T.C

NİĞDE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SONSUZ SERİLERİN MUTLAK TOPLANABİLME METOTLARI

YUSUF DENİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN-2000

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne;

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Üye : Yrd.Doç. Dr. Ahmet GÜMÜŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdülkadir DOĞAN

Üye : Dr. Nihal TUNCER

ONAY:

Bu tez, 07/07/2000 tarihinde, Enstitü Yöneti Kurulu'nca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun kararıyla kabul edilmiştir.

11 / 07/2000

Prof. Dr. Emine Erman KARA

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

SONSUZ SERİLERİN MUTLAK TOPLANABİLME METOTLARI

DENİZ, Yusuf
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışmanlar : Yrd.Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ
Öğr.Gör. Dr. A.Nihal TUNCER

Haziran 2000, 35 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde seriler ve toplanabilme metotları ile ilgili genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, bazı temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, $|C,1|_k$ ve $|\overline{N}, p_n|_k$ toplanabilme metotları arasındaki ilişkileri veren iki teorem ifade ve ispat edildi.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde verilen $|C,1|_k$ toplanabilme metodu yerine $|\overline{N}, q_n|_k$ toplanabilme metodunu alarak, iki toplanabilme metodu arasındaki ilişki ile ilgili bir teorem ifade ve ispat edildi.

Beşinci bölümde de üçüncü bölümde verilen Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 yi genelleştiren iki teorem ifade ve ispat edildi.

SUMMARY

ABSOLUTE SUMMABILITY METHODS OF INFINITE SERIES

DENİZ, Yusuf
Niğde University
Graduate School of Naturel and Applied Sciences
Department of Mathemathics
Supervisors: PhD. İsmet ALTINTAŞ
Dr. A. Nihal TUNCER

June 2000, 35 pages

This thesis consist of five parts.

In the first chapter, general knowledges about the series and summability were given.

In the second part, some fundamental definitions and theorems have been given.

In the third part, two theorems that give the relations between $|C,1|_k$ and $|\overline{N},p_n|_k$ summability methods, have been expressed and proved.

In the fourth part, by taking the $|\overline{N},q_n|_k$ summability method instead of $|C,1|_k$ summability method which was given ın the second part, a theorem about the relation between the two summability methods is expressed and proved.

At the fifth part, two theorems that generalize the Theorem 3.1 and Theorem 3.2 which were given in second part, has been expressed and proved.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve yardımlarını esirgemeyen danışmanlarım Niğde Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Başkanı Yrd Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ'a ve Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğr.Gör. Dr. A. Nihal TUNCER'e, ayrıca Erciyes Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Hüseyin BOR'a teşekkürlerimi arz ederim

Ayrıca, tez çalışmalarım sırasında manevi desteklerini esirgemeyen Matematik Bölümünün diğer öğretim üyesi ve elemanlarına teşekkür ederim.

Yusuf DENİZ

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLLER

N	: Doğal Sayılar Cümlesi
$\sum a_n$	: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi
(s_n)	: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi
$(s_n) = O(1)$	: (s_n) dizisi sınırlı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Genel olarak seriler ıraksak ve yakınsak seriler olmak üzere iki ana grupta toplanır. Iraksak serilerde kendi aralarında belirsiz ıraksak seriler ve belirli ıraksak seriler olmak üzere iki grupta incelenir. Herhangi bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bunun kısmi toplamlar dizisinin yakınsak olmasıdır ve ayrıca yakınsak dizilerin yığılma noktası tektir. Fakat belirsiz ıraksak serilerin kısmi toplamlar dizisinin en az iki yığılma noktası vardır. Birden fazla yığılma noktası olan dizilere salınım yapan diziler adı verilir. Salınım yapan dizilerin denk geldiği tam bir değeri bulmak gerekir. Bu türdeki dizilere en iyi bir sayının nasıl karşılık getirilebildiğini araştırmak amacıyla çeşitli toplanabilme metotları tanımlanmıştır.

Toplanabilme metotları ile ilgili çalışmalar 19. yüzyılda başlamıştır. Euler, Abel, Riemann, Re Loy, Hausdorff, Borel, Nörlund, Cesàro ve Riezs gibi matematikçiler özel toplanabilme metotları tanımlayarak bu alanda çalışan diğer matematikçilere yol açmışlardır. Günümüzde toplanabilme metotları üzerine çalışan matematikçilerin çoğu, bu özel toplanabilme metotları arasındaki ilişkileri incelemektedirler.

Bu çalışmada $|C,1|_k$ ve $|\overline{N},p_n|_k$ toplanabilme metotları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Bu tez giriş bölümü dahil beş bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde tezde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde $|C,1|_k$ ve $|\overline{N},p_n|_k$ toplanabilme metotlarının hangi şartlar altında birbirine denk olduğunu gösteren iki teoremin ifade ve ispatı verildi. Dördüncü bölümde $|C,1|_k$ toplanabilirliği yerine $|\overline{N},q_n|_k$ toplanabilme metodu alınarak iki toplanabilme metodu arasındaki ilişkiyi veren bir teorem ifade ve ispat edildi. Beşinci bölümde, üçüncü bölümde verilen teoremler genelleştirildi.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, ilk olarak konumuzla ilgili bazı tanım ve teoremler verilerek işe başlanacaktır.

Aksi belirtilmedikçe bu çalışmada baştan sona kadar (s_n); $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisini ve (p_n);

$$P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v \to \infty, \quad n \to \infty, \qquad (P_{-i} = p_{-i} = 0, \; i \geq 1)$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisini gösterecektir.

2.1.Tanım. (s_n); $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ve (u_n)' de birinci mertebeden Cesàro ortalamasını göstersin. Yani

$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=0}^{n} s_v \tag{2.1}$$

olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} u_n = s$$

ise , $\sum a_n$ serisi s değerine (C,1) toplanabilirdir denir.

2.2.Tanım. (u_n); (2.1) ifadesindeki gibi tanımlanmak üzere eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n - u_{n-1}| < \infty \tag{2.2}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C,1|$ toplanabilirdir denir [10].

2.3.Tanım. $k \geq 1$ olmak üzere eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} |u_n - u_{n-1}|^k < \infty \tag{2.3}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilirdir denir [11].

Özel olarak (2.3) ifadesinde $k = 1$ alınırsa, $|C,1|$ toplanabilme elde edilir.

2.4.Tanım. (s_n); $\sum a_n$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. $\alpha > -1$ olmak üzere u_n^α ve t_n^α sırasıyla (s_n) ve (na_n) dizisinin α-ıncı mertebeden n-inci Cesàro ortalamasını göstersinler. Yani

$$u_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=0}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1} s_v \tag{2.4}$$

$$t_n^\alpha = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{v=1}^{n} A_{n-v}^{\alpha-1} v a_v \tag{2.5}$$

olsun. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} u_n^\alpha = s$$

ise, $\sum a_n$ serisi s değerine (C,α) toplanabilirdir denir.

Burada

$$\begin{aligned} & A_n^\alpha = \binom{n+\alpha}{n} = O(n^\alpha), \qquad \alpha > -1, \quad A_0^\alpha = 1 \\ & n > 0, \quad A_{-n}^\alpha = 0 \end{aligned} \tag{2.6}$$

dır[18].

2.5.Tanım. (u_n^α); (2.4) ifadesindeki gibi tanımlanmak üzere, eğer $\alpha > -1$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha\right| < \infty \tag{2.7}$$

ise $\sum a_n$ serisi $|C, \alpha|$ toplanabilirdir denir[10].

2.6.Tanım. $k \geq 1$ olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1} \left|u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha\right|^k < \infty \tag{2.8}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|C, \alpha|_k$ toplanabilirdir denir[11].

Burada $t_n^\alpha = n\left(u_n^\alpha - u_{n-1}^\alpha\right)$ ([14]) olduğundan (2.8) şartı

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left|t_n^\alpha\right|^k < \infty$$

şeklinde yazılabilir.

2.7.Tanım. $\delta \geq 0$, $\alpha > -1$ ve $k \geq 1$ olmak üzere eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta k-1} \left|t_n^\alpha\right|^k < \infty \tag{2.9}$$

ise $\sum a_n$ serisi $|C, \alpha ; \delta|_k$ toplanabilirdir denir [12].

Özel olarak (2.9) ifadesinde $\delta = 0$ alınırsa, $|C,\alpha|_k$ toplanabilme ve yine (2.9) ifadesinde $\delta = 0$ ve $\alpha = 1$ alınırsa $|C,1|_k$ toplanabilme ve son olarak da (2.9) ifadesinde $\alpha = 1$ alınırsa, $|C,1;\delta|_k$ toplanabilme elde edilir.

2.8.Tanım. (p_n);

$$P_n = \sum_{v=0}^{n} p_v \to \infty, \qquad n \to \infty \tag{2.10}$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisini ve (t_n) de $(\overline{N},p_n)$ ortalamasını göstersin. Yani

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v s_v \tag{2.11}$$

olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} t_n = s \tag{2.12}$$

ise $\sum a_n$ serisi s değerine $(\overline{N},p_n)$ toplanabilirdir denir [13].

$(\overline{N},p_n)$ metodu regüler bir metottur. Bu metodun regüler olması için gerek ve yeter şart $n \to \infty$ için $P_n \to \infty$ olmasıdır [17].

2.9.Tanım. (t_n); (2.11) ifadesindeki gibi tanımlanmak üzere eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n - t_{n-1}| < \infty \tag{2.13}$$

ise, $\sum a_n$ serisi $|\overline{N},p_n|$ toplanabilirdir denir [16].

2.10.Tanım. $k \geq 1$ olmak üzere eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|t_n - t_{n-1}\right|^k < \infty \tag{2.14}$$

ise $\sum a_n$ serisi $\left|\overline{N},p_n\right|_k$ toplanabilirdir denir [1].

Özel olarak (2.14) ifadesinde $\forall n \in N$ için $p_n=1$ alınırsa, $\left|C,1\right|_k$ toplanabilme bulunur.

2.11.Tanım. $\delta \geq 0$ ve $k \geq 1$ olmak üzere eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|T_n - T_{n-1}\right|^k < \infty \tag{2.15}$$

ise $\sum a_n$ serisi $\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilirdir denir [4].

Özel olarak (2.15) ifadesinde $\delta = 0$ alınırsa $\left|\overline{N},p_n;\delta\right|_k$ toplanabilme, $\left|\overline{N},p_n\right|_k$ toplanabilmeye dönüşür.

2.12.Tanım. A ve B verilen iki toplanabilme metodu olsun. A toplanabilen her dizi aynı değere B toplanabiliyorsa, A' ya B' yi gerektiriyor denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir.

Eğer $A \subseteq B$ ve $B \subseteq A$ ise, A metodu B metoduna denktir denir.[17].

2.13.Tanım. (Hölder Eşitsizliği).

$p>1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ve $a_1, a_2,\ldots, a_n \geq 0$, $b_1, b_2,\ldots, b_n \geq 0$ olsun, bu taktirde

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.16}$$

dır [15].

2.14.Tanım. (Minkowski Eşitsizliği).

$p \geq 1$, $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, $b_1, b_2, ..., b_n \geq 0$ olsun, bu taktirde

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.17}$$

dır [15].

2.15.Lemma. $k \geq 1$ ve $A = (a_{nv})$ sonsuz bir matris olsun. $A \in (\ell^k, \ell^k)$ olması için gerekli şart, bütün $n,v \geq 0$ için

$a_{nv} = O(1)$

olmasıdır [7].

BÖLÜM 3

$|C,1|_k$ ve $|\bar{N},p_n|_k$ TOPLANABİLME METOTLARI

Bu bölümde $|C,1|_k$ ile $|\bar{N},p_n|_k$ toplanabilme metotlarının hangi şartlar altında birbirine denk olduğunu veren iki teorem ifade ve ispat edilecektir.

3.1.Teorem. (p_n);

$$\left.\begin{aligned} &i)\, np_n = O(P_n) \\ &ii) P_n = O(np_n) \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

olacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi olsun. $k \geq 1$ olmak üzere eğer $\sum a_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabiliyorsa, bu seri aynı zamanda $|\bar{N},p_n|_k$ toplanabilirdir [2].

İspat. $\sum a_n$ serisinin $(\bar{N},p_n)$ ortalaması T_n olsun. Bu taktirde

$$T_n = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v s_v = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n}(P_n - P_{v-1})a_v \tag{3.2}$$

elde edilir. $\sum a_n$ serisinin $|C,1|_k$ toplanabilir olması demek,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|t_n|^k < \infty \tag{3.3}$$

olması demektir. Diğer taraftan

$$T_n - T_{n-1} = \left(\frac{1}{P_n} - \frac{1}{P_{n-1}}\right)\sum_{v=1}^{n} P_{v-1}\, a_v = -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v \tag{3.4}$$

$$= -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} v a_v \frac{P_{v-1}}{v}$$

olur. Şimdi Abel kısmi toplam formülü uygulanarak,

$$T_n - T_{n-1} = \frac{-p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} p_v t_v + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v t_v}{v} + \frac{(n+1)p_n t_n}{nP_n}$$

$$= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3}$$

elde edilir. Teoremi ispat etmek için Minkowski eşitsizliğinden yararlanarak, $r = 1, 2, 3$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,r}|^k < \infty \tag{3.5}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Şimdi ilk olarak $k > 1$ olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,1}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left| \frac{-p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} p_v t_v \right|^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} p_v |t_v| \right\}^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} p_v |t_v|^k \right\}$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^{k-1+1}} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} p_n^{1/k} p_n^{1/k'} |t_v| \right\}^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \left\{ \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(p_v^{1/k} |t_v|\right)^k \right\}^{1/k} \times \frac{1}{P_{n-1}^{k-1}} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \left(p_v^{1/k'}\right)^{k'} \right\}^{1/k'} \right\}^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n\,P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v\,|t_v|^k \times \frac{1}{P_{n-1}^{k-1}} \left\{\sum_{v=1}^{n-1} p_v\right\}^{k/k'}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v|t_v|^k \times \left\{\frac{1}{P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n\,P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} p_v\,|t_v|^k$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} p_v|t_v|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} = O(1)\sum_{v=1}^{m} \frac{p_v}{P_v}|t_v|^k$$

(3.1) ifadesinin (i) şartı gereğince $np_n = O(P_n)$ olduğundan ve (3.3) ifadesinden

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |T_{n,1}|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}\frac{1}{v}|t_v|^k = O(1), \qquad m \to \infty$$

bulunur. İkinci olarak (3.1) ifadesinin (ii) şartı gereğince, $P_v = O(vp_v)$ olduğundan ve (3.3) ifadesinden

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |T_{n,2}|^k = \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left|\frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v t_v}{v}\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1} \frac{p_n}{P_n P_{n-1}^k} \left\{\sum_{v=1}^{n-1} p_v|t_v|^k\right\} = O(1)\sum_{v=1}^{m}\frac{1}{v}|t_v|^k = O(1), \qquad m \to \infty$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} |T_{n,3}|^k = \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1} \left|\frac{(n+1)\,p_n\,t_n}{n\,p_n}\right|^k$$

$$= \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} \left(\frac{p_n}{P_n} \right)^{k} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{k} |t_n|^k$$

$$= O(1) \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{p_n}{P_n} \right) |t_n|^k$$

(3.1) ifadesinin (i) şartı getreğince $np_n = O(P_n)$ olduğundan ve (3.3) ifadesinden

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,3}|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} |t_n|^k = O(1), \quad m \to \infty$$

olur. Buradan $r = 1, 2, 3$ için,

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |T_{n,r}|^k = O(1), \quad m \to \infty$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatıdır.

3.2.Teorem. (p_n); (3.1) şartını sağlayacak şekilde pozitif sayıların bir dizisi ve $k \geq 1$ olsun. Eğer $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabiliyorsa bu taktirde $\sum a_n$ serisi $|C,1|_k$ toplanabilirdir [3].

İspat. (3.2) ve (3.4) ifadelerini göz önüne alalım. $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilirse

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{k-1} |\Delta T_{n-1}|^k < \infty \tag{3.6}$$

dır. (3.4) ifadesinden

$$\Delta T_{n-1} = \left(\frac{-1}{P_{n-1}} + \frac{1}{P_n} \right) \sum_{v=0}^{n} P_{v-1} a_v = \frac{-p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=0}^{n} P_{v-1} a_v$$

olduğundan,

$$P_{n-1} a_n = -\frac{P_n P_{n-1}}{p_n} \Delta T_{n-1} + \frac{P_{n-1} P_{n-2}}{p_{n-1}} \Delta T_{n-2}$$

bulunur. Buradan

$$a_n = -\frac{P_n}{p_n} \Delta T_{n-1} + \frac{P_{n-2}}{p_{n-1}} \Delta T_{n-2} \tag{3.7}$$

elde edilir.

(na_n) dizisinin n-inci $(C,1)$ ortalamasını t_n ile gösterelim. Yani;

$$t_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n} v a_v \tag{3.8}$$

olsun. (3.7) ifadesinden

$$a_v = -\frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} + \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} \Delta T_{v-2}$$

olduğundan

$$t_n = \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n} v \left\{ -\frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} + \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} \Delta T_{v-2} \right\}$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n} (-v) \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} + \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n} v \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}} \Delta T_{v-2}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}(-v)\frac{P_v}{p_v}\Delta T_{v-1} - \frac{nP_n}{(n+1)p_n}\Delta T_{n-1} + \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n}\frac{vP_{v-2}}{p_{v-1}}\Delta T_{v-2}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}(-v)\frac{P_v}{p_v}\Delta T_{v-1} + \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}(v+1)\frac{P_{v-1}}{p_v}\Delta T_{v-1} - \frac{nP_n}{(n+1)p_n}\Delta T_{n-1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\frac{1}{p_v}\Delta T_{v-1}\{-vP_v + (v+1)P_{v-1}\}\right\} - \frac{nP_n}{(n+1)p_n}\Delta T_{n-1}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$-vP_v + (v+1)P_{v-1} = -vP_v + vP_{v-1} + P_{v-1} = v(-P_v + P_{v-1}) + (P_v - p_v)$$

$$= -vp_v + P_v - p_v = P_v - (v+1)p_v$$

olduğundan

$$t_n = \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\frac{1}{p_v}\Delta T_{v-1}[P_v - (v+1)p_v]\right\} - \frac{nP_n}{(n+1)p_n}\Delta T_{n-1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}\Delta T_{v-1} - \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{1}{p_v}(v+1)p_v\Delta T_{v-1} - \frac{nP_n}{(n+1)p_n}\Delta T_{v-1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}\Delta T_{v-1} - \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}(v+1)\Delta T_{v-1} - \frac{nP_n}{(n+1)p_n}\Delta T_{n-1}$$

$$= t_{n,1} + t_{n,2} + t_{n,3}$$

elde edilir.

Teoremin ispatı için, Minkowski eşitsizliğini kullanarak, r = 1, 2, 3 için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left|t_{n,r}\right|^{k} < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi $k > 1$ için Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n}\left|t_{n,1}\right|^{k} = \sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}\Delta T_{v-1}\right|^{k} \leq \sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n^{k+1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}\left|\Delta T_{v-1}\right|\right\}^{k}$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n^2}\sum_{v=1}^{n-1}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k}\left|\Delta T_{v-1}\right|^{k} \times \left\{\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n-1}1\right\}^{k-1} = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n^2}\sum_{v=1}^{n-1}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k}\left|\Delta T_{v-1}\right|^{k}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k}\left|\Delta T_{v-1}\right|^{k}\sum_{n=v+1}^{m+1}\frac{1}{n^2} = O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k}\frac{1}{v}\left|\Delta T_{v-1}\right|^{k}$$

elde edilir.

Böylece (3.1) ifadesinin (ii) şartı gereğince

$$1/v = O(P_v / p_v)$$

olduğundan ve (3.6) ifadesinden dolayı

$$\sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n}\left|t_{n,1}\right|^{k} = O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k-1}\left|\Delta T_{v-1}\right|^{k} = O(1)\ , \quad m\to\infty$$

bulunur. Yine $k > 1$ için Hölder Eşitsizliği uygulanırsa

$$\sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n}\left|t_{n,2}\right|^{k} = \sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}(v+1)\Delta T_{v-1}\right|^{k} = \sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{v+1}{v}v\Delta T_{v-1}\right|^{k}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n^{k+1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1} v|\Delta T_{v-1}|\right\}^{k} = O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n^{2}}\sum_{v=1}^{n-1} v^{k}|\Delta T_{v-1}|^{k} \times \left\{\frac{1}{n}\sum_{v=1}^{n-1} 1\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}\frac{1}{n^{2}}\sum_{v=1}^{n-1} v^{k}|\Delta T_{v-1}|^{k}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v^{k}|\Delta T_{v-1}|^{k}\sum_{n=v+1}^{m+1}\frac{1}{n^{2}}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v^{k}|\Delta T_{v-1}|^{k}\frac{1}{v}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m} v^{k-1}|\Delta T_{v-1}|^{k}$$

dır. Böylece (3.1) ifadesinin (i) şartı gereği $v = O(P_v / p_v)$ olduğundan ve (3.6) ifadesinden dolayı

$$\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n}|t_{n,2}|^{k} = O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k-1}|\Delta T_{v-1}|^{k} = O(1), \quad m \to \infty$$

elde edilir. Sonuç olarak;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}|t_{n,3}|^{k} = \sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\left|\frac{nP_n}{(n+1)p_n}\Delta T_{n-1}\right|^{k} = O(1)\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k}|\Delta T_{n-1}|^{k}$$

dır. Böylece (3.1) ifadesinin (ii) şartından $1/n = O(p_n / P_n)$ olduğundan ve (3.6) ifadesinden dolayı

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\left|t_{n,3}\right|^{k} = O(1)\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|\Delta T_{n-1}\right|^{k} = O(1), \quad m \to \infty$$

bulunur. Dolayısıyla, r = 1, 2, 3 için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left|t_{n,r}\right|^{k} = O(1), \quad m \to \infty$$

elde edilir. Bu da teoremin ispatıdır.

BÖLÜM 4

$\left|\bar{N}, p_n\right|_k$ TOPLANABİLME METODU İLE $\left|\bar{N}, q_n\right|_k$ TOPLANABİLME METODU ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde üçüncü bölümde verilen Teorem 3.1 ve Teorem 3.2' deki $\left|C,1\right|_k$ toplanabilirliği yerine $\left|\bar{N}, q_n\right|_k$ toplanabilme metodunu alarak, iki toplama metodunun, birinin diğerini gerektirmesi için hangi şartların gerek ve yeter şart olduğunu veren daha genel bir teorem ifade ve ispat edilecektir.

4.1.Teorem. (p_n) ve (q_n) pozitif diziler ve $k \geq 1$ olsun. $\left|\bar{N}, p_n\right|_k$ toplanabilen her serinin $\left|\bar{N}, q_n\right|_k$ toplanabilir olması için

$$\frac{q_n P_n}{Q_n p_n} = O(1) \tag{4.1}$$

şartının sağlanması gereklidir[8]. Eğer,

$$\frac{Q_n p_n}{q_n P_n} = O(1) \tag{4.2}$$

şartı da sağlanıyorsa, (4.1) şartı aynı zamanda yeterlidir [5].

İspat.

Yeterlilik. $\sum a_n$ serisinin $(\bar{N}, p_n)$ ortalaması t_n olsun. Bu taktirde, küçük bir hesaplama neticesinde

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} p_v s_v = \frac{1}{P_n} \sum_{v=0}^{n} (P_n - P_{v-1}) a_v \tag{4.3}$$

elde edilir. $\sum a_n$ serisinin $\left|\bar{N}, p_n\right|_k$ toplanabilir olması demek,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|\Delta t_{n-1}\right|^k < \infty \tag{4.4}$$

olmasıdır. Diğer taraftan

$$\Delta t_{n-1} = t_{n-1} - t_n = -(t_n - t_{n-1}) = -\left(\frac{1}{P_n} - \frac{1}{P_{n-1}}\right)\sum_{v=1}^{n} a_v P_{v-1}$$

$$= -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} a_v P_{v-1}, \qquad n \geq 1, \ (P_{-1} = 0) \tag{4.5}$$

olduğundan (4.5) ifadesinde n yerine (n-1) alınırsa,

$$\Delta t_{n-2} = -\frac{p_{n-1}}{P_{n-1}P_{n-2}}\sum_{v=1}^{n-1} a_v P_{v-1}$$

bulunur. Buradan da

$$\sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v = -\frac{P_n P_{n-1}}{p_n}\Delta t_{n-1} \tag{4.6}$$

$$\sum_{v=1}^{n-1} P_{v-1} a_v = -\frac{P_{n-1}P_{n-2}}{p_{n-1}}\Delta t_{n-2} \tag{4.7}$$

yazılır. (4.6) ifadesinden (4.7) ifadesi çıkarılır ise

$$a_n = \frac{1}{P_{n-1}}\left\{-\frac{P_n P_{n-1}}{p_n}\Delta t_{n-1} + \frac{P_{n-1}P_{n-2}}{p_{n-1}}\Delta t_{n-2}\right\} \tag{4.8}$$

$$= -\frac{P_n}{p_n}\Delta t_{n-1} + \frac{P_{n-2}}{p_{n-1}}\Delta t_{n-2}, \qquad (n \geq 1) \tag{4.9}$$

elde edilir. Eğer $\sum a_n$ serisinin $(\overline{N}, q_n)$ ortalaması T_n ise benzer olarak

$$T_n = \frac{1}{Q_n}\sum_{v=0}^{n} q_v s_v = \frac{1}{Q_n}\sum_{v=0}^{n}(Q_n - Q_{v-1})a_v \tag{4.10}$$

elde edilir. Böylece (4.5) ifadesindeki benzer düşünce kullanılarak

$$\Delta T_{n-1} = -\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} Q_{v-1} a_v\ , \qquad n \geq 1\ ,\ (Q_{-1}=0) \tag{4.11}$$

elde edilir. (4.9) ifadesinde elde edilen a_v değeri (4.11) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\Delta T_{n-1} = -\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} Q_{v-1}\left\{-\frac{P_v}{p_v}\Delta t_{v-1} + \frac{P_{v-2}}{p_{v-1}}\Delta t_{v-2}\right\}$$

$$= \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} Q_{v-1}\frac{P_v}{p_v}\Delta t_{v-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} Q_{v-1}\frac{P_{v-2}}{p_{v-1}}\Delta t_{v-2}$$

$$= \frac{q_n P_n}{Q_n Q_{n-1}} Q_{n-1}\frac{1}{p_n}\Delta t_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1} Q_{v-1}\frac{P_v}{p_v}\Delta t_{v-1}$$

$$- \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=0}^{n-1} Q_v \frac{P_{v-1}}{p_v}\Delta t_{v-1}$$

$$= \frac{q_n P_n}{Q_n p_n}\Delta t_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1} Q_{v-1}\frac{P_v}{p_v}\Delta t_{v-1} - \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1} Q_v \frac{P_{v-1}}{p_v}\Delta t_{v-1}$$

$$= \frac{q_n P_n}{Q_n p_n}\Delta t_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}(Q_{v-1}P_v - Q_v P_{v-1})\frac{\Delta t_{v-1}}{p_v}$$

$$= \frac{q_n P_n}{Q_n p_n}\Delta t_{n-1} + \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\{(Q_v - q_v)P_v - Q_v(P_v - p_v)\}\frac{\Delta t_{v-1}}{p_v}$$

$$=\frac{q_n P_n}{Q_n p_n}\Delta t_{n-1}+\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}(Q_v p_v - q_v P_v)\frac{\Delta t_{v-1}}{p_v}$$

$$=\frac{q_n P_n}{Q_n p_n}\Delta t_{n-1}+\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}Q_v\Delta t_{v-1}-\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}q_v\frac{P_v}{p_v}\Delta t_{v-1}$$

$$=\frac{q_n P_n}{Q_n p_n}\Delta t_{n-1}-\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}q_v\frac{P_v}{p_v}\Delta t_{v-1}+\frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}Q_v\Delta t_{v-1}$$

$$=T_{n,1}+T_{n,2}+T_{n,3}$$

elde edilir. Teoremi ispat etmek için Minkowski eşitsizliğinden yaralanarak, $r = 1, 2, 3$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,r}\right|^k<\infty \tag{4.12}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak ,

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,1}\right|^k=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|\frac{q_n P_n}{Q_n p_n}\Delta t_{n-1}\right|^k$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left(\frac{q_n}{Q_n}\right)^k\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^k\left|\Delta t_{n-1}\right|^k$$

$$=\sum_{n=1}^{m}\frac{q_n}{Q_n}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^k\left|\Delta t_{n-1}\right|^k$$

(4.1) ifadesinden dolayı $\frac{q_n}{Q_n}=O\left(\frac{P_n}{p_n}\right)$ olduğundan ve (4.4) ifadesinden

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,1}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m}\frac{p_n}{P_n}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^k\left|\Delta t_{n-1}\right|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1}\left|\Delta t_{n-1}\right|^k$$

$$= O(1), \qquad (m \to \infty)$$

elde edilir. Şimdi de $k>1$ olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|T_{n,2}\right|^k = \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|-\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}q_v\Delta t_{v-1}\right|^k$$

$$= \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left(\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\right)^k\left\{\left|\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}q_v\Delta t_{v-1}\right|\right\}^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\frac{q_n^k}{Q_n^kQ_{n-1}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}q_v\left|\Delta t_{v-1}\right|\right\}^k$$

$$= \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\frac{q_n^k}{Q_n^kQ_{n-1}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}q_v^{1/k}q_v^{(k-1)/k}\left|\Delta t_{v-1}\right|\right\}^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\frac{q_n^k}{Q_n^kQ_{n-1}^k}\times\left\{\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left(\frac{P_v}{p_v}q_v^{1/k}\left|\Delta t_{v-1}\right|\right)^k\right]^{1/k}\left[\sum_{v=1}^{n-1}\left(q_v^{(k-1)/k}\right)^p\right]^{1/p}\right\}^k$$

$$= \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\frac{q_n^k}{Q_n^kQ_{n-1}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^kq_v\left|\Delta t_{v-1}\right|^k\right\}\times\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\left(q_v^{(k-1)/k}\right)^p\right\}^{k/p}$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\frac{q_n^k}{Q_n^kQ_{n-1}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^kq_v\left|\Delta t_{v-1}\right|^k\right\}\times\left\{\sum_{v=1}^{n-1}q_v\right\}^{k-1}$$

$$=\sum_{n=2}^{m+1}\frac{Q_n^k}{q_n^k}\frac{q_n}{Q_n}\frac{q_n^k}{Q_n^k}\frac{Q_{n-1}^{k-1}}{Q_{n-1}^k}\sum_{v=1}^{n-1}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k q_v|\Delta t_{v-1}|^k$$

$$=\sum_{n=2}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k q_v|\Delta t_{v-1}|^k$$

$$=\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k q_v|\Delta t_{v-1}|^k\sum_{n=v+1}^{m+1}\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}$$

$$=O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k\frac{q_v}{Q_v}|\Delta t_{v-1}|^k$$

elde edilir.

(4.1) ifadesinden dolayı $\frac{q_n}{Q_n}=O\left(\frac{p_n}{P_n}\right)$ olduğundan ve (4.4) ifadesinden

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}|T_{n,2}|^k=O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k\frac{p_v}{P_v}|\Delta t_{v-1}|^k=O(1)\sum_{v=1}^{m}\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k-1}|\Delta t_{v-1}|^k$$

$$=O(1)\,,\qquad (m\to\infty)$$

elde edilir. Son olarak

$$\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}|T_{n,3}|^k=\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\left|\frac{q_n}{Q_nQ_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}Q_v\Delta t_{v-1}\right|^k$$

$$\leq\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1}\frac{q_n^k}{Q_n^kQ_{n-1}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}Q_v|\Delta t_{v-1}|\right\}^k$$

$$=\sum_{n=2}^{m+1}\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^k\frac{q_n}{Q_n}\frac{q_n^k}{Q_n^k}\frac{1}{Q_{n-1}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}Q_v|\Delta t_{v-1}|\right\}^k$$

$$= \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{Q_v}{q_v} q_v |\Delta t_{v-1}| \right\}^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n} \frac{1}{Q_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{Q_v^k}{q_v^k} q_v |\Delta t_{v-1}|^k \right\} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} q_v^{p(k-1)/k} \right\}^{k/p}$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n} \frac{1}{Q_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{Q_v^k}{q_v^k} q_v |\Delta t_{v-1}|^k \right\} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} q_v \right\}^{k-1}$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n} \frac{1}{Q_{n-1}^k} Q_{n-1}^{k-1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{Q_v^k}{q_v^k} q_v |\Delta t_{v-1}|^k$$

$$= \sum_{n=2}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{Q_v}{q_v}\right)^k q_v |\Delta t_{v-1}|^k$$

$$= \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{Q_v}{q_v}\right)^k q_v |\Delta t_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{Q_v}{q_v}\right)^k \frac{q_v}{Q_v} |\Delta t_{v-1}|^k$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{Q_v}{q_v}\right)^{k-1} |\Delta t_{v-1}|^k$$

elde edilir.

(4.2) ifadesinden dolayı $\frac{Q_n}{q_n} = O(\frac{P_n}{p_n})$ olduğundan ve (4.4) ifadesinden

$$\sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} |T_{n,3}|^k = O(1) \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{k-1} |\Delta t_{v-1}|^k = O(1), \qquad (m \to \infty)$$

elde edilir. O halde r = 1, 2, 3 için

$$\sum_{n=1}^{m} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1} \left|T_{n,r}\right|^k = O(1) \ , \qquad (m \to \infty)$$

bulunur.

Gereklilik. Gerekliliğin ispatı için (2.4) ifadesinin seriden seriye dönüşümünü ve $n \geq 1$ için (4.5) ve (4.11) ifadelerini göz önüne alalım. $n \geq 1$ için yeterliliğin ispatında hesaplandığı gibi

$$\Delta T_{n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\Delta t_{v-1}}{p_v} (P_v Q_{v-1} - P_{v-1} Q_v) + \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \Delta t_{n-1} \tag{4.13}$$

olduğundan (4.13) ifadesinin her iki tarafını $\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{1-1/k}$ ile çarpılırsa,

$$\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{1-1/k} \Delta T_{n-1} = \frac{q_n}{Q_n Q_{n-1}} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{1-1/k} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{\Delta t_{v-1}}{p_v} (P_v Q_{v-1} - P_{v-1} Q_v)$$

$$+ \frac{q_n P_n}{Q_n p_n} \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{1-1/k} \Delta t_{n-1}$$

$$= \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{q_n}{Q_n}\right)^{1/k} \left(\frac{P_v Q_{v-1} - Q_v P_{v-1}}{p_v Q_{n-1}}\right) \left(\frac{p_v}{P_v}\right)^{1-1/k} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{1-1/k} \Delta t_{v-1}$$

$$+ \left(\frac{q_n P_n}{Q_n p_n}\right)^{1/k} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{1-1/k} \Delta t_{n-1} \tag{4.14}$$

yazılabilir. (4.14) ifadesinde

$$x_n = \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{1-1/k} \Delta t_{n-1}$$

$$y_n = \left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{1-1/k} \Delta T_{n-1}$$

ve

$$A_{nv} = \begin{cases} \left(\frac{q_n}{Q_n}\right)^{\frac{1}{k}} \left(\frac{P_v Q_{v-1} - Q_v P_{v-1}}{p_v Q_{n-1}}\right)\left(\frac{p_v}{P_v}\right)^{1-\frac{1}{k}} & , n \geq v+1 \\ \left(\frac{q_n P_n}{Q_n p_n}\right)^{\frac{1}{k}} & , n = v \\ O & , n < v \end{cases}$$

olarak alınırsa, (4.14) eşitliği

$$y_n = \sum_{v=1}^{\infty} A_{nv} x_v$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan hemen yazılabilir ki A matrisi $\left(\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{k-1/k} \Delta t_{n-1}\right)$ i $\left(\left(\frac{Q_n}{q_n}\right)^{k-1/k} \Delta T_{n-1}\right)$ içine dönüştürür. Şu halde $\left|\bar{N},p_n\right|_k$ toplanabilen her serinin $\left|\bar{N},q_n\right|_k$ toplanabilirliği, $A \in \left(\ell^k, \ell^k\right)$ olması demektir. Böylece Lemma 2.15' den dolayı $\left|\bar{N},p_n\right|_k \Rightarrow \left|\bar{N},q_n\right|_k$ olması için gerekli şart, A matrisinin elemanlarının sınırlı olmasıdır. Özel olarak bunun diagonal elemanlarının sınırlı olması gerekir. Bu da (4.1) şartının gerekliliği demektir.

BÖLÜM 5

$|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ TOPLANABİLME METODU İLE $|C,1;\delta|_k$ TOPLANABİLME METODU ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde üçüncü bölümde verilen Teorem 3.1 ve Teorem 3.2 deki $|C,1|_k$ ve $|\bar{N}, p_n|_k$ toplanabilme metotları, $\delta \geq 0$ için $|C,1;\delta|_k$ ve $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ toplanabilme metotlarını alarak bu metotlar arasındaki ilişkiyi veren iki teorem ifade ve ispat edilecektir.

5.1.Teorem. $k \geq 1$, $\delta \geq 0$ ve $1-\delta k > 0$ olsun. (p_n); (3.1) şartını sağlayacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\sum a_n$ serisi $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ toplanabilir ise, bu seri aynı zamanda $|C,1;\delta|_k$ toplanabilirdir [9].

İspat. $\sum a_n$ serisinin $(\bar{N}, p_n)$ ortalaması T_n olsun. Bu taktirde

$$T_n = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n} p_v s_v = \frac{1}{P_n}\sum_{v=0}^{n}(P_n - P_{v-1})\, a_v \tag{5.1}$$

olduğu biliniyor. Buradan

$$\Delta T_{n-1} = -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n} P_{v-1} a_v$$

yazılır. $\sum a_n$ serisinin $|\bar{N}, p_n; \delta|_k$ toplanabilir olması demek

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|\Delta T_{n-1}|^k < \infty \tag{5.2}$$

olmasıdır. Dolayısıyla,

$$P_{n-1}a_n = -\frac{P_nP_{n-1}}{p_n}\Delta T_{n-1} + \frac{P_{n-1}P_{n-2}}{p_{n-1}}\Delta T_{n-2}$$

dır. Yani

$$a_n = -\frac{P_n}{p_n}\Delta T_{n-1} + \frac{P_{n-2}}{p_{n-1}}\Delta T_{n-2} \tag{5.3}$$

t_n, $(n\,a_n)$ dizisinin n- inci (C,1) ortalamasını göstersin. Yani (5.3) ifadesinden

$$a_n = -\frac{P_n}{p_n}\Delta T_{v-1} + \frac{P_{n-2}}{p_{n-1}}\Delta T_{v-2}$$

olduğundan

$$t_n = \frac{1}{n+1}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}\frac{1}{p_v}\Delta T_{v-1}\left[-vP_v + (v+1)P_v\right]\right\} - \frac{nP_n}{(n+1)p_n}\Delta T_{n-1}$$

olur. Ayrıca,

$$-vP_v + (v+1)P_{v-1} = P_v - (v+1)P_v$$

olduğundan

$$t_n = \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{p_v}\Delta T_{v-1} - \frac{1}{n+1}\sum_{v=1}^{n-1}(v+1)\Delta T_{v-1} - \frac{nP_n}{(n+1)p_n}\Delta T_{n-1}$$

$$= t_{n,1} + t_{n,2} + t_{n,3}$$

elde edilir.

Teoremi ispat etmek için Minkowski eşitsizliğini kullanarak $r = 1, 2, 3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\delta k}} |t_{n,r}|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $k > 1$ olmak üzere Hölder Eşitsizliğini kullanarak,

$$\sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{1-\delta k}} |t_{n,1}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{1-\delta k}} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} \right|^k \leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{k-\delta k+1}} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} |\Delta T_{v-1}| \right\}^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{2-\delta k}} \sum_{v=1}^{n-1} (\frac{P_v}{p_v})^k |\Delta T_{v-1}|^k \left\{ \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n-1} 1 \right\}^{k-1} = O(1) \sum_{v=1}^{m} (\frac{P_v}{p_v})^k |\Delta T_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{1}{n^{2-\delta k}}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} (\frac{P_v}{p_v})^k |\Delta T_{v-1}|^k \int_v^{\infty} x^{\delta k-2} dx = O(1) \sum_{v=1}^{m} (\frac{P_v}{p_v})^k v^{\delta k} \frac{1}{v} |\Delta T_{v-1}|^k$$

elde edilir.

(3.1) ifadesinin (i) şartı gereğince $v^{\delta k} = O(P_v / p_n)^{\delta k}$ ve (3.1) ifadesinin (ii) şartı gereğince $1 / v = O(p_v / P_v)$

olduğundan ve (5.2) ifadesinden

$$\sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{1-\delta k}} |t_{n,1}|^k = O(1) \sum_{v=1}^{m} (\frac{P_v}{p_v})^{\delta k+k-1} |\Delta T_{v-1}|^k = O(1), \qquad m \to \infty$$

elde edilir. Yine $t_{n,1}$ de olduğu gibi

$$\sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{1-\delta k}} |t_{n,2}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{1-\delta k}} \left| -\frac{1}{n+1} \sum_{n=1}^{n-1} (v+1) \Delta T_{v-1} \right|^k$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\delta k}} |t_{n,r}|^k < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak $k > 1$ olmak üzere Hölder Eşitsizliğini kullanarak,

$$\sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{1-\delta k}} |t_{n,1}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{1-\delta k}} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} \Delta T_{v-1} \right|^k \leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{k-\delta k+1}} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{p_v} |\Delta T_{v-1}| \right\}^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{2-\delta k}} \sum_{v=1}^{n-1} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k |\Delta T_{v-1}|^k \left\{ \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n-1} 1 \right\}^{k-1} = O(1) \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k |\Delta T_{v-1}|^k \sum_{n=v+1}^{m+1} \frac{1}{n^{2-\delta k}}$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k |\Delta T_{v-1}|^k \int_v^{\infty} x^{\delta k-2} dx = O(1) \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^k v^{\delta k} \frac{1}{v} |\Delta T_{v-1}|^k$$

elde edilir.

(3.1) ifadesinin (i) şartı gereğince $v^{\delta k} = O(P_v / p_n)^{\delta k}$ ve (3.1) ifadesinin (ii) şartı gereğince $1/v = O(p_v / P_v)$

olduğundan ve (5.2) ifadesinden

$$\sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{1-\delta k}} |t_{n,1}|^k = O(1) \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k+k-1} |\Delta T_{v-1}|^k = O(1), \qquad m \to \infty$$

elde edilir. Yine $t_{n,1}$ de olduğu gibi

$$\sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{1-\delta k}} |t_{n,2}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{1-\delta k}} \left| -\frac{1}{n+1} \sum_{n=1}^{n-1} (v+1) \Delta T_{v-1} \right|^k$$

$$= \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{1-\delta k}} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} v \Delta T_{v-1} \right|^k = O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{1-\delta k+k}} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} v \left| \Delta T_{v-1} \right| \right\}^k$$

$$= O(1) \sum_{n=2}^{m+1} \frac{1}{n^{2-\delta k}} \sum_{v=1}^{n-1} v^k \left| \Delta T_{v-1} \right|^k \times \left\{ \frac{1}{n} \sum_{v=1}^{n-1} 1 \right\}^{k-1} = O(1) \sum_{v=1}^{m} v^{\delta k+k} \frac{1}{v} \left| \Delta T_{v-1} \right|^k$$

$$= O(1) \sum_{v=1}^{m} \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k+k-1} \left| \Delta T_{v-1} \right|^k$$

$$= O(1), \qquad m \to \infty$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{1-\delta k}} \left| t_{n,3} \right|^k = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{1-\delta k}} \left| \frac{nP_n}{(n+1)p_n} \Delta T_{n-1} \right|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^k n^{\delta k} \frac{1}{n} \left| \Delta T_{n-1} \right|^k$$

$t_{n,1}$ deki gibi düşünceye benzer olarak ve (5.2) ifadesinden

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{1-\delta k}} \left| t_{n,3} \right|^k = O(1) \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\delta k+k-1} \left| \Delta T_{n-1} \right|^k = O(1)$$

elde edilir. Buradan r =1,2,3 için

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{1-\delta k}} \left| t_{n,r} \right|^k = O(1), \qquad m \to \infty$$

olur. Bu da teoremin ispatıdır.

5.2.Teorem. $k \geq 1$ ve $\delta \geq O$ olsun. (p_n) Teorem 5.1'in (3.1) şartını ve

$$\sum_{n=v}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n} \right)^{\delta k-1} \frac{1}{P_{n-1}} = O\left\{ \left(\frac{P_v}{p_v} \right)^{\delta k} \frac{1}{P_v} \right\} \tag{5.4}$$

şartını sağlayacak şekilde pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. Eğer $\sum a_n$ serisi $|C,1;\delta|_k$ toplanabilir ise bu seri aynı zamanda $|\bar{N},p_n;\delta|_k$ toplanabilirdir [6].

İspat. (5.1) ifadesini göz önüne alalım. Buradan, $n \geq 2$ için

$$T_n - T_{n-1} = -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} p_v t_v + \frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P_v}{v} t_v + \frac{(n+1)p_n t_n}{nP_n}$$

$$= T_{n,1} + T_{n,2} + T_{n,3}$$

elde edilir.

$\sum a_n$ serisinin $|C,1;\delta|_k$ toplanabilir olması demek

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta k-1} |t_n|^k < \infty \tag{5.5}$$

olması demektir. Teoremin ispatını tamamlamak için $k \geq 1$ için Minkowski eşitsizliğini uygulayarak $r = 1,2,3$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1} |T_{n,r}|^k < \infty \tag{5.6}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk olarak, $k>1$ için $\frac{1}{k}+\frac{1}{k^1}=1$ olmak üzere Hölder Eşitsizliği uygulanarak

$$\sum_{n=2}^{m+2} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1} |T_{n,1}|^k = \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1} \left| -\frac{p_n}{P_n P_{n-1}} \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} p_v t_v \right|^k$$

$$\leq \sum_{n=2}^{m+1} \left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1} \frac{1}{P_{n-1}^k} \left\{ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{v+1}{v} p_v |t_v| \right\}^k$$

$$= O(1)\sum_{n=2}^{m+1}(\frac{P_n}{p_n})^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}p_v|t_v|^k\right\}\times\left\{\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}p_v\right\}^{k-1}$$

$$= O(1)\sum_{v=1}^{m}p_v|t_v|^k\sum_{n=v+1}^{m+1}(\frac{P_n}{p_n})^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}$$

(5.4) ifadesinden dolayı

$$\sum_{n=v}^{\infty}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}}=O\left\{\left(\frac{P_v}{p_v}\right)^{\delta k}\frac{1}{P_v}\right\}$$

olduğundan ve (3.1) ifadesinin (i) şartından $np_n = O(P_n)$ olduğundan ve yine (5.5) ifadesinden

$$O(1)\sum_{v=1}^{m}(\frac{P_{v+1}}{p_{v+1}})^{\delta k}\frac{p_v}{P_v}|t_v|^k = O(1)\sum_{v=1}^{m}v^{\delta k-1}|t_v|^k$$

$$= O(1), \qquad m\to\infty$$

elde edilir.

Şimdide $T_{n,1}$ deki benzer düşünce ile (3.1) ifadesinin (i) şartını kullanarak ve (5.5) ifadesinden

$$\sum_{n=2}^{m+1}(\frac{P_n}{p_n})^{\delta k+k-1}|T_{n,2}|^k = \sum_{n=2}^{m+1}(\frac{P_n}{p_n})^{\delta k+k-1}\left|\frac{p_n}{P_nP_{n-1}}\sum_{v=1}^{n-1}\frac{P_v}{v}t_v\right|^k = \sum_{n=2}^{m+1}(\frac{P_n}{p_n})^{\delta k-1}\frac{1}{P_{n-1}^k}\left\{\sum_{v=1}^{n-1}p_v|t_v|\right\}^k$$

$$=O(1)\sum_{V=1}^{m}v^{\delta k-1}|t_v|^k = O(1), \qquad m\to\infty$$

elde edilir. Son olarak yine (3.1) ifadesinin (ii) şartı ve (5.5) ifadesinden,

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}|T_{n,3}|^k = \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k+k-1}\left|\frac{(n+1)p_n t_n}{nP_n}\right|^k = O(1)\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{P_n}{p_n}\right)^{\delta k}\frac{p_n}{P_n}|t_n|^k$$

$$= O(1)\sum_{n=1}^{m} n^{\delta k-1}|t_n|^k = O(1), \qquad m \to \infty$$

elde edilir. Bu ise teoremin ispatıdır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Genel olarak $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ ve $\left|C,1\right|_k$ toplanabilme metotları birbirinden farklı metotlardır. Ancak özel olarak $\forall n \in N$ için $p_n=1$ alındığı taktirde $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ toplanabilme metodu $\left|C,1\right|_k$ toplanabilme metoduna dönüşür.

Bu çalışmada, ilk olarak bu iki metodun hangi şartlar altında birbirlerine denk oldukları incelenmiştir. Daha sonra $\left|C,1\right|_k$ toplanabilme metodu yerine $\left|\overline{N}, q_n\right|_k$ toplanabilme metodu alınarak $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ ile $\left|\overline{N}, q_n\right|_k$ toplanabilme metotları ve son olarakta $\delta > 0$ olmak üzere $\left|C,1;\delta\right|_k$ ile $\left|\overline{N}, p_n;\delta\right|_k$ toplanabilme metotları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Sonuç olarak bu toplanabilme metotlarına daha zayıf veya daha güçlü şartlar ileri sürülerek bu metotlar arasındaki incelemelere devam edilmektedir. $\left|C,1\right|_k$ toplanabilme metodu yerine $\left|C,\alpha\right|_k$ toplanabilme metotları alınarak bu metotlar ile diğer toplanabilme metotları arasındaki ilişkiler incelenmektedir.

Diğer taraftan bir toplanabilme çarpanı kullanarak, yapılan çalışmalar daha da genelleştirilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] BOR, H. On $\left|\overline{N}, p_n\right|_k$ Summability Factors of Infinite Series, Tamkang of, Mathematics,16, 13-20 (1985).

[2] BOR, H. On two Summability Methods, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. , 97 , 147-149 (1985).

[3] BOR, H. A Note on two Summability Methods, Proc. Amer. Math. Soc. , 98 , 81-84 (1986).

[4] BOR, H. A Note on $\left|\overline{N}, q_n\right|_k$ Summability Factors, Pure Appl. Math. Sci. 24, 17-23 (1986).

[5] BOR, H. and THORPE, B. On some Absolute Summability Methods, Analysis, 7 145-152(1987).

[6] BOR, H. A relation Between two Summability Methods. Riv. Mat. Univ. Parma, (4), 14, 107-112 (1988).

[7] BOR, H. On the Relative Strength of two Absolute Summability Methods Proc. Amer. Math. Soc. 113, 1009-1012, (1991).

[8] BOR, H. and THORPE, B. A Note on two Absolute Summability Methods, Analysis, 12, 1-3(1992).

[9] BOR, H. A Note on two Absolute Summability Methods. Chinese J. Mathematics (Taiwan,R.O.C.), Vol. 20, No. 4,301-305(1992).

[10] FEKETE, M. Zur Theorie der Divergented Reihen. Math. Es Termezs Ertesitö (Budapest), 29, 719-726.(1992).

[11] FLETT, T.M. On an Extension of Absolute Summability and Some Theorems of Littlewood and Paley. Proc. Lond. Math. Soc., 7, 113,141(1957).

[12] FLETT, T.M. Some More Theorems Corncerning the Absolute Summability of Fourier Series Proc. London Math. Soc. 8, 357-387 (1958).

[13] HARDY, G.H. Divergent Series, Oxford, (1949).

[14] KOGBETLİANTZ E. Sur les Séries Absolument Sommables Par la Méthods des Moyannes Arithmétiques, Bull. Math, 49, 234-256 (1925).

[15] MADDOX, I. J. Elements of Functional Anaysis. Cambrige Universitiy Press (1970).

[16] MAZHAR, S.M. On the Summability Factors of Infinite Series, Publ. Math. (Debrecen) , 13, 229-236(1966).

[17].PETERSEN, G. M. Regular Matrix Transformations , Mc Graw Hill Publishing Company Limited, London, (1966).

[18] ZYGMUND A. Trigonometric Series, Vol I, Cambridge Univ. Press, (1959).