

**BAŞKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**SAYISAL BENZETİM YÖNTEMİ İLE YAĞMUR SUYU
ŞEBEKELERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ**

SARPER GÖZÜTOK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2009

**SAYISAL BENZETİM YÖNTEMİ İLE YAĞMUR SUYU
ŞEBEKELERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ**

**EVALUATION OF STORMWATER NETWORKS VIA
NUMERICAL SIMULATION METHOD**

SARPER GÖZÜTOK

Başkent Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
BİLGİSAYAR Mühendisliği Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2009

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma, jürimiz tarafından **BİLGİSAYAR MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Prof.Dr. Ziya Aktaş

Üye (Danışman)

Doç.Dr. Nizami Gasilov

Üye

Prof.Dr. Hayri Sever

ONAY

Bu tez 28/01/2009 tarihinde, yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

.../.../.....

Prof.Dr. Emin AKATA

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

TEŐEKKÜR

Yazar, bu çalıőmanın gerçekleőmesinde katkılarından dolayı, aşağıda adı geçen kiőilere içtenlikle teőekkür eder.

Başkent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı'ndan Sayın Doç.Dr. Nizami Gasilov'a (tez danıőmanı), çalıőmanın sonuca ulaőtırılmasında sağladığı katkılar için...

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı'ndan Sayın Prof.Dr. Hayri Sever'e, tez çalıőması sırasında yol gösterici ve yardımcı olduğu için...

ÖZ

SAYISAL BENZETİM YÖNTEMİ İLE YAĞMUR SUYU ŞEBEKELERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

Sarper Gözütok

Başkent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı

Kentsel bir bölgede meydana gelen yağışın oluşturduğu akımların, yağmur suyu drenaj şebekesindeki gerçek zamanlı davranışları hidrolik benzetim yoluyla incelenebilmektedir. Bir yağmur suyu drenaj şebekesi kanallarında meydana gelen akımın yüksekliği ve hızı, sıfır su modelleme denklemleri olarak da bilinmekte olan Saint Venant denklem sistemi ile ifade edilmektedir. Bu tezde, hiperbolik yapıdaki Saint Venant denklemleri, bir sonlu farklar yöntemi olan MacCormack yöntemine dayanan algoritma kullanılarak çözülmüştür. Yüzeyde oluşan akımların drenaj sistemine giriş noktaları olan bacalarda süreklilik ve enerji denklemleri ayrıca uygulanmamış, bacalardan giren yağmur sularının doğrudan kanallara geçtiği varsayılmıştır. Sayısal benzetim sırasında elde edilmiş olan sonuçların giriş verileriyle tutarlı oldukları gösterilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Saint Venant denklemleri, yağmur suyu şebekesi, hidrolik benzetim, sonlu farklar, MacCormack yöntemi

Danışman: Doç.Dr. Nizami Gasilov, Başkent Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü.

ABSTRACT

EVALUATION OF STORMWATER NETWORKS VIA NUMERICAL SIMULATION METHOD

Sarper Gözütok

Başkent University Institute of Science

Department of Computer Engineering

Stormwater originating from rainfall on an urban area flows in the stormwater network in a way that can be inspected by real time hydraulic simulation. The flow height and velocity occurring in the stormwater network's conduits can be stated by the Saint Venant equation system aka shallow water equations. In this thesis the hyperbolic Saint Venant equations are solved by an algorithm based on the MacCormack scheme which is a finite difference method. In the access holes, which are taken as the drainage system entrance points for the surface flows, continuity and energy equations are not applied separately and it is assumed that rain water entering from the access holes pass directly to the conduits. It has been shown that, results obtained during the numerical simulation are consistent with the input data.

Keywords: Saint Venant equations, stormwater network, hydraulic simulation, finite differences, MacCormack method

Advisor: Assoc. Prof.Dr. Nizami Gasilov, Başkent University, Department of Computer Engineering

İÇİNDEKİLER LİSTESİ

Sayfa

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER LİSTESİ	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	iv
ÇİZELGELER LİSTESİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEORİ	4
2.1 Korunum Kanunları	4
2.2 Temel Akışkanlar Dinamiği Denklemleri.....	8
2.3 Sığ Su Modelleme Denklemleri.....	26
2.4 Saint Venant Denklemlerinin Çözüm Yöntemi	36
2.5 MacCormack Yönteminin Saint Venant Denklemlerine Uygulanması	44
2.6 Açık Yöntemlerde Kararlılık Sorunu	46
2.7 Yakınsama ve Tutarlılık.....	52
3. UYGULAMA	54
3.1 Şebeke Özellikleri	54
3.2 Baca Havzalarının Oluşturulması.....	57
3.3 Baca Giriş Hidrograflarının Oluşturulması.....	59
3.4 Örnek Şebekede Başlangıç ve Sınır Koşulları	63
3.5 Benzetim Sonuçları.....	65
4. SONUÇ	74
KAYNAKLAR LİSTESİ	75
EKLER	77

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Hareket eden sonsuz küçük akışkan elemanına x doğrultusunda etkiyen kuvvetler	17
Şekil 2.2. Akışkan elemanına etkiyen yüzeysel kuvvetler a) kesme gerilmesi b) normal gerilme.....	18
Şekil 2.3. Kanal enkesiti	28
Şekil 2.4. Kontrol hacmine etkiyen kuvvetler	28
Şekil 2.5. Basınç kuvvetleri.....	29
Şekil 2.6. x-y düzlemindeki ayırık noktalar	41
Şekil 2.7. Sonlu bir bölgede karakteristikler.....	48
Şekil 2.8. Kararlı bir yaklaşım	51
Şekil 3.1. Şebeke planı ve baca koordinatları.....	55
Şekil 3.2. Baca havzaları (saha taksimat planı).....	58
Şekil 3.3. Yağış şiddet fonksiyonu i (mm/dakika)	59
Şekil 3.4. Bacalara ait yağış giriş hidrografları.....	62
Şekil 3.5. Kanal 1'deki su seviyeleri	68
Şekil 3.6. Kanal 2'deki su seviyeleri	69
Şekil 3.7. Kanal 3'deki su seviyeleri	69
Şekil 3.8. Kanal 4'deki su seviyeleri	70
Şekil 3.9. Kanal 5'deki su seviyeleri	70
Şekil 3.10. Kanal 6'daki su seviyeleri	71
Şekil 3.11. Kararlı olmayan durum (Courant sayısı = 1,5) $t = 25$	71
Şekil 3.12. Kararlı olmayan durum (Courant sayısı = 1,5) $t = 50$	72
Şekil 3.13. Kararlı olmayan durum (Courant sayısı = 1,5) $t = 100$	72
Şekil 3.14. Kararlı olmayan durum (Courant sayısı = 1,5) $t = 120$	72
Şekil 3.15. Kararlı olmayan durum (Courant sayısı = 1,5) $t = 125$	72
Şekil 3.16. Kararlı olmayan durum (Courant sayısı = 1,5) $t = 127$	73

ÇİZELGELER LİSTESİ

Çizelge 3.1.	Bacaların fiziksel parametreleri	56
Çizelge 3.2.	Kanalların fiziksel parametreleri	56
Çizelge 3.3.	Bacalara giren yağış suyu miktarları	62
Çizelge 3.4.	Kanallarda meydana gelen en yüksek akış yükseklikleri.....	65
Çizelge 3.5.	Karşılaştırmalı benzetim sonuçları	67
Çizelge 3.6.	Hesaplamalarda kullanılan Δx değerleri	68

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

u	x eksenindeki ortalama akım hızı (m/s)
h	Akış yüksekliği (m)
m	Kütle (kg)
a	İvme (m^2/s)
V	Hız vektörü (m/s)
c	Sığ sularda dalga ilerleme hızı (m/s)
μ	Viskozite ($N\cdot s/m^2$)
V	Hacim (m^3)
ν	Kinematik viskozite (m^2/s)
t	Zaman (s)
∇	Del operatörü
T	Sıcaklık ($^{\circ}C$)
ρ	Yoğunluk (kg/m^3)
δV	Hacimsel fark
δm	Kütlesel fark
τ	Kesme gerilmesi (N/m^2)
n	Manning pürüzlülük katsayısı
λ	İkinci viskozite ($N\cdot s/m^2$)
p	Basınç (N/m^2)
Q	Debi (m^3/s)
g	Yerçekimi ivmesi (m/s^2)
A	Islak kesit alanı (m^2)
η	Kanal tabanından yükseklik (m)
σ	Su yüzü genişliği (m)
b	Kanal genişliği (m)
K	Taşınım
Δx	Konumsal adım (m)
Δt	Zaman adımı (s)
Cr	Courant sayısı
R	Hidrolik yarıçap (m)

CFL	Courant Friedrich Lewy
SEY	Sonlu Elemanlar Yöntemleri
SFY	Sonlu Farklar Yöntemleri
SHY	Sonlu Hacimler Yöntemleri

1. GİRİŞ

Kentsel gelişim; bina çatıları, doğal taş kaplama alanlar, asfalt yollar, araba parkları gibi geçirimsiz yüzeylerin miktarlarını arttırmaktadır. Tüm bu yüzeylere düşen yağmur suyu da çok kısa sürede yüzey akışına geçmektedir. Yağış devam ettikçe yüzey akışı birikerek artarken yağışın şiddetine ve yağmur suyu drenaj şebekesinin durumuna da bağlı olarak bir takım olumsuzluklar meydana gelmektedir.

Yağmur suyu drenaj şebekelerinin amacı; yağmur suları bir taşkın etkisi oluşturarak trafiği olumsuz etkileyip insan ve yapılara zarar vermeye başlamadan önce yağmur suyunu etkili bir şekilde yer altında bulunan kanal ya da borulara almak ve suyu hızlı bir şekilde bir deşarj noktasına doğru insan ve yapılardan uzaklaştırmaktır.

Tüm altyapı tesisleri gibi yağmur suyu şebekelerinin de dikkatli bir şekilde planlanması gerekmektedir. Bir altyapı tesisi esasen üst yapılardan önce inşa edilir ve ekonomik ömrü boyunca meydana gelebilecek arızalar haricinde müdahale gerektirmez. Bir başka deyişle unutulur ve görevini yerine getirmeyi başaramayacağı ana kadar da unutulmuş olarak kalır.

Yüksek derecede şehirleşmiş ve kalabalık bir insan topluluğu tarafından paylaşılmakta olan bir bölgede, henüz ekonomik ömrünü tamamlamadan önce planlama ve tasarım hatalarından kaynaklanan yetersizliklerden dolayı, rehabilite edilmeye ya da yenilenmeye çalışılan bir alt yapı tesisi için kurulan şantiye ve devamında gerçekleştirilen inşaat işleri günlük yaşantı rutinini olumsuz etkiler. Geçmişte yapılmış olması gereken bir işin yeni baştan yapılıyor olması da maddi anlamda bir kayıptır. Alt yapı tesislerinin pahalı yatırımlar olması parasal anlamdaki bu kaybı kayda değer yapmaktadır.

Yağmur suyu şebekesi gibi altyapı tesislerinin projelendirilmesi işleri yerel otoriteler ve yetkili kurumlar tarafından yerine getirilir. Proje anlamında ihtiyaçların fazlalığından dolayı ise söz konusu otoriteler yapmakla yükümlü oldukları proje işlerini genellikle proje ve müteahhitlik firmalarına ihale ederler ve kendileri de

hazırlanan bu projelerin denetim ve onaylama işlerini üstlenirler. Sosyal ve ekonomik anlamda önemli sonuçlar doğurabilecek yağmur suyu şebekelerinin doğru olarak planlandığı ve tasarlandığından emin olunmalıdır.

Planlama işi daha çok, proje kapsamındaki işin kapasitesinden çok büyüklüğü ile ilgilidir. Örneğin, planlama sırasında bir bölgede gelecekte nüfusun ne kadar artacağı ve bunun sonucunda şehirleşmiş alanların ne kadar genişleyebileceği iyi tahmin edilmelidir. Bunun sonucunda, yapılması gerekli yağmur suyu şebekesinin ne kadar büyük olacağına (nerelere kadar ulaşacağına) karar verilecektir. Tasarım ise, planlaması yapılmış olan yağmur suyu şebekesinin hangi kapasitede olması (boru çaplarının ne kadar büyük olması) gerektiği ile ilgilidir.

Gereksiz derecede büyük kapasitede ya da yetersiz derecede küçük kapasitede inşa edilecek bir yağmur suyu şebekesi her iki durumda da para kaybı anlamına gelmektedir. Her iki durumdan da kaçınabilmek için projesi hazırlanarak yetkili otoritenin önüne onay için gelmiş olan şebekelerin yeterlilikleri ile ilgili bir denetim yapılması doğru olacaktır.

Onaya sunulmuş olan yağmur suyu şebekesi henüz sadece kağıt üzerinde olduğundan bu şebekenin inşa edilmesi planlanan bölgeye düşecek tipik bir yağış altında nasıl bir davranış sergileyeceği sadece sayısal ortamda modellenerek, model üzerinde bir yağış benzetimi yapılarak belirlenebilmektedir. Yağış ile yeryüzüne düşen yağmur suyunun bir şebeke içerisinde nasıl hareket edeceğinin gerçek zamanlı benzetiminin yapılabilmesi için sayısal akışkanlar dinamiği yöntemlerinden faydalanmak gerekmektedir.

Sayısal akışkanlar dinamiği, ortaya 1970'lerde çıkmıştır ve o tarihlerde akımların benzetimini yapmak için faydalanılmakta olan fizik, nümerik matematik ve belli ölçüde de bilgisayar bilimini ifade eder şekilde anılmaya başlanmıştır [18]. Günümüzde ise sayısal akışkanlar dinamiğindeki ilerlemeler bilgisayar teknolojisindeki ilerlemeler ile yakından ilişkilidir. Bilgisayarlar sayesinde milyonlarca işlem gerçekleştirilerek su ve gaz gibi akışkanların karmaşık davranışlarının benzetimi yapılabilmektedir. Bununla birlikte günümüzün en güçlü bilgisayarlarıyla bile, elde edilen sonuçlar sadece yaklaşık sonuçlar olabilmektedir.

Bu çalışmada, verilmiş olan bir yağmur suyu şebekesinin yağış altındaki davranışının benzetimini yapmak için sayısal akışkanlar dinamiği alanında yaygın olarak kullanılmakta olan MacCormack yönteminden faydalanılmıştır. Klasik anlamdaki ve geliştirilmiş MacCormack yöntemleri ile yapılmış olan çalışmalar diğer yöntemlere göre daha ucuz (kullandıkları bilgisayar kaynakları anlamında) olmakla birlikte daha pahalı olan sofistike yöntemlerle kıyaslandıklarında oldukça iyi sonuçlar verdikleri grlmektedir [14].

2. TEORİ

2.1 Korunum Kanunları

Bu tezin kapsamında olan ve şebeke içerisinde su akımını modellemek için ihtiyaç duyulan maddenin ve momentumun korunumu gibi kanunların fiziksel ilkelerden nasıl çıktığını görmek için örneğin tek boyutlu bir tüp içerisinde hareket eden bir sıvı ele alınabilir. Burada verilmekte olan örnek büyük ölçüde Leveque [17]'den alıntıdır.

Hareket etmekte olan sıvının, tüpün içerisindeki hızı $u(x, t)$ verilmiştir ve bu değişkenin, sadece tüp boyunca konum x ve zaman t 'ye bağlı olduğu kabul edilmektedir. Akışkanlar dinamiği problemlerinde çözümün bir parçası olarak genellikle akışkanın hareketini yani hızını belirlemek gerekli olmaktadır. Elimizdeki örnekte ise hızın, zamana ve konuma bağlı olarak bilindiği ve akışkan yani sıvı içerisinde bulunan bir kimyasalın yoğunluğunun modellenmesi istenilmektedir. Kimyasal maddenin sıvı içerisinde çok az miktarlarda bulunduğu ve akışkanın dinamiklerini etkilemediği varsayılmaktadır. Burada $q(x, t)$, sıvı içerisinde bulunmakta olan kimyasalın yoğunluğunu vermekte olan fonksiyondur ve belirlenmesi istenilmektedir.

Yoğunluk genellikle birim hacimde kütle olarak ölçülmektedir ancak yoğunluktaki değişikliklerin sadece x 'e bağlı olarak gerçekleştiği tek boyutlu bir tüp akımında q 'nin birim uzunluktaki kütle miktarı olarak ölçüldüğünü varsaymak daha doğal olmaktadır (örneğin gram/metre gibi). Bahsedilen bu yoğunluk (q olarak ifade edilen), üç boyutlu yoğunluk fonksiyonunun tüpün kesit alanı ile çarpılması sonucu elde edilebilmektedir. Bu durumda;

$$\int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx \quad (2.1)$$

tüpün x_1 ve x_2 arasındaki kısmında belirli bir zaman olan t 'de kimyasal maddenin toplam kütesini vermektedir.

Tüpün $x_1 < x < x_2$ ile ifade edilen belli bir kısmında (2.1) ile verilen integralin zaman içerisinde değiştiği düşünülebilir. Eğer incelenmekte olan kimyasal madde tüpün verilen kısmında yok olmuyor ya da var edilemiyorsa o halde tüpün x_1 ile x_2 arasında kalan kısmında kimyasal maddenin toplam kütesi sadece x_1 ve x_2 'den gerçekleşen kimyasal madde parçacıklarının akımı ile gerçekleşebilir. $i = 1,2$ için sabit x_i noktasından gerçekleşen kimyasal madde akımının hızı (örneğin gram/saniye cinsinden) $F_i(t)$ olarak tanımlanabilir ve değeri sadece t 'ye bağlıdır. $F_i(t)$ i kesitindeki akışkan içerisinde bulunan kimyasal madde akımının hızıdır, $u(x, t)$ ise akışkanın hızıdır. $F_i(t) > 0$ olduğunda akımın soldan sağa, $F_i(t) < 0$ olduğunda ise sağdan sola olduğu kabul edilmektedir. $[x_1, x_2]$ kısmındaki toplam kütle sadece uç noktalarda meydana gelen akılara bağlı olarak değiştiğinden aşağıdaki ifade elde edilebilir:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = F_1(t) - F_2(t). \quad (2.2)$$

Burada $+ F_1(t)$ ve $- F_2(t)$ tüpün x_1 ile x_2 arasında kalan kısmı içerisine doğru olan akımı vermektedir.

(2.2) ile verilen denklem bir korunum yasasının temel integral formudur. Toplam kütledeki değişimin hızı sadece uç noktalardan meydana gelen akıya bağlıdır ve bu durum korunumun temelini oluşturmaktadır. Bu aşamada akı fonksiyonu olan $F_j(t)$ 'nin, $q(x, t)$ ile nasıl bir ilişki içerisinde olduğunun belirlenmesi q için çözülebilir bir bağıntı elde edilmesini sağlayabilecektir. Yukarıda anlatıldığı şekilde bir akışkan akımında her hangi bir x_j noktasında t anındaki akı basitçe yoğunluk $q(x, t)$ 'nin hız $u(x, t)$ ile çarpımına eşit olmaktadır ve bu durum aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$F_i(t) = u(x_j, t)q(x_j, t) \quad (2.3)$$

Hız x_j noktasından kimyasal madde parçacıklarının ne kadar çabuk geçtiğini söylemektedir (örneğin metre/saniye olarak). Yoğunluk q ise bir metrelik bir sıvının ne miktarda kimyasal madde kütlesi taşıdığını söylemektedir (örneğin gram/metre olarak). Bu durumda hız ve yoğunluğun çarpımı gerçekten de bu noktadan kimyasal madde kütlesinin geçiş hızını vermektedir.

$u(x, t)$ bilinen bir fonksiyon olduğundan akı fonksiyonunu aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür.

$$Akı = f(q, x, t) = u(x, t)q(x, t) \quad (2.4)$$

Hızın x ve t 'ye bağlı olmaksızın sabit olduğu bir durumda ($u(x, t) = u_0$) akı fonksiyonu için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$Akı = f(q) = u_0q \quad (2.5)$$

Bu durumda her hangi bir nokta ve andaki akı o noktadaki korunan niceliğin değerinden elde edilebilmektedir ve noktanın uzay-zamandaki konumuna bağlı olmamaktadır.

(2.5) ile verilmekte olan ve sadece q 'nin değerine bağlı olan genel bir akı fonksiyonu $f(q)$ için korunum yasası (2.2) aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = f(q(x_1, t)) - f(q(x_2, t)) \quad (2.6)$$

Bu denklemin sağ tarafı cebirin standart notasyonu kullanılarak yeniden yazılabilir.

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = -f(q(x, t)) \Big|_{x_1}^{x_2} \quad (2.7)$$

Bu kısa gösterim akının karmaşık bir yapısı olduğu durumlarda faydalı olabilecektir ve aynı zamanda da aşağıda gerçekleştirilen manipulasyonlar sayesinde q 'nın diferansiyel formunun elde edilebilmesini sağlamaktadır.

Akı fonksiyonu $f(q)$ örneğin (2.5) ile bir kez belirlendikten sonra q için çözümlenebilirliği olan bir denklem elde edilmiş olmaktadır. Bu denklem, gelişmiş x_1 ve x_2 değerlerine bağlı her $[x_1, x_2]$ aralığı için geçerli olmalıdır. Verilmiş olan şartı sağlayan bir $q(x, t)$ fonksiyonunun nasıl bulunabileceği ise açık değildir. Bu problemi doğrudan çözmeye çalışmak yerine söz konusu denklem, standart tekniklerle çözülebilecek bir kısmi türevli diferansiyel denklem haline dönüştürülebilir. Bunun yapılabilmesi için aşağıda verilmekte olan manipulasyonların geçerli olmasını sağlayacak şekilde $q(x, t)$ ve $f(q)$ fonksiyonlarının yeterince düzgün (smooth) olduğunun kabul edilmesi gerekmektedir.

q ve f 'nin düzgün fonksiyonlar oldukları varsayıldıkları takdirde (2.7) denklemini aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilmektedir.

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} q(x, t) dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} f(q(x, t)) dx \quad (2.8)$$

(2.8) düzenlenirse aşağıdaki denklem elde edilebilmektedir.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(q(x, t)) \right] dx = 0 \quad (2.9)$$

Bu integralin tüm x_1 ve x_2 değerleri için sıfıra eşit olması gerektiğinden integral içerisinde kalan ifadenin sıfıra eşit olması zorunlu hale gelmektedir. Sonuç olarak aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilebilmektedir.

$$\frac{\partial}{\partial t} q(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(q(x, t)) = 0 \quad (2.10)$$

(2.10) ile verilmekte olan denklem korunum yasalarının diferansiyel formu olmaktadır.

2.2 Temel Akışkanlar Dinamiği Denklemleri

Akışkanlar dinamiğinin temel denklemleri, kütle ve enerjinin korunumu ilkeleri ve Newton'un ikinci yasasından faydalanılarak türetilmektedir. Bu yapılırken aşağıdaki adımların izlenmesi gerekmektedir [7]:

1-Fizik kanunlarından uygun olan temel fiziksel ilkeler seçilir:

- a) Kütle korunmaktadır
- b) $F = ma$ (Newton'un ikinci kanunu)
- c) Enerji korunmaktadır

2-Bu fiziksel ilkeler akımın uygun bir modeline uygulanır.

3-Yapılana uygulama sonucunda söz konusu fiziksel ilkeleri kapsayan matematiksel denklemler alınır.

Yukarıda verilen ikinci maddenin gerçekleştirilebilmesi için akımın uygun bir modelinin seçilmesi gerekmektedir. Katı bir maddeyi görmek ve tanımlamak nispeten kolaydır. Öte yandan bir akışkan elle tutulması mümkün olmayan yumuşak bir yapıdadır. Katı bir madde konum değiştirmesine neden olan bir hareket halindeyken maddenin her bir parçası aynı hızda hareket etmektedir, bir akışkan benzer bir hareket halindeyken ise akışkanın her bir noktasında hız farklı olabilmektedir. Bu durumda fiziksel ilkeleri uygulayabilmek için hareket eden bir akışkanın nasıl ele alınacağına karar vermek gerekmektedir.

Sürekli olan bir akışkanda diferansiyel bir dV hacmine sahip örneğin küp şekilli bir akışkan elemanı düşünülebilir. Bu akışkan elemanı akışkan içerisinde akmaktadır ve diferansiyel cebir anlamında sonsuz küçük olmakla beraber, sürekli bir ortam olarak düşünülebilmesini sağlayacak kadar da büyüktür ve içerisinde çok fazla sayıda moleküller barındırmaktadır. Söz konusu akışkan elemanı bir hız vektörü V ile belirli bir yol izliyor ve bu hız vektörü de izlediği yolun her noktasındaki akış

hızına eşit olabilir. Bu yaklaşım sayesinde tüm akışkan alanı ile ilgilenmek yerine temel fiziksel ilkeler sadece sonsuz küçük akışkan elemanına uygulanmaktadır. Sonuç olarak temel denklemler kısmi türevli denklemler biçiminde elde edilmiş olmaktadır. Akışkan ile birlikte hareket eden akışkan elemanından elde edilen söz konusu kısmi türevli diferansiyel denklemler temel denklemlerin korunumlu olmayan biçiminde olmaktadır.

Devam eden bölümlerde temel akışkanlar dinamiği denklemlerini çıkarabilmek için öncelikle süreklilik hipotezinden bahsetmek gerekmektedir.

2.2.1 Süreklilik hipotezi

Akışkanlar, moleküler yapıları harici kesme kuvvetlerine karşı hiçbir direnç göstermeyen ve en küçük kuvvetler karşısında bile kolayca deforme olan oluşumlardır. Fiziksel olarak farklılıklar gösterebilirler de sıvılar da, gazlar da akışkan olarak tanımlanmaktadır. Bir uçağın etrafında meydana gelen hava akımı ya da bir nehirdeki su akıntısının hareketi gibi pratik problemler söz konusu olduğunda söz konusu akışkan (hava ya da su) sürekli bir madde gibi kabul edilebilir. Bu kabule süreklilik hipotezi denilmektedir. Akışkanların dinamikleri; kütle, momentum ve enerjinin korunumu olarak adlandırılan klasik fiziğin korunum kanunları tarafından yönetilmektedir. Bu kanunlardan kısmi türevli diferansiyel denklemler elde edilmekte ve uygun koşullar altında basitleştirilmektedirler. Korunum kanunları geleneksel olarak akışkanın sürekli bir ortam olduğu kabulü altında yani süreklilik hipotezi sayesinde formülize edilebilmektedir. Bu şekilde akışkanın, yoğunluk ve hız gibi fiziksel özellikleri akışkanın kapladığı uzayda zamana dayalı skalar ve vektör alanları olarak tarif edilebilirler [16]. Buna göre uzaydaki bir nokta matematiksel anlamda bir nokta olmaktan çok aslında küçük bir akışkan parçasını ifade etmektedir ve bu akışkan parçasını pek çok molekül meydana getirmektedir. Böylece akışkan içerisindeki bir nokta moleküler düzeyin üzerinde olmakla beraber o noktadaki fiziksel özellikleri aslında orada bulunmakta olan moleküller belirlemektedir. Süreklilik hipotezi sayesinde tek tek moleküller (ya da onları meydana getiren daha alt parçacıklar) ile ilgilenmek yerine onların ortaklaşa meydana getirdikleri özellikler ile ilgilenilmektedir.

Akışkanların hareketlerini analiz edebilmek açısından akışkanın sürekli bir ortam olarak düşünülmesi gerekli olmaktadır. 1 μm ve üzerindeki makroskopik boyutlarda gerçekleşen akışkan akımlarının analizinde maddenin moleküler yapısı ve moleküler hareketler göz ardı edilebilmektedir [8]. Bu durumda akışkanın davranışı, hız, basınç, yoğunluk ve sıcaklık gibi makroskopik özellikler ve bu özelliklerin uzay ve zaman türevleri cinsinden ifade edilir. Bu özellikler yeterince büyük sayıdaki moleküllerin ortalaması gibi düşünülebilir. Böylece bir akışkan parçacığı ya da akışkan içerisindeki bir nokta, makroskopik özellikleri bireysel moleküller tarafından etkilenmeyen en küçük akışkan elemanı olmaktadır.

Akışkanlar dinamiğinin temel denklemleri elde edilirken hareket eden bir akışkan elemanı modelinden faydalanılacaktır. Bu nedenle hareket eden bir akışkan elemanı ile ilgili özelliklerin zamana karşı olan değişim hızını ifade eden büyük türevden bahsetmek gerekmektedir. Devam eden bölümler çoğunlukla Anderson [7]'dan alınmıştır.

2.2.2 Büyük türev

Akışkan akımı ile birlikte hareket etmekte olan akışkan elemanının üç boyutlu kartezyen uzayında hareket ettiği düşünülebilir. x , y ve z eksenleri boyunca birim vektörler sırasıyla \mathbf{i} , \mathbf{j} ve \mathbf{k} olarak verilmiştir. Bu durumda bu kartezyen uzayındaki hız vektör alanı aşağıda ifade ile verilebilmektedir.

$$\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (2.11)$$

Hız vektörünün x , y ve z bileşenleri sırasıyla aşağıdaki ifadeler ile verilmektedir:

$$u = u(x, y, z, t) \quad (2.12a)$$

$$v = v(x, y, z, t) \quad (2.12b)$$

$$w = w(x, y, z, t) \quad (2.12c)$$

Sayısal yoğunluk alanı ise aşağıdaki şekildedir:

$$\rho = \rho(x, y, z, t) \quad (2.13)$$

Bir t_1 anında (x_1, y_1, z_1) konumunda akışkan elemanın yoğunluğu:

$$\rho_1 = \rho(x_1, y_1, z_1, t_1)$$

Aynı akışkan elemanın diğer bir t_2 anı ve (x_2, y_2, z_2) konumunda sahip olduğu yoğunluk ise:

$$\rho_2 = \rho(x_2, y_2, z_2, t_2)$$

$\rho = \rho(x, y, z, t)$ olduğundan bu fonksiyon 1 noktası yakınında Taylor serisi ile aşağıdaki şekilde açılabilmektedir.

$$\begin{aligned} \rho_2 = \rho_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 (x_2 - x_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 (y_2 - y_1) \\ + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 (z_2 - z_1) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 (t_2 - t_1) + \\ \text{(yüksek dereceli terimler)} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Bu açılımı $(t_2 - t_1)$ 'e bölerek ve yüksek dereceli terimleri ihmal ederek aşağıdaki denklem elde edilmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} = \left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)_1 \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)_1 \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \\ + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_1 \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1} + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Yukarıdaki denklemin sol tarafı, akışkan elemanı 1 noktasından 2 noktasına doğru hareket ederken akışkan elemanının yoğunluğundaki değişim hızının ortalamasıdır. t_2 'nin t_1 'e yaklaştığı limit değerinde bu terim aşağıdaki şekli almaktadır:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\rho_2 - \rho_1}{t_2 - t_1} \equiv \frac{D\rho}{Dt} \quad (2.16)$$

Burada $D\rho / Dt$, 1 noktasından geçen akışkan elemanının anlık olarak yoğunluğunun zamana göre değişim hızını ifade etmektedir. Tanım olarak D / Dt sembolü büyük türev olarak isimlendirilmektedir. $(D\rho / Dt)_1$, sabit olan 1 noktasındaki yoğunluğun zamana göre değişim hızını veren $(\partial\rho / \partial t)_1$ 'den farklıdır. $(D\rho / Dt)_1$, hareket ederken akışkan elemanının 1 noktasından geçen geçirdiği değişiklik ile ilgilidir, $(\partial\rho / \partial t)_1$ ise sabit 1 noktasında akım alanındaki geçici dalgalanmalar sonucunda o noktada meydana gelen yoğunluk değişimi ile ilgilidir. Bu bakımdan bu iki ifade fiziksel ve nümerik olarak farklı büyüklüklerdir. Konumdaki değişimin zamandaki değişime oranı $t_2 \rightarrow t_1$ limitinde hızı verdiği için ve x , y ve z yönlerindeki hızlar sırasıyla u , v ve w ile ifade edildiğinden (2.15) aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilmektedir.

$$\frac{D\rho}{Dt} = u \frac{\partial\rho}{\partial x} + v \frac{\partial\rho}{\partial y} + w \frac{\partial\rho}{\partial z} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \quad (2.17)$$

Yukarıda verilmiş olan denklem incelendiğinde büyük türev D / Dt için kartezyen koordinatlarında aşağıdaki ifadenin yazılabileceği görülmektedir.

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.18)$$

Bununla birlikte kartezyen koordinatlarında vektör operatörü ∇ aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\nabla \equiv \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.19)$$

Bu durumda (2.18) ifadesi aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir.

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \quad (2.20)$$

Yukarıdaki denklem büyük türev operatörünü vektör notasyonunda ifade ettiğinden her koordinat sisteminde geçerli olmaktadır.

Yerel türev olarak anılan ve sabit bir noktadaki zamana göre değişim hızını veren $\partial / \partial t$ ifadesinden farklı olarak D / Dt , hareket eden bir akışkan elemanını takip ederken meydana gelen zamana göre değişim hızını ifade etmektedir. $\mathbf{V} \cdot \nabla$ ise iletimli türev olarak anılmaktadır ve akışkan elemanının, akım özelliklerinin konumsal olarak farklı olduğu akım alanı içerisindeki noktalar arasında hareket ederken meydana gelen zamana göre değişim hızını ifade etmektedir. Büyük türev her tür akım-alanı değişkenine (örneğin basınç p için Dp / Dt , sıcaklık T için DT / Dt vb.) uygulanabilmektedir. Büyük türev, cebirsel anlamda zamana göre alınmış toplam türev (total derivative) d / dt 'ye eşdeğerdir.

2.2.3 Hızın iraksamasının fiziksel anlamı

Hızın iraksamasını ifade eden $\nabla \cdot \mathbf{V}$ 'yi anlamak için akışkan ile hareket etmekte olan bir kontrol hacmi düşünülebilir. Söz konusu kontrol hacmi akım ile birlikte hareket ederken sürekli olarak aynı akışkan parçacıklarından meydana gelmektedir. Bu bakımdan kütle sabittir ve zamanla değişmemektedir. Bununla beraber söz konusu kontrol hacmi farklı ρ değerlerinin olduğu akımın farklı bölgelerine zaman içerisinde hareket ederken hacmi V ve kontrol yüzeyi S değişmektedir. Sabit kütleye sahip olan kontrol hacmi, akımın karakteristiklerin bağlı olarak hacmini sürekli olarak azaltmakta ya da arttırmaktadır ve şekli de

sürekli olarak değişmektedir. Kontrol hacminin sürekli değişmekte olan yüzeyi üzerinde yerel \mathbf{V} hızı ile hareket etmekte olan sonsuz küçük bir yüzey elemanı dS düşünülebilir. Δt zaman artışında sadece dS 'nin hareketi sonucunda kontrol hacminde meydana gelen hacimdeki değişim ΔV , dS 'nin hareketi sonucunda meydana gelen ve taban alanı dS , yüksekliği $(\mathbf{V}\Delta t) \cdot \mathbf{n}$ olan hayali bir hacme eşit olmaktadır. Burada \mathbf{n} , dS yüzeyine dik olan birim vektördür.

$$\Delta V = [(\mathbf{V}\Delta t) \cdot \mathbf{n}]dS = (\mathbf{V}\Delta t) \cdot \mathbf{dS} \quad (2.21)$$

Burada \mathbf{dS} , $\mathbf{n}dS$ 'ye eşit olarak tanımlanmaktadır. Zamandaki artış olan Δt 'de tüm kontrol hacminde meydana gelen toplam değişim (2.21) denkleminin tüm kontrol yüzeyi üzerindeki toplamına eşit olmaktadır. \mathbf{dS} 'nin sifıra yaklaştığı limit değerinde söz konusu toplam aşağıda verilmekte olan yüzey integrali haline gelmektedir.

$$\iint_S (\mathbf{V}\Delta t) \cdot \mathbf{dS} \quad (2.22)$$

Yukarıdaki integral Δt ile bölünürse sonuç DV / Dt ile gösterilmekte olan kontrol hacminin zamandaki değişim hızı olmaktadır:

$$\frac{DV}{Dt} = \frac{1}{\Delta t} \iint_S (\mathbf{V}\Delta t) \cdot \mathbf{dS} = \iint_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{dS} \quad (2.23)$$

Yukarıdaki ifadedenin sol tarafı büyük türev olarak yazılmıştır. Bunun sebebi kontrol hacminin akım ile hareket ediyor olmasıdır ve büyük türev de böylesi durumlarda meydana gelen zamana göre değişim hızlarını ifade etmektedir. Bu ifadenin sağ tarafına vektör cebirindeki İraksama teoremi uygulandığında aşağıdaki bağıntı elde edilmektedir.

$$\frac{DV}{Dt} = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{V})dV \quad (2.24)$$

Bu aşamada, hareket etmekte olan kontrol hacminin çekerek esasında sonsuz küçük olarak düşünülebiyecek çok küçük bir hacim olan δV 'ye dönüştüğü varsayılırsa yukarıdaki ifade aşağıdaki hali almaktadır.

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = \iiint_{\delta V} (\nabla \cdot \mathbf{V}) dV \quad (2.25)$$

$\nabla \cdot \mathbf{V}$ 'nin tüm δV boyunca sabit bir değere sahip olacak şekilde δV 'nin yeterince küçük olduğu düşünöldüğünde yukarıdaki integral, δV 'nin sifıra yaklaştığı limit değerinde $(\nabla \cdot \mathbf{V})\delta V$ haline gelmektedir. Böylece yukarıdaki denklemden aşağıdaki ifade elde edilmektedir.

$$\frac{D(\delta V)}{Dt} = (\nabla \cdot \mathbf{V})\delta V$$

ya da

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt} \quad (2.26)$$

Bu bağıntıdan görölmektedir ki hızın ıraksaması $\nabla \cdot \mathbf{V}$, fiziksel anlam olarak, hareket etmekte olan bir akışkan elemanın birim hacim başına hacmindeki zamana göre değişim hızını ifade etmektedir.

2.2.4 Süreklilik denklemi

Süreklilik denklemini elde edebilmek için akışkan ile beraber hareket etmekte olan sonsuz küçük akışkan elemanına, kütlenin korunduğunu söyleyen fizik yasasını uygulamak gerekmektedir. Söz konusu akışkan elemanın kütlesi sabittir ancak akım ile birlikte hareket ederken genelde şekli ve hacmi değişken olabilmektedir. Elemanın sabit kütlesi ve değişken hacmi sırasıyla δm ve δV ile ifade edilebilir. Bu durumda,

$$\delta m = \rho \delta V \quad (2.27)$$

Kütle korunmakta olduğundan akışkan elemanı akım ile birlikte hareket ederken kütlelerinin zamana göre değişim hızının sıfır olduğu söylenilebilmektedir. Büyük türevin anlamı dikkate alındığında aşağıdaki ifade elde edilmektedir.

$$\frac{D(\delta m)}{Dt} = 0 \quad (2.28)$$

(2.27) ve (2.28) denklemleri biraraya getirildiğinde:

$$\frac{D(\rho\delta V)}{Dt} = \delta V \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{D(\delta V)}{Dt} = 0$$

ya da;

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left[\frac{1}{\delta V} \frac{D(\delta V)}{Dt} \right] = 0 \quad (2.29)$$

Yukarıdaki denklemde köşeli parantezler içerisinde verilmekte olan terim fiziksel olarak $\nabla \cdot \mathbf{V}$ 'ye eşdeğerdir. Böylelikle (2.29) aşağıdaki gibi yazılabilmektedir.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.30)$$

(2.30) bağıntısı, süreklilik denkleminin kısmi türevli diferansiyel denklemi biçimindedir. Süreklilik denkleminin bu biçimde elde edilmiş olmasının sebebi türetme işleminin sonsuz küçük bir akışkan elemanından faydalanılarak yapılmış olmasıdır. Bu ifadeyi içerisinde büyük türev operatörünün uygulanmadığı bir formda da yazmak mümkündür. Büyük türev operatörünün tanımından yola çıkarak yukarıda verilmekte olan denklem aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla \rho) + (\rho \nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (2.31)$$

Bir skalar ile bir vektörün çarpımının ıraksaması aşağıdaki şekildedir.

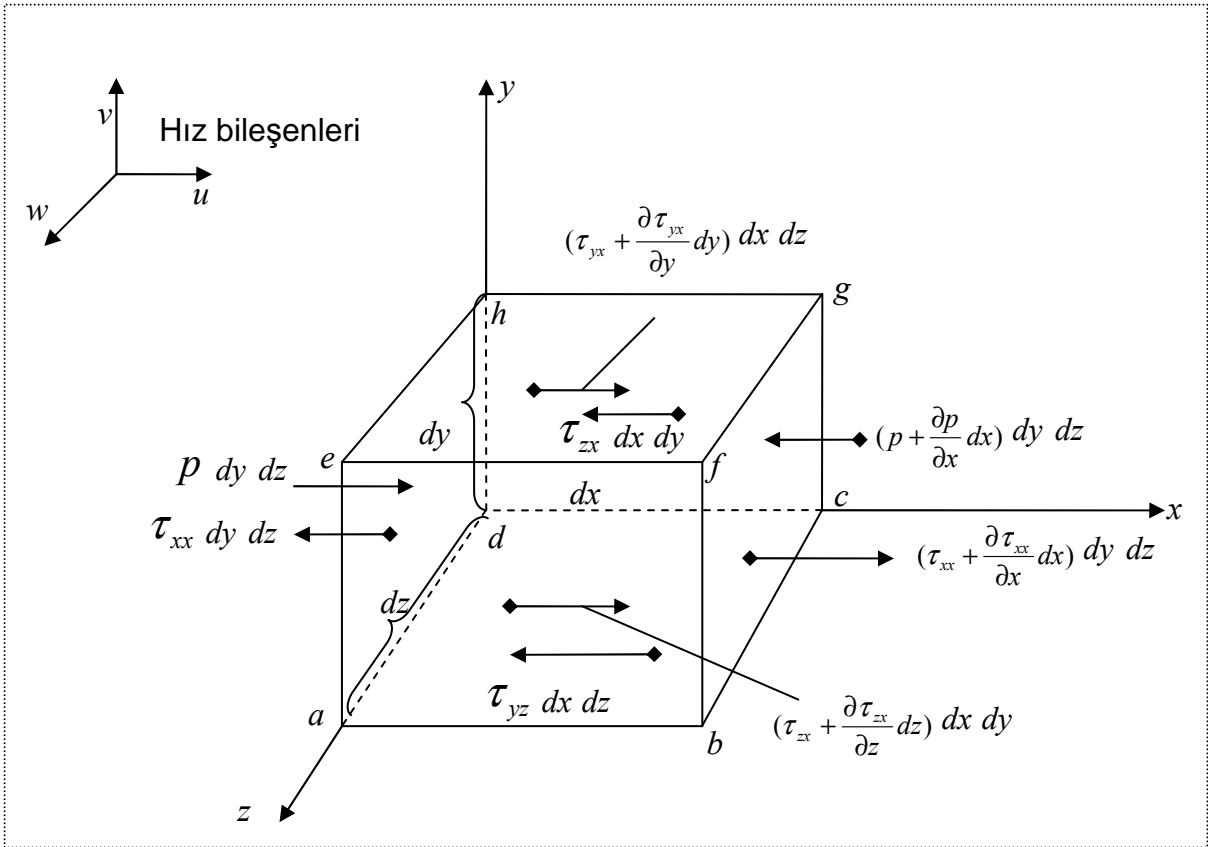
$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \equiv (\rho \nabla \cdot \mathbf{V}) + (\mathbf{V} \cdot \nabla \rho) \quad (2.32)$$

Bu ifadeden faydalanarak (2.31)'i sadeleştirirsek;

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.33)$$

2.2.5 Momentum denklemi

Momentum denklemi elde etmek için uygulanması gereken fiziksel ilke $F = ma$ olarak ifade edilmekte olan Newton'un ikinci kanunudur. Burada F kuvveti, m kütleyi, a ise ivmeyi ifade etmektedir. Şekil 2.1'de momentum denkleminin elde edilmesi için kullanılacak olan sonsuz küçük akışkan elemanı gösterilmektedir.



Şekil 2.1. Hareket eden sonsuz küçük akışkan elemanına x doğrultusunda etkiyen kuvvetler

Yukarıdaki şekilde verilmiş olan, hareket eden akışkan elemanına Newton'un ikinci yasası uygulandığında, akışkan elemanına uygulanan net kuvvet, kütesinin ivmesine çarpımına eşit olmaktadır. Bu bir vektörel ilişkidir ve x , y ve z eksenlerinde üç adet skalar ilişkiye ayrılabilir. Momentum denklemini çıkarmak için sadece x bileşeni için Newton'un ikinci yasası ele alınabilir.

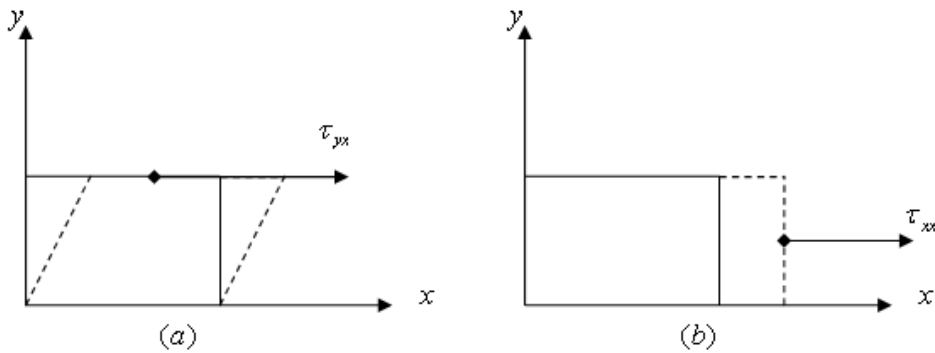
$$F_x = ma_x \quad (2.34)$$

Burada F_x ve a_x x doğrultusunda kuvvet ve ivmenin skalar bileşenleridir.

Hareket etmekte olan akışkan elemanına x doğrultusunda etkimekte olan F_x kuvvetinin iki kaynağı bulunmaktadır:

1-Gövde Kuvvetleri: Bu kuvvetler akışkan elemanının hacimsel kütesine belli bir mesafeden etkimektedir. Bu kuvvetlere örnek olarak yerçekimi kuvveti, elektriksel ve manyetik kuvvetler verilebilir.

2- Yüzey Kuvvetleri: Bu kuvvetler doğrudan akışkan elemanının yüzeyine etki etmektedir ve iki adet kaynaktan ortaya çıkmaktadırlar. Birincisi, akışkan elemanını saran dışarıdaki akışkanın yarattığı ve akışkan elemanının yüzeyine etkileyen basınç dağılımıdır. İkincisi ise yine dışarıdaki akışkanın sürtünme sayesinde akışkan elemanını çekmesi ve itmesi sonucu ortaya çıkan ve akışkan elemanının yüzeyine etki eden kesme ve normal gerilim dağılımlarıdır.



Şekil 2.2. Akışkan elemanına etkiyen yüzeysel kuvvetler a) kesme gerilmesi b) normal gerilme

Akışkan elemanın birim kütesine etkiyen gövde kuvveti, x bileşeni f_x olmak üzere f ile ifade edilebilir. Akışkan elemanın hacmi $dx dy dz$ ile verilmektedir. Bu durumda akışkan elemanına x yönünde etkiyen gövde kuvveti $\rho f_x dx dy dz$ olmaktadır.

Bir akışkan içerisindeki kesme ve normal gerilmeler, akışkan elemanın zamana göre deforme olma hızı ile ilişkilidir. Sadece xy düzlemi düşünülüğünde τ_{xy} ile ifade edilen kesme gerilmesi akışkan elemanın kesme deformasyonunun zamandaki değişim hızı ile ilişkilidir. τ_{xx} ile ifade edilen normal gerilme ise akışkan elemanın hacminin zamanda değişim hızı ile ilgilidir. Sonuç olarak kesme ve normal gerilmeler akışkan içerisindeki hız gradyanlarına bağlı olmaktadır. Çoğu viskoz akımda normal gerilmeler, kesme gerilmelerinden çok daha küçük olmakta ve çoğu kez ihmal edilebilmektedir. Normal gerilmeler, örneğin bir şok dalga içerisinde normal hız gradyanları çok büyüdüğünde önemli hale gelmektedir.

x yönünde akışkan elemanına etkiyen yüzey kuvvetleri Şekil 2.1.'de gösterilmektedir. Bu şekilde kullanılan konvansiyona göre τ_{ij} , i eksenine dik olan bir düzlemde j yönünde etkiyen gerilmeyi ifade etmektedir. $abcd$ yüzünde x yönündeki tek kuvvet kesme gerilmesinden kaynaklanan $\tau_{yx} dx dz$ 'dir. $efgh$ yüzü $abcd$ yüzünden dy kadar bir mesafe yukarıdadır, dolayısıyla da $efgh$ yüzünde x yönündeki kesme kuvveti $[\tau_{yx} + (\partial \tau_{yx} / \partial y) dy] dx dz$ 'dir. $abcd$ ve $efgh$ yüzlerinde kesme kuvvetleri zıt yönlerdedir. u , v ve w hız bileşenlerindeki pozitif artışlar eksenlerin pozitif yönlerinde gerçekleşmektedir; söz konusu zıt yönler bu konvansiyon ile tutarlıdır. Örneğin $efgh$ yüzünün hemen üzerindeki u hızı yüzeydeki hızdan daha büyüktür, bu da akışkan elemanı üzerinde pozitif x yönünde bir asılma etkisi oluşturmaktadır. Benzer şekilde $abcd$ yüzünün hemen altındaki u hızı yüzeydeki u hızından küçüktür, bu da akışkan elemanı üzerinde negatif x yönünde bir çekme etkisi oluşturmaktadır. x eksenine dik olan adhe yüzeyinde x yönündeki kuvvetler, her zaman akışkan elemanın içerisine doğru etkiyen basınç kuvveti $p dz dy$ ve negatif x yönündeki $\tau_{xx} dz dy$ kuvvetidir. Burada

da yukarıda bahsedilen durum söz konusudur ve adhe yüzeyinin hemen solundaki u hızı yüzeydeki u hızından küçük olduğundan viskozitenin etkisinden kaynaklanan normal gerilme, akışkan elemanını negatif x yönünde çekmek başka bir deyişle x yönündeki hareketini yavaşlatmak istemektedir. bçgf yüzünde ise basınç kuvveti $[p + \partial p / \partial x] dx dy dz$, akışkan elemanının içerisine doğru etki etmektedir ve u hızı bçgf yüzünün hemen sağında olduğundan daha büyüktür ve viskoz normal gerilme akışkan elemanını $[\tau_{xx} + (\partial \tau_{xx} / \partial x) dx] dy dz$ 'ye eşit olan bir kuvvet ile pozitif x yönünde çekmeye çalışmaktadır.

Yukarıdaki tartışma göz önünde bulundurularak hareket eden akışkan elemanına x yönünde etki etmekte olan net yüzey kuvveti için aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\begin{aligned}
 & x \text{ doğrultusundaki net yüzey kuvvet} = \\
 & \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \right) dx \right] dy dz + \left[\left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) - \tau_{xx} \right] dy dz + \\
 & \left[\left(\tau_{yx} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) - \tau_{yx} \right] dx dz + \left[\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) - \tau_{zx} \right] dx dy
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Akışkan elemanına x yönünde etki etmekte olan toplam net kuvvet, x yönünde etkiyen net yüzey kuvveti ile gövde kuvvetlerinin toplamıdır ve aşağıdaki gibidir.

$$F_x = \left[- \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] dx dy dz + \rho f_x dx dy dz \tag{2.36}$$

Akışkan elemanının kütlesi sabittir ve $m = \rho dx dy dz$ ile ifade edilmektedir. İvmesi ise sahip olduğu hızın zamanda değişim hızına eşittir ve x yönündeki bileşeni u 'nun zamandaki değişim hızına eşittir. Hareket etmekte olan bir akışkan elemanı ele alındığından zamana göre değişim hızı büyük türev ile verilmektedir ve $ax = Du / Dt$ şeklindedir.

(2.36), $\rho dx dy dz Du / Dt$ 'ye eşit olduğunda Newton'un ikinci kanunu, x , y ve z doğrultularında aşağıdaki şekillerde yazılabilmektedir.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (2.37a)$$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (2.37b)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (2.37c)$$

Yukarıda verilmekte olan denklemler x , y ve z doğrultularında kısmi türevli diferansiyel denklemler biçimindeki momentum denklemleridir ve Navier-Stokes Denklemleri olarak anılmaktadır. Bu denklemler hareket eden sonsuz küçük bir akışkan elemanı kullanılarak elde edildiklerinden büyük türev operatörü uygulanmış terimler içermektedirler. Büyük türev operatörünün tanımından faydalanıldığında x yönündeki momentum denkleminin sol tarafı aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla u \quad (2.38)$$

Aşağıda verilmekte olan türev açıldığında;

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} = \rho \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Bu ifade düzenlendiğinde;

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.39)$$

Bir skalar ile bir vektörün çarpımının ıraksaması aşağıdaki şekildedir.

$$\nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) = u \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + (\rho \mathbf{V}) \cdot \nabla u \quad (2.40)$$

Bu ifade farklı yazılırsa;

$$\rho \mathbf{V} \cdot \nabla u - \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) - u \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \quad (2.41)$$

(2.39) denklemine (2.40) ve (2.41) denklemleri yerleştirilirse;

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \frac{\partial \rho}{\partial t} - u \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) \\ &= \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} - u \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) \right] + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

Yukarıdaki denklemde köşeli parantezler arasında yer alan terim daha önce elde edilmiş olan süreklilik denkleminin sol tarafıdır ve dolayısıyla da sifıra eşittir. Böylelikle yukarıdaki denklem aşağıdaki hali almaktadır.

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) \quad (2.43)$$

Elde edilmiş olan bu bağıntı ve diğer yönlerdeki benzerleri momentum denklemlerine yerleştirilirse aşağıdaki denklemler elde edilmektedir.

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho w \mathbf{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \quad (2.46)$$

Momentum denklemlerinde kesme ve normal gerilme terimleri bulunmaktadır. Stokes 1945 yılında kesme ve normal gerilmeleri aşağıdaki ifadeler ile vermiştir.

$$\tau_{xx} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.47)$$

$$\tau_{yy} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.48)$$

$$\tau_{zz} = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{V}) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.49)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (2.50)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.51)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \mu \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right] \quad (2.52)$$

Burada moleküler μ viskozite katsayısı, λ de ikinci viskozite katsayısıdır. Bu iki katsayı arasında $\lambda = (-2/3)\mu$ gibi bir ilişki bulunduğu yönünde bir yaklaşım uygulamalarda sıklıkla kullanılmakla beraber söz konusu ilişki kesin olarak kanıtlanmamıştır.

Tek boyutlu bir newton akışkanı için tek boyutlu Navier Stokes Denklemleri aşağıdaki gibi vektör (2x1 matris) formunda yazılabilir [10].

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (2.53a)$$

Burada N ve E aşağıdaki şekillerde verilmektedir.

$$N = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u^2 + \rho u \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3} \mu \frac{\partial u}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.53b)$$

2.2.6 Türbülans modeli ve ortalama Reynolds Naviers Stokes denklemleri

Prensipite zamana dayalı üç boyutlu Navier-Stokes denklemleri verilen bir türbülanslı akımdaki tüm fiziksel olguları içermektedir. Bunun bu şekilde olmasının sebebi türbülansın bir süreklilik fenomeni olmasıdır [6]. Türbülanslı bir akımda gerçekleşmekte olan en küçük ölçekler bile moleküler ölçekten çok daha büyük olmaktadır [4]. Bununla birlikte türbülanstaki en küçük ölçekler yine de oldukça küçük boyutlu olmaktadır. Söz konusu ölçekler en büyük ölçekteki türbülanstan pek çok mertebe daha küçük olmaktadır. En büyük türbülans ölçeği ise türbülanslı akımın yakınında gerçekleştiği nesnenin boyutu ile aynı mertebede olmaktadır. Bununla birlikte en küçük türbülans ölçeğinin en büyük ölçeğe oranı Reynolds sayısı büyüdükçe hızla azalmaktadır. Bu durum, türbülanslı bir akımda gerçekleşen tüm olayları modellemenin çok fazla işlem gücü gerektireceği ile ilgili ipucu vermektedir.

Türbülans en küçükten en büyüğe sürekli bir ölçek spektrumu içermektedir. Türbülansı meydana getiren çevrıntiler uzayda çakışmakta, büyük olanlar küçük olanları taşımaktadır. Türbülans basamaklı bir yapıda gerçekleşirken büyük çevrıntiler kinetik enerjilerini küçük çevrıntilere aktarmaktadır. Nihai olarak en küçük çevrıntiler de moleküler viskozitenin etkisi ile kinetik enerjilerini kaybetmekte ve bu enerjileri ısıya dönüşmektedir. Bu bakımdan türbülanslı akımlar enerjii büyük ölçüde dağıtma özelliğine sahiptirler [6].

Mühendislik açısından bakıldığında türbülansın enerjii yüksek derecede dağıtma özelliği, kütle, momentum ve enerji transferine büyük katkı sağlamaktadır. Türbülanslı akımlarda, düzgün ve sakin bir şekilde gerçekleşen laminar akımlarda olduğundan bir kaç mertebe daha büyük gerilmelerin oluşacağını beklemek yanlış olmayacaktır.

Navier Stokes denklemlerinin doğrusal olmayan yapısı, farklı dalga boyları ve doğrultulardaki dalgalanmalar arasında etkileşimlerin meydana gelmesine sebep olmaktadır. Bu karmaşık durumu sayısal olarak modellemek için gerçekten çok küçük boyutlara kadar inmek ve oradan başlayarak üç boyutlu olarak çok fazla sayıda işlem yapmak gerekmektedir. Gerçekçi problemler için böylesi doğrudan bir çözümün imkansızlığından olsa gerek zaman içerisinde Navier Stokes denklemleri yerine pek çok basitleştirilmiş denklem sistemleri geliştirilmiştir. İstatistiksel anlamda bir ortalama alma yaklaşımı kullanılarak geliştirilmiş olan bir tanesi Reynolds ortalamalı Navier Stokes denklemleridir ve aşağıda verilmektedir [19].

$$u_t + (uu)_x + (uv)_y + (uw)_z = -p_x + (\nu u_x)_x + (\nu u_y)_y + (\nu u_z)_z \quad (2.54a)$$

$$v_t + (uv)_x + (vv)_y + (vw)_z = -p_y + (\nu v_x)_x + (\nu v_y)_y + (\nu v_z)_z \quad (2.54b)$$

$$w_t + (uw)_x + (wv)_y + (ww)_z = -p_z + (\nu w_x)_x + (\nu w_y)_y + (\nu w_z)_z - g \quad (2.54c)$$

$$u_x + v_y + w_z = 0 \quad (2.55)$$

Burada u , v ve w sırasıyla x , y ve z doğrultularındaki hızları vermektedir. t , zaman, p ise basıncı yoğunluğa bölerek elde edilmiş olan normalize basınçtır. g , yerçekimi ivmesi, ν belirli bir türbülans modelinden elde edilmiş olan çevrinti viskozitesi katsayısıdır.

Yukarıdaki bölümlerde temel akışkanlar dinamiği denklemlerini elde etmek için kullanılmış sonsuz küçük akışkan elemanı modeli yerine mikroskopik bir yaklaşım uygulamak da mümkün olmaktadır [7]. Bunun sebebi bir akışkanın hareketinin, aslında sahip olduğu atom ve moleküllerinin ortalama hareketlerinden kaynaklanıyor olmasıdır. Bu yaklaşıma göre doğanın temel yasaları doğrudan atomlara ve moleküllere uygulanmakta, uygun şekilde istatistiksel ortalamalar alınarak akışkanın özellikleri tanımlanmaktadır. Bu yaklaşım kinetik teorisinin alınında yer almaktadır ve bu tezin kapsamı dışındadır.

2.3 Sığ Su Modelleme Denklemleri

Akışkan akımını ifade etmek için geliştirilmiş olan bir takım matematiksel modeller bulunmaktadır. Bunlardan en genel olanı, üç boyutta viskoz sıkışabilir bir akışkanın davranışını tahmin etmek için kullanılmakta olan Navier-Stokes denklemler sistemidir. Pratikte matematiksel bir model oluşturulurken eldeki problemi basitleştirmek için pek çok kabul yapılmakta ve gerekli fenomeni açıklayıcı en temel denklemler elde edilmektedir. Açık kanal akımında en çok kullanılmakta olan modeller sığ su denklemleri sınıflandırmasının altına düşmektedir. Sığ su denklemlerinde eldeki problemin boyutlarına göre akım sığ kabul edilmektedir. Tüm akışkan akım modellerinde olduğu gibi bir sığ su modeli oluşturmak için kütle korunumuna karşılık gelen bir süreklilik denklemi oluşturulmakta ve klasik fizik kanunları uygulanarak bir hareket denklemine ulaşılmaktadır. Yapılışına bağlı olarak bu gibi denklemler genellikle, momentum ya da enerji gibi belirli bir niceliğin korunumunu ifade eden korunum kanunları olarak yazılmaktadır. Denklemlere sürtünme, geometrinin değişimi, viskozite vb., etkileri de içerecek şekilde ilave terimlerde eklenebilmektedir ve bunlar genellikle, sistemden gelen bir şekildeki kazanç ya da kayıba karşılık gelen kaynak terimleri olarak adlandırılmaktadır.

Ağırlıklı olarak tek boyutlu akımların modellenmesinde Saint Venant denklemleri açık kanal problemlerini çözmek için en sıklıkla kullanılmakta olan sistemdir ve bu denklemler viskoz olmayan sıkışmaz olan ve derece derece değişen bir akımı temsil etmektedir. Denklemler bir süreklilik ya da kütle denkleminde ve Newton'un ikinci yasasını kanal boyunca uygulayarak elde edilen bir hareket denkleminde oluşmaktadır.

Belli sayıda kabul model içerisinde bulunmaktadır ve bunlar aşağıdaki maddelerde özetlenebilmektedir:

- akım, su yüzeyi düz ve hız bir kesit alanında sabit olacak şekilde tek boyutlu yapıdadır.
- İvmenin düşey bileşeni ihmal edilebilir seviyededir öyle ki derinlik boyunca basınç değişimi hidrolik hidrostatiktir.

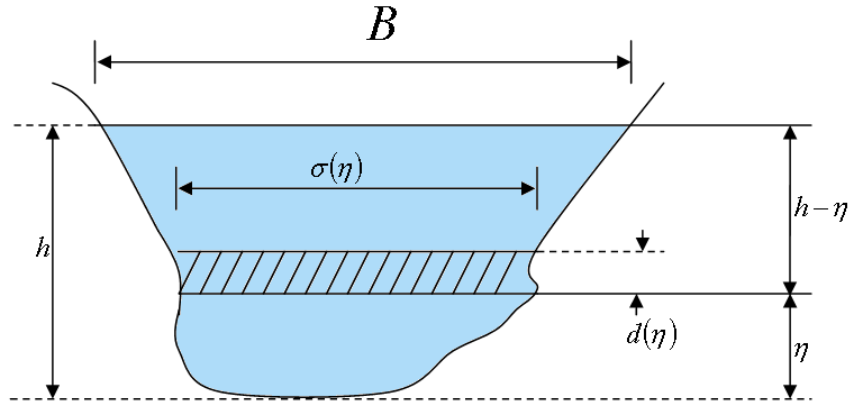
- sürtünme ve türbülans kararlı durum akımını yönetmekte olan aynı amprik kanunlar (Manning denklemi gibi) kullanılarak ifade edilebilmektedir.
- Yatak seviyesi ve yüzey arasındaki açının kosinüsü yaklaşık bir olacak şekilde yatak eğimi küçüktür.

Düşey hız yatakta sıfırken serbest yüzeyde maksimum olacak şekilde hızın lineer olarak değiştiği kabulü ile belirgin olan düşey ivme bileşeninin dahil edildiği, hızla değişim gösteren akımlardaki hareketi tarif etmek için kullanılmakta olan daha karmaşık bir denklemler sistemi Boussinesq denklemleri de bulunmaktadır. bu sistemde ivme terimleri sıfır alınarak Saint Venant denklemleri elde edilmektedir.

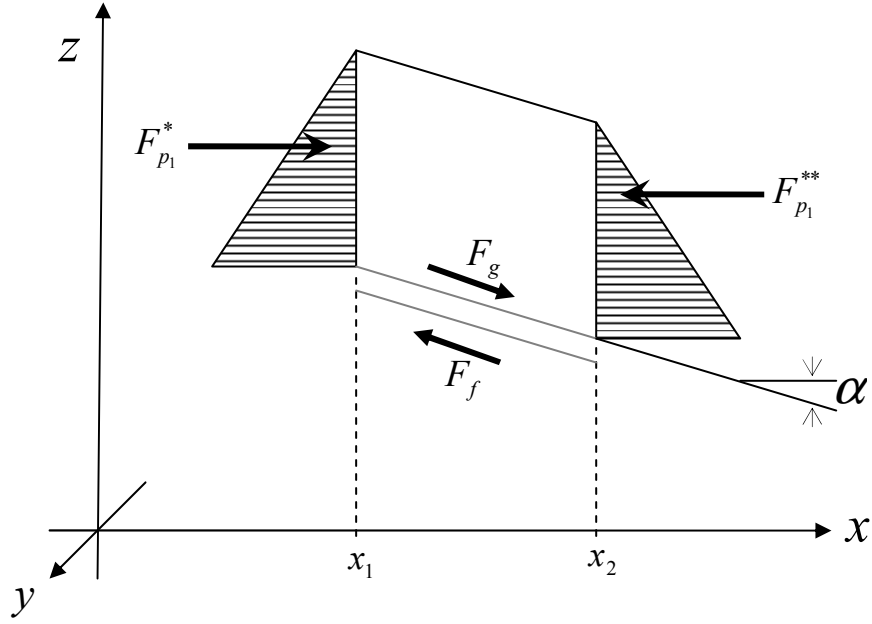
Saint Venant denklemleri literatürde çok farklı formlarda görülebilmektedir. Aşağıda verilmekte olan derivasyon Crossley [9]'den alınmıştır ve Şekil 2.3'de gösterilmekte olan geliş güzel şekildeki bir kanala uygulanmaktadır.

Şekil 2.4'de gösterilmiş olduğu üzere (x, t) düzleminde x_1, x_2 kesitleri ve t_1, t_2 zamanları arasında bir kontrol hacmi olduğu düşünüldüğünde A ıslak en kesit alanı ve u da ortalama en kesit hızı olmaktadır. Bu durumda ρ akışkan yoğunluğu olacak şekilde kontrol hacmi içerisine doğru kütle akış hızı (yoğunluk x debi) $(\rho u A)_{x_1}$ ve bölgeden ayrılış hızı $(\rho u A)_{x_2}$ olmaktadır. Kontrol hacmi içerisine doğru net kütle akışını bulunabilmek için t_1 ve t_2 zamanları arasında kütle akış hızlarının integrali alınmaktadır;

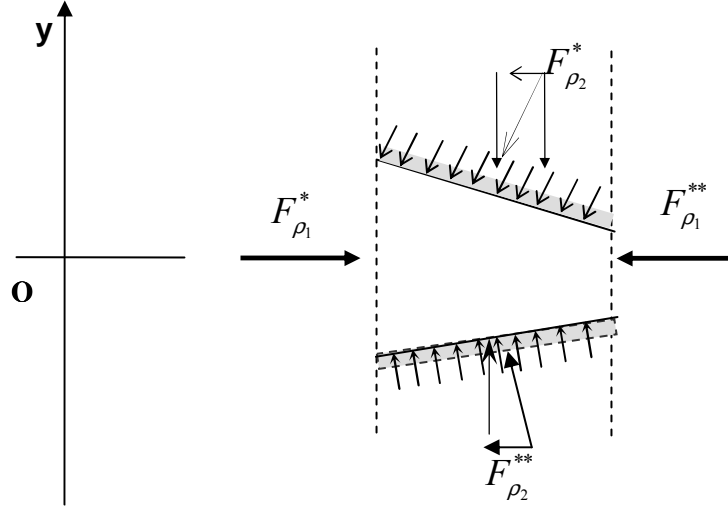
$$\int_{t_1}^{t_2} [(\rho u A)_{x_1} - (\rho u A)_{x_2}] dt. \quad (2.56)$$



Şekil 2.3. Kanal enkesiti



Şekil 2.4. Kontrol hacmine etkiyen kuvvetler



Şekil 2.5. Basınç kuvvetleri

Kütlenin korunumundan verilen zaman aralığında net içeri akış x_1 ve x_2 arasındaki depolamanın değişimine eşit olmalıdır ve aşağıdaki ifade ile verilmektedir:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(\rho A)_{t_2} - (\rho A)_{t_1}] dx \quad (2.57)$$

Q debi olacak şekilde $Q = uA$ olarak alındığında ve yoğunluğun sabit olduğu kabulü ile (2.56) ve (2.57) eşitlenmesi aşağıdaki ifadeyi vermektedir:

$$\int_{x_1}^{x_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] dx + \int_{t_1}^{t_2} [(Q)_{x_2} - (Q)_{x_1}] dt = 0 \quad (2.58)$$

Bu bağıntı gelişmiş güzel şekilde sahip bir kanaldaki süreklilik denkleminin integral formu olmaktadır.

İkinci denklem için Newton'un ikinci yasasını uygulamak, verilen zaman aralığında kontrol hacminde momentumun değişiminin momentumun net içeri akışı ve kontrol hacminin üzerine etkiyen dış kuvvetlerin zamana göre integralinin toplamına eşit olması gerektiğini ima etmektedir. Momentum kütle ve hızın çarpımına eşittir, momentum akışı ise kütle akış hızının hız ile çarpımına eşittir ve aşağıdaki şekilde verilmektedir;

$$\text{Momentum akısı} = \rho u A \times u = \rho u^2 A. \quad (2.59)$$

Net momentum akısı kontrol hacmine giren ve çıkan akış arasındaki fark kadar olmaktadır ve zaman aralığında meydana gelen net içeri akış aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$M_f = \int_{t_1}^{t_2} [(\rho u^2 A)_{x_1} - (\rho u^2 A)_{x_2}] dt. \quad (2.60)$$

Belirli bir zamanda kontrol hacmi içerisindeki momentum aşağıdaki ifade ile verilmektedir:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho u A dx \quad (2.61)$$

Dolayısıyla da zaman aralığında meydana gelen net artış ΔM aşağıdaki gibi olmaktadır:

$$\Delta M = \int_{x_1}^{x_2} [(\rho u A)_{t_2} - (\rho u A)_{t_1}] dx. \quad (2.62)$$

Şekil 2.4 ve 2.5'e bakarak, x yönünde kontrol hacmine etkiyen dış kuvvetlerin önemli olanlarının basınç, yer çekimi ve sürtünme direncinden kaynaklandığını göz önünde bulunduralım. Net etkiyen basınç kuvveti F_{ρ_1} , sınırlara etkiyen $F_{\rho_1}^*$ ve $F_{\rho_2}^{**}$ basınç kuvvetleri arasındaki fark olarak verilmektedir. Hidrostatik basınç varsayımında uygulayarak basınç kuvveti $F_{\rho_1}^*$ aşağıdaki şekilde tanımlanabilmektedir.

$$F_{\rho_1}^* = g \int_0^{h(x)} p[h(x) - \eta] \sigma(x, \eta) d\eta \quad (2.63)$$

Burada η derinlik integrasyon değişkeni, $h(x, t)$ su derinliği ve $\sigma(x, \eta)$ ise $\sigma(x, h) = B(x)$ olacak şekilde η derinliğindeki en kesitin genişliği olmaktadır. Böylelikle net basınç kuvveti F_{p_1} 'in integrali aşağıdaki şekli almaktadır.

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{p_1} dt = \int_{t_1}^{t_2} (F_{p_1}^* - F_{p_1}^{**}) dt = g \int_{t_1}^{t_2} [(pI_1)_{x_1} - (pI_1)_{x_2}] dt \quad (2.64)$$

Burada I_1 rahat olması açısından aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$I_1 = \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \sigma(x, \eta) d\eta \quad (2.65)$$

Kanalın sonsuz küçük bir uzunluğu olan dx 'i göz önünde bulunduralım. Genişlikte meydana gelecek bir değişim nedeniyle basınç kuvvetinde meydana gelecek olan artış bu durumda ıslak alanda meydana gelen artış $d\sigma d\eta$ 'nin (sabit derinlik h_0 için), ağırlık merkezinin serbest yüzey $(h(x) - \eta)$ 'den olan uzaklığı ile çarpımı olarak verilmektedir. Bu da aşağıdaki ifade ile verilmiştir:

$$pg \left[\left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) dx \cdot d\eta \right]_{h=h_0} [h(x) - \eta] \quad (2.66)$$

Kontrol hacmine etkiyen toplam anlık kuvveti hesaplamak için bir kesit alanında bu kuvvetin $\eta = 0$ ve $\eta = h(x)$ arasında ve x_1 ile x_2 arasında integrali alınmaktadır ve aşağıdaki bağıntı elde edilmektedir:

$$F_{p_2} = \int_{x_1}^{x_2} pg \int_0^{h(x)} [h(x) - \eta] \left[\frac{\partial \sigma(x, \eta)}{\partial x} \right]_{h_0} d\eta dx \quad (2.67)$$

Zaman aralığındaki toplam kuvveti bulmak için F_{p_2} 'in t_1 ile t_2 arasında integrali alınmaktadır ve bu aşağıdaki şekilde yazılabilmektedir:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{p2} dt = g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} p I_2 dx dt \quad (2.68)$$

Burada I_2 aşağıdaki şekilde verilmektedir;

$$I_2 = \int_0^{h(x)} [h - \eta] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right]_{h=h_0} d\eta \quad (2.69)$$

Yerçekimi kuvveti olan F_g kanal eğiminin küçük olduğu varsayımı ile aşağıdaki şekilde bulunabilmektedir:

$$S_0 = - \frac{\partial z}{\partial x} = \tan \alpha \approx \sin \alpha \quad (2.70)$$

Burada z belirli bir datumun üzerinde kanal yatağı kotudur. Zaman aralığı üzerinde yerçekimi kuvvetinin toplam etkisi aşağıdaki gibidir

$$\int_{t_1}^{t_2} F_g dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_0 dx dt \quad (2.71)$$

Sürtünme direnci olan F_f kanal yatağı ve şevleri ile olan kesme kuvvetinden kaynaklanmaktadır ve sürtünme eğimi S_f ile ifade edilebilmektedir. Kanalın birim uzunluğuna etkiyen kesme kuvveti bu durumda $\rho g A S_f$ ile verilmektedir ve sürtünme kuvvetinin zaman integrali aşağıdaki hali almaktadır:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_f dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \rho g A S_f dx dt \quad (2.72)$$

Momentumun korunumundan, momentumdaki değişim ΔM net momentum kazanımı M_f ile dış kuvvetlerin zaman integrallerinin toplamına eşittir:

$$\Delta M = M_f + \int_{t_1}^{t_2} F_{p1} dt + \int_{t_1}^{t_2} F_{p2} dt + \int_{t_1}^{t_2} F_g dt - \int_{t_1}^{t_2} F_f dt \quad (2.73)$$

(2.68)-(2.73) bağıntılarından ve yoğunluğun sabit olduğu kabulü ile momentum denkleminin integral gösteriminin standart formuna ulaşabilmektedir:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [(uA)_{t_2} - (uA)_{t_1}] dx = & \int_{t_1}^{t_2} [(u^2 A)_{x_1} - (u^2 A)_{x_2}] dt + g \int_{t_1}^{t_2} [(I_1)_{x_1} + (I_1)_{x_2}] dt \\ & - g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} I_2 dx dt + g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} A(S_0 - S_f) dx dt \end{aligned} \quad (2.74)$$

Alternatif olarak A ve Q 'yu içeren terimler $Q = uA$ bağıntısından faydalanarak yeniden yazılabilmektedir:

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [(Q)_{t_2} - (Q)_{t_1}] dx = & \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{Q^2}{A} \right)_{x_1} - \left(\frac{Q^2}{A} \right)_{x_2} \right] dt + g \int_{t_1}^{t_2} [(I_1)_{x_1} + (I_1)_{x_2}] dt \\ & - g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} I_2 dx dt + g \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} A(S_0 - S_f) dx dt \end{aligned} \quad (2.75)$$

Saint Venant denklemlerinin diferansiyel formu pek çok durumda alıntı olarak verilmektedir ve bunlar denklemlerin integral formundan akış değişkenlerinin sürekli ve türevlenebilir oldukları ve $x_2 - x_1$ mesafesinin sonsuz küçük hale geldiği kabulleri ile elde edilebilmektedir. Daha sonra Taylor serisi açılımı uygulanarak t_2 'de A ve Q aşağıdaki şekillerde yazılabilmektedir.

$$(A)_{t_2} = (A)_{t_1} + \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \quad (2.76)$$

$$(Q)_{t_2} = (Q)_{t_1} + \frac{\partial Q}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \quad (2.77)$$

İkinci ve daha büyük dereceden terimleri ihmal ederek ve Δt ve Δx ve sıfıra yaklaşırken limitini alarak yukarıdaki ifade aşağıdaki hali almaktadır:

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{x_1}^{x_2} [(A)_{t_2} - (A)_{t_1}] dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial A}{\partial t} dt dx \quad (2.78)$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1} \int_{x_1}^{x_2} [(Q)_{t_2} - (Q)_{t_1}] dx = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial Q}{\partial t} dt dx \quad (2.79)$$

Böylelikle süreklilik denklemi aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilmektedir:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right] dt dx = 0 \quad (2.80)$$

Taylor serisi açılımını (2.75) bağıntısındaki diğer terimlere uygulamak bize aşağıdaki ifadeleri vermektedir:

$$(Q^2 / A)_{x_2} - (Q^2 / A)_{x_1} = \frac{\partial(Q^2 / A)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2(Q^2 / A)}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \quad (2.81)$$

$$(I_1)_{x_2} - (I_1)_{x_1} = \frac{\partial I_1}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial^2 I_1}{\partial x^2} \frac{\Delta x^2}{2} + \dots \quad (2.82)$$

(2.78) bağıntısındaki sadece birinci dereceden olan terimleri kullanarak ve Δx ve Δt sıfıra yaklaşırken limitlerini alarak (2.75) bağıntısı aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilmektedir:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial(Q^2 / A)}{\partial x} \right] dt dx = -g \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial I_1}{\partial t} - I_2 - A(S_0 - S_f) \right] dt dx \quad (2.83)$$

(2.80) ve (2.83) bağıntılarının tüm bölge boyunca geçerli olması gerektiğinden aşağıdaki diferansiyel denklemler ile değiştirilebilirler:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gA(S_0 - S_f) + gI_2 \quad (2.85)$$

Bu denklemler Saint Venant denklemlerinin diferansiyel formunu meydana getirmektedir. Alternatif olarak momentum denklemi bazen aşağıdaki şekilde yazılmaktadır:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uQ) + gA \left(\frac{\partial h}{\partial x} - S_0 \right) + gAS_f = 0 \quad (2.86)$$

Bu denklem, dinamik denklem olarak adlandırılmaktadır.

Her ne kadar yukarıdaki denklemler gelişigüzel bir şekle sahip bir kesit alanı için yazılmış olsalar da denklemlerin geçerli oldukları durumlar Saint Venant hipotezi ile sınırlı olmaktadır ve denklemlerin oluşturulması sırasında yapılmış olan kabuller, belirli bir problem için uygun bir model oluşturulmaya çalışılırken akılda bulundurulmalıdır.

Saint Venant yöntemleri farklı olarak Bölüm 2.3.6'da verilmekte olan Reynolds ortalamalı Navier Stokes denklemlerinden de elde edilebilir [19]. Diğer alternatif bir gösterim ise aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{A}{B} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u}{B} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{h=\text{sabit}} = 0 \quad (2.87)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g(S_f - S_0) = 0 \quad (2.88)$$

Sürtünme eğimi olan S_f yüzey sürtünmesi ve türbülans kaynaklı etkileri modellemek için kullanılmaktadır. Tanım olarak sürtünme eğimi, bir A ıslak alanı için birim ağırlıktaki su kütlesinin birim uzunlukta metre cinsinden enerji kaybı olarak tanımlanmaktadır ve aşağıdaki şekilde hesaplanmaktadır [1].

$$S_f = \frac{Q|Q|}{K^2} \quad (2.89)$$

Burada Q debi, K ise taşıdır ve aşığıdaki şekilde verilmektedir.

$$K = \frac{A^{5/3}}{nP^{2/3}} \quad (2.90)$$

Burada A ıslak kesit alanı, P ise ıslak çevredir ve ıslak enkesitin kanala temas eden kenarlarının toplamıdır. n Manning pürüzlülük katsayısıdır, amprik olarak bulunmuş bir değerdir ve düzgün betonarme yüzeyler için ortalama 0,013 olarak verilmektedir [1].

2.4 Saint Venant Denklemlerinin Çözüm Yöntemi

Sayısal benzetim için pek çok teknik bulunmaktadır ve her bir yöntemin nasıl işlediğini anlatan çok sayıda kaynak bulunmaktadır. Akışkan akımı problemleri için kullanılmakta olan en popuiler dört yöntem aşığıda sıralanmaktadır:

- 1.Sonlu Farklar Yöntemleri (SFY)
- 2.Sonlu Elemanlar Yöntemleri (SEY)
- 3.Spektral Yöntemler
- 4.Sonlu Hacimler Yöntemleri (SHY)

Genel olarak söylemek gerekirse bir sonlu farklar yöntemi, bir problemi belirli nokta ya da düğümlerdeki değerler dizisi aracılığıyla ifade etmektedir. Bilinmeyenler için ifadeler, model denklemlerindeki türev terimleri kısaltılmış Taylor serisi açılımları ile değiştirmek suretiyle elde edilmektedir. En eski sayısal yaklaşımlar sonlu farklar yapısı üzerine kurulmuştur ve uygulama açısından kavramsal ve sezgisel olarak en kolay yöntemlerdendir. Bununla beraber temel olarak bu gibi teknikler ızgarada yüksek derecede düzenlilik olmasını gerektirmektedir ve bu da bu yöntemlerin karmaşık problemlere uygulanmasını sınırlamaktadır. Tek boyutlu Saint Venant denklemlerinde ise amaca uygun olmaktadır.

Sonlu elemanlar yönteminin esası, bölgenin üçgen yada dörtgen gibi elemanlara bölünmesi ve her elemanın içine sayısal sonuçların belirlendiği düğümler yerleştirilmesine dayanmaktadır. Daha sonra her hangi bir noktadaki çözüm, noktanın yerel komşuluğunda bulunan düğümlerdeki değerlerin bir seri açılımı olarak ifade edilmektedir. Düğümlerden gelen katkılar baz fonksiyonları ile çarpılmakta ve baz fonksiyonların hangi şekilde tanımlanmış olduğu, sonlu elemanlar yöntemindeki değişkenin seçimini belirlemektedir. Spektral yöntemler, baz fonksiyonlarının yerel olduğu ve ilgili düğümün komşuluğunun dışarısında sıfır olduğu yaygın yaklaşımdan farklı olarak baz fonksiyonların global olduğu bir sonlu elemanlar yöntemi alt kümesi olarak değerlendirilebilmektedir. Orijinal sonlu elemanlar yöntemi yapı mühendisleri tarafından gerilim analizi alanında geliştirilmiştir ve bu durum yaklaşımın oluşturulmasında ve terminolojisinde görülebilmektedir.

Sonlu hacimler yöntemi, model denklemlerinin bir integral formunun ayrık hale getirilmesi ve alanın sonlu hacimlere bölünmesi üzerine kurulmuştur. Her bir hacim içerisinde integral ilişkileri yerel olarak uygulanmakta ve böylelikle her bir hücredeki tam korunum elde edilmektedir. Sonuçta bilinmeyenler için elde edilen ifadeler sonlu farklar ile elde edilen yaklaşımlara benzerlik göstermektedir ve seçilmiş olan belirli yöntemle bağlı olarak sonlu farklar ya da sonlu elemanlar tekniklerinin özel bir durumu olarak kabul edilebilmektedir. Çoğu akışkan modelleme probleminin korunum ilkeleri üzerine kurulmuş olduğu gerçeğinden hareketle sonlu hacimler yöntemi genel akışkan akımı problemlerine uygulanan en popüler yaklaşım haline gelmiştir.

Sonuca ulaşma açısından yeterli olacağı düşünüldüğünden bu çalışmada, tek boyutlu Saint Venant denklem sisteminin sayısal çözümünde kullanılmak üzere sonlu farklar yöntemi seçilmiştir.

2.4.1 Sonlu farklar yöntemi

Sıradan diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için geliştirilmiş olan ilk teknikler sonlu fark yöntemleriydi ve bu gibi uygulamalardan sonlu fark yöntemlerinin özellikleri ile ilgili teoriler ortaya çıkmıştır.

Sonlu fark yöntemleri, Taylor serisi açılımlarının gerçekleştirilmesi ve kısaltılmış ifadelerin diferansiyel denklemlere yerleştirilmeleri üzerine kuruludur. Buradaki düşünce diferansiyellerin, çeşitli noktalardaki çözümler şeklinde yaklaşık olarak alınmasıdır.

Tanım olarak;

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (2.91)$$

Δx küçük olduğunda bu formül x noktasında u 'nun türevinin bir yaklaşımı olarak kullanılabilir. Taylor serisinden;

$$u(x + \Delta x) = u(x) + \Delta x u_x(x) + \frac{\Delta x^2}{2} u_{xx}(x) + \dots \quad (2.92)$$

yeniden düzenleme yapıldığında;

$$\frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = u_x(x) + \frac{\Delta x}{2} u_{xx}(x) + \dots \quad (2.93)$$

Δx küçük olduğunda açılımdaki ardışık terimler azalacak ve aşağıdakini yazmak mümkün olacaktır.

$$u_x(x) = \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.94)$$

(2.94) denkleminin sağ tarafı ile u_x 'in yakınsanmasındaki hatanın önde gelen terimi Δx mertebesinde ve dolayısı ile de bu denklem birinci derece bir yaklaşımı temsil etmektedir. Türevleri tahmin etmek için başka derecelerden fark formülleri tanımlamak da mümkündür ve bunların kesinlik dereceleri farklı olabilmektedir.

Yukarıdaki analiz sürekli çözüm ile ilgilenmektedir. Bununla beraber amaç u 'yu ızgaradaki ayırık noktalar kümesinde hesaplamaktır ve bu da sayısal çözüm olmaktadır. Izgara noktaları $i = 0,1,2,\dots, N$ olacak şekilde x_i ile gösteriliyor ve bölge Δx uzunluğunda eşit boyutlu ayrılık elemanlar şeklinde olduğunda u_i sayısal çözümü $u_i = u(i\Delta x)$ şeklinde noktasal değerler olarak düşünülebilmektedir. Bu notasyon takip edildiğinde u 'nun x 'e göre türevinin tahmin edilmesi için üç genel yol bulunmaktadır:

(i) İleri fark

$$(u_x)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.95)$$

(ii) Geri fark

$$(u_x)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (2.96)$$

(iii)Merkezi fark

$$(u_x)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (2.97)$$

Taylor serisi analizinden de gösterilebileceği üzere ileri ve geri farkların her ikisi de birinci dereceden, merkezi fark ise ikinci dereceden yaklaşımlardır. Bu formülleri farklı faydaları bulunmaktadır ve en iyi seçenek modellenen probleme bağlıdır. Adi diferansiyel denklemler söz konusu olduğunda pek çok başka fark formülü standart teknikler kullanılarak oluşturulabilmektedir. Bununla birlikte kısmi türevli diferansiyel denklemler için pek çok yaklaşım standart ileri, geri ve merkezi fark formüllerinin kullanımını üzerine kuruludur.

2.4.2 MacCormack yöntemi

Bu çalışmada, bir yağmur suyu şebekesindeki drenaj kanallarında meydana gelen akışları modellemek için tek boyutlu Saint Venant denklemleri MacCormack yöntemi kullanılarak yaklaşık olarak çözülmüştür. MacCormack yöntemi açık (explicit) bir yöntemdir. Açık yöntemlerde bir k zaman adımında değişkenler

hesaplanırken, bu değişkenlerin sadece $k - 1$ zaman adımındaki değerleri kullanılmaktadır.

MacCormack yöntemi, örnek olarak Euler denklemleri üzerinden aşağıdaki paragraflarda anlatılmaktadır.

Aşağıda verilmekte olan Euler denklemleri Şekil 2.6'da verilmekte olan noktalarda çözülmek istenilmektedir.

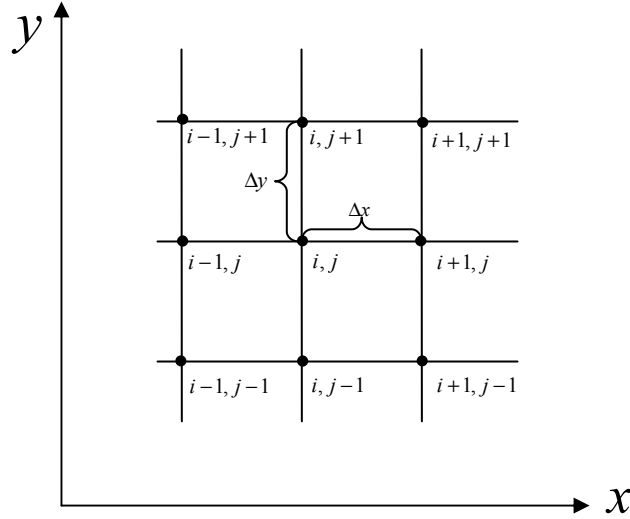
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.99)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} + \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (2.100)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \left(u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{p}{\rho} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.101)$$

Yukarıda verilmekte olan denklemlerden birinci denklem süreklilik denklemi. İkinci ve üçüncü denklemler sırasıyla x ve y yönlerinde momentum denklemleri, son sırada verilmekte olan denklem ise enerji denklemdir. Verilmekte olan denklemler sadece anlatım amaçlı olarak kullanılmaktadır.



Şekil 2.6. x-y düzlemindeki ayırık noktalar

Şekil 2.6'daki i, j noktasındaki yoğunluğun t anındaki tüm değerlerinin biliniyor olduğu düşünülebilir. Aşağıda verilmekte olan ifade ile yoğunluğun $t + \Delta t$ anındaki değerini hesaplamak mümkündür ancak öncelikle parantez içerisinde yer alan türevin hesaplanması gerekmektedir.

$$\rho_{i,j}^{t+\Delta t} = \rho_{i,j}^t + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{ort} \Delta t \quad (2.102)$$

Burada parantez içerisinde verilmekte olan ortalama değeri t ve $t + \Delta t$ değerleri arasındaki ortalama değerdir.

Benzer şekilde:

$$u_{i,j}^{t+\Delta t} = u_{i,j}^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{ort} \Delta t \quad (2.103)$$

$$v_{i,j}^{t+\Delta t} = v_{i,j}^t + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{ort} \Delta t \quad (2.104)$$

$$e_{i,j}^{t+\Delta t} = e_{i,j}^t + \left(\frac{\partial e}{\partial t} \right)_{ort}^t \Delta t \quad (2.105)$$

MacCormack yönteminde ortalama değerleri bulmak için bir tahmin-düzeltilme yaklaşımından faydalanılmaktadır.

Tahmin adımı:

Euler denklemlerindeki süreklilik denkleminin sağ tarafındaki konumsal türevler ileri yönlü farklar ile değiştirilerek aşağıdaki ifade edilir.

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,j}^t = - \left(\rho_{i,j}^t \frac{u_{i+1,j}^t - u_{i,j}^t}{\Delta x} + u_{i,j}^t \frac{\rho_{i+1,j}^t - \rho_{i,j}^t}{\Delta x} + \rho_{i,j}^t \frac{v_{i,j+1}^t - v_{i,j}^t}{\Delta y} + v_{i,j}^t \frac{\rho_{i,j+1}^t - \rho_{i,j}^t}{\Delta y} \right) \quad (2.106)$$

Bu denklem sayesinde Taylor serisi açılımının ilk iki teriminden faydalanarak $(\bar{\rho})^{t+\Delta t}$ için tahmini bir değer hesaplamak mümkündür;

$$(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} = \rho_{i,j}^1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,j}^t \Delta t \quad (2.107)$$

Benzer şekilde;

$$(\bar{u})_{i,j}^{t+\Delta t} = u_{i,j}^1 + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j}^t \Delta t \quad (2.108)$$

$$(\bar{v})_{i,j}^{t+\Delta t} = v_{i,j}^1 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_{i,j}^t \Delta t \quad (2.109)$$

$$(\bar{e})_{i,j}^{t+\Delta t} = e_{i,j}^1 + \left(\frac{\partial e}{\partial t} \right)_{i,j}^t \Delta t \quad (2.110)$$

Düzeltilme adımı:

Düzeltilme adımında öncelikle $t + \Delta t$ anındaki zaman türevi $(\bar{\partial}\rho / \partial t)_{i,j}^{t+\Delta t}$ 'nin tahmini bir değeri elde edilir. Bunu yapmak için ρ , v ve u 'nun bir önceki adımda tahmin edilmiş olan değerleri süreklilik denkleminin sağ tarafına konulur ve bu sırada konumsal türevler geri yönlü farklarla değiştirilir. Sonuç olarak elde edilen olan bağıntı aşağıda verilmektedir.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{i,j}^{t+\Delta t} &= \left[(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} \frac{(\bar{u})_{i,j}^{t+\Delta t} - (\bar{u})_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + (\bar{u})_{i,j}^{t+\Delta t} \frac{(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} - (\bar{\rho})_{i-1,j}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right] \\ &+ (\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} \frac{(\bar{v})_{i,j}^{t+\Delta t} - (\bar{v})_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{\Delta y} + (\bar{v})_{i,j}^{t+\Delta t} \frac{(\bar{\rho})_{i,j}^{t+\Delta t} - (\bar{\rho})_{i,j-1}^{t+\Delta t}}{\Delta y} \end{aligned} \quad (2.111)$$

Son adım olarak, elde edilmeye çalışılan ortalama değerler aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{ort} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{i,j}^t + \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{i,j}^{t+\Delta t} \right] \quad (2.112)$$

Parantezin içerisindeki birinci terim tahmin adımında hesaplanmıştır, ikinci terim ise düzeltme adımında elde edilmiştir. Bu iki terimin ortalaması alınarak bulunan değer (2.102) denkleminde yerine konulur ve $t + \Delta t$ anındaki yoğunluk değeri elde edilmiş olur:

2.4.3 MacCormack yönteminin kesinliği

Kesinlik, problemin ayrık çözümünün problemin tam çözümünü ne derecede temsil edebildiğinin bir ölçüsüdür. Bunu ölçmek için iki nicelik bulunmaktadır; fark denklemlerinin diferansiyel denklemlere ne derecede karşılık geldiğini ölçen yerel ya da kısaltma hatası ve tam çözüm bilinmediği sürece bulunması mümkün olmayan ve çözümdeki tüm hatayı temsil etmekte olan global hata. Kesinlik derecesi oluşan hatanın derecesi ile ölçüldüğünden bir sonlu farklar yönteminde

Taylor serisi açılımının ihmal edilen ve fark denklemlerine alınmayan terimlerinden en büyük dereceden olanı ile ifade edilmektedir. Örneğin çözülmek istenen bir diferansiyel denklemin Taylor serisi açılımı ile elde edilen fark terimlerinden $(\Delta x)^3$ ve daha küçük olanları kullanılmakta olan sonlu fark yöntemine alınmadıysa söz konusu sonlu farklar yöntemi mekanda üçüncü dereceden doğru olarak anılmaktadır. MacCormack yöntemi zamanda ve mekanda üçüncü dereceden doğrudur [7].

2.5 MacCormack Yönteminin Saint Venant Denklemlerine Uygulanması

Sayısal modelleme aşamasında çözümlenmesi istenilen Saint Venant Denklemleri dikdörtgen kesitli kanallar için aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \left[u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad (2.113)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left[g \frac{\partial h}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \left(n^2 u^2 \left(\frac{b + 2h}{hb} \right)^{4/3} - S_0 \right) \right] \quad (2.114)$$

Burada h kesitteki su yüksekliği, u kesitteki ortalama hız, g yerçekimi ivmesi, n Manning pürüzlülük katsayısı, b kanal genişliği ve S_0 ise kanal tabanı eğimidir. t zaman, x ise konumu vermektedir.

MacCormack yöntemi ile Saint Venant denklemlerinin gösterimi çözümlene sıralamasına göre aşağıdaki gibidir. Saint Venant Denklemleri burada su yüksekliği h ve kesitteki ortalama su hızı u cinsinden yazılmıştır. (2.115)-(2.124) denklemleri çözümlenerek $t + \Delta t$ anında, $i = 1,2,3, \dots, N - 1$ noktalarındaki h ve u değerleri hesaplanmaktadır.

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_i^t = - \left(u_i^t \frac{h_i^t - h_{i-1}^t}{\Delta x} + h_i^t \frac{u_i^t - u_{i-1}^t}{\Delta x} \right) \quad (2.115)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^t = - \left(g \frac{h_i^t - h_{i-1}^t}{\Delta x} + u_i^t \frac{u_i^t - u_{i-1}^t}{\Delta x} + g \left(n^2 (u_i^t)^2 \left(\frac{b + 2h_i^t}{h_i^t b} \right)^{4/3} - S_0 \right) \right) \quad (2.116)$$

$$\left(\bar{h}\right)_i^{t+\Delta t} = h_i^t + \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_i^t \Delta t \quad (2.117)$$

$$\left(\bar{u}\right)_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^t \Delta t \quad (2.118)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t} = - \left(\left(\bar{u}\right)_i^{t+\Delta t} \frac{\left(\bar{h}\right)_{i+1}^{t+\Delta t} - \left(\bar{h}\right)_i^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \left(\bar{h}\right)_i^{t+\Delta t} \frac{\left(\bar{u}\right)_{i+1}^{t+\Delta t} - \left(\bar{u}\right)_i^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) \quad (2.119)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t} &= - \left(g \frac{\left(\bar{h}\right)_{i+1}^{t+\Delta t} - \left(\bar{h}\right)_i^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \left(\bar{u}\right)_i^{t+\Delta t} \frac{\left(\bar{u}\right)_{i+1}^{t+\Delta t} - \left(\bar{u}\right)_i^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) \\ &\quad + g \left(n^2 \left(\bar{u}\right)_i^{t+\Delta t} \right)^2 \left(\frac{b + 2\left(\bar{h}\right)_i^{t+\Delta t}}{\left(\bar{h}\right)_i^{t+\Delta t} b} \right)^{4/3} - S_0 \end{aligned} \quad (2.120)$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{ort} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_i^t + \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t} \right] \quad (2.121)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ort} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{t+\Delta t} \right] \quad (2.122)$$

$$h_i^{t+\Delta t} = h_i^t + \left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{ort} \Delta t \quad (2.123)$$

$$u_i^{t+\Delta t} = u_i^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ort} \Delta t \quad (2.124)$$

$t + \Delta t$ anında, $i = N$ noktasındaki h ve u değerlerini hesaplamak için aşağıda verilmekte olan denklemler kullanılmıştır.

$$h_N^{t+\Delta t} = h_N^t + \left(\frac{\partial h}{\partial t} \right)_N^t \Delta t$$

$$u_N^{t+\Delta t} = u_N^t + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_N^t \Delta t$$

2.5.1 Başlangıç ve sınır koşulları

MacCormack formundaki Saint Venant Denklemleri'ni çözmek için başlangıç koşulu olarak $t = 0$ anında tüm x 'ler için h ve u değerleri gerekmektedir:

$$h(x,0) = h_b(x) \quad x \in [0, L]$$

$$u(x,0) = u_b(x) \quad x \in [0, L]$$

Burada L toplam kanal uzunluğu, $h_b(x)$ başlangıçtaki h değerlerini hesaplamak için bir fonksiyon ve $u_b(x)$ ise başlangıçtaki u değerlerini hesaplamak için bir fonksiyondur.

Sınır koşulu olarak $x = 0$ iken tüm t 'ler için h ve u değerleri gerekmektedir:

$$h(0, t) = h_s(t) \quad t \in [0, T]$$

$$u(0, t) = u_s(t) \quad t \in [0, T]$$

Burada $h_s(t)$ ve $u_s(t)$, tüm t 'ler için kanalın başındaki h ve u 'ları hesaplamak için kullanılan fonksiyonlardır. T ise toplam süredir.

2.6 Açık Yöntemlerde Kararlılık Sorunu

Biçimsel olarak bir yaklaşımın kararlı olması demek çözümdeki tüm hataların sınırlandırılmış olması demektir. Pratikte kararlı olmayan bir yöntem uygulandığı takdirde çözüm sonsuza doğru gidecektir. Hiperbolik kısmi türevli diferansiyel

denklemlerde kararlılık sorunundan bahsetmek için önce karakteristiklerden bahsetmek gerekmektedir.

2.6.1 Karakteristikler yöntemi

Karakteristikler yöntemi sadece hiperbolik kısmi türevli diferansiyel denklemlere uygulanabilmektedir ve rahatsızlığın yayılımı doğrultusunda karakteristiklerin tanımlanılmasını içermektedir. Karakteristikleri uzay-zaman düzleminde, tanım gereği bazı özelliklerin sabit olduğu çizgiler olarak düşünmek mümkündür. Bu yöntemin temelini tarif etmek için aşağıdaki şekilde verilen birinci derece bir kısmi türevli diferansiyel denklemi düşünmek gerekmektedir [9].

$$u_t + a(x, t)u_x = 0 \quad (2.125)$$

Başlangıçtaki veri $u(x,0) = u_0(x)$ şeklindedir. Zincir kuralı uygulanırsa;

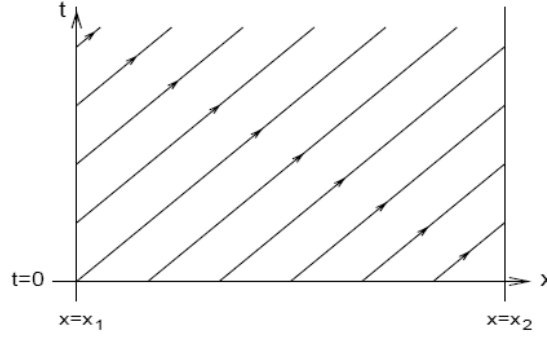
$$\frac{du}{dt} = u_t + \frac{dx}{dt}u_x \quad (2.126)$$

Terimler yeniden düzenlendiğinde aşağıdaki ifade elde edilmektedir:

$$u_t = \frac{du}{dt} - \frac{dx}{dt}u_x \quad (2.127)$$

Yukarıdaki ifadeyi u_t için (2.125)'e yerleştirdiğimizde ise aşağıdaki ifade elde edilmektedir:

$$\frac{du}{dt} + \left(a(x, t) - \frac{dx}{dt} \right) u_x = 0 \quad (2.128)$$



Şekil 2.7. Sonlu bir bölgede karakteristikler

Bağıntı (2.128)'den görüldüğü üzere $dx / dt = a(x, t)$ ile tanımlanan çizgiler boyunca $du / dt = 0$ olmaktadır. Bu da karakteristikler olarak bilinen bu çizgiler boyunca u 'nun sabit olduğunu ima etmektedir. Prensip eğer birisi karakteristik çizgileri tanımlıyabiliyorsa çizgilerin çakışmadığı bir durumda sadece başlangıç ve sınır koşullarından problemin çözümü belirleyebilir. Matematiksel olarak bu aşağıdaki ifadeye eşdeğerdir:

$$u(x, t) = u\left(x - \int_0^t a(x, t) dt, 0\right) \quad (2.129)$$

Eğer yöntem sonlu bir bölgeye uygulanırsa (Şekil 2.7) o zaman karakteristiklerin bölgeye girdiği her sınır boyunca değerleri belirtmek gerekmektedir. Örneğin, Şekil 2.7'de $x = x_1$ boyunca sınır verisi gerekli olmaktadır, bununla beraber bölgeyi terkeden karakteristiklerin kendileri için belirtilmiş değerleri zaten olduğundan $x = x_2$ boyunca sınır verisi gerekli değildir.

Aynı prensipler aşağıdaki durumda da uygulanabilmektedir:

$$u_t + a(u)u_x = 0 \quad (2.130)$$

Burada, $\partial f / \partial u = a(u)$ olduğu durumda;

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (2.131)$$

Bu da skalar bir korunum yasasıdır. Bu durumda karakteristikler aşağıdaki gibi verilmektedir:

$$\frac{dx}{dt} = a(u) \quad (2.132)$$

u 'nun karakteristikler boyunca sabit olması durumunda a da sabit olmakta ve değerleri başlangıç koşulları ile belirlenmiş olacak şekilde karakteristikler de düz çizgiler olmaktadır. Basit diferansiyel denklem teorisi yardımıyla gösterilebileceği üzere sürekli u için karakteristik çizgileri kesişmemektedir. Bununla beraber lineer olmayan hiperbolik kısmi türevli diferansiyel denklemler sürekli olmayan çözümler vermektedirler ve geliş güzel başlangıç koşulları olan genel bir doğrusal olmayan korunum yasası için karakteristikler sonlu bir zamanda kesişecekler ve bir süreksizlik ya da şok meydana gelecektir. Buna rağmen bir şokun meydana gelmediği yerel bir bölgede ise bilgi sadece karakteristikler ile iletilebileceğinden, karakteristik hızının ulaşamayacağı noktalardaki koşulları o bölgedeki çözümü etkilemeyecektir, çözümü sadece karakteristik hızının ulaşabileceği bağımlılık bölgesindeki noktalardaki koşullar etkileyecektir.

2.6.2 Courant Friedrich Lewy sayısı

Hiperbolik kısmi türevli diferansiyel denklemlerde kararlılığın sağlanması için CFL koşulunun sağlanması gerekli olmaktadır. Leveque [17], Courant-Friedrichs ve Lewy (CFL) koşulunu aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

“CFL Koşulu: Bir sayısal yöntem, eğer sadece sayısal bağımlılık bölgesi kısmi türevli diferansiyel denklemin gerçek bağımlılık bölgesini kapsamaktaysa yakınsaktır; en azından Δx ve Δt 'nin sifıra yaklaştığı limit durumunda.”

CFL koşulu kararlılığı ve dolayısıyla da yakınsaklığı sağlamak için sadece gerekli bir koşuldur, bu koşulun sağlanıyor olması kararlılığı her zaman garanti etmemektedir.

2.6.3 Saint Venant denklem sisteminde kararlılık şartı

Hiperbolik bir denklem sisteminde meydana gelen bir rahatsızlık (disturbance) karakteristiklerin hızında ilerlemektedir. Karakteristiklerin ilerleme hızları ($x - t$ düzlemindeki eğimleri), korunum yasası $q_t + f_q q_x = s$ şeklinde yazılmış hiperbolik kısmi türevli bir denklem sisteminde Jacobi matrisi olan f_q 'nin özdeğerlerine eşittir [17].

Dikdörtgen kesitli bir kanal için Saint Venant denklem sistemi aşağıda şekildedir [12].

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = S \quad (2.133)$$

Burada;

$$K = \begin{bmatrix} h \\ uh \end{bmatrix} \quad (2.134)$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{bmatrix} \quad (2.135)$$

$$F = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + gh^2/2 \end{bmatrix} \quad (2.136)$$

(2.133) denklemi aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\frac{\partial K}{\partial t} + J \frac{\partial K}{\partial x} = S \quad (2.137)$$

Burada $J = dF/dK$ Jacobi matrisidir ve aşağıdaki şekildedir:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -u^2 + gh & 2u \end{bmatrix} \quad (2.138)$$

Jacobi matrisinin iki adet gerçek özdeğeri bulunmaktadır [12];

$$\lambda_1 = u + c$$

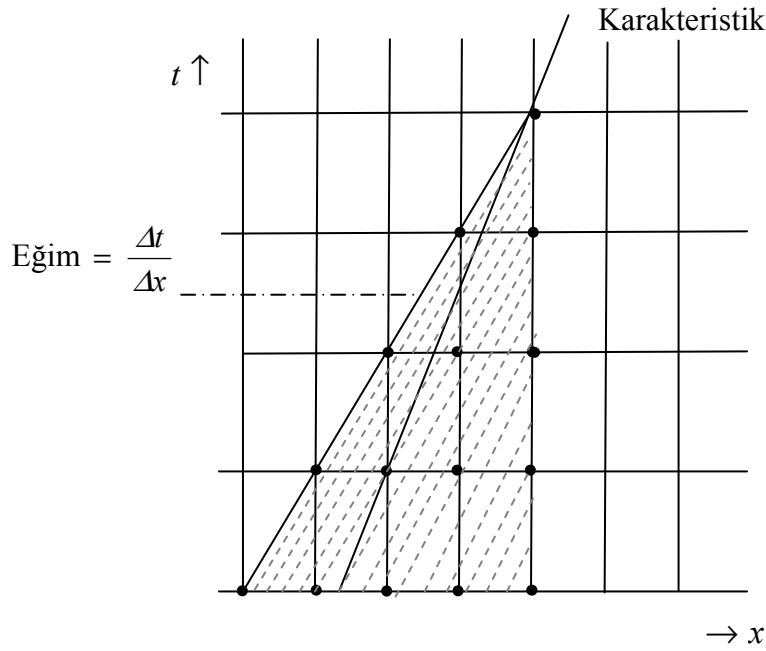
$$\lambda_2 = u - c$$

Burada c sığ suda dalga ilerleme hızıdır; $c = \sqrt{gh}$ ile verilmektedir [1].

Sonuç olarak CFL koşulu aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\Delta t \leq Cr \left[\frac{\Delta x}{u + c} \right] \quad (2.139)$$

Burada Cr Courant sayısıdır. Bu sayı genellikle 1'den küçük olarak alınmaktadır, bu çalışmada ise uygulama sırasında kararlılığı sağlayacak Courant sayısı denenerek bulunacaktır. Kararlılığı sağlayacak bir x/t oranına sahip bir yaklaşım Şekil 2.8.'te $x - t$ düzleminde gösterilmektedir.



Şekil 2.8. Kararlı bir yaklaşım

2.7 Yakınsama ve Tutarlılık

2.7.1 Yakınsama

MacCormack yönteminde kullanılmakta olan konum ve zaman adımları (Δx ve Δt) küçültülerek sıfıra yaklaştırıldıklarında sonlu farklar yönteminin verdiği yaklaşık çözüm, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin kesin çözümüne yaklaşıyorsa, söz konusu yaklaşık çözümün yakınsak olduğu söylenebilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemin kesin sonucu ile sonlu farklar yöntemi ile elde edilmekte olan sonucun arasındaki fark çözüm hatasını oluşturmaktadır. Bu hatanın miktarı konum adımı Δx ve zaman adımı Δt 'nin büyüklüğünden ve söz konusu cebirsel denklemler oluşturulurken orijinal diferansiyel denklemin türevlerini ifade eden sonlu fark terimlerinin ihmal edilmiş olanlarından kaynaklanmaktadır.

Genel olarak kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmek için sonlu farklar yaklaşımları ile oluşturulmuş olan cebirsel denklem sistemlerinin yakınsak olduğunu ispat etmek çok zordur [5]. Saint Venant Denklemleri'nde olduğu gibi kısmi türevli diferansiyel denklemlerin karmaşık olduğu bir durumda yakınsamayı göstermek kolay bir konu değildir.

2.7.2 Tutarlılık

Bir sonlu farklar yaklaşımı ile elde edilmiş olan cebirsel denklem sistemi, denklemden yer almakta olan konumsal ve zamansal adım büyüklüklerinin sıfıra yaklaştığı bir limit durumunda orijinal kısmi türevli diferansiyel denklem sistemine denk ise o zaman söz konusu cebirsel denklem sisteminin orijinal kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi ile tutarlı olduğu söylenebilir.

Söz konusu cebirsel denklem sistemi ile elde edilecek olan yaklaşık sonucun, kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminin gerçek sonucuna yaklaşması için tutarlılığın gerekli bir koşul olduğu açıktır. Bununla birlikte cebirsel denklem sisteminin, orijinal denklem sistemi ile tutarlı olması yakınsama için yeterli bir koşul olmamaktadır [5].

2.7.3 Lax denklik teoremi

Sınırlı bir sınıftaki problemlerde yakınsama, Lax denklik teoremi aracılığı ile sağlanılabilmektedir. Doğrusal bir başlangıç koşulu problemi ve bu problem ile tutarlı bir sonlu farklar yaklaşımı verildiğinde, yakınsama için kararlılık gerekli ve yeterli koşuldur [2].

Lax denklik teoremi sayesinde bir algoritmanın kararlılığını ve orijinal kısmi türevli diferansiyel denklem ile tutarlılığını göstermek kolay olmakla birlikte, algoritmanın çözümünün kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümüne yakınsadığını göstermek genellikle çok zor olmaktadır [5].

Saint Venant Denklemleri'nin de içerisinde bulunduğu bir çok gerçek akım problemi doğrusal değildir ve Lax denklik teoremi bu problemlere her zaman istenildiği şekilde uygulanamayabilir. Bunun sonucu olarak Lax denklik teoremi gerekli ancak her zaman yeterli olmayan koşullar sağlamaktadır.

MacCormack yöntemi [11], [12], [14], [20] ve [21] gibi çalışmalarda Saint Venant Denklemleri'ne uygulanmış ve bu çalışmaların yazarlarının vurguladığına göre gerçeğe uygun (deneysel olarak da desteklenen) sonuçlar elde edilmiştir. Kesin bir yargı olmamakla birlikte, bu durumdan hareketle bu tez kapsamında yapılan çalışmada da kararlılığın sağlanması koşulu ile gerçeğe uygun sonuçlar elde edileceği beklenilmektedir.

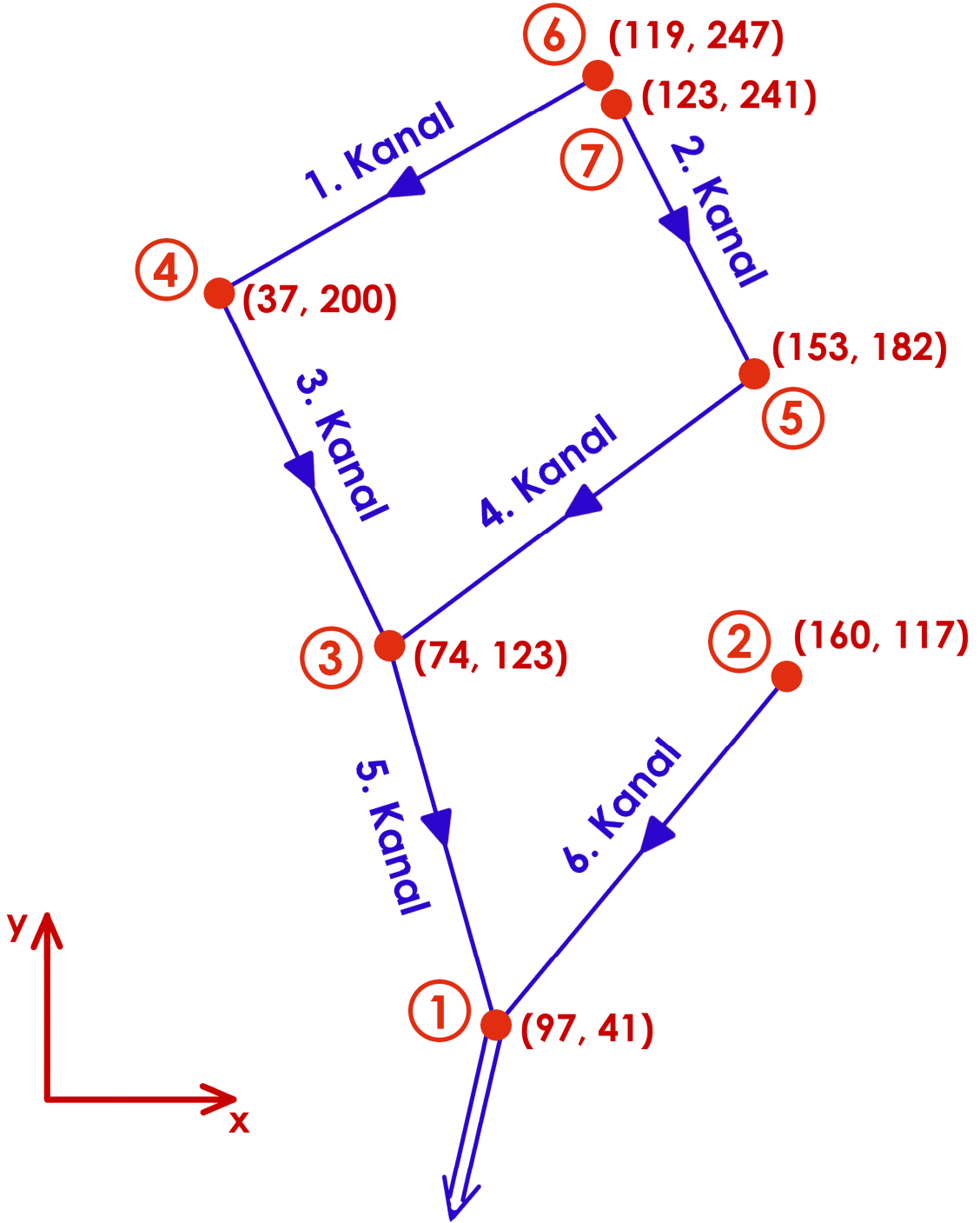
3. UYGULAMA

Bu çalışmada, şebekenin tasarımı için alınmış olan yağış altında şebeke sisteminde meydana gelen akımların gerçek zamanlı benzetimini yaparak sistemin yeterliliğini denetlemek için kullanılacak bir uygulama, sayısal akışkanlar dinamiği tekniklerinden faydalanılarak geliştirilmiştir. Uygulama java programlama dilinde yazılmıştır. Yazılmış olan uygulamada baca, kanal, havza vb. ilgili sınıflar oluşturulmuştur. Yazılımın kaynak kodu Ek 1.'de CD ortamında verilmektedir.

3.1 Şebeke Özellikleri

Uygulamada denetimi yapılan örnek şebeke sistemi kutu kesitli betonarme kanallar ile bacalardan ibarettir. Bacaların üstlerinde yağış sonucu yüzeyde oluşacak akışı toplayarak yağmur suyu drenaj kanallarına yönlendirecek ızgara sistemleri bulunmaktadır.

Örnek şebeke (Şekil 3.1) 7 adet baca ile 6 adet kanaldan meydana gelmektedir. 1, 2, 3, 4 ve 6 no'lu kanalların genişlikleri ve yükseklikleri 0,50 m olarak alınmıştır. Diğerlerinden farklı olarak 5 no'lu kanal için yükseklik ve genişlik 1 m'dir. Çalışma sonucunda bu kesilerin yeterli olup olmadığı ortaya çıkarılacaktır.



Şekil 3.1. Şebeke planı ve baca koordinatları

Şekil 3.1’de mavi renk ile gösterilmekte olan çizgiler yer altında bulunmakta olan drenaj kanallarını, kırmızı renk ile verilmekte olan noktalar bacaları sembolize etmektedir. Oklar kanallarda suyun akış yönlerini göstermektedir. Daire içerisinde verilmekte olan sayılar baca numaralarıdır. Parantez içerisinde verilmekte olan sayı çiftleri bacaların sırasıyla x ve y koordinatlarını vermektedir. Izgaraların tam olarak bacaların üzerinde oldukları kabul edildiğinden şekilde ayrı bir sembolle ayrıca gösterilmemektedirler.

Baca ve kanalların fiziksel parametreleri aşağıdaki çizelgelerde verilmektedir.

Çizelge 3.1. Bacaların fiziksel parametreleri

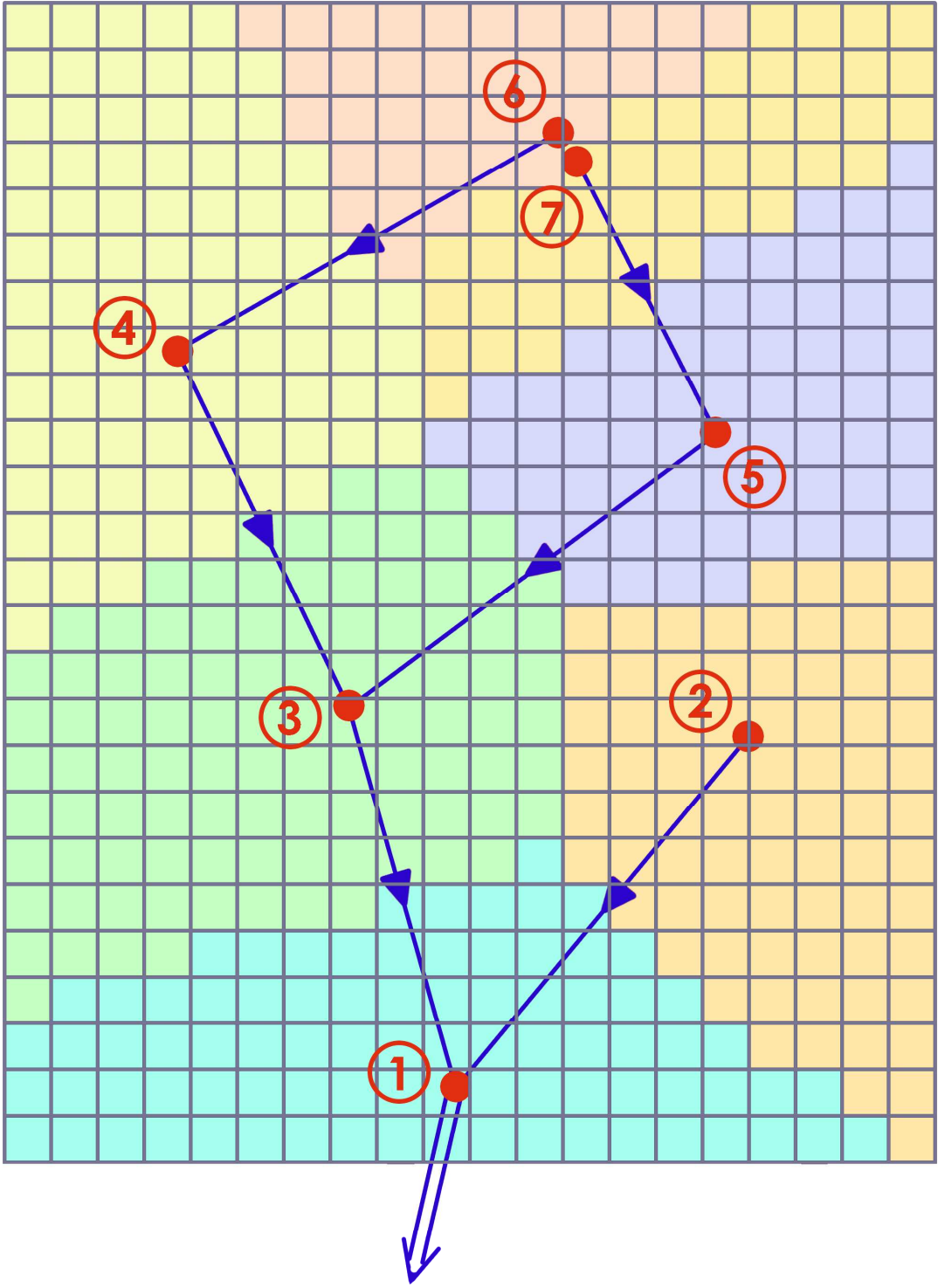
Baca No.	X (m)	Y (m)	Z (m)
1	97,00	41,00	97,30
2	160,00	117,00	98,75
3	74,00	123,00	98,78
4	37,00	200,00	99,53
5	153,00	182,00	99,47
6	119,00	247,00	100,00
7	123,00	241,00	100,00

Çizelge 3.2. Kanalların fiziksel parametreleri

Kanal No.	Kanal Başı Taban Kotu	Kanal Sonu Taban Kotu	Baş Baca No.	Son Baca No.	Uzunluğu (m)	Eğimi (m/m)
1	98,00	97,53	6	4	94,52	0,005
2	98,00	97,47	7	5	68,60	0,008
3	97,53	96,78	4	3	85,43	0,009
4	97,47	96,78	5	3	102,65	0,007
5	96,78	95,52	3	1	85,16	0,003
6	96,75	95,30	2	1	98,73	0,015

3.2 Baca Havzalarının Oluşturulması

Şebeke zerindeki alana düşen yağışın hangi bacaya ulaŐacađını belirlemek için baca havzaları oluŐturulmaktadır. Bu Şekilde bir bacaya ait havzaya düşen yağışın akışa geçerek o baca üzerinde bulunan ızgaraya gireeği kabul edilmektedir. Toplam havza 200 x 250 m'lik dikdörtgen bir alan olarak ele alınmıştır. Baca havzaları oluşturulurken bacalar nokta olarak ele alınmış, toplam havza 1 x 1 m'lik kare alanlara bölündükten sonra her kare en yakınındaki bacaya atanmıŐtır. Bu yapılırken, toplam $200 \times 250 = 50.000$ adet olan 1 x 1 m'lik kare alanların her birisi, ağrılık merkezine en yakın mesafede olan bacaya atanmıŐtır. Sonuçta her baca ile ilişkili kare alanlar bir araya getirilerek her bir bacaya ait yağış havzaları oluşturulmuştur. Yazılmış olan program içerisinde ise gerçekte her bir kare alan nesnesi, en yakınında bulunduğu baca nesnesinin kare alanlarını tutan listeye eklenmiŐtir. Grsel açıdan 10 x 10 m'lik kare alanlar kullanılarak oluŐturulan baca havzaları Şekil 3.2.'de gösterilmektedir. Şekilde, 10 x 10 m'lik kare havza parçaları en yakınında bulunan baca ile ilişkilidir ve bu ilişki, kare alanlar farklı renklere boyanarak ifade edilmiştir.

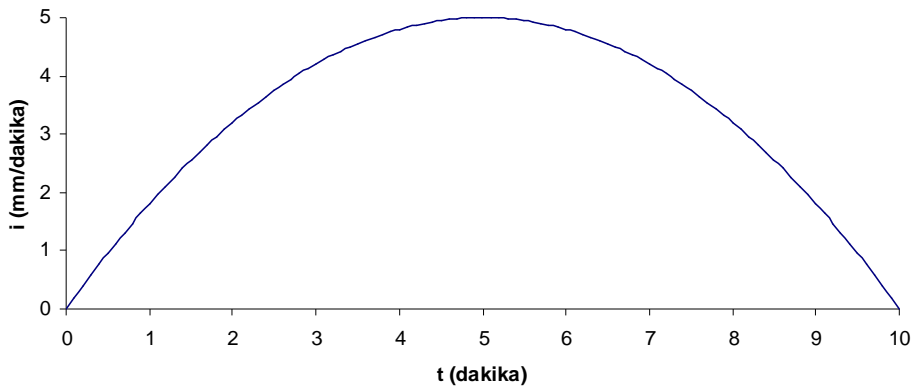


Şekil 3.2. Baca havzaları (saha taksimat planı)

3.3 Baca Giriş Hidrograflarının Oluşturulması

Yağmur suyu şebekelerinin tasarlanması sırasında, şebekenin bulunacağı bölgede hidrolojik olarak meydana gelme olasılığı bulunan bir yağış süresi ve yağış şiddeti seçilerek boyutlandırmalar böyle bir yağışa göre yapılır. Örneğin, tasarım için 5 yılda bir gelmesi muhtemel olan ve 10 dakika süren bir yağış alınabilir. Bu sıklıkta ve sürede meydana gelmesi muhtemel bir yağışın yağış şiddeti-zaman ilişkisi hidrolojik yöntemler kullanılarak belirlenir. Bu çalışmada söz konusu veriler hazır olarak kabul edilmiştir, sözü edilen hidrolojik yöntemlerle ilgili daha detaylı bilgi Bayazıt [13]'ta bulunabilir.

Bu çalışmada kullanılmakta olan yağış 10 dakika sürmektedir ve yağış şiddeti-zaman ilişkisinin $i = -0,2t^2 + 2t$ bağıntısı ile verildiği kabul edilmiştir. Burada i , mm/dakika cinsinden yağış şiddeti, t ise dakika cinsinden zamandır. Yağış şiddetinin fiziksel anlamını anlatmak için yağış şiddeti fonksiyonunun $i = 5$ mm/dakika gibi sabit bir fonksiyon olduğu örnek bir durum düşünülebilir. Bu durumda bir dakikalık bir yağış sonrasında yüzey akışı ya da sızmanın gerçekleşmediği ideal bir alanda 5 mm yüksekliğinde yağmur suyu birikmiş olacaktır. Verilen yağış şiddet fonksiyonu Şekil 3.3.'te gösterilmektedir. En yüksek yağış şiddeti, 5 mm/dakika ile yağışın 5. dakikasında gerçekleşmektedir.



Şekil 3.3. Yağış şiddet fonksiyonu i (mm/dakika)

Bir yağış sonucunda yer yüzüne düşen yağışın bir kısmı yeraltına sızmakta, bir kısmı yüzeyde çukurluklarda göllenmekte ve bir kısmı da akışa geçmektedir. Aslında ortaya çıkan durum hidrolojik olarak biraz daha ayrıntılı olarak ele

alınabilmektedir [15], bu çalışmada ise bu tür ayrıntılara girilmemiştir. Yapılmış olan bu çalışmada sızmanın meydana gelmediği ve göllenme ya da bir gecikme olmadan havza yüzeyine düşen yağışın havza yüzeyine düştüğü anda en yakınındaki bacaya doğru akışa geçtiği kabul edilmiştir. Sonuçta yağış başladıktan sonra yağmur ile bir bacanın havza alanına düşen yağış suları yüzeyde akarak bacaya ulaşmaktadır. Gerçekleşen bu akış bir zaman almaktadır ve sonuçta bacaya zaman içerisinde ulaşan yağış suları ile bacanın giriş hidrografı meydana gelmektedir.

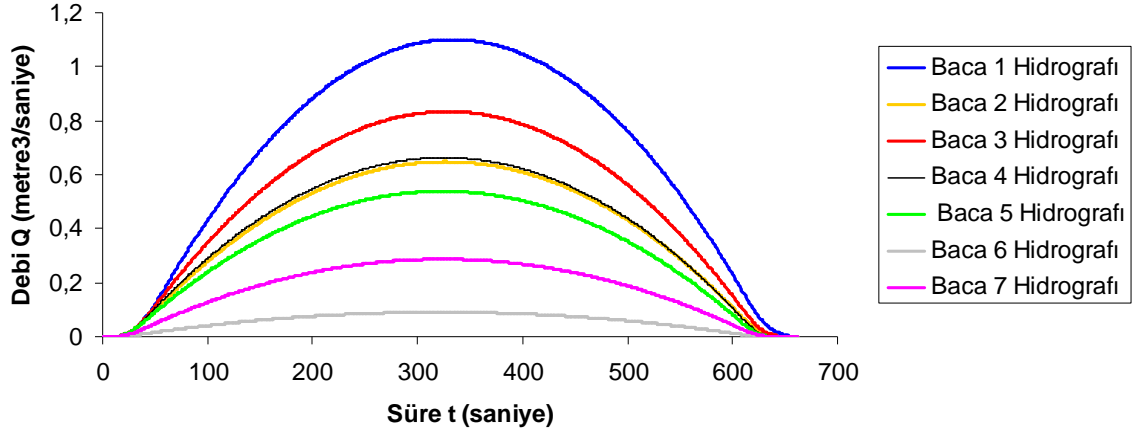
Hidrograflar bir kesitten zaman içerisinde geçen suyun debisini vermektedir. Bir hidrograf bu bakımdan zamana bağlı olan ve verilen bir zamanda bir kesitten geçen suyun debisini veren bir fonksiyon olarak düşünülebilir. Söz konusu kesitin konumsal olarak yeri sabittir, örneğin bu kesit bir bacaya ait ızgaranın giriş ağız olabilir. Debi ise bir kesitten belli bir anda geçen suyun hacimsel olarak miktarını vermektedir ve $Q = |\mathbf{V}|A$ olarak ifade edilebilir. Burada debi Q örneğin m^3/saniye cinsinden A (m^2) alanından $|\mathbf{V}|$ (m/saniye) hızında geçen su akımıdır ve skalar bir değerdir. Buradaki A , suyun ortalama hız vektörüne dik olan ıslak (alınan kesitte suyun kapladığı) alandır. \mathbf{V} suyun ıslak alan içerisinde geçtiği ortalama hız vektörüdür.

Baca giriş hidrograflarını oluşturmak için yer yüzüne düşen suyun akışa geçtikten sonra düştüğü yerin en yakınındaki bacaya ne miktarda ne sürede ulaştığının hesaplanması gerekmekte ve bu hesaplama baca ile ilişkili her bir havza parçası kare alan için, yüzey akışının devam ettiği her bir zaman adımında yapılmalıdır. Yapılan çalışmada bu hesaplama bir saniye aralıklarla gerçekleştirilmiştir. Sonuçta elde edilmiş olan baca giriş hidrografları 1 saniye aralıklarla bacalara giren debileri vermektedir. Bu durum uygulamanın daha sonradan gerçekleştirilmiş olan sayısal çözümleme kısmı ile uyumludur çünkü sayısal çözümlemede zaman adımı Δt , 1 saniye olarak alınmış ve tüm hesaplamalar bir saniye aralıklarla yapılmıştır.

Bacaların havzalarını oluşturan 1 x 1 m'lik alanların üzerlerine düşen yağışın en yakınındaki bacaya ulaşma süreleri amprik bir formül ile hesaplanmıştır [3]. Söz konusu formül aşağıda verilmektedir.

$$T_a = \frac{0,02886(nL)^8}{S^{0,4} P_{2,24}^{0,5}} \quad (3.1)$$

Burada T_a , yer yüzüne düşen suyun L mesafesini katetmesi için gerekli olan dakika cinsinden akış süresidir. (3.1) amprik bir formüldür ve [3]'te verildiği haliyle T_a 'yı dakika cinsinden vermektedir, bu çalışmada ise, (3.1) ile elde edilen dakika cinsinden akış süreleri saniyeye çevrilerek kullanılmıştır. n Manning pürüzlülük katsayısı, S yüzey eğimi ve $P_{2,24}$ ise iki senede bir gerçekleşen 24 saatlik bir yağışta düşen toplam yağış yüksekliğidir. $P_{2,24}$ tıpkı örnek şebekenin fiziksel özellikleri gibi verilmiş olan bir değerdir ve şebekenin bulunduğu bölgenin hidrolojik bir özelliğidir. $P_{2,24}$ değeri 10 mm olarak verilmiştir. n akışın meydana geldiği yüzeyin özelliklerini yansıtan Manning pürüzlülük katsayısıdır. Geçirimsiz ve yeşil alanların birlikte olduğu durumda bu değer tipik olarak $n = 0,24$ olarak alınmaktadır ve bu çalışmada da böyle alınmıştır. L kare alanın ağırlık merkezinin en yakınındaki bacaya metre cinsinden olan uzaklığıdır. S yüzey eğimidir ve $P_{2,24}$ gibi verilmiş olan bir değerdir. S tüm kare alanlar için 0,005 m/m olarak verilmiştir; bunun anlamı tüm yüzeylerin en yakınlarındaki bacalara doğru 0,005 m/m'lik bir eğime sahip olduklarıdır. Sonuçta her kare alana t_i ile t_{i+1} arasında 1 saniyede düşen toplam yağış hacmi $i(t_i/60) \times 0,001 \text{ m}^3$ kadardır. Bu miktardaki yağmur suyunun kare alanın ağırlık merkezine düştüğü kabul edilmiştir. Kare alanın ağırlık merkezinin en yakınındaki bacaya olan uzaklık L bilindiğinden gerekli değerler (3.1) denkleminde yerlerine konularak $t_i + 60T_a$ anında ele alınan kare alandan en yakınındaki bacanın giriş hidrografına olan katkısı hesaplanmış olur. Aynı hesaplama bacanın yağış havzasına ait tüm kare alanlar için, yağış akışının gerçekleştiği tüm zamanlarda yapılır, aynı giriş anındaki hacimsel giriş değerleri toplanırsa bacanın giriş hidrografı elde edilir. Tüm bacalara ait giriş hidrografları aşağıdaki şekilde toplu olarak verilmektedir.



Şekil 3.4. Bacalara ait yağış giriş hidrografları

Şekilde verilmiş olan hidrograflarda yağışın sona erdiği 600. saniyeden sonra da bacalarda giriş debisi olduğu görülmektedir. Bunun sebebi bacalara ait havzaların uzak noktalarından gelen akımların yağış sona erdikten sonra da bir süre gelmeye devam etmeleridir.

Bacaların giriş hidrograflarının altında kalan alanlar toplanarak her bir bacaya giren toplam yağış suyu miktarı hacimsel olarak hesaplanmış ve Çizelge 3.3.'de verilmiştir.

Çizelge 3.3. Bacalara giren yağış suyu miktarları

Baca No	Bacaya giren toplam su hacmi (m ³)
1	441,13
2	259,57
3	333,80
4	265,40
5	215,57
6	36,27
7	114,93
TOPLAM:	1.666,67

Düşen yağışın tamamının akışa geçtiği ve bacalara ulaştığı kabul edildiğinden bacalara giren toplam yağış suyu miktarı, yağış süresince şebekenin toplam yağış havzasına düşen toplam yağış miktarına eşit olmalıdır. Yağış süresinde havzanın her bir noktasına, Şekil 3.3.'de verilmiş olan yağış şiddet-zaman eğrisinin altında kalan alan kadar miktarda yağmur suyu (mm cinsinden) düşmektedir. Söz konusu eğrinin altında kalan alan integrasyon ile hesaplanıp metreye çevrildikten sonra elde edilen değer toplam havza alanı olan $200 \times 250 = 50.000 \text{ m}^2$ ile çarpıldığında 10 dakikalık yağış süresince şebekenin toplam yağış havzasına toplam $1.666,67 \text{ m}^3$ yağmur suyu düştüğü ortaya çıkmaktadır. Bu hesaplama sonucunda bulunan değer hidrografların altında kalan alanların toplanması sonucunda bulunan değerle aynıdır ve bu durum kanallardaki akımın modellenmesi sırasında kullanılmış olan baca giriş hidrograflarının doğruluğunu göstermektedir.

3.4 Örnek Şebekede Başlangıç ve Sınır Koşulları

Uygulama için seçilen sayısal çözüm yöntemi MacCormack yöntemidir. Bu yöntemin Saint Venant Denklemleri için yazılmış sonlu farklar denklemleri Bölüm 2.6'da verilmektedir.

Her $x + \Delta x$ için kanallardaki su yüksekliği ve ortalama hızın hesaplanıldığı benzetim aşamasında benzetimin devam ettiği her t anı için kanal başlangıçlarında ($x = 0$) su yüksekliği h ve ortalama su hızı u sınır koşulu olarak gerekli olmaktadır. Benzetim $t = 0$ anından başlayarak bir saniye ($\Delta t = 1$) aralıklarla gerçekleştirilmiştir. Bölüm 3.3'te $t = 0$ anından başlayarak yüzey akımının devam ettiği süre içerisinde bir saniye aralıklarla baca giriş hidrografları oluşturulmuştur. MacCormack formundaki sonlu farklar yöntemleri bir saniyelik adımlarda çözüleceğinden baca giriş hidrograflarındaki bilgi, bacaların bağlandığı kanallardaki başlangıç koşullarını belirlemek için yeterlidir. 1, 2 ve 6 nolu kanallar sadece başlangıç bacalarına giren debileri taşımaktadır, diğer kanallar ise bacalara giren ve baca giriş hidrografları ile verilen debilerin yanı sıra onlara bağlanan kanalların taşıdıkları debileri de taşımaktadır. Her durumda debilerin bacalardan kanallara geçebilmeleri için minimum bir spesifik enerjiye sahip olmaları gerekmektedir. Minimum spesifik enerjiye karşılık gelen akış yüksekliği, spesifik enerji denkleminin akış yüksekliğine göre alınan türevinin sıfıra

eşitlenmesi ile hesaplanabilir. Spesifik enerji denklemi ve minimum enerji durumunda oluşacak akış yüksekliğini hesaplamak için kullanılan denklemler sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$E_s = h + \frac{(Q/bh)^2}{2g} \quad (3.2)$$

Burada E_s spesifik enerji, b dikdörtgen kesitli kanalın genişliği, g yerçekimi ivmesi ve Q ise debidir.

$$h_s(t) = \left(\frac{(Q_s(t)/b)^2}{g} \right)^{1/3} \quad (3.3)$$

Burada $h_s(t)$ Bölüm 2.5.1'de verilmiş olan ve tüm t 'ler için $x = 0$ 'daki h 'ları hesaplamak için kullanılan fonksiyondur. $Q_s(t)$ zamana bağlı olarak kanal başındaki debiyi vermektedir ve tüm t 'ler için bilinmektedir. Tüm t 'ler için $x = 0$ 'daki u 'ları hesaplamak için yine Bölüm 2.5.1'de verilmiş olan $u_s(t)$ fonksiyonu kullanılmaktadır ve $u_s(t) = Q_s(t)/h_s(t)b$ şeklinde hesaplanmaktadır.

MacCormack yöntemi ile sayısal çözümlene yapmak için yukarıda bahsedilen sınır koşullarının yanı sıra $t = 0$ anında başlangıç koşulu olarak tüm x_i 'ler ($x_i = nx; n = 0,1,2, \dots, k; x_0$ kanal başlangıcı, x_k kanal sonu) için h ve u değerlerinin de biliniyor olması gerekmektedir. Başlangıç koşulu olarak $t = 0$ anında kanal içerisinde en azından 0,01 m yüksekliğinde uniform bir su akımı olduğu kabul edilmiştir. Bu şekilde yağışın ilk anlarında kanallara girmeye başlayan çok küçük debiler ihmal edilmekte ve aynı zamanda da çok küçük su yüksekliklerinin olması durumunda ortaya çıkabilecek kararlılık sorunlarının önüne geçilmiş olmaktadır [20]. Yağışın başladığı ilk anlarda en azından 0,01 m'lik ($h_{min} \geq 0,01$ m) yükseklikte akım veren bir debi (Q_{min}) geldiğinde, bu akış yüksekliği ve karşılık gelen akış hızı kanalın içindeki her noktada başlangıç koşulu olarak alınmış ve benzetim o andan itibaren başlatılmıştır. Böylece var olduğu

kabul edilen baz akım ilave bir su yüksekliği etkisi yaratmamıştır. $h_b(x)$ ve $u_b(x)$ fonksiyonları Bölüm 2.5.1'de verilmiştir; Başlangıç koşulları $h_b(x) = h_{min}$ ve $u_b(x) = Q_{min}/h_b(x)b$ şeklindedir.

3.5 Benzetim Sonuçları

Java programlama dilinde yazılmış olan program kullanılarak verilmiş olan örnek yağmur suyu drenaj şebekesinin sayısal ortamda modellenmesi yapıldıktan sonra verilen yağış altında şebeke kanallarında meydana gelen akışın benzetimi yapılmıştır. Şebeke kanallarında akış meydana gelmesine sebep olan yağmurun yağış şiddeti-zaman ilişkisi Bölüm 3.3'de verilmiştir. Söz konusu yağış en yüksek şiddeti olan 5 mm/dakika'ya yağışın 5. dakikasında (300. saniyesinde) ulaşmaktadır.

Yağış $t = 0$ anından başlayarak $t = 600$ anına kadar 600 saniye sürmüştür. Yağış sona erdikten sonra da bacalara ait havzaların uzak noktalarından yüzey akışı ile gelen yağmur suları bacalara girmeye devam etmiştir. Bunun yanı sıra, kanallarda hareket etmekte olan yağmur suları kanalların başlangıçlarından sonlarına kadar farklı sürelerde aktığından yağışın bitiş anı olan 600. saniyeden sonra da kanallarda akış bir süre devam etmiştir.

Kanallarda meydana gelen en yüksek akış yükseklikleri ile bu yüksekliklere karşılık gelen hız ve debi, meydana geliş anları ile birlikte Çizelge 3.3.'de verilmiştir.

Çizelge 3.4. Kanallarda meydana gelen en yüksek akış yükseklikleri

Kanal No.	t	Max h (m)	u (m/s)	Q (m3/s)
1	334	0,16	1,13	0,090
2	324	0,32	1,78	0,285
3	342	0,62	2,44	0,756
4	351	0,82	1,94	0,795
5	383	1,12	1,96	2,200
6	327	0,56	2,33	0,652

Çizelge 3.4.'de görülmekte olduğu üzere 3, 4, 5 ve 6 numaralı kanallarda hesaplanılan su yüksekliği önerilmiş olan kanal yüksekliklerinden fazla çıkmaktadır.

1, 2 ve 6 numaralı kanallar sadece bacalarından girmekte olan yağmur sularını taşımaktadır. Diğer kanallar ise kendi bacalarından gelmekte olan yağmur suyunun yanı sıra onlara diğer bacalardan bağlanmış olan kanalların getirdikleri suları da taşımaktadırlar. 3 numaralı kanal kendi bacasından gelmekte olan sular ile birlikte 1 numaralı kanalın taşıdığı suları, 4 numaralı kanal kendi bacasından gelmekte olan sular ile birlikte 2 numaralı kanalın taşıdığı suları, 5 numaralı kanal ise kendi bacasından gelen sular ile birlikte 3 ve 4 numaralı kanalların taşıdığı yağmur sularını da taşımaktadır. 1 numaralı bacaya giren toplam $441,13 \text{ m}^3$ suyu taşıyan kanal örnek şebekenin dışında kaldığından bu kanal hesaplamaların dışında bırakılmıştır. Bu bakımdan tüm kanallar birlikte, havzaya yağış süresinde düşmüş olan toplam $1.666,67 - 441,13 = 1.225,54 \text{ m}^3$ suyu taşımaktadırlar. Çizelge 3.5.'de yağış hidrografları ve bağlantılı kanallara bağlı olarak her bir kanalın taşınması gereken su miktarları, benzetim sonucunda hesaplanmış olan su miktarları ile birlikte karşılaştırmalı olarak verilmektedir.

Çizelge 3.5. Karşılaştırmalı benzetim sonuçları

Kanal No.	Bacadan gelen toplam su (m ³) A	Kanallardan gelen toplam su (m ³) B	A+B (m ³)	Benzetim sonucu hesaplanan (m ³) C	(%) Hata (1-C/(A+B))
1	36,27	-	36,27	36,41	% 0,4
2	114,93	-	114,93	115,20	%0,2
3	265,40	36,27 (kanal 1'den)	301,67	301,23	%0,1
4	215,57	114,93 (kanal 2'den)	330,50	330,30	%0,1
5	333,80	632,17 (kanal 3 ve 4'ten)	965,97	969,32	%0,3
6	259,57	-	259,57	259,75	%0,1

Benzetim sonucu hesaplanan debi değerleri kanal sonlarındaki hız ve yükseklik değerlerinden elde edilmiştir. Bu bakımdan benzetim sonucu hesaplanan olarak verilen değerler kanalların sonlarından akan suların toplamı olarak düşünülebilir. Çizelge 3.5.'de görülmekte olduğu üzere elde edilmiş benzetim sonuçları kanalların taşıması gereken su miktarları ile tutarlıdır. Hatalar küçüktür ve pratik amaçlar için benzetimin sonuçları doğru olarak kabul edilebilir.

3.5.1 Kanallarda gözlemlenen su yükseklikleri

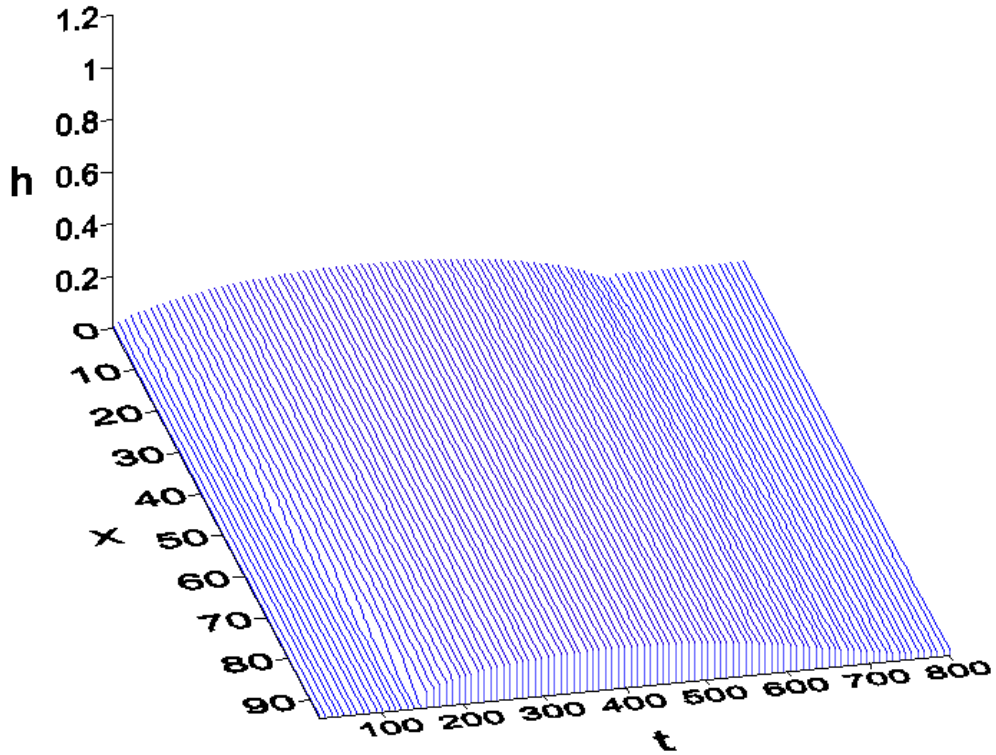
Aşağıda, kanallarda suyun zaman içerisindeki ilerlemesini gösteren şekiller yer almaktadır. Şekillerdeki dikey eksenler kanallar içerisindeki su yüksekliklerini göstermektedir. Yatay eksenlerde ise kanal başlangıcından itibaren metre cinsinden mesafeler ve saniye cinsinden zaman verilmektedir. Mesafeleri gösteren eksenlerde verilmekte olan bu değerler, hesaplamaların yapıldığı konumsal noktalara karşılık gelen sayıların, Δx konumsal adım değerleri ile çarpılması

sonucunda hesaplanmıştır. Hesaplamalarda her kanal için alınmış olan Δx değerleri Çizelge 3.6.'da verilmektedir. Farklı Δx 'ler kararlılığın sağlanacağı Courant sayılarını hesaplamak için kullanılmış olup çizelgede verilmekte olan Δx değerlerine karşılık gelen Courant sayılarında kararlı sonuçlar elde edilebilmiştir.

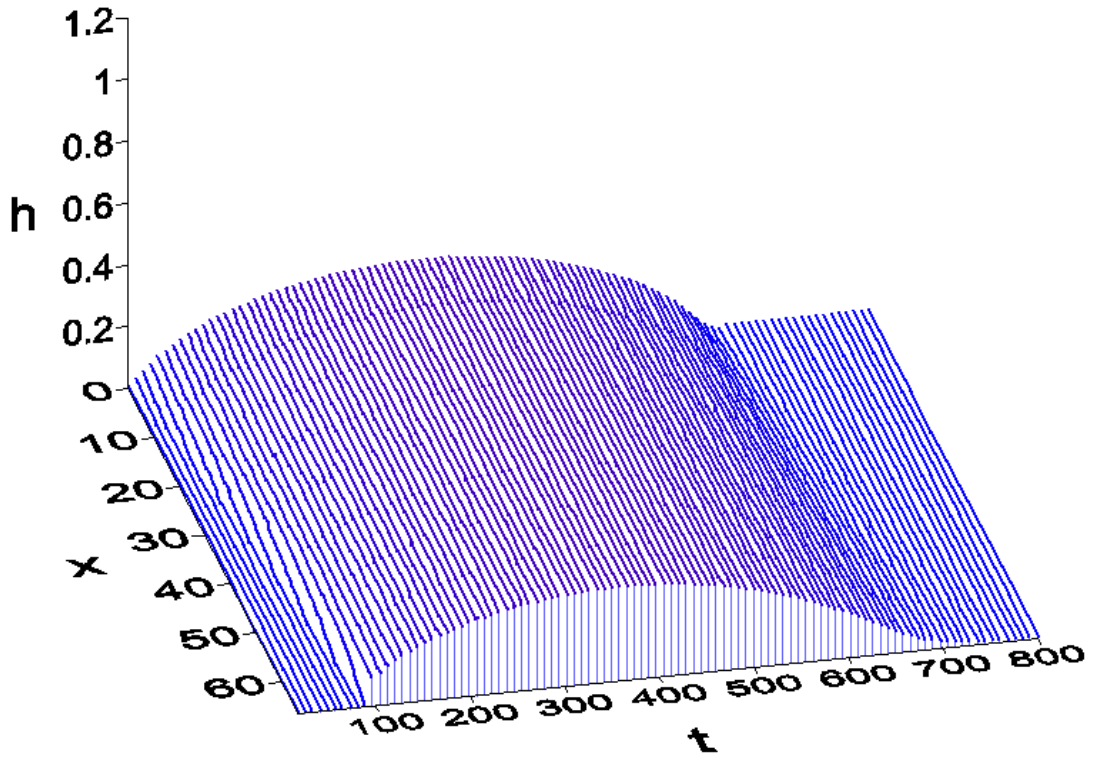
Çizelge 3.6. Hesaplamalarda kullanılan Δx değerleri

Kanal No.	Nokta sayısı	Δx (m)
1	33	2,95
2	15	4,75
3	18	4,90
4	22	4,89
5	18	5,01
6	21	4,94

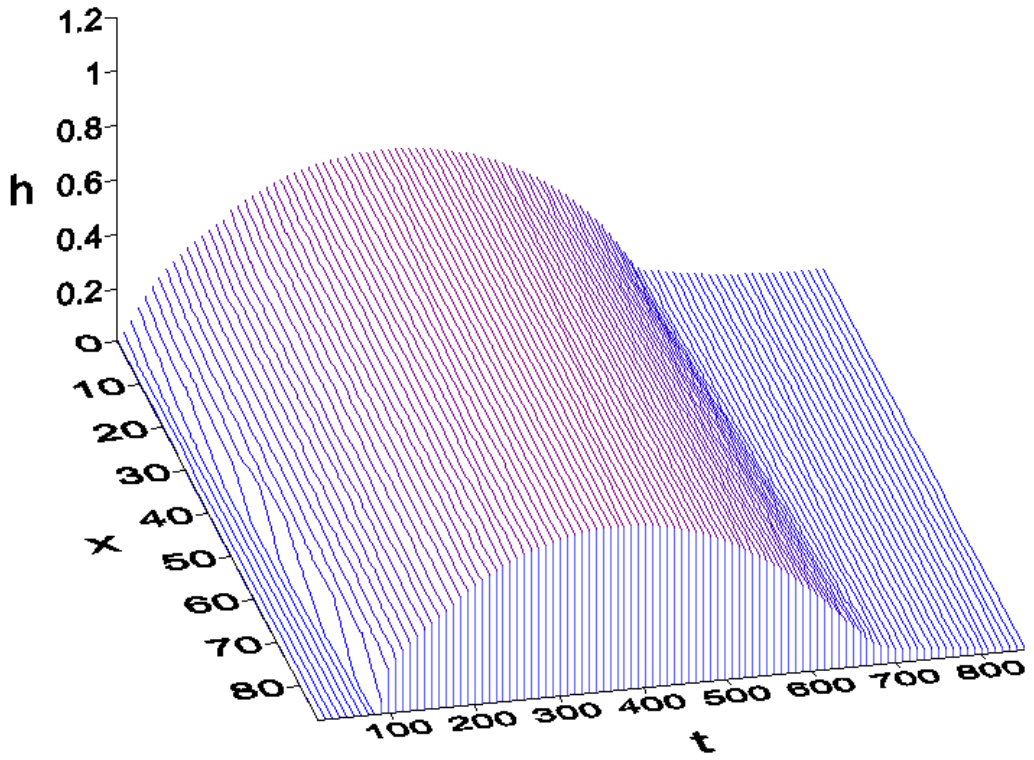
Aşağıdaki şekillerde, zamana göre kanallardaki su seviyeleri gösterilmektedir.



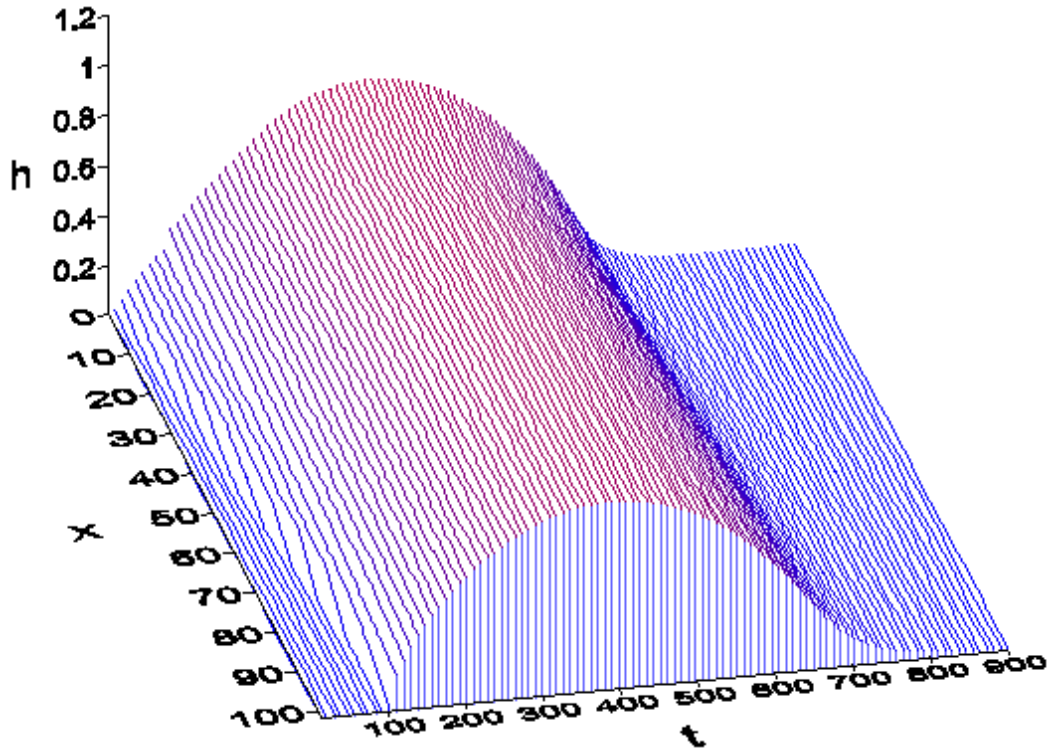
Şekil 3.5. Kanal 1'deki su seviyeleri



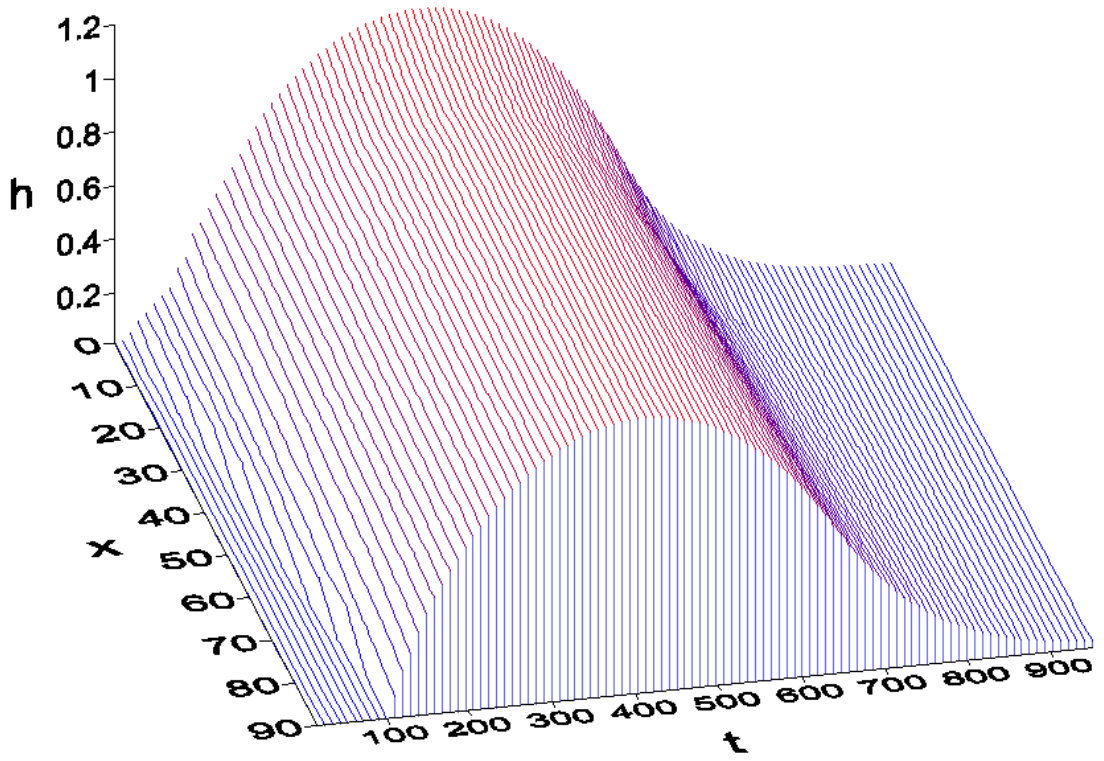
Şekil 3.6. Kanal 2'deki su seviyeleri



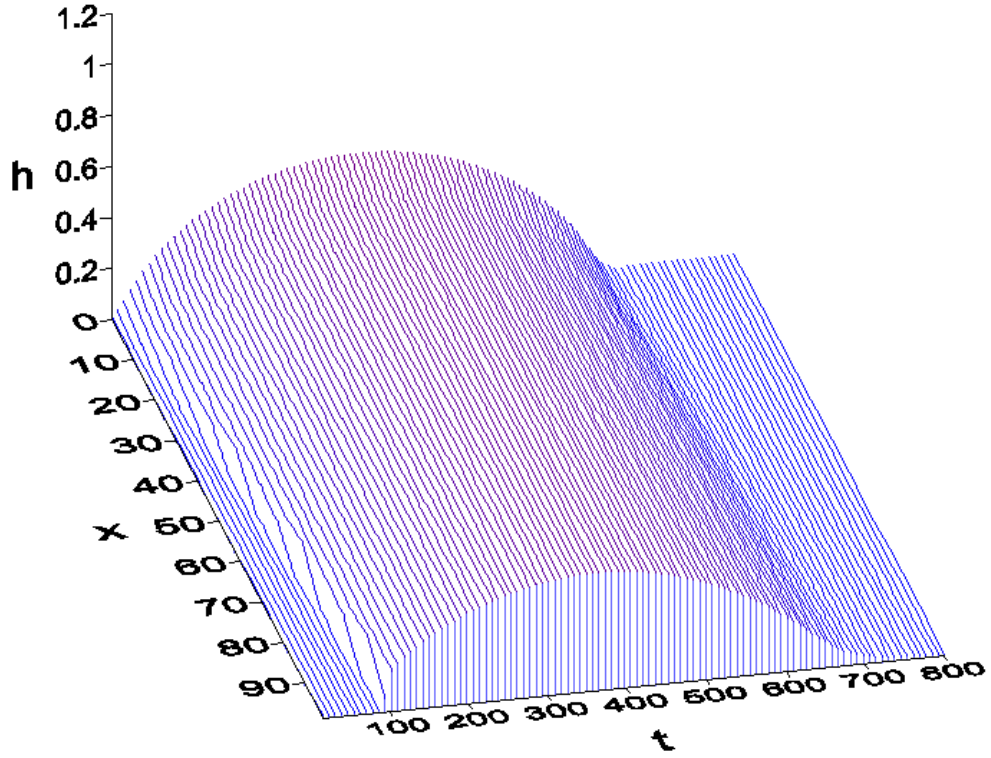
Şekil 3.7. Kanal 3'deki su seviyeleri



Şekil 3.8. Kanal 4'deki su seviyeleri



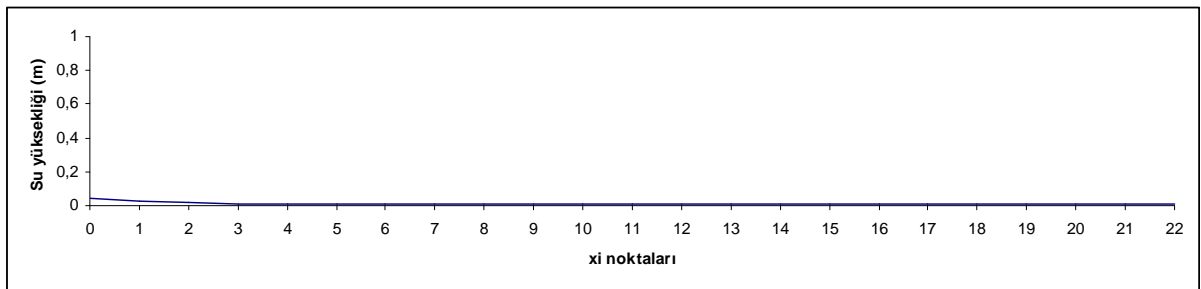
Şekil 3.9. Kanal 5'deki su seviyeleri



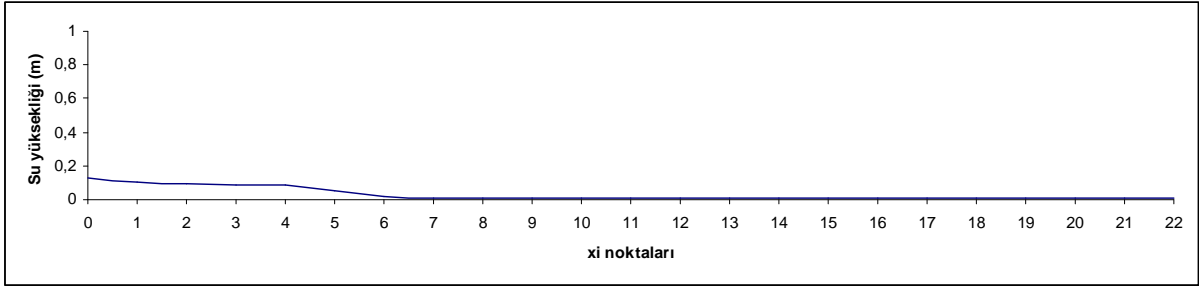
Şekil 3.10 Kanal 6'daki su seviyeleri

3.3.2 Courant sayısı etkisi

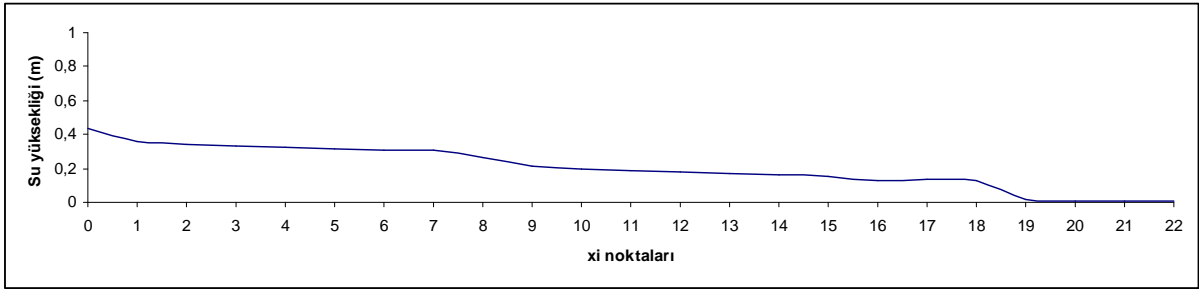
Aşağıdaki şekillerde Courant sayısının kararlılık üzerindeki etkisi görülmektedir. Burada örnek olarak 5 numaralı kanal gösterilmektedir ve Courant sayısı $Cr = 1,5$ olarak alınmıştır, kararlı bir hesaplama yapmak için ise Courant sayısı en fazla 1 olarak alınmalıdır. Kararlı olmayan hesaplamada ($Cr = 1,5$) ise suyun kanal içerisindeki davranışı 127. saniyeye kadar gösterilebilmiştir. 128. saniyede hesaplanılan h ve u değerleri sonsuza gitmektedir.



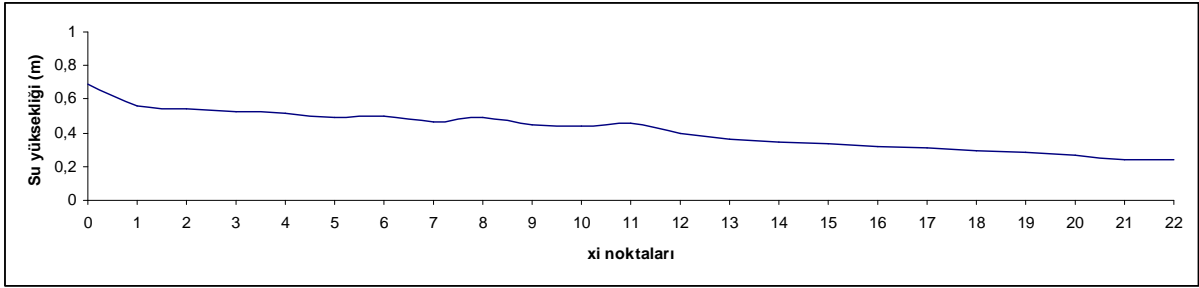
Şekil 3.11 Kararlı olmayan durum (Courant sayısı = 1,5) $t = 25$



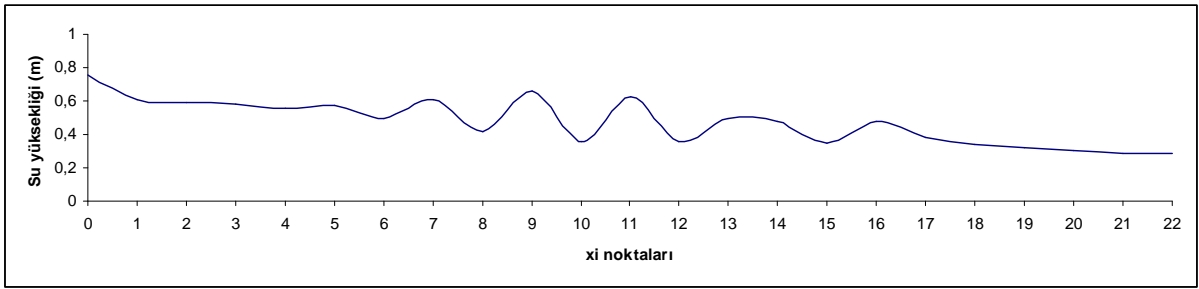
Şekil 3.12 Kararlı olmayan durum (Courant sayısı = 1,5) t = 50



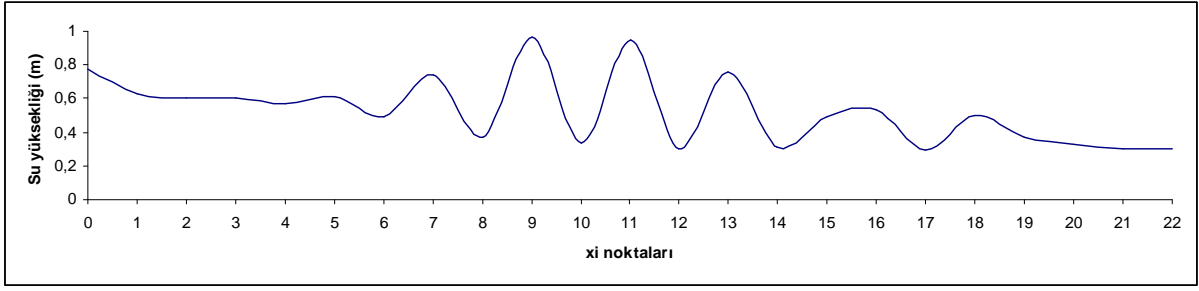
Şekil 3.13 Kararlı olmayan durum (Courant sayısı = 1,5) t = 100



Şekil 3.14 Kararlı olmayan durum (Courant sayısı = 1,5) t = 120



Şekil 3.15 Kararlı olmayan durum (Courant sayısı = 1,5) t = 125



Şekil 3.16 Kararlı olmayan durum (Courant sayısı = 1,5) t = 127

4. SONUÇ

Bir yağmur suyu şebekesinin kanallarında olası yağış altında oluşacak akış yüksekliklerinin belirlenmesi problemi ele alınmıştır. Problemin çözümü için matematiksel modelleme yapılmıştır. Kanallarda suyun akışı Saint Venant denklemleriyle ifade edilmiştir. Elde edilen hiperbolik denklem sisteminin çözümü için MacCormack yöntemine dayanan algoritma geliştirilmiştir.

Önerilen yöntemin performansını sergilemek için sayısal benzetim yapılmıştır. Benzetimde 6 kanaldan oluşan bir örnek şebeke alınmıştır. Kanalların dikdörtgen kesitli oldukları kabul edilmiştir. Benzetimde, şiddeti parabol şeklinde olan ve 10 dakika süren bir yağmur modellenmiştir. Ampirik formüller kullanılarak yağmur suyunun bacalara giriş debileri hesaplanmıştır. Elde edilen değerler sınır koşullarının oluşturulmasında kullanılmıştır.

Hesaplamalarda kanal yükseklikleri üzerine bir sınırlandırma yapılmamıştır. Her hangi bir kanaldaki akış yüksekliği kanalın verilmiş olan yüksekliğini aştığında program çalışmaya devam etmekte ve her zaman adımında hesaplanılan akış yüksekliği değerlerini kaydetmektedir. Benzetim sona erdikten sonra her bir kanal için kaydedilmiş en yüksek akış yüksekliğinden yola çıkarak şebeke kanalları yeniden boyutlandırılabilir. Bu durum taşma olmaması için kanalların sahip olması gereken yüksekliklerin hesaplanmasına imkan vermiştir.

Yapılan test hesaplamaları algoritmanın doğru sonuçlar verdiğini göstermiştir. Benzetimlerden elde edilen sonuçların teoriye uygun olduğu gösterilmiştir. Benzetim çalışmaları sırasında Courant sayısının da kararlı bir hesaplama yapmak için önemli olduğu görülmüştür. Kanallarda meydana gelen akımlarda kararlılığı sağlayabilmek için Courant sayısı tüm durumlar için en fazla 1 olarak alınmıştır.

Önerilen algoritmaya dayanarak kanal yatakları belirlenmiş bir şebekede kanalların yükseklikleri hesaplanabilir. Algoritma mevcut bir şebekede verilen bir yağış altında taşma olup olmayacağının belirlenmesinde, kanallardaki akış yüksekliklerinin hesaplanmasında da başarıyla kullanılabilir.

KAYNAKLAR LİSTESİ

- [1] CHOW, Ven T., Open-channel hydraulics, McGraw-Hill, Inc., 698p, 1959.
- [2] RICHTMYER, R. D. and MORTON, K. W., Difference methods for initial value problems, Wiley-Interscience, 405p, 1967.
- [3] OVERTON, Donald E. and MEADOWS Michael E., Stormwater modeling, Academic Press-NY, 358p, 1976.
- [4] TENNEKES, H., LUMLEY, J. L., A first course in turbulence, MIT Press, 390p, 1983.
- [5] FLETCHER, C. A. J., Computational techniques for fluid dynamics I, Springer-Verlag, 401p, 1991.
- [6] WILCOX, David C, Turbulence modelling for CFD, DCW Industries Inc., 477p,1993.
- [7] ANDERSON, Jhon D., Computational fluid dynamics the basics with applications, McGraw-Hill, Inc., 563p, 1995.
- [8] VERSLEEG H. K, MALALASEKERA W., Introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method, Longman, 267p, 1995.
- [9] CROSSLEY, Amanda J., Accurate and efficient numerical solutions for the Saint Venant equations of open channel flow, Ph.D. thesis, University of Nottingham, Nottingham, U.K., 243 p, 1999.
- [10] LOMAX, Harvard, PULLIAM, Thomas H. And ZINGG David W., Fundamentals of computational fluid dynamics, University of Toronto Press, 276p, 1999.
- [11] TINGSANCHALI, T. and RATTANAPITIKON, W., 2-D Modelling of dambreak wave propagation on initially dry bed, Thammasat International Journal of Science and Technology, vol.4, no.3, p.28-37, 1999.

- [12] TSENG, M.H. and CHU, C. R., Two dimensional shallow water flow simulation using TVD-MacCormack scheme, Journal of Hydraulic Research, vol.38, no.2, p.123-131, 2000.
- [13] BAYAZIT, Mehmetçik, Hidroloji, Birsen Yayınevi, 400s, 2001.
- [14] CHOI, S. and PAIK. J., Performance test of high resolution schemes for 1D dam break problem, KSCE Journal of Civil Engineering, vol.5, no.3, p.273-280, 2001.
- [15] USUL, Nurünnisa, Engineering Hydrology, Metu Press, 404p, 2001.
- [16] WESSELING, Pieter, Principles of computational fluid dynamics, Springer, 660p, 2001.
- [17] LEVEQUE, Randall J., Finite volume methods for hyperbolic problems, Cambridge University Press, 580p, 2004.
- [18] BLAZEK, J., Computational fluid dynamics: principles and applications, Elsevier-Ltd., 470p, 2005.
- [19] ALDRIGHETTI, Elisa, Computational hydraulic techniques for the Saint Venant equations in arbitrarily shaped geometry, Ph.D. thesis, University of Trento, Trento, Italy, p.125, 2007.
- [20] LIANG, D., LIN, B. and FALCONER, R. A., A boundary-fitted numerical model for flood routing with shock-capturing capability, Journal of Hydrology, vol.332, no.1, p.447-486, 2007.
- [21] SALLE, A., FEDKIW, R., KIM, B., LIU, Y and ROSSIGNAC J., An unconditionally stable MacCormack method, Journal of Scientific Computing, vol.35, no.2, p.350-371, 2008.

EKLER

Ek 1. Kaynak kodu