş, ikisi de cevap verecekmiş, ilk butona basıp doğru cevap veren kazanıyormuş. İlk önce doğru cevabı bulayım. 13'ün karekökünü bilmiyorum. *(13'ün karesini hesaplıyor, 169 buluyor).* Cevabın bu iki sayı arasında olması gerekiyor *(13^2-14^2).* Elif ilk bastı ama yanlış cevap verdi.
A: Sonra?
Ö3: Merve'nin doğru ama… burada en küçük demediği için doğru oluyor. Elif yine yanlış söylemiş.
A: Tamam, soru ne diyor?
Ö3: Merve haklı. Çünkü 10 ile 20 arasında. Ama daha da daraltırsak 13 ile 14 arasındadır."

Ö3'ün bu kadar hızlı bir şekilde yorum yapması araştırmacının dikkatini çekmiş ve tam-kare olmayan sayıları herhangi bir bağlam içinde yer almadan kendi başına bir nesne olarak düşünüp düşünemediğini anlamak için farklı sorular sormuştur.

"A: Sana ben kendim bir soru sormak istesem, şuraya yazıyorum, $2+\sqrt{17}$ toplamının eşitini bana bulabilir misin?
Ö3: İlk önce kökü bulmamız lazım. 17, 17'nin kökü virgüllü çıkıyor, o zaman hangi iki sayı arasında olduğunu bulalım. 4^2 ile 5^2 arasında.
A: Peki yaklaşık değeri nedir sence?
Ö3: 4 üssü 2'ye daha yakın, 4,2 olabilir. Yaklaşık 4,2 olur.

A: O zaman bu işlemin sonucu ne olur?
Ö3: 6,2 olur yaklaşık olarak (Şekil 34).”



Şekil 34: Ö3’ün $2+\sqrt{17}$ İçin Cevabı

Ö3’ün tam-kare pozitif tam sayıların karekökü kavramını *de-enkapsüle ederek* “virgüllü sayılar” olarak ifade ettiği rasyonel sayıların ondalık gösterimi ile *koordinasyonu* sağlamış ve böylece *ikinci nesne* olarak, *tam-kare olmayan sayıların karekökü* kavramını *enkapsüle* edebilmiştir.

4.2.5 Ö5’in Grup İçi Kavramsallaştırma Süreci

Bu grupta bulunan öğrencileri daha etkinlik kâğıtlarını almadan önce zor bir problemle karşılaşacaklarını düşünmüşlerdir. Bu durumu grup üyelerinden Ö14, *“Yine zor soru soracak galiba ya!”* sözüyle dile getirmiştir. Etkinlik kâğıdını aldıktan sonra grup üyeleri problemi okumuşlar ve problemi anlamaya çalışmışlardır. İlk dikkatlerini çeken durum problemde yine veri olarak herhangi bir sayının olmayışıdır.

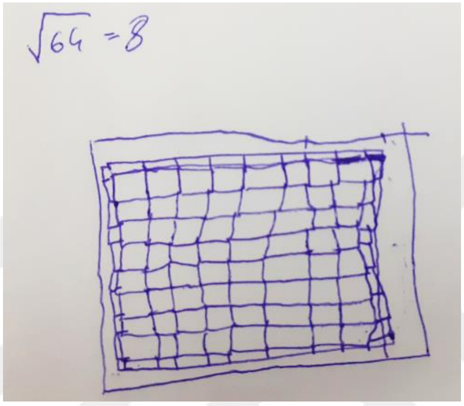
“Ö14: Kenarları geçende 8, 8 demiştik ya, yine öyle diyelim. O zaman 64’ün karesi 8.
Ö5: Karesi değil o, karekökü.”

Ö14 bir önceki derste öğrendiği durumu bu dersle ilişkilendirmek istemiştir ama bunu yaparken karesini bulma ile karekök alma durumlarını birbirine karıştırmıştır. Ö5, bu karışıklığın farkında olup arkadaşının yanlışını düzeltmiştir.

Bu grup üyeleri fikirlerini söylerken çekimser davranmışlar, konuşmalarını genellikle fısıltı şeklinde yapmışlardır.

“A: Evet, neler yaptınız, anlatın bakalım.
Ö14: Geçen ki gibi 8 dedik. Alanı da 64 oldu yine.
A: Tamam, öyle kabul edelim. Ya sonra? Problem ne istiyor bizden?
Ö15: Alanı…masanın alanı…en az kenarı…maliyeti azaltmak için…”

Araştırmacı grup üyelerine neler yaptığını sorduğunda öğrenciler birbirlerinin yüzlerine bakmışlardır. Kimse konuşmak istememiştir. Sessiz kalınması üzerine Ö14, Ö5'in bir önceki dersten yararlanarak çizdiği masanın resmi üzerinden anlatmaya başlamıştır (Şekil 35). Yapışkanlı satranç altlığının alanını 64 (br^2), kenar uzunluğunu da 8 (br) aldıklarını söylemiştir. Fakat araştırmacı, grup üyelerine problemde ne istendiğini sorduğunda grup üyeleri yine sessiz kalmışlardır. Grup üyelerinin problemi anlamadıklarını düşünen araştırmacı, grup üyelerinden problemi okuyup kendisine anlatmalarını istemiştir.



Şekil 35: Ö5'in Satranç Masası İçin Çizdiği Görüntü

"A: Problemi bana anlatabilir misiniz?
Ö15: Satranç takımının kısa kenarı ne olabilir diye soruyor.
A: Kısa kenarı mı? O ne demek?
Ö15: 1 santim olursa kenarı 8 santim olur. Alanı da 64 olur.
A: Peki masa?
Ö15: Onu da 8 santim olarak alırız o zaman.
A: O zaman masa ile satranç altlığı aynı büyüklükte olmaz mı?
Ö15: Olur.
A: Ama problem ne diyor?
Ö15: En az diyor.
Ö5: 81 olur mu?
A: Neden 81?
Ö14: O zaman 7 üzeri 2 olur.
A: Nerden çıktı 7 üzeri 2?
Ö14: 49. 49 daha az.
A: Evet, 49 sayısı 64'ten daha küçük değil mi?"

Grup üyeleri problemi anlamakta zorlanmışlardır. Problemde ne bildiklerini ve ne bulmaya çalıştıklarını fark edememişlerdir. Ö14 masanın alanının, seçilen yapışkanlı satranç altlığının alanından büyük olacak şekilde istendiğini kavrayamamıştır. Ö15 ise problemde “en az” olma durumu sorulduğu için yapışkanlı satranç altlığı ile masanın alanlarının ölçülerini eşit almıştır. Burada masanın kenarlarında eşit uzunlukta boşluk kalacak durumunu göz ardı etmiştir. Bu durumun sadece Ö5 farkında olmuştur ama onu da bu geçen diyalogda hiçbir grup arkadaşı dinlememiştir. Araştırmacı, grup üyelerine problemi tekrar okumalarını söylemiştir. Bu okuma sonunda Ö15 arkadaşlarından kendisini dinlemelerini istemiştir.

> “Ö15: Ya bakın, şimdi bir kere masanın 8 üzeri 2’den büyük olması lazım ki masa büyük olsun.
> Ö14: Evet, 8 üzeri 2’den büyük olmalı.
> Ö15: 9 üzeri 2. Bunda sonuç büyük oluyor. 81. 64’ü 81’den çıkardığımızda 17 kalıyor. 16 kalsaydı eşit olurdu. Bir yanlışlık var demek ki burada.”

Burada Ö15 yapılacak olan masanın, satranç altlığından büyük olması gerektiğini anlamıştır. Devam eden süreçte Ö15, 81’in 8 üzeri 2’den büyük olduğu için seçilebileceğini düşünmüştür. Fakat burada masanın bir kenarını, masanın alanından satranç altlığının alanını çıkarıp sonucu 4 ile bölerek bulabileceğini düşünmektedir. Çıkan sonuç (17), 4 ile tam bölünemediği içinde bu durumda bir yanlışlık olduğunu düşünmektedir. Yani alanı verilen bir karenin kenar uzunluğunu bulma durumunu Ö15 içselleştirememiştir. Aslında grup üyesi, kalan birim kareleri masayla yapışkanlı altlık arasını dolduracak şekilde düzenlemek istemiş, fakat bunu tam olarak uygulayamamış, her kenardan ekleme yapıyor gibi düşünmüş, bu yüzden kalan birim kareleri 4’e bölerek bir sıraya ne kadar birim kare koyulacağını hesaplamaya çalışmıştır. Bu yüzden yanlış yaptığını düşünmüş ve sonra bu sayıyı 10’un karesi olarak almış ve aynı işlemleri devam ettirmiştir.

> “Ö15: 10’un karesi 100. 100’den 64’ü çıkarırsak 36 kalır. 36’yı da 4 bölersek 9 çıkar. O zaman bir kenarı masanın 9 olur. Tamam, buldum.
> Ö14: 36’nın karesi 6 ediyor.
> Ö5: Ben sizin ne yaptığınızı anlamadım. Öğretmene siz anlatın.
> Ö15: Öğretmenim, 9 üzeri 2, 81 oluyor. 64’ten çıkardığımızda 17 kalıyor. 4’e bölünmüyor. O zaman 10 üzeri 2 yaparım. Geriye 36 kalıyor. 4 kenarı var. 4’e böldüğümüzde 9 oluyor. Bence büyük ihtimal böyle olacak.
> A: Neden bu sayıları aldın?
> Ö15: Çünkü 8 üzeri 2’den büyük olmalı. Boşluk kalacak ya.
> A: Neden çıkarma yaptın peki?
> Ö15: Boşluk kalacak yerleri buldum.”

Burada Ö15 masayı bir bütün olarak düşünememiştir. Masanın yapıştırılma kısmını ayrı, boşluk kısmını ayrı olarak düşünmüştür. Ö15'in, alan kavramı ile çevre kavramını birbirine karıştırdığı, dahası alanının 100 br^2 olarak aldığı ve masanın bir kenar uzunluğunu 10 br olarak seçtiğinin de farkında olmadığı anlaşılmaktadır. Bu durumun grup üyelerinden kimse farkında değildir. Grup üyeleri problemin çözümünü burada bırakmışlardır.

4.2.6 Ö5'in Bireysel Görüşme Süreci

Ö5'in zihinsel süreçlerini ortaya çıkarmak için yapılan görüşme süresi diğer katılımcılara göre daha uzun olmuştur. Ö5'te diğer katılımcılar gibi *alanı bulmak ile çözüme* başlamıştır. Satranç altlığının bir kenarında 8 tane kare bölüm olduğu için satranç altlığının bir kenarını 8 br alan Ö5, alanı 64 br^2 olarak kabul ettiğini söylemiştir. Masanın *maliyetinin en az olması için masanın satranç altlığından büyük olarak seçebileceği en küçük sayının 9 olduğunu böylece masanın alanının 81 br^2 olabileceğini* söylemiştir. Bu durumu katılımcı kendi ifadesiyle *"Masayı bir (br) büyüttüm."* diyerek ifade etmiştir.

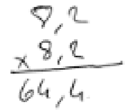
"A: Peki bu masayı daha küçültebilir miyiz maliyetten tasarruf edebilmek için?
Ö5: 64 ile 81 arasında olması gerek öğretmenim o zaman.
A: Niye 64 ile 81 arasında olması gerek?
Ö5: Masanın 9^2 ile 8^2 arasında olması gerek.
A: Tamam bana o zaman öyle bir masa çizer misin?
Ö5: Yarısını bulmamız gerekir.
A: Neyin yarısını bulmamız gerekir?
Ö5: 8 üzeri 2 ile 9 üzeri 2'nin.
A: Neden?
Ö5: Çünkü arasında bir sayı almasını istiyorum.
A: O zaman 2'ye bölmek gerekiyor deyince neyini bulmaya çalışıyordun?
Ö5: *(düşünüyor)*.... Yarısını mı?
A: Tamam düşündüğün şey üzerinden söyle..
Ö5: 8 üzeri 2, 64; 9 üzeri 2, 81… 75 olsa..
A: 75 ne olsa?
Ö5: 75.. masanın şeyi olsaa..
A: Neyi olsa?
Ö5: Alanı…
A: Alanı 75 (br^2) olsa masa nasıl olabilir?
Ö5: 75'in karekökünü bulmamız gerekir.
A: Tamam ne buluruz o zaman?
Ö5: Buçuklu bir sayı çıkacak.
A: Nasıl çıkacak, gösterir misin?

Ö5: Öğretmenim, 8 kere 8 64, onun bir üstü 9 kere 9 81, o zaman 8 üzeri bi şey olurrr, yoook, ... *(düşünüyor)*..
A: Masanın ne olmasını istiyor?
Ö5: Maliyetinin az olmasını istiyor…
A: Daha başka ne istiyor?
Ö5: Eşit şekilde boşluk kalmasını istiyooo..
A: O zaman eee masanın alanı ne olabilir? Satranç masası ile karşılaştırsak nasıl bir yorum getirebilirsin?
Ö5: ....
A: Ne düşünüyorsun?
Ö5: Öğretmenim ben 81 yapardım yaaa.."

Araştırmacı katılımcıdan farklı bir masa oluşturmasını istemiştir. İlk önce bu aralıkta (yani alanı 64 ve 81 br^2 arasında olan) bir sayı bulmak için "yarıya bölmeyi" teklif eden Ö5, daha sonra bu yarıya bölmeyi kendisi de anlamlandıramamıştır. Fakat araştırmacı bunun kenar uzunluğunun 8 ile 9 br arasında olan, hatta bu aralığın tam ortasında olan 8,5 br'i ifade ettiğini düşünmüştür. Alanın 64 ile 81 br^2 arasında olması gerektiğini düşünen Ö5, örnek olarak 75 olabileceğini söylemiş ama bu söylediği masanın kenarı için yorum yapamamış ve anlamlandırabildiği 81'i masanın alanı olarak seçmiştir. Ö5, alan ölçüsü tam-kare sayı olan bir karenin kenar uzunluğunu rahatça bulurken; alan ölçüsü tam-kare sayı olmayan bir karenin kenar uzunluğunu bulamamış, dahası bu durumu *içselleştirememiştir.* Bu anlamda, araştırmacı katılımcının sayılarla ilgili düşünmelerini ortaya çıkarmak için konuşmaya devam etmiştir.

"A: Tamam o zaman bana 8 ile 9 arasında sayı var mıdır, yorum yapar mısın?
Ö5: Evet vardır..
A: Mesela?
Ö5: 8,1 ; 8,2; 8,3; …
A: Tamam bana kenar uzunluğu 8,2 br olan bir kare çizer misin?
Ö5: 8,2… *(düşünüyor ama cevap veremiyor)*
A: Tamam birim karelere ayırmadan çiz..
Ö5: Nasıl yani normal bir kare mi? Kenarı 8 olan.
A: Evet, normal bi kare. Kenar uzunluğu 8,2 br olan bir kare.
Ö5: *(bir kare çiziyor)…*
A: Ne dedin bunun kenar uzunluğuna?
Ö5: 8…
A: Ben ne olmasını istedim?
Ö5: 8,2.
A: Kenar uzunluğu 8,2 br olan bir kare olamaz mı?
Ö5: Olabilir.
A: Nasıl olabilir?

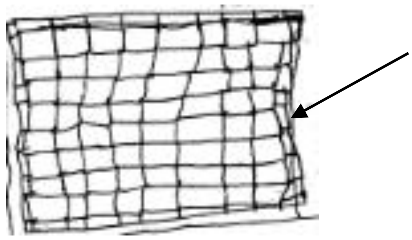
Ö5: Öğretmenim burasının uzunluğu 8,2 olur o zaman *(karenin üstteki kenarından bahsediyor).*
A: Daha neresi olabilir?
Ö5: Burların *(tüm kenarlarını söylüyor)…*
A: O zaman alanı ne olur?
Ö5: *(tekrar düşünüyor).*. 64,4 mü olur? (Şekil 36)
A: Nasıl yaptın?
Ö5: İlk önce 8'leri çarptım 64. Sonra 2'leri çarptım 4.
A: 8,2 nasıl bir sayı?
Ö5: Virgüllü…
A: Bu sayıları nasıl çarpıyorduk?
Ö5: Virgülünü atıyorduk galiba…
A: Tamam bana bir gösterir misin nasıl yapıldığını?
Ö5: *(anlattığı şeylerin aynısını yanlış olduğunun farkında olmadan işleme döküyor).* Öğretmenim ben böyle yapardım.
A: Tamam, böyle olduğunu düşünürsek, bu bulduğun alanı diğer bulduğun alanlarla (64 ve 81) karşılaştırırsan ne diyebilirsin?
Ö5: Imm, bu bir kere virgüllü sonuç olduğu için, ımm nasıl desem, 81'den bize daha çok kazandıracak. Maliyet olarak.
A: Tamam, o zaman bana bu şekil üzerinde bu masanın şeklini çizer misin?
Ö5: Bu kaçtı? *(resimdeki masanın uzunluğunu hatırlamaya çalışıyor)*
A: 9 almıştın onu.
Ö5: 9. Tamam. Öğretmenim şuralarda bir yerlerde olurdu herhalde *(en dıştaki masanın üstünde bir nokta gösteriyor)"*



Şekil 36: Ö5'in 8,2 Sayısının Karesini Alması

Ö5, 8 ile 9 arasındaki sayılara örnekler verebilmiştir. Bu anlamda kendi deyimiyle virgüllü sayı olarak ifade ettiği sayıların bir karenin kenar uzunluk ölçüsü olabileceğini ama bu kare eğer birim karelere ayrılıyorsa bu karenin kenar uzunluğu olamayacağı dahası böyle bir karenin "normal olmadığını" düşündüğü görülmüştür. Genel olarak araştırmanın yapıldığı katılımcıların karenin alanını birim karelere ayıramadıkları çünkü katılımcılarda birim kare kavramının tam olarak oluşmadığı düşünülmektedir. Ö5'te kenar uzunluğu 8,2 br olan bir satranç masası düşünmüş ama bunu görselleyememiş, kenar uzunluğunu 9 br olarak kabul ettiği masanın kenarları üzerinden herhangi bir nokta göstermiştir. Diğer taraftan kenarı 8,2 br olarak seçilen masanın, kenarı 9 br olarak seçilen masaya göre daha fazla karlı bir durum olduğunun (okul müdürü için) muhakemesini yapabilmiştir. Araştırmacı, görseller üzerinden katılımcının bu durumu ne kadar yorumlayabildiğini anlayabilmek için görüşmeye devam etmiştir.

"Ö5: 8 idi.
A: Peki 8,2 br'lik olsaydı nasıl olurdu?
Ö5: *(masanın üstündeki noktadan 8'i aşarak bir yer işaretliyor)* o zaman burada olurdu. Burası 9 olduğuna göre.
A: Tamam çiz bana o kareyi.
Ö5: Şöyle mi? *(8 birim kare yanına çizdiği birim karelerden küçük bir kare daha ekliyor)* (Şekil 37)
A: Bunları 1 birim 1 birim mi aldın? O zaman bu ne çizdiğin ne oldu?
Ö5: Yarısı mı? Daha mı küçük çizmem lazımdı. 0,2 desem?
A: Desen ne olur?
Ö5: Burası 0,2 olsa, her biri 1 olsa, 8 tane olduğuna göre 8,2 olur.
A: Tamam şimdi bu kenar ne oldu?
Ö5: 8,2 oldu.
A: Peki bu kenarın uzunluğu ne oldu? *(ekleme yapmadığı taraftaki kenar, sütunlar)*
Ö5: O zaman burası 8.
A: O zaman bu şekil ne?
Ö5: Bu kare değil. O zaman buraya da eklemem gerekiyor. 8,2 olması lazım.
A: Tamam o zaman yeni oluşturduğun bu alan ne oldu?
Ö5: İçerdeki 64 idi.
A: Tamam 64 (br^2)'e göre ne olur alanı?
Ö5: Artar.
A: Tamam sen şimdi alan için ne söyleyebilirsin?
Ö5: 64 virgül..... *(ondalık gösterimlerde çarpma konusunda zorlanıyor)*
A: Tamam yorum yaparsan ne dersin?
Ö5: 64'ten büyük masanın alanından *(ilk masanın alanından bahsediyor)* küçük.
A: Mesela masanın kenar uzunluğunu 8,2 br değil de başka bir şey alsaydık, ne alabilirdik?
Ö5: Öğretmenim sayıyı mı değiştiriyim?
A: Değiştir
Ö5: 8,5.
A: Öyle bir şey çizmiş olsaydın nasıl olurdu?
Ö5: Yine aynı olurdu.
A: Nasıl yani?
Ö5: Satranç tahtasından büyük olurdu, ama masa alanının içinde olurdu.
A: Tamam, o zaman bana bu durumu genelleyebilir misin? Ne diyebilirsin bu durum için?
Ö5: Öğretmenim, şurdaki eşitliği sağlamam lazım *(satranç tahtası ile masa kenarını göstererek)*
A: Eşitliği sağlamam lazım derken?
Ö5: Yani eşit şekilde boşlukların kalması lazım.



Şekil 37: Ö6’nın Kenar Uzunluğunu 8,2 birim Seçtiği Masa İçin Gösterimi

Ö5, önce 9 br olarak aldığı masanın kenar uzunluğunun daha sonra 8,2 br olabileceğini söylemiş; buna göre hesaplama yaptığında alanın satranç altlığının alanından büyük ama ilk seçtiği 9 br lik masanın alanından daha küçük dolayısıyla daha kazançlı bir durum olduğu yorumunda bulunabilmiştir. 8,2 br uzunluğa sahip masayı görselleştirmesi istendiğinde, önce her satırın sonuna ebatları $0{,}2\times 1$ br^2 olan dikdörtgenler eklemiş, fakat bu ekleme esnasında bu şekillerin dikdörtgen olduğuna dikkat etmemiştir. Daha sonra bu işlemi her sütunun sonuna uygulayıp yatayda ve dikeyde masanın kenar uzunluklarını 8,2 br yapmaya çalışmıştır. Fakat bu işlemi yaparken ekleme yaptığı dikdörtgenleri tek tarafa eklemiştir. Kenar uzunluklarını 8,2 br yaptığında kenar boşlukların eşit olmadığını görmüş, bu işlemi her kenara (geriye kalan diğer iki kenar) uygulaması gerektiğini düşünmüş fakat bunu yaparken de masanın kenar uzunluğunu 8,4 br e çıkardığını fark etmemiştir. Katılımcıyı burada düşündüren nokta tüm satır ve sütunların sonuna eklediği dikdörtgenlere rağmen masanın köşelerinde kalan $0{,}2\times 0{,}2$’lik boşluklar kalması olmuştur. Kalan bu boşlukları anlamlandıramayan Ö5 yanlış yaptığını düşünmüştür. Araştırmacı bu noktada devreye girmiş ve yaptıklarını anlatmasını istemiş, böylece hatasını fark edebileceğini düşünmüştür.

> “A: Sen bana o sırada ne yaptığını söyler misin?
> Ö5: Virgüllü sayı ekledim.
> A: Tamam ne kadarlık ekledin?
> Ö5: 0,2 lik.
> A: O zaman bu kenar uzunluğunun tamamı ne olur?
> Ö5: 0,4 olur.
> A: Tamamı ne olur?
> Ö5: 8,4 olur.
> A: Tamam şimdi bak bakalım hepsi öyle mi?
> Ö5: Öğretmenim buraları mı soruyorsunuz?
> A: Hı hı.

Ö5: 8,4 oldu
A: Diğer kenarları da öyle oldu mu?
Ö5: Evet.
A: Tamam bizim bu büyüttüğümüz yer neydi?
Ö5: Masa.
A: Evet, şimdi masanın kenarı ne kadar oldu?
Ö5: 8,4.
A: Tamam bu masanın alanı için ne söyleyebiliriz artık?
Ö5: 8,4 ile 8,4'ü çarparız. 64,8 olur.
A: Nasıl oldu o?
Ö5: Bunun gibi yaptım aynı *(tam kısımla tam kısmı, virgülden sonrası ile virgülden sonrası çarpıp söylüyor)*
A: Anladım. Seçtiğin diğer alanlarla karşılaştırırsan ne diyebilirsin?
Ö5: Küçük oldu 81'den.
A: Başka ne diyebiliriz?
Ö5: Satranç tahtasından da büyük oldu.
A: Tamam o zaman sana şöyle bir soru sormak istiyorum. Bir kare verildi bize ve bu karenin alanının 30 santimetrekare olduğu söyleniyor. Kenar uzunluğunu bulmamız isteniyor. Nasıl buluruz bunu?
Ö5: 30'un karekökünü buluruz.
A: Tamam nasıl buluruz?
Ö5: 5 kere 5, 25 olur. 6 kere 6 da 36 olur. O zaman arasında bir şey bulmamız lazım.
A: Ne olur o zaman?
Ö5: 5,5 olabilir.
A: Nasıl buldun?
Ö5: 5 ten büyük 6'dan küçük olması lazım. Yarısı olur yani.
A: Tamam o zaman alan 43 olsaydı?
Ö5: 6 kere 6, 36. Bir üstü 7 kere 7, 49 olduğuna göre; 6,5 olabilir.
A: Neden 6,5 olabilir dedin?
Ö5: Çünkü 6'dan büyük, 7'den küçük olacak. O zaman 6,5.
A: İkisinde de buçuklu söyledin. Arada buçuktan başka sayı yok mu?
Ö5: Hayır. 6,6 da olabilir.
A: O zaman bunu nasıl bulabiliriz?
Ö5: Derste yapmıştık. 43 hangisine daha yakınsa…
A: Hangisine daha yakın 43?
Ö5: 49'a daha yakın.
A: O zaman?
Ö5: 7 üzeri 2, 49'dur.
A: Evet, o zaman?
Ö5: 6,6 olabilir."

Ö5, yaptığı işlemleri kontrol ettiğinde masanın kenar uzunluğunun 8,4 br olduğunu görmüş, alanını ise hesapladığında ise 64,8 (br^2) olarak bulmuş; yorumunda ise bu masanın da yine ilk seçtiği masaya göre daha az alana sahip olacağını, diğer taraftan ise satranç altlığından da büyük olacağını söyleyebilmiştir. Bu anlamda, araştırmacı farklı tam-kare olmayan sayıların kareköklerinin değerini sormuş; katılımcı ise bu sayıların hangi tam-kare sayılar arasında kaldığını bularak onların arasında bir değere sahip olacağı yorumunu yapmıştır. Bu sayılara yakınlıklarına bakmadan, bu sayılar arasında olan bir sayıya eşit olacağını söylemiş, genel olarak tam ortasındaki sayıyı düşünerek 6,5-7,5 gibi *"buçuklu sayılar"* demiştir. Araştırmacının nedenini sorması üzerine ise sayının hangi tam-kare sayıya daha yakın olduğu ile ilgili yorum yapmıştır. Daha sonra araştırmacı Ö5'ten 'Ben Bilirim Rakibim Bilmez' problemine geçmesini istemiştir.

Ö5, problemde Elif ve Merve'nin sorulara verdiği yanıtları tek tek incelemiş ve hangisinin doğru hangisinin yanlış olduğunu açıklamıştır. Diğer Ö1 ve Ö2 katılımcıları gibi önce zorlandığı 2'nin karekökünün ne olacağı sorusuna Ö5 doğru bir yorum getirse de, cevabını kendinden emin olmayan bir ses tonuyla vermiştir.

> "Ö5: 2'nin karekökü. 1 üzeri 2, 1. 2 üzeri 2, 4. 2 ile 4 arasında demiş ama. Yanlış galiba.
> A: Ne demeliydi?
> Ö5: Öğretmenim, 2 zaten kendisini söylemiş. 2 üzeri 2, 4 oluyor zaten.
> A: Kendisini söylemiş derken ne demek istedin, ben anlayamadım?
> Ö5: 2'nin kareköküüüüüü….
> A: Nedir 2'nin karekökü?
> Ö5: 1 ve 2 arasında olacak.
> A: Neden?
> Ö5: 1'in karesi 1, 2'nin karesi 4. 2 bunların arasında olur bu yüzden. Kaç olabilir? Virgüllü biişey olacak o yüzden.
> A: O zaman ne olur Merve'nin dediği?
> Ö5: Yanlış olur öğretmenim."

Katılımcı, yarışma bağlamındaki sorularının hepsine doğru bir şekilde cevap vermiş ve açıklamalarını da yapabilmiştir. Hatta Ö5, 195'in karekökü için hangi tam sayılar arasında kaldığını da bulabilmiştir. Bunun üzerine araştırmacı katılımcıya bir işlem sorusu sormuş ve tam-kare olmayan sayının karekökünü ne kadar anlamlı nesneleştirebildiğini görmek istemiştir.

> "A: Tamam o zaman şöyle bir soru sorsam sana, $2+\sqrt{14}$ toplamının sonucu nedir sence?
> Ö5: Önce öğretmenim 14'ün karekökünü buluruz. 4 kere 4, 16 olur. 3 kere 3, 9 olur. Yine virgüllü sayı olacak.
> A: Nasıl olabilir?

Ö5: 3 virgülll…. Yani 3 ile 4 arasında olacak.
A: Peki hangisine daha yakın olduğu ile ilgili ne diyebilirsin?
Ö5: 3 kere 3, 9 olur. 5 fark olur aralarında (14-9). 4 kere 4, 16. 2 fark olur (16-14). 4'e daha yakın olur.
A: Tamam ne olabilir o zaman yaklaşık değeri?
Ö5: 3,8 olabilir.
A: Toplam için ne diyebilirsin?
Ö5: 5,8 olur."

Ö5, tüm süreç boyunca araştırmacının sorduklarına cevap vermiş, tam-kare olmayan sayıların karekökünü enkapsüle edebilmiş ve bu durumu *tüm tam kare olmayan sayıların karekökü için genelleyebilmiştir*. Bu anlamda Ö5'in *ikinci nesne* olarak tam-kare olmayan sayıların karekökünü kavramsallaştırabildiği düşünülmüştür.

4.3 Dikey Matematikleştirmeler

Katılımcılarla üçüncü görüşmelere geçilmeden önce sınıfta 1 ders saati süresince tam-kare ve tam-kare olmayan sayıların karekökünü belirleme ve tam-kare olmayan sayıların karekökünün yaklaşık değerini hesaplama durumlarını içeren 6 soruluk bir çalışma kâğıdı (EK-3) öğrencilere sunulmuştur.

Dağıtılan problem kâğıtlarını alan öğrenciler ilk soruyu okurken aynı çalışma kâğıdını araştırmacı tahtaya yansıtmıştır. Öğrencilerin çözmesi için bir süre bekleyen araştırmacı, soruyu çözmek isteyen var mı diye sınıfa sormuştur. İlk soru 3 alt sorudan oluşmakta olduğu için ilk soruya 3 farklı öğrenci tahtaya kalkmıştır. Bu kişiler Ö7, Ö8 ve Ö1 kodlu öğrencilerdir. Tam-kare olmayan sayıların hangi ardışık sayılar arasında olduğunu belirlenmesinin istendiği ilk sorunun son kısmına kalkan Ö7, bu sayının -4 ile -5 sayıları arasında yer alacağını söylemiş fakat sıralamasını ters yapmıştır. Öğrenciler tahtada soruları çözerken araştırmacı öğrenciler arasında gezmekte ve öğrencilerin yaptıklarını not almaktadır. Bu anlamda Ö1 ve Ö3 haricinde sınıfın genelinin Ö7 ile aynı hatayı yaptığı görülmüştür. Bundan dolayı öğrencilerin sayıların negatif oluşuna dikkat etmediği, negatif sayıları sıralamada sıkıntı yaşadıkları düşünülmüştür.

İkinci soruda öğrencilerin karekök 34 ile karekök 101 arasındaki tam sayıları bulmaları beklenmektedir. Yine bir süre beklenildikten sonra öğrenciler karışık olarak bu aralıktaki tam sayıları bulmuşlardır. Son olarak tüm sınıfla birlikte 1'den 100'e kadar olan tam-kare sayılar sesli bir şekilde tekrar edilmiştir.

Üçüncü soru bir işlem sorusudur. Öğrencilerin bir tam sayıyla tam-kare olmayan kareköklü bir sayının toplamı ile ilgili yorum yapmaları beklenmiştir. 2.görüşmede katılımcıların bu soruya çok hızlı cevap verdikleri görülmüştür. Araştırmacı, bu katılımcılardan sessiz olmalarını ve soruyu diğer arkadaşlarının çözmeleri için beklemelerini ve cevaplarını söylememelerini istemiştir. Sınıfa soruyu çözebilen var mı diye sorulduğunda Ö8, parmak kaldırmış ve çözmek istediğini söylemiştir. Ö8, $\sqrt{14}$'ün hangi tam-kare sayılar arasında kaldığını bulmuş (9 ve 16), hangisine daha yakın olduğunu söylemiş (16), dolayısıyla yaklaşık değerinin 4'e yakın olması gerektiğini ifade etmiştir. Arkadan konuşmaya katılan Ö15, yaklaşık değerinin 3,8 olabileceğini söylemiş, Ö8 de arkadaşına katılmıştır.

Dördüncü soru da birinci soru gibi 2 alt sorudan oluşmaktadır. Görsele bağlı kalarak birinci alt soruda tam-kare pozitif tam sayının karekökü, ikinci alt soruda ise tam-kare olmayan bir sayının karekökü sorulmuştur. İlk soru için Ö14 tahtaya kalkmış ve 121'in 11'in karesi olduğunu söylemiş, dolayısıyla arabanın L noktasına geldiğini ifade etmiştir. İkinci alt soruya ise Ö15 tahtaya kalkmış ve bu sayının tam kare sayı olmadığını, bu yüzden hangi sayılar arasında olduğu bulması gerektiğini söyleyip 250'nin 15 ile 16 sayıları arasında olduğunu söylemiş ve dolayısıyla arabanın da L-M arasında bir yerde olduğunu ifade etmiştir.

Beşinci soru yine 2.soru gibi merkezi sınavda çıkmış bir problemdir. Bu problem, iki durumu da içermektedir. Öğrenciler bu problemde diğer dört soruya göre zorlanmışlar ve bağlam durumunu anlayamamışlardır. Araştırmacının kendisi problemi sesli bir şekilde tüm sınıfa okumuş ve ne anladıklarını sormuştur. Öğrenciler yerden 3 metre yükseklikte duran hedef tahtasının alt kısmının yüksekliği için $\sqrt{9}$'a eşit olduklarını söyleyebilmiş ama üst sınır için herhangi bir sayı oluşturamamışlar dahası bunu düşünememişlerdir. Araştırmacı, öğrenciler arasında gezerken bazı öğrencilerin $\sqrt{8}$'i işaretlediklerini görmüş, sebep olarak ise $\sqrt{9}$'a en yakın sayının bu sayı olmasından dolayı işaretlediklerinin cevabını almıştır. Araştırmacı öğrencilere hedef tahtasının üst noktasının yerden yüksekliğini sorması üzerine söz alan Ö1, "*4 metre, çünkü çapı 1 metre*" cevabını vermiştir. Bunun üzerine araştırmacı, 4'ün kaça eşit olduğunu sormuş ve Ö3, karekök 16 cevabını verirken Ö4 "*Ben cevabı buldum, cevap* $\sqrt{15}$." demiştir. Sınıfın diğer üyeleri de Ö4'e katılmıştır.

6.soruya geçildiği zaman teneffüs zili çaldığı için bu sorunun çözümü sınıfta gerçekleşememiştir. Araştırmacı bu soruyu ev ödevi olarak vermiştir. Teneffüste bu soruyu merak eden Ö4, araştırmacının yanına gelerek cevabın “9/4’ mü?” olduğunu sormuştur. 9/4 sayısının tam kısmının 2 ye eşit olduğunu söyleyen Ö4, 2 ile 4 arasında olduğunu söyleyerek cevabın 9/4 olması gerektiğini savunmuştur. Burada Ö4’ün sayıların kareköküne dikkat etmeden fikir yürüttüğü görülmüştür. Konuşmayı duyan Ö3 ise, bu sorunun cevabının 3,5 olabileceğini, çünkü “2 ile 4 arasında 3’lü sayıların olduğunu” söylemiştir. Araştırmacının bu sayıların kareköklü sayılar olduğunu ifade etmesi üzerine $\sqrt{2}$ ile $\sqrt{4}$ sayılarının 1 ile 2 arasında olduğunu düşünen öğrenciler cevabın 5/3 olduğunu söylemişlerdir.

Bu dersi takip eden matematik dersine geçilmeden yine tüm katılımcılarla 3.görüşmeler bitirilmiştir.

4.3.1 Ö1’in Dikey Matematikleştirme Süreci

Ö1’e ilk soruda 9 ile 10 sayıları arasında hangi sayının yer alabileceği sorulmuştur. Soruyu okur okumaz Ö1 doğru cevap vermiştir. Bu anlamda katılımcının tam sayılarla tam-kare olmayan sayıların karekökünü karşılaştırabildiği ve gerekli değerlendirmeleri yapabildiği görülmüştür.

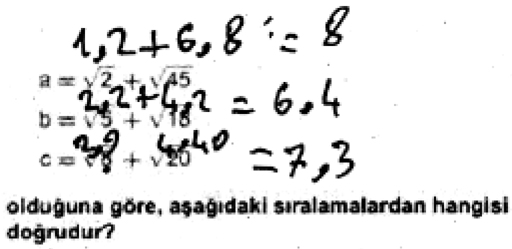
> “Ö1: Kök 87, öğretmenim
> A: Nasıl yaptın?
> Ö1: Öğretmenim 9’un karesi 81, 10’un karesi 100. Bunların arasında 87 var. Diğerleri ya küçük ya büyük olur.”

Ö1’e sorulan ikinci sorunun benzerini (tek bir tam-kare olmayan sayı için) sınıfta çözen araştırmacı, her iki sayının da tam-kare olmayan bir sayı olduğu durumda ne düşündüğünü araştırmak istemiştir.

> “Ö1: Bu sayıların karekökleri hep ondalık öğretmenim.
> A: Ondalık olması bir şeyi değiştirir mi, nasıl yapabiliriz yani?
> Ö1: Ondalıklı sayıları toplayacağız, sonra sıralayacağız onları.
> A: Hımm, tamam. Ne düşünüyorsun şu an?
> Ö1: Bunun hangi sayılar arasında olduğunu düşünüyorum ($\sqrt{45}$ *için*)
> A: Hangi sayılar arasında?
> Ö1: 6 ile 7 arasında ama 7’ye daha yakın. 6,80 yani 6,8 diyebiliriz öğretmenim.
> A: Tamam, yazabilirsin kâğıda bu arada.
> Ö1: Bu da 1 ile 2 arasında öğretmenim ($\sqrt{2}$ *için*). 1’e daha yakın ama. O yüzden 1,2 olabilir. Bunları toplarsan 8 ediyor.

A: Tamam.
Ö1: 2 ile 3 arasında karekök 5 öğretmenim.
A: Hıı
Ö1: 2'ye daha yakın
A: O zaman ne diyebiliriz ona?
Ö1: 2,20 diyebiliriz.
A: Tamam.
Ö1: 4 ile 5 arasında öğretmenim ($\sqrt{20}$ *için*) ama 4'e daha yakın. 4,20 diyebiliriz buna da. Hep yirmili gidiyor ama. (*Topluyor bu iki değeri*) 6,40 olur.
A: Tahmini aldın diyelim.
Ö1: 2 ile 3 arasında ($\sqrt{8}$ *için*) ama 3'e daha yakın o yüzden 2,90 diyebiliriz buna da.
A: Evet
Ö1: Bu da 4 ile 5 arasında($\sqrt{20}$ için) ama 4'e daha yakın. 4,40 olabilir. 7,30.
A: hıı
Ö1: D öğretmenim cevabı.
A: Neden?
Ö1: b hepsinden küçük öğretmenim (*6,40 olarak bulduğu cevap*), c de b den büyük öğretmenim (*7,30 olarak bulduğu cevap*), a da hepsinden büyük öğretmenim (*8 olarak bulduğu cevap*). Yani D şıkkı oluyor öğretmenim."

Ö1, tüm sürecin farkında olarak soruyu çözmüştür. Tüm sayıların tam-kare sayı olmadığını söyleyen katılımcı, ilk önce bu sayıların hangi sayılar arasında olduğunu bulmuş, daha sonra hangi sayıya daha yakın olduğunu belirlemek için, tam-kare sayılara uzaklıklarına bakmış ve tahmini bir değer hesaplamıştır. Böylece a, b ve c sayıları karşılaştırarak cevabın D şıkkı olduğunu söylemiştir. Bu anlamda Ö1'in tam-kare olan ve tam-kare olmayan sayıların karekökünü belirleme kazanımlarını edindiği, hatta tahmini bir değer olarak hesaplama yapabildiği görülmüştür (Şekil 38).



Şekil 38: Ö1'in Dikey Matematikleştirmedeki 2.Soru İçin Çözümü

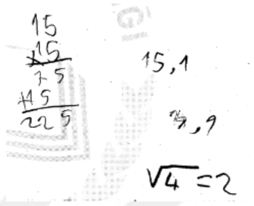
Ö1, üçüncü soruya geçmiş ve düşüncelerini araştırmacıyla paylaşmıştır. 3.soruda buzdolabına asılan bir süsün yaklaşık olarak yerden yüksekliğinin ne olabileceği sorulmuştur.

"Ö1: Bi tane süs yapıştırmışlar dolabının üst kısmına. Yerden yüksekliğini soruyor. Hangisi olabilir diye soruyor.
A: Tamam ne düşünüyorsun?
Ö1: Tam tepeye asmamışlar bunu öğretmenim. Bence bu yarısı öğretmenim.
A: Hıı, tepe olsa ne değişirdi?
Ö1: Sayılar değişirdi öğretmenim.
A: Nasıl yani? Tepede olsa ne olurdu?
Ö1: 0,5 olurdu öğretmenim.
A: Ne 0,5 olurdu?
Ö1: Öğretmenim siz şurayı mı soruyorsunuz yoksa şurayı mı?
A: Ora olsa ne olur ora olsa ne olur? Onlar arasındaki fark nedir?
Ö1: Burası üst kısmı yanı şey değil ..
A: Yani öndeki bu çizgi olsa ne olur, arkadaki bu çizgi olsa ne olur?
Ö1: Bunun aynısı olur burda olsa.
A: O zaman neden hangisini sorduğumu sordun bana ikisi de aynıysa. Demek istediğimi anlatabildim mi?
Ö1: Anladım öğretmenim. Burası 1,5 metreymiş. 1,75 ediyor.
A: Hangisi?
Ö1: Bunun yarısı toplarsak.
A: Yani yaklaşık olarak 1,75 metre yukarda mı diyorsun?
Ö1: Evet öğretmenim.
A: Sonra ne düşünürsün?
Ö1: 3 öğretmenim cevabı *(karekök 3 olan cevabı göstererek)*
A: Nedeen?
Ö1: Bu sayı 1 ile 2 arasında.
A: hıı
Ö1: Ama 2'ye daha yakın. O zaman 4'e daha yakın olan olmalı. Bu da 4'e daha yakın.
A: Neden o zaman karekök 2 olmuyor?
Ö1: Neresi öğretmenim?
A: Yani cevap A şıkkı neden olmuyor? O da 1 ile 2 arasında.
Ö1: Amaa o 4'e daha yakın değil öğretmenim, 1'e daha yakın. O yüzden cevap B olur."

Ö1, bu süsün yerden yüksekliğini yaklaşık olarak 1,75 m olarak almış, bu uzunluğun 1 m ile 2 m arasında olduğunu fakat 2 m ye daha yakın olduğunu, bu yüzden şıklardaki sayılardan hangisinin 1-2 aralığında ve 2'ye daha yakın olduğunu araştırmıştır. Bu anlamda $\sqrt{3}$'ün $\sqrt{4}$'e daha yakın olduğunu ve cevabın $\sqrt{3}$ olması gerektiğini söylemiştir. Araştırmacı $\sqrt{2}$'nin de bu aralıkta olduğunu neden onu seçmediğini sorduğunda $\sqrt{2}$'nin 1'e daha yakın olduğunu, kendisinin 2'ye daha yakın bir sayı aradığını bu yüzden $\sqrt{3}$ olması gerektiğini söylemiştir. Bu durum Ö1'in kavramı nesne düzeyinde anlamlı şekilde oluşturduğunu göstermektedir. Görüşmenin devamında diğer probleme geçilmiş ve bu problemde her iki kazanımı bir bağlam içinde ne kadar anlamlı kullanabildikleri görülmek istenmiştir. Bu süreçte Ö1 problem cümlesini anlamakta zorlanmış, yuvarlamanın anlatıldığı bölüm onun zihnini karıştırmıştır. Katılımcı, “virgülden sonrası silinir” kısmının sadece onda birler basamağı 5’ten küçük sayılar için geçerli olduğunu varsaymıştır.

> “Ö1: Öğretmenim bunlar ayrı sayı mı yoksa ondalıklı sayı mı bu ikisi? *(12,54 sayısı için soruyor)*
> A: Ondalık gösterimde sayı. Çünkü neyden bahsediyor bak soru, virgülden sonraları yuvarlama yapıyor.
> Ö1: *(birazcık daha düşünüyor)* 13 oluyor o zaman öğretmenim bu 12,54. Bu ondalığı kalıyor ama.
> A: Nasıl kalıyor ama?
> Ö1: Çünkü 5, 5’ten küçük değil öğretmenim. Burada 5’ten küçük ise birler basamağı aynen bırakılarak virgülden sonraki kısım silinir diyor. 13,54 olur o zaman.
> A: Ama hani virgülden sonraki kısım silinir diyordu?
> Ö1: 5’ten küçük değil ki öğretmenim.
> A: Tamam 5’ten büyükse ne oluyor?
> Ö1: Birler basamağı artırılıyor, 13 oluyor o zaman burası.
> A: Tamam, sonrası ne yapıyor?... Sen şurada ne demek istiyor bana anlatır mısın?
> Ö1: 5 veya 5’ten büyükse birler basamağı bir arttırılıyormuş öğretmenim.
> A: Birler basamağı neresi?
> Ö1: 2. 13 oluyor işte. 3 oluyor yani.
> A: Tamam. Sonra?
> Ö1: 5’ten küçük değil ki öğretmenim bu 5 sayısı.
> A: Evet değil. 5’ten büyük.
> Ö1: O zaman 13,54 olarak kalmıyor mu öğretmenim? Ondalığı niye silelim?
> A: Kuralı öyle vermemiş mi?
> Ö1: Tamam da öğretmenim, 5, 5’ten küçük değil ki.
> A: 5’ten küçük olduğu zaman mı sadece silinebileceğini düşünüyorsun?
> Ö1: Evet, öğretmenim. Burada öyle yazıyor.
> A: Beraber okuyalım o zaman soruyu. Bakalım ne diyor?
> Ö1: *(soru beraber okunuyor)*. Artırdım öğretmenim işte 13 oluyor. Ama virgülden sonrası da 54 olur.
> A: Neden öyle düşünüyorsun?
> Ö1: 4’te var ama öğretmenim orada.
> A: Sana 4’e mi bak diyor, yoksa virgülden sonraki ilk sayıya mı bak diyor?
> Ö1: O zaman burası 13 oluyor öğretmenim.”

Problem cümlesini sonunda anlayabilen Ö1, problemi çözmeye devam etmiştir. 226 sayısını bağlamdaki gibi makineye soktuğunu düşünen Ö1, bu sayının tam-kare bir sayı olmadığını görünce bu sayının hangi sayılar arasında olduğunu bulmuştur. 15’in karesi olan 225’e daha yakın olduğunu söyleyen Ö1, bu sayının karekökünü yaklaşık olarak 15,1 olarak almış, onda birler basamağındaki rakamın 5’ten küçük olmasından dolayı virgülden sonraki kısmı silmiştir. Daha sonra 15’in karekökünü alan katılımcı, bu sayıyı 3 ile 4 arasında hatta 4’e daha yakın olarak belirlemiş, yaklaşık değeri için 3,9 demiştir. Onda birler basamağındaki sayının 5’ten büyük olmasından dolayı birler başmağındaki sayıyı 1 artırarak bu sayıyı 4’e yuvarlamış ve son olarak 4’ün karekökünü 2 olarak belirlemiştir (Şekil 39).



Şekil 39: Ö1’in Dikey Matematikleştirmedeki 4.Soruya Cevabı

Görüşmedeki soru ve problemleri bitiren Ö1 ile diğer açık uçlu sorulara geçilmiştir. Ö1’e karekök içindeki bir sayının negatif olup olamayacağı sorulmuştur.

> “Ö1: Olur öğretmenim.
> A: Nasıl olur, bana anlatabilir misin?
> Ö1: Böyle olur öğretmenim *(-$\sqrt{36}$ yazarak)*
> A: Ne olur bunun sonucu?
> Ö1: -6 olur öğretmenim.
> A: Peki bu eksi karekök içinde mi?
> Ö1: Dışında öğretmenim.
> A: Ben ne sordum peki?
> Ö1: İçinde olabilir mi?
> A: Evet, içinde olabilir mi?
> Ö1: Olamaz öğretmenim.
> A: İçinde olsa nasıl yazılması gerekirdi? Neden olamaz?
> Ö1: -6 olsa bile -6’nın karesi 36 olur. Eksiler artıya dönüşüyor çarpılınca. O zaman bu sayıyı vermiyor 36’yı.
> A: Birazcık daha anlatabilir misin, tam anlayamadım?
> Ö1: İki negatif sayı çarpılınca pozitif sayı oluyor öğretmenim. İşaretleri artıya dönüşüyor öğretmenim. O yüzden içinde eksi olamaz öğretmenim.
> A: Yani içindeki sayılar nasıl sayılar oluyor?
> Ö1: Doğal sayılar.. yok doğal değil. Pozitif sayılar.”

Ö1’in karekökü, kavram olarak yapılandırdığı ve *nesne* olarak kullanabildiği, üzerinde değerlendirmeler ve yorumlar gerçekleştirebildiği görülmüştür.

“A: Peki, başka soruya geçelim. -$\sqrt{15}$ ile $\sqrt{15}$ sayılarını yazabilir misin?
Ö1: Nasıl öğretmenim?
A: -$\sqrt{15}$ ile $\sqrt{15}$ sayılarını yazabilir misin?
Ö1: *(doğru yazıyor)*
A: Peki bu eksinin dışarda olması ne demek?
Ö1: Bu ifadenin eksisi öğretmenim.
A: Peki içerdeki eksi ile dışardaki eksi farklı mıdır?
Ö1: Farklıdır öğretmenim.
A: Nasıl farklıdır sence?
Ö1: İçerde eksi olamaz ki.
A: Peki bana bu sayıları sayı doğrusunda gösterir misin?
Ö1: *(sayı doğrusu çiziyor, 0’dan 4’e kadar işaretliyor, 3 ile 4 arasında bir yer göstererek)* buradalar öğretmenim. 4’e daha yakınlar. Burada bir yerlerdeler.
A: Ney orada bir yerde?
Ö1: Kökü
A: Ne kökü?
Ö1: Karekökü.
A: Neyin kökü?
Ö1: 15. Karekök 15.
A: -$\sqrt{15}$ de mi orda?
Ö1: Evet öğretmenim, o da orda.
A: O zaman bu sayılar arasındaki fark ne?
Ö1: Bir fark yok öğretmenim. Tek ilk başta bunun başında eksi var. Sonra gidiyo ama.
A: Sonra gidiyo ama derken?
Ö1: Bu sayının şeyini alıyoken kökünü alıyoken eksi gidiyo. Artı oluyo.
A: Nasıl oluyor bana bir anlatır mısın? Mesela?
Ö1: İstediğim sayıyı yazabilir miyim?
A: Tabi tabi.
Ö1: -$\sqrt{36}$= 6^2 böyle olur öğretmenim.
A: O eksinin hiçbir anlamı yok yani?
Ö1: Bu eksi buraya gelse bile *(6^2 yi göstererek)* artı oluyor öğretmenim.-6’nın karesi. Bunları çarpınca artı oluyor öğretmenim.”

Ö1, sayıları yazarken ve yaklaşık değerini hesap ederken zorlanmamış, 15’in karekökünü sayı doğrusunda gösterebilmiş fakat bu sayıların birbirine eşit sayılar olduğunu dile getirmiştir. Katılımcının *negatif bir tam sayının karesi ile pozitif bir tam sayının karesinin negatif değerinin aynı sayılar olduğunu* düşündüğü için bu yanılgıya düştüğü anlaşılmıştır. Bu yüzden araştırmacı, katılımcıya tam sayılar üzerinden bu farkı fark ettirmeye çalışmıştır.

“A: O zaman sana iki tane soru soracağım. Bir alabilir miyim kalemi? $(-6)^2$ ve -6^2. Bana bunların kaça eşit olduğunu bulabilir misin?

Ö1: $(-6)^2 = 36$, $-6^2 = -36$ (Şekil 40)
A: Neden?
Ö1: Bu eksi işte bu kuvvet altının öğretmenim, bu da ifadenin parantez olduğu için öğretmenim. Bu iki.
A: Peki buraya baktığımız zaman *(*-$\sqrt{15}$ ile $\sqrt{15}$*)* bu eksi nedir?
Ö1: İfadenin eksisi.
A: Bu hangisine benziyor?
Ö1: Buna öğretmenim *($(-6)^2$ ifadesini göstererek),* çünkü bu ifadenin eksisi olduğu için öğretmenim.
A: Peki bana bunu anlatır mısın? Burada ifade dediğin ne oluyor? *($(-6)^2$ ifadesini göstererek)*
Ö1: -6 öğretmenim. Ama burada 6'nın karesi. Eksi buraya geliyor *(36'nın önünü göstererek)*
A: Peki tekrar buraya bakalım *(*-$\sqrt{15}$ ile $\sqrt{15}$*)* şimdi bu eksiyi yok saysak ne oluyor?
Ö1: 3,90. 3,9.
A: İçerisinde eksi olabiliyor muydu?
Ö1: Hayır.
A: Peki bu eksiyi koyduğumuzda bu içerde mi oluyor dışarda mı oluyor?
Ö1: Dışarda öğretmenim.
A: O zaman bu eksi kareköke dâhil mi?
Ö1: Değil. Öğretmenim. İçerde olsa dâhil olurdu ama zaten içerde olamaz öğretmenim.
A: O zaman bu hangisine benzer?
Ö1: Buna öğretmenim *(-6^2 ifadesini göstererek)*
A: O zaman cevabı ne olur onun?
Ö1: -3,9 olur öğretmenim.
A: Emin misin?
Ö1: Evet.
A: Aynı şey miymiş bunlar yani?
Ö1: Değilmiş öğretmenim."

Şekil 40: Ö1'in $(-6)^2$ ile -6^2 Sayılarının Değerlerini Gösterimi

Ö1, negatif bir tam sayının karesi ile bir sayının karesinin negatifi durumlarını birbirinden ayırt edebilmiş, karekök içinde negatif bir sayının olamayacağı bilgisi ile ilişkilendirerek bu eksi işaretinin tüm ifadenin negatifi olduğunu anlayabilmiştir. Bundan dolayı $\sqrt{15}$ ile -$\sqrt{15}$ sayılarının birbirinin toplama işlemine göre ters sayılar olduğunu dile getiremese de -$\sqrt{15}$ sayısının değeri için -3,9 diyebilmiştir. Bu anlamda katılımcının bu eylemi *içselleştirdiği* düşünülmüştür. Negatif olma, karekök ve kare kavramlarını bir arada kullanılabilirliğini ne kadar ilerletebileceğini görmek isteyen araştırmacı katılımcıya sorular sormaya devam etmiştir.

Katılımcının örneğinden de anlaşılacağı gibi (Şekil 41), karekökün içinin negatif bir sayı olamayacağından yola çıkan Ö1, bu durumda negatif işaretin kareköklü ifadenin önüne gelebileceğini, bu durumda bu ifadenin negatif bir değerde olduğunu, bu ifadenin tamamının karesi alındığında ise sonucun pozitif bir sayı çıkacağını örnekleyebilmiştir. Bu örneği doğru yapmış olması, katılımcının bu kavramları *içselleştirdiğini* düşündürmüştür.

$$(-\sqrt{64})^2 = +8^2$$

Şekil 41: Ö1'in Negatif, Karekök ve Kare (Üs) Kavramlarını Bir Arada Kullandığı Bir Örnek

Tüm sınıfa uygulanan hazırbulunuşluk testinde yer alan bir sayının ½.kuvvetinin sorulduğu soru katılımcılara bu görüşmede de sorulmuştur. Bu soruya hazırbulunuşluk testinde doğru cevap verebilen bir öğrenci olmamıştır. Bu anlamda bu sorunun 3.görüşmelerde tekrar sorulması ve katılımcıların bu bilgiyi ne kadar yapılandırabildikleri araştırılmak istenmiştir.

> "A: Peki, size uyguladığım bir test vardı. Orada bir soru vardı hatırlıyor musun bilmiyorum. $(2^2)^{1/2}$ ile $25^{1/2}$ gibi iki soru vardı.
> Ö1: Evet, böyle bir şey hatırlıyorum.
> A: Nasıl çözebiliriz bunları?
> Ö1: 2'nin 2.kuvveti 4 ediyor öğretmenim. 2 oluyor o zaman cevap.
> A: Nasıl oluyor 2?
> Ö1: 4'ü 2'ye bölüp 1 ile çarparsak 2 ediyor öğretmenim.
> A: O zaman şu ne eder? *(7 üzeri 2'nin ½.kuvveti)*
> Ö1: Ondalıklı çıkıyor öğretmenim, 49'u 2'ye bölersek
> A: Anladım peki şu ne olur? *(2 üzeri 3'ün 2.kuvveti)*
> Ö1: 64.
> A: Nasıl yaptın?
> Ö1: 2'nin 3.kuvveti 8 ediyor öğretmenim. 8'in de 2.kuvveti 64 ediyor öğretmenim.

A: Peki 7 üzeri 2'nin ½.kuvvetindeki gibi neden bölme yapmadın burda?
Ö1: Bu öyle değil ki öğretmenim
A: Peki, bunu *(2 üzeri 3'ün 2.kuvveti)* açmadan daha başka nasıl bulabilirsin?
Ö1: 2 üzeri 6 olur öğretmenim. Şu kuvvet 6 olur öğretmenim.
A: Neden?
Ö1: 3 ile 2'yi çarparız. Üssün üssü.
A: Yani üssün üssü olduğu zaman ne yapıyoruz?
Ö1: Bunların ikisini çarpıyoruz öğretmenim.
A: O zaman buraya *(7 üzeri 2'nin ½.kuvveti)* geri dönelim. Burada 2 ve ½ nedir?
Ö1: Üüsss
A: O zaman burda ne var?
Ö1: Çarpma. İkisini çarpcazz.
A: Çarparsak ne olur?
Ö1: ($\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$ yazıyor) bu oluyor öğretmenim.
A: Bu ne oluyor?
Ö1: 1 oluyor öğretmenim. 1.
A: İfadenin sonucu ne olur o zaman?
Ö1: yee… yediiii
A: Peki bu ne olur? (2 üzeri 2'nin ½.kuvveti)
Ö1: 2 olur öğretmenim."

Ö1, tam sayılarla üslü işlemleri çok rahatlıkla yerine getirmişken, bu işlem ½.kuvvet alma olduğunda katılımcı bunu, bir sayıyı 1 ile çarpıp 2'ye bölmek olarak algılamış ve üs almak yerine çarpma işlemi gibi düşünmüştür. Daha sonra yapılan ilişkilendirmelerle 7 üzeri 2'nin ½.kuvvetinin, 7'nin 1.kuvvetine eşit olacağını bulan katılımcı cevabın 7 olacağını ifade etmiştir. Araştırmacı ne kadar içselleştirdiğini görebilmek için bu bilgiyi farklı sorular üzerinden sorgulamıştır.

"A: Peki şunu soruyorum sana. ½.kuvvet ne uyguladı bu sorulara?
Ö1: Sayıların kendisinin çıkmasını sağladı öğretmenim.
A: Birazcık daha açar mısın?
Ö1: Mesela bunun sonucu 2. Bunla *(içerdeki sayı ile)* aynı sayı oldu.
A: Peki sana 50'nin ½.kuvvetini sorsam ne dersin bana?
Ö1: *(düşünüyor) (50 üzeri ½ yazıyor)*
A: Ne düşünüyorsun?
Ö1: Ondalıklı çıkıyor öğretmenim
A: Nasıl yani?
Ö1: 7,1 mesela öğretmenim.
A: Neden?
Ö1: 49, 50'ye daha yakın öğretmenim. O yüzden 7,1 olur.
A: Yani ½.kuvvet ne yapıyormuş sayılara?
Ö1: Onun kökünü bulduruyor öğretmenim."

Katılımcı, işlemleri zihinsel olarak yaparak doğru cevabı söyleyebilmiştir. Bu anlamda Ö1'in ½.kuvveti *üslü ifadelerle koordine ederek enkapsüle* etmiş ve bu kuvvetin sayının karekökünü buldurduğu bilgisine nesne olarak ulaşmıştır.

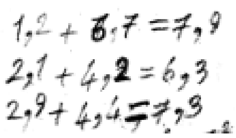
4.3.2 Ö3'ün Dikey Matematikleştirme Süreci

Ö3 ile gerçekleştirilen bu görüşme de katılımcının öğrendiği bilgileri ve yaptığı genellemeleri ne kadar kullanabildiği, bu bilgileri dikey matematikleştirme sürecine ne derece aktarabildiğine bakılmıştır. Bu amaçla katılımcıya önce test soruları sorulmuştur. Birinci test sorusunda diğer katılımcılar gibi hiç zorlanmadan 9 ile 10 sayıları arasında $\sqrt{87}$ sayısının olabileceğini söylemiştir.

> "Ö3: k sayısı 9 ile 10 arasında bir sayıymış. 9, $\sqrt{81}$ 'e eşit. Burası 10 ise, 100'ün kareköküne eşit *(*$\sqrt{100}$*)*.
> A: Evet.
> Ö3: 81 ile 100 arasında 87 vardır *(C şıkkını işaretliyor)*"

2. soruya geçen Ö3, yine bu sorunun çözümü içinde strateji geliştirmiş ve önce bu sayıların tam-kare sayı olmadığını, bu yüzden yaklaşık değerlerini hesaplaması gerektiğini söylemiştir. Tüm sayıların hangi tam-kare sayıların arasında kaldığını ve hangisine daha yakın olduğunu doğru şekilde belirleyerek yaklaşık tahminlerde bulunmuş ve son olarak bulduğu bu sayıları toplamıştır. Toplamların sonucuna göre sayıları sıralamış ve doğru cevabı bulmuştur.

> "Ö3: Küçükten büyüğe, en küçüğü 6,3. 1. Bu olması lazım *(b sayısını göstererek)*. Sonra bu, c. *(şıklardan götürmeler yapıyor)*. *(D şıkkını işaretliyor)* cevap bu olacak (Şekil 42)."



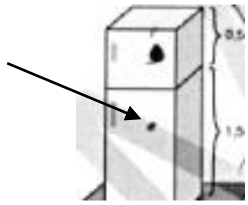
Şekil 42: Ö3'ün Dikey Maatematikleştirme 2.Test Sorusuna Cevabı

3. soruda ise buzdolabı süsünün yerden yaklaşık olarak ne kadar yükseklikte olduğunu bulan Ö3, bu uzunluğun en az 1,5 m ile en fazla 2 m arasında olabileceğini söylemiş ve bu aralıkta bir sayı bulmaya çalışmıştır. Yalnız bu uzunlukların şıklarda karekök cinsinden istendiğini görünce katılımcı bulduğu bu sayıların kareköklerini hesap

etmeye çalışmıştır. Bu anlamda 2'nin karekökünü 1 ile 2 arasında ama 1'e daha yakın bir sayı olarak 1,2 olarak hesaplamıştır. Bu süreçte araştırmacı katılımcıya bunu neden yaptığını sorarak hatasını fark ettirmeye çalışmıştır.

> "Ö3: …2 metre olsa… dolabın boyu yani…
> A: 2 metre olsa aşağıdakilerden hangisi olurdu cevap?
> Ö3: 1 virgüll…bu olurdu *($\sqrt{2}$ cevabını göstererek)*
> A: Neden o olurdu?
> Ö3: Soruyu anlamadım.
> A: Ne diyor soru o zaman anlamak için okuyalım birlikte en baştan.
> Ö3: *(sesli okuyor)* Bunla bu arasında bi yer olması lazım *(1,5 m ile 2 m den bahsediyor)*. O zaman ben buna şıklardan giderim.
> A: Tamam öyle yap.
> Ö3: Bu (*karekök 2*) 1'in karesiyle 2'nin karesi arasında. *(karekök 3)* Bu 1'in karesiyle 2'nin karesi arasında. Bu olabilir. Bu değil.
> A: Neden değil?
> Ö3: 2'nin karesiyle 3'ün karesi arasında. Dolabı geçmiş.
> A: Hımm
> Ö3: Bunlarda geçiyor. 3 şık eledim bunlardan biri büyük ihtimal bu *(karekök 3)*
> A: Neden?
> Ö3: 1,5'i geçmesi lazım.
> A: Nasıl bulabilirsin 1,5'u geçip geçmediğini?
> Ö3: Bunların tam virgüllüsünü bularak.
> A: Tamam bulalım o zaman.
> Ö3: 1,5'a daha yakın bu. B oluyor öğretmenim.
> A: O zaman a'nın değeri ne olur?
> Ö3: 1,2-3 falan olur.
> A: Peki 1,2 buzdolabında nereyi gösterebilir?
> Ö3: Buralarda, yani alt bölmeden bi yerlerde. Burdan aşağıda olacak *(1,5 metrelik yerden aşağıyı göstererek)*
> A: Peki bir yeri işaretlemeni istesem neresi olabilir?
> Ö3: Burası öğretmenim *(doğru kabul edilebilecek bir yeri işaretliyor)* (Şekil 43) "

Katılımcı doğru bir fikir yürütme gerçekleştirmiş olmasına rağmen çözümün devamını getirememiştir. Süsün 1,5-2 m arası bir yerde olması gerektiğini bulan Ö3, bu değer aralığında karekök ifadelerini bulurken zorlanmıştır. Aynı soruya şıklardan giden Ö3, C şıkkından sonraki her şıkkın eleneceğini çünkü bu karekök değerlerinin 2 m den büyük olduğunu ve dolabın yüksekliğini geçtiğini söylemiştir. A ve B şıklarının olabileceğini düşünen Ö3, A şıkkında yer alan $\sqrt{2}$ için 1,2 sayısına eşit olacağını ifade etmiş, bu uzunluğun ise süsün alt taraflarına bir yere geldiğini göstermiştir. Bu anlamda olabilecek olan tek cevabın B şıkkı olduğunu söyleyerek bu sorunun çözümünü de bitirmiştir.



Şekil 43: Ö3'ün Dikey Matematikleştirme 3. Soruda 1,2 m İçin Yer Gösterimi

Ö3 ile daha sonra diğer problemin çözümüne geçilmiştir. Problemi okuyan Ö3, ilk okumada sorunun ne demek istediğini anlayamamış ve tekrar okuma gereği duymuştur. Soruyu anlamasını engelleyen şeyin öğrencinin basamak adlarını ve basamak yerlerini bilmemesinden kaynakladığı görülmüştür. Hangi basamağın neresi olduğu konusunda bilgi eksikliği yaşayan Ö3, problemin açıklamasında verilen sayısal örnekler üzerinden olayı anlamaya çalışmış ve yuvarlama yapıldığını görmüştür. Problemi ve bilgiyi anladığını ifade eden Ö3, soruyu çözmeye başlamıştır.

> "Ö3: *(sesli okumaya devam ediyor)* Girilen sayıyı oku. 226. Girilen sayının karekökünü al. 226. 16 olabilir *(16'nın karesini buluyor)*. Bu olmadı. O zaman 15 *(15'in karekökünü alıyor)*. Virgüllü çıkacak.
> A: Ne olur o zaman?
> Ö3: 15,1 olur.
> A: Neden?
> Ö3: 226, 225'e çok yakın.
> A: Tamam, sonra?
> Ö3: Sonuç tamsayı değilse, değil, 5.adıma git, değilse 4.adıma git. Sonucu birler basamağına yuvarla ve 2.adımdan devam et. 15 oluyor o zaman.
> A: Nasıl oluyor?
> Ö3: 15,1 sayısı 15'e daha yakın.
> A: Tamam
> Ö3: Sayının karekökünü al. 15'in karekökü. Yok. 3 ile 4 arasında. Hangisine daha yakın? 3,9. 4 olur bu da.
> A: Nasıl 4 olduğunu düşündün?
> Ö3: 3,9 sayısı 4'e daha yakın.
> A: Tamam.
> Ö3: Sayının karekökünü al. 2. Sonuç tamsayı. 5.adıma gitcez. 2. Cevap B."

Sorunun açıklama kısmını anlayan Ö3, bir sorun yaşamadan soruyu çözmeye devam etmiş ve sonuca ulaşmıştır. Katılımcının karekök kavramı ile ilgili öğrenmelerinde herhangi bir zorluk yaşamadığı, nesne olarak elde ettiği kavramsal bilgiyi sorulara aktarabildiği, yaşadığı zorlukların ise problem bağlamından dolayı gerekli olan önceki bilgilerin eksikliklerinden kaynaklandığı ama bu eksikliklerini problem içeriğinde verilen örneklere bakarak yorumlarda bulunup çıkarımlar yapabildiği anlaşılmıştır. Daha sonra katılımcıyla açık uçlu sorulara geçilmiştir. Katılımcı kareköklü ifadenin içinin negatif olabileceğini düşünmüş ve bunu bir örnekle açıklamaya çalışmıştır.

> “Ö3: Zorlaşmasın diye içindeki sayıyı 25 yazdım.
> A: Tamam
> Ö3: *(-5×-5 yazdı)* Ama böyle olmuyor
> A: Neden olmuyor?
> Ö3: Aynı işaret. Aynı işaret çarpımı artı (+) oluyor. Cevap o zaman +25 oluyor. Olmuyor.
> A: Ne olmuyor?
> Ö3: Şeey karesi bulunamıyor
> A: Nasıl yani?
> Ö3: Şey negatifin karekökü bulunamıyor
> A: Neden bulunamıyor?
> Ö3: Aynı işaret artı olduğu için hep pozitif çıkıyor
> A: Peki kareköklü ifadenin önünde eksi olabilir mi?
> Ö3: Bu olur. 25’in karekökü 5. Eksi önünde olduğu için -5. Olur.
> A: Peki bu içerdeki sayılar nasıl sayılar oluyor o zaman?
> Ö3: Pozitif tamsayı olmak zorunda.
> A: Neden pozitif olmak zorunda?
> Ö3: Çünkü iki eksi yan yana gelince artı oluyor.”

Önce, karekök içinde negatif sayı olabileceğini düşünen Ö3, örnekle açıklama yaparken negatif sayıların çarpımlarının pozitif sayıya eşit olacağını görünce karekök içinde negatif sayı olamayacağını anlamıştır. Bu anlamda kareköklü ifadenin önünde eksi olabileceğini (örneğin -$\sqrt{25}$, -5’e eşit), fakat kareköklü ifadenin içinin negatif değerli olamayacağını, yani *karekök içindeki sayıların pozitif tam sayılar olacağını* dile getirmiştir. Daha sonra katılımcıya $\sqrt{(-4)^2}$’nin değeri sorulmuş, Ö3 -4’ün ilk önce karesini alarak karekök içinin değerini bulmuş, daha sonra bu sayının karekökünü hesap etmiş ve tüm ifadenin 4’e eşit olacağını söylemiştir (Şekil 44).

> “Ö3: İlk önce burayı buluruz. Negatifin çiftinci kuvveti pozitif olur. Burası +16 olur o yüzden. 16’nın karekökü 4**.”**

Şekil 44: Ö3'ün $(-4)^2$'nin Karekökünü Hesaplaması

Üslü ifadelerle ilgili bilgilerini doğru şekilde ilişkilendiren Ö3'e daha sonra ½.kuvvet sorulmuş ve yorumlaması istenmiştir. Ö3'te hazırbulunuşluk testinde bu kuvvetin, sayının yarısını almak olduğunu söyleyenler arasındadır. Şimdi ise bu kuvveti nasıl yorumladığına tekrar bakılmak istenmiştir. Soru hatırlatılınca Ö3, bu soruyu yine hazırbulunuşluk testinde çözdüğü gibi çözmüştür (Şekil 45).

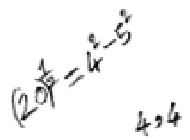
Şekil 45: Ö3'ün 16'nın ½.kuvvetini Hesaplaması

Katılımcının ½.kuvveti üslü ifadelerle ilgili bilgilerini kullanarak oluşturması için araştırmacı, tam sayı kuvvetleri olan sayılarla işlemler sormuştur. Bu sorularda üssün üssü olduğu zaman bu üslerin çarpım durumunda olduğunu dile getiren ve araştırmacının sorduğu soruyu çözebilen Ö3'ün bu bilgileri $(4^2)^{1/2}$'nin değerini bulurken de aktarması beklenmiştir.

> "A: O zaman 4 üzeri 2'nin ½.kuvvetinde üssün üssü var mı?
> Ö3: Üssün üssü var. Ama burada kesir olduğu için ilk önce parantezi yaptım *(4 üzeri 2'nin eşitini buldu).*
> A: Tamam bu yoldan gitsek, üssün üssünde üsler çarpılır kuralını buraya uygulasan ne yapabilirsin?
> Ö3: Bu 1 ediyor. 1.kuvveti oluyor.
> A: Hıı, o neye eşit oluyor?
> Ö3: 4'e eşit oluyor gene.
> A: Ama sen burada 8 buldun sonucu?
> Ö3: Burada parantezii yaptım amaaa
> A: Ha içinde 16 olsun ha içinde 4^2 olsun. Değişen bir şey olur mu?
> Ö3: Oluyor. Sonuç değişiyor. 16'nın yarısı 8."

Ö3 üssü tam sayı olduğunda üssün üssünü alırken üsleri çarpma kuralının, üssün tam sayı olmadığı rasyonel sayılarda geçerli olmayacağını düşünmüş ve bu düşünce, eğer tam sayı olmazsa sonucun farklı değer çıkacağını düşünmesine sebep olmuştur.

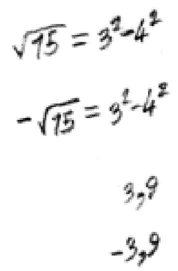
“A: Peki o zaman sana şunu sormak istiyorum. 16’nın ½.kuvveti ile 4 üssü 2’nin ½.kuvveti birbirine eşit midir, değil midir?
Ö3: Eşit.
A: Nasıl anladın?
Ö3: Zaten bu buna eşit. Bunu çevirdiğimizde *(4^2 kastediyor)* 16 ediyor. Aynı şey oluyor yani.
A: Tamam o zaman bunun az önce cevabını ne buldun? *(4 üzeri 2’nin ½.kuvveti)*
Ö3: Burda 8 buldum *(16’nın ½.kuvvetini göstererek).*
A: Ama sen bana az önce 4 üssü 2’nin ½. kuvveti ile 16’nın ½. kuvveti eşittir, aynı şeydir dedin. Şimdi diyorsun ki bana 4 üssü 2’nin ½.kuvveti 4’e eşit, 16’nın ½.kuvveti 8’e eşit. Nasıl oluyor bu? Burada bi çelişki yok mu?
Ö3: Yaaaa
A: O zaman bu çelişkiyi nasıl çözebiliriz?
Ö3: Bilmiyorum.
A: Peki, bunu sen ne diye düşündün az önce? (*16’nın 1/2.kuvvetindeki 1/2’yi göstererek*)
Ö3: Yarısı diye.
A: Peki bu kuvvet mi, yoksa ki yarısını bulma mıdır? Yani eğer yarısı sorulsaydı bunu nasıl yapardın?
Ö3: 2’ye bölerek.
A: Burada 2’ye mi bölmüş yoksa ½.kuvvetini mi almış?
Ö3: ½.kuvvetini almış.
A: O zaman 2’ye bölmek ile ½. kuvvetini almak aynı şey mi?
Ö3: Hayır.
A: O zaman ne olmalı?
Ö3: Burda da sonuç 4 çıkmalı *(16’nın ½.kuvveti için).* Ama olmaz. Nasıl olabilir?
A: Evet nasıl olabilir sence?
Ö3: Üslü sayıya çeviririm *(16’yı kastederek)*
A: Peki o zaman soruyu değiştirelim. 25’in ½.kuvvetini nasıl bulabilirim?
Ö3: Bu eşittir 5’in 2.kuvvetine *(5^2 yazdı).* ½.kuvveti
A: Ne olur o?
Ö3: 5 olur.
A: Nasıl 5 oldu?
Ö3: Bunları çarparsak *(2 ile ½’yi)* 1 olur. Birinci kuvveti oluyor. 5’in birinci kuvveti 5.
A: Yani o zaman 25’in 1/2.kuvveti ne olmalı?
Ö3: O da 5 olmalı.
A: O zaman ½.kuvvet sayılara ne yapıyor?
Ö3: Karekök varmış gibi karekökünü bulduruyor.
A: O zaman sana 20’nin ½.kuvvetini sorsam? Buna ne diyebilirsin?
Ö3: Virgüllü çıkması lazım. 4’ün karesiyle 5’in karesi arasında diyebilirim.
A: O zaman sonuç ne olabilir?
Ö3: 4,4 diyebilirim (Şekil 46). “



Şekil 46: Ö3'ün $20^{1/2}$ Sayısının Değerini Hesaplaması

16'nın ½.kuvvetini anlamlandırmakta zorlanan Ö3, 25'in ½.kuvvetini hesap ederken daha kolay şekilde cevabı bulmuş, hatta devamında ½.kuvvetin sayının *karekökü varmış gibi işlem yaptırdığını* söylemiştir. Bunun üzerine tam-kare olmayan bir sayının ½.kuvveti sorulmuş, katılımcı bu genellemeyi tam-kare olmayan sayılara da aktarabilmiş ve 20 sayısının ½.kuvvetinin 4,4'e eşit olabileceğini söylemiştir.

Son olarak Ö3'ten $\sqrt{15}$ ile -$\sqrt{15}$ sayılarını karşılaştırması istenmiştir. 15'in karekökünün pozitif, -$\sqrt{15}$'in ise negatif olacağını söylemesi kareköklü ifadeleri tam olarak *içselleştirdiğini* ve anlamlı bir şekilde yapılandırdığını göstermektedir. Bu sayıların değerleri için ise birbirlerinin ters işaretlisine eşit olacağını söylemiştir (Şekil 47).



Şekil 47: Ö3'ün $\sqrt{15}$ ile -$\sqrt{15}$ İçin Değer Hesaplaması

> "A: Peki, son olarak bana -$\sqrt{15}$ ile $\sqrt{15}$ sayıları arasında nasıl bir ilişki var, bana söyleyebilir misin?
> Ö3: Burda *(-$\sqrt{15}$)* hep eksidir, burda pozitif.
> A: Peki bana bunların değerlerini bulabilir misin?
> Ö3: Kök 15, 3'ün karesiyle 4'ün karesi arasında. Bu da aynı. Hangisine daha yakın? 3,9. Bu *($\sqrt{15}$ için).* Bu *(-$\sqrt{15}$ için)* -3,9.
> A: Yani nasıl ilişki var aralarında?
> Ö3: Tam tersi. Eksi alır."

Dikey matematikleştirme sürecinde Ö3'ün, *nesne* olarak kavramsallaştırdığı her iki kazanıma ait bilgileri diğer matematiksel durumlarda kullanabildiği ve anlamlı ilişkilendirmeler yaptığı ve bu ilişkilendirmeleri yorumlayabildiği görülmüştür.

4.3.3 Ö5'in Dikey Matematikleştirme Süreci

Ö5 ile görüşmeye diğer katılımcılarda olduğu gibi amacı katılımcıların sahip olduğu bilgileri sorulara ne derece aktarıp çözebildiklerinin görülmesi olan test sorularıyla başlanmıştır. Bu anlamda Ö5, zorlanmadan birinci ve ikinci test sorularını çözmüştür. Birinci soruda 9 ile 10 arasında olan sayının bulunmasını istenmiş ve katılımcı bu sayıların karelerini bularak istenilen sayının da bu kare sayılar arasında olması gerektiği çıkarımını yaparak cevabı söylemiştir. İkinci soruda ise sayıların tam-kare sayı olmadığını anlayan Ö5, bu sayıların yaklaşık değerlerini tahmin ederek çözüme başlamıştır. Ö5'te, tahmini değerler hesaplarken tam-kare olmayan fakat 2'nin tam katı olan bir sayının karekökünün hesabında bu sayının yarısı olacağı gibi bir düşünceye *(3'ün karekökü için 1,5 demesi)* sahip olduğu dikkat çekmiştir. Bu anlamda araştırmacı Ö5'e sorular yöneltmiştir.

"Ö5: Iımmm, 2'nin karekökü… yokturrr… yani tam değildir… 1'in karesi 1 olur. 2'nin karesi 4'tür. 1 ile 2 arasında olur.
A: Ne olabilir kendisi?
Ö5: Virgüllü bir sayı olacak. *(düşünüyor)* 2'ye yakın bir sayı olacak.
A: Nasıl buldun yakınlığı?
Ö5: 2'nin karekökü 2'den küçük olacak.
A: Evet
Ö5: 1'den de büyük olacak. 1,5 desem 3'ün karekökü olur.
A: 1,5 sayısı 3'ün karekökü mü?
Ö5: Evet öğretmenim.
A: 2'nin karekökü ne olur?
Ö5: O civarlarda bir şey olur
A: Tamam, sonra?
Ö5: 45'in karekökü de 6'nın karesi 36 ile 7 kere 7, 49 arasında bir sayı olacak.
A: Evet o zaman?
Ö5: Büyükten küçüğe sıralayacaz bunları. 18…4 kere 4, 16. 5 kere 5, 25. 4 ile 5 arasında olur. 8 de 2 kere 2, 4. 3 kere 3, 9. 2 ve 3'ün arasında olur. 20'nin karekökü de 4 kere 4,16. 5 kere 5, 25. 5 ve 4'ün arasında olur.
A: O zaman sonuç ne olur?
Ö5: O zaman onlara göre sıralama yapmamız lazım. Dur şuraya yazayım. Karekök 2. Bu taraf 1 olur *(sol tarafı)*. Bu taraf 2 olur *(sağ taraf)*. 1 ile 2 arasında olur 2'nin karekökü.
A: Tamam ne olabilir bu?
Ö5: *(düşünüyor)…*

A: 1 ile 2 arasında olduğunu nasıl buldun?
Ö5: 2'nin karekökü 1'den büyüktür.
A: Neden?
Ö5: *(düşünüyor, ofluyor)*
A: Evet ne düşünüyorsun, nasıl bulabilirsin?
Ö5: Virgüllü bir sayı çıkacak ama ne olacak onu bulamıyorum.
A: Tamam o zaman neler olabileceğini düşün.
Ö5: Bulamıyorum işte.
A: Tamam o zaman karekök 45'e yönelelim. O ne olur?
Ö5: O da tam çıkmıyor. Virgüllü olacak. Çünkü 7 desek, 7 kere 7, 49. 6 kere 6, 36. Aralarında bir sayı.
A: Peki ne olabilir aralarında bir sayı?
Ö5: 6,5 olsun o zaman.
A: Karekök 2 ne olur o zaman?
Ö5: 1,2.
A: Neden 1,1 ya da 1,5 ya da 1,6 değil de 1,2?
Ö5: Öğretmenim öyle söyleyesim geldi."

Katılımcının tam-kare olmayan sayıların kareköklerini hesap ederken bu sayıların hangi tam-kare sayılar arasında olduğunu bulmada zorlanmadığı ama yaklaşık değerlerini tahmin ederken nasıl yapacağını anlamlandıramadığı, bu sayıları rastgele seçtiği düşünülmüştür. Aralarında bir sayı dendiğinde aklına hep tam ortalarında kalan sayı geldiği için bu katılımcının ondalık gösterimlerle ilgili şemasında eksiklikler olduğu düşünülmüştür. Katılımcının hazırbulunuşluk test kâğıdı incelendiğinde ondalık gösterimli sayılarla işlemlerde de yanlışlıklar olduğu görülmüştür. Katılımcı, soruyu çözmeye devam etmiştir.

"Ö5: Karekök 5, 2 ile 3 arasında bir sayı olacaktı. Öğretmenim buna da 2,5 diyelim. 5'in kareköküne.
A: Neden 2,5?
Ö5: Tam ortasında diye öyle dedim.
A: Neyin tam ortasında?
Ö5: 2 ile 3'ün.
A: Nasıl buldun ortasında olduğunu?
Ö5: 2,5 ile 2,5'i çarparsam 5 olur .
A: Tamam?
Ö5: Karekök 18 de 4 kere 4, 4'ün karesi 16, 5 kere 5 de 25, 4 ile 5'in arasında olur. 18, 4'ün karesine daha yakın, o zaman 4,2 derim. Buna da 6 virgül kaç olur? 6,7 olur. 8'in kareköküne de 2 ile 3 arasında demiştim. 2'nin karesi 4. 3'ün karesi 9. 3'ün karesine daha yakın öğretmenim 8 de. Buna da 2,8 ya da 9 derdim ama 2,8 derdim. 20'nin, 4 üzeri 2, 16, 5 kere 5, 25, 4'ün karesine daha yakın."

Katılımcı önce tam-kare olmayan kareköklü sayıların yaklaşık değerlerini tahmin edememiş, soru üzerinde yoğunlaştıkça ne yapacağını anlayabilmiş ve her sayı için yaklaşık değerlerini tam-kare sayılara yakınlıklarına göre belirlemiştir. Bu işlemleri anlatırken katılımcının "2,5 ile 2,5'u çarparsam 5 olur." demesi, araştırmacının görüşmenin ilk başındaki düşüncesini doğrulamıştır. Bu katılımcının karekök kavramını nesne olarak oluşturmasına rağmen dikey matematikleştirme sürecinde diğer kavramlarla ilişkilendirirken bu kavramlardaki yanılgıların ve eksikliklerinin var olduğu görülmüştür.

> "Ö5: Burası 4,4 idi *(karekök 20 için).* Burası, burası kaçtı? 2 ile 3'ün arasında. 2,8 mi demiştim? *(not almadığı için unuttu)* Şunu şey yapayım da *(yazayım da).* 2,9 demiştim herhalde yok 2,8 demiştim. Topladım mı öğretmenim 6,12 olabilir mi?
> A: Nasıl topladın?
> Ö5: Öğretmenim 2 il 4'ü topladım virgülden öncekileri. Sonra da 8 ile 4'ü topladım virgülden sonrakileri.
> A: Emin misin?
> Ö5: Olmazsa 7,2 olur.
> A: Peki o nasıl olur?
> Ö5: Hani burda 12 var ya, 10'u bir tam olduğunu düşündüm bu tarafa verdim *(tam kısma eklediğini söylüyor).* 10'u geçti ya. O yüzden 7,2 olur.
> A: Anladım, sonra?
> Ö5: İlk bunu bi yazayım *(not alıyor).*
> A: Peki doğru olan 6,12 mi? Yoksa 7,2 mi?
> Ö5: 6,12 o zaman *(yaptığından emin değil, gülüyor)*
> A: Ben emin olduğun cevabı söylemeni istiyorum.
> Ö5: Bi şıklara bakalım."

Yaklaşık değerlerini bulduktan sonra ondalık gösterimdeki sayıları toplamaya geçen Ö5 burada da yaptıklarından emin olamamıştır. Ondalık gösterimdeki sayıların kesir kısımlarını toplarken (aynı basamak için) 10'dan büyük sayı elde ettiğinde bunu bir sonraki basamağa mı aktarması gerektiğini ya da o basamak için mi yazması gerektiği konusunda sorunlar yaşamış, cevap şıklarına bakarak ne yapması gerektiğine karar verebileceğini düşünmüştür.

Katılımcıyla daha sonra buzdolabı süsünün yerden yüksekliğinin sorulduğu 3. soruya geçilmiştir. Ö5, ilk önce buzdolabının alt ve üst kapak boyları olan 1,5 ve 0,5 m olan sayıların karekökünü bulmayı düşünmüş fakat eğer bunu yaparsa sayıların çok fazla küçüleceğini söylemiştir. Daha sonra ondalık gösterimli sayıların ayrı ayrı karekökünü bulmanın zor olacağını düşünmüş ve bu sayıların toplamının karekökünü bulmanın daha kolay olduğunu ifade etmiştir. Katılımcı, tüm bu işlemleri süsün yerden yüksekliğini bulmak için yaptığını söylemiş ama hesap ettiği şeyin buzdolabının tüm yüksekliğinin karekökü olduğunu fark edememiştir. Araştırmacı tam bu noktada devreye girmiş ve katılımcıya süsün yerden yüksekliğinin ne kadar olduğunu sorarak görüşmeye devam etmiştir.

"A: Yani süs nerde sence?
Ö5: 0,5 metrenin olduğu yerde?
A: Peki yerden yüksekliği ne olacak?
Ö5: Iım toplamımız 2. 2 metreye yakın bir yerde olacak.
A: Yüksekliğimiz 2 metre olsaydı süs nerde olurdu?
Ö5: 2 metre olsaydı buzdolabının en üstünde olurdu.
A: Peki uzaklığı ne olabilirdi?
Ö5: 2 metre olurdu.
A: Daha başka ne olabilirdi?
Ö5: *…(düşünüyor)* öğretmenim şurdaysa 1,8 metre olabilirdi.
A: Nasıl düşündün 1,8'i?
Ö5: Öğretmenim en sütte olsaydı 2 metre olurdu. Ama bu birazcık aşağıda. O zaman 2'den küçük. 1,8 olabilir o yüzden.

Katılımcının burada süsün yeri ile ilgili doğru bir yorum yaptığı görülmüştür. Bunun üzerine araştırmacı, katılımcının problemin devamında nasıl bir çözüm geliştireceğini görmek için sorular sormaya devam etmiştir.

A: Peki o zaman aşağıdakilerden hangisi olabilir?
Ö5: Karekökünü bulmam lazım.
A: Hangisinin?
Ö5: Bu sayıların *(cevap şıklarından bahsediyor).* 2'nin karekökü…
A: Ne düşünüyorsun 2'nin karekökü ile ilgili?
Ö5: 1'den büyük olacak. 2'den de küçük olacak.
A: Neden 2'den küçük olacak?
Ö5: 2'nin karekökünü buluyoruz zaten.
A: Ne olabilir o zaman yaklaşık değeri?
Ö5: 1,2.
A: Peki buzdolabında neresi olur 1,2?
Ö5: Öğretmenim şurlarda bi yer olabilir *(alt dolabın yarısını gösteren bi yeri işaret ediyor).*
A: Neden orası?
Ö5: Öğretmenim zaten 1,5 burası. 4, 3, 2 *(onda birler basamağını bir azaltarak ilerliyor aşağıya doğru)* 1,2 de buralarda bi yerlerde olur.
A: Peki o zaman?

Ö5: O zaman 1,8'in yeri de burada işte. 3'ün karekökünü bulurum. 1'den büyük olacak 2'den de küçük olacak çünkü 2 kere 2, 4'ten küçük olacak. 1,5 derim. 6'nın karekökü…
A: Neden 6'ya geçtin?
Ö5: Ah beş varmış, 5'in karekökü 2'nin karesi 2 kere 2, 4. 3'ün karesi 3 kere 3, 9. 2 ile 3 arasında olacak.
A: Ne olur o zaman?
Ö5: 2,5 olsun.
A: Nerede olur buzdolabında 2,5?
Ö5: 2,5…aşıyor herhalde yaaa… yanlış mı yaptım?
A: Bilmem neden emin değilsin? Neyi yanlış yaptığını düşünüyorsun?
Ö5: 2,5'in yerini bulcam ya, bu sayılara göre mi bulcam onu bilemedim.
A: Nasıl yani bu sayılar dediğin ne?
Ö5: Burası 1,5 ya *(alt dolaptan bahsediyor)*, burası da 0,5 *(üst dolabın uzunluğu)*. 2,5 burayı aşıyor. O zaman bu olamaz.
A: Kök 6 olabilir mi?
Ö5: O daha da büyük çıkar o zaman.
A: O zaman bu sorunun cevabı yok mu?

Ö5, A şıkkından başlayarak kareköklü ifadelerin tek tek değerlerini bulmaya çalışmıştır. Düşüncelerine bakıldığında Ö5'in tam-kare olmayan sayıların karekökünün hangi doğal sayılar arasında olduğunu belirlemede başarılı olduğu görülmektedir.

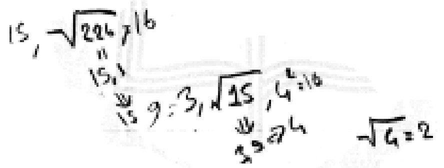
Ö5: 3 olabilir öğretmenim.
A: Ama ona 1,5 demiştin. 1,5 olsa nerde olmalıydı?
Ö5: Burda *(alt dolabın bitimi)*, o zaman karekök 2 olsa ama o da az çıkıyor.
A: O zaman? Ne düşünüyorsun?
Ö5: Ben hani 1,5 diyorum da buraya gelcek diyorum ya bunu bulmayı yanlış yapıyorum galiba.
A: O zaman sınır çiz kendine. Ne olmalı ne olmamalı?
Ö5: Ben bu kare şeyleri *(buzdolabının tamamının boyundan bahsediyor)* 2 diye hesapladım o zaman bunları görmücem bir kere.
A: Nasıl yani?
Ö5: Öğretmenim burası 1,5 ya. Bende 3'ü 1,5 olarak buluyorum. Buna göre uyarlıyorum *(dolabın alt kapağının uzunluğu olan 1,5 metreyi göstererek).*
A: Sen 3'ü mü 1,5'e göre uyarlıyorsun?
Ö5: hı hı.
A: 2'yi neye uyarlıyorsun o zaman?
Ö5: Onu bulamadım işte.
A: Ne düşünüyorsun şu an?
Ö5: 2'nin karekökünü düşünüyorum.
A: Ne olacak 2'nin karekökü?
Ö5: 1 ile 2 arasında olacak.
A: 1'e mi daha yakın olacak 2'ye mi?
Ö5: 1'e.

A: O zaman ne olabilir?
Ö5: 1,2.
A: 1,2 buzdolabında neresi olabilir?
Ö5: 1,2 olursa, öğretmenim, burası 1,5 *(alt dolabın uzunluğundan bahsediyor)* şurlarda bir yerde olur *(alt tarafa çok yakın yerleri göstererek).*
A: Peki o zaman karekök olmaz. O zaman cevap yok mu bu sorunun?
Ö5: Var daa…
A: Varsa ne?
Ö5: 5 olabilir o zaman.
A: Nasıl olabilir 5?
Ö5: B ile C arasında kaldım. C desem geçiyor, B desem burada kalıyor *(1,5 metreyi göstererek)*
A: A desen?
Ö5: A desem de *(kök 2*) 1,2 oluyor o da buralarda kalıyor *(alt kısmı göstererek)*
A: Ne olacak?
Ö5: …
A: Cevabın var mı?
Ö5: Yok."

Buzdolabı süsünün 1,5 m den yukarı 2 m den aşağı bir yerlerde olduğunu belirleyen ama bu çıkarımı cümleye dökemeyen, bu uzunluğun değerini yaklaşık olarak 1,8 m olarak alan ve şıklara bakarak bu sayıların kareköklerini hesap edip hangisinin cevabı 1,8 m olarak çıkarsa cevabın o olacağını düşünen Ö5, sayıların yaklaşık değerlerini hesap ettikten sonra hiçbir sayının değerinin 1,8 olarak çıkmadığını görünce yanlış yaptığını düşünmüştür. Katılımcı, burada yaklaşık değer aldığını anlayamamıştır. Burada katılımcının araması gereken sayı kesin olarak 1,8 değil; 1,5 ile 2 arası bir sayıdır. Fakat Ö5'in kendisine bu aralıkta rastgele bir sayı seçmesi ama bu seçtiği sayının değerinin değişebileceğinin farkında olmaması katılımcının "yaklaşık değer" kavramıyla ilgili sorunlar yaşadığını düşündürtmüştür. Ö5, $\sqrt{5}$ ve sonrasındaki her sayının buzdolabını aşacağını söylemesine rağmen yine de bu sayıların cevap olabileceği ihtimalini yok etmemiştir. Bu anlamda katılımcının tam-kare olmayan sayıların kareköklerini hesap ederken yaşadığı zorlukların devam ettiği, sayıların hangi ardışık tam sayılar arasında olduğunu bulduğu ama yaklaşık değer hesaplamada zorluklar yaşadığını göstermiştir. Son olarak katılımcıya diğer problem sorulmuştur. Problemi okuyan Ö5, hesaplamalara başlamış, sorun yaşamadan problemi çözmüştür.

"Ö5: Bir sayı şey yapim, yakın. 18'in karesini alayım *(hesaplıyor)* 324. Çok büyük çıktı. Eee 15 ile 15'i çarpayım *(sonunun 5 olduğunu fark edince)* ya da 16 yapayım *(hesaplıyor)* 256 oldu. 15'i deneyeyim *(gülüyor)* bu da 225 oldu. Yani 15 ve 16 arasında olacak.

A: Yaklaşık değeri için ne dersin?
Ö5: Öğretmenim 15’e çok yakın o zaman 15,1.
A: Tamam sonra
Ö5: Sonucu tamsayıysa 5.adıma git, değilse 4.adımdan devam et. Tam değil. 4.adımdan devam et. Sonucu birler basamağına yuvarla. Bu da 15 olur.
A: Neden 15 olur?
Ö5: 1, 15’e daha yakın 16’ya daha uzak. 15’in karekökünü al. 15’in karekökü. Burası 4 burası da 3. 3 ile 4 arasında olacak. 4’ün karesi 16. Bu da 9. 4’e daha yakın o zaman 3,9.
A: Tamam
Ö5: Sayının karekökünü al. 3,9. Sonucu birler basamağına yuvarla. 4’e daha yakın 3,9. O zaman bu 4. Sonucun karekökünü al. 4’ün karekökü 2. 2 kere 2, 4. Tam sayı. Sonucu ekrana yaz. Yani 2 mi cevap?
A: Öyle mi?
Ö5: Sonucu ekrana yaz diyor. O zaman 2 (Şekil 48)”



Şekil 48: Ö5’in Dikey Matematikleştirmedeki 4. Soruya Cevabı

Daha sonra katılımcıyla açık uçlu sorulara geçilmiştir. Katılımcıya sorulan ilk soru karekök içinde negatif bir sayının olma durumudur. Ö5’te diğer arkadaşları gibi önce olabileceğini söylemiştir. Araştırmacının karekökü hangi amaçla kullandığını sorması üzerine “sayının kendi kökünü, sayının karesini, sayının kendisini” gibi ifadeler kullanan Ö5, bir tam sayının karesinin karekökünün o tam sayıya eşit olacağı açıklamasında bulunmuştur. Diğer taraftan bir örnekle açıklamaya çalışan Ö5, aldığı sayının kendisiyle çarpımının sonucunun pozitif olacağını gördüğünde dediği cümlenin yanlış olduğunu anlamıştır.

“Ö5: Mesela öğretmenim 16, 4’ün karesidir, bu işaret de bize nasıl desem 4’ün karesini… yani tam tersi oluyor işte öğretmenim.
A: O zaman karekök içinde negatif olabilir mi?
Ö5: Olamaz.
A: Neden az önce olur dedin?
Ö5: Yanlış çıkıyor ama öğretmenim. Hepsi pozitif çıkıyor. Negatif olmuyor. Farklı sayılar çıkıyor.
A: O zaman ne diyebilirim karekök -16 için?

Ö5: *(düşünüyor)* o zaman eksi olmayacak.
A: Ne olmayacak eksi?
Ö5: Karekök içi
A: Neden olmayacak?
Ö5: Cevapta hata oluyor.
A: Cevapta hata olduğu için mi olamaz dedin, bunun mantığı nedir?
Ö5: İçini eksi aldığımız zaman -4'ün karesinden içini eksi yapayım -4 çarpı -4, pozitif 16 oluyor.
A: O zaman bu eksi ne olacak?
Ö5: O zaman eksiyi dışarı mı koyacaz?
A: Eksiyi dışarı koyarsan ne olur?
Ö5: Immm buraya koysam *(-$\sqrt{16}$ yazıyor)* işlemin sonucu eksii olur herhalde.
A: Bu ikisi arasındaki fark ne? İçinde ya da dışında?
Ö5: Ya yani nasıl desem şu 4'ün de eksi olduğunu ifade eder. İşlemin sonucunun eksi olduğunu ifade eder.
A: İşlemin sonucunu ifade ediyorsa o zaman ne olur -$\sqrt{16}$?
Ö5: Imm -4 olur.
A: O zaman karekök içinde eksi 16 olduğu zaman ne olur?
Ö5: Karekök içinde eksi 16 olsa… *(yine düşünüyor)* 4 mü olur?... ya da -4 mü olur?"

Kendi kendine konuşmaları sonucunda karekök içindeki sayının pozitif bir sayı olması gerektiğini, çünkü negatif te olsa pozitif te olsa sayıların çarpımlarının pozitif bir sayı olacağından dolayı karekök içinin pozitif olması gerektiğini söylemesine rağmen Ö5, karekök içini negatif almaya devam etmiş, karekök dışına negatif mi pozitif mi çıkacağı konusunda tereddüt yaşamıştır. Bu anlamda katılımcının karekökle ilgili öğrendiği bilgilerini dikey matematikleştirmeye aktaramadığı görülmüştür.

BEŞİNCİ BÖLÜM

V. SONUÇ, TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1 Sonuç ve Tartışma

Karekök kavramının GME temelli öğrenme ortamında nasıl oluştuğunun incelendiği bu çalışmada, öğrencilerin grup çalışması içerisinde kavramla ilgili ilişkiler ve kuralları matematikleştirme süreçleri desteklenmiştir. APOS teorik çerçevesi ile kavramların oluşumunun derinlemesine incelenmesi sağlanmaya çalışılmış ve muhtemel genetik çözümleme hazırlanmıştır.

Çalışmada uygulama öncesi oluşturulan genetik çözümleme ile uygulama sonucu görülen öğrencilerin zihinsel şemalarının birbirleriyle tutarlı olduğu tespit edilmiştir. Kavramların gerçek hayat durumları ile ilişkilendirilip bu bağlam çerçevesindeki problem durumları ile oluşturulan öğretim ortamının kavram oluşumunu genel olarak desteklediği görülmüştür. Katılımcıların karekök kavramını oluşturmada karşılaştıkları zorlukların sebebinin ise genel olarak bu kavramla hem formal hem de informal hayatta ilk defa karşılaşmaları, karekök kavramının doğası gereği irrasyonel bir sayı olması ve bu yüzden daha soyut olduğunun düşünülmesidir. Aynı zamanda karekök kavramı oluşumu için gerekli olduğu düşünülen ön bilgilerdeki eksikliklerin ve hataların da karekök kavramı oluşumunu zorlaştırdığı ve bu yüzden olumsuz yönde etkilediği görülmüştür. Ancak katılımcıların genel olarak tam-kare sayıların karekökünü kavramsallaştırabildiği ve tam-kare olmayan sayıların hangi iki pozitif tam sayı arasında olduğunu belirleyebildikleri görülmüştür. Dolayısı ile yapılan çalışmada katılımcıların bu durumunun hazırlanan öğrenme ortamından kaynaklandığı düşünülebilir. Bu bakımdan yapılan bu çalışmanın sonuçları GME'nin bazı kavramların öğretimindeki pozitif etkisini savunan çalışmaları (örneğin; Ayvalı, 2013; Cihan, 2017; Ersoy, 2013; Özkaya, 2016; Uça, 2014) destekler nitelikte olduğu söylenebilir. Ayrıca katılımcıların tam-kare tam sayıların karekökü ve tam-kare olmayan sayıların kareköklerini tanıdıkları ama karekök değerleri ile ilgili işlemler yaparken veya sayı doğrusunda gösterirken bu sayıların yerlerini veya yaklaşık değerlerini hesaplamada zorluk yaşayabildikleri tespit edilmiştir. Bu durum öğrencilerin irrasyonel ve rasyonel sayıları bilgi seviyesinde öğrendiği ama herhangi bir sayının irrasyonel ya da rasyonel sayı olduğunu anlamada sorun yaşadığını ifade eden (Kara ve Delice, 2011; Güven, Çekmez ve Karataş, 2011; Baştürk ve Dönmez, 2008; Özcan, 2004) araştırmaların sonuçlarıyla kısmen benzerlik gösterdiği söylenebilir.

Bu çalışmadan elde edilen sonuçlar tam-kare sayıların kareköküne ait sonuçlar, tam-kare olmayan sayıların kareköküne ait sonuçlar ve dikey matematikleştirme süreçlerine ait sonuçlar olmak üzere üç başlık altında incelenmiştir.

5.1.1 Tam-Kare Sayıların Karekökü Kavramını Oluşturma Sürecine Ait Sonuçlar

Tam-kare sayıların karekökü kavramını oluştururken başarı durumu iyi, orta ve ortanın altında-düşük olan üç katılımcı da *eylem* aşamasında verilen bağlamsal problemin görseline bağlı kalmışlardır. Eylem aşamasında hazırbulunuşluk düzeyi iyi olan katılımcı, alanın ölçümünün birim kare cinsinden değer alabileceği fikrinden yola çıkmış ve karenin alanının birim karelere ayrılarak bulunabileceği düşüncesinde olmuştur. Ancak bu düşüncesi bağlamdaki görsele bağlı kalmış ve sayısal bir verinin verilmediği ve sonucunun farklı değerler alabileceği bu modelleme probleminde ele alınabilecek farklı değerlerden sadece birini düşünerek tek bir sonuç elde etmiştir. Hazırbulunuşluk düzeyi orta olan katılımcı da benzer düşüncelere sahip olmakla birlikte problemde sayısal veri olmaması ve çözüm için kendisinin bir değer almış olması onu rahatsız etmiş, değişken kullanmanın daha anlamlı olacağını düşünmüştür. Hazırbulunuşluk düzeyi ortanın altında olan katılımcı ise diğer katılımcılar gibi düşünmesinin yanında alan ölçü birimlerinin tam olarak oluşturamamasından kaynaklı zorluklar yaşamıştır. Hazırbulunuşluk düzeyleri farklı olan bu üç katılımcının bağlamsal problemin çözümünde görsele bağlı kalmalarının ve eylem aşamasından süreç aşamasına geçmede zorlanmasının altında yatan ana sebeplerden birisinin karenin alanını hesaplarken alan kenar ilişkisinde alana bağlı olarak birim karelerin farklı sayıda olabileceğini düşünememelerinden, birim kavramını içselleştirememelerinden ve öğretim sürecinde kullanılan bağlamsal problemin çözümünde modelleme becerisine yeterince sahip olmadıklarından kaynaklandığı görülmüştür.

Katılımcıların bağlamsal problemde satranç tahtası altlığı olarak verilen karesel bölgenin kenar uzunluğunu bulmaya çalışırken farklı düşünmeler gerçekleştirdikleri görülmüştür. Alan ve çevre ölçümü, üslü ifade gibi konularda eksik/yanlış bilgilerinin olduğu düşünülen hazırbulunuşluk düzeyi düşük olan eylem aşamasındaki katılımcının, alanı bilinen bir karesel bölgenin kenar uzunluğunu bulmaya çalışırken karenin alan ölçüsünü 2'ye bölme gibi işlem gerçekleştirdiği görülmüştür. Bu katılımcının üslü sayıların değerlerini taban ile üssün çarpımı sonucunda bulunacağını bu yüzden işlemi tersine çevirmenin 2'ye bölerek sağlanacağını düşünmesi sebebiyle bu işlemi yaptığı tespit edilmiştir. Dolayısı ile ele aldığı birim kare sayısı ile kenar-çevre ve alan arasında ilişki kurmada ve bu durumu problemden bağımsız hale getirmekte zorlandığı tespit edilmiştir. Önce verilen karesel bölgenin alanının sadece tek bir değere eşit olabileceğini düşünen hazırbulunuşluk düzeyi yüksek olan katılımcı, daha sonra aldığı bu değerden elde ettiği kenar uzunluğunun katlarının da farklı değerler olarak düşünülebileceğini içselleştirmiş ve *süreç* aşamasına geçmiştir. Hazırbulunuşluk düzeyi düşük olan katılımcı kenar uzunluğu yerine alan ölçüsü ile ilgili düşünmeler gerçekleştirerek aldığı bu alan ölçüsü değerinin katları olan değerlerin de olabileceğini düşünmüştür. Fakat aldığı sayılar tam-kare sayılar olmadığı için alan ölçüsünden kenar uzunluğunu bulamamıştır. Hazırbulunuşluk düzeyi orta olan katılımcı ise verilen karesel şeklin kenar uzunluğuna bağlı olarak değişen alan ölçüsünün denklemini kurmuştur. Ayrıca bu süreçte katılımcılar almaları gereken sayının tam-kare sayı olması gerektiğini söz ile ifade etmeseler de iki aynı sayının çarpımı ya da bir sayının karesi olan sayıları alan değeri olarak seçmeleri gerektiğinin farkına varmışlar ve bu bilgiyi ilerleyen süreçlerde çarpanlara ayırma, üslü ifadeler veya tekrarlı çarpım gibi konularla *koordinasyon* kurarak tam-kare tam sayıları bulmuşlardır.

Süreç aşamasında katılımcıların verilen karesel bölgedeki birim kare sayısıyla karenin kenar uzunluğunu genel olarak ilişkilendirebildiği, bu kavramların farklı şeyler belirttiğinin farkında olduğu, alınan birim karelerin büyüklüklerine göre kenar uzunluğunun değişebileceğini ifade edebildiği ama bu bilgileri verilen problem bağlamı üzerinde aktif olarak kullanamadıkları görülmüştür. Bu bilgiyi tam olarak içselleştirebilen katılımcının verilen karesel bölgenin kenar uzunluğu için farklı değerler söyleyebilen ve bu değerlere göre değişen alan ölçüsünü de hesap edebilen hazırbulunuşluk düzeyi iyi olan katılımcı olduğu görülmüştür. Ayrıca süreç aşamasında her üç katılımcının da, bir sayının karesini almak ile bir sayının karekökünü bulmayı zaman zaman karıştırdıkları ve bunu çoğu kez dikkatsizlikle yaptıkları görülmüştür.

Üslü ifadelerin karekökünün yorumlanmasında ilginç şekilde hazırbulunuşluk düzeyi iyi olan katılımcının bu durumu yorumlamakta zorluk yaşadığı ve önce üslü ifadenin karekökünün bulunamayacağını düşündüğü görülmüştür. Orta düzey olan katılımcı ise zorluk yaşamadan karekök içindeki üslü sayının değerini bularak, bulduğu sayının karekökünü almış ve denk ifadelerin kareköklerinin eşit olacağı bilgisini de içselleştirmiştir. Hatta bu katılımcı bir sayının karesinin karekökünün bulunmasında işlem yapmaya gerek olmadığını, bu işlemlerin birbirinin tersi durumları belirttiğini ifade etmiştir. Hazırbulunuşluk düzeyi düşük olan katılımcının ise herhangi bir yorumda bulunmadığı görülmüştür. Ayrıca, üç katılımcının da 1'in karesinin kendisine eşit olduğu için tam-kare sayı olarak alınamayacağı ve dolayısı ile karekökünün de olmayacağını düşündükleri görülmüştür. Daha sonra ise katılımcıların kurdukları koordinasyonlar sayesinde karekök kavramını bir tam-kare sayının hangi sayının karesi olduğunu bulma durumu olarak içselleştirdikleri ve kare üsse sahip sayıların kareköklerinin tabanlarındaki sayıya eşit olduğu bilgisini *genelleştirebildikleri* görülmüştür.

Katılımcılarla gerçekleştirilen klinik görüşmeler sonucunda tam-kare sayıların karekökü kavramını; hazırbulunuşluk düzeyleri farklı üç katılımcının da *nesne düzeyinde* kavramsallaştırdığı, ancak kavramsallaştırmada birim, alan-kenar ilişkisi, çevre-kenar ilişkisi, üslü ifadeler ve çarpanlara ayırma ile koordinasyonların oldukça önemli olduğu ve katılımcıların karekök kavramı için "karesini silme, alandan kenarı bulma, karesini almanın tersi" gibi *fenomenlere* sahip olduğu görülmüştür.

5.1.2 Tam-Kare Olmayan Sayıların Karekökü Kavramını Oluşturma Sürecine Ait Sonuçlar

Tam-kare olmayan sayıların karekökü kavramını oluştururken katılımcılar öncelikle tam–kare sayıların karekökünün eylem aşamasındaki gibi, oluşturulan bağlamsal probleme alınan tek bir değer üzerinden sonuç getirmişlerdir. Öncelikle tam-kare sayıların karekökü bilgisini de-enkapsüle ederek tek bir değer üzerinden tam-kare olmayan sayıların kareköklerinin hangi iki doğal sayı arasında olduğunu söylemişlerdir.

Rasyonel sayıların ondalık gösterimleri ile ilgili bilgileri diğerlerine göre daha anlamlı bir şekilde oluşturan hazırbulunuşluk düzeyi iyi olan katılımcı, tam-kare olmayan tam sayıların hangi iki doğal sayı arasında olduğunu düşünürken bu sayılar arasındaki sayıları da üzerine düşünerek rasyonel sayılarla koordinasyonlar gerçekleştirmiştir. Bu katılımcı koordinasyon sürecinde rasyonel sayıların ondalık gösterimleri ile çarpma konusunda hatalar yapmış, ancak bu hatalar işlemsel hatalar olduğu için süreci fazla zorlaştırmamıştır. Benzer şekilde hazırbulunuşluk düzeyi orta olan katılımcının da tam-kare sayılar ve bu sayıların karekökleri ile ondalık gösterimler arasında *koordinasyon* kurduğu görülmüştür Bu katılımcıların tam-kare olmayan sayıların karekökünün hangi doğal sayılar arasında kaldığını bulabildikleri, hangi doğal sayıya daha yakın olduğunu tespit edebildikleri hatta tahmini değerlerini hesaplayabildikleri tespit edilmiştir. Bu anlamda tam-kare olmayan sayıların karekökünü kavramsallaştırabildikleri düşünülmüştür. Elde edilen bu sonucun Sirotic'in (1998), tam-kare olmayan sayıların karekökünü bulurken öğrencilerin ve hatta bazı öğretmen adaylarının da bu sayıların büyüklüklerine karar vermekte zorlandığı sonucu ile fazlaca örtüştüğü söylenebilir.

Hazırbulunuşluk düzeyi düşük olan katılımcının tam sayı olmayan sayılar üzerinde işlemler yapmakta zorlandığı ve ondalık gösterimleri ifade ederken ve bu gösterimde işlemler yaparken yanlışlıklar yaptığı görülmüştür. Ancak yönlendirmelerle tam-kare olmayan tam sayıların hangi iki doğal sayı arasında olduğunu fark edebilmiştir.

Tam-kare olmayan sayıların karekökünün hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirlerken katılımcıların iki doğal sayı arasında sonsuz sayıda sayı olduğunu, bu tam-kare olmayan sayıların kareköklerinin de her zaman bu iki doğal sayı arasında olacağı bilgisinin *enkapsülasyonunu* sağlayabildikleri belirlenmiştir. Aynı zamanda tam-kare olmayan sayıların kareköklerinin değerlerini sayı doğrusunda doğru bir şekilde gösterebildikleri görülmüştür.

Katılımcılarla gerçekleştirilen klinik görüşmeler sonucunda tam-kare olmayan sayıların karekökünün hangi iki doğal sayı arasında olduğunu belirleyebildikleri, bu bilginin genellemesine vardıkları ve bilgiyi *nesne* düzeyinde oluşturabildikleri görülmüştür. Bu süreçte ise rasyonel sayı, ondalık gösterimleri ve bunlarla işlemlerin koordinasyonunun oldukça önemli olduğu sonucuna ulaşılmış ve katılımcıların "virgüllü sayıların karekökü, tam sayı çıkmayan sayıların karesi" gibi fenomenlere sahip olduğu görülmüştür.

5.1.3 Dikey Matematikleştirme Süreçlerine Ait Sonuçlar

Katılımcıların tam-kare ve tam-kare olmayan sayıların karekökü bilgilerini ne kadar anlamlı öğrendikleri, bu kavramlarla ne düzeyde ilişkilendirmeler ve işlemler yaptıklarını ortaya koyabilmek için dikey matematikleştirme süreçleri incelenmiştir. Çalışmanın sonucunda hazırbulunuşluk düzeyi iyi ve orta olan katılımcıların tam-kare olmayan sayıların kareökleri ile toplama işlemi yaparken bu sayıların yaklaşık değerlerini bulabildikleri ve bu tahmini değerlerle işlem yapabildikleri görülmüştür. Ancak hazırbulunuşluk düzeyi düşük olan katılımcının bu sayıların hangi pozitif tam sayıya daha yakın olduğunu belirlerken ondalık sayılarla ilgili eksiklikleri düşüncelerini yine etkilemiş ve işlemlerin sonuçlarını bulmakta zorlanmasına ya da daha genel cevaplar vermesine neden olmuştur.

Katılımcıların tam-kare olmayan sayıların karekökü ile tam kare olan sayıların karekökü kavramlarını farklı bir problem bağlamı içinde kullanıp kullanamadıklarının incelendiği durumlarda katılımcıların kavramsal durumlardan ziyade problemin içeriğini anlamakta zorlandıkları görülmüştür.

Katılımcıların kareköklü ifadenin içinin negatif olma durumunu önce düşünmeden doğrulamışlar, ancak hazırbulunuşluk düzeyi iyi ve orta olan katılımcılar karekök içindeki sayının bir sayının karesi, yani kendisiyle çarpımı olduğu fikrinden yola çıkarak iki aynı sayının çarpımının sonucunun pozitif olacağını söyleyerek tam sayılarla işlemler konusuyla koordinasyon kurmuşlar ve bundan dolayı kareköklü ifadenin içinin negatif olamayacağını açıklamışlardır. Katılımcılardan hazırbulunuşluk düzeyi düşük olan katılımcı ise aynı sayıların çarpımının pozitif sayıya eşit olacağı bilgisine sahip olmasına rağmen karekök içinin negatif olabileceğini söylemiştir. Bu katılımcı sayının karekök dışına negatif mi yoksa pozitif mi çıkacağı konusunda yorum yapamayacaklarını, çünkü bir pozitif ile bir negatif sayının çarpımının negatif sayıya eşit olacağı bu yüzden sayısal değerinin bilinebileceği ama işaretinin bilinemeyeceği düşüncesine sahip olduğu görülmüştür. Bu düşünce bazı öğrencilerin $\sqrt{a^2} = a$ eşitliğinin a sayısının pozitif olma durumunda doğru olduğunu unutup tüm sayılar için geçerli olduğunu düşündükleri (Cengiz, 2006; Orhun, 1998; Şenay, 2002) fikri ile benzerlik göstermektedir.

Kareköklü bir sayının pozitif ve negatif değerlerinin karşılaştırılması ve bu sayıların sayı doğrusunda gösterilmesi ile ilgili sonuçlarda hazırbulunuşluk düzeyi iyi olan katılımcının önce bu sayıların değerlerinin aynı olduğunu, her iki sayı için de sayı doğrusunda aynı yeri gösterdiğini, önündeki negatif işaretin bir şey ifade etmediği düşüncesine sahip olduğu, fakat sonrasında bu sayıların birbirinin tersi olduğunu anlayabildiği görülmüştür. Hazırbulunuşluk düzeyi orta olan katılımcı bu sayıların birbirinin tersi sayılar olduğunu söylemiş ve bu sayıların yerlerini sayı doğrusunda doğru bir şekilde gösterebilmiştir. Diğer katılımcı ise bu sayılarının birbirinin tersi olduğunu söylemesine rağmen negatif sayılarla ilgili eksik/yanlış bilgilerinden dolayı sayı doğrusundaki yerlerini yanlış ifade etmiştir.

Bir tam-kare sayının ½.kuvvetini dikey matematikleştirme sürecinde nasıl düşündükleri ile ilgili olarak katılımcıların üçü de öncelikle ½.kuvveti almayı sayının yarısını almak olarak yorumlamış ancak daha sonra üslü ifadelerde kuvvet alma kuralı ile ilişkilendirebilmiş ve ifadenin değerini bulabilmişlerdir. Ayrıca tam-kare sayının ½.kuvvetinin karekökle ilişkisini de yorumlayabilmişler ve benzer düşünceyi tam-kare olmayan sayılar için de geliştirebilmişlerdir.

Sonuç olarak katılımcıların tüm süreç esnasında edindikleri bilgileri genel olarak dikey matematikleştirme sürecine aktarabildikleri, bu bilgileri aktif olarak kullanabildikleri ve farklı bağlamlar içinde anlamlandırabildikleri görülmüştür. Öğretilmek istenen kavramla ilgili olduğu düşünülen önceki öğrenmelerin ilgili kavramı oluşum sürecinde oldukça etkilediği yine tespit edilen sonuçlar arasında yer almaktadır. Katılımcıların eski öğrenmelerle ilgili bilgi eksikliklerinin olduğu ve bu eksikliklerin öğrencilerin karekök kavramını ve bu kavramla ilgili soru ve problemleri çözerken etkilediği ve kısıtladığı görülmüştür.

5.2 Öneriler

Matematik, kendi içinde sarmal bir yapıya sahip olduğu için ön öğrenmeler sonraki öğrenmeleri çok fazla etkilemektedir. Eğer önceki öğrenmelerde eksiklikler veya kavram yanılgıları varsa bu sonraki öğrenmelerin de eksik veya yanılgı içeren durumlar oluşturmasına sebebiyet vermektedir. Bu çalışmada da karekök kavramına temel teşkil eden kavramların öğrencilerin bu kavramı oluşturmalarını fazlaca etkilediği görülmüştür. Bu nedenle, öğrencilerin bu kavramın öğretim sürecine girmeden önce alan ve çevre ölçümü, üslü sayılar, birim, rasyonel sayılar ve ondalık gösterimleri ve işlemleri gibi kavramların anlamlı bir şekilde oluşturulmuş olması gerekmektedir. Ayrıca, katılımcıların kareköklü ifadenin negatif olma durumunun sorgulandığı süreçte negatifliği anlamlandırmakta zorlandıkları görülmüştür. Bu anlamda karekök kavramının oluşumundan önce mutlak değer kavramının tekrar gözden geçirilmesinin öğrencileri kareköklü bir ifadeyi kök dışına çıkarırken yapabilecekleri hatalardan uzak tutabileceği düşünülmektedir.

Yapılan çalışmada öğrencilerin GME temelli öğretim ortamına aşina olmadıkları, bağlamsal problemlerle karşı karşıya kalıp, modelleme gerektiren durumları yaşamadıkları, muhakeme etmekte ve yorum getirmekte zorlandıkları görülmüştür. Öğretilen bilgilerin bir bağlam içinde sunulması, günlük hayatla ve öğrencilerin bildikleri şeylerle ilişkilendirilmesi ve öğrencilerin anlamlandırmalarına izin verilen bir ortamın sunulması, her bireyin kendi öğrenme sorumluluğunu aldığı bir öğretim deseninin kullanılmasının daha uygun olacağı söylenebilir. Ayrıca çalışmada öğrencilerin grup içi tartışmalarının birbirlerinin hatalarını fark edip düzeltmelerine, bilgilerini paylaşarak öğrenmelerini desteklemelerine yardımcı olduğu görülmüştür. Bu anlamda öğrenme ortamındaki grup çalışmalarının kavram oluşumunu desteklemede yararlı olabileceği söylenebilir.

KAYNAKÇA

Acar, B. ve Yaman, M. (2011). Bağlam temelli öğrenmenin öğrencilerin ilgi ve bilgi düzeylerine etkisi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 40,* 1-10.

Açan, H. (2015). *8.sınıf öğrencilerinin dönüşüm geometrisinde bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Açıl, E. (2015). *Ortaokul 3.sınıf öğrencilerinin denklem kavramına yönelik soyutlama süreçlerinin incelenmesi: APOS teorisi.* Yayımlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Altaylı, D. (2012). *Gerçekçi matematik eğitiminin oran orantı konusunun öğretimi ve orantısal akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesine etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Altaylı-Özgül D. ve Kaplan, A. (2016). 7.sınıf öğrencilerinin silindirin yüzey alanı konusundaki soyutlama süreçlerinin ve paylaşılan bilgilerinin incelenmesi. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, *2*(11)*,* 344-364.

Altun, M. (2002). Sayı doğrusunun öğretiminde yeni bir yaklaşım. *İlköğretim Online, 1*(2), 33-39.

Altun, M. (2004). *İlköğretim ikinci kademede matematik öğretimi*. Bursa: Alfa Yayınevi.

Altun, M. (2006). Matematik öğretiminde gelişmeler. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 19*(2)*,* 223-238.

Altun, M. ve Memnu, D. S. (2008). Matematik öğretmeni adayların rutin olmayan matematiksel problemleri çözme becerileri ve bu konudaki düşünceleri. *Eğitim Kuram ve Uygulama, 4,* 213-238.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., ve Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *Research in collegiate mathematics education, 2*(3), 1-32.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., ve Weller, K. (2013). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Nem York, NY: Springer Science & Business Media.

Arseven, A. (2010). *Gerçekçi matematik öğretiminin bilişsel ve duyuşsal öğrenme ürünlerine etkisi.* Yayımlanmamış doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Aydın Ünal, Z. (2008). *Gerçekçi matematik eğitiminin ilköğretim 7. sınıf öğrencilerinin başarılarına ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Ayvacı, H. Ş. (2010). Fizik öğretmenlerinin bağlam temelli yaklaşım hakkındaki görüşleri. *Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, *15*, 42-51.

Ayvalı, İ. (2013). *Gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımıyla yapılan öğretimin hesapsal tahmin başarısına ve strateji kullanımına etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Bağlam nedir. (t.y.). 20 Ocak 2019, Erişim adresi: https://kelimeler.gen.tr/baglam-nedir-ne-demek-30971

Başıbüyük, K. (2012). *Matematik tarihinin matematik derslerinin öğretiminde kullanılması: İbrahim Hakkı perspektifi Babil yöntemi örneği*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Baykul, Y. (2009). *İlköğretimde matematik öğretimi (1-5. sınıflar)*. Ankara: Pegem Akademi.

Bıldırcın, V. (2012). *Gerçekçi matematik eğitimi (GME) yaklaşımın ilköğretim beşinci sınıflarda uzunluk, alan ve hacim kavramlarının öğretimine etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Ahi Evran Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ağrı.

Bülbül, M. Ş. ve Matthews, K. (2012). *Bağlam temelli eğitimin olası geleceği*. X. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi. Niğde Üniversitesi, Niğde.

Büyüköztürk, Ş. (2012). *Sosyal bilimler için veri analizi el kitabı*. Ankara: Pegem Yayıncılık.

Can, M. (2012). *İlköğretim 3. sınıflarda ölçme konusunda gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımının öğrenci başarısına ve öğrenmenin kalıcılığına etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Bolu.

Can, M. (2011). *Matematiksel soyutlama ve soyutlamanın indirgenmesi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Cengiz, Ö. M. (2006). *Reel sayıların öğretiminde bir kısım ortaöğretim öğrencilerinin yanılgıları ve yanlışları üzerine bir çalışma.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Cihan, E. (2017). *Gerçekçi matematik eğitiminin olasılık ve istatistik öğrenme alanına ilişkin akademik başarı, motivasyon ve kalıcılık üzerine etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Çakır, Z. (2011). *Gerçekçi matematik eğitimi yönteminin ilköğretim 6. sınıf düzeyinde cebir ve alan konularında öğrenci başarısı ve tutumuna etkisi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Zonguldak.

Çekmez, E. (2013). *Dinamik matematik yazılımı kullanımının öğrencilerin türev kavramının geometrik boyutuna ilişkin anlamalarına etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St John, D. ve Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule?.*The Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 345-364.

Çetin, İ. (2009). *Students' understanding of limit concept: An APOS perspective.* Yayımlanmamış doktora tezi. Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Çilingir, E. (2015). *Gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımının ilkokul öğrencilerinin görsel matematik okur yazarlığı düzeyine ve problem çözme becerilerine etkisi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

De Corte, E. (1995). Fostering cognitive growth: A perspective from research on mathematics learning and instruction. *Educational Psychologist, 30*(1), 37-46.

Demirdöğen, N. (2007). *Gerçekçi matematik eğitimi yönteminin ilköğretim 6.sınıflarda kesir kavramının öğretimine etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Deniz, Ö. (2014). *8.sınıf öğrencilerinin gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı altında eğim kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Deniz, Ö. ve Kabael, T. (2014). *8.sınıf öğrencilerinin eğim kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi* [Öz]. 5th International Conference on New Horizons in Education, Paris. 12 Ocak 2019, Erişim adresi: https://www.researchgate.net/publication/265651790

Dienes, Z. P. (1961). On abstractions and generalizations. *Harvard Educational Review*, *31*, 281-301.

Dienes, Z. P. (1963). *An experimental study of mathematics learning*. London, England: Hutchinson.

Dienes, Z. P. ve Golding E. W. (1971). *Approach to modern mathematics*. New York, NY: Herder and Herder.

Doorman, M., Drijvers, P., Dekker, T., van den Heuvel-Panhuizen, M., de Lange, K. ve Wijers, M. (2007). Problem solving as a challenge for mathematics education in the Netherlands. *ZDM, 39*(5-6), 405-418.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In D. O. Tall (Ed.) *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Dreyfus, T. (2007). *Processes of absraction in context the nested epistemic actions model.* 10 Ocak 2019 tarihinde https://pdfs.semanticscholar.org/d190/0be9d6a043ac815c81344caa8c2713dcc329.pdf adresinden erişilmiştir.

Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter.* 10 Ocak 2019 tarihinde https://dspace.library.uu.nl/bitstream/handle/1874/886/full.pdf adresinden erişilmiştir.

Dubinsky, E. D. (1991). Constructive aspect of reflective absractions in advanced mathematics. *Epistomological Foundations of Mathematicals Experience*, (pp. 160-187). Newyork: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. D. ve McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICME study* (pp. 275-282). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ercire, Y. E. (2014). *İrrasyonel sayı kavramına ilişkin yaşanılan güçlüklerin incelenmesi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Ersoy, E. (2013). *Gerçekçi matematik eğitimi destekli eğitimin 7. sınıf olasılık ve istatistik kazanımlarının öğretiminde öğrenci başarısına etkisi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Sakarya Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

Fauzan, A. (2002). *Applying realistic mathematics education (RME) in teaching geometry in Indonesian primary schools*. University of Twente.

Finkelstein, N.D. (2001). *Context in the context of physics and learning*. 9 Haziran 2018 tarihinde http://lchc.ucsd.edu/nfinkels/perc.context.pdf adresinden erişilmiştir.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful? *Educational Studies in Mathematics, 1*, 3-8.

Freudenthal, H. (1979). Structure of mathematics and mathematical structures; an educational analysis. *Pedagogische Studiën, 56*(2), 51-60.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lecturers*. Dordrecht: Kluwer

Gelibolu, M. F. (2008). *Gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımıyla geliştirilen bilgisayar destekli mantık öğretimi materyallerin 9. sınıf matematik dersinde uygulanmasının değerlendirilmesi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Ege Üniversitesi Bilgisayar ve Öğretim Teknolojileri Eğitimi, İzmir.

Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 443-471.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning*, *1*(2), 155-177. DOI: 10.1207/s15327833mtl0102_4

Gravemeijer, K. ve Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and cirruculum theory. *J. Cirruculum Studies*, *6(32),* 777-796.

Gürbüz, K. M. (2018). *Yedinci sınıf öğrencilerinin etkinlik temelli öğrenme yaklaşımı altında oran-orantı kavramlarını oluşturma süreçlerinin incelenmesi: APOS teorisi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Heuvel-Panhuizen, M. V. D. (1998). *Realistics mathematics education work in progress*. NORMA- lecture, held in Kristiansand. Norway, 5-6 July.

Heuvel-Panhuizen, M. V. D. (2000). *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour.* Freudenthal Institute Cd-rom for ICME9. Utrecht: Utrecht University.

Heuvel-Panhuizen, M. V. D. (2001). *RME as work in progress*. Proceeding of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education. Taiwan, 19-23 November.

Kabael, T. (2011). Tek değişkenli fonksiyonların iki değişkenli fonksiyonlara genellenmesi, fonksiyon makinesi ve APOS. *KUYEB, 11*(1), 465-499.

Karakurumer, G. (2003) *Matematik ve toplum.* 22 Şubat 2019 tarihinde http://www.matder.org.tr/index.php?option=com_content&view=article&catid=8:matematik-kosesi-makaleleri&id=37:matematik-ve-toplum&Itemid=38 adresinden erişilmiştir.

Karakuş, F. (2009). Matematik tarihinin matematik öğretiminde kullanılması: Karekök hesaplamada Babil metodu. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik, Fen ve Matematik Dergisi, 1*(3), 195-206.

Kline, M. (1990). *Mathematical thought from ancient to modern times.* Oxford: Oxford University Press.

Koca, E. (2012). *İlköğretim matematik etkinliklerinde hesap makinesi kullanımının öğrenci başarısı üzerine etkisi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Gaziantep Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Gaziantep.

Kütküt, B. H. (2017). *Gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımının ortaokul matematik derslerinde kullanımının incelenmesi ve öğrenci başarısına etkisi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Adana.

Kuru, Y. (2014). *İlköğretim 8.sınıf matematik dersinde yaşanan öğrenme güçlükleri*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Düzce Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Düzce.

Mert, Ş. (2009). *6., 7. ve 8. sınıflarda yapılandırmacı öğrenme yaklaşımı ile geleneksel yaklaşımın karşılaştırılmasına yönelik uygulamalı bir çalışma.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Gaziosmanpaşa Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Eskişehir.

Milli Eğitim Bakanlığı Ölçme, Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü, (2014). 8.Sınıf 1.Dönem Matematik Dersi Merkezi Ortak Sınav A Kitapçığı. 20 Eylül 2018, Erişim adresi: http://odsgm.meb.gov.tr/kurslar/sinavlar/2014teog/MATEMATIK_A.pdf

Milli Eğitim Bakanlığı Ölçme, Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü, (2015). 8.Sınıf 1.Dönem Matematik Dersi Merkezi Ortak Sınav A Kitapçığı. 20 Eylül 2018, Erişim adresi: http://odsgm.meb.gov.tr/kurslar/sinavlar/2015teog/MATEMATIK_A.pdf

Milli Eğitim Bakanlığı Ölçme, Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü, (2018). 2018-2019 Öğretim Yılı Sınavla Öğrenci Alacak Ortaöğretim Kurumlarına İlişkin Merkezi Sınava Yönelik Örnek Sorular Sayısal Bölüm. 22 Ekim 2018, Erişim adresi:

https://odsgm.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2018_10/24095500_YRNEK_SORULAR_SAYISAL.pdf

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı, (2017). *Matematik dersi öğretim programı (ilkokul ve ortaokul 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ve 8. sınıflar için).* Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü.

Mitchelmore, M. (2002). *The role of abstraction and genaralization in the development of mathematical knowledge.* Paper presented at the Procceding of the East Asia Regional Conference on Mathematics Education (2nd) and The Southeast Asian Conference on Mathematics Education (9th, May, Singapore, pp. 27-31).

Mitchelmore, M. ve White, P. (2007). Abstraction in mathematics learning. *Mathematics Education Research Journal, 19* (2), 1-9.

Monaghan, J. ve Ozmantar, M. F. (2006). Abstraction and consolidation. *Mathematics Education Research Journal, 19*(2), 1-9.

National Council of Teachers of Mathematics, (2000). *Principles and standarts for school mathematics*. Reston, Va. NCTM.

Olkun, S. ve Toluk-Uçar, Z. (2012). *İlköğretimde etkinlik temelli matematik öğretimi*. Ankara: Eğiten.

Orhun, N. (1988). Cebir öğretiminde aritmetik işlemlerdeki üslü ve köklü çokluklardaki yanılgıların tespiti. *Atatürk Üniversitesi 40. Yıl Dönümü Matematik Sempozyumu*, 20-22 Mayıs. Erzurum.

Ölçme, Seçme ve Yerleştirme Merkezi, (2016). Yükseköğretime Geçiş Sınavı (YGS). 20 Eylül 2018, Erişim adresi: https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2016/YGS/YGS14032016.pdf

Ölçme, Seçme ve Yerleştirme Merkezi, (2018). Yükseköğretim Kurumları Sınavı Temel Yeterlilik Testi (TYT). 20 Eylül 2018, Erişim adresi: https://dokuman.osym.gov.tr/pdfdokuman/2018/YKS/TYT_01072018.pdf

Önal, F. (2015). *Bağlamsal problemlerin çözümünde strateji öğretiminin öğrencilerin başarı ve tutumuna etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Adnan Menderes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Aydın.

Özcan, V. (2004). *İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin kareköklü sayılarla ilgili kavram yanılgılarının belirlenmesi ve çözüm önerileri*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Özdemir, E. (2008). *Gerçekçi matematik eğitimine (RME) dayalı olarak yapılan "Yüzey ölçüleri ve hacimler" ünitesinin öğretiminin öğrenci başarısına etkisi ve öğretime yönelik öğrenci görüşleri.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Özdemir, F. (2015). *Ortaokul 8.sınıf kareköklü sayılar konusunun öğretiminde kavram haritası kullanımının öğrencinin akademik başarısına ve tutumuna etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Fırat Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.

Özkaya, A. (2016). *5.sınıf matematik dersinde gerçekçi matematik eğitimi destekli öğretimin öğrenci başarısına, tutumuna ve matematik öz bildirimine katkısı.*

Yayımlanmamış doktora tezi, Gazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Özkök, E. (2010). *Gagne'nin öğretim modeliyle hazırlanan öğretim yazılımının ilköğretim 8.sınıf öğrencilerinin matematik dersi kareköklü sayılar konusundaki akademik başarısına ve öğrenci tutumuna etkisi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Palmiotto, J. (2003) *Contextual teaching and learning*. 15 Şubat 2019 tarihinde http://www.kennesaw.edu/english/ContextualLearning/2003/Bartow/JillianPamiotto.htm adresinden erişilmiştir.

Patton, M. Q. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. London: Sage.

Piaget, J. (1970). *The principles of genetic epistomology*. London: Routledge & Keegen Paul.

Piaget, J. (1971). *Biology and knowlege.* Chicago: University of Chicago Press.

Rasmussen, C. ve Zandieh, M. (2010). Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior,* 29, 57-75.

Rasmussen, C., Zandieh, M., King, K. ve Teppo, A. (2005). Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 51-73.

Sierpinska, A. (1994). *Undestandings in mathematics*. London, England: Falmer.

Sirotic, N. (1998). *Prospective secondary mathematics teachers' understanding of irrationality*. Yayınlanmamış doktora tezi. Simon Fraser Üniversitesi, Kanada.

Skemp, R. (1986). *The psychology of learning mathematics*. Penguin: Harmondsworth.

Streefland, L. (1991). *Fractions in realistic mathematics education: A Paradigm of developmental research.* Norwell, 101 Philip Drive: Kluwer Academic Publishers Group.

Streefland, L. (1985). Wiskunde als activiteit en de realiteit als bron [Mathematics as an activity and reality as source]. *Nieuwe Wiskrant, 5*(1), 60-67.

Şenay, Ş. C. (2002). *Üslü ve köklü sayıların öğretiminde öğrencilerin yaptıkları haytalar ve yanılgıları üzerine bir araştırma.* Yayınlanmamış yüksek lisans tezi. Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya.

Tall, D. (1991). (Ed.) *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Tekbıyık, A. ve Akdeniz, A. R. (2010). Bağlam temelli ve geleneksel fizik problemlerinin karşılaştırılması üzerine bir inceleme. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 4*(1), 123-140.

Temel, H. ve Eroğlu, A. O. (2014). Ilköğretim 8.sınıf öğrencilerinin sayı kavramlarını anlamlandırmaları üzerine bir çalışma. *Kastomonu Eğitim Dergisi, 3*(22), 1263-1278.

The Center for Occupapational Research and Development, (2013). *What is contextual learning?* 19 Ocak 2019, Erişim adresi: http://www.cord.org/contextuallearning-definition/

Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (Ed.), *Realistic Mathematics Education in Primary School*. Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute, Utrecht University.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions- A model of goal and theory description in mathematicsiInstruction.* Dordrecht: Kluwer Academic.

Türk Dil Kurumu (TDK). (t.y.) Genel Türkçe Sözlük. 19 Ocak 2019 tarihinde http://www.tdk.gov.tr/index.php?option=com_bts&view=bts&kategori1=veritbn&kelimesec=31927 adresinden erişildi.

Tziritas, M. (2011). *APOS theory as a framework to study the conceptual stages of related rates problems*. Analysis. Concordia University.

Uça, S. (2014). *Öğrencilerin ondalık kesirleri anlamlandırmasında gerçekçi matematik kullanımı: Bir tasarı araştırması.* Yayımlanmamış doktora tezi. Adnan Menderes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Aydın.

Üzel, D. (2007). *Gerçekçi matematik eğitimi (RME) destekli eğitimin ilköğretim 7.sınıf matematik öğretiminde öğrenci başarısına etkisi.* Yayımlanmamış doktora tezi. Balıkesir Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir.

Uygur, S. (2012). *6.sınıf kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerinin öğretiminde gerçekçi matematik eğitiminin öğrenci başarısına etkisi.* Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2001). Mathematics education in The Netherlands. In J. Anghileri (Ed.), *Principles and practice in arithmetic teaching* (pp. 49-63). Buckingham/Philadelphia: Open University Press.

Van den Heuvel-Panheuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54*(1), 9-35.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. ve Drijvers, P. (2014). "Realistic mathematics education", In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 521-525), Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. ve Wijers, M. (2005). Mathematics standarts and cirruculum in The Netherlands. *ZDM, 37*(4).

Van Oers, B. (2001). Contextualisation for abstraction. *Cognitive Science Quarterly, 1*(3), 279-305.

World Economic Forum [WEF], (2018). *Executive opinion survey 2018 report.* 31 Mayıs 2019 tarihinde http://weforum.org/pdf/gci-2017-2018-scorecard/WEF_GCI_2017_2018_Scorecard_EOSQ130.pdf adresinden erişildi.

Yağcı, E. ve Arseven, A. (2010). *Gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı*. International Conference on New Trends in Education and Their Implications, 265-268.

Yeşildere, S. (2016). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin* *incelenmesi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. (2008). İlköğretim sekizinci sınıf öğrencilerinin bilgi oluşturma süreçlerinin matematiksel güçlerine göre incelenmesi. *Eğitim Fakültesi Dergisi*, *21*(2), 485-510.

Yıldırım, C. (2010). *Matematiksel düşünme.* İstanbul: Remzi Kitapevi.

Yılmaz, R. (2011). *Matematiksel soyutlama ve genelleme süreçlerinde görselleştirme ve rolü.* Yayımlanmamış doktora tezi. Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Yin, R. K. (2003). *Case study research, designs and methods* (3rd Ed.). California: Sage Publications.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2006). *Nitel araştırma yöntemleri.* Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Zulkardi. (2002). *Developing a learning environment on realistic mathematics educationfFor Indonesian student teachers.* Yayınlanmamış doktora tezi. Thesis Univesity of Twente, Enschede.

EKLER

EK-1: Hazırbulunuşluk Testine Ait Belirtke Tablosu

KAZANIMLAR/BİLİŞSEL ALAN BASAMAKLARI	BİLME	ANLAMA	UYGULAMA	ANALİZ	SENTEZ	DEĞERLENDİRME	TOPLAM
(5) Uzunluk ölçme birimlerini tanır; metre-kilometre, metre-desimetre-santimetre-milimetre birimlerini birbirine dönüştürür ve ilgili problemleri çözer.		1.soru (ç, d,e,f)					1
(5) Alan ölçme birimlerini tanır, m^2–km^2, m^2–cm^2–mm^2 birimlerini birbirine dönüştürür.		1.soru (a,b,c)	2.soru				2
(5) Dikdörtgen, paralelkenar, eşkenar dörtgen ve yamuğun temel elemanlarını çizer ve belirler. (Kare, dikdörtgenin özel bir durumu olarak ele alınır.)				3.soru			1
(5) Üçgen ve dörtgenlerin çevre uzunluklarını hesaplar, verilen çevre uzunluğuna sahip farklı şekiller oluşturur.			5.soru		6.soru		2
(5) Dikdörtgenlerin alanını hesaplar, verilen bir alana sahip farklı dikdörtgenler oluşturur.			4.soru		7.soru		2
(6) Asal sayıları özellikleriyle belirler.	9.soru						1
(6) Doğal sayıların asal çarpanlarını bulur.			10.soru (a)				1
(6)Ondalık ifadelerle dört işlem yapmayı gerektiren problemleri çözer.				8.soru			1
(8) Verilen pozitif tamsayıların pozitif tamsayı çarpanlarını bulur, pozitif tam sayıların pozitif tam sayı çarpanlarını üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazar.			10.soru (b)	10.soru (c)			2
(8)Tam sayıların tam sayı kuvvetlerini hesaplar.			11.soru				1
(8)Üslü ifadelerle ilgili temel kuralları anlar, birbirine denk ifadeler oluşturur.			12. ve 13. soru			14.soru	3

EK-2: Hazırbulunuşluk Testi

1- Aşağıdaki nesneleri ölçerken hangi ölçme birimlerini kullanmalıyız?
(a) Evimizin taban alanı :
(b) Türkiye'nin yüz ölçümü :
(c) Kitap kapağının alanı :
(ç) Saçımızın uzunluğu :
(d) Ahmet'in boyu :
(e) Odanın eni :
(f) Tabağın çevresi :

2- Alanı 1 cm^2 olan karenin içine, alanı 1 mm^2 olan karelerden kaç tane sığar?

3- "Her dikdörtgen bir karedir."
"Her kare bir dikdörtgendir."
Yukarıdaki cümlelerden hangisi doğrudur? Neden?

4- Kısa kenarı 4cm, uzun kenarı 12 cm olan dikdörtgenin çevresinin uzunluğunu ve alanını bulunuz.

5- Kenarı 7 cm olan karenin çevresinin uzunluğunu ve alanını bulunuz.

6- Çevresi 36 cm olan dikdörtgenler oluşturunuz.

7- Alanı 36 cm^2 olan dikdörtgenler oluşturunuz.

8- Aşağıdaki işlemleri yapınız.
12,086 + 251,15 =
25,001 – 14,3 =
$7{,}8 \times 12{,}05 =$
$12{,}05 \div 0{,}005 =$

9- Aşağıda doğru olanların başına D, yanlış olan cümlelerin ise doğrularını yazınız.
(…..) 5,9,10,23,27 sayıları asal sayıdır.
(…..) Çift olan asal sayı bir tanedir. O da 2'dir.
(…..) Asal sayılar sadece 1'e bölünür.
(…..) Asal sayıları 1'den büyük iki tam sayının çarpımı şeklinde yazamayız.

10- 16, 27, 49, 100, 125, 225 , 576
a-)Bu sayıları asal çarpanlarına ayırınız.
b-) Asal çarpanlarına ayırdığınız sayıları üslü ifadelerin çarpımı şeklinde yazınız.
c-) Bu sayılardan hangileri bir sayının karesini oluşturabilir, açıklayınız.

11- Aşağıdaki sayılardan hangileri bir sayının karesidir? Hangi sayının karesi olduğunu gösteriniz.
2, -25, 36^3, 5^4, 81, $(-7)^2$, $\frac{1}{4}$, (2,25)

12- $(2^2)^3$. 3^5: 6^5 işleminin sonucu kaçtır?

13- $(25)^{1/2}$ sayısı hangi sayıya eşittir?

14- Bir sayının karesi olan sayıya $\frac{1}{2}$. kuvveti o sayıya hangi işlemi uyguluyor? Düşüncelerinizi yazarak açıklar mısınız?

EK-3: Görüşme Formu

Görüşme Soruları 1

- Sınıfta yaptığınız etkinliği hatırlayın. Bu problemi çözerken ne düşünmüştünüz?
- Alanı verilen karenin kenar uzunluğunu bulabilmek için ne yaptınız? Nasıl bir yol izlediniz?
- Çözdüğün örnekte satranç tahtası alanını değiştirdiğimizde ne gibi değişiklikler olur?
- Alanın değişmesine rağmen farkına vardığınız bir şey oldu mu? Bu durumu nasıl anlatırsınız?
- Sonuçta bulduğunuz kavramı tanımlayabilir misiniz?
- Bir sayının karesi ile karekökü arasındaki ilişkiyi açıklar mısın?

- **Parkur Hazırlama**

Bir engelli yarış için 100 metrelik doğrusal hat üzerinde pozitif tam sayıların kareleri olan sayıların denk geldiği noktalara birer bayrak dikilecektir. Baştan başlayarak 0-10, 10-20, 20-30, 30-40 şeklindeki 10 metrelik dilimleri göz önüne alalım.

Parkur 1: 10 metrelik dilimlerden kaç tanesinde birden çok bayrak dikilecektir?

Parkur 2: 10 metrelik dilimlerden kaç tanesinde bayrak dikilmeyecektir?

Parkur 3: Bu parkurda yarışan ve 57.metrede yarışı terk eden biri kaç bayrak geçmiş olur?

Parkur 4: Üçer sporcu ile yarışan A ve B takımlarından A'nın sporcularından ikisi 13. ve 83.metrelerde yarışı terk ediyor. B'nin yarışmacılarından ikisi de 51. ve 67.metrelerde yarışı terk ediyorlar. Her iki takımın bir yarışmacısı da yarışı tamamlıyor. Her geçilen bayraktan, dikili bulunduğu sayının karekökü kadar puan alınıyor. Bu durumda yarışı kazanan takım hangisi olur?

Görüşme Soruları 2

- Sınıfta yaptığınız etkinliği hatırlayın. Bu problemi çözerken ne düşündünüz? Neler yaptınız?
- Bu problemde kullandığınız sayıları, sayı doğrusunda gösterir misin?
- Neden bu şekilde düşündünüz?
- Yapışkanlı satranç altlıklarının alanının sayısal değeri değiştiği zaman tasarlayacağımız masada ne gibi değişiklikler meydana gelir? Anlatır mısınız?
- Bu durumu nasıl açıklarsınız?
- İlk problem ile bu problem arasında fark var mı? Varsa nasıl bir fark vardır?

- **Ben Bilirim Rakibim Bilmez Oyunu**

"Ben Bilirim, Rakibim Bilmez" adlı TV oyununda Merve ve Elif yarışıyorlar. Kural şöyledir: soru iki yarışmacıya ait zarflardan ayrı ayrı çıkmaktadır. Moderatör zarfların içindeki sırular tükendiğinde yarışmacıların puanlarını açıklamaktadır.

Merve'nin sorusu: 46 nın karekökü hangi iki pozitif tamsayı arasındadır?
Merve: 6 ile 7
Elif'in sorusu: 87 nin karekökü hangi iki pozitif tamsayı arasındadır?
Elif: 10 ile 11
Merve'nin sorusu: 2'nin karekökü hangi iki pozitif tamsayı arasıdnadır?
Merve: 2 ile 4.
Elif'in sorusu: 101'in karekökü hangi iki pozitif tamsayı arasındadır?
Elif: 10 ile 11.
Merve'nin sorusu: 91 in karekökü hangi iki pozitif tamsayı arasındadır?
Merve: 8 ile 9
Elif'in sorusu: 75'in karekökü hangi iki pozitif tamsayı arasındadır?
Elif: 8 ile 9.

Ben Bilirim Rakibim Bilmez Oyunu 1: Moderatör bu durumda hangisinin yarışmayı kazandığını açıklar?

Ben Bilirim Rakibim Bilmez Oyunu 2: Aynı yarışmanın farklı bir bölümünde, kural da farklılaşıyor. Moderatör, yeni kuralı "Sorulansoruya her iki yarışmacının da cevap verme hakkı vardır, butona basarak cevap verme önceliği kazanacaklardır. Bu cevapalrdan doğru olan değerlendirilecek ve doğru cevabı veren yarışmacı puan kazanacaktır." Şeklinde açıklayıp yarışmaya geçmiştir:

Moderatör: 195'in karekökü hangi iki pozitif tamsayı arasındadır? (Elif butona önce basıyor.)

Elif: 12 ve 13. (Merve butona basıyor)

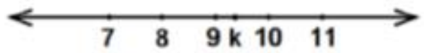
Merve: 10 ve 20. (Elif butona basıyor)

Elif: 11 ve 12.

Moderatör Elif'in cevabının doğru olduğunu onaylayınca Merve itiraz ediyor ve kendi cevabının doğru olduğunu iddia ediyor. Sizce Merve haklı mıdır? Açıklayınız.

Görüşme Soruları 3

- Karekök içindeki sayı negatif olabilir mi? Neden? Açıklayınız.
- -$\sqrt{15}$ ve $\sqrt{15}$ sayılarının sayı doğrusundaki yerlerini açıklayarak gösterebilir misin?
- Bir sayının karesinin karekökü neye eşittir?
- Bir sayının karesi olan sayıya ½. kuvveti uygulanırsa sonuç ne olur? Neden?
- Aşağıdaki soruları çözebilir misin?



Yukarıdaki sayı doğrusunda gösterilen k sayısı aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\sqrt{73}$ B) $\sqrt{79}$ C) $\sqrt{87}$ D) $\sqrt{101}$

(TEOG 2014/2015 1.DÖNEM)

$a = \sqrt{2} + \sqrt{45}$
$b = \sqrt{5} + \sqrt{18}$
$c = \sqrt{8} + \sqrt{20}$

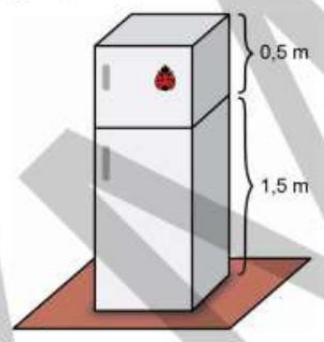
olduğuna göre, aşağıdaki sıralamalardan hangisi doğrudur?

A) $a < b < c$ B) $b < a < c$ C) $c < b < a$

D) $b < c < a$ E) $c < a < b$

2016 YGS

İki bölmeli dikdörtgenler prizması şeklindeki bir buzdolabının alt bölmesi 1,5 metre, üst bölmesi ise 0,5 metre yüksekliğindedir. Buzdolabının üst bölmesinin üzerine 🐞 şeklindeki bir süs aşağıdaki gibi yapıştırılıyor.



Buna göre, yapıştırılan bu süsün yerden yüksekliği metre türünden aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{7}$

2018 TYT

Ondalık gösterimi verilen bir sayı birler basamağına yuvarlanırken virgülden sonraki ilk rakama bakılır. Bu rakam 5 veya 5'ten büyük ise birler basamağı 1 arttırılarak, 5'ten küçük ise birler basamağı aynen bırakılarak virgülden sonraki kısım silinir.

Örneğin 12,54 sayısının birler basamağına yuvarlanmış biçimi 13

105,18 sayısının birler basamağına yuvarlanmış biçimi 105'tir.

Aşağıda klavyeden bir sayı girildikten sonra bir bilgisayar programının işlemler zinciri verilmiştir.

1. Adım: Girilen sayıyı oku.
2. Adım: Sayının karekökünü al.
3. Adım: Sonuç tam sayı ise 5. adıma git, değilse 4. adımdan devam et.
4. Adım: Sonucu birler basamağına yuvarla ve 2. adımdan devam et.
5. Adım: Sonucu ekrana yaz.

Bu programa göre klavyeden 226 sayısı girildiğinde ekranda yazan sayı kaçtır?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 5

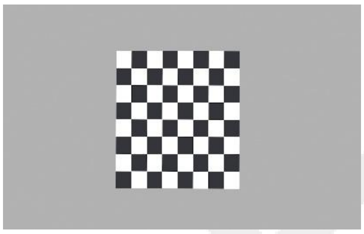
(2018/2019 MEB'in Yayınladığı Örnek Soru)

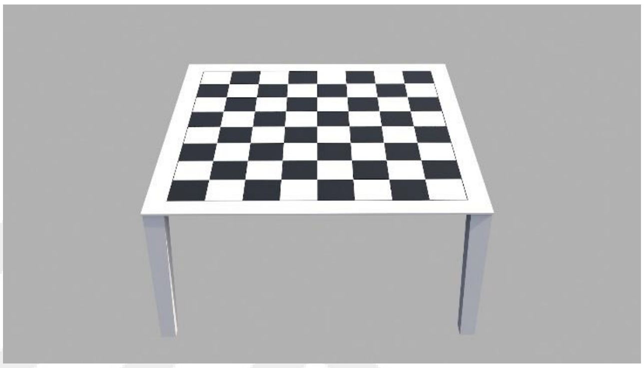
EK-4: Tam-Kare Pozitif Tam Sayılarla Bu Sayıların Karekökleri Arasındaki İlişkiyi Belirler Kazanımı İle İlgili Bağlamsal Problem

Bir okul müdürü, öğrencilerin satranç oyununa ilgi ve merakını artırmak için okul bahçesinde satranç oynayabilecekleri bir yer hazırlatmayı düşünmektedir. Bunun için bahçede uygun bir yere siyah ve beyaz renkli fayanslarla satranç tahtası döşetmiştir. Müdür, kuruyana kadar üzerine basılmaması için bu alanın etrafını koruma şeridi ile çevirmek istemektedir. Döşenen fayanslardan alanın ölçüsünü bildiğine göre sizce bunun için en az ne kadar uzunlukta şerit kullanması gerekir?

EK-5: Tam-Kare Olmayan Kareköklü Bir Sayının Hangi İki Doğal Sayı Arasında Olduğunu Belirler Kazanımı İle İlgili Bağlamsal Problem

Okul müdürü satranç oyununa artan ilgiden memnun kalmış ve öğrencilerin soğuk havalarda da oynamaya devam edebilmeleri için sınıflara birer satranç masası yaptırmaya karar vermiştir. Önce, masaların üst yüzeylerine yapıştırmak için yapışkanlı satranç altlığı resimleri almıştır. Sonra, marangozdan bu altlıklar yapıştırıldığında kenarlarında eşit şekilde boşluk kalacak masalar yapmasını istemiştir. Sizce marangoz masanın maliyetini azaltmak için bir kenarını en az ne kadar uzunlukta yapabilir?





EK-6: 1.Görüşmeler Sonrası Sınıfta Çözülen Sorular

1-) 15 ile 75 arasında kaç tane tam kare sayı vardır?

2-) Aşağıdaki sayılar hangi ardışık tam kare sayılar arasında yer aldığını bulunuz.

Küçük tam kare	Sayı	Büyük tam kare
	12	
	45	
	72	
	155	

3-) 120 adet karosu olan Berna, kenar uzunlukları birbirinden farklı kareler oluşturacaktır. Oluşturduğu kareleri bozmayacak ve bir karede kullandığı karoları diğer karelerde kullanmayacaktır. Buna göre, Berna farklı boyutlarda en fazla kaç kare oluşturabilir?

4-) Alanları eşit 40 parsele en az kaç parsel daha eklenirse kare şeklinde bir tarla oluşturulabilir?

5-) Birler basamağı 6 olan kaç tane üç basamaklı tam kare sayı vardır?

6-)

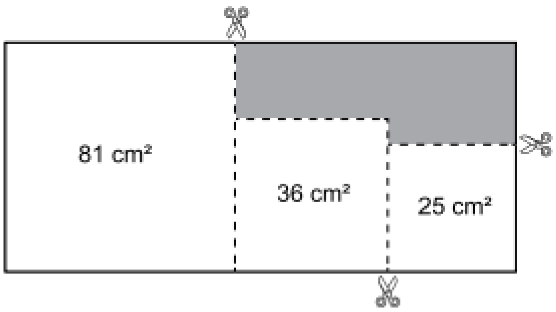
$\sqrt{9} + \sqrt{(-4)^2} - \sqrt{(-5)^2}$

işleminin sonucu kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 10 E) 11

1995 ÖSS

7-)



Dikdörtgen şeklindeki kartondan, alanları $81 cm^2$, $36 cm^2$ ve $25 cm^2$ olan kare şeklindeki üç parça şekildeki gibi kesilerek çıkarılıyor.

Buna göre kalan karton parçasının çevresi kaç santimetredir?

A) 30 B) 32 C) 34 D) 36

(2015/2016 1. Merkezi Ortak (Mazeret) Sınavı)

EK-7: 2.Görüşme Sonrası Sınıfta Çözülen Sorular

1-) Aşağıdaki kareköklü sayıların hangi ardışık tam sayılar arasında yer aldığını bulunuz.

$\ldots < \sqrt{7} < \cdots$

$\ldots < \sqrt{45} < \cdots$

$\ldots < -\sqrt{22} < \cdots$

2-) (2014/2015 1.Merkezi Ortak Sınavı)

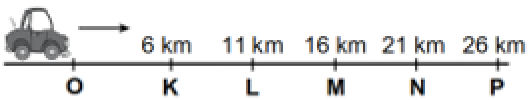
$\sqrt{34}$ ile $\sqrt{101}$ sayıları arasında kaç tane tam sayı vardır?

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

3-)

$2+\sqrt{14}$ toplamı hangi doğal sayıya daha yakındır? Neden?

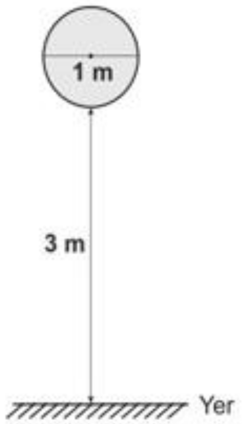
4-)



Şekilde O noktasında bulunan bir aracın
K, L, M, N, P noktalarına uzaklıkları verilmiştir.

a-) Bu araç ok yönünde $\sqrt{121}$ km yol giderse bulunduğu yer neresi olur?
b-) Bu araç ok yönünde $\sqrt{250}$ km yol giderse bulunduğu yer neresi olur?

5-) (2015/2016 1.Merkezi Ortak Sınavı)



Bir okçu, yukarıda gösterildiği gibi çapı 1 metre olan daire şeklindeki bir hedef tahtasına atış yapmaktadır. Hedef tahtasının yerden yüksekliği 3 metredir.

Atılan ok hedef tahtasına isabet ettiğine göre, saplandığı noktanın yerden yüksekliği, metre cinsinden aşağıdakilerden hangisi olabilir?

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{8}$ C) $\sqrt{15}$ D) $\sqrt{18}$

6-) $\sqrt{2} < x < \sqrt{4}$ olduğuna göre x aşağıdakilerden hangisi olabilir? Neden?
A) 1/2 B) 5/3 C) 9/4 D) 3,5

EK-8: 1.Kazanım İle İlgili Ev Ödevi

(8. Sınıf Merkezi Ortak Sınav Soruları)

Birler basamağı 9 olan üç basamaklı kaç tane tam kare sayı vardır?

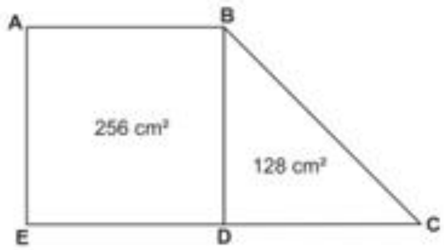
A) 4 B) 5 C) 6 D) 7

(2015-2016 1. Dönem)

Aşağıdaki çarpma işlemlerinden hangisinin sonucu bir tam kare sayı değildir?

A) 12×48 B) 50×18
C) 24×54 D) 75×15

(2015-2016 1. Dönem Mazeret)

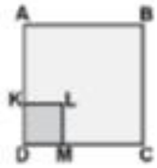


Şekildeki ABDE karesinin alanı 256 cm^2 ve BCD dik üçgeninin alanı 128 cm^2 dir.

Buna göre |EC| kaç santimetredir?

A) 20 B) 24 C) 28 D) 32

(2015-2016 1. Dönem)



Şekildeki ABCD ve KLMD karelerinin alanları sırasıyla 169 cm^2 ve 25 cm^2dir. Buna göre, |AK| kaç santimetredir?

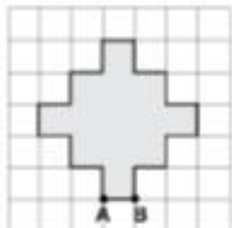
A) 5 B) 8 C) 9 D) 12

(2014-2015 1. Dönem)

Babası Ali'ye ekim ayının yalnızca tam kare sayı olan günlerinde yirmişer lira harçlık vermiştir. Ali, ekim ayında toplam kaç lira harçlık almıştır?

A) 40 B) 60
C) 100 D) 120

(2014-2015 1. Dönem Mazeret)



Kareli zeminde verilen yukarıdaki şeklin alanı 117 cm^2 dir. Buna göre, |AB| kaç santimetredir?

A) 2 B) 3 C) 6 D) 9

(2014-2015 1. Dönem Mazeret)

EK-9: Etik Kurul Kararı

T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER ETİK KURUL KARARLARI

KARAR TARİHİ	TOPLANTI SAYISI	KARAR SAYISI
29.01.2019	1	2019 - 17

KARAR NO:
2019 - 17

Üniversitemiz Eğitim Bilimleri Enstitüsü yüksek lisans öğrencisi Elif Nur OCAKBAŞI'nın Dr. Öğr. Üyesi Rezan YILMAZ danışmanlığında "8. Sınıf Öğrencilerinin Karekök Kavramını Oluşturma Süreçleri: APOS Teorisi Perspektifi" mülakat, gözlem, video/film kaydı ve ses kaydı çalışmalarını içeren 764 sayılı dilekçesi okunarak görüşüldü.

Üniversitemiz Eğitim Bilimleri Enstitüsü yüksek lisans öğrencisi Elif Nur OCAKBAŞI'nın Dr. Öğr. Üyesi Rezan YILMAZ danışmanlığında "8. Sınıf Öğrencilerinin Karekök Kavramını Oluşturma Süreçleri: APOS Teorisi Perspektifi" mülakat, gözlem, video/film kaydı ve ses kaydı çalışmalarının kabulüne oy birliği ile karar verildi.

EK-10: MEB İzni

T.C.
SİNOP VALİLİĞİ
İl Millî Eğitim Müdürlüğü

Sayı : 25072426-604.01.01-E.4571097 04/03/2019
Konu : Anket Uygulaması

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'nün 19.02.2019 tarih ve 4125 sayılı yazısı

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Elif Nur OCAKBAŞI'nın 'Ortaokul Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Karekök Kavramını Oluşturan Süreçleri: APOS Teorisi Perspektifi' konulu tez çalışmasını Sinop'un Gerze İlçesi Belören Ortaokulu'ndaki 8. Sınıf öğrencilerine uygulamak istediğini belirtmektedir. Konu ile ilgili yazı ve ekleri, Müdürlüğümüzde oluşturulan Komisyon tarafından incelenmiştir. Yapılan inceleme sonrası söz konusu çalışmanın eğitim ve öğretimi aksatmayacak şekilde gönüllülük esasına dayalı olarak uygulanması, uygulamalarda sadece yazımız ekinde gönderilen çalışmanın kullanılması ve araştırma sonuçlarının bir rapor halinde Müdürlüğümüze verilmesi şartı ile çalışmanın yürütülmesinde Müdürlüğümüzce bir sakınca görülmemiştir.

Makamlarınızca da uygun görüldüğü takdirde 'Ortaokul Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Karekök Kavramını Oluşturan Süreçleri: APOS Teorisi Perspektifi' konulu çalışmasını Gerze Müdürlüğümüze bağlı Belören Ortaokulunda 8. Sınıf Öğrencilerine uygulanmasını Olurlarınıza arz ederim.

Davut KAYA
Milli Eğitim Müdürü V.

OLUR
04/03/2019

Mehmet TANIŞIR
Vali a.
Vali Yardımcısı

Ekler:
Yazı ve Ekleri (16 Sayfa)

EK-11: Veli Onay Formu

VELİ ONAY MEKTUBU

Sayın veliler, sevgili anne- babalar,

Ondokuzmayıs Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalında *"8.Sınıf Öğrencilerinin Karekök Kavramını Oluşturma Süreçleri: APOS Teorisi Perspektifi"* başlıklı çalışmasını yürütmekteyiz. Araştırmanın amacı, bağlam problemleri etkinlikleri ile desteklenmiş öğretim sonucunda öğrencilerin karekök kavramını oluşturma süreçlerini incelemektir.

Çalışmamız, öğrencilerin hazır bulunuşluk ve ön bilgilerini kontrol etmek ve klinik görüşmelerin yapılacağı öğrencileri seçmek amacıyla öğretim öncesinde açık uçlu sorulardan oluşmuş bir testi uygulamakla başlayacaktır. Bu test sonucunda öğrenciler grup içi heterojen, gruplar arası homojen olacak şekilde gruplara ayrılacaktır. Daha sonra gruplara kazanım odaklı hazırlanmış olan bağlamsal problem sunularak öğrencilerin zihinsel aktiviteleri kontrol edilecektir. İşlenen dersin akabinde belirlenen öğrencilerle odak görüşmeler yapılarak onların kavram oluşum süreçleri derinlemesine incelenecektir.

Bu formu imzaladıktan sonra çocuğunuz katılımcılıktan ayrılma hakkına sahiptir. Araştırma sonuçlarının özeti tarafımızdan okula ve rektörlüğe ulaştırılacaktır.

Araştırmayla ilgili sorularınızı aşağıdaki e-posta adresini kullanarak bize yöneltebilirsiniz.

Saygılarımızla,

Araştırmacı Elif Nur OCAKBAŞI

Ondokuzmayıs Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Tezli Yüksek Lisans Programı

E-posta: elifnur_ocakbasi@hotmail.com

Lütfen bu araştırmaya katılmak konusundaki tercihinizi aşağıdaki seçeneklerden size en uygun gelenin altına imzanızı atarak belirtiniz ve bu formu çocuğunuzla okula geri gönderiniz.

A) Bu araştırmaya tamamen gönüllü olarak çocuğumun katılımcı olmasına ☐ **izin veriyorum.**
☐ **izin vermiyorum**

B) Çalışmayı istediğim zaman yarıda kesip bırakabileceğimi biliyorum ve verdiğim bilgilerin bilimsel amaçlı olarak kullanılmasını ☐ **Kabul ediyorum.**

☐ **Kabul etmiyorum**

Veli Adı-Soyadı.......______________

İmza ....