

97533

NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUANTUM TOPOLOJİYE BİR GİRİŞ

SEHER MANDACI

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

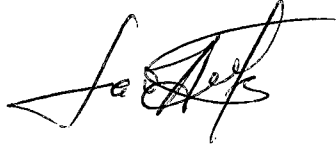
Mayıs 2000

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne;

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gabil ALIYEV



Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV



Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ



Üye : Yrd. Doç. Dr. Ahmet CİHANGİR

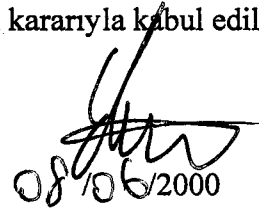


Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdülkadir DOĞAN



ONAY:

Bu tez, 02/06/2000 tarihinde, Enstitü Yöneti Kurulu'nca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun kararıyla kabul edilmiştir.



08/06/2000

Prof. Dr. Emine Erman KARA
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET**KUANTUM TOPOLOJİYE BİR GİRİŞ**

MANDACI, Seher

Niğde Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

Mayıs 2000, 64 sayfa

Bu çalışma, Kuantum topolojisine bir kısa giriştir. Burada kuantum mekaniği ile topoloji arasındaki bazı ilişkiler incelendi.

Önce Kuantum mekaniğinin bazı temel prensiplerinden hareketle, topoloji ile kuantum mekaniğinin en kolay ilişkisi olan Dirac'ın ip hilesi ve küresel ayrışım verildi.

Yine Kuantum mekaniğinin temel prensiplerinden olan genlik kavramı Dirac parantezleri yoluyla açıklandı ve çemberin genliği verildi. Jordan eğri teoremine göre düzlemde her basit kapalı eğri bir çembere izotop olduğundan çemberin genliği geliştirilerek topolojik genliğin varlığı gösterildi. Bu topolojik genlik daha ileriye, düğüm teorisine taşındı.

Son olarak, geliştirilmiş genlik yapısının, düğüm teorisinin önemli invariantlarından olan düğümün parantez polinomlarının ve Jones polinomlarının bulunması için bir model teşkil ettiği görüldü. Böylece fiziğin topoloji ile detaylı bir ilişkisi olduğu ortaya çıkmış oldu.

Anahtar Sözcükler: Topolojik Genlik, Düğüm Genlikleri, Düğümlerin Parantez Polinomları, Jones Polinomları.

ABSTRACT
AN INTRODUCTION TO QUANTUM TOPOLOGY

MANDACI, Seher

Niğde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: PhD. İsmet ALTINTAŞ

May 2000, 64 pages

This study is a short introduction to Quantum Topology. Here, some relations between quantum mechanics and topology have been examined.

Firstly, by some of the fundamental principals of quantum mechanics, Dirac's string trick which is the earliest relation between topology and quantum mechanics and the spherical digression have been given.

The amplitude concept which is also a fundamental principal of quantum mechanics, has been explained by Dirac brackets, and the amplitude of a circle has been given. As every simple closed curve in the plane is isotop to a circle according to Jordan's curve theorem, the existence of the topological amplitude has been shown by generalizing the amplitude of circle. This topological amplitude has been carried to forward, to knot theory.

Finally, it is seen that the generalized amplitude construction is forming a model to find the bracket polynomials which are one of the most important invariants of knot theory and Jones Polynomials of a knot. Thus, it came out that there is a relation between topology and physics.

Key Words: Topological Amplitude, Knot Amplitudes, Bracket Polynomial of Knot, Jones Polynomials

ÖNSÖZ

Düğüm Teorisi, matematiğin önemli dallarından biri olan topolojinin en önemli konularındandır. 19. Yüzyılın ilk yarısında başlayan düğüm teorisi ile ilgili çalışmalar hızla devam etmektedir. Ancak düğüm ve halkaları sınıflandırma problemi tamamen çözülmüş değildir.

Düğüm teorisinin topolojide olduğu kadar, cebirsel geometride, homoloji ve homotopi teorisinde ve örtü uzayları teorisinde oldukça büyük rolü vardır. Son zamanlarda görüldü ki, düğüm teorisinin kuantum fiziği ile de yakından ilişkisi vardır. Kuantum mekaniğinin bazı temel prensipleri genelleştirilerek düğüm teorisine taşınmış, böylece düğüm teorisinin problemleri için yeni çözüm yöntemleri geliştirilmiştir.



TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana her tŸrlŸ kolaylığı sağlayan ve yardımlarını esirgemeyen Niğe Ÿniversitesi, Fen Edebiyat FakŸltesi, Matematik BŸlŸmŸ BaŐkanı sayın hocam Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ'a, Őđretim Ÿyeleri Prof Dr. Gabil ALİYEYEV ve Prof Dr. Mammad MUSTAFAYEV'e teŐekkŸrlerimi arz ederim.

Ayrıca, tez çalıŐmalarım sırasında manevi desteklerini esirgemeyen Matematik BŸlŸmŸnŸn diğer Őđretim Ÿyesi ve elemanlarına teŐekkŸr ederim.

Seher MANDACI



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	viii
BÖLÜM I. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM II. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1. Dügüm ve Halkalar.....	3
2.2. Örgüler.....	9
2.3. Durumlar ve Parantez Polinomları.....	14
2.4. Lie Cebri.....	20
BÖLÜM III. KUANTUM MEKANİĞİNİN BAZI	
TEMEL PRENSİPLERİ.....	26
3.1. De Broglie Denklemleri.....	26
3.2. Dalga Paketleri.....	26
3.3. Schrodinger Denklemleri.....	27
3.4. Rotasyonlar ve Simetri.....	29
3.5. Temsiller.....	30
3.6. Dirac Parantezleri.....	31
BÖLÜM IV. KUANTUM MEKANİĞİ ve TOPOLOJİ.....	33
4.1. Dirac'ın İp Hilesi.....	33

4.2. Küresel Ayrışım.....	34
4.3. Çemberin Genliği.....	36
4.4. Topolojik Genlik.....	37
4.5. Düğüm Genlikleri.....	40
BÖLÜM V. PARANTEZ POLİNOMLARI ve NORMALİZE EDİLMİŞ POLİNOMLAR.....	45
BÖLÜM VI. JONES POLİNOMU ve GENELLEŞTİRMESİ.....	51
SONUÇ VE ÖNERİLER.....	61
KAYNAKLAR.....	62



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Bazı düğümlerin normal diyagramları	5
Şekil 2.2. Reidemeister hareketleri.....	6
Şekil 2.3. Sekiz şekilli düğüm.....	6
Şekil 2.4. Yonca yaprağı düğümünün doğurayları.....	9
Şekil 2.5. Bir örgü temsili.....	10
Şekil 2.6. Örgü ve kapanışı.....	10
Şekil 2.7. Örgü grubunun doğurayları.....	11
Şekil 2.8. İki örgünün çarpımı.....	11
Şekil 2.9. Geometrik Markov hareketi.....	13
Şekil 2.10. Kavşağın durumları.....	14
Şekil 2.11. Durumlara ayırma işlemi.....	15
Şekil 2.12. Bölgelerin belirlenmesi.....	15
Şekil 2.13. Yeniden yapılandırma.....	15
Şekil 2.14. Yonca yaprağı düğümünün durumları.....	16
Şekil 2.15. Bir duruma göre yeniden yapılandırma.....	17
Şekil 4.1. Kemer burulmaları.....	33
Şekil 4.2. Bir kuaternyon örneği.....	35
Şekil 4.3. Çember.....	36
Şekil 4.4. İki parçacığın yaradılış ve yokoluşu.....	37
Şekil 4.5. Düzlemde bir basit kapalı eğri.....	38
Şekil 5.1. Whitehead halkası.....	49

BÖLÜM I

GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Düğümle ilgili çalışmalar 19. yüzyılda başlamıştır. 1833 yılında Alman matematikçi Gauss ile başlayan düğüm teorisi ve 3-boyutlu manifoldlarla ilgili çalışmalar gelişerek devam etmektedir. Düğüm ve halka teorisi ile ilgili çalışmaların tamamına yakını; düğüm ve halka invariantlarını bulma, bu invariantlara göre düğüm ve halkayı sınıflandırma problemi ile ilgilidir. Şimdiye kadar düğümün önemli invariantları bulunmuştur. Bunlardan en önemlileri düğüm grubu ve Alexander polinomudur. Düğüm grubunu hesaplamak için Dehn ve Wirtinger tarafından ortaya konulmuş iki yöntem vardır [3,9]. Bu yöntemler kullanılarak bazı sınıflandırmalar yapılmıştır. Mesela, Tor düğümleri, düğüm gruplarına göre tamamen sınıflandırılmıştır [25]. 1928 yılında Alexander, düğümün her bir kavşağı için bir denklem yazdı. Böylece bütün kavşaklar üzerinden elde ettiği denklemin katsayılar matrisinin determinantının bir Laurent polinomu olduğunu gördü [1]. Alexander polinomu, birkaç istisna hariç, düğüm tipini belirleyen önemli bir invarianttır. Bu şekilde devam eden düğüm ile ilgili çalışmalar 1962-1972 yılları arasında Fox'un yaptığı çalışmalar ile yeni bir ivme kazandı. Fox, 1965 yılında yazdığı bir kitapta [15], düğüm grubunun bağıntıları üzerinden, "serbest türev" adını verdiği yeni bir kavram geliştirdi. Serbest türevden yararlanarak Alexander polinomunun hesaplanması için yeni bir yöntem verdi. Ayrıca düğümlerin dallanmış örtü uzaylarının birinci homotopi ve homoloji gruplarını hesaplayan bir algoritma geliştirdi [15]. Birman [5] ve Hilden [16] 1976 yılında birbirinden bağımsız olarak düğümün örtü uzayının yaprak sayısı ile halkanın köprü sayısı arasındaki bağıntılar hakkında bazı bilgiler verdiler. Hilden ve Montesinos; düğümün dallanmış örtü uzayları üzerine çeşitli çalışmalar yaptılar ve 1976'da gösterdiler ki;

Her kapalı yönlendirilebilir 3-boyutlu manifold, 3-boyutlu kürenin, dallanma kümesi bir düğüm olan, bir irregüler 3-katlı dallanmış örtü uzayıdır [16,24].

Bozhüyük [6,7,8], (3,5)-Türk başı düğümünün, (3,4)-Türk başı düğümünün ve (3,2)-Türk başı düğümünün 3-katlı örtü uzaylarını tamamen sınıflandırdı. Bu çalışmalara paralel olarak başta Artin ve Morton olmak üzere düğümler üzerine çalışan birçok bilim adamı, düğümün örgü temsilleri, kesme-yapıştırma manifoldları v.s. üzerine birçok eser verdiler. 1976 yılında Joye, düğüm teorisine modern bir yaklaşım kazandırmak amacıyla düğüm teorisinin bazı kavramlarını fizik prensipleriyle açıklamaya çalıştı [18]. Bu yeni yaklaşım çok ilgi gördü. Günümüzde başta Kauffman [23] olmak üzere bir çok bilim adamı düğüm ve fizik arasındaki ilişkiyi incelemektedirler.

Bu tez, giriş bölümü dahil altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılan düğüm teorisi ve Lie cebirinin bazı temel kavramlarından bahsedildi. Üçüncü bölümde, kuantum mekaniğinin bazı temel prensipleri özet halinde verildi. Dördüncü bölümde, topoloji ile fiziğin bir ilişkisi olduğunun ilk ipucu olan Dirac'ın ip hilesi kısaca anlatıldı ve bazı örnekler verildi. Dirac notasyonu yardımıyla çemberin genliği tanıtıldı ve bu genlik topolojik genliğe genişletildi. Bu genlik için uygun bir matris alınarak hesaplandı. Böylece topolojik genliğin varlığı gösterildi. Bu genlik daha ileriye, düğüm teorisine taşınarak yonca yaprağı düğümünün genliğinin bir matris temsili verildi. Sonuç olarak düğümün bir kavşağı üzerinde alınan genlik değeri ile çemberin genlik değeri (ilmek değeri) birlikte kullanılarak, düğüm parantez polinomunu hesaplamak için bir algoritma olarak ele alındı. Beşinci bölümde, bu parantez polinomları normalleştirildi. Son bölümde ise, verilen Jones polinomlarının normalleştirilmiş parantez polinomu ile ilişkisi ispat edildi ve Jones polinomlarının bazı genelleştirmelerinden kısaca bahsedildi.

BÖLÜM II

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, Düğüm Teorisinin ve Lie cebirinin bazı temel kavramlarından kısaca bahsedilecektir.

2.1. Düğüm ve Halkalar

2.1.1. Yerleştirme. X ve Y iki Hausdorff uzayı olsun. Eğer $f : X \rightarrow f(X)$ bir homeomorfizm ise $f : X \rightarrow Y$ dönüşümüne bir *yerleştirme* denir [3].

2.1.2. Düğüm ve Halka. $S^1 = \{(x,y) : x^2+y^2 = 1; x,y \in \mathbb{R}\}$ birim çember olsun. S^1 in \mathbb{R}^3 veya $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ içine yerleşmesine bir *düğüm* denir. $n \in \mathbb{N}$ için n tane düğümün ayrık birleşimine bir *halka* denir [9,14,25].

2.1.3. Poligonal düğüm. K , S^3 içinde bir düğüm olsun. Eğer K sonlu sayıda doğru parçalarından ibaret ise, K ya bir *poligonal düğüm* denir [9,14].

2.1.4. Denk düğümler. K ve L , S^3 içinde yönlendirilmiş iki düğüm olsun. Eğer $h(K) = L$ olacak şekilde yönlendirmeyi koruyan bir $h : S^3 \rightarrow S^3$ homeomorfizmi varsa K düğümü L düğümüne *denktir* denir [25].

2.1.5. Not. İki düğümün denkliği tanımı; S^3 içindeki düğümler kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı verir. Bu bağıntı, söz konusu kümeyi ayrık denklik sınıflarına ayırır. Her denklik sınıfına bir *düğüm tipi* denir. Denk iki düğüm, aynı düğüm tipindedir.

2.1.6. Tanım. Yönlendirilmiş bir üçgen (veya bir çember) ile aynı tipte olan bir düğüme *düğümlememiş düğüm* denir [9,25].

2.1.7. Tanım. $p : S^3 \rightarrow S^3$, $p(x, y, z) = (x, y, 0)$ ile tanımlanan fonksiyona *izdüşüm fonksiyonu* denir.

Eğer K , S^3 içinde bir düğüm ise, K nın p izdüşüm fonksiyonu altındaki resmi, $p(K)$, K nın xoy-düzlemindeki izdüşümüdür. K poligonal bir düğüm ise, $p(K)$ düzlemsel bir poligondur.

2.1.8. Tanım (Geçit noktası). K , S^3 içinde bir düğüm ve p , yukarıda geçen izdüşüm fonksiyonu olsun. $a \in p(K)$ için $p^{-1}(a) \cap K$, n tane ($n > 1$) noktadan ibaret ise, a ya $p(K)$ nın bir *n-katlı noktası* denir. Eğer $n = 2$ ise, a noktasına *geçit noktası* (çift katlı nokta) denir [14].

2.1.9. Tanım. Bir geçit noktası, K ya ait tam iki noktanın resmi olup, bu iki noktadan z koordinatı daha büyük olana *üst geçit noktası* ve diğerine *alt geçit noktası* denir.

2.1.10. Tanım (Regüler pozisyon). K bir düğüm ve p izdüşüm fonksiyonu olsun. Eğer,

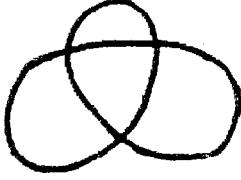
- i) $p(K)$ nın katlı noktaları sadece sonlu sayıda geçit noktası ise,
 - ii) Hiçbir geçit noktası K ya ait bir köşe noktasının p altında resmi değilse,
- $p(K)$ ya K nın *regüler izdüşümü* denir. Eğer $p(K)$ izdüşümü regüler ise, K düğümüne uzayda *regüler pozisyondadır* denir [14].

Bir düğümün regüler izdüşümüne, o düğümün *regüler diyagramı* da denir. Regüler diyagram; düğümün, uzayın yeteri kadar uzak ve uygun bir noktasından çizilen resmi gibidir [14].

2.1.11. Tanım (Normal Diyagram). Regüler pozisyonda bulunan bir K düğümü ile bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. K nın her alt geçit noktasından uzaklığı ϵ dan küçük olan noktalarının kümesi A ise, $p(K-A)$ kümesine K düğümünün *normal diyagramı* denir [9,14].

Böylece K düğümünün normal diyagramı ayırık yay parçalarından (veya doğru parçalarından) oluşur. Şekil 2.1.a, yonca yaprağı düğümünün regüler diyagramını ve

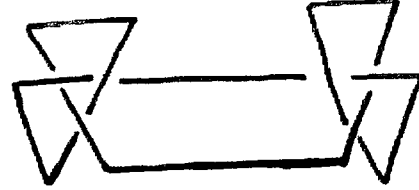
Şekil 2.1.b ve 2.1.c sırasıyla (3,2)-Türk düğümü ve kare düğümünün normal diyagramlarını göstermektedir.



Şekil 2.1.a

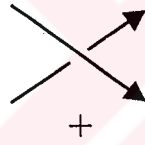


Şekil 2.1.b



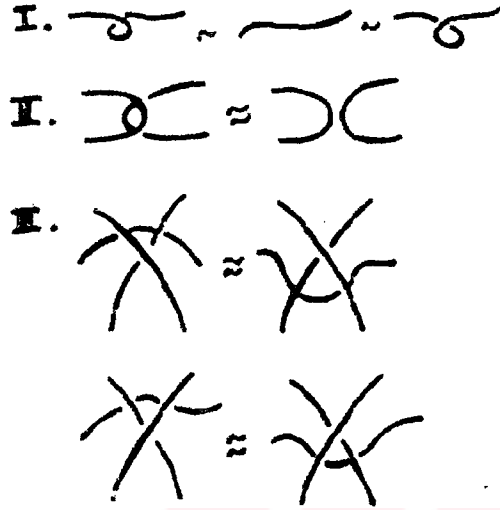
Şekil 2.1.c

2.1.12. Tanım (Yönlendirilmiş Düğüm veya Halka) . Bir düğüm diyagramı üzerinde hareket yönü belirtilirse, o düğüm *yönlendirilmiş* olur. Böylece bir düğüm diyagramından yönlendirilmiş iki düğüm diyagramı elde edilir.



2.1.13. Tanım (Ayna Görüntüsü). Bir K düğümünün, $r: S^3 \rightarrow S^3$, $r(x,y,z) = (x,y,-z)$ ile tanımlanan yansıma fonksiyonu altındaki görüntüsüne K nın *ayna görüntüsü* denir. Yansıma fonksiyonu, uzayın yönlendirmesini tersine çeviren bir homeomorfizmdir [2].

2.1.14. Reidemeister Hareketleri. [21]

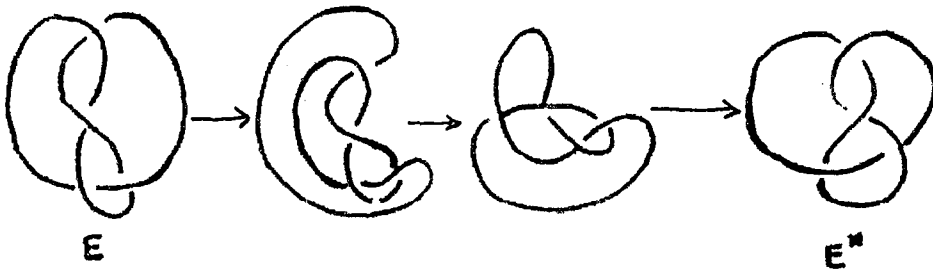


Şekil 2.2

İki poligonal düğümden biri, sonlu sayıda Reidemeister hareketiyle diğerine dönüşebilirse bu düğümler aynı tiptendir. Yani, sonlu sayıda Reidemeister hareketinin uygulanmasıyla diyagramları birbirine dönüşebilen düğümler denktirler.

O halde, Reidemeister hareketleri ile değişmeyen özellikler, düğüm tipinin özellikleridir [21].

2.1.15. Örnek. Sekiz şekilli düğüm ayna görüntüsüne denktir.



Şekil 2.3

2.1.16. Regüler izotopi. II. ve III. Reidemeister hareketleri ile doğurulan denklik bağıntısına *regüler izotopi* denir [21].

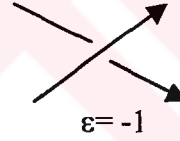
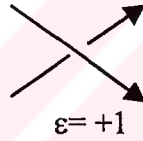
2.1.17. Kuşatan İzotopi. Reidemeister hareketlerinin üçü ile doğurulan diyagramlar üzerindeki denklik bağıntısına *kuşatan izotopi* denir [21] .

Böylece II. ve III. hareketler regüler izotopi invaryantı; I. II. III. hareketler kuşatan izotopi invaryantıdır [21] .

2.1.18. Halkalanma Sayısı. $L = \{\alpha, \beta\}$, α ve β bileşenlerinden oluşan bir halka olsun. $lk(L) = lk(\alpha, \beta)$ *halkalanma sayısı*

$$lk(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \cap \beta} \varepsilon(p)$$

formülü ile tanımlanır. Burada $\alpha \cap \beta$, α ile β geçitlerinin (kendi kendini kesme hariç) kümesini ve $\varepsilon(p)$ ise geçitin işaretini gösterir [21] .



2.1.19. Örnek. L ve L' aşağıdaki gibi yönlendirilmiş iki bileşenli halkaları gösterebiliriz:



Bu durumda $lk(L) = \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$ ve $lk(L') = -1$ olur.

Eğer L_1 ve L_2 yönlendirilmiş iki bileşenli halka diyagramları ve L_1 , L_2 ye kuşatan izotop ise, $lk(L_1) = lk(L_2)$ dir [21] .

2.1.20. Burulma Sayısı. K herhangi bir yönlendirilmiş halka diyagramı olsun. $C(K)$, K diyagramındaki geçitlerin kümesi olmak üzere K nın *burulma sayısı*

$$w(K) = \sum_{p \in C(K)} \varepsilon(p)$$

ile tanımlanır [21] .

Burada p , K nın bütün geçitleri üzerindedir ve $\varepsilon(p)$ ise geçitin işaretidir.

Dikkat edilirse, $w(K)$ nın bir regüler izotopi (II. , III.) invaryantı olduğu görülür ve

$$\begin{cases} w \left(\begin{array}{c} \text{↻} \\ \text{↻} \end{array} \right) = 1 + w \left(\begin{array}{c} \text{↻} \\ \text{↻} \end{array} \right) \\ w \left(\begin{array}{c} \text{↻} \\ \text{↻} \end{array} \right) = 1 + w \left(\begin{array}{c} \text{↻} \\ \text{↻} \end{array} \right) \\ w \left(\begin{array}{c} \text{↻} \\ \text{↻} \end{array} \right) = -1 + w \left(\begin{array}{c} \text{↻} \\ \text{↻} \end{array} \right) \\ w \left(\begin{array}{c} \text{↻} \\ \text{↻} \end{array} \right) = -1 + w \left(\begin{array}{c} \text{↻} \\ \text{↻} \end{array} \right) \end{cases}$$

olur.

2.1.21. Örnek. K yonca yaprağı düğümünü gösterebilir. K nın burulma sayısı

$$w(K) = w \left(\begin{array}{c} \text{↻} \\ \text{↻} \\ \text{↻} \end{array} \right) = +3$$

olur.

2.1.22. Düğüm Grubu. K , S^3 içinde bir düğüm olsun. S^3-K uzayının birinci homotopi grubuna, yani $G = \pi_1(S^3-K, p)$ grubuna, K *düğümünün grubu* denir.

Burada $p \in S^3-K$ noktası S^3-K içindeki kapalı eğrilerin taban noktasıdır.

Düğüm grubunu hesaplamannın Dehn ve Wirtinger'e ait iki yöntemi vardır [3,9] .

2.1.23. Örnek. K yonca yaprağı düğümünün grubunun Wirtinger yöntemi ile bulunması: Bu düğümün normal diyagramında gösterilen doğruları x, y, z olsun (Şekil 2.4). Bu durumda c_1, c_2, c_3 geçit noktalarına ait bağıntıları sırasıyla

$$x \bar{y} \bar{z} y = 1$$

$$y \bar{z} \bar{x} z = 1$$

$$z \bar{x} \bar{y} x = 1$$

dir. O halde bu düğümün grubu

$$\pi_1(S^3 - K, p) = \langle x, y, z, : x \bar{y} \bar{z} y, y \bar{z} \bar{x} z, z \bar{x} \bar{y} x \rangle$$

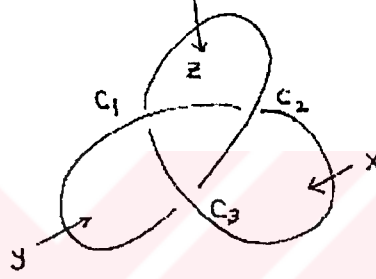
dir. Buradaki ikinci bağıntı diğer iki bağıntının sonucu olduğundan

$$\pi_1(S^3 - K, p) = \langle x, y, z, : x \bar{y} \bar{z} y, z \bar{x} \bar{y} x \rangle$$

yazılabilir. Buradan

$$\pi_1(S^3 - K, p) = \langle x, y, : x y x \bar{y} \bar{x} \bar{y} \rangle$$

bulunur.



Şekil 2.4

2.1.24. Alexander-Conway Polinomu. $\nabla_K(z)$ Alexander-Conway polinomu, $\nabla_K(z) \in Z_{[z]}$, katsayıları tamsayı olan bir Laurent polinomudur. Düğümün (veya halkanın) Alexander polinomu aşağıdaki bağıntıları sağlar [21].

i) Eğer K düğümü K' düğümünü kuşatan izotop ise

$$\nabla_K(z) = \nabla_{K'}(z)$$

ii) $\nabla \bigcirc = 1$

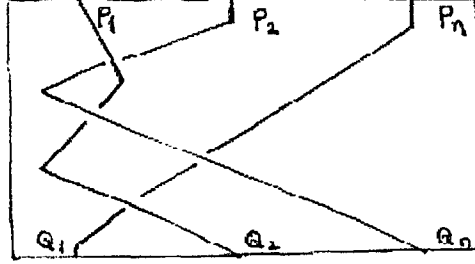
iii) $\nabla \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} - \nabla \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} = z \nabla \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}$

dır.

2.2. Örgüler

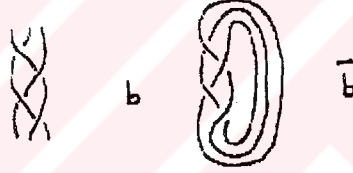
2.2.1. Örgü. R^3 uzayında bir D dikdörtgeninin karşılıklı kenarları üzerine P_i, Q_i , $i = 1, \dots, n$ noktaları eşit uzaklıkta yerleştirilsin (Şekil 2.5). f_i , P_i de başlayan ve $Q_{\rho(i)}$ de son bulan R^3 içinde n tane ayrık basit poligonal yay olsun. Burada $i \rightarrow \rho(i)$, $\{1, 2, \dots, n\}$ üzerinde bir permütasyondur. f_i lerin tam olarak aşağıya gitmesi istenir. Yani her bir f_i ; dikdörtgenin yan kenarına dik herhangi bir düzlemi en çok bir defa

keser. f_i yaylarının hepsine birden n - örgü denir ve b ile gösterilir. Dikdörtgene b nin iskeleti ve $i \rightarrow \rho(i)$ ye örgü permütasyonu denir [3,25].



Şekil 2.5

Aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi 3-ipli bir örgünün kapanışı (kapalı örgü), başlangıç noktalarının paralel iplerinin bir koleksiyonu ile bitiş noktalarını birleştirerek elde edilir [21].



Şekil 2.6

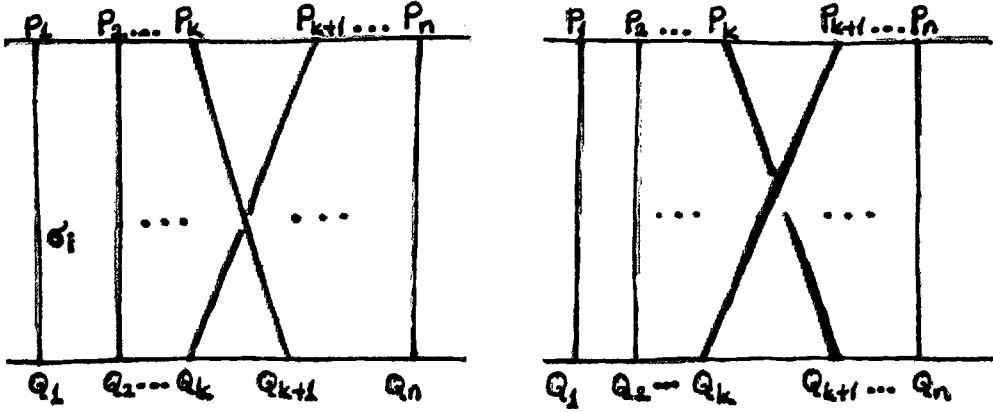
2.2.2. Teorem. Her K halkası bir kapalı örgü ile temsil edilebilir [9].

2.2.3. Örgü Grubu. n -örgülerin izotopi sınıfları bir grup teşkil eder. Bu gruba örgü grubu denir ve B_n ile gösterilir.

B_n grubu $n-1$ tane σ_i doğurayı ile doğurulabilir (Şekil 2.7). b örgüsü, σ_i , σ_i^{-1} örgü elemanlarının bir çarpımı olarak ortaya çıkar. Böylece B_n örgü grubu

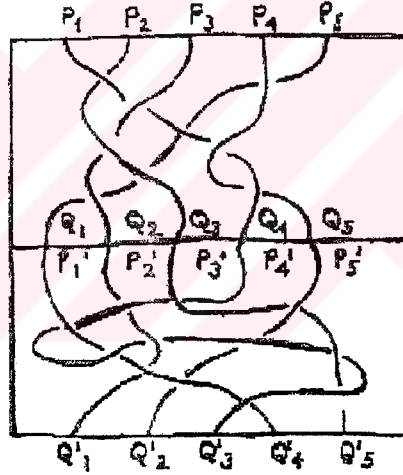
$$B_n = \left\langle \sigma_i, \dots, \sigma_{n-1} : \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_j \sigma_{i+1}^{-1} \sigma_i^{-1} \sigma_{i+1}^{-1}, 1 \leq i \leq n-2, [\sigma_i, \sigma_k], 1 \leq i \leq k-1 \leq n-2 \right\rangle$$

şeklinde temsil edilebilir [9].



Şekil 2.7

b ve b' iki örgü olsun. Bu iki örgünün birleşimi b nin Q_i bitiş noktaları ile b' nün P_i' başlangıç noktalarını özdeşleştirerek elde edilir (Şekil 2.8) [3].



Şekil 2.8

2.2.4. Teorem. B_n örgü grubundan, $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesi üzerinden S_n permütasyon grubuna bir homeomorfizm vardır [3,21].

$\pi : B_n \rightarrow S_n$ dönüşümü, örgü ile ortaya çıkan üst sıradaki noktalar ile alt sıradaki noktaların bir permütasyonu olarak tanımlanır.

Böylece, mesela

$$\pi \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ \swarrow & \nearrow & \nearrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

dir.

Burada, sağdaki notasyon $\rho(1)=3$, $\rho(2)=1$, $\rho(3)=2$ ile bir $\rho:\{1,2,3\}\rightarrow\{1,2,3\}$ permütasyonunu gösterir. Eğer bir b örgüsü için $\rho = \pi(b)$ ise, o zaman, j , i noktasında başlayan örgü ipinin alt noktası olmak üzere $\rho(i)=j$ dir.

Eğer Şekil 2.7 de $T_k : \{1,2,\dots,n\}\rightarrow\{1,2,\dots,n\}$ kabul edilirse, k ve $k+1$ geçişleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$T_k(i) = i, \quad i \neq k, k+1$$

$$T_k(k) = k+1$$

$$T_k(k+1) = k$$

Bu geçişler anlamında, S_n ,

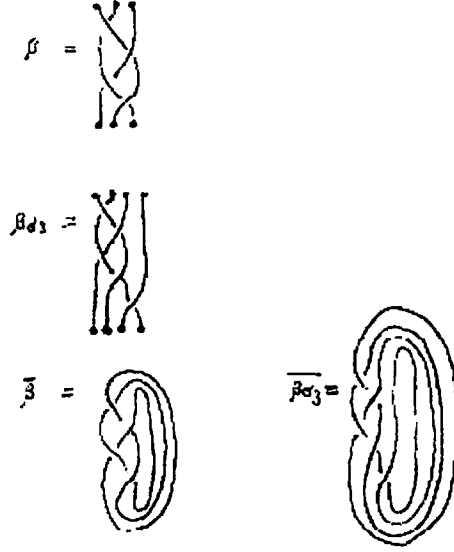
$$S_n = \langle T_1, \dots, T_{n-1} \mid T_i^2 = 1, T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \rangle$$

temsiline sahiptir.

Permütasyon grubu, B_n örgü grubunun, birime eşit bütün doğuraylarının karelerinin alınmasıyla elde edilen bölüm grubudur [21].

Örgüleri, kapanışları halkalara kuşatan izotop olacak şekilde değiştirmenin bazı kolay yolları vardır. Bunların ilki Markov hareketidir.

2.2.5. Markov Hareketi. β , B_n içinde bir örgü kelimesi (yani $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ ve terslerinden oluşan bir kelime) olsun. O zaman, β , $\beta\sigma_n$ ve $\beta\sigma_{n-1}$, örgülerinin üçü de kuşatan izotop kapanışa sahiptirler. Mesela



Şekil 2.9

Burada $\beta = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_1 \sigma_2^{-1} \in B_3$ ve $\beta \sigma_3 \in B_4$ dür.

Böylece, β , bir I. Tip Reidemeister hareketi ile $\beta \sigma_n^{\pm 1}$ den elde edilir.

Bir örgüyü aynı kapanışla yapmanın biraz daha zor bir yolu, B_n den herhangi bir g örgüsü seçmek ve $g\beta g^{-1}$ eşlenik örgüsünü almaktır. $g\beta g^{-1}$ in $\overline{g\beta g^{-1}}$ formunda kapanışı alınır, g örgüsü ve onun tersi olan g^{-1} , kapanış ipleri boyunca yer değiştirerek birbirlerini yok edebilirler.

Düğüm teorisi ile örgü teorisini bağdaştıran temel teorem aşağıda verilmiştir.

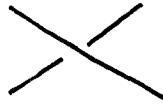
2.2.6. Markov Teoremi. $\beta_n \in B_n$ ve $\beta'_m \in B_m$, sırasıyla B_n ve B_m örgü gruplarında iki örgü olsunlar. O zaman $L = \overline{\beta_n}$ ve $L' = \overline{\beta'_m}$ halkalarının (β ve β' örgülerinin kapanışları) kuşatan izotop olmaları için gerek ve yeter şart β'_m nin β_n den

- 1) verilen bir örgü grubundan denkliklerle
- 2) verilen bir örgü grubundan eşlenik olarak (yani bir örgüyü bu örgünün eşleniği ile yer değiştirerek)

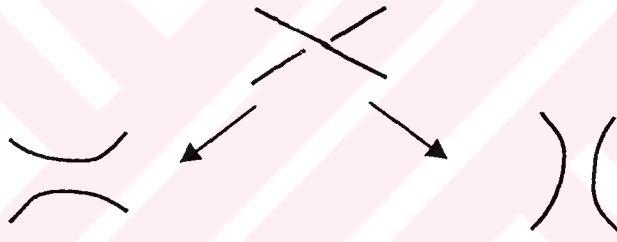
3) Markov hareketleriyle (Bir Markov hareketi $\beta \in B_n$ ile $\beta \sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$ i yer değiştirir veya bu işlemin tersi, $\beta \sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$ ile $\beta \in B_n$ i yer değiştirir; eğer β , σ_n de yer almıyorsa) dizisi ile elde edilmesidir[21].

2. 3. Durumlar ve Parantez polinomları

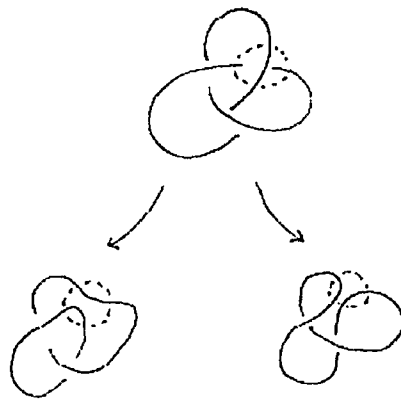
Bir halka diyagramında aşağıdaki gibi bir kavşak gözönüne alınsın:



Aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi bu kavşak iki duruma ayrılabilir.



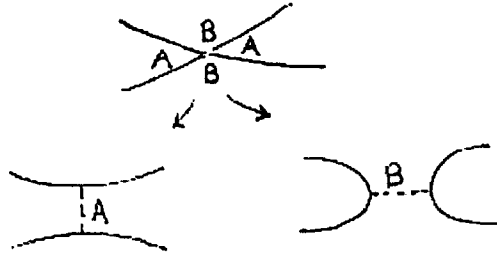
Mesela, yonca yaprağı dğmnnn bir kavşağında ayırma işlemi şu şekilde yapılır:



şekil 2.10

Bu proses tekrarlanarak, bir diyagramlar ailesi elde edilebilir.

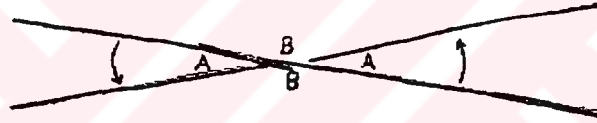
Durumlara ayırma işlemi aşağıdaki yöntemle yapılacaktır:



Şekil 2.11

Yani, bir durumun A veya B tipinde olması düzenlemeye bağlıdır. Bir A ayırımı, kavşakta A ile gösterilen bölgeleri birleştirir. A ile gösterilen bölgeler, kavşakta yürüyen bir gözlemcinin alt geçitten geçerken solunda kalan bölgedir. B bölgeleri bu gözlemciye göre sağda kalır.

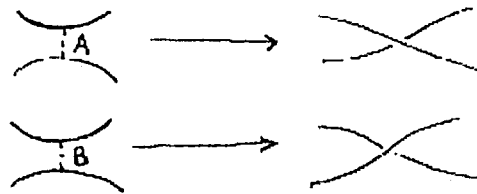
A bölgelerini belirlemenin bir başka yolu da, kavşak saatin tersi yönünde döndürüldüğünde A bölgelerinin taranmasıdır.



Şekil 2.12

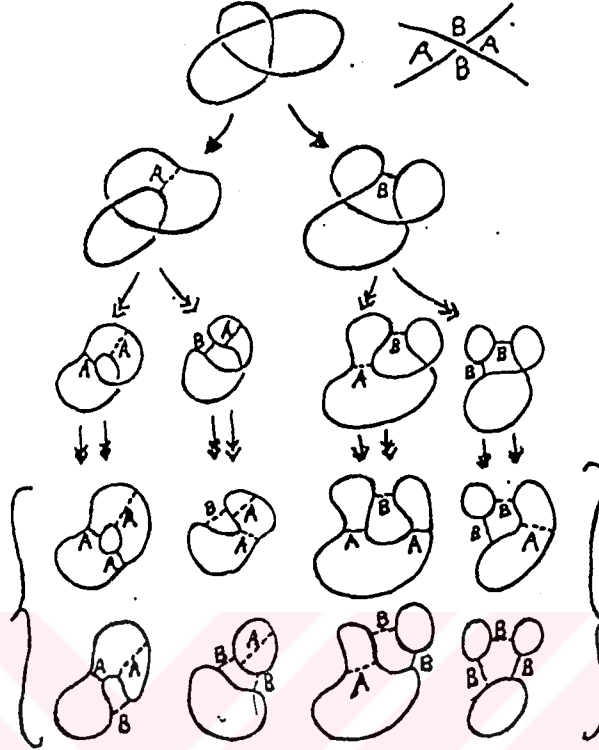
Her durumda, A veya B ile belirtilen bir birleştirme, eski kavşak haline döndürülmek üzere yeniden yapılandırılabilir.

Dolayısıyla, bu A ve B'leri izleyerek esas kavşak, herhangi bir durumundan yeniden yapılandırılabilir.



Şekil 2.13

2.3.1. Örnek. Yonca yaprağı düğümünün durumları:

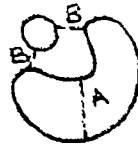


Şekil 2.14

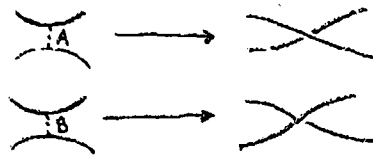
2.3.2. Tanım. 2.3.1. Örnekteki en son ayırmalara, K düğümünün durumları adı verilir. Genel olarak bir K düğümünün $C(K)$ kavşaklarının kümesinin n tane elemanı varsa, K 'nin 2^n tane durumu vardır.

Bu durumların herbirinden, yeniden yapılandırma ile K düğümü elde edilebilir.

2.3.3. Örnek. Yonca yaprağı düğümünün



durumu gözönüne alınsın. Burada



ifadeleri kullanılırsa, yeniden yapılandırma



Şekil 2.15

olur.

2.3.4. Düğüm ve Halka İnvaryantlarının Bulunması

Bir K düğümünün veya halkasının bütün durumları üzerinden ortalama alınarak düğümün invaryantları bulunacaktır. Ortalamanın özel formu şöyledir: σ , K nın bir durumu olsun. $\langle K | \sigma \rangle$, σ ya bağlı olan etiketlerin (komutatif etiketler) çarpımını gösterebilir. Böylece, mesela durumu için

$$\langle \text{Knot} | \text{Link} \rangle = A^3$$

yani $\langle K | \sigma \rangle = A^3$ olur. (Dikkat edilirse, etiketler K nın durumlarının yapısından elde edilmektedir.)

$\|\sigma\|$, σ daki ilmek sayısının bir eksiğini gösterebilir. Böylece

$$\|\sigma\| = 2 - 1 = 1$$

olur.

2.3.5. Tanım. Bir K düğümünün veya halkasının parantez polinomu

$$\langle K \rangle = \langle K \rangle (A, B, d) = \sum_{\sigma} \langle K | \sigma \rangle d^{|\sigma|}$$

formülüyle tanımlanır. Burada A , B ve d komutatif cebirsel değişkenlerdir, σ ise K nın bütün durumları üzerindedir.

2.3.6. Uyarı. Parantez durum toplamı, discrete istatistiksel mekanikte bir bölünme fonksiyonuna benzerdir [4]. Aslında, A, B ve d nin uygun seçimleri için; parantez polinomu, Potts modeli için bölünme fonksiyonunu ifade etmede kullanılabilir[21].

2.3.7. Örnek. Şekil 2.14 den görülebileceği gibi, yonca yaprağı düğümü için parantez polinomu aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\langle K \rangle = A^3 d^{2-1} + A^2 B d^{1-1} + A^2 B d^{1-1} + A B^2 d^{2-1} + A^2 B d^{1-1} + A B^2 d^{2-1} + A B^2 d^{2-1} + B^3 d^{3-1}$$

$$\langle K \rangle = A^3 d^1 + 3A^2 B d^0 + 3A B^2 d^1 + B^3 d^2$$

Bu parantez polinomu, bu haliyle bir topolojik invaryant değildir. Bunun bir topolojik invaryant olması için Reidemeister hareketleri altında nasıl davrandığı incelenmeli ve A, B ve d üzerindeki şartlar belirlenmelidir.

2.3.8. Önerme. Bir kavşağın parantez polinomu aşağıdaki eşitlikle verilir:

$$\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{---} \rangle + B \langle \text{) } \langle \text{ (} \rangle$$

İspat. Verilen bir kavşak iki şekilde ayrılabilirdiğinden, bir K diyagramının durumları, K' ve K'' durumlarının birleşimine bire bir karşılık gelir. Burada K' ve K'', K diyagramının bir kavşakta A ve B ayrılmalarının yapılmasıyla K dan elde edilmiştir. Dolayısıyla $\langle K \rangle$ nin tanımından $\langle K \rangle = A \langle K' \rangle + B \langle K'' \rangle$ yazılır. Bu önermenin ispatını tamamlar.

2.3.9. Uyarı. 2.3.8. Önermesindeki ifadede her bir küçük diyagrama bir büyük diyagramın bir parçası olarak bakılabilir. Böylece üç büyük diyagram, önermedeki eşitlik anlamında küçük diyagramlarla gösterilen lokal bölgeler hariç özdeşler. Mesela Önerme 2.3.8. in özel bir durumu

$$\langle \text{O} \rangle = A \langle \text{O} \rangle + B \langle \text{O} \rangle$$

dir. A ve B ifadeleri sırasıyla A ve B ayrılmalarını ifade ederler.

2.3.10. Uyarı. Yukarıdaki ispat $\langle K \rangle = \sum_{\sigma} \langle K | \sigma \rangle \langle \sigma \rangle$ formundaki daha genel bir paranteze uygulanabilir, burada $\langle \sigma \rangle$ herhangi bir iyi tanımlanmış durum değerlendirmesidir. $\langle \sigma \rangle = d^{||\sigma||}$ olarak alınacaktır.

2.3.11. Uyarı. Önerme 2.3.8. parantez polinomu hesaplamak için kullanılabilir. Mesela iki bileşenli halka için parantez polinomu

$$\begin{aligned}
 \langle \text{link} \rangle &= A \langle \text{link} \rangle + B \langle \text{link} \rangle \\
 &= A \{ A \langle \text{link} \rangle + B \langle \text{link} \rangle \} + B \{ A \langle \text{link} \rangle + B \langle \text{link} \rangle \} \\
 &= A^2 d^{2-1} + AB d^{1-1} + BA d^{1-1} + B^2 d^{2-1} \\
 &= A^2 d^1 + 2AB d^0 + B^2 d^1
 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

2.3.12. Önerme.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \langle \text{link} \rangle &= AB \langle \text{link} \rangle + AB \langle \text{link} \rangle + (A^2 + B^2) \langle \text{link} \rangle \\
 \text{b) } \langle \text{link} \rangle &= (Ad + B) \langle \text{link} \rangle \\
 \langle \text{link} \rangle &= (A + Bd) \langle \text{link} \rangle
 \end{aligned}$$

İspat. (a)

$$\begin{aligned}
 \langle \text{link} \rangle &= A \langle \text{link} \rangle + B \langle \text{link} \rangle \\
 &= A \{ A \langle \text{link} \rangle + B \langle \text{link} \rangle \} + B \{ A \langle \text{link} \rangle + B \langle \text{link} \rangle \} \\
 &= AB \langle \text{link} \rangle + AB \langle \text{link} \rangle + (A^2 + B^2) \langle \text{link} \rangle.
 \end{aligned}$$

(b) şıkkı da benzer şekilde ispatlanır. Dikkat edilirse, $\langle \bigcirc \rangle = d\langle \sim \rangle$ ve genel olarak, $\langle OK \rangle = d\langle K \rangle$ dir. Burada OK, K diyagramına ayrı bir çemberin eklenmesini ifade eder. Böylece

$$\langle \bigcirc \bigcirc \rangle = d\langle \bigcirc \rangle$$

yazılır.

2.4. Lie Cebri

Bir *Lie cebiri*, üzerinde,

$$g \times g \rightarrow g$$

$$x, y \rightarrow [xy]$$

çarpımı tanımlanmış olan F alanı üzerinde bir g vektör uzayıdır [10]. Çarpım aşağıdaki aksiyomları sağlar.

i) $[xy]$, x ve y içinde lineerdir,

ii) $\forall x \in g$ için, $[xx] = 0$

iii) $\forall x, y, z \in g$ için, $[(xy)z] + [(yz)x] + [(zx)y] = 0$

(iii) özelliğine Jacobi özdeşliği denir.

Çarpma işleminin birleşmeli olmadığına dikkat edilmelidir, yani, genel olarak $[[xy]z] = [x[yz]]$ doğru değildir. Bundan dolayı elemanların çarpımlarına Lie parantezlerini dahil etmek esastır.

Her bir $x, y \in g$ eleman çifti için

$$[x+y, x+y] = [xx] + [xy] + [yx] + [yy]$$

ve

$$[xx] = 0, [yy] = 0, [x+y, x+y] = 0$$

olduğu aşikârdır.

Buradan bütün $x, y \in g$ için $[yx] = -[xy]$ olduğu çıkar. Böylece bir Lie cebirindeki çarpma ters değişmelidir.

Lie cebiri, aşağıdaki metod ile birleşmeli cebirden elde edilebilir:

A bir birleşmeli cebir olsun, yani, bilinear birleşmeli xy çarpımlı vektör uzayı olsun. Bu durumda A nın üzerindeki çarpımı tekrar tanımlayarak, bir $[A]$ Lie cebiri elde edilebilir.

2.4.1 Örnek. $[xy] = xy - yx$ diye tanımlansın. $[xy]$ nin x de ve y de lineer olduğu ve $[xx] = 0$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} [[xy]z] &= (xy - yx)z - z(xy - yx) \\ &= xyz - yxz - zxy + zyx \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} & [[xy]z] + [[yz]x] + [[zx]y] \\ &= xyz - yxz - zxy + zyx + yzx - zyx - xyz + xzy + zxy - xzy - yzx + yxz \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğu çıkar, böylece Jacobi özdeşliği sağlanır.

2.4.2. Tanımlar. g_1 ve g_2 , F üzerinde iki Lie cebiri olsun. Lie cebirinin bir *homeomorfizmi*, bir $\theta: g_1 \rightarrow g_2$ lineer dönüşümüdür, öyle ki $\forall x, y \in g_1$ için $\theta [xy] = [\theta x, \theta y]$ dir.

Eğer θ bijective (1-1 örten) homeomorfizm ise, θ , Lie cebirinin bir *izomorfizmidir*.

g bir Lie cebiri ve h, k ; g nin alt uzayları olsun. $[hk]$ çarpımı, $x \in h, y \in k$ için $[xy]$ nin çarpımları tarafından gerilen alt uzay olarak tanımlanır. Böylece $[hk]$ nın her bir

elemanı $x_i \in h$, $y_i \in k$ ile bir $x_1 y_1 + \dots + x_r y_r$ sonlu toplamıdır. $[hk] = [kh]$ olduğu dikkate alındı, yani, alt uzayların çarpımı değişmelidir. Bu, elemanların çarpımlarının ters değişmeli olması gerçeğinden çıkar. Böylece eğer $x \in h$, $y \in k$ ise, $[yx] = -[xy] \in [hk]$ olur.

g 'nin bir *alt cebiri*, $[hh] \subset h$ olacak şekilde, g 'nin bir h alt uzayıdır.

g 'nin bir *ideali*, $[hg] \subset h$ 'da olacak şekilde, g 'nin bir h alt uzayıdır.

$[hg] = [gh]$ olduğundan, Lie cebirinde, sol idealler ve sağ idealler arasında bir farklılık olmadığı görülür. Her ideal iki taraflıdır.

h , g Lie cebirinin bir ideali olsun. g/h , $x \in g$ için $h + x$ kosetlerinin vektör uzayı olsun. $h+x$, $y \in h$ için $y+x$ formundaki bütün elemanlardan ibarettir. İddia edilen, g/h (g nin h 'a göre faktör çarpımı) $[h+x, h+y] = h+[xy]$ Lie çarpımı tanımlamasıyla bir Lie cebri haline getirilebileceğidir.

Bu işlemin iyi tanımlanıp tanımlanmadığı, yani $h + x = h + x'$ ve $h + y = h + y'$ ise bu durumda $h + [xy] = h + [x'y']$ olup olmadığı kontrol edilmelidir. Bu h ın, g nin ideali olması gerçeğinden çıkar. Dolayısıyla aşağıdaki ifade elde edilir:

$$x' = a+x, y' = b+y ; \forall a, b \in h \text{ için.}$$

Böylece $[ab]$, $[ay]$, $[xb]$ 'nin hepsi h 'da yer aldığından

$$[x'y'] = [ab] + [ay] + [xb] + [xy] \in h+[xy]$$

olur.

Bu ise istenildiği şekilde $h+[x'y'] = h+[xy]$ olduğunu verir.

Bir Lie cebirinin bir faktör cebirle bağlantılı olarak bir $g \xrightarrow{\theta} g/h$ doğal homeomorfizmi vardır. θ , $\theta(x) = h+x$ ile tanımlıdır. Tersine, Lie cebirinin $\theta : g_1 \rightarrow g_2$ örten homeomorfizmi verildiğinde, θ nın k çekirdeği g_1 in bir idealidir ve g_1/k faktör cebri g_2 ye izomorftur.

F alanı üzerindeki bütün $n \times n$ matrislerin kümesi $[AB] = AB - BA$ Lie çarpımı altında bir Lie cebiri yapılabilir. Bu Lie cebirine, F alanı üzerinde *n. dereceden genel lineer Lie cebiri* denir ve $\mathfrak{gl}_n(F)$ ile gösterilir.

2.4.3. Tanım. \mathfrak{g} , F üzerinde bir Lie cebiri olsun. Bir $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}_n(F)$, homeomorfizmine *g nin bir gösterimi* denir. [10]

ρ ve ρ' , \mathfrak{g} 'nin n-inci dereceden iki gösterimi olsun. Eğer $\forall x \in \mathfrak{g}$ için $\rho'(x) = T^{-1} \rho(x) T$ olacak şekilde F üzerinde singüler olmayan $n \times n$ boyutlu bir T matrisi varsa ρ ve ρ' -ye birbirine *denk gösterimlerdir* denir.

2.4.4. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ Lie Cebirleri.

Şimdi $F = \mathbb{C}$ olsun. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, izi sıfır olan $n \times n$ tipinde matrislerin kümesi olsun. $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ nin idealidir. Çünkü $A \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ olması durumunda herhangi iki $n \times n$ boyutlu matris için $\text{iz } AB = \text{iz } BA$ olduğundan aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\text{iz}[AB] = \text{iz}(AB - BA) = \text{iz } AB - \text{iz } BA = 0$$

Dolayısıyla $[AB] \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ olur. Böylece $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ nin basit olmadığı görülür.

Buna rağmen $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$, $n \geq 2$ olduğu zaman aşikâr olmayan basit Lie cebiridir. Bu iddiayı görmek için 0 olmayan bir k ideali ve bu ideal içinde 0 olmayan bir eleman alınsın. $i \neq j$ ile bir uygun E_{ij} elemanter matrisi sağdan ve soldan bu elemanla çarpılırsa, formu basitleştirilebilir (k ideali içinde kalmak şartı ile). E_{ij} matrisi, $i \neq j$ için 1, aksi takdirde 0 dir. Sonuç olarak görülüyor ki, k ,bazı elemanter E_{ij} matrislerini kapsar ve dördüncü bölümde gösterilecek çarpmanın sonucuna göre de, k, $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ 'nin tamamıdır. Böylece $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ basittir.

$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ nin bazı özellikleri detaylı olarak anlatılacaktır, çünkü genelde basit Lie cebirine tipik bir örnektir.

\mathfrak{h} , izi sıfır olan $n \times n$ tipinde köşegen matrislerin kümesi olsun. O zaman \mathfrak{h} , $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ nin alt cebiridir ve boy $\dim \mathfrak{h} = n-1$ dir. Ayrıca $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = 0$ dir. Böylece \mathfrak{h} abelyendir.

Hatırlanacağı gibi, $[gg] \subset g$ kullanılarak, g bir g -modülü olarak sayılabilir. Böylece $[hg] \subset (g)$ elde edilebilir ve g , sol h -modülü olarak göz önüne alınabilir. g nin bir ayrışımı, h alt modüllerinin bir direkt toplamı olarak yazılabilir.

$$\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) = \mathfrak{h} \oplus \sum_{i \neq j} \mathbb{C} E_{ij}$$

Dikkat edilirse, 1 boyutlu $\mathbb{C} E_{ij}$ uzayı bir h -alt modüldür, çünkü $x \in \mathfrak{h}$ için $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$ ve $[xE_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}$ ile

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dir. Bu h -modülü, h in bir 1- boyutlu gösterimini verir.

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \rightarrow \lambda_i - \lambda_j$$

Görülüyor ki, h 'in bu yolla ortaya çıkan $n(n-1)$ tane 1-boyutlu gösterimi vardır. Bunlar $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ nin h a göre kökleri diye adlandırılır. Φ köklerin kümesi olarak alınsın. Φ , $h^* = \text{Hom}(h, \mathbb{C})$ yani h in dual uzayı içinde bulunur. Eğer $\alpha \in \Phi$ ise $x \rightarrow \lambda_\alpha - \lambda_i$ dönüşümü $x \rightarrow \lambda_i - \lambda_j$ dönüşümünün negatifi olduğundan aynı zamanda $-\alpha \in \Phi$ dir.

Böylece kökler kesin olarak lineer bağımsız değildir. Buna rağmen kökler h^* ı gererler. Çünkü $\alpha_i \in \Phi$

$$\alpha_i(x) = \lambda_i - \lambda_{i+1}$$

ile tanımlırsa, o zaman, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ lineer bağımsızdırlar ve h^* in bir bazını oluştururlar. $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}\}$ olsun. Π , esas köklerin veya basit köklerin kümesi olarak adlandırılır. Bu yolla köklerin, esas köklerin lineer kombinasyonu olarak ifade edilebildiği düşünülür. $x \rightarrow \lambda_i - \lambda_j$ kökü

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{j-1} \quad (i < j \text{ ise})$$

ve

$$-(\alpha_j + \alpha_{j+1} + \dots + \alpha_{i-1}) \quad (i > j \text{ ise})$$

ifadelerine eşittir.

Böylece Φ içindeki her bir kök, Z deki hepsi birden negatif veya hepsi birden pozitif olmayan, tam katsayılı, esas köklerin bir lineer kombinasyonudur. Böylece, Φ^+ , Π nin pozitif birleşimlerinden ve Φ^- de, Π nin negatif birleşimlerinden oluşmak üzere $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ olarak yazılabilir.

BÖLÜM III

KUANTUM MEKANIĞİNİN BAZI TEMEL PRENSİPLERİ

Bu bölümde, kuantum mekaniğinin temel prensiplerinden kısaca bahsedilecektir.

3.1. De Broglie Denklemleri

De Broglie'nin

$$E = \hbar\omega \text{ ve } P = \hbar k$$

temel denklemleri ile başlansın. Burada $\hbar = h/2\pi$ ve h ($h = 6,625 \times 10^{-27}$ erg.sn veya $h = 6,626 \times 10^{-34}$ joul.sn) ise Planck sabitidir.

Bu denklemlerde, ω ve k sırasıyla parçacığa iliştilen bir düzlem dalgasının frekansını ve dalga sayısını göstermek üzere, E , bir elektronun enerjisini gösterir ve P de momentumudur.

De Broglie'nin iddiasına göre, bir hidrojen atomundaki elektronların yörüngelerinin discrete enerji seviyeleri, elektronun hareketine iliştilen dalgaların titreşim modları üzerindeki kısıtlamalar ile açıklanabilir. De Broglie, dalga ile ilişkili enerji ve momentum seçimlerini keyfi yapmaz. Bunlar, “ dalga veya dalga paketinin elektron boyunca hareket ettiği ” fikrine uygun olacak şekilde düzenlenmiştir. Bunun nasıl olduğunu göstermek için bir dalga paketi kavramı izah edilecektir.

3.2. Dalga Paketleri

ω ve k yukarıdaki gibi tanımlanmak, λ dalga boyunu ve c de dalganın hızını göstermek üzere

$$f(x,t) = \sin(kx - \omega t) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right)$$

bir boyutta bir düzlem dalgası denklemdir.

Frekansları birbirinden az farklı olan iki veya daha çok dalganın lineer kombinasyonu, kendi hızıyla hareket eden bir dalga paketi oluşturur. Bu olayın aslını görmek için,

$$g(x,t) = \sin(kx - \omega t) + \sin(k'x - \omega't)$$

denklemini gözönüne alınsın.

$$\sin (X+Y) + \sin (X-Y) = 2 \sin (X) \cos (Y)$$

eşitliğinden

$$g (x,t) = (\cos ((k-k') / 2) x - ((w-w') / 2) t) \sin (((k+k') / 2) x - ((w+w') / 2) t)$$

olduğu sonucuna varılır.

Böylece eğer k, k' ne ; w da w' ne çok yakın ise $(k+k')/2, k$ ya ve $(w+w')/2, w$ ya yaklaştırılabilir ve

$$\delta k = (k-k') , \delta w = (w-w')$$

yazılabilir.

Sonuçta ;

$$g (x,t) = (\cos (\delta k / 2) x - (\delta w / 2) t) \sin (kx - wt)$$

elde edilir.

$$(\cos (\delta k / 2) x - (\delta w / 2) t)$$

ile gösterilen dalga denklemini, kendi hızı ve frekansı ile hareket eder. Bu dalga paketidir. Bu nedenle dalga paketinin hızı (grup hızı diye de adlandırılır)

$$V_g = dw/dk$$

formülü ile verilir.

De Broglie denklemlerini uygulayarak,

$$V_g = d(\hbar w) / d(\hbar k) = d E / dp$$

elde edilir.

Şimdi, momentumu p ve hızı v olan klasik bir parçacıktan bahsedildiği farzedilsin. O zaman $p = mv$ ve $E = (1/2) mv^2$ dir (burada m parçacığın kütlesi). Bu durumda

$$V_g = dE / dp = V$$

dir.

Yani grup hızı klasik hıza eşittir. $E = \hbar w$, $p = \hbar k$ De Broglie eşitliklerinin ışığında verilen bu dalga paketi hızı ile klasik hızın özdeşlenmesi, maddesel parçacıkların dalga olayı ile modellenbildiği fikri ile uyumaktadır [23].

3.3. Schrodinger Denklemi

Dalga

$$\psi = \psi (x,t) = \exp (i (kx - wt))$$

kompleks formunda yazılırsa DeBroglie'nin enerji ve momentumunun diferansiyelleme ile çıkarılabileceği görülür:

$$i\hbar \partial \psi / \partial t : E\psi \quad \text{ve} \quad -i\hbar \partial \psi / \partial x = p \psi$$

Bu Schrodinger'in "dinamik değişkenlerin operatörler ile özdeşlenmesi" postülasına dayanmaktadır. Şöyle ki, ikinci eşitlik bir operatör olarak momentumun tanımına geldiğinde:

$$p \langle \text{-----} \rangle -i\hbar \partial / \partial x ,$$

ilk denklem,

$$i\hbar \partial \psi / \partial x = E\psi ,$$

bir hareket denklemi statüsünü alır. Bu formülde konum operatörü x in kendisidir. Bu yolla, klasik formülde momentum operatörünün enerjinin yerine geçmesi gibi burada da enerji bir operatör halini almaktadır.

$$E = (1/2) mV^2 + V$$

$$E = p^2 / 2m + V \langle \text{-----} \rangle E = -(\hbar^2 / 2m) \partial^2 / \partial x^2 + V$$

E için bu operatör tanımı ile Schrodinger denklemi, zamanın birinci türevi ve yolun ikinci türevine bağlı bir denklemdir. (V potansiyel enerjidir ve ona karşılık gelen operatör uygulamanın detaylarına bağlıdır). Bu formdaki teoride diferansiyel denklemin genel çözümleri göz önünde bulundurulur ve buna karşılık binlerce uygulamada mükemmel sonuçlar elde edilir.

Gözlem, karşılık gelen operatörlerin özdeğerleri (eigenvalue) kavramı ile modelleşir. Bir gözlemin matematiksel modeli; dalga fonksiyonunun özkonuma izdüşümüdür. Bir $\{E_k\}$ enerji spektrumu, Schrodinger denklemini sağlayan ψ dalga fonksiyonuna karşılık gelir öyle ki, $E\psi = E_k\psi$ ile E_k sabitleri vardır. Bir E gözleniri, dalga denklemlerinin Hilbert uzayı üzerinde bir Hermityen operatörüdür. Hermityen operatörleri reel özdeğerlere sahip olduğundan, bu, kuantum teorisi için ölçümlü halkayı gösterir.

Dikkat edilirse, momentum ve konum operatörleri $xp - px = \hbar i$ denklemini sağlarlar. Bu, direk olarak Heisenberg'in elde ettiği denkleme karşılık gelir ki, bu durumda değişkenlerin komutatif olmaları gerekmediği göz önüne alınmıştır. Bu yolla

DeBroglie, Schrodinger ve Heisenberg'in görüşleri birleşmiş ve kuantum mekaniği doğmuştur [23].

Bu gelişmeler esnasında, yorumlar da geniş anlamda değişiklikler göstermiştir. Neticede fizikçiler, dalga fonksiyonunu bir genelleştirilmiş dalga paketi olarak değil de, mümkün gözlemlerle ilgili bir bilgi taşıyıcısı olarak görmüşlerdir. Bu düşünce ile $\psi^*\psi$ (ψ^* , ψ nin kompleks eşleniğini gösterir) parçacığın(kütlenin) (burada parçacık lokal uzaysal karakteristiğe sahip bir gözlenirdir-observable) uzay-zamanda verilen bir noktada bulunma olasılığını temsil ederken, ψ nin kendisi matematiksel olarak kullanılabilir.

3.4. Rotasyonlar ve Simetri

Üç boyutlu uzayda, kuantum teorisi matematiğinin rotasyonel simetriye nasıl karşılık geldiği görülebilir. Açısal momentum göz önünde bulundurulsun.

Açısal momentum için klasik formül

$$L = r \times p$$

dir.

(Burada r ve p sırasıyla parçacığın konum ve momentum vektörleridir. x ise üç boyutta vektörel çarpımı gösterir.)

p ye karşılık gelen kuantum operatörü yerine p nin kendisi alınırsa

$$p \rightarrow -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

elde edilir. Bu da, açısal momentum operatörlerinin (L_x , L_y , L_z) vektörüne ulaşılmasını sağlar.

$$L_x = -i\hbar (y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y})$$

$$L_y = i\hbar (x \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial x})$$

$$L_z = -i\hbar (x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x})$$

Böylece $[L_x, L_y] = L_x L_y - L_y L_x = -i\hbar L_z$ olduğu kolayca görülebilir. (x , y , z nin devirli permütasyonu için de benzer eşitlik yazılabilir). Bu kasteder ki, açısal momentum operatörleri aynı örnek üzerinde $SU(2)$ grubunun Lie cebiri için tam olarak doğuray gibi hareket ederler.

Daha kesin olarak, aşağıda gösterilen J_1 , J_2 , J_3 matrisleri ele alınsın.

$$J_1 = (1/2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_2 = (1/2) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad J_3 = (1/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

O zaman $[J_1, J_2] = i J_3$ (ve onun devirli permütasyonları) dır ve dolayısıyla $[J_r, J_s] = i \epsilon_{rst} J_t$ yazılabilir. Burada ϵ_{rst} epsilon sembolüdür ve rst, 123 ün devirli permütasyonu olduğunda değeri 1, devirli olmayan permütasyonu olduğunda değeri -1 ve rst nin bir tekrarlması varsa değeri 0 dır. J_k matrisleri, izi sıfır olan Hermityen matrislerin kümesinin lineer doğuraylarıdır.

Eğer a, b, c gerçel sayılar olmak üzere $H = aJ_1 + bJ_2 + cJ_3$ ise o zaman

$$\exp(iH) \exp(-iH^*) = \exp(i(H-H^*)) = \exp(0) = 1$$

ve

$$\det(\exp(iH)) = \exp(i \text{tr}(iH)) = \exp(0) = 1$$

dir.

Böylece $\exp(iH)$, $U^* = U^{-1}$ ve determinantı 1 olan U matrislerinin özel birim grubu olan SU(2) ye aittir (U^* , U nun transpoznesinin eşleniğidir). H matrisleri SU(2) nin Lie cebiri ile özdeşlenebilir.

Böylece, açısız momentum operatörlerinin (ħ çarpımı farkıyla) SU(2) Lie cebirinin bir temsilini verdiği görülür. Üç boyutlu uzayda rotasyonlar ile direk ilişkisi, SU(2) nin SO(3) rotasyon grubunun iki katlı örtü uzayı olduğu ve rotasyonların, $\psi(x,y,z,t)$ dalga fonksiyonu üzerine $\psi^* \psi$ yi koruyan birim dönüşümlerle etki etmesi gerçeğinden ileri gelmektedir.

Lie cebirinin açısız momentum elemanlarıyla bu ilişkisi, kuantum mekaniğindeki gözlemcilerin içinde bulunduğu bir birim gruplu Lie cebiri prensibini açıklar. Bu ise, U birim ve H Hermityen olmak üzere $\exp(iH) = U$ gerçeğinin bir tekrarıdır (yeniden hesaplanmasıdır).

Az önce de belirtildiği gibi bir birim dönüşüm, kuantum mekaniğindeki bir simetri formundadır. Gözlemciler, simetrilerin Lie cebirleri içinde de yer alırlar.

3.5. Temsiller

Açısız momentum kuantizasyonu, SU(2) nin Lie cebirinin temsillerine bağlıdır. En basit örnek, $u = (1,0)^t$ ve $d = (0,1)^t$ (t transpozeyi gösterir) ile üretilen (1/2) spinli iki

boyutlu temsilidir.

O zaman $J_3u = (1/2)u$ ve $J_3d = (-1/2)d$ dir. Bu temsil, z-ekseni üzerindeki gözleyen rotasyonu için özdeğerleri üretir. u ların ve d lerin tensör çarpımlarının simetrize edilmiş toplamlarını alarak iki boyutlu temsillerden, yüksek boyutlu temsiller elde edilir. 5. bölümde bu yapılara bağlı topolojide çalışıldığında simetrizasyonun bu basit cebirsel hareketi özel bir önem kazanacaktır. Bu, çalışmayı topoloji ile kuantum mekaniğinin en zayıf ilişkisine götürür (Dirac'ın ip hilesi). Bu, sonraki bölümde incelenecektir.

3.6. Dirac Parantezleri

Dirac notasyonu $\langle a | b \rangle$ biçimindedir. Bu notasyonda $\langle a |$ ve $|b\rangle$ sırasıyla vektör ve kovektörlerdir. $\langle a | b \rangle$, $\langle a |$ nın $|b\rangle$ vasıtasıyla değerlendirilmesidir. Böylece $\langle a | b \rangle$ bir skalerdir ve kuantum mekaniğinde bir kompleks sayıdır. Bu, a da başlayan ve b de biten bir durumun genliği olarak göz önüne alınabilir [12]. Yani a durumundan b durumuna bir geçişe aracılık edebilen bir proses vardır. Genliğin kompleks değerli olduğu gerçeği hariç onlar olasılığın bilinen kurallarına uyarlar. Burada şu kastedilmektedir: Eğer proses c_1, c_2, \dots, c_n orta durumlarının kümesine ayrılırsa bu durumda $a \rightarrow c_i \rightarrow b$ proseslerinin kümesine sahip olunur. Böylece $a \rightarrow b$ genliği, $a \rightarrow c_i \rightarrow b$ genliklerinin toplamına eşit olur. $a \rightarrow c_i \rightarrow b$ genliği ise $a \rightarrow c_i$ ve $c_i \rightarrow b$ alt konfigürasyon genliklerinin çarpımıdır. Formül olarak $\langle a | b \rangle = \sum_i \langle a | c_i \rangle \langle c_i | b \rangle$ elde edilir. Burada toplam, $i=1, \dots, n$ orta durumlarının tamamı üzerindedir. Genelde, karşılıklı olarak ayrık proseslerin genliği bireysel proseslerin genliğinin toplamıdır. Ayrık proseslerin bir konfigürasyonunun genliği, onların bireysel genliklerinin çarpımıdır.

Genliklerin bra $\langle a |$ ve ket $|b\rangle$ ye bölünmelerine Dirac bölünmeleri adı verilir. Matematiksel olarak 'bra' bir V vektör uzayının (Hilbert uzayı, sonlu boyutlu olabilir) bir elemanı gibi alınabilir. Böylece $\langle a |$, V ye ve $|b\rangle$, V^* dual uzayına aittir öyle ki $|b\rangle : V \rightarrow C$ bir lineer dönüşümdür. Burada C kompleks sayıları gösterir. Bir V vektör uzayının bir elemanının, kompleks sayılardan Hilbert uzayına bir dönüşüm olarak alınabildiği gözönünde tutularak $\langle a | b \rangle$ genliği yeniden düzenlenebilir. $\langle a | : C \rightarrow V$ verilsin. V nin karşılık gelen elemanı bu dönüşüm

altında 1 in görüntüsüdür (C içinde). Diğer bir ifadeyle $\langle a | (1) \rangle$ V nin bir elemanıdır.

$|b\rangle : V \rightarrow C$ olsun. $\langle a | \cdot |b\rangle = \langle a | b \rangle : C \rightarrow C$ terkinine, $\langle a | b \rangle(1)$ ile C nin bir elemanı olarak bakılabilir.

BÖLÜM IV

KUANTUM MEKANİĞİ ve TOPOLOJİ

Bu bölümde, topoloji ile fizik kavramları arasında nasıl bir ilişki olduğu ortaya koyulacaktır. En zayıf ilişki Dirac'ın ip hilesi olarak ortaya çıkar.

4.1. Dirac'ın İp Hilesi

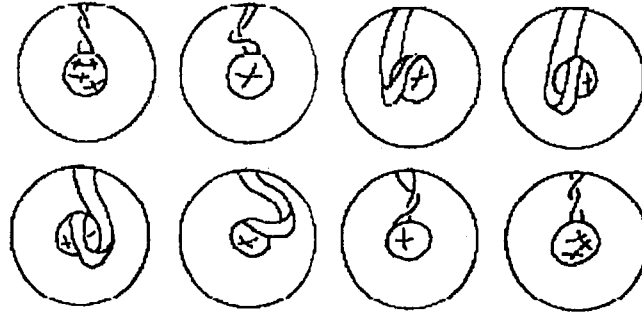
Bir elektronun etrafında bir sürekli çember içinde yürüyen bir gözlemci düşünölsün. Gözlemci ve ona iliştirilen deney aygıtı üç boyutlu uzayda bir rotasyon olduğunda bu durumu tanımlayan vektör değerli dalga fonksiyonu bir birim dönüşüm olmalıdır.

Böylece $SO(3)$ den $SU(2)$ ye bir gösterim tanımlanmaktadır. Böyle bir gösterimin çok değerli olması gerekir. Gözlemci tam çember etrafında hareket ettiğinden, $SU(2)$ de karşılık gelen eleman işaret değıştirmelidir.

Dalga fonksiyonu, tam bir devirden sonra orijinal durumuna geri dönmez, çünkü dalga fonksiyonu işaretini değıştirmişti. İki tam dönüşten sonra dalga fonksiyonu orijinal durumuna geri döner. Hayret verici bir sonuca ulaşıldı, şöyle ki, sürekli biçimde 360^0 dönen bir fiziksel sistem, orijinal (kuantum) durumuna tam olarak geri dönmez. Dirac, bu gerçeğin dikkate değer bir topolojik tasvirini keşfetti [23].

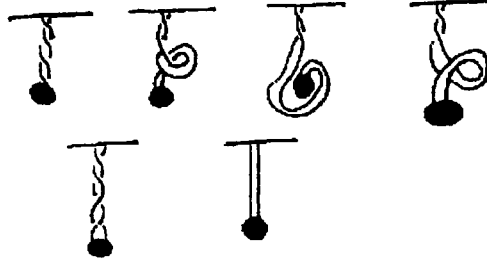
Aynı merkezli iki küre arasında gerilmiş bir kemer düşünölsün. Kemer hem iç küre hem de dış küre üzerinde sabit fakat küreler arasındaki üç boyutlu halka uzayında serbestçe hareket etsin. Bu durumda, kendi etrafında 360^0 burulan bir kemer, yine kendi etrafında -360^0 derece burulmalı bir kemere deforme edilebilir.

Aşağıdaki örnekte bu görölebilir.



Şekil 4.1

Bu efektin bir sonucu olarak, kendi etrafında 720° lik bir burulma yapan kemer hiç burulmamış bir kemere dönüştürülebilir. Bu ise aşağıda gösterilmiştir.



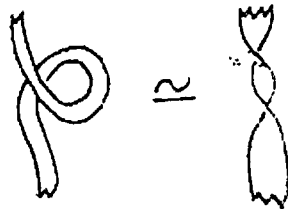
Dikkat edilirse örnekteki anahtar, bir kıvrımın bir burulmaya basit deformasyonudur.

4.2. Küresel Ayrışım

Kemerin bu hareketleri, $SU(2)$ ve $SO(3)$ topolojisi ile ve aynı zamanda $SU(2)$ nin $SO(3)$ ün iki katlı örtü uzayı olduğu gerçeği ile yakından ilgilidir (Daha fazla bilgi için bkz. [10,19,21]).

Gözlenebilir ki, topolojik deformasyonlar daha fazla teknik ayrıntı olmadan da, uzaysal rotasyonların bir düzenlenmesi ile elde edilebilir.

Ortak merkezli iki küre arasındaki 3-boyutlu bölge; $[0,1]$ aralığından sürekli parametrize edilmiş iki boyutlu kürelerin bir ailesi olarak düşünülün. t seviyesindeki küreye t -kabuk adı verilsin. Böylece en içteki küre 0-kabuk ve en dıştaki küre de 1-kabuk olur. En içteki ve en dıştaki küreler arasına bir B kemeri yerleştirilsin, öyle ki bu kemer küreler üzerine sabitlensin. Merkezi kürenin orijininde olan bir V -rotasyon eksenini seçilsin. t -kabuk V -ekseni etrafında $2\pi t$ kadar döndürülsün. Bu rotasyon altında B kemerinin görüntüsü $V(B)$ ile gösterilsin. Kemere paralel bir pozisyondan başlamak üzere V -nin 180 derece dönmesiyle oluşan $V(B)$ görüntü kümesi oluşturulsun.

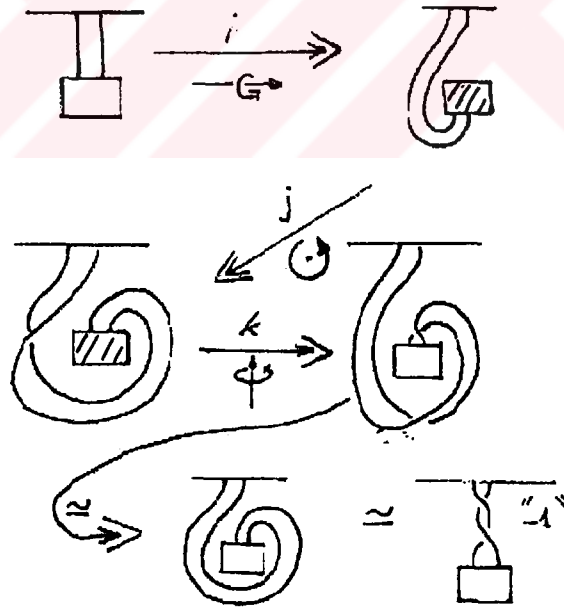


Bu, $+360^\circ$ burulmuş bir kemeri -360° burulmuş kemere çeviren en basit kemer hilesidir. 720° lik bir burulmanın orijinal durumuna döndürülmesi, kemere paralel eksen etrafındaki sabit rotasyonlu bu düzenlemenin bir birleşimi ile yapılır.

$SU(2)$ birim kuaternyonlarıdır. Yani $SU(2)$; $a+bi+cj+dk$ elemanlarının kümesi olarak tanımlanabilir. Burada (a,b,c,d) reel sayılar vektörü, 4 boyutlu Euclid uzayında birim vektördür ve i, j, k cebirsel doğurayları Hamilton kuaternyonlarının $ii = jj = kk = ijk = -1$ temel eşitliğini sağlar.

Kemer hilesi, kuaternyon grubu için topolojik/mekanik bir yapı gösterir ([19,21]). Bir kemer sabit bir duvar ve hareketli bir kart arasına bağlansın. i, j, k da üç boyutlu uzayda birbirine dik eksenler arasında kartın 180° lik dönüşlerini temsil etsin. Böyle dönüşlerden sonra, uçları duvar ve karta sabitlenmiş kemer hilesini kullanarak kemerin durumu normale geri döner. (Kemer kartın etrafında kartı döndürmeden hareket ettirilebilir.) Aşağıdaki örnekler, kuaternyon bağıntılarının bu tanımlamadan direk olarak nasıl meydana geldiğini gösterir.

4.2.1. Örnek.

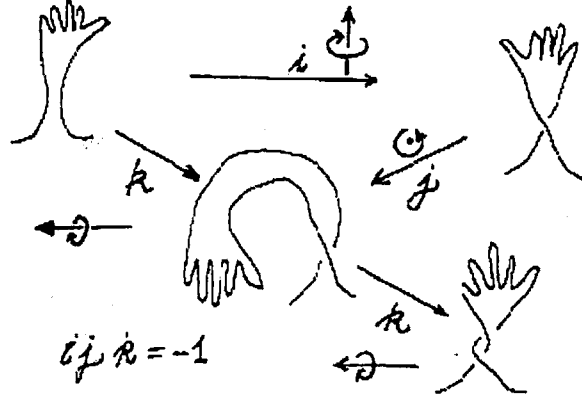


$$ijk = -1$$

Şekil 4.2

4.2.2. Örnek.

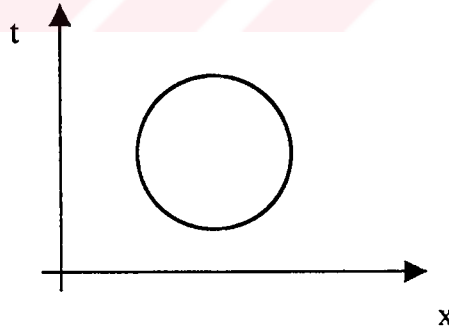
Kendi kolunuzu da, aşağıda gösterildiği gibi çizgi film formunda kullanabilirsiniz. Bu kuaterniyonik kol, tasarımcı Eddie Oshins'in keşfidir [23].



Topolojik invariyantlar ve kuantum gruplarına doğru ilerlendiğinde, simetri konusunun içeriğindeki değişim daha radikaldir. Bu değişimin ilk tohumları kuantum mekaniğinin ilk çalışmalarında görülmüştür.

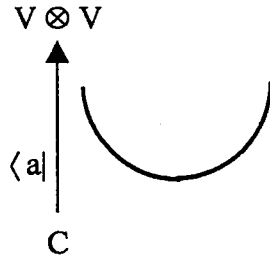
4.3. Çemberin Genliği

Düşey ekseni zamanı temsil eden bir düzlemde bir çember düşünülün. Şekil 4.3.

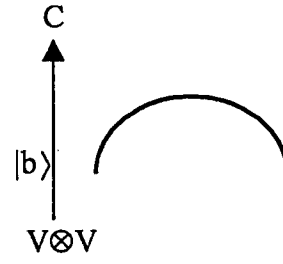


Şekil 4.3

Çember, iki parçacığın yaradılışını (Şekil 4.4.a), onların yok oluşunu (Şekil 4.4.b) içeren bir vacuum-vacuum prosesi temsil eder [23].



Şekil 4.4.a



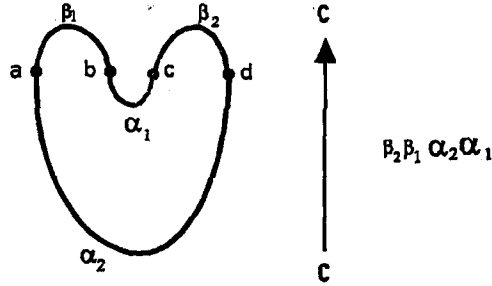
Şekil 4.4.b

Önceki tanıma uygun olarak çember böyle iki parçaya bölünebilir (yaradılış (a) ve yokoluş (b)) ve $\langle a|b\rangle$ genliği düşünülebilir. İki parçacığın yaradılış ve yokoluşu için diyagram iki ayrı noktada sona erdiği için $V \otimes V$ formunda bir vektör uzayını bra için değer bölgesi ve ket için tanım bölgesi olarak almak doğaldır. Böylece yaratılan bra bir $\alpha = \langle a| : C \rightarrow V \otimes V$ dönüşümü ve yok edilen ket bir $\beta = |b\rangle : V \otimes V \rightarrow C$ dönüşümüdür. Böylece genlik $\langle a|b\rangle : C \rightarrow C$ ye bir dönüşüm olur.

Bu noktada kuantum mekaniği daha ileriye, düğüm teorisine taşınacaktır.

4.4. Topolojik Genlik

Düzlemde dikey yöne göre daha çok α ve β lara ayrılan daha karmaşık basit kapalı eğrilerin çizilmesinin mümkün olduğu düşünülürse, akla hemen topolojinin ilk ipuçları gelir. Gerçekten, kendi kendini kesmeyen herhangi bir diferansiyellenebilir eğri, dikey eksene göre genel pozisyonda oluncaya kadar döndürülebilir. Bu durumda eğrinin minimum ve maksimuma ayrışabileceği görülecektir. Böyle bir eğri C den C ye bir dönüşüm olarak tanımlandığında, eğriye bir genlik olarak bakılabilir. Şekil 4.5 den de görülebileceği gibi eğrinin ayrışımı aşağıdaki gibi dönüşümlerin bileşimine uygun olarak yapılabilir.



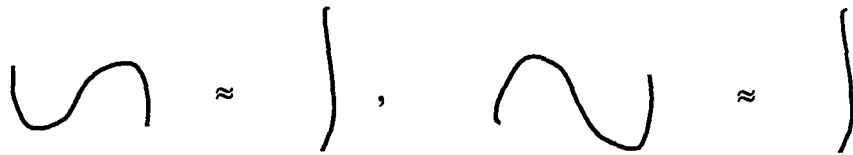
Şekil 4.5

$$\begin{aligned}
 C &\xrightarrow{\alpha_1} V \otimes V = V \otimes C \otimes V \xrightarrow{\alpha_2} V \otimes (V \otimes V) \otimes V \\
 &= (V \otimes V) \otimes (V \otimes V) \xrightarrow{\beta_1} C \otimes V \otimes V = V \otimes V \xrightarrow{\beta_2} C
 \end{aligned}$$

Böylece her bir basit kapalı eğri bir genliğe karşılık gelir. Jordan Eğri Teoremine göre, düzlemde herhangi bir basit kapalı eğri bir çembere izotop olduğundan, [27], eğer topolojik genlikler varsa, bu durumda bu genlikler çember için orijinal genliğe eşittir.

Buradan hemen şu akla gelir; yaradılış ve yok oluş üzerindeki hangi şartlar topolojik genliklerin varlığını garanti edecektir?

Cevap, basit kapalı eğrilerin bütün izotopileri, aşağıdaki diyagramda görüldüğü gibi, bitişik maksimum ve minimumların yok edilmesiyle elde edilir, gerçeğinden çıkar.



Bu diyagramlardan görülür ki, $(\beta \otimes 1)(1 \otimes \alpha)$ ve $(\alpha \otimes 1)(1 \otimes \beta)$ bileşkelerinin her biri V üzerinde özdeşliktir.

$$V = V \otimes C \xrightarrow{\alpha} V \otimes (V \otimes V) = (V \otimes V) \otimes V \xrightarrow{\beta} C \otimes V = V$$

Bu şart, karşılık gelen operatörler için bir matris temsili alınması ile çok basitleşir.

$\{e_1, \dots, e_n\}$, V için bir taban olsun. $e_{ab} = e_a \otimes e_b$, $V \otimes V$ için tensör tabanın elemanlarını gösterebiliriz. Bu durumda M_{ab} ve M^{ab} matrisleri vardır. Böylece a ve b nin 1 den n ye kadar olan bütün değerleri üzerinde alınan toplam ile

$$\alpha(1) = \sum M_{ab} e_{ab}$$

olur. Benzer şekilde

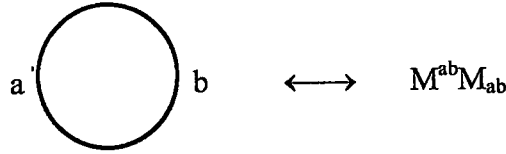
$$\beta(e_{ab}) = M^{ab}$$

ile tanımlanır [26].

Böylece çember için genlik

$$\beta\alpha(1) = \beta \sum M_{ab} e_{ab} = \sum M_{ab} \beta(e_{ab}) = \sum_{a,b} M_{ab} M^{ab}$$

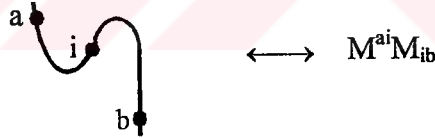
olur.



Eğer topolojik şart gözönüne alınırsa,

$$\sum M_{ai} M^{ib} = I_b^a \quad \text{ve} \quad \sum M^{ai} M_{ib} = I_b^a$$

özdeşlik matrisleri olacak şekilde biri diğerinin tersi olan M_{ab} ve M^{cd} matrislerinin var olduğu görülür.



Böylece topolojik genliğin varlık problemi düzlemdeki basit kapalı eğriler için çok kolay çözülür.

4.4.1. $\sum M_{ab}M^{ab}$ Matrislerinin Hesabı.

Şimdi kolaylık olsun diye $SU(2)$ grubundan

$$M = \begin{pmatrix} 0 & iA \\ -iA^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde bir genel matris alınsın. Burada $\text{iz}(M) = 0$, M nin determinantı $|M| = 1$, M nin tersi kendisi yani $MM = I$ ve $M_{ab} = M^{ab} = M$ olsun.

$$M_{ab}M^{ab} = M \otimes M = \begin{bmatrix} 0 & iA \\ -iA^{-1} & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & iA \\ -iA^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -A^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan

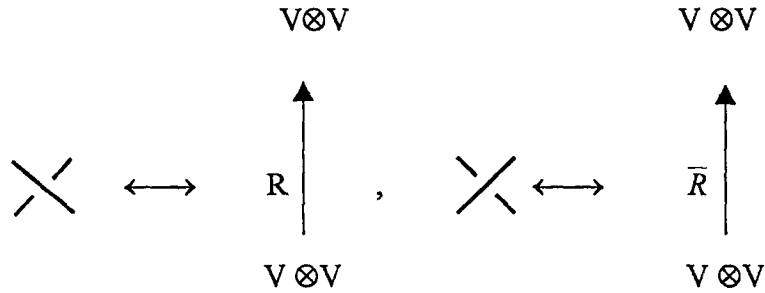
$$\beta\alpha(1) = \sum_{a,b} M_{ab}M^{ab} = -A^2 - A^{-2}$$

bulunur.

$A = 1$ için çemberin genliği $\beta\alpha(1) = -2$ olur. Şekil 4.8. de verilen kapalı eğrinin genliğinin de -2 olduğu görülebilir. Çemberin bu genliği d ile gösterilecek ve $d = -A^2 - A^{-2}$ ifadesine ilmek değeri denilecektir.

4.5. Düğüm Genlikleri

Şimdi topolojik genlikler, düğüm ve halkalar için genelleştirilecektir. Herhangi bir düğüm veya halka düzlemde düşey eksene göre genel pozisyonda olacak şekilde bir diyagramla temsil edilebileceğinden diyagram, minimal (yaradılışlar), maksimal (yokedilişler) ve aşağıda gösterilen iki tip kavşağa ayrılacaktır:



Bu kavşakların birinin diğerinin tersi olduğu aşağıda gösterildiği gibi II. Reidemeister hareketinden çıkar.

$$\text{X} \approx \text{||}$$

Böylece her bir kavşak için $V \otimes V$ den kendisine dönüşümler R ve R^{-1} (kısaca \bar{R}) ile gösterilirse $R\bar{R} = I$ olduğu yani R ile \bar{R} nin birbirinin tersi olduğu yukarıdaki izotopiden çıkar. Şu halde α , β , R ve \bar{R} dönüşümleri elde edilir. Herhangi bir düğüm bu dönüşümlerin bir birleşimi şeklinde yazılabilir ve sonuçta böyle dönüşümlerin seçimi düğüm veya halkalar için bir genlik belirler. Bu dönüşümler için 4.4. e uygun matris temsilleri alınırsa, aşağıdaki teorem ifade edilebilir:

4.5.1. Teorem.

$$R_{cd}^{ab} = AM^{ab}M_{cd} + A^{-1}I_c^a I_d^b \quad (1)$$

$$\bar{R}_{cd}^{ab} = A^{-1}M^{ab}M_{cd} + AI_c^a I_d^b$$

İspat. Bu eşitliklerin doğru olması için $R\bar{R} = I$ olduğu gösterilmelidir. Diğer bir ifade ile II. tip hareket altında bu eşitliklerin invaryant olması gerekir. Şimdi bu gösterilsin:

$$R_{cd}^{ab} = AM^{ab}M_{cd} + A^{-1}I_c^a I_d^b \Rightarrow$$

$$\text{X} = A \left(\text{U} \right) + A^{-1} \left(\text{C} \right)$$

veya genel olarak

$$\text{X} = A \left(\text{U} \right) + A^{-1} \left(\text{C} \right)$$

ya da

$$\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{U} \rangle + A^{-1} \langle \text{C} \rangle$$

olur. Benzer şekilde

$$\langle \bar{\text{X}} \rangle = A^{-1} \langle \text{U} \rangle + A \langle \text{C} \rangle$$

yazılabilir.

Böylece II. tip harekete bu eşitlikler uygulanabilir.

$$\begin{aligned}
\langle \text{X} \rangle &= A \langle \text{Y} \rangle + A^{-1} \langle \text{Z} \rangle \\
&= A [A^{-1} \langle \text{U} \rangle + A \langle \text{V} \rangle] + A^{-1} [A^{-1} \langle \text{U} \rangle + A \langle \text{W} \rangle] \\
&= (-A^2 - A^2) \langle \text{U} \rangle + A^2 \langle \text{V} \rangle + A^{-2} \langle \text{U} \rangle + \langle \text{W} \rangle \\
&= (-A^2 - A^2 + A^{-2} + A^2 + 1) \langle \text{W} \rangle \\
&= \langle \text{W} \rangle
\end{aligned}$$

(1) eşitliklerinin doğruluğu, bir önceki kısımda SU(2) grubundan alınan M matrisi kullanılarak da görülebilir. Şimdi bu gösterilecektir.

4.5.2. R Matrisinin Hesabı.

$$R_{cd}^{ab} = A M^{ab} M_{cd} + A^{-1} I_c^a I_d^b$$

dir.

4.4.1. de olduğu gibi

$$M^{ab} = M_{cd} = M = M = \begin{pmatrix} 0 & iA \\ -iA^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

alınsın.

$$R = A M \otimes M + A^{-1} I \otimes I$$

$$= A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -A^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + A^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^3 + A^{-1} & A & 0 \\ 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A^{-1} \end{bmatrix}$$

olur ve

$$\bar{R}_{cd}^{ab} = A^{-1} M^{ab} M_{cd} + A I_c^a I_d^b$$

$$\bar{R} = A^{-1} M \otimes M + A I \otimes I$$

$$= A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -A^2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -A^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} & -A^{-3} + A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

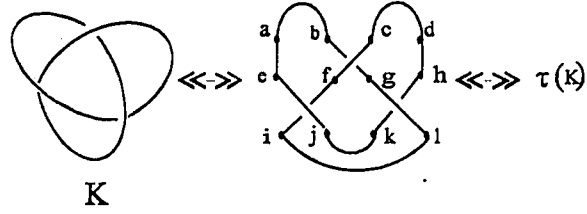
bulunur. Böylece

$$R \bar{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \otimes I$$

elde edilir. Buradan kısaca $R \bar{R} = 1$ yazılabilir. Bu da 4.5.1. Teoremin bir başka ispatıdır.

Böylece (1) eşitlikleri $(-A^2-A^{-2})$ ilmek değeri ile birlikte, genlik hesaplamaları için tekrarlanan bir algoritma olarak gözönüne alınabilir.

4.5.3. Örnek. Yonca yaprağı düğümü ve onun düşey eksene göre maksimum ve minimumlara ayrışımı gözönüne alınsın.



Buna göre

$$\tau(K) = M_{ab} M_{cd} I_e^a I_h^d \bar{R}_{fg}^{bc} R_{ij}^{ef} R_{kl}^{gh} M^{il} M^{jk}$$

olur.

BÖLÜM V

PARANTEZ POLİNOMLARI ve NORMALİZE EDİLMİŞ POLİNOMLAR

2.3. bölümde

$$\begin{aligned} \langle \diagdown \rangle &= A \langle \cup \rangle + B \langle \rangle \langle \rangle \\ \langle \diagup \rangle &= B \langle \cup \rangle + A \langle \rangle \langle \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

eşitlikleri, 4.5. bölümde

$$\begin{aligned} \langle \diagdown \rangle &= A \langle \cup \rangle + A^{-1} \langle \rangle \langle \rangle \\ \langle \diagup \rangle &= A^{-1} \langle \cup \rangle + A \langle \rangle \langle \rangle \end{aligned} \quad (2)$$

eşitlikleri ve 4.4. bölümde

$$d = \langle O \rangle = -A^2 - A^{-2}$$

ilmek değeri elde edilmişti. Dikkat edilirse (1) eşitliklerinde $B = A^{-1}$ alınırsa (2) eşitlikleri bulunur. O halde (2) eşitliği $d = -A^2 - A^{-2}$ ilmek değeri ile birlikte parantez polinomlarını hesaplamak için kullanılabilir. 2.3.12 önermesinde $B = A^{-1}$ ve $d = -A^2 - A^{-2}$ alınırsa, aşağıdaki önerme yazılabilir.

5.1. Önerme.

$$a) \langle \diagdown \rangle = \langle \rangle \langle \rangle$$

$$b) \langle \delta \rangle = (-A^3) \langle \sim \rangle, \langle \sigma \rangle = (-A^3) \langle \sim \rangle$$

5.2. Önerme.

$$\langle \text{) (} \rangle = \langle \text{) (} \rangle$$

$B = A^{-1}$ ve $d = -A^2 - A^{-2}$ oldukları gözönünde tutulursa, o zaman

$$\langle \text{ / \ } \rangle = \langle \text{ / \ } \rangle$$

olur.

$$\text{İspat. } \langle \text{ / \ } \rangle = A \langle \text{ \ } \rangle + B \langle \text{) (} \rangle$$

$$= A \langle \text{ \ } \rangle + B \langle \text{) (} \rangle$$

$$= A \langle \text{ \ } \rangle + B \langle \text{) (} \rangle$$

$$= \langle \text{ / \ } \rangle$$

5.1. ve 5.2. önermelerinden $B = A^{-1}$ ve $d = -A^2 - A^{-2}$ ile parantez polinomunun II. ve III. hareketler altında invaryant olduğu çıkar. Yani parantez polinomu bir regüler izotopi invaryantıdır. Bir kuşatan izotopi (I., II., III.) invaryantlığı istenirse, bu aşağıdaki gibi bir normalizasyon ile elde edilir.

5.3. Tanım (Normalize edilmiş Polinom). Bir yönlendirilmiş K halkası için *normalize edilmiş L_K parantez polinomu*,

$$L_K = (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle$$

formülü ile tanımlanır. Burada $w(K)$, K 'nin 2.1.20 de verilen burulma sayısıdır.

5.4.Önerme. L_K normalize edilmiş parantez polinomu bir kuşatan izotopi invaryantıdır.

İspat. $w(K)$ ve $\langle K \rangle$ bir regüler izotopi invaryantı olduğundan, L_K da bir regüler izotopi invaryantıdır. Sadece L_K nın I. Tip hareket altında invaryant olduğunun kontrol edilmesi gerekir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
 L_{\sigma} &= (-A^3)^{-w(\sigma)} \langle \sigma \rangle \\
 &= (-A^3)^{-|1+w(\sigma)|} (-A^3) \langle \sim \rangle \\
 &= (-A^3) (-A^3)^{-w(\sigma)} (-A^3) \langle \sim \rangle \\
 &= (-A^3)^{-w(\sigma)} \langle \sim \rangle \\
 &= L_{\sim}
 \end{aligned}$$

hemen çıkar.

Son olarak, $\langle K \rangle$ ve L_K nın ayna görüntüleri altındaki davranışları ele alınacaktır.

5.5. Önerme. K^* , yönlendirilmiş K halkasının bütün geçitlerinin değiştirilmesi (alt geçit üst, üst geçit alt geçit) ile meydana gelen ayna görüntüsünü (2.1.13. de tanımlandı) gösterebilir. O zaman $\langle K^* \rangle(A) = \langle K \rangle(A^{-1})$ ve $L_{K^*}(A) = L_K(A^{-1})$ dir.

İspat. Bütün geçitleri değiştirmek, $\langle K \rangle$ ve L_K nın tanımındaki A ve A^{-1} in rollerini değiştirmek demektir. Bu ise istenendir.

Uyarı. 6. Bölüm (Teorem 6.2) de L_K nın bir değişken değişimiyle orijinal Jones polinomu olduğu gösterilecektir.

5.6. Örnekler. L_K hesaplanarak $L_{K^*}(A) \neq L_K(A^{-1})$ olduğu bulunursa, o zaman K nın K^* a kuşatan izotop olmadığı Önerme 5. 3. den çıkar. Böylece L_K , $\langle K \rangle$ parantez polinomuna göre daha düzenlidir. Gerçekten bu, yonca yaprağı düğümü durumunda

$$i) \langle \text{yonca yaprağı} \rangle = A \langle \infty \rangle + A^{-1} \langle \text{yonca yaprağı} \rangle$$

$$= A(-A^3) + A^{-1}(-A^3)$$

$$\langle L \rangle = -A^4 - A^{-4}$$

$$\text{ii) } \langle \text{diagram} \rangle = A \langle \text{diagram} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagram} \rangle$$

$$= A(-A^4 - A^{-4}) + A^{-1}(-A^3)^2$$

$$\langle T \rangle = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$$

$w \langle T \rangle = 3$ (T bir düğüm olduğundan yönlendirmenin seçiminden bağımsızdır)

$$\therefore L_T = (-A^3)^{-3} \langle T \rangle$$

$$= -A^{-9} (-A^5 - A^{-3} + A^{-7})$$

$$\therefore L_T = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

$$\therefore L_{T^*} = A^4 + A^{12} - A^{16}$$

şeklindedir.

Burada $L_{T^*} \neq L_T$ olduğundan, yonca yaprağının ayna görüntüsüne kuşatan izotop olmadığı sonucuna varılır.

iii) Örnek 2.1.15 de verilen sekiz şeklindeki düğümün diyagramından

$$\langle E \rangle = A \langle \text{diagram} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagram} \rangle$$

$$= A(-A^3) \langle \text{diagram} \rangle + A^{-1} \langle \text{diagram} \rangle$$

$$= -A^4 [-A^4 - A^{-4}] + A^{-1} [-A^5 - A^{-3} + A^{-7}]$$

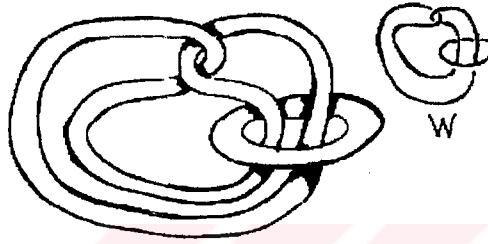
$$= A^8 + 1 - A^4 - A^{-4} + A^{-8}$$

$$\langle E \rangle = A^8 - A^4 + 1 - A^4 + A^{-8}$$

$w(E) = 0$ olduğundan, $L_E = \langle E \rangle$ ve $L_{E^*} = L_E$ olduğu görülür. Gerçekten, E , görüntüsüne kuşatan izotoptur.

iv) W (Whitehead halkası)

Whitehead halkası yönlendirilse bile sıfır halkalanma sayısına sahiptir. Bir parantez hesaplaması, onun halkalandırılmış olduğunu gösterir.



Şekil 5.1

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= A \langle \text{Whitehead halkası} \rangle + A^{-1} \langle \text{Whitehead halkası} \rangle \\ &= A \langle \text{Whitehead halkası} \rangle + (A^{-1})(-A^3) \langle \text{Whitehead halkası} \rangle \\ &= A(-A^3) \langle \text{Whitehead halkası} \rangle - A^4 \langle \text{Whitehead halkası} \rangle \\ &= (-A^4) \langle \text{Whitehead halkası} \rangle - A^4 \langle E^* \rangle \\ &= (-A^4)(-A^3) \langle T^* \rangle - A^4 \langle E^* \rangle \\ &= (A^1)[-A^5 - A^3 + A^7] - A^4[A^8 - A^4 + 1 - A^4 + A^{-8}] \\ &= -A^4 - A^4 + A^8 - A^4 + 1 - A^4 + A^{-8} - A^{-12} \\ \langle W \rangle &= A^8 + A^{-8} - 2A^4 - 2A^{-4} + 1 - A^{-12} \end{aligned}$$

5.7. Teorem. K_n , $(2, n)$ tipinde bir tor halkası olsun. Bu durumda

$$\langle K_n \rangle = A \langle K_{n-1} \rangle + A^{-1} (-A^{-3})^{n-1}$$

veya



$$\langle \text{Knot}_n \rangle = A \langle \text{Knot}_{n-1} \rangle + A^{-1} \langle \text{Knot}_{n-2} \rangle$$

olur.

İspat. Aşağıdaki gibi basit bir tümevarımdan çıkar.



$$\langle K_1 \rangle = -A^3$$

$$\langle K_2 \rangle = A (-A^3) + (-1)^1 A^{-3.2+2} = -A^4 - A^{-4}$$

$$\langle K_3 \rangle = A (-A^4 - A^{-4}) + (-1)^2 A^{-7} = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$$

$$\langle K_4 \rangle = A (-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) + (-1)^3 A^{-10} = -A^6 - A^{-2} + A^{-6} - A^{-10}$$

Bu şekilde devam edilirse

$$\langle K_n \rangle = A \langle K_{n-1} \rangle + A^{-1} (-A^{-3})^{n-1}$$

olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\langle K \rangle = A \langle K_{n-1} \rangle + (-1)^{n-1} A^{-3n+2}$$

dir. Bu ispatı tamamlar.

5.8. Not. $n > 1$ ile $(2, n)$ tipindeki hiçbir tor düğümünün ayna görüntüsüne kuşatan izotop olmadığını göstermek için bu teorem kullanılabilir.

BÖLÜM VI

JONES POLİNOMU ve GENELLEŞTİRMESİ

6.1. Tanım. Bir değişkenli Jones polinomu, $V_K(t)$, bir yönlendirilmiş K halkasına iliştilmiş \sqrt{t} değişkenli (yani \sqrt{t} nin sonlu sayıda pozitif ve negatif kuvvetleri), bir Laurent polinomudur ki, aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) Eğer K, K' ne kuşatan izotop ise o zaman $V_K(t) = V_{K'}(t)$

ii) $V_{\bigcirc} = 1$

iii) $t^{-1}V_{\text{cross}} - tV_{\text{cross}} = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}) V_{\text{cross}}$

(i) ve (ii) ile $V_{\bigcirc} = V_{\bigcirc} = V_{\bigcirc} = 1$ dir.

Bu nedenle (iii) ile $t^{-1} - t = (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}) V_{\bigcirc}$ dir.

$$\delta = \frac{t^{-1} - t}{\sqrt{t} - 1/\sqrt{t}} = \frac{(t^{-1} - t)(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t})}{t - t^{-1}}$$

$$\therefore \delta = -(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t})$$

olsun.

Bu tanım, halka diyagramlarından Jones polinomlarını hesaplamak için yeterli bilgi verir. Bu tanımlamanın iyi tanımlı olup olmadığı ve böyle bir invaryantın var olup olmadığı henüz açık değildir. Jones; (i), (ii) ve (iii) nin invaryant olduğunu teorem olarak ispatladı [17]. Ayrıca aşağıdaki teorem de verilebilir.

6.2. Teorem. 5.3. tanımda olduğu gibi $L_K(A) = (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle$ olsun. O zaman $L_K(t^{-1/4}) = V_K(t)$ dir.

Böylece normalize edilmiş parantez polinomu, 1-değişkenli Jones polinomunu sağlar.

İspat. Parantez polinomu için

$$\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{Y} \rangle + B \langle \text{Z} \rangle$$

$$\langle \text{X} \rangle = B \langle \text{Y} \rangle + A \langle \text{Z} \rangle$$

formülleri elde edilmiştir. Bunlar taraf tarafa çıkarılırsa

$$B^{-1} \langle \text{X} \rangle - A^{-1} \langle \text{X} \rangle = \left(\frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) \langle \text{Y} \rangle$$

elde edilir. $B = A^{-1}$ alınırsa

$$A \langle \text{X} \rangle - A^{-1} \langle \text{X} \rangle = (A^2 - A^{-2}) \langle \text{Y} \rangle$$

yazılır.

$w(\text{X}) = w + 1$ ve $w(\text{Y}) = w - 1$ olduğunda $w = w(\text{Z})$ olsun ve $\alpha = -A^3$ alınsın. O zaman

$$A \langle \text{X} \rangle \alpha^{-w} - A^{-1} \langle \text{X} \rangle \alpha^{-w} = (A^2 - A^{-2}) \langle \text{Z} \rangle \alpha^{-w}$$

dır. Dolayısıyla

$$A \alpha \langle \text{X} \rangle \alpha^{-(w+1)} - A^{-1} \alpha^{-1} \langle \text{X} \rangle \alpha^{-(w-1)} = (A^2 - A^{-2}) \langle \text{Z} \rangle \alpha^{-w}$$

$$A \alpha L \text{X} - A^{-1} \alpha^{-1} L \text{X} = (A^2 - A^{-2}) L \text{Z}$$

$$-A^4 L \text{X} - A^{-4} L \text{X} = (A^2 - A^{-2}) L \text{Z}$$

$A = t^{-1/4}$ alınırsa

$$t^{-1}L \xrightarrow{\quad} -tL \xrightarrow{\quad} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)L \xrightarrow{\quad}$$

sonucu elde edilir.

Bu, tanım 6.1. in (iii) özelliğini sağlar. (i) ve (ii) özellikleri L_K nın benzer durumlarından elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

6.3. Uyarı. Bu bağlamda, eğer $V_K(t) = L_K(t^{-1/4})$ alırsak, $V_K(t)$ tanım 6.1. in (i)-(iii) özelliklerini sağlar. Böylece bu teorem 1-değişkenli Jones polinomunun varlığını (ve iyi tanımlandığını) ispatlar. $V_K(t)$, (i)-(iii) yi sağladığından bu teorem, Jones polinomu ile parantez polinomunun birbirine bağlı olduğunu gösterir.

6.4. Önerme. K' , bir $K_1 \subset K$ bileşeninin yönlendirmesinin ters çevrilmesiyle elde edilmek üzere, K ve K' yönlendirilmiş iki halka olsun. $\lambda = lk(K_1, K - K_1)$, K nın geri kalan bileşenleriyle K_1 in toplam halkalanma sayısını gösterebilir (yani λ , K nın geri kalan bileşenleriyle K_1 in halkalanma sayısının toplamıdır). O zaman $V_{K'}(t) = t^{-3\lambda} V_K(t)$ dir.

İspat. K ve K' nün burulmalarının (writhe) $w(K') = w(K) - 4\lambda$ formülü ile bağlantılı olduğu kolayca görülebilir (burada önerme ifadesinde olduğu gibi $\lambda = lk(K_1, K - K_1)$ dir). Böylece

$$\begin{aligned} L_{K'}(A) &= (-A^3)^{-w(K')} \langle K' \rangle \\ &= (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle \\ &= (-A^3)^{-w(K)+4\lambda} \langle K \rangle \\ L_{K'}(A) &= (-A^3)^{4\lambda} L_K(A) \end{aligned}$$

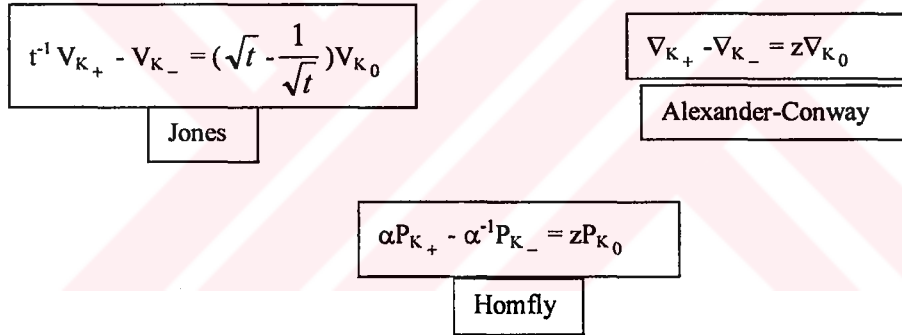
olur.

Böylece, 6.2. teoremden, $V_{K'}(t) = L_{K'}(t^{-1/4}) = t^{-3\lambda} L_K(t^{-1/4}) = t^{-3\lambda} V_K(t)$ dir. Bu ispatı tamamlar.

6.5. Hatırlatma. Bu bağıntı, yapı olarak $\nabla_K(z) \in Z_{[z]}$ (tamsayı katsayılarla z deki polinomlar) Alexander-Conway polinomunun tanımlanan bağıntılarıyla benzerdir (bkz. 2.1.24 Tanım).

$\nabla_K(z)$ polinomu yönlendirmedeki değişikliklere çok duyarlıdır. Bir halkalanma sayısının bir kuvvetiyle basitçe çarpılamaz. Ancak, bu durumlar tez konusunun dışında olduğundan burada anlatılmayacaktır. Bilgi için [11] e bakılabilir.

Jones ve Alexander-Conway polinomlarının değişim özdeşliklerinin sıralamasına göre bir ortak genellemeye ihtiyaç olabilir. Bu genelleme vardır ve pek çok bilim adamı tarafından Homfly polinomu ismiyle ortaya konmuştur [13]:



Yukarıdaki diyagramda, $P_K(\alpha, z)$ yönlendirilmiş 2-değişkenli polinomu için temel değişim bağıntısı verilmiştir. $P_K(\alpha, z)$ polinomunda $\alpha = t^{-1}$, $z = \sqrt{t} - 1/\sqrt{t}$ alınırsa Jones polinomu, $\alpha = 1$ alınırsa Alexander-Conway polinomu elde edilir. Homfly polinomunun orijinal ispatları düğüm diyagramlarından tümevarımla elde edilir. Parantez polinomunun varlığı durum modelinin genellemesiyle ortaya koyulacaktır. Homfly polinomuna başka bir yaklaşım, Jones [17] tarafından verilmiştir ve bu yaklaşım, $V_K(t)$ için orijinal metodları geneller.

Bu yönlendirilmiş 2-değişkenli polinom ile, parantez ve orijinal Jones polinomunu genelleştiren, bir yönlendirilmiş 2-değişkenli $F_K(\alpha, z)$ [20] (Kauffman polinomu) polinomu vardır.

6.6. Tanım. Yönlendirilmemiş halkalar için iki değişkenli $L_K(\alpha, z)$ polinomu, aşağıdaki özellikleri sağlayan bir polinomdur.

i) Eğer K, K' ne regüler izotop ise, o zaman

$$L_K(\alpha, z) = L_{K'}(\alpha, z)$$

dir.

ii) $L_{\bigcirc} = 1$

iii) $L_{\text{cross}} + L_{\text{cross}} = z(L_{\text{cup}} + L_{\text{cap}})$

iv) $L_{\sigma} = \alpha L_{\sim}$

$L_{\sigma^{-1}} = \alpha^{-1} L_{\sim}$

Parantez polinomunda olduğu gibi, L polinomu da I. Reidemeister hareketi altında çarpılabilir.

6.7. Tanım. $w(K)$, K yönlendirilmiş halkasının burulma sayısı olmak üzere

$$F_K(\alpha, z) = \alpha^{-w(K)} L_K(\alpha, z)$$

formülü ile tanımlanır.

L nin bir özel durumunun parantez polinomu ve F nin bir özel durumunun Jones polinomu olduğu aşağıdaki önermeden kolayca görülebilir.

6.8. Önerme.

$$\langle K \rangle (A) = L_K(-A^3, A + A^{-1}) \text{ ve}$$

$$V_K(t) = F_K(-t^{-3/4}, t^{-1/4} + t^{1/4}).$$

İspat. Aşağıdaki parantez özellikleri bilinmektedir:

$$\langle \text{X} \rangle = A \langle \text{Y} \rangle + A^{-1} \langle \text{Z} \rangle \quad (\quad)$$

$$\langle \text{Y} \rangle = A^{-1} \langle \text{Y} \rangle + A \langle \text{Z} \rangle \quad (\quad)$$

Buradan

$$\langle \text{X} \rangle + \langle \text{Y} \rangle = (A + A^{-1}) [\langle \text{Y} \rangle + \langle \text{Z} \rangle] \quad (\quad)$$

elde edilir.

Bu yüzden, $\langle K \rangle (A) = L_K(-A^3, A + A^{-1})$ dir. Dolayısıyla

$$V_K(t) = L_K(t^{-1/4})$$

ve

$$L_K(A) = (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle (A)$$

$$V_K(t) = (-t^{-3/4})^{-w(K)} \langle K \rangle (t^{-1/4})$$

olur. Bu nedenle

$$V_K(t) = (-t^{-3/4})^{-w(K)} L_K(-t^{-3/4}, t^{-1/4} + t^{1/4})$$

dür. Dolayısıyla

$$V_K(t) = F_K(-t^{-3/4}, t^{-1/4} + t^{1/4})$$

olur. Bu ispatı tamamlar.

Jones polinomunu genelleştiren düğüm polinomunun bu tanımlamasında özel örnek ve hesaplara yer verilmemiştir. Ancak, yönlendirilmiş diyagramlar için $P_K(\alpha, z)$

polinomuna bir regüler izotopi invaryantının normalizasyonu gibi bakılabilir. Bu yolla, $H_K(\alpha, z)$ Homfly polinomu aşağıdaki gibi tanımlanır:

6.9. Tanım. İki değişkenli $H_K(\alpha, z)$ Homfly polinomu Jones ve Alexander-Conway polinomlarını genelleştiren ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir düğüm polinomudur.

i) Eğer K ve K' yönlendirilmiş halkaları regüler izotop ise, o zaman

$$H_K(\alpha, z) = H_{K'}(\alpha, z),$$

ii) $H \bigcirc = 1,$

iii) $H \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} - H \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} = z H \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array},$

iv) $H \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \longrightarrow \end{array} = \alpha H \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array},$

$$H \begin{array}{c} \curvearrowleft \\ \longrightarrow \end{array} = \alpha^{-1} H \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}.$$

Yine invaryantın varlığı kabul edilerek aşağıdaki önerme verilir.

6.10. Önerme.

$$P_K(\alpha, z) = \alpha^{-w(K)} H_K(\alpha, z)$$

İspat. $P_K(\alpha, z) = \alpha^{-w(K)} H_K(\alpha, z)$ olsun. O zaman P_K , kuşatan izotopinin bir invaryantıdır ve $P \bigcirc = 1$ dir. Böylece geriye değişim özdeşliğini kontrol etmek kalır.

$$H \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} - H \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} = z H \begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \alpha^{+1} \alpha^{-(w+1)} H \xrightarrow{\sim} -\alpha^{+1} \alpha^{-(w-1)} H \xrightarrow{\sim} = z \alpha^{-w} H \xrightarrow{\sim}$$

Burada $w = w(\xrightarrow{\sim})$ dır.

Bundan dolayı

$$\alpha P \xrightarrow{\sim} -\alpha^{-1} P \xrightarrow{\sim} = z P \xrightarrow{\sim}$$

olur. Bu ispatı tamamlar.

Regüler izotop Homfly polinomu ile çalışmanın bir avantajı, ikinci değişkenin verilen bir hesaplamada yer alan diyagramların burulma sayılarının ölçümünü meydana getirmesidir. Eğer halka bileşenleri yerine şeritler alınırsa, bu, hareketsel topolojik burulmanın (diyagramsal kıvrımdan çok) bir ölçüsü gibi düşünülebilir (4.2. ile mukayese ediniz). Böylece bir yonca yaprağı düğümü, bir düğümlenmemiş şeritle yer değiştirebilir.

6.11. Örnek. Yonca yaprağı düğümü için



şerit temsili alınırsa o zaman $H \xrightarrow{\sim} = \alpha H \xrightarrow{\sim}$ kuralı

$$H \xrightarrow{\sim} = H \xrightarrow{\sim} = \alpha H \xrightarrow{\sim}$$

kuralı haline dönüşür.

Yani H polinomu; gömülmüş, yönlendirilmiş şerit halkalarının bir kuşatan izotopi invariantı gibi yorumlanabilir. (Burada Mobius şeritleri yoktur.) Değişim özdeşliği altında aynı kalır.

$$H \xrightarrow{\sim} - H \xrightarrow{\sim} = z H \xrightarrow{\sim}$$

Bu yorumla, z ve α değişkenleri farklı anlamlar kazanır. Şöyle ki, z -değişkeni, ekleme ve değiştirme işlemlerini ölçer. α -değişkeni, şeritlerdeki burulmayı ölçer. Bu bakış açısı, çerçevellenmiş halkalarla (yani bir bileşik normal vektör alanlı halkalar) çalışmak için formüle edilebilir.

Bu tartışmayı vurgulamak için, Hopf halkası ve yonca yaprağı düğümünün özel örnekleri hesaplanacaktır.

6.12. Örnekler.

$$a) H \infty = \alpha^{-1} H \circlearrowleft ; H \circlearrowright = \alpha^{-1} H \circlearrowleft = \alpha^{-1}$$

$$b) H \infty - H \infty = zH \circlearrowleft$$

$$\alpha - \alpha^{-1} = zH \circlearrowleft$$

$\delta = (\alpha - \alpha^{-1}) / z$ olsun. Bu durumda, herhangi bir K için

$$H \circlearrowleft_K = \delta H_K \text{ dir.}$$

c) L iki bileşenli halka olsun.



$$H \circlearrowleft \circlearrowleft - H \circlearrowright \circlearrowright = zH \infty,$$

$$H_L - \delta = z\alpha$$

$$H_L = z^{-1}(\alpha - \alpha^{-1}) + z\alpha$$

$$P_L = \alpha^{-2} H_L = z^{-1}(\alpha^{-1} - \alpha^{-3}) + z\alpha^{-1}$$

d) T , yonca yaprağı düğümünü gösterebilirsin.



$$H_T - H_{T'} = zH_L$$

$$H_T - \alpha = z[z^{-1}(\alpha - \alpha^{-1}) + z\alpha]$$

$$H_T = (2\alpha - \alpha^{-1}) + z^2\alpha$$

$$P_T = \alpha^{-3} H_T = 2\alpha^{-2} - \alpha^{-4} + z^2\alpha^{-2}$$

K^* , K nin ayna görüntüsü iken, $P_{K^*}(\alpha, z) = P_K(\alpha^{-1}, -z)$ olduğundan T nin düzenlemesinin P_T nin bu hesaplamadaki yansıması olduğu görülür.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Düğüm teorisi ile ilgili çalışmaların çoğu, düğüm invaryantlarının bulunması (sınıflandırma) problemi ile ilgilidir.

Bu çalışmada, kuantum mekaniğinin prensiplerinden hareketle, bazı düğüm invaryantlarını bulmak için bir model (genelleştirilmiş genlik yapısı) verildi. Bazı düğümlerin parantez polinomları ve normalize edilmiş polinomları bu modelle ortaya konularak $(2,n)$ -tor düğümlerinin parantez polinomları için bir formül verildi.

Aynı modelle (p,n) -tor düğümleri, (m,n) -Türk düğümleri ve burulmalı düğümlerin parantez polinomlarını bulmak için bir ortalama formülü verilip verilemeyeceği araştırılabilir.

Ayrıca bu çalışma 3-boyutlu manifoldlara (topolojik kuantum alan teorisine) taşınabilir. Bunlar bir başka çalışmada ele alınacaktır.

KAYNAKLAR

- [1]. Alexander, J.W., Topological Invariants of Knots and Links, Trans Amer. Math. Soc. 30, 1928.
- [2]. Altın, Y. Çoban Düğümleri ve Bazı Örtü Uzayları, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum, 1979.
- [3]. Altıntaş, İ. Üç Boyutlu Manifoldların Yapısı Üzerine, Doktora Tezi, Yüzüncü Yıl Üniv., Van, 1993.
- [4]. Baxter, R.J., Exactly Solved Models in Statistical Mechanics, Academic Press, New York- London, 1989.
- [5]. Birman, J., Braids, Links and mapping class groups, Proc. Amer. Stud. 82, Princeton, N. S.; Princeton University Press, 1974.
- [6]. Bozhüyük, M.E., On 3-sheeted Covering Spaces of (3,5)-Turks Head Knot, Colloquia Math. Soc., Janos Bolyai, Eger (Macaristan), 1983.
- [7]. Bozhüyük, M.E., On 3-sheeted Covering Spaces of (3,4)-Turks Head Knot, Colloquia Math. Soc., Janos Bolyai 23, Topology, Budapest, 1978.
- [8]. Bozhüyük, M.E., On 3-sheeted Covering Spaces of (3,2)-Turks Head Knot, J. Fac. Sci., Karadeniz Tek. Üniv., Ser. MA. 3, 1982.
- [9]. Burde, G. and Zieschang, H., Knots, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1985.
- [10]. Carter, R.; Segal, G.; MacDonald, I., Lectures on Lie Groups and Lie Algebras, London Mathematical Society, Cambridge Univ. Press, 1995.
- [11]. Conway, J. H., An Enumeration of Knots and Links, and some of Their Algebraic Properties, "Computational Problems in Abstract Algebra, Proc. Conference in Oxford 1967, Pergammon, Elmsford, NY, 1970.
- [12]. Dirac, P. A. M., Principles of Quantum Mechanics, Oxford Univ. Press, 1958.

- [13]. Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W.B.R., Millett, K.C., Ocneanu, A., A New Polynomial Invariant of Knots and Links, Bull. Amer. Math. Soc., 12, 1985.
- [14]. Fox, R.H., A Quick Trip Through Knot Theory, Topology of 3-Manifolds, Proc. Top. Ins. Prentice Hall, Englewood-Cliffs N.J., 1962.
- [15]. Fox, R. H. and Crowell, R. H., Introduction to Knot Theory, Blaisdell Pub. Com. New York, 1965.
- [16]. Hilden, H. M., Three Fold Branched Coverings Spaces of S^3 , Bull. J. of Math., 98, 1976.
- [17]. Jones, V. F. R., Hecke Algebra Representations of Braid Groups and Link Polynomials, Ann. of Math. 126, 1987.
- [18]. Joyce, D., A Classifying Invariant of Knots, The Knot Quandle, J. Pure Appl. Alg., 23, 1976.
- [19]. Kauffman, L. H., On Knots, Annals of Mathematics Studies Number 115, Princeton University Press, 1987.
- [20]. Kauffman, L. H., An Invariant of Regular Isotopy, Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 318, No: 2, 1990.
- [21]. Kauffman, L. H., Knots and Physics, World Scientific Pub., 1991.
- [22]. Kauffman, L. H., and Lins, S., Temperley Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-manifolds, 1993.
- [23]. Kauffman, L. H. and Baadhio A., Quantum Topology, World Scientific Publ., 1993.
- [24]. Montesinos, J.M., Three Manifolds as 3-fold Branched Covers of S^3 , Quart. J. Math., Oxford (2), 1976.
- [25]. Rolfsen, D., Knots and Links, Mathematics Lectures Series 7, Boston, 1976.

[26]. Witten, E., Quantum Field Theory and The Jones Polynomial, *Commun. Pure Appl. Math.* 42, 1989.

[27]. Whitney, H., On Regular Closed Curves in The Plane, *Comp. Math.* 4, 1937.

