

NIĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

97531

KLASİK DÜĞÜM TEORİSİNE MODERN BİR YAKLAŞIM
(DÜĞÜM KRİSTALLERİ)

DAVUT YILDIRIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

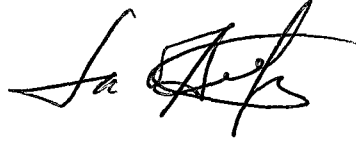
Haziran 2000

TC. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANİTASYON MERKEZİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne;

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gabil ALİYEV



Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV



Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ



Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdülkadir DOĞAN



Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

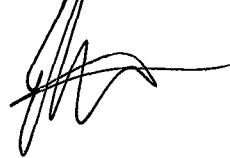


ONAY:

Bu tez, 27/09/2000 tarihinde, Enstitü Yöneti Kurulu'nca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun kararıyla kabul edilmiştir.

11/10/2000

Prof. Dr. Emine Erman KARA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



ÖZET

KLASİK DÜĞÜM TEORİSİNE MODERN BİR YAKLAŞIM

(DÜĞÜM KRİSTALLERİ)

YILDIRIM, Davut

Niğde Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

Haziran 2000, 49 sayfa

Bu çalışmada kristal diye adlandırılan, klasik düğüm teorisinde bir düğümün esas grubunu içeren yeni bir kavram tanıtıldı.

İlk önce bir düğüm veya halkanın diyagramı üzerinde bir cebirsel notasyon tanımlandı. Bu notasyona uygun bir cebir verildi. Bunun yönlendirilmiş düğüm ve halkaların bir invaryantı olup olmadığını görmek için Reidemeister hareketlerine göre nasıl davrandığı incelendi. Yönlendirilmiş halka diyagramındaki her bir yay bir operand kabul edildiğinde, operatör çarpımı ile doğurulan ve kristalin alt cebiri olan operatör cebirinin bir grup olduğu görüldü. Bu operatörlerin grubunun bir halkanın klasik esas grubuna izomorf olduğu ispatlandı.

Sonra bir kristalin formal tanımı ve iki kristal üzerinde izomorfizm tanımı verildi. K ve K' halka diyagramları için K , K' ne regüler izotop ise o zaman K halkasının kristalinin K' halkasının kristaline izomorf olduğu ispatlandı.

Ayrıca, modül kristali ve Alexander kristali diye adlandırılan iki farklı kristal modeli verildi. Modül kristali düğümün aşikar olup olmadığını gösterir. Alexander kristali düğümlerin ve halkaların Alexander polinomlarını hesaplamak için kullanıldı, ve aynı zamanda Alexander kristali n - ipli örgü gruplarına genişletildi.

Sonuç olarak $(2, n)$ – tor halkalarının Alexander polinomlarını hesaplamak için bir forml geliştirildi.

Anahtar Szckler: Kristal, İzotopi, Esas Grup, Alexander Polinomları.



SUMMARY

CLASSICAL KNOT THEORY IN MODERN GÜİSE

(THE KNOT CRYSTALS)

YILDIRIM, Davut

Niğde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: PhD. İsmet ALTINTAŞ

June 2000, 49 pages

In this study, a new concept called as the crystal – including the fundamental group of a knot in classical knot theory is introduced.

First, an algebraic notation on the diagram of a knot or link is defined. The algebra compatible with this notation is given. To see whether it is an invariant of oriented knots and links, it is examined that how the algebra behaves in respect to Reidemeister moves. When each arc in the oriented link diagram is assumed an operand, it is seen that the operator algebra which is sub algebra of the crystal generated by operator products is a group. It is proved that the group of this operator is isomorphic with the classical fundamental group of a link.

Next, the formal definitions of a crystal and the isomorphism on two crystal, are given. It is proved that if K is regular isotopic to K' for diagrams K and K' of two oriented links, then crystal of the link K is isomorphic to crystal of the link K' .

In addition, two different crystal models which are called as the module crystal and Alexander crystal are given. Module crystal implies that the knot is trivial or nontrivial. Alexander crystal is used to calculate Alexander Polynomials of knot and links, and also expanded to n - strand braid group.

Finally, a formula has been developed to calculate Alexander polynomials of $(2, n)$ – torus links.

Key Words: Crystal, Isotopy, Fundamentall Group, Alexander Polynomials.



TEŞEKKÜR

Bu alıőmada bana her tűrlű kolaylıęı saęlayan ve yardımlarını esirgemeyen Nięde Őniversitesi, Fen Edebiyat Fakűltesi, Matematik Bűlűmű Baőkanı sayın hocam Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŐ'a, Őęretim Őyeleri Prof Dr. Gabil ALİYEV ve Prof Dr. Mammad MUSTAFAYEV'e teőekkűrlerimi arz ederim.

Ayrıca, tez çalıőmalarım sırasında manevi desteklerini esirgemeyen Matematik Bűlűműnűn dięer Őęretim ũyesi ve elemanlarına teőekkűr ederim.

Davut YILDIRIM



İÇİNDEKİLER

ÖZET	II
SUMMARY	IV
TEŞEKKÜR.....	VI
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
BÖLÜM I. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ.....	1
BÖLÜM II. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Düğüm ve Halkalar	3
2.2. Diyagram Denklemleri.....	5
2.3. Alexander Polinomu	8
2.4. Düğüm Grubu.....	12
2.5. Örgüler	15
BÖLÜM III. DÜĞÜM KRİSTALLERİ.....	20
3.1. \lceil ve \lfloor Notasyonu.....	20
3.2. Notasyonun II. Reidemeister Hareketine Göre Davranışı.....	22
3.3. Notasyonun III. Reidemeister Hareketine Göre Davranışı.....	24
3.4. Kristalin Formal Tanımı ve İzomorf Kristaller.....	26
BÖLÜM IV. BAZI KRİSTAL MODELLERİ.....	30
4.1. Modül Kristali	30

4.2. Alexander kristali	33
BÖLÜM V. n-İPLİ ÖRGÜ GRUBU İÇİN ALEXANDER KRİSTALİ.....	39
5.1. (2, n) - İpli Örgü Grubu İçin Alexander Kristali.....	42
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	47
KAYNAKLAR	48



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Bazı düğümlerin normal ve düzlemsel izdüşümleri	3
Şekil 2.2. Yonca yaprağı düğümünün normal ve regüler diyagramı	5
Şekil 2.3. Yonca yaprağı düğümünün tünel komşuluğu.....	5
Şekil 2.4. Yonca yaprağı düğümünün beneklenişi.....	6
Şekil 2.5. Bir kavşağın indislenmesi.....	7
Şekil 2.6. Bir kavşağın etrafındaki bölgeler.....	7
Şekil 2.7. Sekiz şekilli düğümün beneklenişi	8
Şekil 2.8. Düğüm grubunun bağıntıları.....	13
Şekil 2.9. Yonca yaprağı düğümünün doğurayları	14
Şekil 2.10. Sekiz şekilli düğümün doğurayları	15
Şekil 2.11. Bir örgü temsili	15
Şekil 2.12. Örgü ve kapanışı	15
Şekil 2.13. Örgü grubunun doğurayları	16
Şekil 2.14. İki örgünün çarpımı	16
Şekil 2.15. Geometrik Morkov hareketi.....	18
Şekil 3.1. \lceil ve \lfloor Notasyonunun kavşağın yönüne göre durumu.....	20
Şekil 3.2. Yonca yaprağı düğümü için kristal bağıntıları	21
Şekil 3.3. Reidemeister hareketleri	21
Şekil 3.4. Notasyonun II. Reidemeister hareketine göre davranışı.....	22
Şekil 3.5. Notasyonun III. Reidemeister hareketine göre davranışı.....	24
Şekil 3.6. Whitney tasarımı.....	25
Şekil 4.1. Sekiz şekilli düğüm için kristal bağıntıları	32
Şekil 4.2. Griş ve çıkışı değeri "0" olan bir dolaşık.....	36

BÖLÜM I

GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Düğümle ilgili çalışmalar 19. yüzyılda başlamıştır. 1823 yılında Alman matematikçi Gauss ile başlayan düğüm teorisi ve 3-boyutlu manifoldlarla ilgili çalışmalar gelişerek devam etmektedir. Düğüm ve halka teorisi ile ilgili çalışmaların çoğu, düğüm ve halka invariantlarını bulma, bu invariantlara göre düğüm ve halkayı sınıflandırma problemi ile ilgilidir.

Şimdiye kadar düğüm ve halkaların önemli invariantları bulunmuştur. Bunlardan en önemlileri düğüm grubu ve Alexander polinomudur. Düğüm grubunu hesaplamak için Dehn ve Wirtinger tarafından ortaya konulmuş iki yöntem vardır [3, 6, 14]. Bu yöntemler kullanılarak bazı sınıflandırmalar yapılmıştır. Mesela Tor düğümleri, düğüm gruplarına tamamen sınıflandırılmıştır [14]. 1928 yılında Alexander, düğümün her bir kavşağı için bir denklem yazdı. Böylece bütün kavşaklar üzerinden elde ettiği denklemlerin katsayılar matrisinin determinantının bir Laurent polinomu olduğunu gördü [1]. Sekiz ve daha az geçitli bütün düğüm ve halkalar, Alexander polinomu vasıtasıyla tamamen sınıflandırılmıştır. Bu şekilde devam eden düğümle ilgili çalışmalar 1962-1972 yılları arasında Fox'un yaptığı çalışmalar ile yeni bir ivme kazandı. Fox, 1965 yılında yazdığı bir kitapta düğüm grubunun bağıntıları üzerinden, "serbest türev" adını verdiği yeni bir kavram geliştirdi [8]. Serbest türevden yararlanarak Alexander polinomunun hesaplanması için yeni bir yöntem verdi. 1976 yılında Joyce, düğüm teorisine modern bir yaklaşım kazandırmak amacıyla düğüm teorisinin bazı kavramlarını fizik prensipleriyle açıklamaya çalıştı [9]. Bu yeni yaklaşım çok ilgi gördü. Günümüzde başta Kauffmann olmak üzere birçok bilim adamı düğüm ile fizik arasında ki ilişkiyi incelemektedirler [10, 11, 12, 13].

Bu çalışmada, düğüm ve halkanın esas grubunu içeren ve Alexander polinomunu kolayca hesaplayan yeni bir kavram; "Düğüm Kristali" verildi.

Bu tez giriş bölümü dahil beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde diğer bölümlerde kullanılan temel kavramlardan bahsedildi. Ayrıca düğüm ve halkaların Alexander polinomu ile esas grubunu hesaplayan klasik yöntemler anlatıldı.

Üçüncü bölümde “Kristal” diye adlandırılan yeni bir kavram tanıtıldı. Önce düğüm ve halka diyagramından hareketle bir cebirsel notasyon tanımlandı. Bu notasyona uygun bir cebir verildi. Bunun yönlendirilmiş düğüm ve halkanın bir invaryantı olduğunu görmek için notasyonun Reidemeister hareketlerine göre nasıl davrandığı incelendi. Sonra düğüm diyagramının her bir yayı bir operand olarak göz önüne alındığında operatör çarpımı ile doğurulan ve kristalin alt cebiri olan operatör cebirinin bir grup olduğu görüldü. Bu operatörlerin grubunun halkanın klasik esas grubuna izomorf olduğu ispatlandı. Ayrıca kristalin formal tanımı verildikten sonra kristaller üzerinde izomorfizm tanımı yapıldı ve regüler izotop olan iki düğüm kristalinin izomorf olduğu ispatlandı.

Dördüncü bölümde modül kristali ve Alexander kristali adıyla düğümün düğümlenmiş olup olmadığını gösteren ve Alexander polinomunu hesaplayan iki kristal modeli verildi.

Beşinci bölümde Alexander kristali n -ipli örgü gruplarına genişletilerek bazı örnekler verildi. Ayrıca $(2, n)$ - tor halkalarının Alexander polinomunun hesaplanması için kullanılan bir formül geliştirildi.

BÖLÜM II

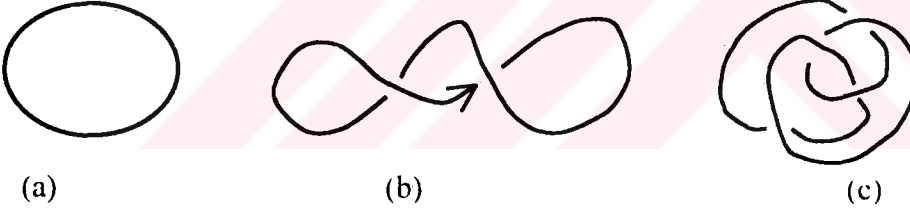
TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılacak bazı tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Dügüm ve Halkalar

2.1.1. Tanım. 3-boyutlu küre $S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$ ile gösterilsin. S^3 içinde $S^1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ çemberi ile topolojik eş yapılı (homeomorf) olan herhangi bir kümeye bir *dügüm* denir. $n \in \mathbb{N}$ için, n tane düğümün ayrık birleşimine bir *halka* denir [6, 8, 14].

Yani düğüm, uzayda basit kapalı bir eğridir. Diğer bir ifadeyle düğüm, birim çemberin uzay içindeki bir konumudur. Bir düğüm üzerinde hareket yönü belirtilirse o düğüm yönlendirilmiş olur. Şekil 2.1 de normal düzlemsel izdüşümleri ile bazı düğümler verilmiştir.



Şekil 2.1

2.1.2. Tanım. K ve L , S^3 içinde iki yönlendirilmiş düğüm olsun. Eğer $h(K) = L$ olacak şekilde yönlendirmeyi koruyan bir $h : S^3 \rightarrow S^3$ homeomorfizmi varsa K düğümü L düğümüne denktir denir [14].

İki düğümün denkliği tanımı, S^3 ün basit kapalı eğrileri üzerinde bir denklik bağıntısı verir. Bu bağıntı, söz konusu kümeyi ayrık denklik sınıflarına ayırır. Her denklik sınıfına bir *düğüm tipi* denir. Böylece, denk iki düğüm aynı düğüm tipindedir. Yönlendirilmiş bir çember (veya üçgen) ile aynı tipten olan düğümler *düğümlememiş düğümlerdir* [6, 14].

Düğüm problemi, düğüm tiplerini ayırt eden sabitlerin bulunmasıdır. Bu sabitlerden biri düğüm grubudur ve düğüm grupları farklı olan düğümler aynı düğüm tipine ait değildir. Bununla beraber grupları aynı olan farklı düğümlerde vardır [14].

2.1.3. Tanım. K , S^3 içinde bir düğüm ve p , izdüşüm fonksiyonu olsun. $a \in p(K)$ için $p^{-1}(a) \cap K$ n tane ($n > 1$) noktadan ibaret ise, a ya $p(K)$ nın bir *n-katlı noktası* denir. Eğer $n = 2$ ise, a noktasına *kavşak noktası* (çift katlı nokta) denir [6].

2.1.4. Tanım. Bir kavşak noktası, bir düğüme ait tam iki noktanın resmi olup, bu noktalardan z koordinatı büyük olana *üst geçit noktası*, diğerine ise *alt geçit noktası* denir.

2.1.5. Tanım. K bir düğüm ve p izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer

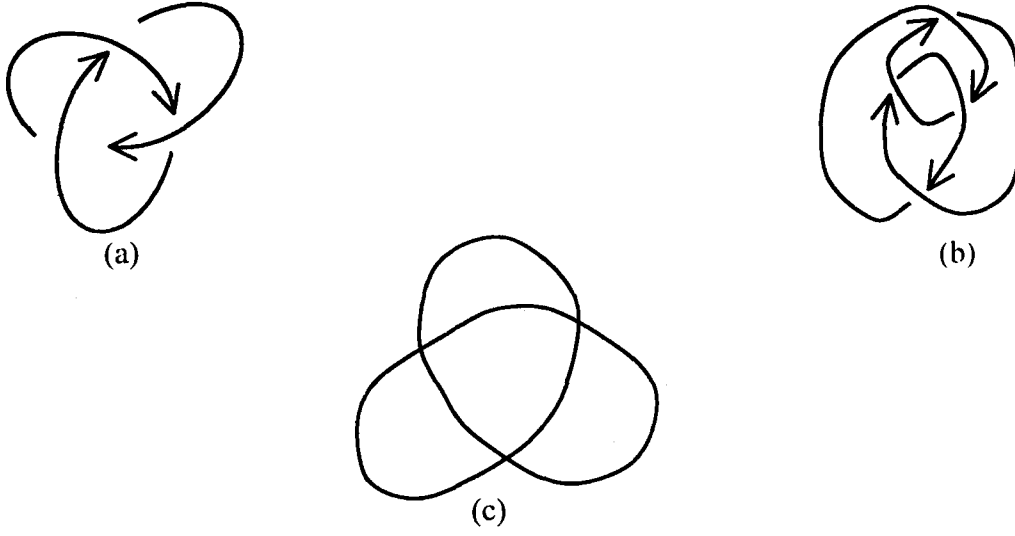
1. $p(K)$ nın katlı noktaları sadece sonlu sayıda geçit noktası ise,
2. Hiçbir geçit noktası K ya ait bir köşe noktasının p altında resmi değilse,

$p(K)$ ya K nın *regüler izdüşümü* denir. Eğer $p(K)$ izdüşümü regüler ise, K düğümü uzayda *regüler pozisyondadır* denir [8].

Bir düğümün regüler izdüşümüne o düğümün *regüler diyagramı* da denir. Regüler diyagram; düğümün, uzayın yeteri kadar uzak ve uygun bir noktasından çizilen resmi gibidir [8]. Şekil 2.2.c yonca yaprağı düğümünün regüler diyagramını göstermektedir.

2.1.6. Tanım. Regüler pozisyonda bulunan bir K düğümü ile bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. K nın, her alt geçit noktasından uzaklığı ϵ dan küçük olan noktaların kümesi A ise, $p(K-A)$ kümesine K düğümünün *normal diyagramı* denir [6].

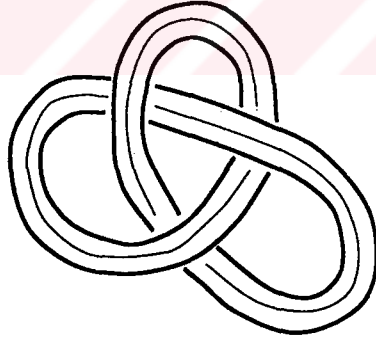
Böylece K düğümünün normal diyagramı ayrık yay parçalarından (veya doğru parçalarından) oluşur. Şekil 2.2.a yonca yaprağı düğümünün normal diyagramını ve şekil 2.2.b, (3.2) Türk düğümünün normal diyagramını göstermektedir. Diyagramlardaki ok işareti ise düğümün yönünü belirtir.



Şekil 2.2

2.1.7. Tanım. $\partial M = \partial N = \emptyset$ olmak üzere N , bir $M \cdot 3$ - manifoldunun bir alt manifoldu olsun. $x \in N$ iken $f(x,0) = x$ olacak şekilde verilen $f : N \times D \rightarrow M$ yerleştirmesine N nin M içinde bir *tünel komşuluğu* denir. Burada D , \mathbb{R}^2 nin 0 merkezli birim dairesidir [6, 14].

\mathbb{R}^3 içinde Bir K düğümünün tünel komşuluğu, özü K olan bir katı tordur.



Şekil 2.3

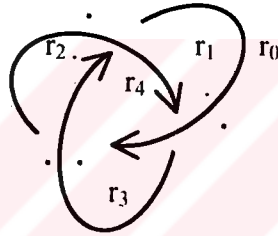
2.2. Diyagram Denklemleri

2.2.1. Tanım. Bir düğüm diyagramının düzlemde ayırdığı bölgelere *diyagramın bölgeleri* denir ve r_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) ile gösterilir. Bu bölgelerden sınırsız olanı r_0 ile gösterilir.

Bir K düğümünün diyagramında n tane geçit noktası varsa, Euler teoreminden dolayı bu diyagramın bölgelerinin sayısı $n+2$ dir.

2.2.2. Tanım. Bir düğümün yönlendirilmiş regüler diyagramında her bir kavşak noktasındaki iki daldan hangisinin alttan geçtiğini belirtmek için şu şekilde beneklenecektir:

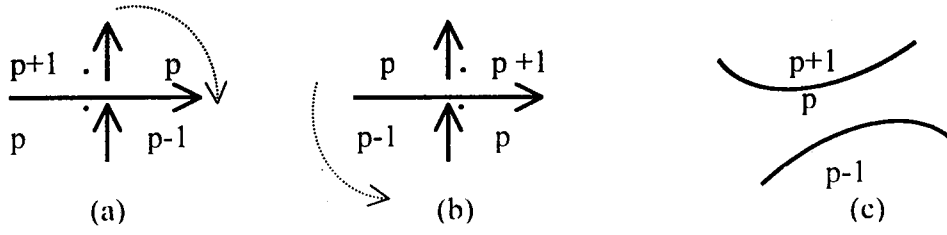
Diyagram üzerinde seçilen bir yönde hareket ederken diyagram eğrisi bir kavşak noktasında alt geçit oluyorsa o kavşak noktası etrafındaki dört bölgeden sol taraftaki iki bölgeye (kavşak noktasının bir ϵ civarı içine) birer nokta konur. Bu şekilde elde edilen diyagrama *benekli diyagram* denir. Şekil 2.4 de yonca yaprağı düğümüne ait diyagramın beneklenişi görülmektedir.



Şekil 2.4

2.2.3. Tanım. Bir düğüm diyagramında, her kavşak noktası etrafındaki dört bölgeye negatif olmayan ve $p, p+1, p, p-1$ şeklinde yerleştirilen tam sayıların her birine o bölgenin indisi denir [2].

Burada dikkat edilecek husus, bölgelerden birinin indisinin keyfi seçilip diğer üç bölgenin indislerinin hesaplanabilmesidir. Şekil 2.5 (a) ve (b) de 1. ve 2. Çeşit kavşak noktaları ve bu kavşak noktaları etrafındaki bölgelerin indisleri belirtilmiştir. (a) halinde, kavşak noktası etrafında pozitif yönde dönerken benekli bölgelerden ilkinin indisi p , sonrakinin indisi $p+1$ dir. (b) halinde bunun tersi olmaktadır. (c) halinde ise özel diyagramlarda rastlanır.



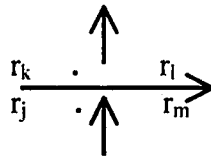
Şekil 2.5

2.2.4. Örnek. Örnek olarak şekil 2.4 deki diyagramda r_0 bölgesinin indisi 2 olarak alınırsa r_1, r_2, r_3, r_4 indisleri sıra ile 1, 1, 1, 0 bulunur.

2.2.5. Tanım. Düğüm problemi, aynı tip düğümleri gösteren farklı iki diyagramın tanınması problemine indirgenebilir [1]. Bir düğümü belirtmek için o düğüme ait diyagramı tamamen belirtmek gerekli değildir. Şimdi ifade edilecek denklem sistemi ile diyagram anlatılacaktır. n tane kavşak noktası olan bir düğümün diyagramı n tane denklemle ifade edilir. Bir c_i kavşağındaki dört bölge sırası ile r_j, r_k, r_l, r_m bölgelerine ait olsun (şekil 2.6). Eğer hareket halinde benekli iki bölgeden (r_j, r_k) , r_j önce geliyorsa c_i ye ait denklem

$$c_i(r) = xr_j - xr_k + r_l - r_m = 0$$

şeklinde olacaktır. Diğer kavşak noktasına ait $(n-1)$ denklemde benzer şekilde yazılır. Bu n denkleme *diyagram denklemleri* denir.



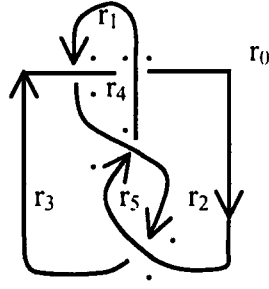
Şekil 2.6

2.2.6. Örnek. Yonca Yaprağı Düğümünün Şekil 2.4 e göre diyagram denklemleri

$$\begin{aligned} xr_1 - xr_0 + r_3 - r_4 &= 0 \\ xr_2 - xr_0 + r_1 - r_4 &= 0 \\ xr_3 - xr_0 + r_2 - r_4 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

şeklinindedir. Diyagram denklemleri, her kavşaktaki alt geçidi belirttiğinden, diyagram denklemleri bilinen bir düğümün diyagramını çizmek mümkündür.

2.2.7.Örnek. Sekiz şeklindeki düğümün diyagram denklemlerini şekil 2.7 vasıtası ile



Şekil 2.7

$$\begin{aligned}
 xr_1 - xr_0 + r_2 - r_4 &= 0 \\
 xr_3 - xr_4 + r_2 - r_5 &= 0 \\
 xr_1 - xr_4 + r_3 - r_0 &= 0 \\
 xr_2 - xr_0 + r_3 - r_5 &= 0
 \end{aligned} \tag{2}$$

şeklinde yazılabilir.

2.3. Alexander Polinomu

2.3.1. Tanım. Bir düğüm diyagramına ait denklemlerden her birinde dört terim vardır. Ancak, bir diyagramın n denklemi varsa her bir denklemden, o denklemden bulunmayan $(n-2)$ tane bölgenin katsayısı sıfır olarak alınır. Böylece her denklemden $(n+2)$ tane terim olur. Bu durumda n denklemden r_0 in katsayıları 1. sütun, r_1 in katsayıları 2. sütun, r_2 nin katsayıları 3. sütun v.s. alınırsa $n \times (n+2)$ boyutlu bir matris elde edilir. Bu matrisle düğümün *Alexander matrisi* denir ve M ile gösterilir.

2.3.2. Örnek. Yonca yaprağı düğümü için Alexander matrisi (1) denklemden dolayı

$$M = \begin{bmatrix} -x & x & 0 & 1 & -1 \\ -x & 1 & x & 0 & -1 \\ -x & 0 & 1 & x & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde dir.

2.3.3. Örnek. Sekiz şeklindeki düğümün Alexander matrisi ise (2) denklemden

$$M = \begin{bmatrix} -x & x & 1 & 0 & -1 & -0 \\ 0 & 0 & 1 & x & -x & -1 \\ -1 & x & 0 & 1 & -x & 0 \\ -x & 0 & x & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır.

2.3.4. Tanım. Bir düğümün Alexander matrisinden, ardışık p , $p+1$ indisli iki bölgeye karşılık gelen iki sütunun çıkarılması ile meydana gelen karesel matrisin determinanı hesaplanır. Diğer ardışık indisli iki bölgeye karşılık gelen sütunların çıkartılması ile bulunan karesel matrislerin determinantları hesaplanırsa birer polinom elde edilir. Bu polinomların her birini, en düşük dereceli terimin katsayılarını pozitif yapacak şekilde $\pm x^m$ gibi ortak çarpanlara alınır ve parantez içindeki çarpımın hep aynı olduğu görülür. Örneklerde daha iyi anlaşılacak olan x 'e bağlı bu polinoma düğümün *Alexander polinomu* denir ve $\Delta(x)$ ile gösterilir.

2.3.5. Teorem. Bir M matrisinden ardışık p ve $p+1$ indisli bölgelere karşılık gelen iki sütunun çıkarılması ile elde edilen $M_{p(p+1)}$ kare matrisinin $\Delta_{p(p+1)}$ determinantı, x^m çarpanı hariç çıkarılan iki sütundan bağımsızdır [1].

2.3.6. Teorem. $\Delta(x)$ polinomu bir düğüm sabitidir [7].

2.3.7. Örnek. Yonca yaprağı düğümünün Alexander polinomunun bulunması:

2.3.2. deki 3×5 boyutlu M matrisinin sütunlarına karşılık gelen r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 bölgelerinin indislerinin sırası ile 2.2.4 örnekten dolayı 2, 1, 1, 1, 0 olduğu bilinmektedir. Buna göre M matrisinden, önce 1. ve 2. sütunları ve sonra 3. ve 4. sütunlar çıkarılırsa sırasıyla

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ x & 0 & -1 \\ 1 & x & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad M_{01} = \begin{bmatrix} -x & x & 0 \\ -x & 1 & x \\ -x & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrislerini elde edilir. Bu matrislerin determinanı sırasıyla

$$\Delta_{12} = -(x^2 - x + 1) \quad \text{ve} \quad \Delta_{01} = -x(x^2 - x + 1)$$

şeklindedir. O halde bu düğümün Alexander polinomu

$$\Delta(x) = x^2 - x + 1$$

olur.

2.3.8. Not. 2.3.7 Örnek de sadece iki karesel matris göz önüne alındı. Ancak 1 ve 2 indisli birer bölgeye karşılık gelen sütunlar çıkarılırken 1 indisli bölge olarak r_1 bölgesi alındı. Eğer r_1 bölgesi yerine r_2 ve r_3 bölgeleri (her üç bölgenin de indisi 1'dir) alınsaydı elde edilen matrislerin determinantları sıra ile

$$\Delta'_{12} = x^2 - x + 1 \text{ ve } \Delta''_{12} = -(x^2 - x + 1)$$

olacaktır. Δ_{12} ile Δ'_{12} ve Δ''_{12} determinantları işaret farkı ile aynı olduğundan $\Delta(x)$ polinomunun tayininde her birinin ayrı ayrı hesaplanmasına gerek yoktur.

2.3.9. Örnek. Sekiz şeklindeki düğümün $\Delta(x)$ polinomunu daha önce 2.3.3 de belirtilen bu düğüme ait M matrisinden bulunur. Şekil 2.7 da r_0 bölgesinin indisi 2 olarak alınırsa r_1, r_2, r_3, r_4, r_5 bölgelerinin indisleri sıra ile 1, 1, 1, 2, 0 bulunur. Buna göre M matrisinden r_5 ve r_3 bölgelerine karşılık gelen sütunların çıkarılması ile elde edilen

$$M_{01} = \begin{bmatrix} -x & x & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ -1 & x & 0 & -x \\ -x & 0 & x & 0 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinanı,

$$\Delta_{01} = -x^2(x^2 - 3x + 1)$$

olarak bulunur. r_0 ve r_2 ye ait sütunların çıkarılmasıyla elde edilen

$$M_{12} = \begin{bmatrix} x & 0 & -1 & 0 \\ 0 & x & -x & -1 \\ x & 1 & -x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinanı

$$\Delta_{12} = x(x^2 - 3x + 1)$$

olarak bulunur ve r_0 ve r_1 e ait sütunların çıkarılması ile elde edilen

$$M_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & x & -x & -1 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ x & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrisinin determinanı

$$\Delta'_{12} = (x^2 - 3x + 1)$$

olarak bulunur. Böylece sekiz şeklindeki düğümün Alexander polinomu da,

$$\Delta(x) = x^2 - 3x + 1$$

olur.

2.3.10. Alexander Polinomunun Özellikleri.

1. Alexander polinomunun derecesi daima bir çift sayıdır [7].
2. $\Delta(x)$ polinomunda katsayılar orta terime göre simetriktir. Yani n. dereceden bir Alexander polinomu, $\Delta(x) = x^n \Delta\left(\frac{1}{x}\right)$ eşitliğini sağlar [7].
3. $\Delta(1) = \mp 1$ dir ve $\Delta(-1)$ daima tek sayıdır [7].
4. Herhangi bir düğümün Alexander polinomu

$$\Delta(x) = x^n - r_1 x^{n-1} (1-x)^2 + r_2 x^{n-2} (1-x)^4 - \dots + r_n (1-x)^{2n}$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan r_1, r_2, \dots, r_n tam sayıları verildiğinde Alexander polinomu

$$\Delta(x) = x^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i r_i x^{n-i} (1-x)^{2i}$$

şeklinde olan bir düğüm vardır [6].

2.4. Düğüm Grubu

2.4.1. Tanım. X bir topolojik uzay, $x_0 \in X$ bir sabit nokta olsun. Taban noktası x_0 olan X içindeki bütün kapalı eğrilerin homotopi sınıfı, çarpma işlemi altında bir gruptur. Bu gruba *esas grup* denir ve $\pi_0(X, x_0)$ ile gösterilir [5].

S^3 içinde bir K düğümünün tümleyeninin esas grubu veya kısaca düğüm grubu

$$G = \pi_1(S^3 - K, p)$$

ile gösterilir. $S^3 - K$ yerine

$$R^3 - K, (\overline{S^3 - V(K)}) \text{ veya } (\overline{R^3 - V(K)})$$

uzayları da kullanılabilir. Burada $V(K)$, K düğümünün bir tünel komşuluğudur.

Düğüm grubunun bir temsilini elde etmenin, biri Wirtinger'e ve diğeri Dehn'e ait olan iki esas yöntemi vardır [3, 6, 14]. Burada Wirtinger yöntemi kullanılacaktır. Normal izdüşümü $z = 0$ düzlemi üzerinde regüler olacak şekilde K düğümü R^3 uzayı içine yerleştirilsin. K 'nin düğüm grubunun doğuray ve bağıntıları sırasıyla s_i ve r_j ($i = 1, 2, \dots, n$) ile gösterilsin.

2.4.2. Lemma. σ_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) bir K düğümünün (veya halkanın) normal izdüşümünün üstten geçen yayları olsun. Bu durumda K 'nin düğüm grubu,

$$G = \pi_1(S^3 - K) = \langle s_1, s_2, s_3, \dots, s_n : r_1, \dots, r_n \rangle$$

şeklinde temsil edilir. Burada σ_i yayları s_i doğuraylarına karşılık gelir [6, 15].

Bu lemmaya göre şekil 2.8 de verilen r_j bağıntısı, $v_i \in \{-1, 1\}$ olmak üzere

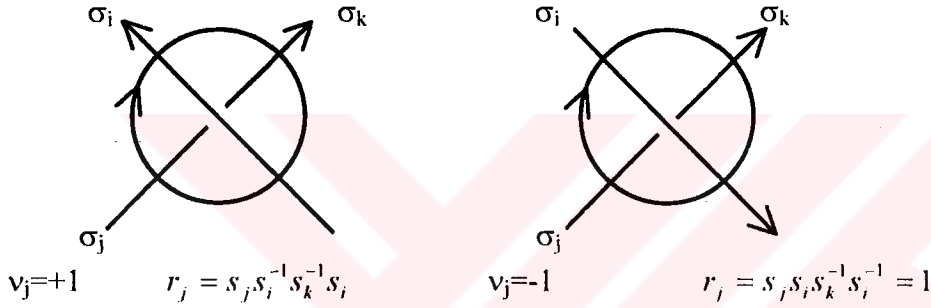
$$r_j = s_j s_i^{-v_j} s_k^{-1} s_i^{v_j}$$

şeklinde tanımlanır.

2.4.3. Lemma. K bir düğüm (veya halka) ve

$$G = \pi_1(S^3 - K) = \langle s_1, s_2, s_3, \dots, s_n : r_1, \dots, r_n \rangle$$

düğüm grubunun bir Wirtinger temsili olsun. Bu durumda $i \neq j$ için tanımlanan her bir r_j bağıntısı diğer r_i bağıntılarının bir sonucudur [6].



Şekil 2.8

2.4.4. Örnek. Yonca yaprağı düğümünün Wirtinger yöntemi ile grubunun bulunması:

Bu düğümün normal diyagramda gösterilen doğurayları a, b, c olsun (Şekil 2.9).

Buradan c_1, c_2, c_3 kavşak noktalarına ait bağıntılar sıra ile

$$r_1 = cb\bar{a}\bar{b}$$

$$r_2 = ac\bar{b}\bar{c}$$

$$r_3 = a\bar{c}\bar{a}b$$

dir ($\bar{a} = a^{-1}$). O halde bu düğümün grubu

$$\pi(S^3 - K) = \langle a, b, c : cb\bar{a}\bar{b}, ac\bar{b}\bar{c}, a\bar{c}\bar{a}b \rangle$$

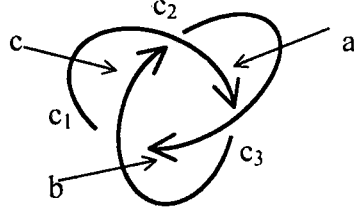
olur. 2.4.3. Lemmaya göre ikinci bağıntı diğer iki bağıntının sonucu olduğundan

$$\pi(S^3 - K) = \langle a, b, c : cb\bar{a}\bar{b}, a\bar{c}\bar{a}b \rangle$$

yazılabilir. Birinci bağıntıdan $\bar{c} = b\bar{a}\bar{b}$ ve $c = bab$ alınıp ikinci bağıntıda yerine yazılırsa

$$\pi(S^3-K) = |a, b : abab\bar{a}\bar{b} |$$

bulunur.



Şekil 2.9

2.4.5. Örnek. Sekiz şeklindeki düğümün Wirtinger yöntemi ile grubunun bulunması: Bu düğümün doğuraylarına a, b, c, d denilsin (Şekil 2.10). c_1, c_2, c_3, c_4 kavşak noktalarına ait bağıntılar sırası ile

$$\begin{aligned} r_1 &= ab\bar{d}\bar{b} \\ r_2 &= \bar{a}c\bar{b}\bar{c} \\ r_3 &= \bar{a}\bar{c}ad \\ r_4 &= \bar{b}\bar{d}cd \end{aligned}$$

biçiminde olur. O halde bu düğümün grubu

$$\pi(S^3-K) = |a, b, c, d : ab\bar{d}\bar{b}.\bar{a}c\bar{b}\bar{c}.\bar{a}\bar{c}ad.\bar{b}\bar{d}cd |$$

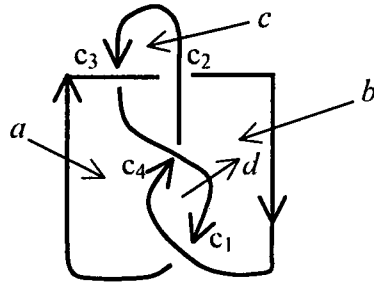
şeklinde yazılır. Burada üçüncü bağıntı diğerlerinin bir sonucu olduğundan,

$$\pi(S^3-K) = |a, b, c, d : ab\bar{d}\bar{b}.\bar{a}c\bar{b}\bar{c}.\bar{b}\bar{d}cd |$$

yazılır. Dördüncü bağıntıdan elde edilen $c = \bar{d}b\bar{d}$ ve birinci bağıntıdan elde edilen $a = b\bar{d}\bar{b}$ eşitliklerini alır ikinci bağıntıda yerine yazılırsa,

$$\pi(S^3-K) = |b, d : b\bar{d}b\bar{d}b\bar{d}\bar{b}\bar{d} |$$

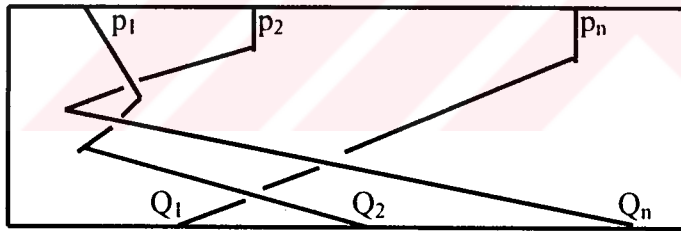
bulunur.



Şekil 2.10

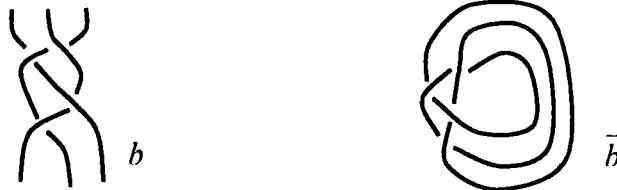
2.5.Örgüler

2.5.1. Tanım. R^3 uzayında bir D dikdörtgeninin karşılıklı kenarları üzerine P_i, Q_i , ($i = 1, \dots, n$) noktaları eşit uzaklıkta yerleştirilsin (Şekil 2.11). f_i , P_i de başlayan ve $Q_{\pi(i)}$ de son bulan R^3 içinde n tane ayrıık basit poligonal yay olsun. Burada $i \rightarrow \rho(i)$, $\{1, 2, \dots, n\}$ üzerinde bir permütasyondur. f_i lerin tam olarak aşağıya gitmesi istenir. Yani her bir f_i ; dikdörtgenin yan kenarına dik herhangi bir düzlemi en çok bir defa keser. f_i yaylarının hepsine birden n - örgü denir ve b ile gösterilir. Dikdörtgene b nin iskeleti ve $i \rightarrow \rho(i)$ ye örgü permütasyonu denir [3, 14].



Şekil 2.11

Aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi 3 - ipli bir örgünün kapanışı (kapalı örgü), başlangıç noktalarının paralel iplerinin bir koleksiyonu ile bitiş noktalarını birleştirerek elde edilir [13].



Şekil 2.12

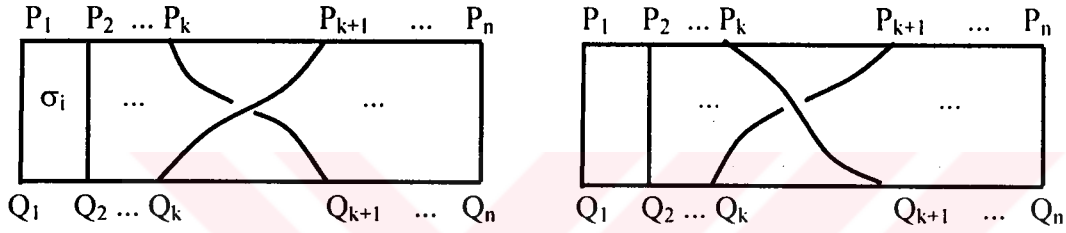
2.5.2. Teorem. Her K halkası bir kapalı örgü ile temsil edilebilir [6].

2.5.3. Tanım. n-örgülerin izotopi sınıfları bir grup teşkil eder. Bu gruba *örgü grubu* denir ve B_n ile gösterilir.

B_n grubu n-1 tane σ_i doğurayı ile doğurulabilir (Şekil 2.13). b örgüsü, σ_i , σ_i^{-1} örgü elemanlarının bir çarpımı olarak ortaya çıkar. Böylece B_n örgü grubu

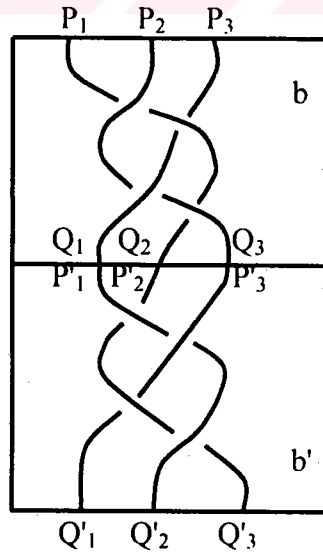
$$B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_j \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}, 1 \leq i \leq n-2, [\sigma_i, \sigma_k], 1 \leq i \leq k-1 \leq n-2 \rangle$$

şeklinde temsil edilebilir [6].



Şekil 2.13

b ve b' iki örgü olsun. Bu iki örgünün birleşimi b nin Q_i bitiş noktaları ile b' nün P'_i başlangıç noktalarını özdeşleştirerek elde edilir (Şekil 2.14) [14].



Şekil 2.14

2.5.4. Teorem. B_n örgü grubundan, $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerinden S_n permütasyon grubuna bir homeomorfizm vardır [6, 12].

$\pi : B_n \rightarrow S_n$ dönüşümü, örgü ile ortaya çıkan üst sıradaki noktalar ile alt sıradaki noktaların bir permütasyonu olarak tanımlanır.

Böylece, mesela

$$\pi \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dir.

Burada, sağdaki notasyon $\rho(1) = 3, \rho(2) = 1, \rho(3) = 2$ ile bir $\rho : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ permütasyonunu gösterir. Eğer bir b örgüsü için $\rho = \pi(b)$ ise, o zaman, $j. i$ noktasında başlayan örgü ipinin alt noktası olmak üzere $\rho(i) = j$ dir.

Eğer Şekil 2.13 de $T_k : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ kabul edilirse, k ve $k+1$ geçişleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_k(i) = i, \quad i \neq k, k+1$$

$$T_k(k) = k+1$$

$$T_k(k+1) = k$$

Bu geçişler anlamında, S_n ,

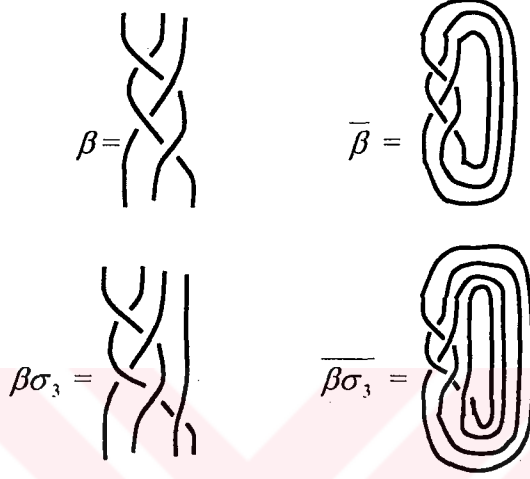
$$S_n = (T_1, \dots, T_{n-1} \mid T_i^2 = 1, T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1})$$

temsiline sahiptir.

Permütasyon grubu, B_n örgü grubunun, birime eşit bütün doğuraylarının karelerinin alınmasıyla elde edilen bölüm grubudur [6].

Örgüleri, kapanışları halkalara kuşatan izotop olacak şekilde değiştirmenin bazı kolay yolları vardır. Bunların ilki Markov hareketidir.

2.5.5. Markov Hareketi. β , B_n içinde bir örgü kelimesi (yani $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ ve terslerinden oluşan bir kelime) olsun. O zaman, β , $\beta\sigma_n$ ve $\beta\sigma_{n-1}$, örgülerinin üçü de kuşatan izotop kapanışa sahiptirler. Mesela



Şekil 2.15

Burada $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \in B_3$ ve $\beta\sigma_3 \in B_4$ dür.

Böylece, β , bir I. Tip Reidemeister hareketi ile $\beta\sigma_n^{\pm 1}$ den elde edilir.

Bir örgüyü aynı kapanışla yapmanın biraz daha zor bir yolu, B_n den herhangi bir g örgüsü seçmek ve $g\beta g^{-1}$ eşlenik örgüsünü almaktır. $g\beta g^{-1}$ in $\overline{g\beta g^{-1}}$ formunda kapanışı alınır, g örgüsü ve onun tersi olan g^{-1} , kapanış ipleri boyunca yer değiştirerek birbirlerini yok edebilirler.

Düğüm teorisi ile örgü teorisini bağdaştıran temel teorem aşağıda verilmiştir.

2.5.6. Markov Teoremi. $\beta_n \in B_n$ ve $\beta'_m \in B_m$, sırasıyla B_n ve B_m örgü gruplarında iki örgü olsunlar. O zaman $L = \overline{\beta_n}$ ve $L' = \overline{\beta'_m}$ halkalarının (β ve β' örgülerinin kapanışları) kuşatan izotop olmaları için gerek ve yeter şart β'_m nin β_n den

1. Verilen bir örgü grubundan denkliklerle

2. Verilen bir örgü grubundan eşlenik olarak (yani bir örgüyü bu örgünün eşleniği ile yer değiştirerek)
3. Markov hareketleriyle (Bir Markov hareketi $\beta \in B_n$ ile $\beta \sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$ i yer değiştirir veya bu işlemin tersi, $\beta \sigma_n^{\mp 1} \in B_{n+1}$ ile $\beta \in B_n$ i yer değiştirir; eğer β, σ_n de yer almıyorsa) dizisi ile elde edilmesidir [12].



BÖLÜM III

DÜĞÜM KRİSTALLERİ

Bu bölümde düğümün en önemli sabitlerinden olan düğüm grubunu içeren ve Alexander polinomu için bir model veren kristal diye adlandırılan bir kavram tanıtılacaktır.

3.1. $\bar{}$ ve $\lceil $ Notasyonu

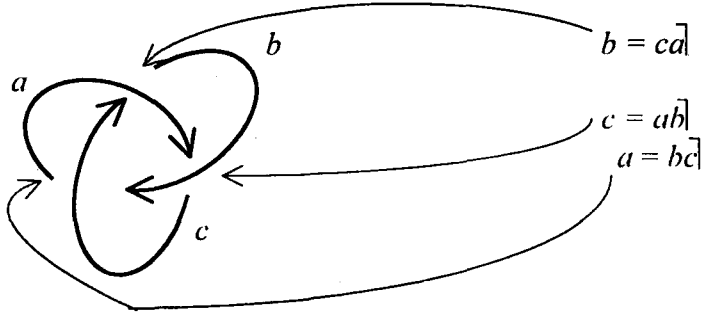
Kristal tanımını vermeden önce bazı cebirsel notasyonlara ihtiyaç vardır. Özel olarak burada \bar{a} ile gösterecek bir operatör notasyonu tanıtılacaktır. (a -geçit diye okunur). Halka (veya düğüm) diyagramının yönlendirilmesine göre ($\bar{}$) geçidine, sağ-el geçidi ve ($\lceil $) geçidine, sol-el geçidi adı verilir. Aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi bu geçitler halka diyagramının iki yönlendirilmiş tipini göstermek için kullanılacaktır.



Şekil 3.1

Bu notasyonda, yönlendirilmiş K halka diyagramında her bir yay, a , b , c , ... harfleri ile gösterilir. Bu tarzda bir yaya, bir operand gibi bakılacaktır. Aynı zamanda yay operatör mod kabul edilecek ve sağ veya sol geçitlerine uygun olarak \bar{a} veya $\lceil a$ ile gösterilecektir. Yukarıdaki diyagramda görüldüğü gibi bir c yayı, a alt geçit yayı üzerine \bar{b} veya $\lceil b$ şeklinde etki eden bir b üst geçit yayının sonucu olarak ele alınacaktır. Sağ-el veya sol-el geçitlerine göre $c = a\bar{b}$ veya $c = a\lceil b$ yazılacaktır.

Bu aşamada, bu notasyonlar henüz bir cebirsel sistemde bulunmamaktadır. Bunlar daha çok bir halka için bir kural teşkil eder. Mesela, yonca yaprağı düğümü için şekil 3.2 de görüldüğü gibi üç denklem elde edilir.



Şekil 3.2

Burada hemen şu soru akla gelir;

Bu notasyona uygun en basit cebir nedir ve bu yönlendirilmiş düğüm ve halkaların bir regüler izotopi invariantı nasıl verilir?

Bu soruya cevap verebilmek için, bu notasyonun Reidemeister hareketlerine göre nasıl davrandığı açıklanmalıdır. Düğüm ve halka diyagramları için Reidemeister hareketleri aşağıda verildi;



Şekil 3.3

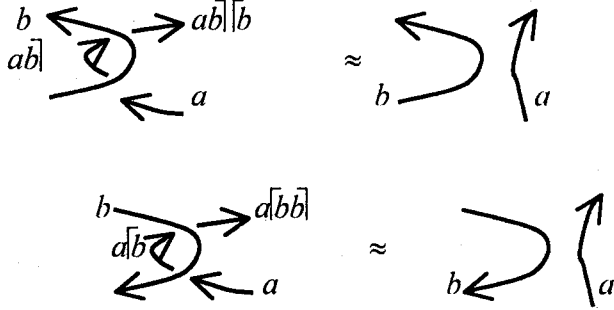
Bu hareketlerden II. ve III. hareketler *regüler izotopi* invariantları, I. II. III. hareketler *kuşatan izotopi* invariantlarıdır [16].

İki düğümden biri, sonlu sayıda Reidemeister hareketi ile diğerine dönüşürse bu düğümler aynı düğüm tipindedir. Diğer bir ifade ile, sonlu sayıda Reidemeister

hareketlerinin uygulanması ile diyagramları bir birine dönüşen düğümler denktirler. O halde Reidemeister hareketleri ile değişmeyen özellikler, düğüm tipinin özellikleridir [1].

3.2. Notasyonun II. Reidemeister Hareketine Göre Davranışı

II. Reidemeister hareketinin aşağıdaki yönlendirilmiş iki durumu göz önüne alınsın:



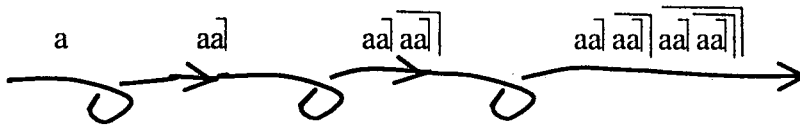
Şekil 3.4

Buradan görülür ki II. tip invariyantlık herhangi iki a ve b operandları için

$$ab|b = a \quad \text{ve} \quad a|bb = a$$

kuralına karşılık gelir.

O halde bir cebir kurmak için cebirin herhangi iki x ve y elemanı verildiğinde $xy|$ ve $x|y$ çarpımları teşkil edilmelidir. Aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi çarpım sembollerin yan yana yazılması ile oluşur.



Burada şu şartlaşma göz önüne tutulacak:

Herhangi iki x ve y elemanı için, $xy|$ çarpımı verilen bir diyagram üzerinden direk geometrik yoruma bağlı olmadan da oluşturulabilir. Ayrıca sembollerin yan yana

konulması ile oluşturulan çarpmanın birleşmeli olduğuna fakat değişmeli olmadığına dikkat edilmelidir.

Halka diyagramlarında x ve y aynı kavşakta buluşmadığı durumda, xy şeklindeki çarpımlar olmadığından, böyle çarpımlar kristal içinde kabul edilmeyecektir. Ancak doğal olarak a_0 ile kesişmeyen

$$a_0 \overline{b_1} \overline{b_2} \dots \overline{b_n}$$

şeklinde çarpımlar ortaya çıkabilir. Burada bir kavşakta buluşan elemanların çarpımı anlamında

$$\overline{a} \overline{bc} \overline{d}$$

şeklindeki çarpımlarla ilgilenilecek ve bu tip çarpımlara operatör çarpımı denilecektir.

3.2.1. Tanım. $C(K)$ kristalinin, operatör çarpımları ile doğurulan alt cebirine, *operatör cebiri* denir ve $\pi(K)$ ile gösterilir. $\pi(K) \subset C(K)$ olur.

3.2.2. Tanım. β , operatör cebirine ait bir çarpım. a, β ile bir kavşakta buluşmayan bir eleman olmak üzere $a\beta$ şeklindeki bütün elemanlardan ibaret kümeye *başlangıç kristali* adı verilir ve $C_0(K)$ ile gösterilir.

Böylece operatör cebiri, başlangıç kristali üzerine sağdan çarpma ile etki eder ve başlangıç kristali çarpazlama yoluyla operatör cebirine dönüşür.

3.2.3. Tanım. Bir *kristal*, $\pi(K)$ ile $C_0(K)$ birleşimi olarak tanımlanır ve $C(K)$ ile gösterilir. Yani $C(K) = \pi(K) \cup C_0(K)$ dır.

Kristal içindeki her a, b için $a\overline{b} = a$ olduğu için ilk eşitlik olarak, her $b \in C(K)$ için,

$$\overline{b}b = \overline{b} \quad (1)$$

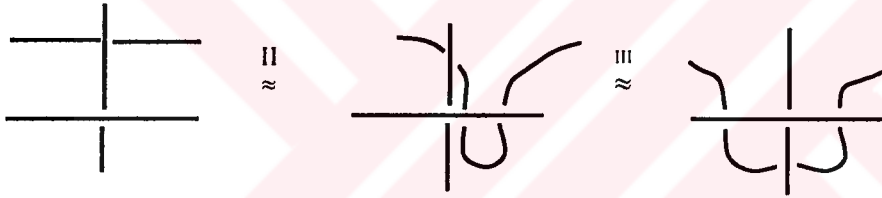
yazılabilir. Bu eşitlik $\pi(K)$ ya aittir. Böylece $\pi(K)$ bir gruptur.

3.3. Notasyonun III. Reidemeister Hareketine Göre Davranışı

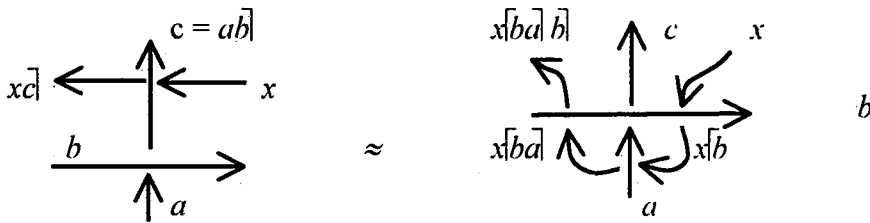
Notasyonun III. Reidemeister hareketine göre davranışını incelemek için dolaşan yol diye adlandırılan aşağıdaki hareket kullanılacaktır:



Geometrik olarak II. Reidemeister hareketi altında dolaşan yolun, III. Reidemeister hareketine denk olduğu aşağıdaki diyagramda görülmektedir.



Şimdi dolaşan yol cebirini incelemek için aşağıdaki yönlendirilmiş durum göz önüne alınsın.



Şekil 3.5

Böylece $c = ab$ iken $\overline{c} = \overline{ba} \overline{b}$ olur veya daha özel olarak,

$$\overline{ab} = \overline{ba} \overline{b} \quad (2)$$

olur. Bu kuralın, yönlendirmeye bağlı olarak

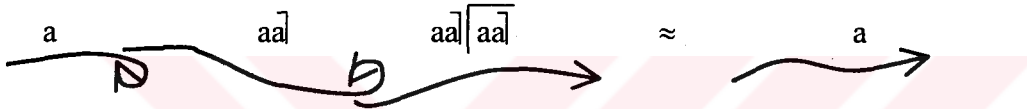
$$\overline{[ab]} = [b[ab]]$$

$$\overline{a[b]} = b[a][b]$$

$$\overline{[ab]} = b[a][b]$$

gibi değişik varyantları vardır. (2) eşitliği bir boy indirgeme kuralıdır. $\overline{[ab]}$ iki boy ifadesi yerine, $[ba][b]$ bir boy ifadesi alınabilir.

3.3.1. Gözlem. $\overline{a}[a=1 \text{ ve } \overline{ab}] = [ba][b]$ kuralları cebirsel formda kolayca fark edilmeyen bir regüler homotopiye karşılık gelir.

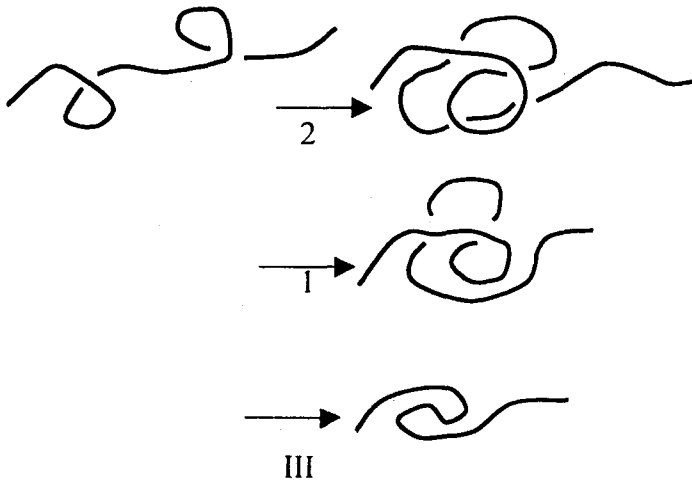


diyagramı için

$$aa|[aa| \stackrel{(2)}{=} aa|[a[a a] \stackrel{(1)}{=} a[a[a] = a$$

olur.

3.3.2. Hatırlatma. Bu cebirsel eşitlikte dolaşan yolun kullanılması şekil 3.6 da ki Whitney tasarımının yapısına aynen uyar [16].



Şekil 3.6

Dolaşan yolun diğer cebirsel versiyonlarına bakıldığında görülür ki onun esas grupla ilişkisi vardır.

3.3.3. Teorem. $\pi(K)$ operatörler grubu, K halkasının klasik esas grubuna izomorftur.

3.3.4. İspat. K halkasının esas grubu olan $\pi_1(S^3-K)$ yı Wirtinger temsilindeki gibi: düğüm diyagramındaki bir kavşakta karşılaşılan her bir yay, bir doğuray olarak alınır. bu doğuraylar kavşakta bir bağıntı oluşturur [15]. Bu bağıntı, kavşakta aşağıdaki diyagramda gösterildiği gibi pozitif yönlendirme varsa $\gamma = \beta^{-1}\alpha\beta$ şeklindedir [4]. Eğer kristalde çalışılıyorsa o zaman operatörler üzerinde $\bar{c} = \overline{ab} = \overline{ba}b$ bağıntısı alınır.

$$\begin{array}{c} \uparrow \gamma \\ \beta \longrightarrow \\ \uparrow \alpha \end{array}, \quad \gamma = \beta^{-1}\alpha\beta \qquad \begin{array}{c} \uparrow c = \overline{ab} \\ b \longrightarrow \\ \uparrow a \end{array}, \quad \bar{c} = \overline{ba}b$$

$\gamma = \bar{c}$, $\alpha = \bar{a}$, $\beta = \bar{b}$ ile $\bar{c} = \overline{ba}b$ bağıntısı $\gamma = \beta^{-1}\alpha\beta$ şekline dönüşür. Bu, halka diyagramının esas grubunun Wirtinger formülünde bir kavşaktaki standart bağıntısıdır. Böylece $\pi(K)$ operatörler grubu, $\pi_1(S^3-K)$ esas grubuna izomorftur.

3.3.5. Sonuç. $C(K)$, $\pi_1(S^3-K)$ yı içerir.

3.4. Kristalin Formal Tanımı ve İzomorf Kristaller

$f, g : C_0 \rightarrow \pi$ dönüşümleri, $f(x) = \overline{x}$, $g(x) = [x]$ ile tanımlansın. Burada, $x, y \rightarrow xy$ ikili işlem ile π bir gruptur. π , C_0 üzerine $a \in C_0$ ve $\lambda, \mu \in \pi$ için $(a\lambda)\mu = a(\lambda\mu)$ olacak şekilde

$$C_0 \times \pi \rightarrow C_0$$

$$a, \lambda \rightarrow a\lambda$$

dönüşümleri ışığında, sağdan etki eder. Ayrıca

1. Her $x \in C_0 \cup \pi$, $\overline{x}[x] = 1 \in \pi$,
2. Her $x, y \in C_0 \cup \pi$ için $\overline{xy} = \overline{yx}y$

ve bu denklemin diğer varyantları sağlanır.

3.4.1. Tanım. Bir *kristal*, $\lfloor, \lceil : C_0 \rightarrow \pi$ dönüşümleri ile bir $C = C_0 \cup \pi$ kümesidir, öyle ki C_0 ile π ayrıktır. π , C_0 üzerine etki eden bir gruptur ve C_0 dan π ye dönüşümleri 3.2.3 ve 3.3 de ki (1) ve (2) eşitliklerini sağlar.

3.4.2. Tanım. C ve C' iki kristal olsun. Eğer $\phi(C_0) = C'_0$ ve $\phi(\pi) = \pi'$ olacak şekilde, $\phi : C \rightarrow C'$ bire-bir örten dönüşümü varsa ve

1. Her $x \in C_0$ için $\overline{\phi(x)} = \phi(\overline{x})$, $\lceil \phi(x) = \phi(\lceil x)$,
2. Her $x \in C_0$, $\alpha \in \pi$ için $\phi(x, \alpha) = \phi(x) \phi(\alpha)$,
3. ϕ/π bir grup izomorfizmi,

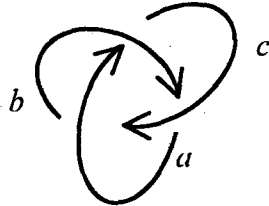
şartları sağlanıyorsa, C kristali C' kristaline *izomorftur* denir.

3.4.3. Tanım. K bir yönlendirilmiş halka diyagramı olsun. Diyagramdaki her bir yayı $C_0(K)$ nın bir elemanı ile etiketleyerek her bir kavşaktaki bağıntıyı $c = a\overline{b}$ veya $c = a\lceil b$ formunda yazarak $C(K)$ kristali oluşturulsun. Bu durumda, $a_1, a_2, \dots, a_n \in C_0(K)$ elemanları ve r_1, r_2, \dots, r_m bağıntıları için

$$C(K) = (a_1, a_2, \dots, a_n : r_1, r_2, \dots, r_m)$$

şeklinde tanımlanır.

3.4.4. Örnek.



K , yukarıdaki diyagramda verilen yonca yaprağı düğümünü gösterebilir. Bu durumda $C(K)$ kristali,

$$C(K) = (a, b, c : c = a\overline{b}, b = c\overline{a}, a = b\overline{c})$$

şeklinde yazılabilir.

3.4.5. Teorem. K ve K' iki yönlendirilmiş halka diyagramı olsun. Eğer K , K' ne regüler izotop ise $C(K)$, $C(K')$ ne izomorftur. Eğer K , K' ne kuşatan izotop ise $\pi(K)$, $\pi(K')$ ne izomorftur.

3.4.6. İspat. $C(K)$ nın bir regüler izotopi invaryantı ve $\pi(K)$ nın bir kuşatan izotopi invaryantı olduğu gösterilmelidir.

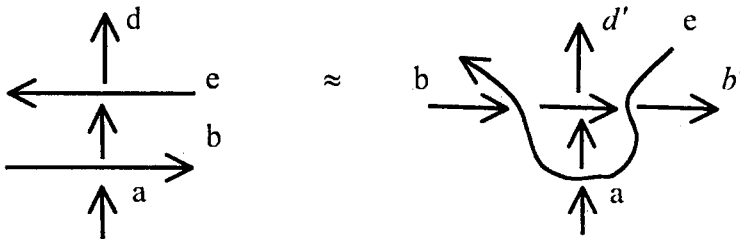
$$\overline{aa} = [aa]a = a$$

olduğundan $\pi(K)$, I. Reidemeister hareketi altında invaryanttır.



Ancak $C_0(K)$, I. Reidemeister hareketi altında invaryant değildir. Çünkü aa nın, a ya eşit olduğu söylenemez.

Geriye, dolaşan yolun aşağıdaki versiyonu için invaryantlığı kontrol etmek kalır.



Bu diyagramlardan $d = ab[e]$, $d' = a[eb[e]]$, $b' = b[ee]$ elde edilir. Böylece $b' = b$ ve

$$\begin{aligned} d' &= a[e \overline{b[e]}] \\ &= a[ee]b[e] \\ &= ab[e] = d \end{aligned}$$

olur. Bu da $C(K)$ kristalinin II. ve III. Reidemeister hareketleri altında invaryant olduğunu gösterir. Böylece $C(K)$ bir regüler izotopi invaryantı ve $\pi(K)$ bir kuşatan izotopi invaryantıdır.



BÖLÜM IV

BAZI KRİSTAL MODELLERİ

4.1. Modül Kristali

Kristalin en basit modeli, herhangi m modülü için $a, b, \dots \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ olduğunda,

$$\overline{ab} = 2b - a = a\overline{b}$$

şeklinde tanımlanması ile elde edilir. Bu tanımın yapılması için (1) ve (2) eşitlikleri sağlanmalıdır.

$$\overline{ab} \overline{b} = \overline{ab} \overline{b} = a$$

Bu bağıntıdan (1) eşitliğinin sağlandığı, ve aşağıda verilen ifadeden de (2), yani

$$\overline{ab} = \overline{ba} \overline{b}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Gerçekten

$$\overline{xab} = 2(\overline{ab}) - x = 4b - 2a - x = 2(2b - a) - x = x\overline{ba} \overline{b}$$

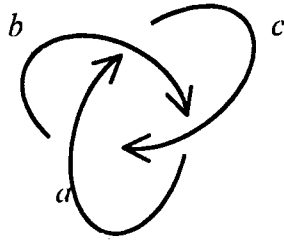
olur. O halde $\overline{ab} = 2b - a = a\overline{b}$ ile tanımlanan kristal regüler izotopi invaryantıdır.

Bu sistemde $\overline{a} = \overline{a} = \overline{a}$ alınırsa $C(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ kristalinde

$$\overline{a\overline{a}} = 2a - a = a$$

olduğundan I. Reidemeister hareketi de sağlanır. Böylece modül kristali kuşatan izotopi invaryantıdır. Verilen bir K halkası için K'nın kavşak bağıntıları ve bu kristal yapısı ile uyumlu en küçük m ($m \neq 1$) modülü bulmak için bu model kullanılabilir.

4.1.1. Örnek. K yonca yaprağı düğümünün aşağıdaki yönlendirilmiş diyagramı göz önüne alınsın.



Böylece her kavşak için kristal bağıntıları yazılırsa aşağıdaki denklem sistemi elde edilir:

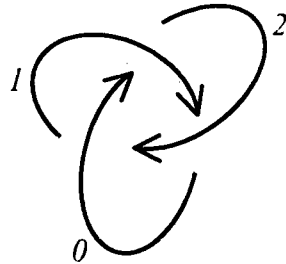
$$\begin{array}{lcl}
 c = \bar{a}b = 2b - a & & -a + 2b - c = 0 \\
 b = \bar{c}a = 2a - c & \Rightarrow & 2a - b - c = 0 \\
 a = \bar{b}c = 2c - b & & -a - b + 2c = 0
 \end{array}$$

Bu homojen denklem sisteminin katsayılar matrisine elemanter satır ve sütun işlemlerinin yapılması ile

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{satır}} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{sütun}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $m(K) = 3$ olur.

Yani Yonca yaprağı düğümü için en küçük modül üçtür. Bu aşağıdaki duruma karşılık gelir.



$$(2 \cdot 0 - 2) \equiv 1 \pmod{3}$$

$m(K) = 3$ gerektirir ki yonca yaprağı düğümü aşikar değildir. Ayrıca $m(K)$, K 'nin bir kuşatan izotopi invariantıdır.

4.1.2. Örnek. Sekiz şeklindeki düğümün modül kristali için şekil 4.1 den aşağıdaki bağıntılar yazılır.

$$\begin{aligned} b = a\bar{c} = 2c - a & & 2c - a - b = 0 \\ a = d\bar{b} = 2b - d & \Rightarrow & 2b - d - a = 0 \\ c = b\bar{d} = 2d - b & & 2d - b - c = 0 \\ d = c\bar{a} = 2a - c & & 2a - c - d = 0 \end{aligned}$$

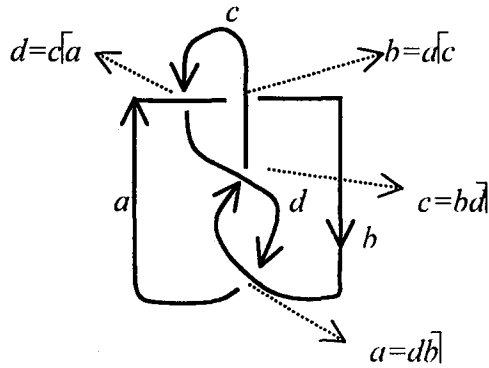
Bu sistemin katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

olarak yazılır. Elde edilen bu matris üzerinde gerekli satır ve sütun işlemleri yapılırsa katsayılar matrisi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisine eşdeğer olur. Dolayısıyla $m(k) = 5$ olur.



Şekil 4.1

4.2. Alexander kristali

Önemli kristal yapılarından biri de Alexander kristalidir. M , $Z[t, t^{-1}]$ halkası üzerinde herhangi modül olsun. $a, b \in M$ verildiğinde \overline{ab} ve $\overline{a}b$,

$$\overline{ab} = ta + (1-t)b$$

$$\overline{a}b = t^{-1}a + (1-t^{-1})b$$

denklemleri ile tanımlansın. Bu denklemler için kristal aksiyomlarının sağlandığı gösterilmelidir.

II. Reidemeister hareketinden $\overline{ab}\overline{b} = a$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} \overline{ab}\overline{b} &= t^{-1}(ta + (1-t)b) + (1-t^{-1})b \\ &= a + (t^{-1}-1)b + (1-t^{-1})b \\ &= a \end{aligned}$$

III. Reidemeister hareketinden $\overline{abc} = \overline{a}\overline{cb}c$ olmalıdır.

$$\begin{aligned} \overline{abc} &= ta + (1-t)bc \\ &= ta + (1-t)(tb + (1-t)c) \\ &= ta + (1-t^2)b + (1-t)^2c \\ \overline{a}\overline{cb}c &= t(\overline{a}\overline{cb}) + (1-t)c \\ &= t(ta\overline{c} + (1-t)b + (1-t)c) \\ &= t(t(t^{-1}a + (1-t^{-1})c + (1-t)b) + (1-t)c) \\ &= ta + (t^2-t)c + (t-t^2)b + (1-t)c \\ &= ta + (1-t^2)b + (1-t)^2c \end{aligned}$$

Böylece $\overline{b}\overline{b} = 1$ ve $\overline{bc} = \overline{c}b$ olur. M modülünün Alexander kristali $A(M)$ ile gösterilirse bu durumda, $C_0(M) = M$ ve $\pi(M)$

$$\overline{b}, \overline{b} : M \rightarrow M$$

$$a\bar{b} = \bar{b}(a) \quad , \quad a\bar{b} = \bar{b}(a)$$

dönüşümleri ile doğrulan M nin otomorfizm grubudur. Aynı zamanda,

$$a\bar{a} = ta + (1-t)a = a \quad \text{ve} \quad a\bar{a} = t^{-1}a + (1-t^{-1})a = a$$

olur.

Böylece her bir $a \in M$ elemanı, a yı sabit bırakan $\bar{a} : M \rightarrow M$ otomorfizmine karşılık gelir. Düğüm teorisi açısından $A(M)$, bir kuşatan izotopi invaryantı modülüne yükselir ve Alexander Modülü diye adlandırılır [7, 8]. Eğer $M(K)$, $Z[t, t^{-1}]$ üzerinde, K diyagramının yay etiketleri ile doğrulmuş modül olarak tanımlanırsa modül bağıntıları aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi olur.



Verilen bir düğüm diyagramı için kavşak bağıntılarının herhangi biri diğer bütün bağıntıların bir sonucudur (2.4.3 Lemma). Sonuç olarak n kavşakta bir düğüm diyagramı için $M(K)$, $(n-1)$ tane kavşak bağıntısı alınarak hesaplanabilir.

4.2.1. Örnek. K Yonca yaprağı düğümünün şekil 3.2 deki diyagramından

$$c = a\bar{b} = ta + (1-t)b$$

$$b = c\bar{a} = tc + (1-t)a$$

$$a = b\bar{c} = tb + (1-t)c$$

bağıntıları yazılabilir. Burada $M(K)$ aşağıdaki bağıntılarla doğrulur.

$$ta + (1-t)b - c = 0$$

$$\begin{aligned}(1-t)a-b+tc &= 0 \\ -a+tb+(1-t)c &= 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} t & 1-t & -1 \\ 1-t & -1 & t \\ -1 & t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ve ilk baştaki bağıntı diğer bağıntıların toplamının negatiftir.

$\langle a \rangle$, herhangi bir a taban elemanı ile doğurulmuş alt modül olsun. $\tilde{M} = M/\langle a \rangle$ alınsın. Böylece katsayılar matrisinin herhangi bir $(n-1) \times (n-1)$ minörünün determinanı, herhangi bir $m \in \tilde{M}$ için $f(t)m = 0$ olacak şekilde $f(t)$ Laurent polinomunun $Z[t, t^{-1}]$ içindeki idealinin bir doğurayı olduğu görülebilir.

Yonca yaprağı düğümü için

$$\Delta_r \doteq \text{Det} \begin{pmatrix} -1 & t \\ t & 1-t \end{pmatrix} = (t-1) - t^2 \doteq t^2 - t + 1.$$

Olur. Burada \doteq , t 'nin kuvvet ve işareti farkıyla eşitliği gösterir.

4.2.2. Not. Alexander kristali, modül kristalinin bir genelleştirilmesidir. Gerçektende, $a\bar{b} = ta + (1-t)b$ bağıntısında $t = -1$ alınırsa $a\bar{b} = 2b - a$ bulunur.

4.2.3. Örnek. Sekiz şeklindeki düğümün Alexander kristalini şekil 4.1 den

$$b = d\bar{c} = t^l a + (1-t^l)c$$

$$a = d\bar{b} = td + (1-t)b$$

$$c = b\bar{d} = tb + (1-t)d$$

$$d = c\bar{a} = t^l c + (1-t^l)a$$

biçiminde bağıntılar elde edilir. Buradan

$$t^{-1}a + (1-t^{-1})c - b = 0$$

$$td + (1-t)b - a = 0$$

$$tb + (1-t)d - c = 0$$

$$t^{-1}c + (1-t^{-1})a - d = 0$$

yazılabilir. Buradan da, aşağıdaki matris bağıntısı yazılır.

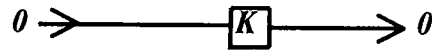
$$\begin{bmatrix} t^{-1} & -1 & 1-t^{-1} & 0 \\ -1 & 1-t & 0 & t \\ 0 & t & -1 & 1-t \\ 1-t^{-1} & 0 & t^{-1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu matris bağıntısının 3×3 minörlerinin determinantları hesaplanırsa

$$\Delta_r = \text{Det} \begin{pmatrix} -1 & 1-t & 0 \\ 0 & t & -1 \\ 1-t^{-1} & 0 & t^{-1} \end{pmatrix} \doteq t + t^{-1} - 3 \doteq t^2 - 3t + 1$$

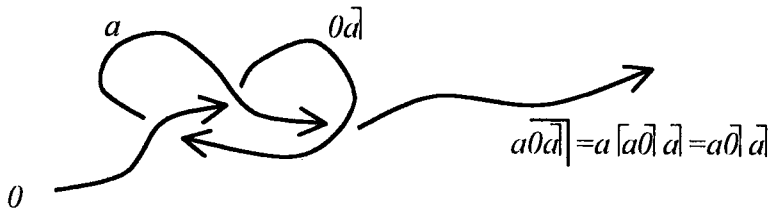
olur.

4.2.4. Gözlem. Küçük örnekler için Alexander polinomu giriş ve çıkışı 0 değeri olan bir iki ipli dolaşık alınıp diyagram üzerindeki bağıntılar direk alınarak hesaplanabilir. (şekil 4.2).



Şekil 4.2

4.2.5. Örnek. Yonca yaprağı düğümü için aşağıdaki diyagramda gösterilen dolaşık alınınsın:



Böylece

$$\begin{aligned}x\bar{0} &= tx + (1-t)0 = tx \\x\bar{1} &= t^{-1}x + (1-t^{-1})0 = t^{-1}x\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}a\bar{0}\bar{1} &= t(ta) + (1-t)a \\ &= (t^2 - t + 1)a \\ &= \Delta(t)a\end{aligned}$$

olur. $\Delta(t)a = 0$ gösterir ki

$$\Delta(t) = t^2 - t + 1$$

yonca yapırağı düğümünün Alexander polinomudur.

4.2.6 Teorem. M , değışmeli bir R halkası üzerinde $rank \geq 3$ olan bir serbest modül ve

$$a\bar{b} = ra + sb \quad a\bar{b} = r'a + s'b$$

formülüne göre tanımlanan işlem ile kristal yapısına sahip olsun. Burada $r, s, r', s' \in R$ ve $a, b \in M$ dir. Eğer r, s, r', s' 'nin ters elemanları ise o zaman

$$r = t, s = (1-t), r' = t^{-1}, s' = (1-t^{-1})$$

yazılabilir. Böylece bu lineer kristal temsili Alexander kristali formuna sahip olur.

4.2.7 İspat. a ve b , R üstünde bağımsız olsun (hipoteze göre). Kristal yapısına göre

$a\bar{b}\bar{b} = a$ dır. Dolayısıyla

$$a = (ra + sb)\bar{b} = rr'a + (r's + s'b)$$

olur. Buradan

$$rr' = 1 \text{ ve } r's + s' = 0$$

olduğı çıkar. Böylece r ve r' birbirinin tersidir. Yani $r^{-1}s + s' = 0, rs' + s = 0$ iken $r' = r^{-1}$ olur.

Şimdi $\overline{xab} = x[ba] b$ denklemi uygulansın.

$$\begin{aligned}
 \overline{xab} &= \overline{xra+sb} = rx+s(ra+sb) \\
 x[ba] b &= r(r(r'x+sb)+sa)+sb \\
 &= rx+r^2s'b+rsa+sb \\
 &= rx+(r^2s'+s)b+rsa \\
 &= rx+(-rs+s)b+rsa \quad (s' = -r^{-1}s)
 \end{aligned}$$

Bu nedenle daha ileri bir şart elde edilir. $s^2 = -rs+s \Rightarrow s = 1-r$. Böylece $r = t$ olduğunda eğer $s = 1-t$ ise $s' = 1-t^{-1}$ olur. Bu ispatı tamamla [9.11. 14].



BÖLÜM V

n - İPLİ ÖRGÜ GRUBU İÇİN ALEXANDER KRİSTALİ

σ_i , n ipli Artin örgü grubunun bir elemanı olsun. Bu durumda

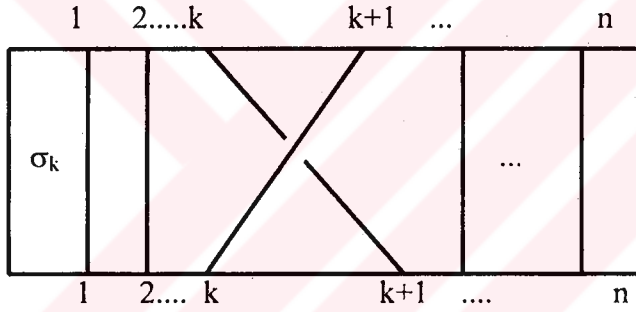
$$T_k : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T_k(i) = i, i \neq k, k+1$$

$$T_k(k) = k+1$$

$$T_k(k+1) = k$$



Şimdi a ve b , bir V vektör uzayının iki taban elemanı olsun.

$$T : V \rightarrow V, T(a) = b \text{ ve } T(b) = ta + (1-t)b$$

ile tanımlansın. Dikkat edilirse bu tabana göre T bir matrise sahiptir. Bu matris aynı zamanda T ile gösterilsin.

Bu dönüşüm Alexander kristali için yazılırsa,

$$\begin{array}{ccc}
 & b & a \\
 & \swarrow & \searrow \\
 a\overline{b} = t^{-1}a + (1-t^{-1})b & & b
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & a & b \\
 & \swarrow & \searrow \\
 b & & a\overline{b} = ta + (1-t)b
 \end{array}$$

kavşakları için

$$\begin{array}{ccc}
 b & & a \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 T^{-1}(b) & & T^{-1}(a)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 a & & b \\
 \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 T(a) & & T(b)
 \end{array}$$

temsilieri elde edilir.

$$T(a) = b$$

$$T(b) = a\overline{b} = ta + (1-t)b$$

$$T^{-1}(b) = t^{-1}a + (1-t^{-1})b$$

$$T^{-1}(a) = b$$

denklemlerinden

$$T = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & (1-t) \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1-t^{-1} & 1 \\ t^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir.

Böylece n ipli B_n örgü grubunun örgüleri için

$$\rho(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 0 & t & \dots & 0 \\ 1 & 1-t & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1-t & \dots & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(\sigma_{n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & t & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1-t & \end{bmatrix}$$

matris temsilleri yazılabilir. Buradan da görüldüğü gibi

$$T = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 1-t \end{bmatrix}$$

olmak üzere $n \times n$ boyutlu matrisler

$$\rho(\sigma_1) = \begin{bmatrix} [T] & \dots & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \\ & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ 0 & \dots & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & [T] & \\ & & 1 \\ & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ 0 & \dots & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(\sigma_{n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \dots & [T] \end{bmatrix}$$

alınabilir. $\rho(\sigma_i^{-1})$ matrisi T blok yerine T^{-1} alınması ile elde edilir. Sonuç olarak, n ipli örgü temsili yerine iki ipli bir örgü temsili almak yeterlidir.

$\rho : B_n \rightarrow GL(n; Z[t, t^{-1}])$ dönüşümünün örgü grubunun bir temsili olduğunu görmek kolaydır. Alexander polinomunu hesaplamak için bu temsil kullanılabilir.

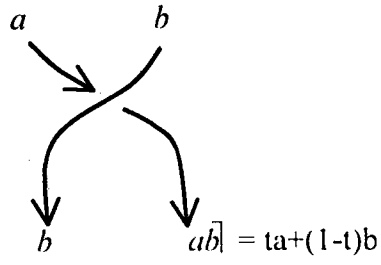
5.1. (2, n) - İpli Örgü Grubu İçin Alexander Kristali

5.1.1. Önerme. $\omega \in B_n$ n - ipli Artin örgü grubunun bir elemanı olsun. $\rho(\omega) \in GL(n; Z[t, t^{-1}])$ temsili altında ω yı temsil eden matrisi gösterebiliriz. $A(t) = \rho(\omega) - I$ olsun. Burada I , $n \times n$ özdeşlik matrisidir. Bu durumda $A(t)$, ω örgüsünün kapanışı ile elde edilen $\bar{\omega}$ halkası için Alexander matrisidir.

5.1.2. Hatırlatma. Bu önerme kasteder ki $K = \bar{\omega}$ için $\Delta_k(t)$, $A(t)$ nin bütün $(n-1) \times (n-1)$ minörleri ile doğurulan idealin doğuraylarıdır [9]. Bu şart altında $\Delta_k(t)$, t ' nin kuvvet ve işaret farkıyla, $A(t)$ nin herhangi bir $(n-1) \times (n-1)$ minörüne eşittir. $\Delta_k(t) \doteq \text{Det}(\Lambda^l(t))$ ile yazılabilir. Burada böyle bir minörü ve \doteq sembolü, $\pm t^l$ şeklindeki bir çarpan farkıyla eşitliği gösterir ($l \in Z$).

Önermenin ispatı ihmal edildi. Fakat bu $A(t) - I$ nin M içinde yazılan bağıntılar formunda olduğu ifadesine denktir. Bu ifade örgü kapanışından gelmektedir (Kristal için tanımlandığı gibi).

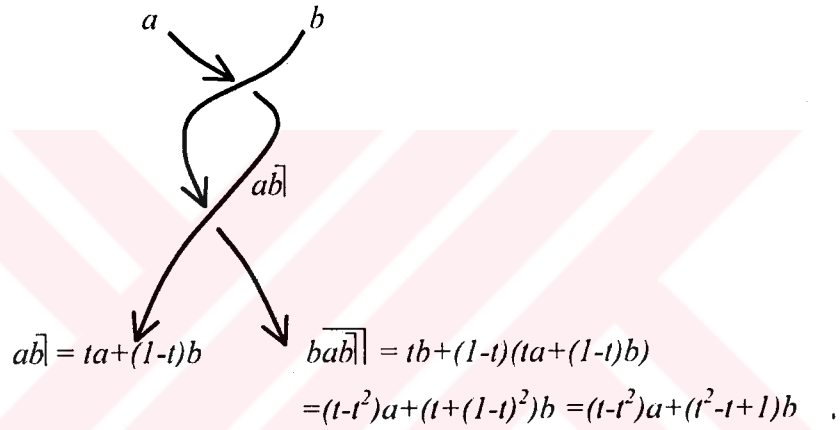
5.1.3. Örnek. σ_1 , (2, 1) - ipli bir örgü temsili olsun. $T(a) = b$ ve $T(b) = ab$ ile tanımlansın.



bu durumda bu dönüşüme karşılık gelen matris

$$\rho(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & (1-t) \end{bmatrix}$$

olur. σ_1 , örgüsü kendisi ile çarpılırsa (2, 2) – ipli σ_2 örgüsü elde edilir.



Böylece σ_2 için

$$\rho(\sigma_2) = \begin{bmatrix} t & t-t^2 \\ (1-t) & t^2-t+1 \end{bmatrix}$$

matris temsili elde edilir. Bu matris aşağıdaki gibi $\rho(\sigma_1^2) = \rho(\sigma_1)\rho(\sigma_1) = \rho(\sigma_1)^2$ çarpımından da elde edilir.

$$\rho(\sigma_1^2) = \rho(\sigma_1)^2 = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & (1-t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & (1-t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & t-t^2 \\ (1-t) & t^2-t+1 \end{bmatrix}$$

$\sigma_2 = \sigma_1^2$ örgüsünün kapatılması, 2 - bileşenli bir halkayı verir. Böylece bu halka için aşağıdaki bağıntılar yazılabilir.



$$a = \overline{ab} = ta + (1-t)b$$

$$b = \overline{bab} = (t-t^2)a + (t^2-t+1)b$$

Bu bağıntılardan $A(t) = \rho(\omega) - I$ matrisi ($\omega = \sigma_1^2$)

$$A(t) = \begin{bmatrix} t-1 & t-t^2 \\ 1-t & t^2-t \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Dolayısıyla 1×1 minörleri $\Delta_{\overline{\omega}} \doteq t-1$ olur. Böylece iki bileşenli $K = \overline{\omega}$ halkasının Alexander polinomu $\Delta_K(t) \doteq t-1$ olarak yazılır.

Örneğe devam edilirse, yani $K = \overline{\sigma_1^3}$ alınırsa buradan

$$\rho(\sigma_1^3) = \rho(\sigma_1)^3 = \begin{bmatrix} t & t-t^2 \\ (1-t) & t^2-t+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 1-t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t-t^2 & t^2+(1-t)(t-t^2) \\ t^2-t+1 & t(1-t)+(t^2-t+1)(1-t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-t^2 & t-t^2+t^3 \\ t^2-t+1 & t^2-t^3-t+1 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece $A_K(t) = \rho(\sigma_1)^3 - I = \begin{bmatrix} t - t^2 - 1 & t - t^2 + t^3 \\ t^2 - t + 1 & t^2 - t^3 - t \end{bmatrix}$ olur. Dolayısıyla

daha önceki gibi $\Delta_K(t) \doteq t^2 - t + 1$ olur. Bu yonca yaprağı düğümünün Alexander polinomudur.

Bu şekilde örneğe devam edilirse $K = \overline{\sigma_1^4}$ için

$$\rho(\sigma_1^4) = \rho(\sigma_1)^4 = \begin{bmatrix} t^2 + t(1-t)^2 & t^2(1-t) + t(1-t)(t + (1-t)^2) \\ t(1-t) + (t + (1-t)^2)(1-t) & t(1-t)^2 + (t + (1-t)^2)^2 \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$A_K(t) = \rho(\sigma_1^4) - I = \begin{bmatrix} t^2 + (1-t)^2 - 1 & t^2(1-t) + t(1-t)(t + (1-t)^2) \\ t(1-t) + (t + (1-t)^2)(1-t) & t(1-t)^2 + (t + (1-t)^2)^2 - 1 \end{bmatrix}$$

olur. Dolayısıyla $\Delta_K(t) \doteq t^3 - t^2 + t - 1$ olur. Bu iki bileşenli 4 - geçitli halkanın Alexander polinomudur.

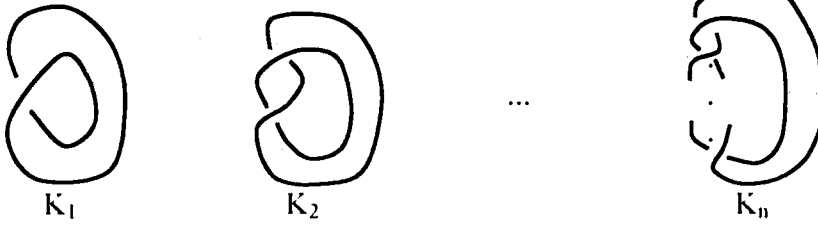
Bu örneğe devam edilirse aşağıdaki sonuca varılır:

5.1.4. Teorem. K_n , $(2, n)$ - tor halkasını gösterebilir. Bu durumda K_n halkasının Alexander polinomu $n = \{1, 2, \dots, m\}$ olmak üzere

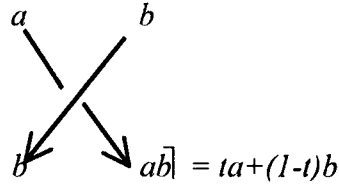
$$\Delta_{K_n}(t) \doteq \begin{cases} 1 & , n = 1 \\ t^{n-1} - \Delta_{K_{n-1}} & , n > 1 \end{cases}$$

olur.

5.1.5. İspat. Aşağıdaki gibi basit bir tüme varımdan çıkar.



$n = 1$ için



alınsın. $A(t) = \rho(\omega) - I$ eşitliğinden

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 1-t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & t \\ 1 & -t \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece $\Delta_{K_1}(t) \doteq 1$ bulunur.

Şimdi $\Delta_{K_n}(t) \doteq t^{n-1} - \Delta_{K_{n-1}}(t)$ eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

$\Delta_{K_1}(t) \doteq 1$ olduğu göz önüne alınırsa

$$n=2 \text{ için } \Delta_{K_2}(t) \doteq t - 1$$

$$n=3 \text{ için } \Delta_{K_3}(t) \doteq t^2 - t + 1$$

$$n=4 \text{ için } \Delta_{K_4}(t) \doteq t^3 - t^2 + t - 1$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse

$$\Delta_{K_n}(t) \doteq t^{n-1} - \Delta_{K_{n-1}}(t)$$

olduğu çıkar.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, düğümün önemli invaryantlarından biri olan esas grubu içeren düğüm kristali kavramı tanıtıldı. Modül kristali ve Alexander kristali modelleri verildi. Alexander kristali modeli ile düğümün Alexander polinomu hesaplandı.

Alexander kristal modeli, örgü gruplarına genişletilerek $(2, n)$ – tor düğümlerinin Alexander polinomu için bir formül verildi.

Aynı yöntemle (m, n) – tor düğümlerinin, burulmalı düğümlerin, Türk saadet düğümlerinin Alexander polinomları için bir formül verilebilir.

Ayrıca kristal kavramı örgü uzayları teorisine taşınarak, düğümün örtü uzaylarının homoloji gruplarının kolayca hesaplanmasına yardımcı olup olmadığı araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- [1]. Alexander, J.W., Topological Invariants of Knots and Links, Trans Amer. Math. Soc. 30, 1928.
- [2]. Altın, Y., Çoban Düğümleri ve Bazı Örtü Uzayları, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 1979.
- [3]. Altıntaş, İ., Üç Boyutlu Manifoldların Yapısı Üzerine, Doktora Tezi, Yüzüncü Yıl Üniv.. Van, 1993.
- [4]. Altıntaş, İ., On Groups and the Surgery Manifolds of Same Knots I, Bulletin of Pure and Applied Sciences, Math. & Stat., Vol. 17-E, 1998
- [5]. Bozhüyük, M. E., Genel Topolojiye Giriş, Atatürk Üniv. Yay. No: 610, Atatürk Üniv. Basımevi Erzurum, 1984
- [6]. Burde, G. and Zieschang, H., Knots, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1985.
- [7]. Fox, R.H., A Quick Trip Through Knot Theory, Topology of 3-Manifolds, Proc. Top. Ins. Prentice Hall, Englewood-Cliffs N.J., 1962.
- [8]. Fox, R. H. and Crowell, R. H., Introduction to Knot Theory, Blaisdell Pub. Com. New York, 1965.
- [9]. Joyce, D., A Classifying Invariant of Knots, The Knot Quandle, J. Pure Appl. Alg., 23, 1976.
- [10]. Kauffman, L. H., On Knots, Annals of Mathematics Studies Number 115, Princeton University Press, 1987.
- [11]. Kauffman, L. H., An Invariant of Regular Isotopy, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 318, No: 2, 1990.
- [12]. Kauffman, L. H., Knots and Physics, World Scientific Pub., 1991.

- [13]. Kauffmann, L. H. and Baadhio A., Quantum Topology, World Scientific Publ., 1993.
- [14]. Rolfsen, D., Knots and Links. Mathematics Lectures Series 7, Boston, 1976.
- [15]. Trace, B., On the Reidemeister Moves of a Classical Knot, Amer. Math. Soc., Vol. 89, No.4, 1983.
- [16]. Whitney, H., On Regular Closed Curves in The Plane, Comp. Math. 4, 1937.

