

NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN DÜZLEMSEL
GERİLME ANALİZİNE UYGULANMASI

YUSUF CUNEDİOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

TEMMUZ 1997

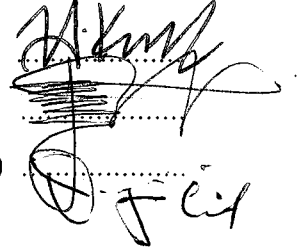
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma jürimiz tarafından **MAKİNA MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Yüksel KAPLAN (Niğde Üniversitesi)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Menderes KALKAT (Niğde Üniversitesi)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Osman YİĞİT (Kırıkkale Üniversitesi) (Danışman)



ONAY:

Bu tez, 06/07/1997 tarihinde, Enstitü Yönetim Kurulu'nca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun kararıyla kabul edilmiştir.

19.108/1997

Kaya

Prof.Dr.Kadriye KAYAKIRILMAZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

SONLU ELEMANLAR YÖNTEMİNİN DÜZLEMSEL GERİLME
ANALİZİNE UYGULANMASI

CUNEDİOĞLU, Yusuf

Niğde Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Makina Ana Bilim Dalı

Danışman: YİĞİT, Osman

Temmuz 1997. 52 sayfa

Bu çalışmada düzlemsel statik yüklere maruz levha şeklindeki elemanlarda oluşan gerilmelerin sonlu elemanlar yöntemiyle nasıl hesaplanabileceği araştırılmıştır.

Problemin çözümünde basit olması nedeniyle yer değiştirme yöntemi kullanılmış ve yer değiştirme fonksiyonunun lineer olduğu kabul edilerek işlemler yürütülmüştür. Analizde üçgen elemanlar seçilmiştir.

Eleman rijitlik matrislerinin ve eşitliklerinin oluşturulmasında minimum potansiyel enerji prensibi kullanılmıştır. Eleman eşitlikleri yardımıyla, sistem eşitliğinin nasıl oluşturulacağı gösterilmiştir. Sistem eşitliğinde bilinmeyen değerler yer değiştirmeler ve bağ kuvvetleridir. Bir elemanın altı adet serbestlik derecesine sahip olduğu düşünülürse, sistem rijitlik matrisinin oluşturulması güçleşeceğinden bu işlemin bilgisayarda yapılabilmesi için Basic programlama dilinde bir bilgisayar programı yazılmıştır. Oluşan denklem sistemi toplam serbestlik derecesi kadar bilinmeyeni ihtiva eden lineer bir sistemdir. Bu denklem sisteminin çözümünden elde edilen düğüm noktalarının yer değiştirme değerlerinin asal gerilme hesabında nasıl kullanılabileceği incelenmiştir.

Bahsedilen bu işlemler bazı tipik problemlere uygulanmış ve literatürde bulunan sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Yer Değiştirme. Üçgen Eleman. Gerilme Analizi

SUMMARY
APPLICATION OF FINITE ELEMENT METHOD
IN PLANE STRESS ANALYSIS

CUNEDİOĞLU.Yusuf

Niğde University

Graduate School of Natural and Applied Science Department of Mechanical Engineering

Supervisor: YIĞIT. Osman

July 1997.52 pages

In this study, by the finite element method, the calculation of the stresses on plate elements subjected to planar static loads are examined.

In the solution of the problem, due to simplicity, displacement method is used and displacement function is assumed linear. In the analysis triangular elements are chosen.

In the derivation of the element stiffness matrices and equations, the principle of minimum potential energy is used how the system equation is derived by the aid of element equations is shown. The unknown values in system equations are displacements and joint forces. Because of, the six degrees of freedom of the element to derive the system stiffness matrix is difficult, therefore a software in Basic programming language is prepared for this purpose. The resulted equation system has as many unknowns as total degrees of freedom and it is linear. It is examined how the node displacement values obtained from the solution of this equation system is used in principle stress calculations.

Those stated procedures were applied to typical problems and compared with the results in the literature.

Key Words: Displacement. Triangular Element. Stress Analysis

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmaları süresince, büyük desteğini gördüğüm hocam, Yrd.Doç.Dr. Osman YİĞİT ' e ayrıca Ansys paket programıyla problemin çözümlere değerlerinin elde edilmesinde yardımlarını esirgemeyen Kırıkkale Üniversitesi araştırma görevlilerinden İbrahim ÇAYIROĞLU' na şükranlarımı arz ederim.

Yusuf CUNEDİOĞLU



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	iii
SUMMARY.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	viii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	ix
SİMGELER DİZİNİ.....	xi
BÖLÜM 1.GİRİŞ.....	1
1.1 Sonlu Eleman Kavramı.....	1
1.2 Konunun Takdimi.....	2
1.3 Düzlemsel Gerilme Durumu.....	3
1.4 Düzlemsel Şekil değiştirme Durumu.....	3
BÖLÜM 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	5
BÖLÜM 3.DÜZLEMSEL GERİLME HALİNDE SONLU ELEMAN	
EŞİTLİKLERİ VE GERİLME ANALİZİ HAKKINDA TEORİK BİLGİ.....	6
3.1 Sonlu Elemanlar Yönteminde Genel Adımlar.....	6
3.2 İki Eksenli Gerilme ve Şekil Değiştirme Durumu.....	8
3.3 Eleman Rijitlik Denklemlerinin Elde Edilmesinde İzlenecek Yol.....	12
3.3.1.Eleman Tipinin Seçimi.....	12
3.3.2. Yer Değiştirme Fonksiyonlarının Seçimi.....	13
3.3.3 Şekil Değiştirme -Yer Değiştirme ve Gerilme- Şekil Değiştirme	
Bağıntıları.....	17
3.3.3.1. Elemandaki Şekil Değiştirmeler.....	17
3.3.3.2. Gerilme- Şekil Değiştirme Bağıntıları.....	19
3.3.4. Eleman Rijitlik Matrislerinin ve Eşitliklerinin Çıkarılması.....	19
3.3.5.Sistem Eşitliklerinin Oluşturulması ve Sınır Şartlarının	
Dikkate alınması.....	22
3.3.6. Düğüm Yer Değiştirmelerinin Bulunması.....	24

3.3.7. Eleman Gerilmelerinin Bulunması.....	24
3.4.Cisim ve Yüzey Kuvvetleriyle İlgili İşlemler.....	24
3.4.1. Cisim Kuvvetleri.....	24
3.4.2. Yüzey Kuvvetleri.....	26
BÖLÜM 4.SONLU ELEMANLAR PROGRAMININ YAZILMASI.....	30
4.1 Programın Mantığı.....	30
4.2 Programdaki Önemli Satırlar.....	30
BÖLÜM 5.UYGULAMA ÖRNEKLERİ.....	32
5.1.Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Levha.....	32
5.2 İki Ucundan Momentle Yüklü Levha.....	33
5.3 Parabolik Yükle Yüklü levha	35
5.4 Somun Sıkma Anahtarı.....	36
BÖLÜM 6. SONUÇ VE TARTIŞMA	39
BÖLÜM 7. ÖNERİLER.....	40
KAYNAKLAR.....	41
EKLER.....	43

ÇİZELGELER DİZİNİ

Tablo 1.Asal gerilme değerleri.....	33
Tablo 2. Yer değiştirme değerleri.....	34
Tablo 3 A noktasındaki gerilme durumu.....	36
Tablo 4. Kritik noktalardaki asal gerilmeler	37



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1.(a) Düzlemde yüke maruz düz plak.....	1
(b) Sonlu eleman modeli	1
Şekil 1.2 Çubuk eleman.....	2
Şekil 1.3 t kalınlığında çubuk eleman	2
Şekil 1.4 Düzlemsel gerilme durumları	3
(a) içi delikli levha.....	3
(b) köşeleri pahlı levha.....	3
Şekil 1.5 Düzlemsel şekil değiştirme durumları	4
(a) Yatay yükleme etkisindeki baraj.....	4
(b) Düşey yüklemenin etkisindeki boru.....	4
Şekil 3.1 Sonlu eleman tipleri	
(a) Basit çubuk eleman	6
(b) Düzlem gerilme- şekil değiştirmeyi temsil eden iki boyutlu basit elemanlar...6	
(c) Üç eksenli gerilmeyi temsil eden üç boyutlu basit elemanlar.....7	
(d) Simetri eksenli problemler için kullanılan basit simetri eksenli eleman.....7	
Şekil 3.2 İki boyutlu gerilme hali	8
Şekil 3.3 Asal gerilme yönleri.....	9
Şekil 3.4 x-y düzleminde elemanın yer değiştirmeleri	10
Şekil 3.5 T yükü etkisindeki ince levha	12
Şekil 3.6 şekil 3.5 teki levhanın üçgen elemanlara ayrılması	12
Şekil 3.7 Basit üçgen eleman	13
Şekil 3.8 Tipik bir elemanın x-y yüzeyi üzerindeki N_i' nin değişimi	17
Şekil 3.9 Global eksenlere paralel olmayan lokal eksenli üçgen eleman	23
Şekil 3.10 Koordinat eksenleri ağırlık merkezinde olan eleman	25
Şekil 3.11 Bir kenarına üniform yükle yüklenmiş eleman	26
Şekil 3.12 Yükleme etkisindeki elemanı gösterir.....	27

Şekil 3.13 Yüzeğe etkiyen yük düğüm kuvvetlerine eşittir.....	29
Şekil 5.1 Düzgün yayılı yükte yüklü levha	32
Şekil 5.2 Düzgün yayılı yükte yüklü levhanın sonlu elemanlar modeli	33
a) Sekiz elemanlı	33
b) Otuz iki elemanlı	33
Şekil 5.3 İki ucundan momentle yüklü levha	34
Şekil 5.4 İki ucundan momentle yüklü levhanın sonlu elemanlar modeli	34
Şekil 5.5 Parabolik yüğe maruz levha.....	35
Şekil 5.6 Parabolik yüğe maruz levhanın sonlu elemanlar modeli	35
Şekil 5.7 Somun sıkma anahtarı.....	36
Şekil 5.8 Somun sıkma anahtarının sonlu eleman modeli.....	38



SİMGELER

T	: Çekme kuvveti
σ_x, σ_y	: x ve y doğrultularındaki normal gerilmeler
$\{\sigma\}$: Gerilme vektörü
τ_{xy}	: Kayma gerilmesi
A	: Üçgen elemanın kesit alanı
t	: Eleman kalınlığı
ϵ_x, ϵ_y	: x ve y doğrultularındaki birim şekil değiştirmeler
$\{\epsilon\}$: Şekil değiştirme vektörü
γ	: kayma şekil değiştirmesi
$\{F\}$: Düğüm noktalarındaki yük vektörü
$\{d\}$: Yer değiştirme vektörü
σ_1, σ_2	: Maksimum, minimum asal gerilmeler
θ_A	: Asal gerilme açısı
u	: x yönündeki yer değiştirme miktarı
v	: y yönündeki yer değiştirme miktarı
$[D]$: Gerilmelerle birim şekil değiştirmeleri birbirine bağlayan malzeme matrisi
E	: Elastisite modülü
ν	: Poisson oranı
i, j, m	: Düğüm numaraları
x_i, x_j, x_m	: i, j ve m düğümlerinin x koordinatları
y_i, y_j, y_m	: i, j ve m düğümlerinin y koordinatları
$\{\psi\}$: Genel yer değiştirme vektörü
N_i, N_j, N_m	: Şekil fonksiyonları
$u(x, y)$: x yönündeki yer değiştirme fonksiyonu
$v(x, y)$: y yönündeki yer değiştirme fonksiyonu
π_p	: Toplam potansiyel enerji

U	: Şekil değişimi enerjisi
Ω_b	: Cisim kuvvetleri potansiyel enerjisi
$\{x\}$: Birim hacimdeki ağırlık
Ω_p	: Tekil yüklerin potansiyel enerjisi
$\{P\}$: Dış tekil yükü
Ω_s	: Yayılı yüklerin potansiyel enerjisi
$\{T\}$: Yüzeye etkileyen birim alandaki yayılı yük
$\{f\}$: Eleman üzerine etkileyen toplam yük
$[k]$: Rijitlik matrisi
$[K]$: Sistem rijitlik matrisi
$[k^{(e)}]$: x-y koordinat sistemine göre tanımlı eleman rijitlik matrisi
\hat{x}, \hat{y}	: Lokal eksen takımı
T	: Dönüşüm matrisi
$\{f_b\}$: Eleman cisim kuvvetleri
X_b, Y_b	: x ve y yönlerindeki cisim özgül ağırlığı
$\{f_{bi}\}$: i düğümüne isabet eden düğüm kuvveti
$\{f_s\}$: Düğümlere isabet eden yüzey kuvvetleri
p	: Üniform yayılı yük

BÖLÜM 1

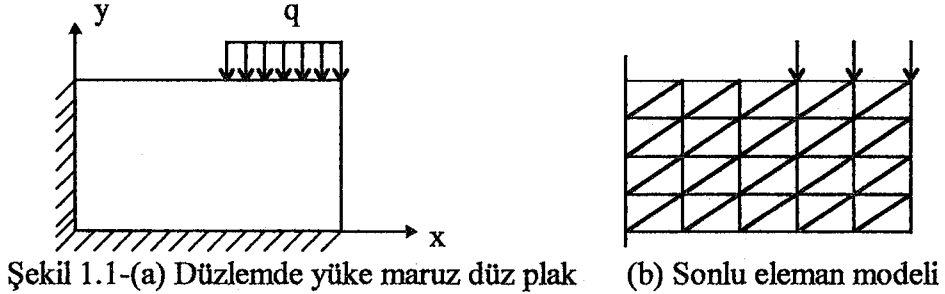
GİRİŞ

1.1 Sonlu Eleman Kavramı

Sonlu elemanlar metodu çok çeşitli mühendislik problemlerine yaklaşık çözüm bulmaya yarayan bir sayısal analiz metodudur. Mühendislikte karşılaşılan fiziksel olaylar diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Bu diferansiyel denklemlerin klasik analitik yollarla çözümü çok zor ve de karmaşıktır. Bu nedenle diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri için sonlu elemanlar yöntemi geliştirilmiştir.

Sonlu elemanlar yönteminin en belirgin özelliği, tüm bölgeyi ihtiva edecek bir çözüm bulmak yerine, bölgeyi küçük alt bölgelere ayırarak bu küçük bölgeler için çözümler geliştirmektir. Bu alt bölgelere sonlu elemanlar denir[1].

Bu metot da şekil 1.1 de görüldüğü gibi analizi yapılacak kendi düzleminde yüke maruz bir plağın elemanlara bölünüşü görülmektedir[1].

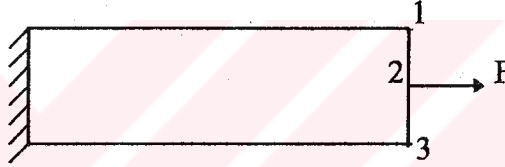


Bu elemanlar birbirlerine düğüm noktaları olarak adlandırılan sonlu sayıda noktalarla bağlıdır. Diğer bir ifadeyle düğüm noktaları genellikle elemanın sınırlarında konumlandırılmıştır. Her elemana ait düğüm noktalarında belirli serbestlik dereceleri vardır. Eleman davranışı bu bilinmeyen serbestlik derecelerini ihtiva eden denklemlerle ifade edilir. Bu denklemler vasıtasıyla düğüm noktası kuvvetleri ile düğüm noktası yer değiştirmeleri arasındaki lineer eşitliklerden (eleman eşitlikleri) faydalanarak sistem

denklemleri ortaya çıkarılır. Sonlu eleman yöntemi, bu denklem sisteminde matematik formunu kazanmıştır. Pratikteki problemlerde bazı düğüm noktalarının bazı yönlerdeki hareketleri engellenmiştir. Engellenen hareketlere sınır şartları adı verilir. Verilen sınır şartları yardımıyla bilinmeyen yönlerdeki yer değiştirmeler hesap edilir. Denklem sisteminin oluşturulması ve çözümü genel halde elle yapılamaz. Sayısal hesaplamaların bir bilgisayar tarafından yürütülmesi gerekmektedir.

1.2 Konunun Takdimi

Klasik mukavemette genel olarak sadece çubuk teorisi ile sınırlı kalınır. Ve bu teoride normal kuvvetin kesitin her tarafına eşit yayıldığı, eğilme momentinin oluşturduğu gerilmelerin asal eksenenden olan uzaklıklarla orantılı olduğu kabulü vardır. Basit bir örnek olarak şekil 1.2 ye dikkat edilirse



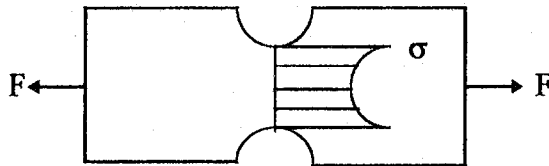
Şekil 1.2 Çubuk eleman

sağ ucun ortasından F kuvvetiyle zorlanan L boyundaki A kesitli çubuğun kuvvetin uygulandığı ucun alt ve üst taraflarında (1 ve 3 nolu yerlerde) hemen hemen hiç bir deformasyon gözlenmezken yükün uygulandığı 2 nolu bölgede gerilme yığılımları oluşur.

Yani yükün uygulandığı yerde $\sigma = \frac{F}{A}$ formülü ile hareket etmek hatalı sonuçlara

götürür[2].

Aynı şekilde şekil 1.3 te verilen t kalınlığındaki bir elemanın çentikli bölgesinin gerilme değeri sıfırken bu kenarlardan içerilere doğru uzaklaştıkça gerilme değeri homojen bir değer olmaya başlar[3].



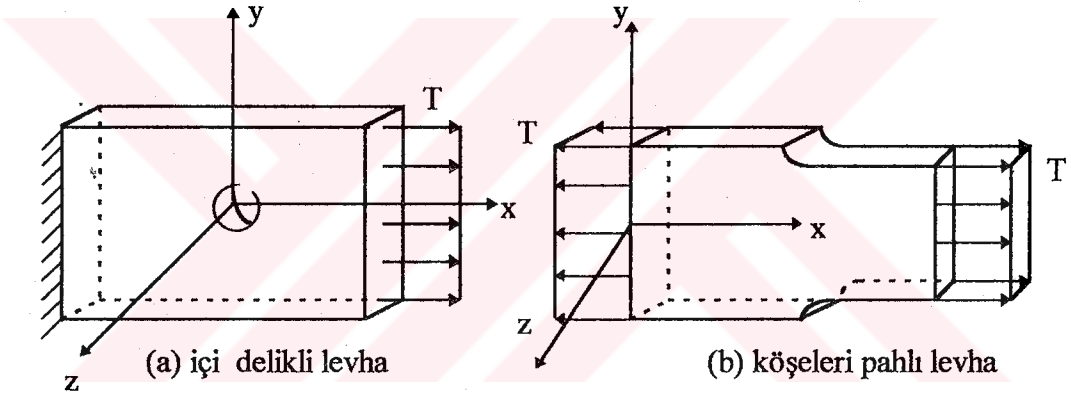
Şekil 1.3 t kalınlığında çubuk eleman

Yukarıda bahsedilen problemlerdeki gerilme değerlerini ve bunların daha karmaşıklıklarını çözebilecek paket programlar geliştirilmiştir. Bu paket programların anlaşılabilir ve kullanılabilir olması için teorisinin iyi bilmesi gereklidir [4].

Bu çalışmada yukarıda bahsedilen problemlere benzer problemlerin yaklaşık olarak sonlu elemanlar yöntemiyle nasıl çözülebileceği araştırılmıştır.

1.3 Düzlemsel Gerilme Durumu

Düzlemsel gerilme durumu incelenen levhada levha düzlemine dik doğrultudaki normal gerilme ve kayma gerilmelerinin sıfır olduğu gerilme durumudur. Örnek olarak, x-y düzleminde gösterilen T çekme kuvvetinin etkisi altındaki şekil 1.4(a) ve 1.4(b) deki levhalar düzlemsel gerilme durumunu göstermektedir.



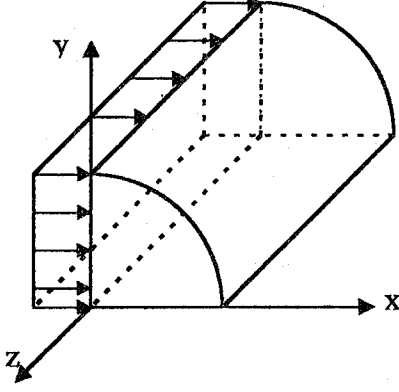
Şekil 1.4 Düzlemsel gerilme durumları

Burada σ_z normal gerilmesi, τ_{xz} ve τ_{yz} kayma gerilmelerinin değeri sıfır olarak kabul edilir. Genellikle bu elemanların kalınlıkları, z doğrultusundaki boyutu x-y doğrultusundaki boyutlarına nazaran küçüktür. Bu elemanlara yükler sadece x-y doğrultusunda etkir. Yani elemanların eğilmesi söz konusu değildir. Yükler, elemana x-y düzleminde etkirken, elemanın z doğrultusunda şekil değiştirmesi söz konusu olabilir.

1.4 Düzlemsel Şekil değiştirme Durumu

Düzlemsel şekil değiştirme durumu, x-y düzlemine dik olan z doğrultusundaki ϵ_z şekil değiştirmesi ile γ_{xz} ve γ_{yz} kayma şekil değiştirmelerinin sıfır olarak kabul edildiği gerilme durumudur. Düzlemsel şekil değiştirme durumu, z doğrultusundaki boyu uzun olan ancak

yüklemenin x-y düzleminde olduğu cisimlerde ortaya çıkar. Bu şekil değiştirme durumunda cismin z doğrultusundaki boyu değişmez. Bazı düzlemsel şekil değiştirme örnekleri şekil 1.5 te gösterilmiştir.



(a) Yatay yükleme etkisindeki baraj (b) Düşey yüklemenin etkisindeki boru

Şekil 1.5 Düzlemsel şekil değiştirme durumları

Bu örneklerin analizinde cismin sadece birim kalınlığı dikkate alınarak hesap yapmak yeterlidir. Çünkü uç kısımlar hariç iç tarafların aynı davranışı göstermesi beklenir[5].

BÖLÜM 2

ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

D.K.Brown [4] tarafından yazılan makalede mikro bilgisayarların gerilme analizinde nasıl istihdam edileceğini göstermektedir.

Sonlu elemanlar metodu olarak bilinen metod, 1956 yılında Turner, Clough, Martin ve Topp tarafından takdim edilmiştir [5]. Bu yayın, mafsallı bağlantılı çubuklar ve düzlemsel yüklere maruz üçgen plak elemanlarla uçak konstrüksiyonlarının analizinin nasıl yapılacağı hakkındadır.

C.S. Desai ve J.F. Abel [6] konunun mekanik, ısı transferi ve akışkanlar mekaniği sahalarını da kapsayacak şekilde incelemişlerdir.

Doktora çalışmalarında, 1962 yılında Tocher üçgen elemanları kullanarak plakların eğilmesini, 1966 yılında Felippa iki boyutlu sonlu elemanların lineer ve lineer olmayan davranışlarını incelemişlerdir[7].

O. Yiğit tarafından 1989 yılında yapılan doktora tezi çalışmasında çubuk ve plaklardan oluşan sistemlerde yer değiştirmelerin sonlu elemanlar yöntemi ile araştırılması incelenmiştir[8].

Konstrüksiyon mühendisliğinde metodun uygulanması katı cisimler mekaniğinde temel bilgilerin bilinmesini gerektirir. Katı cisimler mekaniğinde temel kavramları inceleyen yayın sayısı oldukça fazladır. Buna örnek olarak [9] verilebilir.

Sonlu elemanlar yöntemiyle gerçek değerlere çok yakın sonuçlar elde edebilmek için çalışmalar devam etmektedir.

BÖLÜM 3

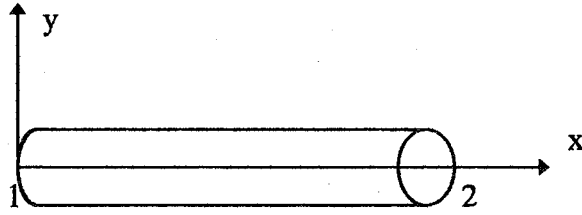
DÜZLEMSEL GERİLME HALİNDE SONLU ELEMAN

EŞİTLİKLERİ VE GERİLME ANALİZİ HAKKINDA TEORİK BİLGİ

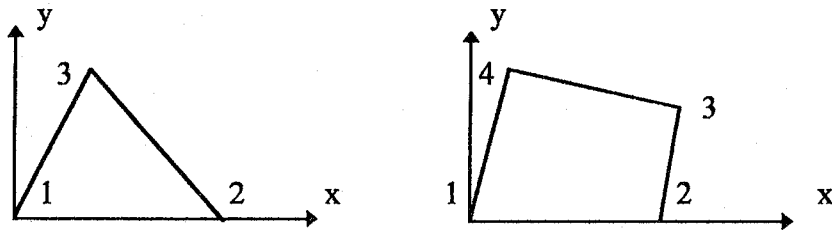
3.1 Sonlu Elemanlar Yönteminde Genel Adımlar

Sonlu elemanlar yönteminin konstrüksiyon elemanlarına uygulandığı durumlarda temel soru, eleman içindeki noktaların yüklenme halinde ne kadar yer değiştirdiği ve eleman içindeki gerilme dağılımının nasıl oluştuğudur. Bu sorulara iki farklı yaklaşımla cevap verilir. Bu yaklaşımlardan birisi kuvvet yöntemi ikincisi ise yer değiştirme yöntemidir. İki yöntemde sonuçta aynı cevabı verir. Ancak birinci yöntem bilinmeyen olarak kuvvetleri alırken ikinci yöntem bilinmeyen olarak yer değiştirmeleri alarak problemi çözer. Bu çalışmada basit olması nedeniyle yer değiştirme yöntemi kullanılacaktır. Yöntemin uygulanmasında şu adımlar izlenir.

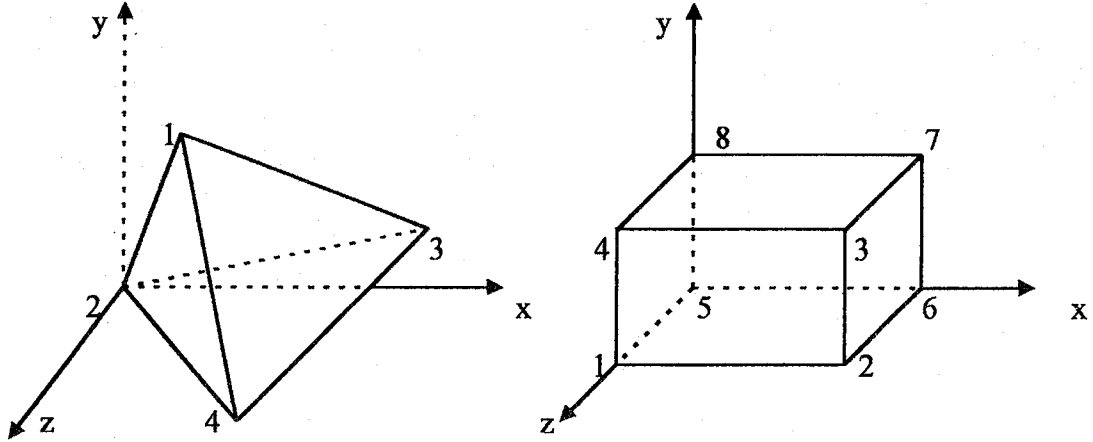
1. Eleman tipinin seçimi ve sistemin elemanlara ayrılması hususunda teknikte çok kullanılan eleman tipleri şekil 3.1 de verilmiştir [6].



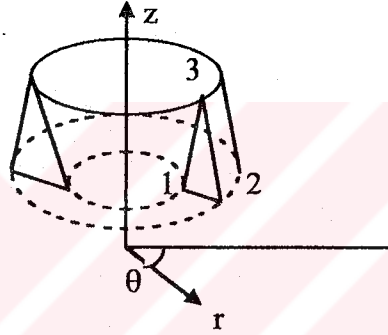
(a) Basit çubuk eleman



(b) Düzlem gerilme-şekil değiştirmeyi temsil eden iki boyutlu basit elemanlar.



(c) Üç eksenli gerilmeyi temsil eden üç boyutlu basit elemanlar.



(d) Simetri eksenli problemler için kullanılan basit simetri eksenli eleman.

Şekil 3.1 Sonlu eleman tipleri

Bu çalışmada üçgen elemanlar kullanılacaktır.

2. Yer değiştirme fonksiyonunun seçiminde eleman içindeki noktaların lineer yer değiştirmesi, ikinci dereceden veya üçüncü dereceden polinomlarla ifade edilir [10]. Bu çalışmada yer değiştirmenin lineer olduğu varsayılarak işlemler yürütülecektir.

3. Yer değiştirme ile şekil değiştirme arasındaki bağıntının kurulması için, eleman eşitliklerinin oluşturulmasına ihtiyaç vardır. Bu bağıntı x doğrultusundaki şekil değiştirme

için $\epsilon_x = \frac{du}{dx}$ şeklindedir. Buradan $\sigma_x = E \epsilon_x$ yazılabilir.

4. Eleman eşitliklerinin oluşturulması için, enerji yöntemi veya denge denklemleri kullanılabilir. Burada enerji yöntemi kullanılacaktır.

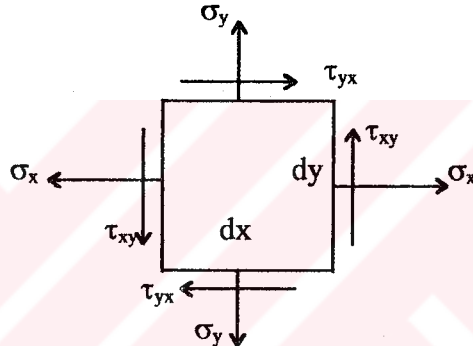
5. Eleman eşitliklerinden hareketle Sistem eşitliğinin oluşturulması 4. adımda bahsedilen eleman eşitlikleri toplanarak $\{F\} = [K] \{d\}$ sistem eşitliğini oluştururlar.

6. Sistem eşitliği çözülerek düğüm noktalarının yer değiştirme miktarını gösteren $\{d\}$ vektörü bulunur. Bu denklemin çözümünde Gauss Eliminasyon metodu kullanılacaktır[7].

7. Gerilmelerin hesabı düğüm noktaların yer değiştirmeleri yardımı ile bulunur.

3.2 İki Eksenli Gerilme ve Şekil Değiştirme Durumu

Üçgen elemanlarda rijitlik matrislerinin geliştirilip uygulanabilmesi için düzlem gerilme-düzlem şekil değiştirme durumunun bilinmesi gerekir. Şekil 3.2 de iki eksenli gerilme durumu gösterilmiştir.



Şekil 3.2 İki boyutlu gerilme hali

Kenar uzunlukları dx ve dy olan sonsuz küçüklükteki elemana ait normal gerilmeler σ_x ve σ_y sırasıyla x ve y doğrultularında etki etmektedir. τ_{xy} kayma gerilmesi x kenarında y doğrultusunda etkimektedir. τ_{yx} kayma gerilmesi y kenarında x doğrultusunda etkimektedir. Elemanın moment denge eşitliğinden τ_{xy} değerinin τ_{yx} değerine eşit olduğu görülür. Buradan birbirinden bağımsız üç gerilme bileşeni elde edilir ve bu bileşenler vektör şeklinde;

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2.1)$$

olarak gösterilir. (3.2.1) eşitliğiyle verilen gerilmeler düğüm noktalarının yer değiştirme büyüklükleriyle ifade edilecektir. Bundan dolayı önce düğüm noktalarının yer değiştirmelerinin belirlenmesi gerekir. Daha sonra gerilme değerleri bulunabilir.

İki eksenli düzlemsel gerilme halinde asal gerilme değerleri aşağıdaki ifadelerle bulunur [12].

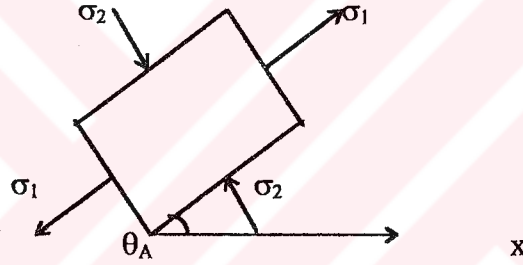
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{max}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sigma_{min} \quad (3.2.2)$$

Asal gerilme açısı θ_A nun değeri aşağıdaki bağıntıyla ifade edilir.

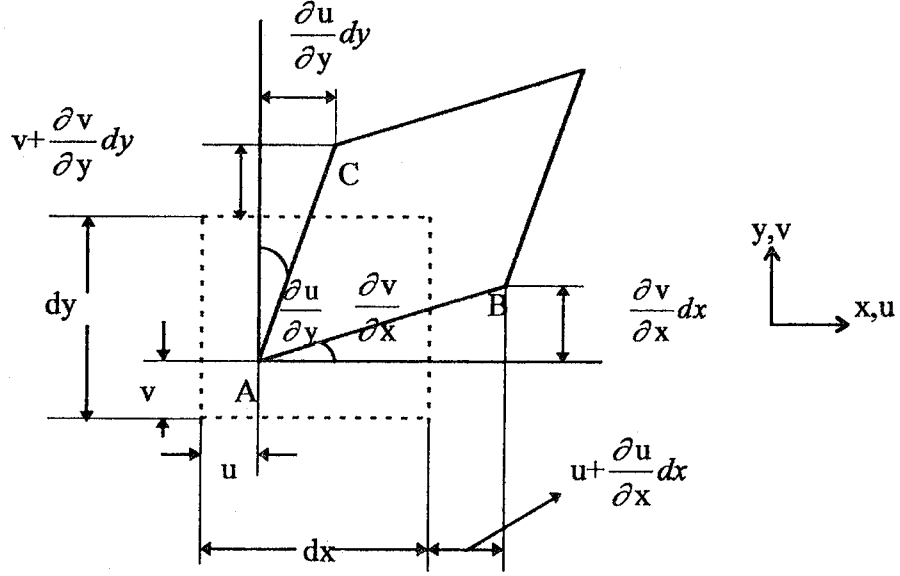
$$\tan 2\theta_A = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (3.2.3)$$

Şekil 3.3 σ_1 ve σ_2 asal gerilme değerleri ile θ_A açısını göstermektedir. Şekil 3.3 de gösterildiği gibi asal gerilmelerin etki ettiği yüzeylerde kayma gerilmesi sıfırdır.



Şekil 3.3 Asal gerilme yönleri

Şekil 3.4 te gösterilen sonsuz küçüklükteki eleman genel halde iki eksenli şekil değiştirme halini temsil etmektedir. Bu elemanda A noktasının x ve y yönlerindeki yer değiştirme miktarları u ve v dir.



Şekil 3.4 x-y düzleminde elemanın yer eğiştirmeleri

Buna ek olarak x doğrultusunda B noktası $(\partial u/\partial x)dx$ kadar ve y doğrultusunda C noktası $(\partial v/\partial y)dy$ kadar yer değiştirir. Ayrıca AB ve AC kenarlarına dikkatle bakılırsa, A noktasına göre B noktasının $(\partial v/\partial x)dx$ kadar yukarı, A noktasına göre C noktasının $(\partial u/\partial y)dy$ kadar sağa doğru hareket ettiği görölür.

Normal ve kayma şekil değiştirmelerinin genel tanımlarına dayanarak şekil 3.4 yardımıyla

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.2.4)$$

elde edilir. Buradan ε_x ve ε_y , eleman deforme olduğunda sırasıyla birim uzunlukta x ve y yönlerindeki değişmeleri göstermektedir. Bu şekil değişimlerine normal şekil değişimi denir. dx ve dy kenarları arasındaki dik açıda oluşan γ_{xy} değişikliği kayma şekil değiştirmesi olarak adlandırılır.

(3.2.4) eşitliğiyle verilen şekil değiştirmeler genellikle vektör şeklinde gösterilir;

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2.5)$$

Şimdi izotropik malzemeler için gerilme - şekil değişimi arasındaki ilişkiler hem düzlemsel gerilme hem de düzlemsel şekil değiştirme için ifade edilecektir.

Düzlemsel gerilme için aşağıdaki gerilme değerleri sıfır olarak kabul edilecektir:

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (3.2.6)$$

(3.2.6)değerleri üç eksenli gerilme halinde ;

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} \\ \varepsilon_y &= -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu \sigma_z}{E} \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu \sigma_x}{E} - \frac{\nu \sigma_y}{E} + \frac{\sigma_z}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

şeklinde verilen Hooke bağıntılarında [8] yerine konursa ;

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (3.2.8)$$

eşitliği bulunur. Burada

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

olup malzeme matrisi olarak adlandırılır. Bu ifadede E elastisite modülü, ν Poisson oranıdır. (3.2.8) eşitliğindeki $\{\sigma\}$ ve $\{\varepsilon\}$ vektörleri (3.2.1) ve (3.2.5) eşitlikleriyle tanımlanmıştır.

Düzlemsel şekil değiştirme durumunda ise;

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (3.2.10)$$

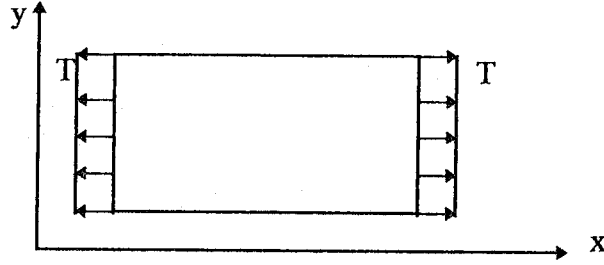
olduğu kabul edilir. Genelleştirilmiş Hooke kanununda (3.2.10) yerine konursa ve $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ olduğu dikkate alınır malzeme matrisi ;

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

şeklindedir.

3.3 Eleman Rijitlik Denklemlerinin Elde Edilmesinde İzlenecek Yol

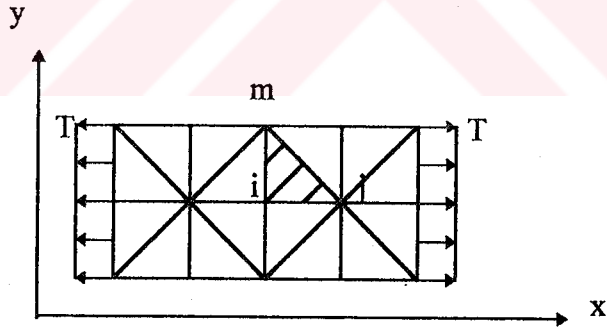
Gerilme analizinde temel eşitlikleri elde etmek için şekil 3.5 te T çekme yükü etkisindeki ince levha göz önüne alınacaktır.



Şekil 3.5 T yükü etkisindeki ince levha

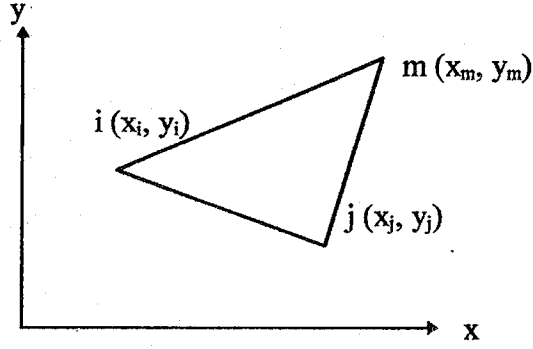
3.3.1. Eleman Tipinin Seçimi

Düzlemsel levhayı analiz etmek için öncelikle şekil 3.6 da gösterildiği gibi, levhayı düğüm numaraları i, j, m olan üçgen elemanlara ayırmak gerekir. Üçgen elemanlar seçilmesinin sebebi, düzensiz şekillere sahip elemanların üçgen elemanlarla daha kolay temsil edilebilmesi ve matematik bağlantıların daha basit olmasıdır.



Şekil 3.6 Şekil 3.5 teki levhanın üçgen elemanlara ayrılması

Düğüm numaraları saat ibrelerinin tersi yönünde i, j ve m olarak adlandırılan şekil 3.7 de ki basit üçgen eleman göz önüne alınacaktır. Burada, bütün formüller hesaplamalarda eleman alanlarının negatif çıkmaması için saat ibrelerinin tersi yönündeki düğüm numaralamaya göre çıkarılacaktır. Buna rağmen bu formüllerin saat ibrelerinin yönündeki düğüm numaralarına göre çıkarılması da mümkündür.



Şekil 3.7 Basit üçgen eleman

(x_i, y_i) , (x_j, y_j) ve (x_m, y_m) sırasıyla i, j ve m düğümlerinin bilinen düğüm koordinatlarıdır.

Düğüm yer değiştirme matrisi;

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (3.3.1)$$

ile verilir.

3.3.2. Yer Değiştirme Fonksiyonlarının Seçimi

Her eleman için $u(x, y)$ ve $v(x, y)$ yer değiştirme fonksiyonlarının seçilmesi gerekir. Yer değiştirme fonksiyonları eleman kenarlarında uyumluluğu garanti etmelidir.

$$u(x, y) = a_1 + a_2 x + a_3 y$$

$$v(x, y) = a_4 + a_5 x + a_6 y \quad (3.3.2)$$

şeklinde lineer olarak seçilen yer değiştirme fonksiyonları bu uyumluluğu sağlar.

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (3.3.3)$$

vektör biçiminde yazılan yer değiştirme fonksiyonları matris çarpımı şeklinde,

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x + a_3 y \\ a_4 + a_5 x + a_6 y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} \quad (3.3.4)$$

biçiminde gösterilir. (3.3.2) ifadesindeki a_i katsayılarını bulmak için düğüm noktalarının koordinatları bu ifadeye yerine konursa,

$$\begin{aligned}
 u_i &= a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \\
 u_j &= a_1 + a_2 x_j + a_3 y_j \\
 u_m &= a_1 + a_2 x_m + a_3 y_m \\
 v_i &= a_4 + a_5 x_i + a_6 y_i \\
 v_j &= a_4 + a_5 x_j + a_6 y_j \\
 v_m &= a_4 + a_5 x_m + a_6 y_m
 \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

şeklinde elde edilir. Burada u_i ve u_j , $u_i = u(x_i, y_i)$, $u_j = u(x_j, y_j)$ ifadelerini temsil etmektedir. (3.3.5) eşitliğinin ilk üç denklemindeki a_i 'leri çözebilmek için denklemler matris biçiminde şöyle yazılabilir,

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \tag{3.3.6}$$

veya a_i 'ye göre çözülmüş durumda,

$$\{a\} = [x]^{-1} \{u\} \tag{3.3.7}$$

yazılabilir. Burada $[x]$ (3.3.6) denkleminin sağındaki 3×3 ' lük matristir. $[x]$ in tersi

$$[x]^{-1} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \tag{3.3.8}$$

olarak herhangi bir yolla bulunabilir. Burada, A üçgenin alanı olup

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \tag{3.3.9}$$

şeklinindedir. Bu determinant açılırsa,

$$2A = x_i(y_j - y_m) + x_j(y_m - y_i) + x_m(y_i - y_j) \tag{3.3.10}$$

olarak bulunur. α , β , γ değerleri ise,

$$\begin{aligned}
 \alpha_i &= x_j y_m - y_j x_m & \alpha_j &= y_i x_m - x_i y_m & \alpha_m &= x_i y_j - y_i x_j \\
 \beta_i &= y_j - y_m & \beta_j &= y_m - y_i & \beta_m &= y_i - y_j \\
 \gamma_i &= x_m - x_j & \gamma_j &= x_i - x_m & \gamma_m &= x_j - x_m
 \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

şeklindedir. $[x]^{-1}$ in yardımıyla (3.3.7) eşitliği genişletilmiş matris biçiminde şöyle ifade edilebilir;

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (3.3.12)$$

Benzer şekilde, (3.3.5) eşitliğinin son üç denklemindeki a_i katsayıları;

$$\begin{Bmatrix} a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ v_j \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (3.3.13)$$

olarak bulunur.

Bu durumda $\{\psi\}$ 'nin $u(x, y)$ bileşeni x ve y koordinatlarına bağlı olarak yazılabilir.

Bunun için (3.3.2) eşitliği matris biçiminde ifade edilirse,

$$\{u\} = [1 \quad x \quad y] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (3.3.14)$$

yazılır. (3.3.12) eşitliği (3.3.14) te yerine konursa,

$$\{u\} = \frac{1}{2A} [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} \alpha_i & \alpha_j & \alpha_m \\ \beta_i & \beta_j & \beta_m \\ \gamma_i & \gamma_j & \gamma_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix} \quad (3.3.15)$$

bulunur. (3.3.15) eşitliğinde son iki matris çarpılırsa,

$$\{u\} = \frac{1}{2A} [1 \quad x \quad y] \begin{bmatrix} \alpha_i u_i & \alpha_j u_j & \alpha_m u_m \\ \beta_i u_i & \beta_j u_j & \beta_m u_m \\ \gamma_i u_i & \gamma_j u_j & \gamma_m u_m \end{bmatrix} \quad (3.3.16)$$

elde edilir. (3.3.16) eşitliğindeki iki matris çarpılıp yeniden düzenlenirse;

$$u(x, y) = \frac{1}{2A} \left\{ (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) u_i + (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) u_j + (\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) u_m \right\} \quad (3.3.17)$$

elde edilir. Benzer şekilde, (3.3.17) eşitliğinde u_i , u_j ve u_m 'lerin yerine sırasıyla v_i , v_j ve v_m yazılırsa y doğrultusundaki yer değiştirmeyi veren ifade

$$v(x, y) = \frac{1}{2A} \left\{ \begin{aligned} &(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y)v_i + (\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y)v_j + \\ &(\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y)v_m \end{aligned} \right\} \quad (3.3.18)$$

olarak elde edilir.(3.3.17) ve (3.3.18) eşitliklerini daha basit biçimde ifade edebilmek için,

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \\ N_j &= \frac{1}{2A}(\alpha_j + \beta_j x + \gamma_j y) \\ N_m &= \frac{1}{2A}(\alpha_m + \beta_m x + \gamma_m y) \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

tanımları yapılsın. Böylece (3.3.19) ifadelerinin kullanılmasıyla (3.3.17) ve (3.3.18) fonksiyonları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v(x, y) &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

$$\{\psi\} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_i u_i + N_j u_j + N_m u_i \\ N_i v_i + N_j v_j + N_m v_i \end{Bmatrix}$$

veya

$$\{\psi\} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (3.3.21)$$

şeklini alır. (3.3.21) eşitliği kısaltılmış matris formda ifade edilirse;

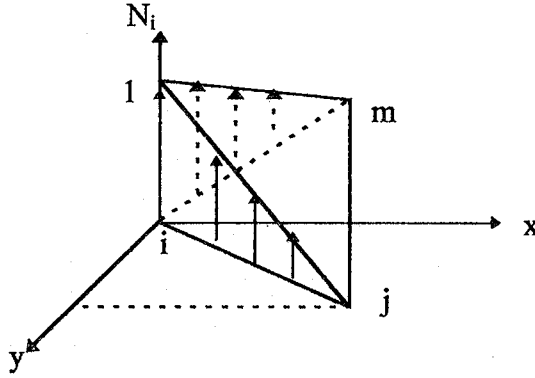
$$\{\psi\} = [N]\{d\} \quad (3.3.22)$$

elde edilir. Burada $[N]$,

$$[N] = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (3.3.23)$$

ile verilir. Böylece genel yer değiştirmeler $\{d\}$ nin fonksiyonu olarak N_i , N_j ve N_m şekil fonksiyonları yardımıyla ifade edilmiş oldu. Şekil fonksiyonları tipik bir eleman yüzeyi üzerine çizildiğinde $\{\psi\}$ yi temsil eder. Örnek olarak N_i , $u_i=1$ ve $u_j = u_m = v_i = v_j = v_m = 0$ olması durumundaki u yer değiştirme fonksiyonunu temsil eder. Buna ek olarak $u(x_i, y_i)$

u_i' ye eşit olmalıdır. Bu nedenle (x_i, y_i) de $N_i=1$, $N_j=0$ ve $N_m=0$ olmalıdır. Aynı şekilde $u(x_j, y_j)=u_j$ dir. Bunun için (x_j, y_j) de $N_i=0$, $N_j=1$ ve $N_m=0$ dir. Şekil 3.8 tipik bir elemanın üzerinde N_i şekil fonksiyonunun nasıl değiştiği görülmektedir. N_i şekil fonksiyonu jm kenarı haricinde sıfırdan farklı değerdedir.



Şekil 3.8 Tipik bir elemanın x-y yüzeyi üzerindeki N_i' nin değişimi

Ayrıca elemanın yüzeyinde yer alan bütün noktalarda $N_i+N_j+N_m=1$ dir.

3.3.3 Şekil Değiştirme -Yer Değiştirme ve Gerilme- Şekil Değiştirme Bağlılıları

Elemanın şekil değiştirme ve gerilmeleri bilinmeyen düğüm yer değiştirme değerleri yardımıyla ifade edilir.

3.3.3.1. Elemandaki Şekil Değiştirmeler

İki boyutlu elemandaki şekil değiştirmeler

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.3.24)$$

bağıntısıyla verilir. Yer değiştirmeler için (3.3.20) eşitliği kullanılarak;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_{,x} = \frac{\partial}{\partial x} (N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m) \quad (3.3.25)$$

veya

$$u_{,x} = N_{i,x} u_i + N_{j,x} u_j + N_{m,x} u_m \quad (3.3.26)$$

elde edilir. Burada indislerle gösterilen, x e göre türevi belirtmektedir. $u_{i,x} = 0$ alınır. Çünkü $u_i = u(x_i, y_i)$ sabit bir değerdir. Aynı şekilde $u_{j,x} = 0$ ve $u_{m,x} = 0$ dir.

(3.3.19) eşitliğinin kullanılmasıyla (3.3.26) eşitliğindeki şekil fonksiyonlarının türevleri için ifadeler aşağıdaki gibi olur;

$$N_{i,x} = \frac{1}{2A} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) = \frac{\beta_i}{2A} \quad (3.3.27)$$

Benzer şekilde,

$$N_{j,x} = \frac{\beta_j}{2A} \text{ ve } N_{m,x} = \frac{\beta_m}{2A} \quad (3.3.28)$$

olur. Bu yüzden (3.3.27) ve (3.3.28) eşitlikleri (3.3.26) da yerlerine konursa;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2A} (\beta_i u_i + \beta_j u_j + \beta_m u_m) \quad (3.3.29)$$

eşitliği elde edilir. Aynı şekilde

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2A} (\gamma_i v_i + \gamma_j v_j + \gamma_m v_m)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2A} (\gamma_i u_i + \beta_j v_j + \gamma_j u_j + \beta_j v_j + \gamma_m u_m + \beta_m v_m) \quad (3.3.30)$$

eşitliği bulunur. (3.3.29) ve (3.3.30) eşitliklerinin (3.3.24) te yerlerine konulmasıyla ;

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 & \beta_j & 0 & \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_i & 0 & \gamma_j & 0 & \gamma_m \\ \gamma_i & \beta_i & \gamma_j & \beta_j & \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix} \quad (3.3.31)$$

elde edilir. Bu eşitlik daha basit olarak,

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} B_i & B_j & B_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_m \end{Bmatrix} \quad (3.3.32)$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$$[B_i] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_i & 0 \\ 0 & \gamma_i \\ \gamma_i & \beta_i \end{bmatrix} \quad [B_j] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_j & 0 \\ 0 & \gamma_j \\ \gamma_j & \beta_j \end{bmatrix} \quad [B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \beta_m & 0 \\ 0 & \gamma_m \\ \gamma_m & \beta_m \end{bmatrix} \quad (3.3.33)$$

şeklinde. Sonuç olarak (3.3.32) eşitliği basitleştirilmiş şekilde aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (3.3.34)$$

Burada,

$$[B] = \begin{bmatrix} \underline{B}_i & \underline{B}_j & \underline{B}_m \end{bmatrix} \quad (3.3.35)$$

biçimindedir.

\underline{B} matrisi x ve y koordinatlarından bağımsızdır. \underline{B} matrisi (3.3.33) ve (3.3.11) eşitliklerinde görülmüş olduğu gibi sadece elemanın düğüm koordinatlarına bağlı olduğundan eleman içindeki şekil değişimleri sabit olacaktır. Bu nedenle sabit şekil değiştirmeli üçgen eleman olarak adlandırılır.

3.3.3.2. Gerilme- Şekil Değiştirme Bağlılıkları

Genelde, düzlemsel gerilme - şekil değiştirme bağıntısı

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.3.36)$$

şeklinde. Burada $[D]$, düzlemsel gerilme problemleri için (3.2.9) da, düzlemsel şekil değiştirme problemleri için (3.2.11) de verilmiştir. (3.3.34) eşitliği (3.3.36) da yerine konursa düzlemsel gerilmeler bilinmeyen düğüm serbestlik derecelerine göre ifade edilmiş olur;

$$\{\sigma\} = [D][B]\{d\} \quad (3.3.37)$$

3.3.4. Eleman Rijitlik Matrislerinin ve Eşitliklerinin Çıkarılması

Minimum potansiyel enerji prensibinin kullanılmasıyla tipik bir sabit şekil değişimli üçgen eleman için eşitlikler çıkarılabilir. Basit düzlemsel gerilme elemanı için toplam potansiyel enerji, düğüm yer değiştirmelerinin u_i, v_i, \dots, v_m (yani $\{d\}$) nin bir fonksiyonu olduğu unutulmamalıdır. Şöyle ki

$$\pi_p = \pi_p(u_i, v_i, u_j, \dots, v_m) \quad (3.3.38)$$

biçimindedir. Burada, toplam potansiyel enerji

$$\pi_p = U + \Omega_b + \Omega_p + \Omega_s \quad (3.3.39)$$

bağıntısıyla verilir. Bu ifadede şekil değişimi enerjisi U ,

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (3.3.40)$$

olarak veya (3.3.36) eşitliği kullanılarak;

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV \quad (3.3.41)$$

şeklinde elde edilir. Burada $[D]^T = [D]$ olduğu dikkate alınmıştır.

Cisim kuvvetleri potansiyel enerjisi Ω_b ,

$$\Omega_b = - \iiint_V \{\psi\}^T \{x\} dV \quad (3.3.42)$$

ile verilir. Burada $\{\psi\}$ yine genel yer değiştirme fonksiyonudur. $\{x\}$ ise birim hacimdeki ağırlıktır.

Tekil yüklerin potansiyel enerjisi Ω_p ,

$$\Omega_p = - \{d\}^T \{P\} \quad (3.3.43)$$

şeklindedir. Burada $\{d\}$ düğüm yer değiştirmelerini, $\{P\}$ dış tekil yükleri gösterir.

Yaylı yüklerin potansiyel enerjisi Ω_s ,

$$\Omega_s = - \iint_S \{\psi\}^T \{T\} dS \quad (3.3.44)$$

şeklindedir. Burada $\{T\}$ yüzeye etkiyen birim alandaki yaylı yükü temsil etmektedir.

(3.3.41)-(3.3.44) eşitliklerindeki $\{\psi\}$ değeri (3.3.21) eşitliğiyle, $\{\varepsilon\}$ değerleri (3.3.34) eşitliğiyle ifade edilirse elemanın potansiyel enerjisi,

$$\begin{aligned} \pi_p = & \frac{1}{2} \iiint_V \{d\}^T \{B\}^T [D] [B] \{d\} dV - \iiint_V \{d\}^T \{N\}^T \{x\} dV - \{d\}^T \{P\} \\ & - \iint_S \{d\}^T [N]^T \{T\} dS \end{aligned} \quad (3.3.46)$$

ifadesi yazılabilir. (3.3.46) eşitliğinin son üç terimi eleman üzerine etkiyen toplam yükü göstermektedir. Bu yük,

$$\{f\} = \iiint_V [N]^T \{x\} dV + \{P\} + \iint_S [N]^T \{T\} dS \quad (3.3.47)$$

şeklindedir. Burada (3.3.47) eşitliğinde ilk terim cisim kuvvetlerini ikincisi düğümlerdeki tekil kuvvetleri üçüncüsü ise yüzeylerdeki yayılı yükleri gösterir.(3.3.47) eşitliğinin (3.3.46) da yerine konulmasıyla ;

$$\pi_p = \frac{1}{2} \{d\}^T \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \{d\} - \{d\}^T \{f\} \quad (3.3.48)$$

ifadesi bulunur. $\pi_p = \pi_p(\underline{d})$ den dolayı bu ifadenin $\{d\}$ ye göre alınan kısmi türevinin sıfır olması gerekir.

$$\frac{\partial \pi_p}{\partial \{d\}} = \left[\iiint_V [B]^T [D] [B] dV \right] \{d\} - \{f\} = \mathbf{0} \quad (3.3.49)$$

bulunur. Bu ifadeden

$$\iiint_V [B]^T [D] [B] dV \{d\} = \{f\} \quad (3.3.50)$$

elde edilir. Burada

$$[k] = \iiint_V [B]^T [D] [B] dV \quad (3.3.51)$$

ifadesi rijitlik matrisi olarak tanımlanır. t sabit kalınlığındaki bir eleman için (3.3.51) eşitliği,

$$[k] = t \iint_A [B]^T [D] [B] dx dy \quad (3.3.52)$$

şeklini alır. Burada integral içindeki ifade x ve y koordinatlarının bir fonksiyonu olmadığından integral dışına alınabilir. Bu durumda,

$$[k] = t A [B]^T [D] [B] \quad (3.3.53)$$

olarak elde edilir. Burada A (3.3.10), $[B]$ (3.3.35) ve $[D]$ (3.2.9) veya (3.2.11) eşitlikleriyle verilir. Elemanların sabit kalınlıkta oldukları kabul edilmiştir.

(3.3.53) eşitliğinden $[k]$ nın düğüm koordinatlarının ve malzeme özelliklerinin bir fonksiyonu olduğu görülmektedir. Burada $[k]$ matrisi,

$$[k] = \begin{bmatrix} [k_{ii}] & [k_{ij}] & [k_{im}] \\ [k_{ji}] & [k_{jj}] & [k_{jm}] \\ [k_{mi}] & [k_{mj}] & [k_{mm}] \end{bmatrix} \quad (3.3.54)$$

şeklinde yazılabilir. Burada 2x2'lik alt matrisler,

$$\begin{aligned} [k_{ii}] &= [B_i]^T [D] [B_i] t A \\ [k_{ij}] &= [B_i]^T [D] [B_j] t A \\ [k_{im}] &= [B_i]^T [D] [B_m] t A \end{aligned} \quad (3.3.55)$$

bağıntılarıyla verilir.(3.3.55) eşitliğinde, $[B_i]$, $[B_j]$ ve $[B_m]$ (3.3.33) eşitliğiyle tanımlıdır. $[k]$ matrisinin 6x6 lık bir matris olduğu görülür.

Genelde, yüzey ve cisim kuvvetleri oluşturmak için (3.3.47) eşitliği kullanılır. Sonuç olarak eleman eşitlikleri;

$$\begin{Bmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{26} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{61} & k_{62} & \dots & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (3.3.56)$$

şeklinde ortaya çıkar.

3.3.5.Sistem Eşitliklerinin Oluşturulması ve Sınır Şartlarının Dikkate alınması

Rijitlik metodu kullanılarak $[K]$ sistem rijitlik matrisi,

$$[K] = \sum_{e=1}^N [k^{(e)}] \quad (3.3.57)$$

olarak elde edilir. Sistem eşitliği ise,

$$\{F\} = [K] \{d\} \quad (3.3.58)$$

şeklini alır.(3.3.57) eşitliğindeki $[k^{(e)}]$ eleman rijitlik matrisleri x-y koordinat sistemine göre tanımlıdır. $\{d\}$ sistem yer değiştirme vektörünü ifade etmektedir. Düğüm noktaları yük vektörü;

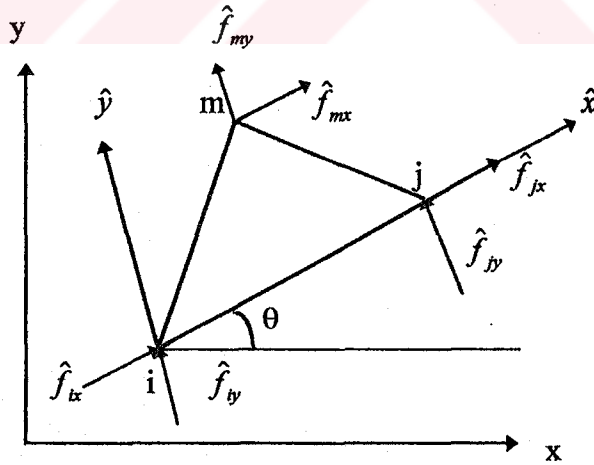
$$\{F\} = \sum_{e=1}^N \{f^{(e)}\} \quad (3.3.59)$$

şeklinde dir. $[F]$ vektörü ilgili elemanlardaki cisim ve yüzey kuvvetlerinin düğüm noktalarına dağıtılmasıyla elde edilmiş ve ilgili düğümlerdeki tekil yükleri de kapsayan bir vektördür.

(3.3.53) ifadesiyle verilen eleman rijitlik matrisi sistem koordinatlarında elde edildiği için bu ifade bütün elemanlar için kullanılabilir. Ve lokal eşitliklerin sistem eşitliğine dönüştürülmesi için ek bir işleme gerek yoktur. Bununla birlikte üçgen elemanda yer değiştirmeler, düğüm kuvvetleri, eleman rijitlik matrisi şekil 3.9 de gösterildiği gibi lokal \hat{x}, \hat{y} eksenlerinde $\hat{d}, \hat{f}, \hat{k}$ olarak ifade edilmişse bu ifadelerle, bunların x, y eksenlerindeki d, f, k ifadeleri arasında,

$$\hat{d} = Td \quad \hat{f} = T f \quad k = T^T \hat{k} T \quad (3.3.60)$$

bağıntısı vardır.



Şekil 3.9 Global eksenlere paralel olmayan lokal eksenli üçgen eleman

Burada T dönüşüm matrisi olup,

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \quad (3.3.61)$$

bağıntısıyla verilir. Burada $C = \cos \theta$, $S = \sin \theta$ ve θ ise şekil 3.9 da gösterilen açıdır.

3.3.6. Düğüm Yer Değiştirmelerinin Bulunması

Sistemin (3.3.58) eşitliğinde görülen bilinmeyen yer değiştirme değerleri bu eşitliğin çözülmesiyle elde edilir.

3.3.7. Eleman Gerilmelerinin Bulunması

Düğüm yer değiştirmelerinin yardımıyla (3.3.34) ve (3.3.37) eşitliklerinden elemanlardaki x ve y yönlerindeki şekil değişimleri ve gerilmeleri bulunur. Son olarak (3.2.2) yardımıyla σ_1 ve σ_2 asal gerilmeleri ve bu gerilmelerden birinin x eksenine θ_A açısı bulunur.

3.4. Cisim ve Yüzey Kuvvetleriyle İlgili İşlemler

3.4.1. Cisim Kuvvetleri

(3.3.47) eşitliğinin sağındaki ilk terim kullanılarak düğümlerdeki cisim kuvvetleri,

$$\{f_b\} = \iiint_V [N]^T \{x\} dV \quad (3.4.1)$$

bağıntısıyla verilir. Burada

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \end{Bmatrix} \quad (3.4.2)$$

şeklinde olup X_b ve Y_b özgül ağırlığı x ve y yönlerindeki bileşenlerdir. Cisim kuvvetleri ağırlığın yanında merkezkaç kuvveti, atalet kuvvetleri olarak ortaya çıkabilir.

(3.4.1) eşitliğindeki $[N]$ sabit değildir. Bu yüzden integral işleminin yapılması gerekir. Koordinat eksenlerinin başlangıç noktası elemanın ağırlık merkezi seçilirse integral alma işlemi oldukça basitleşir. Örnek olarak şekil 3.10 da koordinat eksenleriyle gösterilen

eleman alınrsa, ağırlık merkezinin tanımına göre, $\iint x dA = \iint y dA = 0$ yazılabilir.

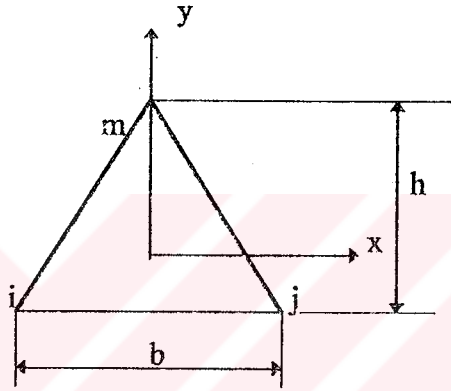
Ve bunun sonucu olarak

$$\iint \beta_i x dA = \iint \gamma_i y dA = 0 \quad (3.4.3)$$

ve

$$\alpha_i = \alpha_j = \alpha_m = \frac{2A}{3} \quad (3.4.4)$$

bulunur.



Şekil 3.10 Koordinat eksenleri ağırlık merkezinde olan eleman

(3.4.2), (3.4.3) ve (3.4.4) eşitliklerinin (3.4.1) eşitliğinde kullanılarak i düğümüne isabet eden düğüm kuvveti;

$$\{f_{bi}\} = \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \end{Bmatrix} \frac{tA}{3} \quad (3.4.5)$$

şeklini alır. Benzer şekilde j ve m düğümlerine isabet eden cisim kuvvetleri dikkate alınrsa eleman cisim kuvvetleri,

$$\{f_b\} = \begin{Bmatrix} f_{bix} \\ f_{biy} \\ f_{bjx} \\ f_{bjy} \\ f_{bmix} \\ f_{bmy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_b \\ Y_b \\ X_b \\ Y_b \\ X_b \\ Y_b \end{Bmatrix} \frac{At}{3} \quad (3.4.6)$$

biçiminde ifade edilebilir. (3.4.6) eşitliğinin sonuçlarından cisim kuvvetlerinin düğümlere eşit olarak bölündüğü sonucuna varılır. X_b ve Y_b nin yönleri x ve y 'nin pozitif yönlerinde

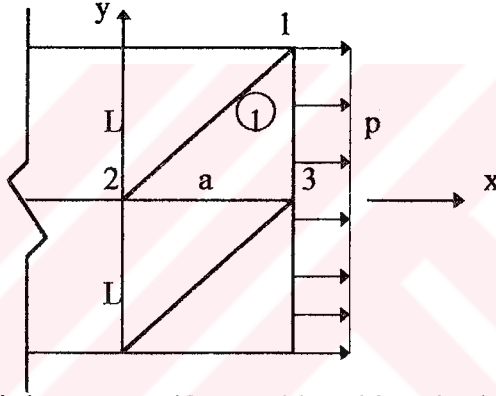
ise X_b ve Y_b 'nin işaretleri pozitif alınır. Cisim kuvveti olarak sadece ağırlığın ve bunun y doğrultusunda etkimesi durumunda $X_b = 0$ dır.

3.4.2. Yüzey Kuvvetleri

(2.3.47) eşitliğinin sağındaki üçüncü terimin kullanılmasıyla düğümlere isabet eden yüzey kuvvetleri,

$$\{f_s\} = \iint_S [N]^T \{T\} dS \quad (3.4.7)$$

eşitliğiyle elde edilir.



Şekil 3.11 Bir kenarına üniform yükü yüklenmiş eleman

Şekil 3.11 de 1 nolu elemanın 1 ve 3 nolu düğümleri arasındaki kenara etkiyen üniform p yayılı yükünü düğüm noktalarına dağıtmak için yüzey kuvvetleri

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4.8)$$

şeklinde yazılabilir. Ve

$$[N]^T = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \quad (3.4.9)$$

olduğu hatırla tutularak (3.4.8) ve (3.4.9) eşitliklerinin kullanılmasıyla (3.4.7) eşitliği

$$\{f_s\} = \int_0^t \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 & \mathbf{0} \\ 0 & N_1 \\ N_2 & \mathbf{0} \\ 0 & N_2 \\ N_3 & \mathbf{0} \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ 0 \end{Bmatrix} dz dy \quad (3.4.10)$$

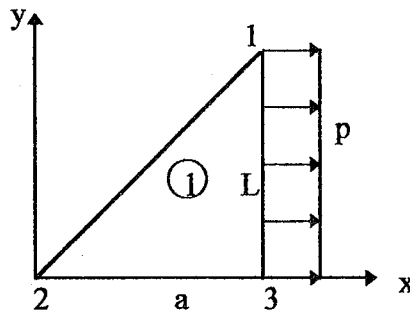
şeklinde yeniden yazılabilir. Burada $x=a$ olup sabittir, y ise değişkendir. (3.4.10) eşitliği basitleştirilirse;

$$\{f_s\} = t \int_0^L \begin{bmatrix} N_1 p \\ \mathbf{0} \\ N_2 p \\ \mathbf{0} \\ N_3 p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} dy \quad (3.4.11)$$

elde edilir. (3.3.19) eşitlikleri vasıtasıyla $i = 1$ için,

$$N_1 = \frac{1}{2A}(\alpha_1 + \beta_1 x + \gamma_1 y) \quad (3.4.12)$$

ifadesi yazılır. Uygunluk için elemanın koordinat sistemi şekil 3.12 de gösterildiği gibi seçilir.



Şekil 3.12 Yayılı yük etkisindeki elemanı gösterir

(3.3.11) eşitliklerinin tanımlarının kullanılmasıyla,

$$\alpha_i = x_j y_m - y_j x_m$$

veya $i = 1, j = 2$ ve $m = 3$ ile

$$\alpha_1 = x_2 y_3 - y_2 x_3 \quad (3.4.13)$$

eşitliği bulunur.(3.4.13) eşitliğinde koordinatlar yerine yazılırsa,

$$\alpha_1 = 0 \quad (3.4.14)$$

bulunur. Benzer şekilde (3.3.11) eşitlikleri tekrar kullanılırsa,

$$\beta_1 = 0, \gamma_1 = a \quad (3.4.15)$$

elde edilir. Bu nedenle (3.4.14) ve (3.4.15) eşitlikleri (3.4.12) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$N_1 = \frac{ay}{2A} \quad (3.4.16)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.3.19) eşitlikleri kullanılırsa,

$$N_2 = \frac{L(a-x)}{2A} \quad \text{ve} \quad N_3 = \frac{Lx-ay}{2A} \quad (3.4.17)$$

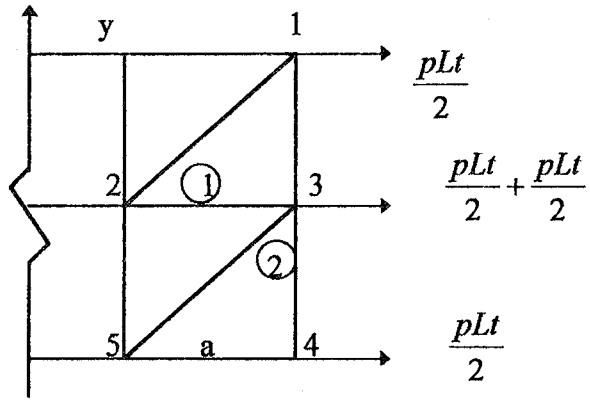
ifadeleri bulunur. N_1 , N_2 ve N_3 için (3.4.16) ve (3.4.17) bağıntıları (3.4.11) eşitliğinde yerine yazılırsa ve $x = a$, $y = y$ alınarak integrasyon işlemi yapılırsa,

$$\{f_s\} = \frac{t}{2(aL/2)} \begin{Bmatrix} a\left(\frac{L^2}{2}\right)p \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left(L^2 - \frac{L^2}{2}\right)ap \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4.18)$$

eşitliği bulunur. Burada şekil fonksiyonlarının tanımından 1 ve 3 düğümleri arasında $N_2 = 0$ dır. Sonuç olarak (3.4.18) basitleştirilirse,

$$\{f_s\} = \begin{Bmatrix} f_{s1x} \\ f_{s1y} \\ f_{s2x} \\ f_{s2y} \\ f_{s3x} \\ f_{s3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} pLt/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ pLt/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.4.19)$$

eşitliği bulunur. Şekil 3.13 te 1 ve 2 elemanlarına etkiyen yüzey kuvvetlerinin düğümlere nasıl dağıtıldığı gösterilmiştir.



Şekil 3.13 Yüzeye etkiyen yük düğüm kuvvetlerine eşittir

Sabit şekil değişimli bir üçgen elemanın kenarı üzerine etkiyen yayılı yükler iki düğüme statikte olduğu gibi dağıtılabılır.

BÖLÜM 4

SONLU ELEMANLAR PROGRAMININ YAZILMASI

4.1 Programın Mantığı

Üçüncü bölümde teorisi verilen hesap yönteminin uygulanması için yazılan programda şu temel adımlar mevcuttur:

- 1- İncelenecek olan bölge daha önceden üçgen elemanlara ayrılarak, koordinat sistemi seçildi, düğüm noktaları ve elemanlar numaralandırıldı.
- 2-Programda incelenecek bölgeye ait verilerin okutturulmasından sonra her bir üçgen elemana ait eleman rijitlik matrisi hesaplanmakta ve bu matrisin elemanları sistem matrisi içinde ilgili yerlerine yerleştirilmektedir.
- 3-Engellenmiş serbestlik dereceleri dikkate alınarak sistem matrisinin boyutları düşürüldü.
- 4-Sistem eşitliği çözümlenerek düğüm noktalarındaki yer değiştirme değerleri bulunmaktadır.
- 5-Yer değiştirme değerleri yardımı ile elemanlardaki gerilmeler hesaplanıp ekrana veya yazıcıya yazdırılmaktadır.

Programın tam metni EK 1 de verilmiştir.

4.2 Programdaki Önemli Satırlar

Programda 10. satırda, incelenen bölgeye ait eleman sayısı(ES), düğüm sayısı (DS), engellenmiş serbestlik derecesi (ENGSAYI) ve yük sayısı (YUKSAY) değişkenlerine atanmaktadır.

70 ve 90. satırlar arasında düğüm noktalarının koordinatları X(I) ve Y(I) değişkenlerine okutturulmaktadır.

110 ve 150. satırlar arasında ise üçgen elemanlarının köşelerindeki düğüm numaraları $ELUC(I, J)$ indisli değişkenlerine atanmaktadır. 175. satırda incelenen bölgeye ait elastisite modülü (E), Poisson oranı (NU) ve eleman kalınlığı (T) girilmiş olmalıdır.

180. satırda gerilme durumunun düzlemsel gerilme veya düzlemsel şekil değiştirme olması durumuna göre GERDUR değişkenine değer verilmelidir. Programda düzlemsel şekil değiştirme durumu için analiz yapılacaksa GERDUR=2 alınmalıdır. Gerilme durumuna göre malzeme matrisi (D) 210- 250. satırlarda hesaplanmaktadır.

Elemanların rijitlik matrisinin hesaplanma işlemi 260. satırda başlayıp 730. satıra kadar devam etmektedir; meselâ üçüncü bölümde (3.3.8) denkleminde geçen üçgenin A alanı 280. satırda, (3.3.34) denkleminde geçen [B] matrisi 310-360. satırları arasında hesaplanmaktadır. (3.3.53) denkleminde verilen sistem rijitlik matrisinin hesabında geçen matris çarpım işlemleri 370 ve 590. satırlar arasında yapılmaktadır.

Eleman rijitlik matrisinin sistem matrisinde ilgili adreslere yerleştirilmesi 670 ve 720. satırlar arasında gerçekleşmektedir. 730. Satırın bitişinde sistem matrisinin hesabı tamamlanmış olup 820. satırda bölgeye etkiyen yükler, 890. satırda da sınır şartları girilmektedir.

(3.3.58) de verilen sistem denkleminin çözümü Gauss eliminasyon yöntemi ile 1080 ve 1270. satırlar arasında yapılmaktadır.

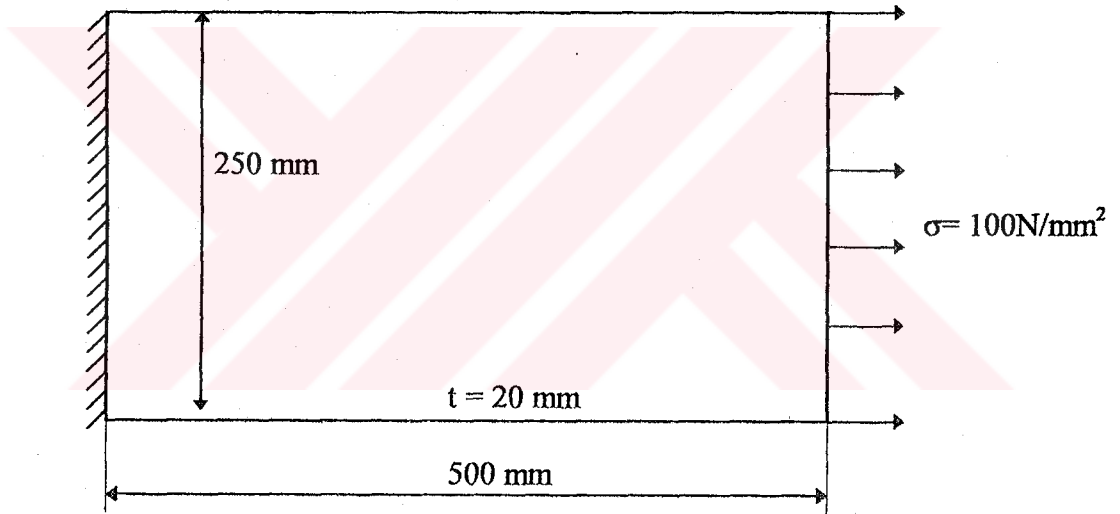
(3.3.37) deki gerilmelerin hesaplanma işlemi 1350 ile 1600. satırlar arasında, (3.2.2) ve (3.2.3) deki asal gerilmeler 1650-1670. satırlar arasında hesaplanmaktadır.

BÖLÜM 5

UYGULAMA ÖRNEKLERİ

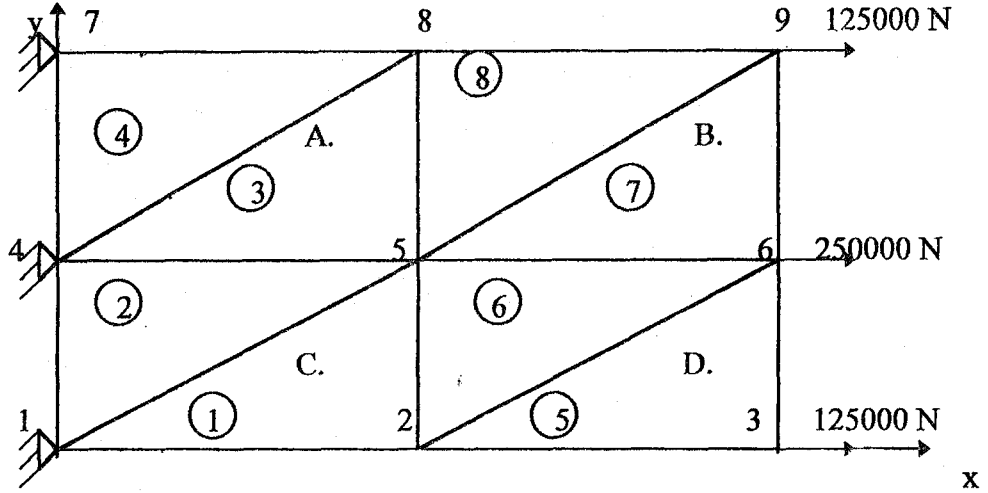
5.1. Düzgün Yayılı Yükle Yüklü Levha

4. Bölümde bahsedilen programın ilk uygulaması şekil 5.1 de verilen levha üzerinde yapılmıştır. Levhaya etkiyen yükün $\sigma = 100 \text{ N/mm}^2$ gibi sabit bir değer seçilmesinin nedeni, levhadaki asal gerilmelerin bu değere eşit çıkması gerektiğidir.

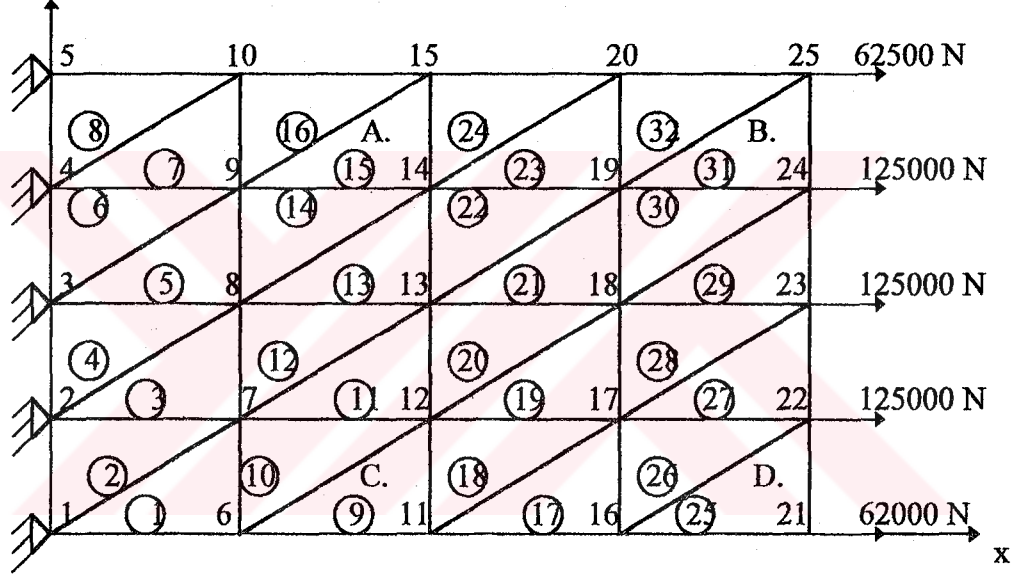


Şekil 5.1 Düzgün yayılı yükle yüklü levha

Bu levhanın şekil 5.2 a ve 5.2 b de belirtildiği şekilde sonlu elemanlara ayrılması durumunda A,B,C ve D gibi dört farklı noktaya ait hesaplanan asal gerilme değerleri tablo 1 de verilmiştir.



a) Sekiz elemanlı



b) Otuz iki elemanlı

Şekil 5.2 Düzgün yayılı yükle yüklü levhanın sonlu elemanlar modeli

TABLO 1. ASAL GERİLME DEĞERLERİ

Nokta (x, y)	8 Elemanlı	32 Elemanlı	Olmaması gereken
A (200, 200)	94,64	99,155	100 N/mm ²
B (400, 200)	100,36	100,05	100 N/mm ²
C (200, 50)	101,99	101,36	100 N/mm ²
D (400, 50)	99,52	100,07	100 N/mm ²

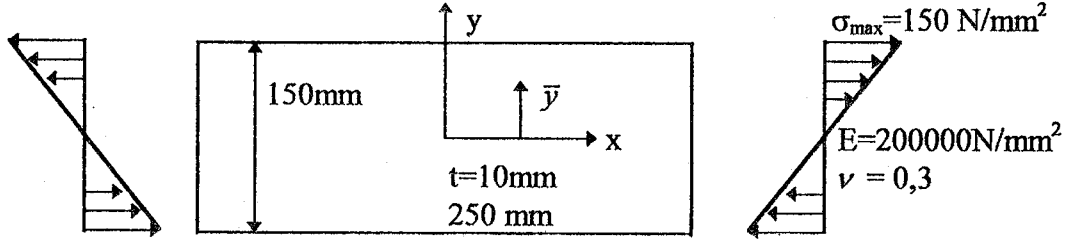
5.2 İki Ucundan Momentle Yüklü Levha

Şekil 5.3 te verilen levhanın içindeki noktaların yer değiştirme değerleri [11]

$$u = \frac{\sigma_m}{E y} x y \quad (5.1)$$

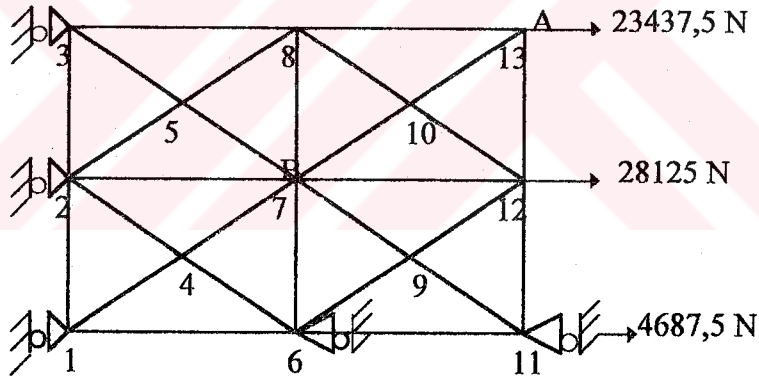
$$v = - \frac{\sigma_{mak}}{2 E y} (x^2 + v y^2) \quad (5.2)$$

olarak verilmektedir. Yazılan sonlu elemanlar programının vereceği sonuçları görmek için



Şekil 5.3 İki ucundan momentle yüklü levha

levhanın boyutları şekil 5.3 teki gibi seçilmiştir. Simetri şartlarından faydalanarak levhanın 1.bölgede dörtte birlik kısmı şekil 4.4 te gösterildiği gibi sonlu elemanlara ayrılmıştır.



Şekil 5.4 İki ucundan momentle yüklü levhanın sonlu elemanlar modeli

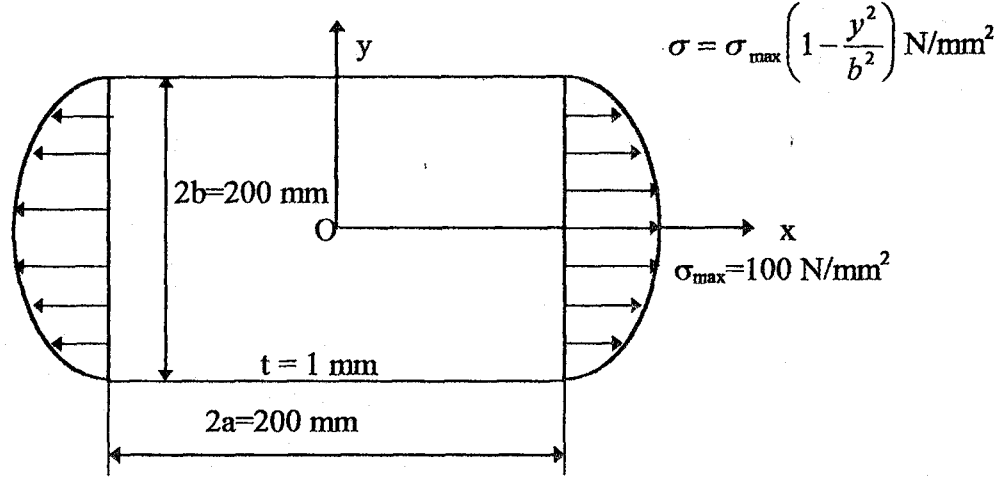
Burada A (125, 75) ve B (62.5, 37.5) noktalarının yer değiştirme miktarları tablo 2 de verilmiştir.

TABLO 2. YER DEĞİŞTİRME DEĞERLERİ

Nokta	Hesaplanan u	Hesaplanan v	Olmaması gereken u	Olmaması gereken v
A	0,083	-0,077	0,093	-0,086
B	0,021	-0,019	0,023	-0,021

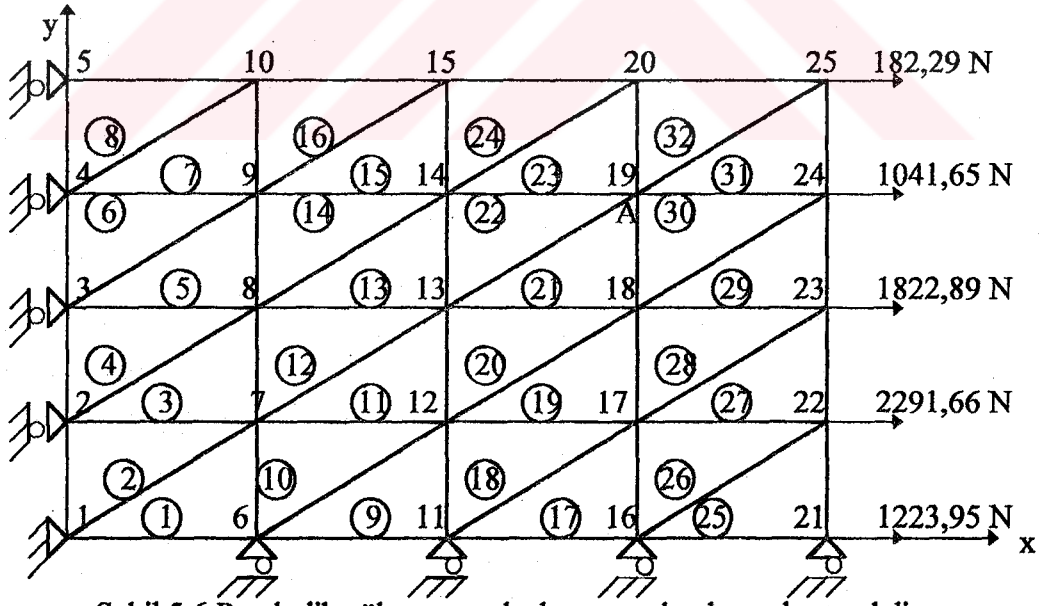
5.3 Parabolik Yükle Yüklü levha

Karşılıklı iki kenarından parabolik yüke maruz şekil 4.5 te gösterilen levha



Şekil 5.5 Parabolik yüke maruz levha

simetri şartlarından faydalanılarak birinci bölgedeki dörtte biri alınarak şekil 5.6 da gösterildiği gibi sonlu elemanlara ayrılmıştır.



Şekil 5.6 Parabolik yüke maruz levhanın sonlu elemanlar modeli

Burada levha içindeki gerilme dağılımı [9]

$$\sigma_x = \sigma_{\max} \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) - 0,1702 \sigma_{\max} \left(1 - \frac{3y^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2 \quad (5.3)$$

$$\sigma_y = -0,1702\sigma_{\max} \left(1 - \frac{3x^2}{a^2}\right) \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)^2 \quad (5.4)$$

formülleriyle verilmektedir.

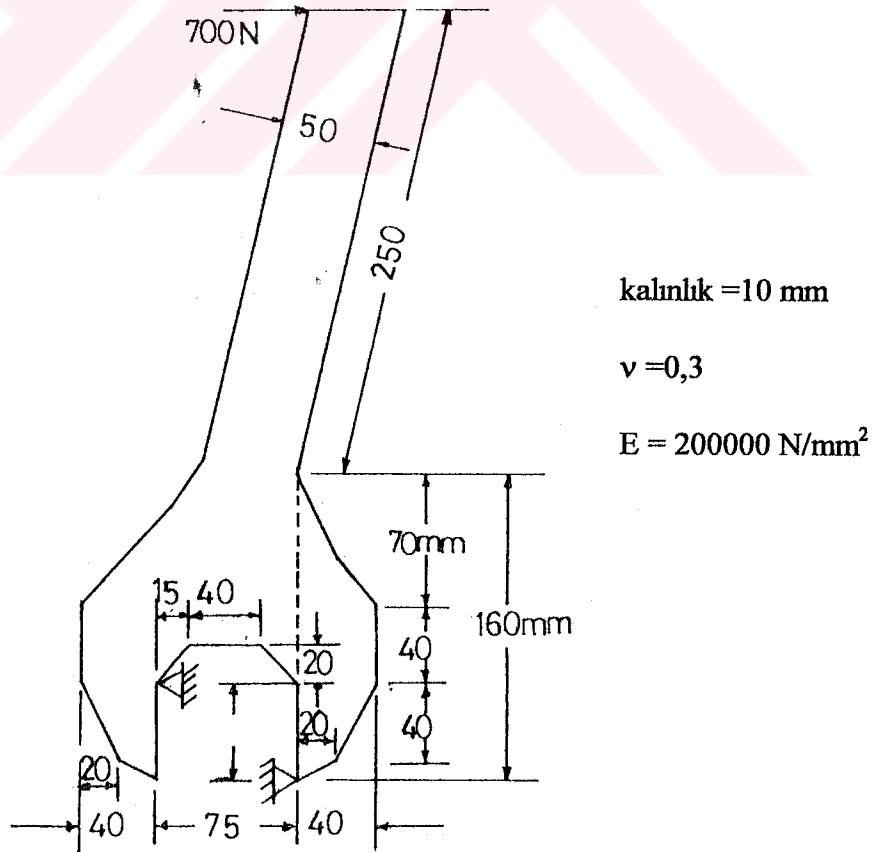
Program ve kaynağın formülüyle A(75, 75) noktasındaki gerilme değerleri tablo 3 te verilmiştir. Ancak burada bilinçli olarak A noktası 21.,22.,23., 31., 32. ve 33. elemanlara ait ortak bir nokta seçilmiştir.

TABLO 3 A NOKTASINDAKİ GERİLME DURUMU

Eleman Numarası								
Gerilme	21.	22.	23.	30.	31.	32.	Ortalama	Doğru değer
σ_x	70,99	47,32	50,24	44,50	45,20	21,98	46,70	45,98
σ_y	5,70	-5,06	4,64	-2,24	0,09	-3,83	-0,7	-2,23

5.4 Somun Sıkma Anahtarı

Yazılan programla şekil 5.7 de gösterildiği gibi tekil bir yüke maruz anahtarda gerilme analizi yapılmıştır.



Şekil 5.7 Somun sıkma anahtarı

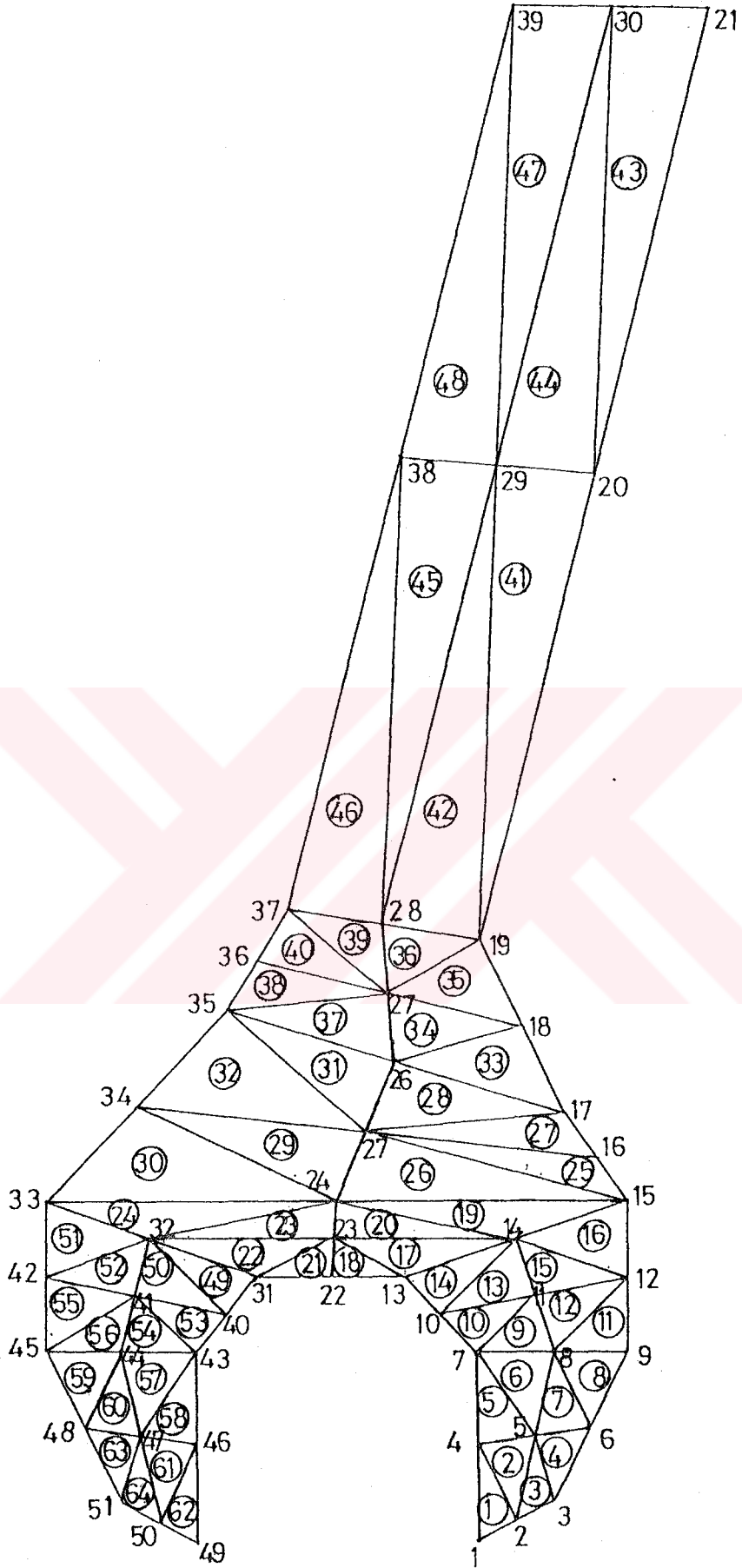
Bu anahtara ait sonlu elemanlar modeli şekil 5.8 de verilmiştir. Bu modelde 51 düğüm noktası ve 64 eleman bulunmaktadır. Düğüm noktalarının koordinatları EK 2 de, her bir elemanın ucundaki düğüm numaraları EK 3 te hesaplanan gerilme değerleri EK 4 te verilmiştir.

Ekteki hesaplanan değerlere dikkat edildiğinde asal gerilme değerlerinin en büyüğünün 1. eleman içinde ortaya çıktığı görülmektedir. Ve bunun değeri $\sigma_2 = -23,22 \text{ N/mm}^2$ dir. Aynı problem yüksek dereceden üçgen eleman kullanılarak [11] de verilen programa çözdürüldüğünde maksimum gerilme aynı bölgede -35 N/mm^2 çıkmıştır.

Aynı problem ticari bir program olan Ansys' te 66 eleman ve 50 düğümlü farklı bir model için çözülmüş elde edilen sonuçlar kritik bölgedeki elemanlar için tablo 4 te karşılaştırmalı olarak verilmiştir.

TABLO 4. KRİTİK NOKTALARDAKİ ASAL GERİLMELER (N/mm^2)

Eleman No.	Yazılan programın verdiği sonuç	Ansys'in verdiği sonuç
1	-23	-26
9	-4,21	-9,63
22	7,15	9,92
40	8,87	8,38
54	1,99	6,5



Şekil 5.8 Somun sıkma anahtarının sonlu eleman modeli

BÖLÜM 6

SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu çalışmada analitik çözümü bulunamayan düzlemsel problemlerde gerilme analizinin nasıl yapılacağı araştırılmıştır. Ancak bu araştırmada basit üçgen elemanlarla sınırlı kalmıştır.

Üçgen elemanlarla yapılan gerilme analizinde beşinci bölümdeki örneklerde görüldüğü gibi bazı hallerde gerçek değere yakın sonuçlar elde edilirken bazı hallerde de dikkate değer sapmalar ortaya çıkabilmektedir. Şöyle ki; basit üçgen elemanlarla çalışılması durumunda bir konsol kirişin ankastre ucunun en alt noktasındaki gerilme olması gereken değerlerin % 19 u olarak ortaya çıkmıştır. Bu gerilme problemi dört düğümlü dikdörtgen elemanlarla çözüldüğünde olması gereken değerlerin %56 sı, sekiz düğümlü dikdörtgen eleman kullanılması durumunda %99 u olarak ortaya çıkmaktadır. Bu durum, [13] tarafından da teyid edilmektedir.

Bazı kaynaklar [5, 11] incelenen bölgedeki eleman sayıları arttırıldıkça bulunan sonuçların gerçek değere yakınsadığını belirtmektedirler. Ancak bu yakınsama belirli bir eleman sayısından sonra başlamaktadır. Bu araştırmada incelenen bölgelerde eleman sayısının artırılması Basic dili nedeniyle sınırlı kalmıştır. Bu sınır yakınsamaya başlama sınırının altındadır.

Chyzy ve arkadaşları [14] ise incelenen bölgedeki üçgen eleman sayısının artırılmasının her zaman için iyi sonuç vermeyebileceğini belirtmektedirler. Bu durumda bulunan sonuçlar bölgenin nasıl sonlu elemanlara ayrıldığına da bağlı kalmaktadır. Bu istenmeyen bir durumdur, bu nedenle bölgeyi otomatik olarak elemanlara ayıran ağ programlarının kullanılması ve bu programlar içindeki mantığın araştırılması faydalı olacaktır.

BÖLÜM 7

ÖNERİLER

Bu çalışmada üç düğüm noktalı lineer üçgen elemanlarla sınırlı kalmıştır. Az sayıda eleman kullanılarak daha hassas sonuçlar elde edilebilmesi için çalışmanın daha fazla düğüm noktası bulunan yüksek dereceden izoparametrik elemanları da kapsayacak şekilde geliştirilmesi gerekir.

Programda düğüm noktalarının koordinatlarını girerken veri giriş hatası yapılmadığından emin olmak için defalarca veri kontrolü yapılmıştır. Bu zorluğun ortadan kaldırılması için verilen bölgeyi sonlu elemanlar ağına ayıran bir bilgisayar programının geliştirilmesinde büyük yarar vardır.

Çalışmanın malzeme davranışı lineer olmayan bölgeleri ve dinamik problemleri analiz edecek şekilde devam ettirilmesi gereklidir.

KAYNAKLAR

- [1] Tekin. M.D., "Kesme Kuvvetine Maruz Ortotropik Kiriş Kesitlerinde Kayma Gerilmelerinin Dağılışı", Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya. 1986.
- [2] Beer F.P and Johnston E.R., "Introduction Concept of Stress" in Mechanics of Materials. 1- 38. Mc Graw-Hill. New York. 1992.
- [3] Seely F.B., "Stress Concentrations" in Advanced Mechanics of Materials.503-548.John Wiley and Sons Inc.New York. 1978.
- [4] Brown D.K., "On the Teaching of the Finite Element Method of Stress Analysis Using Basic on Micros". International Journal of Mechanical Engineering Education. Vol.14.No.4. 221-234 (1986)
- [5] Logan D.L., "Development of the Plane Stress and Plane Strain Stiffness Equations" in Afirst Course in the Finite Element Method. 270-310. PWS-Kent Publishing Company. Boston. 1992.
- [6] Desai C.S. and Abel J.F., "The Basic Component - A Single Element" in Introduction to the Finite Element Method.67-153. Van Nostrand Reinhold Company. New York. 1972.
- [7] Rao S.S., "Solution of Finite Element Equations" in The Finite Element Method in Engineering. 38-92. Pergaman Press. Oxford.1982.
- [8] Yiğit. O., "Çubuklardan ve Plaklardan Oluşan Sistemlerde Yer Değiştirmelerin Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Hesaplanması", Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Konya. 1989.
- [9] Timoshenko S.P. and Goodier. J.N., " General Theorems" in Theory of Elasticity.235-277. Mc-Graw-Hill. Singapore. 1970.
- [10] Segerlind L.J., "Linear Interpolation Polynomials" in Applied Finite Element Analysis. 23-53. John Willy and Sons. New York. 1976.
- [11] Desai C.S. and Abel J.F., " The Overall Problem an Assemblage of Elements" in Introduction to the Finite Element Method. 154-214. Von Nostrand Reinhold Company. New York. 1972.

[12] Hibbeler R.C., "Stress Transformation" in Mechanics of Materials.399-448. Macmillan Publishing Company. New York.1991.

[13] Chandrupatla T.R and Belegunda A.D., " Two Dimensional Isoparametric Elements and Numerical Integration" in Introduction to Finite Elements in Engineering. 194-223. Prentice Hall. New Jersey. 1991

[14] Chyzy T., Krasuski L., Miedzialowski C. and Tribillo R., "Finite Element Generation in Boundary Areas in Plane Problems of Theory of Elasticity" Computer and Structures.Vol.53.No.5.1047-1052 (1994)



EKLER

EK-1 Bilgisayar Programı	44
EK-2 Dügüm Noktalarının Koordmatlari	49
EK-3 Her Bir Elemanın Ucundaki Dügüm Numaraları	50
EK-4 Hesaplanan Gerilme Değerleri	51



EK-1 BİLGİSAYAR PROGRAMI

```

5 CLS
10 READ ES, DS, ENGSAYI, YUKSAY
20 DATA 64,51,4,1
30 TSD = 2 * DS: YENISD = TSD - ENGSAYI
40 DIM X(DS), Y(DS)
50 DIM KS(TSD, TSD), KSI(YENISD, YENISD), P(TSD), U(TSD), PI(YENISD)
60 DIM ESD(TSD), INDEX(YENISD), UI(YENISD), ELUC(ES, 3)
70 FOR I = 1 TO DS
80 READ X(I), Y(I)
90 NEXT I
100 DATA 115,0,125,5,135,10,115,25,130,27.5,145,30,115,50,135,50,155,50,105,60
101 DATA 130,65,155,70,95,70,125,80,155,90,146,102,137,114,126,137,115,160
102 DATA 143.5,283,172,406,75,70,76.25,80,77.5,90,85,108.75,92.5,127.5
104 DATA 91,145.75,89.5,164,117.75,285,146,406,55,70,27.5,80,0,90,24,115.5
106 DATA 48,141,56,154.5,64,168,92,287,120,406, 47.5,60,23.75,65,0,70,40,50
108 DATA 20,50,0,50,40,25,25,27.5,10,30,40,0,30,5,20,10
110 FOR I = 1 TO ES
120 FOR J = 1 TO 3
130 READ ELUC(I, J)
140 NEXT J
150 NEXT I
160 DATA 1,2,4,5,4,2,2,3,5,6,5,3,4,5,7,8,7,5,5,6,8,9,8,6,7,8,11,11,10,7,8,9,12
162 DATA 12,11,8,10,11,14,14,13,10,11,12,14,15,14,12,13,14,23,23,22,13,14,15,24
164 DATA 24,23,14,22,23,31,32,31,23,23,24,32,33,32,24,15,16,25,25,24,15,16,17,25
166 DATA 26,25,17,24,25,34,34,33,24,25,26,35,35,34,25,17,18,26,27,26,18,18,19,27
167 DATA 28,27,19,26,27,35,36,35,27,27,28,37,37,36,27,19,20,29,29,28,19,20,21,30
168 DATA 30,29,20,28,29,38,38,37,28,29,30,39,39,38,29,31,32,40,41,40,32,32,33,42
170 DATA 42,41,32,40,41,43,44,43,41,41,42,45,45,44,41,43,44,47,47,46,43,44,45,48
172 DATA 48,47,44,46,47,50,50,49,46,47,48,51,51,50,47
175 E = 200000: NU = .25: T = 10
180 READ GERDUR
190 DATA 1
200 IF GERDUR = 2 THEN 240
210 KATS = E / (1 - NU ^ 2): D(1, 1) = KATS: D(1, 2) = NU * KATS:
    D(2, 1) = NU * KATS
220 D(2, 2) = KATS: D(3, 3) = KATS * (1 - NU) / 2
230 GOTO 260
240 KATS = E / ((1 + NU) * (1 - 2 * NU)): D(1, 1) = KATS * (1 - NU):
    D(1, 2) = KATS * NU
250 D(2, 1) = NU * KATS: D(2, 2) = KATS * (1 - NU): D(3, 3) = KATS *
    (1 - 2 * NU) / 2
260 FOR I = 1 TO ES
270 IUC = ELUC(I, 1): JUC = ELUC(I, 2): MUC = ELUC(I, 3)
280 A = (X(IUC) * (Y(JUC) - Y(MUC))) + X(JUC) * (Y(MUC) - Y(IUC)) + X(MUC)

```



```

* (Y(IUC) - Y(JUC)) / 2
290 BI = Y(JUC) - Y(MUC): BJ = Y(MUC) - Y(IUC): BM = Y(IUC) - Y(JUC)
300 GI = X(MUC) - X(JUC): GJ = X(IUC) - X(MUC): GM = X(JUC) - X(IUC)
310 B(1, 1) = BI / (2 * A): B(1, 3) = BJ / (2 * A)
320 B(1, 5) = BM / (2 * A): B(2, 2) = GI / (2 * A)
330 B(2, 4) = GJ / (2 * A): B(2, 6) = GM / (2 * A)
340 B(3, 1) = GI / (2 * A): B(3, 2) = BI / (2 * A)
350 B(3, 3) = GJ / (2 * A): B(3, 4) = BJ / (2 * A)
360 B(3, 5) = GM / (2 * A): B(3, 6) = BM / (2 * A)
370 REM BTRANS ILE D CARPILİYOR BTD ELDE EDİLİYOR
380 FOR II = 1 TO 6
390 FOR JJ = 1 TO 3
400 BTD(II, JJ) = 0
410 FOR KK = 1 TO 3
420 BTD(II, JJ) = BTD(II, JJ) + B(KK, II) * D(KK, JJ)
430 NEXT KK
440 NEXT JJ
450 NEXT II
460 REM BTDB ILE B CARPILİYOR VE BTDB BULUNUYOR
470 FOR II = 1 TO 6
480 FOR JJ = 1 TO 6
490 BTDB(II, JJ) = 0
500 FOR KK = 1 TO 3
510 BTDB(II, JJ) = BTDB(II, JJ) + BTDB(II, KK) * B(KK, JJ)
520 NEXT KK
530 NEXT JJ
540 NEXT II
550 FOR II = 1 TO 6
560 FOR JJ = 1 TO 6
570 KE(II, JJ) = T * A * BTDB(II, JJ)
580 NEXT JJ
590 NEXT II
600 PRINT
610 FOR II = 1 TO 6
620 FOR JJ = 1 TO 6
630 PRINT KE(II, JJ);
640 NEXT JJ
650 PRINT
660 NEXT II
670 YARD(1) = 2 * IUC - 1: YARD(2) = 2 * IUC: YARD(3) = 2 * JUC - 1:
    YARD(4) = 2 * JUC: YARD(5) = 2 * MUC - 1: YARD(6) = 2 * MUC
680 FOR II = 1 TO 6
690 FOR JJ = 1 TO 6
700 KS(YARD(II), YARD(JJ)) = KS(YARD(II), YARD(JJ)) + KE(II, JJ)
710 NEXT JJ
720 NEXT II
730NEXTII

```

```

740 PRINT
750 FOR II = 1 TO 8
760 FOR JJ = 1 TO 8
770 PRINT KS(II, JJ);
780 NEXT JJ
790 PRINT
800 NEXT II
810 FOR I = 1 TO YUKSAY
820 READ YUKSD, P(YUKSD)
830 NEXT I
840 DATA 1,700
850 FOR I = 1 TO TSD
860 ESD(I) = 1
870 NEXT I
880 FOR I = 1 TO ENGSAYI
890 READ ENGSD: ESD(ENGSD) = 0
900 NEXT I
910 DATA 85,86,1,2
920 K = 0
930 FOR I = 1 TO TSD
940 IF ESD(I) = 0 THEN 940
950 K = K + 1: L = 0
960 FOR J = 1 TO TSD
970 IF ESD(J) = 0 THEN 930
980 L = L + 1
990 KSI(K, L) = KS(I, J)
1000 NEXT J
1010 NEXT I
1020 K = 0
1030 FOR I = 1 TO TSD
1040 IF ESD(I) = 0 THEN 990
1050 K = K + 1: PI(K) = P(I): INDEX(K) = I
1060 NEXT I
1070 PRINT : PRINT PI(1), PI(3): PRINT
1080 N = YENISD
1090 IMAX = N - 1
1100 FOR I = 1 TO IMAX
1110 J1 = I + 1
1120 FOR J = J1 TO N
1130 IF KSI(J, I) = 0 THEN 1090
1140 FOR K = J1 TO N
1150 KSI(J, K) = KSI(J, K) - KSI(I, K) * KSI(J, I) / KSI(I, I)
1160 NEXT K
1170 PI(J) = PI(J) - PI(I) * KSI(J, I) / KSI(I, I)
1180 NEXT J
1190 NEXT I
1200 UI(N) = PI(N) / KSI(N, N)

```

```

1210 FOR I = 1 TO IMAX
1220 J1 = N - I + 1
1230 FOR K = J1 TO N
1240 PI(N - I) = PI(N - I) - UI(K) * KSI(N - I, K)
1250 NEXT K
1260 UI(N - I) = PI(N - I) / KSI(N - I, N - I)
1270 NEXT I
1280 FOR I = 1 TO YENISD
1290 U(INDEX(I)) = UI(I)
1300 NEXT I
1310 FOR I = 1 TO TSD
1320 PRINT "U("; I; ")="; U(I)
1330 NEXT I
1340 FOR I = 1 TO ES
1350 IUC = ELUC(I, 1): JUC = ELUC(I, 2): MUC = ELUC(I, 3)
1360 UE(1) = U(2 * IUC - 1): UE(2) = U(2 * IUC): UE(3) = U(2 * JUC - 1)
1370 UE(4) = U(2 * JUC): UE(5) = U(2 * MUC - 1): UE(6) = U(2 * MUC)
1380 A = (X(IUC) * (Y(JUC) - Y(MUC)) + X(JUC) * (Y(MUC) - Y(IUC)) +
X(MUC) * (Y(IUC) - Y(JUC))) / 2
1390 BI = Y(JUC) - Y(MUC): BJ = Y(MUC) - Y(IUC): BM = Y(IUC) - Y(JUC)
1400 GI = X(MUC) - X(JUC): GJ = X(IUC) - X(MUC): GM = X(JUC) - X(IUC)
1410 B(1, 1) = BI / (2 * A): B(1, 3) = BJ / (2 * A)
1420 B(1, 5) = BM / (2 * A): B(2, 2) = GI / (2 * A)
1430 B(2, 4) = GJ / (2 * A): B(2, 6) = GM / (2 * A)
1440 B(3, 1) = GI / (2 * A): B(3, 2) = BI / (2 * A)
1450 B(3, 3) = GJ / (2 * A): B(3, 4) = BJ / (2 * A)
1460 B(3, 5) = GM / (2 * A): B(3, 6) = BM / (2 * A)
1470 FOR II = 1 TO 3
1480 FOR JJ = 1 TO 6
1490 DB(II, JJ) = 0
1500 FOR KK = 1 TO 3
1510 DB(II, JJ) = DB(II, JJ) + D(II, KK) * B(KK, JJ)
1520 NEXT KK
1530 NEXT JJ
1540 NEXT II
1550 FOR II = 1 TO 3
1560 SIGMA(II) = 0
1570 FOR KK = 1 TO 6
1580 SIGMA(II) = SIGMA(II) + DB(II, KK) * UE(KK)
1590 NEXT KK
1600 NEXT II
1610 PRINT : PRINT I; ". ELEMANDAKI GERILMELER": PRINT
1620 PRINT "SIGMAX="; SIGMA(1)
1630 PRINT "SIGMAY="; SIGMA(2)
1640 PRINT "TOXY="; SIGMA(3)
1650 A1 = (SIGMA(1) + SIGMA(2)) / 2: A2 = SQR((((SIGMA(1) - SIGMA(2)) / 2)
^ 2 + SIGMA(3) ^ 2)

```

```
1660 SIGMA1 = A1 + A2: SIGMA2 = A1 - A2
1670 TETA = (1 / 2 * ATN(2 * SIGMA(3) / (SIGMA(1) - SIGMA(2)))) * 180
      * 7 / 22
1680 PRINT "SIGMA1="; SIGMA1: PRINT "SIGMA2="; SIGMA2
1690 PRINT "TETA="; TETA
1700 NEXT
```



EK-2 DÜĞÜM NOKTALARININ KOORDİNATLARI

DÜ.NO	X KOORD.	Y KOORD.	DÜ.NO	X KOORD.	Y KOORD.
1	115	0	26	92.5	127.5
2	125	5	27	91	145.75
3	135	10	28	89.5	164
4	115	25	29	117.75	285
5	130	27.5	30	146	406
6	145	30	31	55	70
7	115	50	32	27.5	80
8	135	50	33	0	90
9	155	50	34	24	115.5
10	105	60	35	48	141
11	130	65	36	56	154.5
12	155	70	37	64	168
13	95	70	38	92	287
14	125	80	39	120	406
15	155	90	40	47.5	60
16	146	102	41	23.75	65
17	137	114	42	0	70
18	126	137	43	40	50
19	115	160	44	20	50
20	143.5	283	45	0	50
21	172	406	46	40	25
22	75	70	47	25	27.5
23	76.25	80	48	10	30
24	77.5	90	49	40	0
25	85	108.75	50	30	5
			51	20	10

EK-3 HER BİR ELEMANIN UCUNDAKİ DÜĞÜM NUMARALARI

ELE. NO	ELEMAN UÇ NUMARASI			ELE.NO	ELEMAN UÇ NUMARASI		
1	1	2	4	33	17	18	26
2	5	4	2	34	27	26	18
3	2	3	5	35	18	19	27
4	6	5	3	36	28	27	19
5	4	5	7	37	26	27	35
6	8	7	5	38	36	35	27
7	5	6	8	39	27	28	37
8	9	8	6	40	37	36	27
9	7	8	11	41	19	20	29
10	11	10	7	42	29	28	19
11	8	9	12	43	20	21	30
12	12	11	8	44	30	29	20
13	10	11	14	45	28	29	38
14	14	13	10	46	38	37	28
15	11	12	14	47	29	30	39
16	15	14	12	48	39	38	29
17	13	14	23	49	31	32	40
18	23	22	13	50	41	40	32
19	14	15	24	51	32	33	42
20	24	23	14	52	42	41	32
21	22	23	31	53	40	41	43
22	32	31	23	54	44	43	41
23	23	24	32	55	41	42	45
24	33	32	24	56	45	44	41
25	15	16	25	57	43	44	47
26	25	24	15	58	47	46	43
27	16	17	25	59	44	45	48
28	26	25	17	60	48	47	44
29	24	25	34	61	46	47	50
30	34	33	24	62	50	49	46
31	25	26	35	63	47	48	51
32	35	34	25	64	51	50	47

EK-4 HESAPLANAN GERİLME DEĞERLERİ

Eleman No	σ_x N/mm ²	σ_y N/mm ²	τ_{xy} N/mm ²	σ_1 N/mm ²	σ_2 N/mm ²	θ_A °
1	-.595429	-20.02616	-8.50356	2.600398	-23.22198	-20.58905
2	-1.337897	-8.14846	.404711	-1.313932	8.172428	-3.38748
3	-.402445	-5.78924	-3.45165	1.282323	-7.474012	-26.00672
4	-1.32573	-3.19342	.325938	-1.270483	-3.248676	9.61630
5	-.545439	-10.0735	-2.51065	7.563E-02	-10.69457	-13.88906
6	-.324872	-5.87804	-.247341	.3138776	-5.889041	-2.54424
7	-.407630	-4.57271	-2.597816	.8393364	-5.819684	-25.63095
8	-.199837	-2.29251	-.887660	.1259636	-2.618314	-20.1467
9	.144500	-4.00055	-.974624	.3622267	-4.218278	-12.5877
10	1.257103	-5.53099	-.849274	1.361745	-5.635639	-7.02134
11	-.394813	-3.07240	-1.03848	-3.926E-02	-3.427954	-18.89245
12	.578336	-4.00399	-1.05094	.8078705	-4.233529	-12.31538
13	1.301892	-3.44536	-6.19E-02	1.302701	-3.44617	-.74766
14	2.51826	-2.02044	-.85437	2.673762	-2.175942	-10.31115
15	.418981	-4.23014	-.83040	.562853	-4.374015	-9.82519
16	.935134	-4.42647	-.19551	.9422543	-4.433597	-2.08475
17	2.427682	-.23063	-4504018	2.501921	-.304873	-9.35602
18	4.688403	-.77841	1.11041	4.90534	.995349	11.04998
19	.941160	-2.60309	.10135	.9440562	-2.605988	1.63604
20	2.759155	1.09524	2.07199	4.15998	.305578	34.04798
21	5.989612	-8.60E-03	-.367445	6.012037	3.10E-02	-3.49108
22	2.583214	5.77502	2.50803	7.151852	1.206388	-28.75376
23	1.565946	1.70595	-.769548	2.408676	.863224	42.38402
24	1.262477	3.70636	.671490	3.878712	1.09013	-14.38919
25	.170706	-3.76296	.549228	.2459511	-3.838212	7.79791
26	1.549522	-.16964	1.614822	2.519291	-1.139418	30.97414
27	-3.69E-03	-4.78662	.800506	.1267278	-4.917043	9.24987
28	.737588	-.60250	1.846403	2.031764	-1.896678	35.01319
29	-.441971	1.99675	-.64416	2.156442	-.601661	13.91762
30	.727893	1.56803	.290056	1.658445	.637481	-17.30548
31	.951718	1.61064	-.430254	1.680963	-1.022034	9.27796
32	.251757	3.59584	.481516	3.6638	.183804	-8.02945
33	.776239	-7.03573	1.236243	-.5409288	-7.271049	10.77261
34	.618257	.89154	1.205012	1.967639	.457831	-41.7484
35	1.237547	-10.38871	1.66621	-.9436102	-10.68265	10.0006
36	-.244632	.71986	.288881	.7997708	-.324537	-15.4552
37	-.868959	.27193	-4.48E-02	.2736914	-.870717	2.24551
38	.129091	6.51521	1.728157	6.952881	-.308572	-14.2059
39	-9.76E-02	.74145	219774	.7955326	-.151713	-13.81808
40	.727411	8.31675	2.130053	8.873709	.170455	-14.64745
41	.475613	-.72586	.090481	.4823897	-.732641	4.28092

Devam

EK-4 HESAPLANAN GERİLME DEĞERLERİ

42	.243616	-.91441	2.465542	2.19722	-2.868016	38.37654
43	-5.170E-05	-4.94E-02	-1.002E-03	3.140E-05	-4.950E-02	-1.16026
44	.64561	.11637	-9.344E-02	.66162	.10036	-9.72062
45	.37282	.43471	.22888	.63473	.17279	-41.13339
46	.72015	.40678	2.484703	3.053108	-1.926169	43.17843
47	9.23E-03	-5.69E-02	-1.364E-02	1.193E-02	-5.968E-02	-11.19047
48	.228765	-4.67E-03	4.037E-02	.2355526	-1.146E-02	9.53742
49	4.777151	9.53950	4.353912	12.12084	2.195813	-30.65042
50	.323325	2.64330	.9489016	2.981979	-1.534E-02	-19.63412
51	.409739	-2.947387	.6264526	.5228287	-3.060475	10.22886
52	.942359	2.84889	.8108191	3.147082	.6441689	-20.18361
53	5.02881	13.40043	5.586487	16.1953	2.233944	-26.56767
54	-1.519037	1.95768	.3681194	1.996232	-1.557586	-5.97582
55	.313495	-2.099552	1.563015	1.081489	-2.867545	26.15683
56	-.416438	1.351409	1.653786	2.342673	-1.407703	-30.92564
57	-1.976355	.128409	-.608484	.2916595	-2.139605	15.01213
58	-.325198	-.543835	-.4425893	2.137E-02	-.8904071	38.04758
59	-.832077	-.311146	.9599338	.4230316	-1.566255	-37.39448
60	.384077	.845934	.0921246	.8527959	-.3909386	-4.25791
61	5.52E-03	1.313E-03	5.489E-02	5.835E-02	-5.151E-02	43.88414
62	1.119E-02	4.471E-02	2.235E-02	5.589E-02	1.290E-05	-26.56071
63	-.6361403	-6.46E-02	-2.300E-02	-6.368E-02	-6370648	2.30036
64	7.632E-02	9.315E-03	4.355E-02	.0977753	-1.213E-02	26.20469