T.C
NİĞDE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CHEBYSHEV-HERMİTE VE CHEBYSHEV-LAGUERRE TİPLİ DENKLEM SINIFLARININ GENELLEŞTİRİLMESİ VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

ADNAN TUNA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2000

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne;

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Gabil ALİYEV

Üye : Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV

Üye : Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ

Üye : Yrd. Doç. Dr. Abdülkadir DOĞAN

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE

ONAY:

Bu tez, 06/12/2000 tarihinde, Enstitü Yönetim Kurulu'nca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu'nun kararıyla kabul edilmiştir.

20/12/2000

Prof. Dr. Kadriye KAYAKIRILMAZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdür Vekili

ÖZET

CHEBYSHEV-HERMİTE VE CHEBYSHEV-LAGUERRE TİPLİ DENKLEM SINIFLARININ GENELLEŞTİRİLMESİ VE ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

TUNA, Adnan

Niğde Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil ALİYEV

Aralık 2000, 110 sayfa

Mikrodünyanın doğasında, fiziksel olaylar sonucunda oluşan katsayıları değişen özel tipteki Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre denklemlerinin çözümleri, özel polinomlar yardımıyla verilerek, bu özel polinomların önemli özellikleri incelendi.

Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre tipindeki denklem sınıfları, operatör dönüşümü yardımıyla genelleştirildi. Ayrıca bu denklem sınıflarının genel çözüm yöntemi verildi. Buradaki denklem sınıfları lineer ve lineer olmayan denklem sınıflarını da kapsamaktadır. Üstel fonksiyon biçiminde olan operatör dönüşümleri için, denklem sınıflarının çözümleri örnek olarak gösterildi.

Son olarak, Chebyshev-Hermite, Bessel ve Chebyshev-Laguerre tipindeki denklem sınıflarının çözümleri arasında bağlantının bulunması için gerekli şartlar, operatör biçiminde olan özel dönüşüm yardımıyla oluşturuldu.

Anahtar Sözcükler: Chebyshev-Hermite denklemi, Chebyshev-Laguerre denklemi, Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen denklem sınıfları, Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen denklem sınıfları.

SUMMARY

GENERALIZATION AND SOLUTION METHODS OF THE CHEBYSHEV-HERMITE AND CHEBYSHEV-LAGUERRE TYPE EQUATIONS

TUNA, Adnan

Niğde University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil ALİYEV

December 2000, 110 pages

Solutions of the special type of Chebyshev-Hermite and Chebyshev-Laguerre equations whose coefficient changing forming of the microworld have been obtained by means of the special type of polynomial and some important properties of these special polynomial have been investigated

Equation classes such as Chebyshev-Hermite and Chebyshev-Laguerre types have been generated by using the operator transformations and general solution methods of these equation classes have also been given. These equation classes cover the linear and nonlinear equation classes for the operator transformations being in the form of the exponential function, the solution of these equation classes have been given as examples.

Finally, the necessary conditions which give the relationships between the solutions of the Chebyshev-Hermite, Bessel and Chebyshev-Laguerre equtions classes have been formed by means of aspecial transformation being in the from of the operatör.

Key Words: Chebyshev-Hermite equation, Chebyshev-Laguerre equation, Equation classes transforming to the Chebyshev-Hermite differantial equation, Equation classes transforming to the Chebyshev-Laguerre differantial equation

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her safhasında, yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Sayın Prof Dr. Gabil ALİYEV'e, katkılarından dolayı ve çalışmalarım süresince bana her türlü kolaylığı sağlayan Matematik Bölüm Başkanı Sayın Yrd. Doç. Dr. İsmet ALTINTAŞ'a ve Prof. Dr. Mammad MUSTAFAYEV'e, ayrıca yazım aşamasında bana yardımcı olan Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi Atakan Tuğkan YAKUT'a teşekkür eder saygılarımı arz ederim.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM I

GİRİŞ ve ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Mikro dünyada gelişen fiziksel olayların incelenmesi, Kuantum Mekaniğin ve Kuantum Fiziğin konularının genişlemesine yol açmıştır. Fizik alanındaki bu yeni bilimsel istikametler, matematik biliminin gelişmesinde büyük ölçüde etkili olmuştur. Özellikle spektral teorisinin ortaya çıkması ve onun gelişimindeki önem, diferansiyel denklemlerinin açıklanabilmesidir.

Doğadaki fiziksel olayların yorumu, katsayıları değişen singüler diferansiyel denklemler ile yapılmaktadır.. Bu denklemlere, Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemleri örnek olarak gösterilebilir.

Bu denklemler aşağıdaki fiziksel olaylarla bağlıdır:

1. Dinamik frenleme olayının meydana gelişi, mekaniksel olaylarda cisimlerin heterojen yüzeylerdeki hareketinde, cismin hareketi yönünde oluşan sürtünmesinin değişimine bağlıdır.

2. Başka bir Mekaniksel olayın sınıfı olan konstrüksiyonlar, elementlerde meydana gelen mekaniksel atış (titreşim) problemlerine bağlıdır.

3. Kuantum Mekaniğinde coulomb kuvvetler alanında, alanın atış efekti elektronun çekirdek etrafında dönme problemine bağlıdır.

4. Yine atom parçacıklarının potansiyel alandaki hareketi Kuantum mekaniğindeki Schrödinger denkleminin yazılımına bağlıdır.

Bu olaylar bağlamında ortaya çıkan matematiksel problemlerin özellikleri, Schrödinger, Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre denklemlerinin çözümlerinin bulunmasına bağlıdır [1].

Bu tipteki diferansiyel denklemlerin, çözümlerinin bulunması ile özel fonksiyonlar konusu gelişmeye başlamıştır. Bunların içine, Chebyshev-Hermite polinomları [2,3], Chebyshev-Laguerre polinomları [2,3] ve hipergeometrik seriler de girmiştir [2,3].

Bu polinomların vasıtasıyla, katsayıları değişkene bağlı singüler olan lineer diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümleri bulunmuştur. Bu istikamette oluşturulan matematiksel yöntemler sınırlı olduğundan, doğada oluşan ve lineer olmayan fiziksel olayların bilimsel yollarla incelenmesine imkan vermemektedir.

Bu yönde yapılan çalışmaların özü, özel diferansiyel denklemlerin çözümlerinin oluşturulmasıdır. Bu durum özel denklemlerin lineer veya lineer olmayan prosesteki olayların açıklanabilmesi açısından göz önüne alınırsa, çeşitli denklem sınıflarını beraberinde getirdiği görülür. Burada bahsettiğimiz sınıflama, bu tipteki denklemlerin türevlerinin çeşitli biçimlerde polinom yapıları oluşturduğunu gösterir.

Lineer olmayan fiziksel titreşim problemleri, lineer olmayan ses dalgaları, sıcaklık dalgaları ve elektro-manyetik dalgaların yayılması problemleri lineer olmayan olaylara mekanik teorisinde örnek olarak verilebilir. Doğada gelişen lineer olmayan fiziksel problemlerin deneysel ve teorik oluşumu ile onların gelişmesi, matematiğin konusu ile birebir bağlıdır. Bu boşluğu ortadan kaldırmak için, ilk olarak fiziksel olayların gerçek denklemlerinin bulunması, ikinci olarak bulunan çeşitli matematiksel denklemlerin sınıflandırılması ve bu sınıfların, çözümlerinin elde edilmesi için genel bir yöntemin oluşturulmasıdır.

Temel yapıları bilinen bu diferansiyel denklemler sınıflandırmaya tabi tutularak çeşitlendirilmesi sağlanmıştır. Ayrıca kullanılan diferansiyel denklem tipleri arasında bağlantı kurularak, Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemlerin arasında bağıntıların bulunduğu ispatlanmıştır. Değişik koordinat sistemlerinin oluşturulabilmesi yapılan incelemenin bir başka önemli tarafıdır.

Sonuç olarak Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre denklemlerinden, bu denklemlerin değişik biçimdeki denklem sınıfları elde edilmiştir.

1.1. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı aşağıda verilen ana başlıklar altında toplanmıştır.

Kanonik Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemlerinin ve polinomlarının geniş şekilde incelenmesi, fiziksel problemlerdeki uygulamalarının gösterilmesi. Hatırlamak gerekir ki kuram biçiminde basit yazılan denkleme kanonik denklem denilir.

Özel operatör dönüşümlerinin vasıtasıyla kanonik Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemlerine dönüşen lineer veya lineer olmayan denklem sınıflarının genelleştirilmesi.

Kanonik Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemlerine dönüşen lineer veya lineer olmayan denklem sınıflarının çözümlerinin bulunması.

Lineer veya lineer olmayan bir denklem sınıfının çözümünün vasıtasıyla, diğer lineer veya lineer olmayan denklem sınıfının çözümünün bulunması için gerekli özel koşulların araştırılması ve bu koşullara bağlı olarak çözüm yönteminin verilmesi.

Özel olarak, kanonik Bessel denklemine dönüşen denklem sınıfının çözümünün vasıtasıyla, lineer olan veya lineer olmayan Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre denklemlerine dönüşen denklem sınıflarının çözümü oluşturulmuştur.

1.2. Genel Tanımlar

Chebyshev Polinomu. Matematiğe yaklaşımı işlemsel çözümlerin ve algoritmaların araştırılmasına dayalı bir polinomdur. Bu polinom tam yada hiç olmazsa, pratik problemlerin çözümünde kullanılabilecek yaklaşık bir sayısal çözüm verir. Matematiksel fizikte çok kullanılır [3,4].

Chebyshev-Laguerre Polinomu. Laguerre adıyla anılan bir polinom sistemidir. Bu polinom sistemi,

$$L_0(x) = 1 \qquad L_1(x) = -x + 1 \qquad L_2(x) = \frac{1}{2!}(x^2 - 4x + 2)$$

biçiminde kurulmuştur. Bu polinomun birkaç özelliği,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = \delta_{nm}$$

$$(n + 1) L_{n+1}(x) = (2n + 1 - x) L_n(x) - n L_{n-1}(x)$$

biçimindedir [3,4].

Chebyshev-Hermite Polinomu. Hermite, adıyla anılan bir polinom sistemidir. Bu polinom sistemi,

$$H_o(x) = 1;\ H_1(x) = x;\ H_2(x) = x^2 - 1;\ H_3(x) = x^3 - 3x;$$

$$H_n(x) = x^n - C_n^2 x^{n-2} + 1.3\, C_n^4 x^{n-4} - 1.3.5\, C_n^6 x^{n-6} + \ldots\ldots\ldots$$

biçiminde kurulmuştur. Bu polinomların birkaç özelliği

$$H_{n+1}(x) = x H_n(x) - n H_{n-1}(x) = x H_n(x) - H_n'(x)$$

$$H_n''(x) - x H_n'(x) + n H_n(x) = 0;$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-1}{2}x^2} H_n(x) H_n(x)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ n!\sqrt{2\pi}, & n = m \end{cases}$$

biçimindedir [8].

Bessel denklemi. ν parametre olmak üzere,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

şeklindeki diferansiyel denklemdir. Matematikteki çözümü, $J_\nu(x)$ ile gösterilen ve Γ (gama) fonksiyonu olmak üzere,

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}$$

şeklindedir [2,4].

Schrödinger Denklemi. Kuantum Fiziğinde bir Kuantum sistemin dalga fonksiyonunu belirleyen, görecelik kuramına uymayan diferansiyel denklemdir. Kuantum sisteminin kararlı hallerinin (yani belirli enerjiye sahip) enerjilerinin, bazı koşullarda, diferansiyel bir operatör olarak yazılabilen bir operatörün özdeğerleridir. Böylece bu özdeğerlerin araştırılıp saptanması ikinci dereceden kısmi türevli bir denklem olarak ortaya çıkan ve modülünün karesi bir parçacığın t anındaki x noktasında bulunması olasılığı olarak yorumlanan ve kendine de dalga fonksiyonu denen $\Psi(x,t)$ gibi karmaşık değerli bir fonksiyonu gerçekleyen bir "dalga denklemi" nin çözümüdür [4].

BÖLÜM II

CHEBYSHEV-HERMİTE DENKLEMİNİN VE POLİNOMLARIN İNCELENMESİ

Bu bölümde Chebyshev-Hermite diferansiyel denkleminin elde edilmesi, Chebyshev-Hermite diferansiyel denkleminin çözümü ve çözümünden elde edilen Chebyshev-Hermite polinomlarının özellikleri, indirgeme formülleri incelenmiştir.

2.1. Chebyshev-Hermite Denkleminin Elde Edilmesinde Fiziksel Problem

Chebyshev-Hermite diferansiyel denklemi ve bu denklemin çözümleri olan Chebyshev-Hermite polinomları, harmonik osilatörün kuantumsal mekaniğin incelenmesi sırasında karşılaşılır [5,6,7]. Bu nedenle Chebyshev-Hermite diferansiyel denklemine hazırlık için, harmonik osilatör kuantumsal mekanik olarak incelenecektir.

Bir boyutlu harmonik osilatörün potansiyel enerjisi, k yay sabiti olmak üzere $\frac{1}{2}kx^2$ şeklindedir. Dolayısıyla sistemin klasik mekanikteki toplam enerjisi yani Hamiltonyeni;

$$Hu(x) = Eu(x) \tag{2.1.1}$$

biçimindedir. Burada Hu(x), enerji özvektörü ve Eu(x), enerji özdeğeridir. Enerji özvektörü,

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V$$

olduğundan,

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} k\, x^2 \tag{2.1.2}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan kuantum mekaniğinde p lineer momentumuna karşılık gelen işlemcinin $\hat{p} = i\,\hbar\,\nabla$ şeklinde olduğu gözönüne alınırsa,

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \qquad \hat{p}^2 = -\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\hbar^2\nabla^2$$

biçiminde yazılır. Bu ifadeler (2.1.2) de yerine yazılırsa,

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı u(x) ile çarpılır ve (2.1.1) kullanılırsa, sistemin Schrödinger dalga denklemi,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \frac{1}{2}\,k\,x^2\right)u(x) = Eu(x)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}\,k\,x^2\right)u(x) = Eu(x)$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - \frac{1}{2}k\,x^2\right)u(x) = 0 \qquad (2.1.3)$$

biçiminde yazılır. Bu denklem, tek boyutlu Schrödinger dalga denklemidir [5,6,7]. Buradan Chebyshev-Hermite diferansiyel denklemine geçilir. Bunun için (2.1.3) denkleminde,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{olmak üzere} \quad x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,x'$$

değişken değişimi yapılırsa,

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dx'}\frac{dx'}{dx} = \frac{du}{dx'}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, x' \Rightarrow x^2 = \frac{\hbar}{m\omega} x'^2$$

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{du}{dx'}\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right] = \frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2u}{dx'^2}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu ifadeler (2.1.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2u}{dx'^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - \frac{1}{2}k\frac{\hbar}{m\omega}x'^2)\, u = 0$$

bulunur. Ayrıca,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\,\omega^2 \quad \text{ve} \quad \alpha = \frac{2E}{\hbar\omega}$$

formülleri gözönüne alınırsa,

$$\frac{m\omega}{\hbar}\frac{d^2u}{dx'^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(\alpha\,\frac{1}{2}\,\hbar\,\omega - \frac{1}{2}m\,\omega^2\frac{\hbar}{m\omega}x'^2)\, u = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$\frac{m\omega}{\hbar}\left[\frac{d^2u}{dx'^2} + (\alpha - x'^2)u\right] = 0$$

biçiminde yazılır. Böylece (2.1.3) Schrödinger denklemi α ve x' cinsinden,

$$\frac{d^2u}{dx'^2} + (\alpha - x'^2)\, u = 0 \qquad (2.1.4)$$

olarak elde edilir. (2.1.4) denkleminin çözümü bulunsun. Bunun için (2.1.4) denklemi x cinsinden yazılır. $\frac{m\omega}{\hbar}$ sabit olduğundan x^{1} yerine x alınabilir. Bu durumda (2.1.4) denklemi,

$$\frac{d^2u}{dx^2} + (\alpha - x^2)\,u(x) = 0 \qquad (2.1.5)$$

şeklinde yazılır. (2.1.5) denkleminin çözümü yapılırken önce x in çok büyük olduğu asimptotik çözümü incelenir. Yani $x \rightarrow \infty$ için $\alpha < x^2$ alınabilir. Bu durumda (2.1.5) denklemi,

$$\frac{d^2u}{dx^2} - x^2\,u(x) = 0 \qquad (2.1.6)$$

halini alır. Lineer harmonik osilatörde potansiyel fonksiyon,

$$V(x) = x^2$$

şeklindedir. Bu durumda,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = x^2 u(x)$$

olacaktır. (2.1.6) denkleminin asimptotik$(x \rightarrow \infty)$ çözümü,

$$u(x) = x^n\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad (2.1.7)$$

şeklindedir. (2.1.7) ifadesi, (2.1.6) denkleminin çözümü olduğu şu şekilde gösterilebilir. Bunun için (2.1.7) eşitliğinin türevleri alınırsa,

$$u'(x) = (n\,x^{n-1} - x^{n+1})\, e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

$$u''(x) = [n\,(n-1)\,x^{-2} - n - (n+1) + x^2]\,x^n\,e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad (2.1.8)$$

elde edilir. (2.1.8) eşitliğinde en büyük terim x^2 olduğundan, diğer terimler ihmal edilebilir. Dolayısıyla (2.1.8) eşitliği,

$$u''(x) - x^2 u(x) = 0$$

biçiminde yazılır. Buradan (2.1.7) şeklinde tanımlanan fonksiyon, (2.1.6) diferansiyel denkleminin asimptotik($x \to \infty$) çözümüdür. Şu halde (2.1.5) diferansiyel denkleminin çözümü,

$$u(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}\,y(x) \qquad (2.1.9)$$

şeklinde aranır. (2.1.9) eşitliğinin türevleri alınırsa,

$$u'(x) = -\,x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,y(x) + e^{-\frac{1}{2}x^2}\,y'(x)$$

$$u''(x) = -\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,y(x) + x^2\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,y(x) - 2\,x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,y'(x) + e^{-\frac{1}{2}x^2}\,y''(x)$$

elde edilir. Bu eşitlikler (2.1.5) denkleminde yerine yazılırsa,

$$-\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,y(x) + x^2\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,y(x) - 2\,x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,y'(x) + e^{-\frac{1}{2}x^2}\,y''(x) + (\alpha - x^2)\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,y(x) = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$y''(x) - 2\,x\,y'(x) + (\alpha - 1)\,y(x) = 0 \qquad (2.1.10)$$

denklemi bulunur. (2.1.10) denkleminde $(\alpha - 1) = 2n$ alınırsa, $E = \alpha \frac{1}{2} \hbar\,\omega$ formülü,

$$E = \hbar\,\omega\,(n + \frac{1}{2})$$

olarak bulunur. (2.1.10) diferansiyel denklemi ise,

$$y''(x) - 2\,x\,y'(x) + 2\,n\,y(x) = 0$$

şeklinde yazılır [1,8,9].

2.2. Chebyshev-Hermite Diferansiyel Denkleminin Çözümü

n sabit olmak üzere

$$y''(x) - 2x\,y'(x) + 2n\,y(x) = 0 \qquad (2.2.1)$$

denklemine Chebyshev-Hermite diferansiyel denklemi denir [6,7,8]. Chebyshev-Hermite polinomlarının çözümü olan diferansiyel denkleme, Chebyshev-Hermite diferansiyel denklemi denilecek. Bu denklemin matematiksel fizikte çok önemi vardır. k ve a_m $(m = 0,1,2,...)$ bulunması gereken sabitler olmak üzere (2.2.1) diferansiyel denkleminin,

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{k+m} \qquad (a_0 \neq 0) \qquad (2.2.2)$$

biçiminde en az bir çözümü vardır. Bununla birlikte Chebyshev-Hermite denkleminin Frobeniüs yöntemi [8] ile seri çözümlerinin ve Chebyshev-Hermite polinomları olarak bilinen özel polinomların, önemli özelliklere sahip olduğu görülmektedir . Bu özellikler şu şekilde incelenebilir. (2.2.1) diferansiyel denkleminin çözümü, (2.2.2) şeklinde düşünülürse ve türevleri alınırsa,

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (k + m) a_m x^{k+m-1} \qquad (2.2.3)$$

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)a_m x^{k+m-2} \tag{2.2.4}$$

elde edilir. Bu değerler (2.2.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{m=0}^{\infty}(k+m)(k+m-1)\,a_m\,x^{k+m-2} - 2x\sum_{m=0}^{\infty}(k+m)\,a_m\,x^{k+m-1} + 2n\sum_{m=0}^{\infty}a_m\,x^{k+m} = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$a_0\,k\,(k-1)\,x^{k-2} + a_1\,k\,(k+1)\,x^{k-1}$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\left[a_{m+2}\,(k+m+2)\,(k+m+1) - a_m\,2\,(k+m-n)\right]x^{k+m} = 0 \tag{2.2.5}$$

elde edilir. (2.2.5) eşitliğinin sağlanması,

$$a_0\,k\,(k-1) = 0\,, \quad (a_0 \neq 0) \tag{2.2.6}$$

$$a_1\,k\,(k+1) = 0 \tag{2.2.7}$$

$$a_{m+2} = \frac{2\,(k+m-n)}{(k+m+2)\,(k+m+1)}\,a_m \quad \text{(tekrarlama bağlantısı)} \tag{2.2.8}$$

koşullarına bağlıdır. (2.2.6) eşitliğinde k, 0 ve 1 değerlerinden birini alır. Bu değerlerden 0 gözönüne alındığında, (2.2.5) eşitliği sağlanır. Bu nedenle, a_1 katsayısının keyfi olacağı açıktır. Dolayısıyla (2.2.1) denkleminin çözümü,

$$y(x) = a_0\,y_0(x) + a_1\,y_1(x) \tag{2.2.9}$$

şeklinde olacaktır. Şimdi (2.2.9) eşitliğindeki, $y_0(x)$ ve $y_1(x)$ fonksiyonları için açık tanımlar verilsin. Bu halde (2.2.8) şeklindeki tekrarlama bağıntısı, $k = 0$ için yeniden yazılırsa,

$$a_{m+2} = -\frac{2(n-m)}{(m+2)(m+1)}\, a_m \tag{2.2.10}$$

elde edilir. (2.2.10) biçiminde elde edilen bağıntının yardımıyla, m nin tek ve çift değerleri için a_m katsayılarının kolayca bulunacağı açıktır. Böylece m nin çift değerleri için ilk birkaç katsayı,

$m = 0$ için $\qquad a_2 = -\frac{2n}{2!} a_0$

$m = 2$ için $\qquad a_4 = \frac{2^2 n(n-2)}{4!} a_0$

....

şeklindedir. Genel terim ise,

$$a_{2j} = \frac{(-2)^j n(n-2)(n-4)....(n-2j+2)}{(2j)!} a_0 \,, \qquad (j = 1,2,3,...) \tag{2.2.11}$$

olarak bulunur. Benzer işlemlerin m nin tek değerleri için yapılmasıyla, ilk birkaç katsayı,

$m = 1$ için $\qquad a_3 = -\frac{2(n-1)}{3!} a_1$

$m = 3$ için $\qquad a_5 = \frac{2^2 (n-1)(n-3)}{5!} a_1$

....

şeklindedir. Genel terim ise,

$$a_{2j+1} = \frac{(-2)^j (n-1)(n-3)...(n-2j+1)}{(2j+1)!} a_1, \qquad (j=1,2,3,...) \qquad (2.2.12)$$

olarak elde edilir. Böylece (2.2.11) ve (2.2.12) bağıntılarının yardımıyla, (2.2.9) biçiminde tanımlanan çözüm,

$$y(x) = a_0\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-2)^j n(n-2)(n-4)...(n-2j+2)}{(2j)!} x^{2j}\right]$$

$$+ a_1 x\left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-2)^j (n-1)(n-3)...(n-2j+1)}{(2j+1)!} x^{2j}\right] \qquad (2.2.13)$$

şeklindedir. (2.2.13) biçimindeki çözü çözüm, sonsurimli iki seriden oluşmaktadır. Bu ifadenin yakınsak olması için gerekli ve yeterli şart, her iki serinin de yakınsak olmasıdır. Bu ise ilk seride, n nin pozitif çift tamsayı, ikinci seride ise n nin pozitif tek tamsayı olması ile mümkündür. n tamsayı değilse, seri ıraksak olur.

Şimdi (2.2.13) çözümünü kapalı formda, yani n nin tek ve çift tüm değerleri için geçerli bir seri şeklinde yazmak için, (2.2.8) tekrarlama bağıntısı aşağıdaki gibi yeniden tanımlanabilir.

$$a_m = -\frac{(m+2)(m+1)}{2(r-m)} a_{m+2} \qquad (2.2.14)$$

(2.2.14) bağıntısı yardımıyla, m nin ilk bir kaç değeri için (r-2,r-4,...) karşı gelen katsayılar,

$m = r-2$ için $\quad a_{r-2} = -\frac{r(r-1)}{2.2} a_r$

$m = r-4$ için $\quad a_{r-4} = \frac{r(r-1)(r-2)(r-3)}{2^2\, 2.4} a_r$

$$m = r - 6 \qquad \text{için} \qquad a_{r-6} = -\frac{r(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)(r-5)}{2^3\, 2.4.6}\, a_r$$

....

şeklinde bulunur. Bunların yardımıyla genel terim ise,

$$a_{r-2j} = (-1)^j \frac{r(r-1)(r-2)...(r-2j+1)}{2^j.2.4...2j}\, a_r \tag{2.2.15}$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan,

$$r(r-1)(r-2)...(r-2j+1) = r(r-1)(r-2)...(r-2j+1)\frac{(r-2j)(r-2j-1)...3.2.1}{(r-2j)(r-2j-1)...3.2.1}$$

$$= \frac{r!}{(r-2j)!}$$

$$2.4.6...2j = (2.1)(2.2)(2.3)...(2.j)$$

$$= 2^j\, j!$$

değerleri gözönüne alınır ve $a_r = 2^r$ şeklinde seçilirse, (2.2.15) bağıntısıyla tanımlanan genel terim, isteğe bağlı olarak alınan r indisi yerine, yeniden n indisini almak suretiyle,

$$a_{n-2j} = (-1)^j \frac{n!\, 2^{n-2j}}{j!(n-2j)!}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Böylece (2.2.13) ifadesi kapalı formda,

$$y(x) = H_n(x) = \sum_{j=0}^{N} (-1)^j \frac{n!\,(2x)^{n-2j}}{j!(n-2j)!} \tag{2.2.16}$$

halini alır ve n. dereceden Chebyshev-Hermite Polinomları olarak isimlendirilir [10].

Buradaki N üst sınır değeri,

$$N = \begin{cases} \dfrac{n}{2} \quad , & \text{n çift iken} \\ \dfrac{n-1}{2} \; , & \text{n tek iken} \end{cases}$$

şeklindedir.

2.3. Chebyshev-Hermite Polinomlarının Özellikleri

(-∞,+∞) aralığında skaler çarpım,

$$(p,q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x)\, p(x)\, q(x)\, d(x)$$

şeklinde yazıldığında, bu skaler çarpımı ıraksak olmaktan koruyacak en doğal ağırlık fonksiyonu,

$$\omega(x) = e^{-x^2}$$

biçimindedir. $x \to \pm\infty$ için üstel fonksiyon, x^m kuvvetinden daha hızlı sıfıra gider ve ıraksaklığı önler. (-∞,+∞) aralığında bu ağırlık fonksiyonuyla tanımlı skaler çarpıma göre ortogonal olan polinomlar, Chebyshev-Hermite polinomları adını alır ve $H_n(x)$ ile gösterilir.

$H_n(x)$ polinomunun derecesi n olup,

n çift ise polinom, x in çift üslü terimlerinden oluşur ve çift fonksiyondur.

n tek ise polinom, x in tek üslü terimlerinden oluşur ve tek fonksiyondur.

2.3.1. Tanım (Üretici fonksiyonu).

$$G(x,t) = \exp(-t^2 + 2tx) \tag{2.3.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, Chebyshev-Hermite polinomlarının üretici fonksiyonu denir [9].

Teorem. $G(x,t) = \exp(-t^2 + 2tx)$ üretici fonksiyonun t nin kuvvetlerine göre seri açılımı,

$$G(x,t) = \exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x) \tag{2.3.2}$$

şeklindedir.

İspat. Bunun için $\exp(2tx - t^2)$ üretici fonksiyonunun t ye göre seri açılımı yapılırsa,

$$\exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2tx)^r}{r!} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^s}{s!}$$

$$= \sum_{r,s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(2x)^r}{r!s!} t^{r+2s}$$

eşitliği elde edilir. Burada $\exp(-t^2 + 2tx)$ fonksiyonunun kuvvet serisine açılımında $r + 2s = n$ olarak alınırsa, s nin sabit bir değeri için t^n katsayısı,

$$t^n = (-1)^s \frac{(2x)^{n-2s}}{(n-2s)!s!}$$

biçiminde olur. t^n, s değerlerinin toplamları kullanılarak bulunur. $r = n - 2s$ olduğundan $n - 2s \geq 0$ eşitsizliği elde edilir. Buradan $s < \frac{1}{2} n$ dir. Böylece, n çift ise, $0 \leq s \leq \frac{1}{2} n$ dir.

n tek ise , $0 \leq s \leq \frac{1}{2}(n-1)$ olur. Tüm bu durumlarda, $0 \leq s \leq \frac{1}{2} n$ olduğu bulunur. ($\frac{1}{2} n$ ifadesi Chebyshev-Hermite polinomunda, N olarak tanımlanmıştır.) Böylece (2.2.16) ifadesi gözönüne alındığında t^n katsayısı,

$$\sum_{s=0}^{N}(-1)^s \frac{1}{(n-2s)!\,s!}(2x)^{n-2s} = \frac{1}{n!}H_n(x)$$

şeklinde bulunur [3].

Teorem (Rodrigue formülü). Chebyshev-Hermite polinomları,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \tag{2.3.3}$$

formülü ile elde edilir. Buna Rodrigue formülü denir.

İspat. Taylor teoreminin ifadesi,

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{d^n F}{dt^n}\right)\Bigg|_{t=0} \frac{t^n}{n!} \tag{2.3.4}$$

şeklindedir [11]. (2.3.2) üretici fonksiyonu (2.3.4) de kullanılırsa,

$$H_n(x) = \left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\exp(2tx - t^2)\right]_{t=0}$$

$$= e^{x^2}\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\exp\left[-(x-t)^2\right]\right]_{t=0}$$

elde edilir. Fakat,

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x-t) = -\frac{\partial}{\partial x} f(x-t) \tag{2.3.5}$$

eşitliği gözönüne alınırsa,

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} f(x-t) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} f(x-t)$$

bulunur. Bu durumda

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left[\frac{\partial^n}{\partial x^n} \exp\left[-(x-t)^2\right] \right]_{t=0}$$

$$= (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2}$$

$$= (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

olur. İlk bir kaç Chebyshev-Hermite polinomunun açık şekildeki ifadeleri,

$H_0(x) = 1,\qquad H_1(x) = 2x,\qquad H_2(x) = 4x^2 - 2,\qquad H_3(x) = 8x^3 - 12x$

biçimindedir. Chebyshev-Hermite polinomlarının, çözümü olduğu diferansiyel denklem aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem. $y = H_n(x)$ Chebyshev-Hermite polinomları,

$$y''(x) - 2x\,y'(x) + 2n\,y(x) = 0$$

Chebyshev-Hermite diferansiyel denkleminin çözümüdür.

İspat. $u(x) = e^{-x^2}$ (2.3.6)

fonksiyonu gözönüne alınarak birinci türevi alınırsa,

$$u'(x) + 2x\,u(x) = 0$$

şeklindedir. İkinci türevi alınırsa,

$$u''(x) + 2\,x\,u'(x) + 2\,u(x) = 0$$

olur. Bu şekilde devam edilerek (n + 2) defa türevi alınırsa,

$$u^{(n+2)} + 2\,x\,u^{(n+1)} + 2\,(n+1)\,u^{(n)} = 0 \tag{2.3.7}$$

denklemi elde edilir. (2.3.3) Rodrigue formülü aracılığıyla, u(x) fonksiyonu ve bu fonksiyonun türevleri $H_n(x)$ cinsinden yazılabilir. Yani,

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-1)^n e^{x^2} u^{(n)}$$

$$u^{(n)} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x) \tag{2.3.8}$$

$$u^{(n+1)} = (-1)^n e^{-x^2} [H_n'(x) - 2\,x\,H_n(x)] \tag{2.3.9}$$

$$u^{(n+2)} = (-1)^n e^{-x^2} [H_n''(x) - 4\,x\,H_n'(x) + (4\,x^2 - 2)\,H_n(x)] \tag{2.3.10}$$

biçimindedir. Bu ifadeler (2.3.7) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$H_n''(x) - 2\,x\,H_n'(x) + 2\,n\,H_n(x) = 0 \tag{2.3.11}$$

bulunur. Bu denklem, Chebyshev-Hermite diferansiyel denklemidir [8].

Teorem (Tekrarlama bağıntısı). Ardışık üç Chebyshev-Hermite polinomu arasında,

$$H_{n+1}(x) + 2\,n\,H_{n-1}(x) - 2\,x\,H_n(x) = 0, \quad (n \geq 1)\,; \quad H_1(x) = 2H_0(x) \tag{2.3.12}$$

bağıntısı vardır.

İspat. (2.3.1) üretici fonksiyonunun t değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\frac{\partial G(x,t)}{\partial t} + 2\,(t-x)\,G(x,t) = 0 \qquad (2.3.13)$$

bulunur. (2.3.2) eşitliği kullanılarak, G(x,t) üretici fonksiyonu ve üretici fonksiyonun t ye göre türevinin, Chebyshev-Hermite seri ifadesi,

$$G(x,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} H_m(x) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial G(x,t)}{\partial t} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} H_m(x) \qquad (2.3.14)$$

biçimindedir. (2.3.14) ifadeleri (2.3.13) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$\underbrace{\sum_{m=1}^{\infty}}_{m-1=n} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} H_m + 2 \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}}_{m+1=n} \frac{t^{m+1}}{m!} H_m - 2 \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty}}_{m=n} \frac{t^m}{m!} x H_m = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_{n+1}(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{(n-1)!} H_{n-1}(x) - 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} x\, H_n(x) = 0 \qquad (2.3.15)$$

elde edilir. (2.3.15) eşitliğinde, $n > 1$ olan aynı t^n üslerinin katsayıları sıfıra eşitlenirse, (2.3.12) biçiminde verilen tekrarlama bağıntısı elde edilir. Ayrıca t^0 ın katsayısı,

$$H_1(x) = 2\,H_0(x)$$

şeklindedir [9].

Teorem (Diklik bağıntısı). $m \neq n$ gibi iki indis için,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = \begin{cases} 0, & (m \neq n) \\ \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!, & (m = n) \end{cases}$$

biçimindedir.

İspat. (2.3.11) Chebyshev-Hermite diferansiyel denkleminin her iki tarafı önce e^{-x^2} ile çarpılırsa,

$$e^{-x^2} H''_n(x) - 2x e^{-x^2} H'_n(x) + 2n e^{-x^2} H_n(x) = 0$$

veya

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x^2} H'_n(x)\right] + 2n e^{-x^2} H_n(x) = 0 \tag{2.3.16}$$

eşitliği elde edilir. (2.3.16) denkleminin her iki tarafı $H_m(x)$ ile çarpılır ve intergali alınırsa,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} H_m(x) \frac{d}{dx}\left[e^{-x^2} H'_n(x)\right] dx + 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \tag{2.3.17}$$

elde edilir. (2.3.17) eşitliğinin birinci terimine kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$H_m(x) e^{-x^2} H'_n(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} \left[- \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(x) e^{-x^2} H'_n(x) dx \right] + 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \tag{2.3.18}$$

bulunur. (2.3.18) eşitliğinde üstel fonksiyonun özelliğinden dolayı birinci terim, $x \to \pm \infty$ olduğunda sıfır olur. Kalan kısım ise,

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} H'_m(x) e^{-x^2} H'_n(x) dx + 2n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_m(x) H_n(x) dx = 0 \tag{2.3.19}$$

şeklindedir. Bu ifade, m ile n indisleri değiştirilerek yeniden yazılırsa eşitlik bozulmaz.

$$- \int_{-\infty}^{+\infty} H'_n(x) e^{-x^2} H'_m(x) dx + 2m \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0 \tag{2.3.20}$$

(2.3.19) ve (2.3.20) ifadeleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$2(n-m)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, H_n(x)\, H_m(x)\, dx = 0 \qquad (2.3.21)$$

elde edilir. (2.3.21) eşitliğinde $m \neq n$ seçildiği için, integral sıfır olmak zorundadır. (2.3.2) eşitliği, önce G(x,t) sonra G(x,s) olarak yazılıp çarpılırsa,

$$\exp(-t^2 + 2tx)\exp(-s^2 + 2sx) = \sum_n \frac{t^n}{n!} H_n(x) \sum_m \frac{s^m}{m!} H_m(x)$$

$$= \sum_m \sum_n \frac{t^n}{n!}\frac{s^m}{m!} H_n(x)\, H_m(x) \qquad (2.3.22)$$

biçiminde elde edilir. Bu eşitliğinin her iki tarafı, e^{-x^2} ile çarpılır ve x e göre integrali alınırsa,

$$\exp(-t^2 - s^2)\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2 + 2tx + 2sx)\, dx = \sum_n \sum_m \frac{t^n}{n!}\frac{s^m}{m!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, H_n(x)\, H_m(x)\, dx \qquad (2.3.23)$$

eşitliği elde edilir. Diklik bağlantısına göre, (2.3.23) eşitliğinin sağ tarafındaki integralin $m \neq n$ için sıfır olduğu gösterildi. Geriye $m = n$ durumu kalır. Sol taraftaki integral içinde bir tam kare oluşturmak üzere,

$$-x^2 + 2tx + 2sx = -(x - t - s)^2 + (t + s)^2$$

yazılır ve $u = x - t - s$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\exp\left[-t^2 - s^2 + (t+s)^2\right] \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sum_n \frac{(ts)^n}{n!\,n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, H_n(x)\, H_n(x)\, dx \qquad (2.3.24)$$

bulunur. (2.3.24) eşitliğinin sol tarafındaki integralin değeri $\sqrt{\pi}$ olur. Sağ taraftaki integral I_n ile gösterilirse,

$$\sqrt{\pi}\exp(2\,t\,s) = \sum_{n} \frac{(t\,s)^n}{n!\,n!} I_n \tag{2.3.25}$$

yazılabilir. Bu eşitliğinin sol tarafı, Taylor serisi olarak açılır ve her $(ts)^n$ üslü terimin katsayısı eşitlenirse,

$$\sqrt{\pi}\sum_{n} \frac{2^n (t\,s)^n}{n!} = \sum_{n} \frac{(t\,s)^n}{n!\,n!} I_n$$

buradan

$$I_n = \sqrt{\pi}\, 2^n\, n!$$

elde edilir [8].

Teorem (Türev bağıntısı). Chebyshev-Hermite polinomları arasında,

$$H'_n(x) = 2\,n\,H_{n-1}(x) \quad (n > 1), \quad H'_0(x) = 0$$

bağıntısı vardır.

İspat. (2.3.2) eşitliğinin her iki tarafının x e göre türevi alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x)\frac{t^n}{n!} = 2\,t\exp(2\,t\,x - t^2)$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\frac{t^{n+1}}{n!}$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!}$$

olup

$$\sum_{n=0}^{\infty} H'_n(x)\frac{t^n}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}(x)\frac{t^n}{(n-1)!} \tag{2.3.26}$$

elde edilir. (2.3.26) eşitliğinde, $n = 0$ için $H'_0(x) = 0$ alınırsa ve $n > 1$ için t^n katsayıları eşitlenirse,

$$\frac{H'_n(x)}{n!} = \frac{2\,H_{n-1}(x)}{(n-1)!} \tag{2.3.27}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik düzenlenirse,

$$H'_n(x) = 2\,n\,H_{n-1}(x)$$

bulunur [8].

BÖLÜM III

CHEBYSHEV-LAGUERRE DENKLEMİNİN VE POLİNOMLARIN İNCELENMESİ

Bu bölümde Chebyshev-Laguerre diferansiyel denkleminin elde edilmesi, Chebyshev-Laguerre diferansiyel denkleminin çözümü, çözümünden elde edilen Chebyshev-Laguerre polinomlarının ve Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomlarının özellikleri ile indirgeme formülleri incelenmiştir.

3.1. Chebyshev-Laguerre Denkleminin Elde Edilmesinde Fiziksel Problem

Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemi ve bu denklemin çözümleri olan, Chebyshev-Laguerre polinomları fizikte oldukça önemli bir kullanıma sahiptir. Bu diferansiyel denklemin çözümü olan Chebyshev-Laguerre polinomlarıyla, Kuantum Hidrojen Atomunun incelenmesi esnasında karşılaşılır [6,7]. Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemine hazırlık için, Kuantum Hidrojen Atomu incelenecektir.

En basit atom olan hidrojen atomunda Z_e yüklü çekirdek ile bu çekirdek etrafında dolaşan $-e$ yüklü elektron arasındaki çekici potansiyel,

$$V(r) = -e^2/r$$

şeklinde tanımlanır. Hidrojen atomu, coulomb potansiyelinde etkileşen proton + elektron sistemi olarak alınır. Bu sistemin bağlı enerji durumlarını E< O için bulunması için, 3- boyutlu uzayda Schrödinger denklemi,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi(\vec{r})+V(\vec{r})\Psi(\vec{r})=E\Psi(\vec{r})$$

biçiminde yazılır. Potansiyel fonksiyonu küresel simetrik olduğundan, kutupsal koordinatlara geçildiğinde bu denklemin çözümleri,

$$\Psi(r,\theta,\varnothing) = R(r)\, Y(\theta,\varnothing) \qquad (3.1.1)$$

şeklinde olacaktır. Bu şekildeki çözüm, biri r radyal uzaklığına, diğeri $(\theta,\varnothing)$ açılarına bağlı iki fonksiyonun çarpımı şeklindedir. R(r) fonksiyonunun sağladığı diferansiyel denklem,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{2\,m\,r^2}{\hbar^2}\left[E + \frac{e^2}{r} - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\,m\,r^2}\right]R(r) = 0 \qquad (3.1.2)$$

şeklindedir. Burada ℓ, açısal denklemin çözümünden gelen ve yörünge kuantum sayısını ifade eden pozitif tamsayıdır. (3.1.2) denklemini boyutsuz hale getirmek üzere,

$$\alpha^2 = -\frac{8\,m\,E}{\hbar^2} > 0, \quad \rho = \alpha\, r, \qquad \lambda = \frac{e^2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2(-E)}} \qquad (3.1.3)$$

olacak şekilde boyutsuz bir ρ değişkeni ve bir λ parametresi tanımlansın. Bu değerler (3.1.2) denklemine uygulanırsa,

$$\frac{d}{d\rho}\left(\rho^2\frac{dR}{d\rho}\right) + \left[\lambda\,\rho - \frac{1}{4}\rho^2 - \ell(\ell+1)\right]R(r) = 0 \qquad (3.1.4)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemiyle yakından ilgilidir. Bunu görmek için,

$$R(\rho) = \rho^{\ell}\, e^{-\rho/2}\, L(\rho) \qquad (3.1.5)$$

olacak şekilde yeni bir L fonksiyonu tanımlansın. Bu dönüşüm (3.1.4) de yerine yazılırsa, radyal denklemi,

$$\rho\frac{d^2L}{d\rho^2} + (2\ell + 2 - \rho)\,\frac{dL}{d\rho} + (\lambda - \ell - 1)\,L(\rho) = 0 \qquad (3.1.6)$$

biçimindedir. Bu denklem bağlı Chebyshev-Laguerre polinomlarının sağladığı diferansiyel denklemle karşılaştırılırsa, çözümlerin L_p^q olabilmesi için,

$$q \to 2\ell + 1 \quad \text{ve} \quad \lambda \to p - \ell$$

dönüşümlerinin yapılması gerekir. Bu durumda, dalga fonksiyonları ve enerji özdeğerleri yazılabilir. Bu değerler,

$$\lambda = \frac{e^2}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2(-E)}} = p - \ell = n \qquad \text{(yeni bir n indisi tanımlayalım.)}$$

$$E = -\frac{m\,e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}, \qquad R(\rho) = p^\ell e^{-\rho/2}\,L_{n+1}^{2\ell+1}(\rho)$$

şeklindedir [8].

3.2. Chebyshev-Laguerre Diferansiyel Denkleminin Çözümü

n sabit olmak üzere

$$x\,y''(x) + (1 - x)\,y'(x) + n\,y(x) = 0 \qquad (3.2.1)$$

denklemine Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemi denir [1,4,9]. Chebyshev-Laguerre polinomlarının çözümü olan diferansiyel denkleme, Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemi denilecek. Uygulamada öyle bir çözüm bulunsun ki bu çözüm; x in sonlu değerleri için çözüm sonlu olsun ve $x \to \infty$ için $e^{x/2}$, x den daha hızlı sonsuza gitsin. s ve a_r (r = 0,1,2,...) bulunması gereken sabitler olmak üzere (3.2.1) diferansiyel denkleminin,

$$y(x,s) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \, x^{s+r} \tag{3.2.2}$$

biçiminde en az bir çözümü vardır. Bununla birlikte Chebyshev-Laguerre denkleminin Frobeniüs yöntemi [8] ile seri çözümlerinin ve Chebyshev-Laguerre polinomları olarak bilinen özel polinomlarının önemli özelliklere sahip olduğu görülmektedir. Bu özellikler şu şekilde incelenir: (3.2.1) denkleminin çözümü, (3.2.2) biçiminde olduğu düşünülürse ve türevleri alınırsa,

$$y'(x,s) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r \, (s+r) \, x^{s+r-1} \tag{3.2.3}$$

$$y''(x,s) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r (s+r)(s+r-1) \, x^{s+r-2} \tag{3.2.4}$$

eşitlikleri bulunur. Bu eşitlikler (3.2.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r \, (s+r)(s+r-1) \, x^{s+r-1} + \sum_{r=0}^{\infty} a_r \, (s+r) \, x^{s+r-1} - \sum_{r=0}^{\infty} a_r \, (s+r) \, x^{s+r} + n \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^{s+r} = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$a_0 \, (s-1) s \, x^{s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} a_{r+1} \, (s+r+1)(s+r) \, x^{s+r} + a_0 \, s \, x^{s-1}$$

$$+ \sum_{r=0}^{\infty} a_{r+1} \, (s+r+1) \, x^{s+r} - \sum_{r=0}^{\infty} a_r (s+r) \, x^{s+r} + n \sum_{r=0}^{\infty} a_r \, x^{s+r} = 0$$

bulunur. Bu ifade düzenlenirse,

$$a_0 \, s^2 \, x^{s-1} + \sum_{r=0}^{\infty} \left[a_{r+1} \, (s+r+1)^2 + a_r (n - (s+r)) \right] x^{s+r} = 0 \tag{3.2.5}$$

eşitliği elde edilir. (3.2.5) eşitliğinin sağlanması,

$$a_o\, s^2\, x^{s-1} = 0, \quad (a_o \neq 0) \tag{3.2.6}$$

$$a_{r+1} = \frac{(s + r - n)}{(s + r + 1)^2}\, a_r \qquad \text{(Tekrarlama bağıntısı)} \tag{3.2.7}$$

koşullarına bağlı olacaktır. (3.2.6) eşitliğinden $s = 0$ değeri bulunur. Bu durumda iki bağımsız çözüm,

$$y(x,0) \quad \text{ve} \quad \left[\frac{\partial y}{\partial s}\right]_{s=0}$$

olmalıdır. Bu çözümlerden ikincisinin, $\ell n\, x$ formunda bir terim içerdiği biliniyor. Dolayısıyla $x = 0$ olduğunda ∞ dur. Bütün sonlu x ler için bir sonlu çözüm aradığından, bu ancak $y(x,o)$ olduğunda elde edilebilir. Bu durumda (3.2.7) tekrarlama bağıntısı,

$$a_{r+1} = \frac{(r - n)}{(r + 1)^2}\, a_r \tag{3.2.8}$$

halini alır. Bununla birlikte bu bağıntılardan elde edilen sonsuz serilerin , x in büyük değerleri için e^x gibi hareket edebileceği görülür. Bu nedenle yukarıdaki hatırlatmada, $x \to \infty$ olduğunda yeterince iyi sonuç vermez. Bu zorluk çerçevesinde çözüm yolunu seriler sınırlamaktadır ve (3.2.8) eşitliğinden bunun ancak, n pozitif tamsayı olduğunda gerçekleştiği görülür. Dolayısıyla $a_r \neq 0$ dır. Fakat a_{r+1} ve sonraki katsayılar ortadan kalkacağından (3.2.8) bağıntısı,

$$a_{r+1} = -a_r \frac{(n - r)}{(r + 1)^2}$$

şeklinde yazılır. Çözüm ise,

$$y = a_o \left\{ 1 - \frac{n}{(1!)^2}\, x + \frac{n(n-1)}{(2!)^2}\, x^2 - \ldots + (-1)^r \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{(r!)^2}\, x^r + \ldots \right\} \tag{3.2.9}$$

biçiminde olur. Bu durumda (3.2.9) çözümü, x in en yüksek derecesi x^n olmak üzere

$$y = a_o \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{(r!)^2} x^r$$

$$= a_o \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!\,(r!)^2} x^r$$

biçiminde elde edilir. a_o=1 için standart çözümü, n. dereceden Chebyshev-Laguerre polinomu olarak adlandırılır ve $L_n(x)$ ile gösterilir [9].

$$L_n(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{n!}{(n-r)!\,(r!)^2} x^r \qquad (3.2.10)$$

3.3. Chebyshev-Laguerre Polinomlarının Özellikleri

(0,∞) aralığında skaler çarpım,

$$(p,q) = \int_0^{\infty} \omega(x)\,p(x)\,q(x)\,dx$$

yazıldığında, bu skaler çarpımı ıraksak olmaktan koruyacak en doğal ağırlık fonksiyonu,

$$\omega(x) = e^{-x}$$

şeklinde olur. $x \to \infty$ olduğunda üstel fonksiyon, her x^m kuvvetinden daha hızlı sonsuza gider ve ıraksaklığı önler. (0,∞) aralığında ve bu ağırlık fonksiyonuyla tanımlı skaler çarpıma göre ortogonal olan polinomlar, Chebyshev-Laguerre polinomları adını alır.

x değişkeni (o,∞) aralığında tanımlı olduğundan, fonksiyonun tek veya çift olması söz konusu değildir.

3.3.1. Tanım (Üretici fonksiyonu).

$$G(x,t) = \frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t} \tag{3.3.1}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, Chebyshev-Laguerre polinomlarının üretici fonksiyonu denir [3].

Teorem. (3.3.1) üretici fonksiyonun t nin kuvvetlerine göre seri açılımı,

$$G(x,t) = \frac{\exp\{-x\,t/(1-t)\}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n\, L_n(x) \tag{3.3.2}$$

biçimindedir.

İspat. Üretici fonksiyonun t ye göre seri açılımı,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-t)}\exp\{-x\,t/(1-t)\} &= \frac{1}{(1-t)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left(-\frac{x\,t}{1-t}\right)^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{r!}\frac{x^r\,t^r}{(1-t)^{r+1}} \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}} = 1 + (r+1)\,t + \frac{(r+1)(r+2)}{2!}t^2 + \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3!}t^3 + \ldots \tag{3.3.4}$$

olduğu gözönüne alınır ve binom teoremi uygulanırsa,

$$\frac{1}{(1-t)^{r+1}} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(r+s)!}{r!\,s!}\,t^s \tag{3.3.5}$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade (3.3.3) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{(1-t)}\exp\{-x\,t/(1-t)\} = \sum_{r,s=0}^{\infty}(-1)^r\frac{(r+s)!}{(r!)^2 s!}x^r\,t^{r+s} \tag{3.3.6}$$

elde edilir. (3.3.6) eşitliğinin açılımında r nin sabit bir değeri için t^n katsayısı, r + s = n iken, s = n – r yazılarak elde edilir. Böylece bu r değeri için t^n katsayısı,

$$t^n = (-1)^r\frac{n!}{(r!)^2(n-r)!}\,x^r$$

şeklinde yazılır. r nin tüm uygun değerleri toplanarak bu tüm toplamdan t^n katsayıları elde edilir. s = n – r den dolayı ve s > o için, r < n olmalıdır. Buradan (3.2.10) ifadesi gözönüne alınırsa bütün t^n katsayıları,

$$\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(r!)^2(n-r)!}\,x^r = L_n(x)$$

biçimindedir [3].

Teorem (Rodrigue formülü). Chebyshev-Laguerre polinomları

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right) \tag{3.3.7}$$

formülü elde edilir. Buna Rodrigue formülü denir [3].

İspat. Leibnitz ifadesine [12] göre, u(x) ve v(x) gibi iki fonksiyonun çarpımının n. mertebeden türevi,

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(u(x)\,v(x)\right) = \sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\frac{d^{n-r}u(x)}{dx^{n-r}}\frac{d^r v(x)}{dx^r} \tag{3.3.8}$$

şeklinde yazılır. (3.3.7) eşitliğinin sağ tarafına (3.3.8) Leibnitz teoremi uygulanırsa,

$$\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)=\frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}x^n\frac{d^r}{dx^r}e^{-x} \tag{3.3.9}$$

bulunur. Fakat,

$$\frac{d^p}{dx^p}x^q = q(q-1)\ldots(q-p+1)x^{q-p}$$

$$=\frac{q!}{(q-p)!}x^{q-p}$$

olduğu gözönüne alınırsa (3.3.9) ifadesi,

$$\frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)=\frac{e^x}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{(n-r)!\,r!}\frac{n!}{r!}x^r(-1)^r e^{-x}$$

$$=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{n!}{(r!)^2(n-r)!}x^r$$

$$=L_n(x)$$

biçiminde bulunur. Böylece Chebyshev-Laguerre polinomları bulunur. ilk bir kaç Chebyshev-Laguerre polinomu,

$L_0(x)=1 \qquad L_1(x)=-x+1 \qquad L_2(x)=\frac{1}{2!}(x^2-4x+2)$

$L_3(x)=\frac{1}{3!}(-x^3+9x^2-18x+6) \qquad L_4(x)=\frac{1}{4!}(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)$

şeklindedir [9].

Chebyshev-Laguerre polinomlarının çözümü olduğu diferansiyel denklem aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem. $y = L_p(x)$ Chebyshev-Laguerre polinomları,

$$x\,y''(x) + (1 - x)\,y'(x) + n\,y(x) = 0$$

Chebyshev-Laguerre diferansiyel denkleminin çözümüdür.

İspat. $u(x) = x^n e^{-x}$ (3.3.10)

fonksiyonu gözönüne alınarak birinci türevi alınırsa,

$$x\,u'(x) + (x - n)\,u(x) = 0$$

şeklinde elde edilir. ikinci türevi alınırsa,

$$x\,u''(x) + (x - n+1)\,u'(x) + u(x) = 0$$

bulunur. Bu şekilde devam edilerek (n + 2) defa türevi alınırsa,

$$x\,u^{(n+2)} + (x + 1)\,u^{(n+1)} + (n + 1)\,u = 0 \tag{3.3.11}$$

denklemi elde edilir. Rodrigue formülü yardımıyla, u(x) fonksiyonu ve türevleri $L_n(x)$ cinsinden yazılabilir. Yani,

$$n!L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

$$= e^x u^{(n)}$$

$$u^{(n)} = n!\, e^{-x} L_n(x) \tag{3.3.12}$$

$$u^{(n+1)} = n!\, e^{-x}\left(L'_n - L_n\right) \tag{3.3.13}$$

$$u^{(n+2)} = n!\, e^{-x}\left(L''_n - 2\,L'_n - L_n\right) \tag{3.3.14}$$

şeklindedir. Bu eşitlikler (3.3.11) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$x\, L''_n + (1-x)\, L'_n(x) + n\, L_n(x) = 0 \tag{3.3.15}$$

şeklinde elde edilir. Bu ise Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemidir [8].

Teorem (Diklik bağıntısı). m ve n tamsayılar olmak üzere, Chebyshev-Laguerre polinomları arasında diklik bağıntısı,

$$\int_0^\infty e^{-x}\, L_n(x)\, L_m(x)\, dx = \delta_{nm}$$

şeklindedir.

İspat. (3.3.2) eşitliği kullanılırsa,

$$\frac{\exp\{-xt/(1-t)\}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\, t^n\,, \qquad \frac{\exp\{-xs/(1-s)\}}{1-s} = \sum_{m=0}^{\infty} L_m(x)\, s^m$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadeler taraf tarafa çarpılırsa,

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-x}\, L_n(x)\, L_m(x)\, t^n\, s^m = e^{-x}\, \frac{\exp\{-x\,t/(1-t)\}}{1-t}\, \frac{\exp\{-x\,s/(1-s)\}}{1-s} \tag{3.3.16}$$

elde edilir. Buradan,

$$I = \sum_{n,m=0}^{\infty} e^{-x}\, L_n(x)\, L_m(x)\, t^n\, s^m$$

olmak üzere (3.3.16) eşitliğinin her iki tarafının integrali alınırsa,

$$I = \int_0^\infty e^{-x}\, \frac{\exp\{-x\,t/(1-t)\}}{1-t}\, \frac{\exp\{-x\,s/(1-s)\}}{1-s}\, dx \tag{3.3.17}$$

bulunur. Bu eşitliğin açılımında $t^n s^m$ nin katsayısı,

$$t^n s^m = \int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx$$

biçimindedir. Fakat (3.3.17) eşitliği,

$$I = \frac{1}{(1-t)(1-s)} \int_0^\infty \exp\left\{-x\left(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right)\right\} dx$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)}\left[-\frac{1}{1+\{t/(1-t)\}+\{s/(1-s)\}} \exp\left\{-x\left(1+\frac{t}{1-t}+\frac{s}{1-s}\right)\right\}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)} \frac{1}{1+\{t/(1-t)\}+\{s/(1-s)\}}$$

$$= \frac{1}{(1-t)(1-s)+t(1-s)+s(1-t)}$$

$$= \frac{1}{1-st}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} s^n t^n$$

şeklindedir. Bu taktirde $t^n s^m$ nin katsayısı $m \neq n$ olması durumunda sıfır, $m = n$ olması durumunda ise 1 dir. Yani bu ifade δ_{nm} tanımını verir. Böylece,

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = \delta_{nm}$$

elde edilir [9].

Teorem (Tekrarlama bağıntısı). Ardışık üç Chebyshev-Laguerre polinomu arasında,

$$(n+1)\,L_{n+1}(x) = (2\,n+1-x)\,L_n(x) - n\,L_{n-1}(x) \tag{3.3.18}$$

bağıntısı vardır.

İspat. (3.3.2) eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevi alınırsa ve aşağıdaki,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{t}{1-t}\right] = \frac{1}{(1-t)^2}$$

eşitlik kullanılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,n\,t^{n-1} = \frac{1}{(1-t)^2}\exp\{-x\,t/(1-t)\} - \frac{x}{(1-t)^2}\,\frac{\exp\{-x\,t/(1-t)\}}{(1-t)}$$

$$= \frac{1}{(1-t)}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,t^n - \frac{x}{(1-t)^2}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,t^n$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$(1-t)^2\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,n\,t^{n-1} = (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,t^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,n\,t^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,n\,t^n + \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,n\,t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,t^n$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,t^{n+1} - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)\,t^n \tag{3.3.19}$$

bulunur. Bu eşitliğin genel kuvveti t^n olacak şekilde düzenlenirse,

$$\sum_{n=-1}^{\infty} L_{n+1}(x)(n+1)t^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} n\, L_n(x)t^n + \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x)(n-1)t^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x)t^n - x\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \qquad (3.3.20)$$

eşitliği bulunur. (3.3.20) eşitliğinin her iki tarafı t^n kuvvetlerine göre eşitlenirse,

$$(n+1)\, L_{n+1}(x) - 2\, n\, L_n(x) + (n-1)L_{n-1}(x) = L_n(x) - L_{n-1}(x) - x\, L_n(x), \quad (n > 1) \qquad (3.3.21)$$

bulunur. Bu eşitlik sadeleştirilirse,

$$(n+1)\, L_{n+1}(x) = (2\, n + 1 - x)\, L_n(x) - n\, L_{n-1}(x)$$

şeklinde tekrarlama bağıntısı elde edilir [9].

Teorem (Türev bağıntısı). Chebyshev-Laguerre polinomları arasında,

$$x\, L'_n(x) = n\, L_n(x) - n\, L_{n-1}(x) \qquad (3.3.22)$$

bağıntısı vardır.

İspat. (3.3.2) eşitliğinin her iki tarafının x e göre türevi alınırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)t^n = -\frac{t}{1-t}\,\frac{\exp\{-x\,t/(1-t)\}}{1-t}$$

$$= -\frac{t}{1-t}\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n \qquad (3.3.23)$$

elde edilir. Buradan,

$$(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)t^n = -t\sum_{n=0}^{\infty} L_n(x)t^n$$

veya

$$\sum_{n=0}^{\infty} L'_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} L'_{n-1}(x)t^n = -\sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1}(x)t^n \qquad (3.3.24)$$

biçiminde yazılır. (3.3.24) eşitliğinde t^n katsayıları eşitlenirse,

$$L'_n(x) - L'_{n-1}(x) = -L_{n-1}(x), \qquad (n \geq 1) \qquad (3.3.25)$$

bulunur. (3.3.18) biçimindeki tekrarlama bağıntısının, her iki tarafının x e göre türevi alınırsa,

$$(n+1)L'_{n+1}(x) = (2n+1-x)L'_n(x) - L_n(x) - nL'_{n-1}(x) \qquad (3.3.26)$$

elde edilir. (3.3.25) eşitliği, (3.3.26) formunda aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$L'_{n+1}(x) = L'_n(x) - L_n(x), \qquad L'_{n-1}(x) = L'_n(x) + L_{n-1}(x) \qquad (3.3.27)$$

Bu eşitlikler (3.3.26) eşitliğinde yerlerine yazılırsa,

$$(n+1)\{L'_n(x) - L_n(x)\} = (2n+1-x)L'_n(x) - L_n(x) - n(L'_n(x) + L_{n-1}(x))$$

bulunur. Buradan,

$$x L'_n(x) = n L_n(x) - n L_{n-1}(x)$$

elde edilir [9].

3.4. Bağlı Chebyshev-Laguerre Polinomları ve Özellikleri

Bağlı Chebyshev-Laguerre Diferansiyel denklemi,

$$x\frac{d^2y(x)}{dx^2}+(k+1-x)\frac{dy(x)}{dx}+n\,y(x)=0 \tag{3.4.1}$$

şeklindedir [9].

Teorem. (n + k) dereceli Chebyshev-Laguerre diferansiyel denkleminin bir çözümü z(x) ise bu taktirde, $\frac{d^kz(x)}{dx^k}$ bağlı Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemini sağlar.

İspat. z(x), (n + k) dereceli Chebyshev-Laguerre diferansiyel denkleminin bir çözümü olduğundan,

$$x\frac{d^2z(x)}{dx^2}+(1-x)\frac{dz(x)}{dx}+(n+k)\,z(x)=0 \tag{3.4.2}$$

biçiminde yazılabilir. (3.4.2) denkleminin k defa türevi alınırsa ve bu çarpımın türevine Leibnitz kuralı [12] uygulanırsa,

$$x\,\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}z(x)+k\,\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}z(x)+(1-x)\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}z(x)-k\frac{d^k}{dx^k}z(x)+(n+k)\,\frac{d^k}{dx^k}z(x)=0$$

$$x\frac{d^2}{dx^2}\,\frac{d^kz(x)}{dx^k}+(k+1-x)\,\frac{d}{dx}\,\frac{d^kz(x)}{dx^k}+n\,\frac{d^kz(x)}{dx^k}=0 \tag{3.4.3}$$

bulunur. Teoremden ve $L_n(x)$, Chebyshev-Laguerre polinomlarının Chebyshev-Laguerre denklemini sağladığı gerçeğinden $\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x)$, Bağlı Chebyshev-Laguerre denklemini sağladığı görülür. Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomları $(-1)^k$ sabit çarpanlı,

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) \tag{3.4.4}$$

çözümüyle tanımlanır [9].

Teorem. Bağlı Chebyshev-Laguerre denkleminin çözümü,

$$L_n^k(x) = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!r!} x^r$$

şeklindedir.

İspat. (3.2.10) ifadesinde, n yerine n+k alınırsa,

$$L_{n+k}(x) = \sum_{r=0}^{n+k} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n+k-r)!(r!)^2} x^r \tag{3.4.5}$$

olur. Bu ifade (3.4.4) de yerine yazılırsa,

$$L_n^k(x) = (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \sum_{r=0}^{n+k} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n+k-r)!(r!)^2} x^r$$

$$= (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \sum_{r=k}^{n+k} (-\ \ ^r \frac{(\ \ +k)!}{(n+k-r)!(r!)^2} x^r$$

bulunur. Bu eşitlikte $\frac{d^k}{dx^k}$, x in k dan küçük kuvvetleri için sıfır olduğundan ve ayrıca,

$$(d^k/dx^k)\, x^r = r\,(r-1)\ldots(r-k+1)\, x^{r-k}$$

$$= \frac{r!}{(r-k)!} x^{r-k} \tag{3.4.6}$$

ifadesi gözönüne alınırsa,

$$L_n^k(x) = (-1)^k \sum_{r=k}^{n+k} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n+k-r)!\,(r!)^2} \frac{r!}{(r-k)!} x^{r-k} \tag{3.4.7}$$

elde edilir. Toplamın değişkeni $s = r - k$ olarak değiştirilirse,

$$L_n^k(x) = (-1)^k \sum_{s=0}^{n} (-1)^{k+s} \frac{(n+k)!}{(n+k-k-s)!\,(k+s)!\,s!} x^s$$

$$= \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \frac{(n+k)!}{(n-s)!\,(k+s)!\,s!} x^s \tag{3.4.8}$$

elde edilir. Chebyshev-Laguerre polinomlarının türevleri de birer ortogonal polinom olurlar [9].

Teorem (Rodrigue formülü). Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomları,

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+k} e^{-x}\right) \tag{3.4.9}$$

formülü elde edilir. Bu formüle Rodrigue formülü denir [9].

İspat. $u(x) = x^{n+k} e^{-x}$ fonksiyonuna (3.3.8) Leibnitz ifadesi [12] uygulanırsa,

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+k} e^{-x}\right) = \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{(n-s)!\,s!} \frac{d^{n-s}}{dx^{n-s}} x^{n+k} \frac{d^r}{dx^r} e^{-x} \tag{3.4.10}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca,

$$\frac{d^p}{dx^p} x^q = q(q-1)\ldots(q-p+1)x^{q-p}$$

$$= \frac{q!}{(q-p)!} x^{q-p}$$

olduğu gözönüne alınırsa (3.4.10) ifadesi,

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+k}\,e^{-x}\right)=\sum_{s=0}^{n}\frac{n!}{(n-s)!\,s!}\,\frac{(n+k)!}{(k+s)!}\,x^{k+s}\,(-1)^s e^{-x}$$

$$=n!\,x^k e^{-x}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-1)^s\,n!}{(n-s)!\,s!}\,\frac{(n+k)!}{(k+s)!}\,x^s$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.4.8) ifadesi kullanır ve düzenlenirse,

$$L_n^k(x)=\frac{x^{-k}e^{x}}{n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+k}\,e^{-x}\right) \tag{3.4.11}$$

şeklinde bulunur. Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomlarının diğer özellikleri küçük değişikliklerle Chebyshev-Laguerre polinomlarının özelliklerine benzer.

3.4.4. Tanım (Üretici fonksiyonu).

$$G_n(x,t)=\frac{(-t)^n\,\exp\{-x\,t/(1-t)\}}{(1-t)^{n+1}} \tag{3.4.12}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona, her bir n indisi için Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomlarının üretici fonksiyonu denir [9].

Teorem. Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomlarının üretici fonksiyonunun t ye göre seri açılımı,

$$\frac{\exp\{-x\,t/(1-t)\}}{(1-t)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}L_n^k(x)\,t^n \tag{3.4.13}$$

şeklindedir.

İspat. (3.3.2) eşitliğinden her iki tarafın x e göre k mertebeden türevi alınırsa,

$$\frac{d^k}{dx^k}\frac{\exp\{-x\,t/(1-t)\}}{(1-t)} = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=k}^{\infty} L_n(x)\,t^n \tag{3.4.14}$$

elde edilir. $L_n(x)$, n. mertebeden polinomdur. n<k olduğundan, k defa türevi alındığında sıfır olur. (3.4.14) eşitliği düzenlenir ve sol tarafındaki türev alınırsa,

$$\left(-\frac{t}{1-t}\right)^k \frac{\exp\{-x\,t/(1-t)\}}{(1-t)} = \frac{d^k}{dx^k}\sum_{n=0}^{\infty} L_{n+k}(x)\,t^{n+k}$$

bulunur. Böylece (3.4.4) denklemi gözönüne alınırsa,

$$(-1)^k \frac{t^k}{(1-t)^{k+1}} \exp\{-x\,t/(1-t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k L_n^k(x)\,t^{n+k} \tag{3.4.15}$$

elde edilir. (3.4.15) eşitliğinde $(-1)^k t^k$ çarpanı kaldırıldığında,

$$\frac{\exp\{-x\,t/(1-t)\}}{(1-t)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^k(x)\,t^n$$

elde edilir [9].

Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomlarının çözümü olduğu diferansiyel denklem aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem. $y = L_n^k(x)$, Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomları,

$$x\frac{d^2y(x)}{dx^2} + (k+1-x)\frac{dy(x)}{dx} + (n-k)\,y(x) = 0$$

Bağlı Chebyshev-Laguerre diferansiyel denkleminin çözümüdür.

İspat. Chebyshev-Laguerre diferansiyel denkleminin ilişkili olduğu diferansiyel denklem (3.3.15) den,

$$x\, L''_n(x) + (1-x)\, L'_n(x) + n\, L_n(x) = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin birinci türevi alınırsa,

$$x\, L_n^{(3)}(x) + (2-x)\, L''_n(x) + (n-1)\, L'_n(x) = 0$$

bulunur. ikinci türevi alınırsa,

$$x\, L_n^{(4)}(x) + (3-x)\, L_n^{(3)}(x) + (n-2)\, L''_n(x) = 0$$

bulunur. Böylece k defa türevi alınırsa,

$$x\, L_n^{(k+2)}(x) + (k+1-x)\, L_n^{(k+1)}(x) + (n-k)\, L_n^{(k)}(x) = 0 \qquad (3.4.16)$$

denklemi elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{d^k}{dx^k} L_n(x) = L_n^k(x) \qquad (3.4.17)$$

ifadesi gözönüne alınarak, (3.4.16) denkleminde yerine yazılırsa,

$$x\, L_n^{(k)''}(x) + (k+1-x)\, L_n^{(k)'}(x) + (n-k)\, L_n^{(k)}(x) = 0 \qquad (3.4.18)$$

bulunur. Bu denklem, Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomlarının sağladığı denklemdir.

3.4.7. Tanım (Diklik bağıntısı).

m ve n tamsayılar olmak üzere,

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\, x^k\ L_n^k(x)\ L_m^k(x)\,dx = \frac{(n+k)!}{n!}\delta_{nm}$$

eşitliğine Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomlarının diklik bağıntısı denir [9].

Teorem (Tekrarlama bağıntısı). Ardışık üç Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomu arasında,

$$L_{n-1}^k(x) + L_n^{k-1}(x) = L_n^k(x) \tag{3.4.19}$$

bağıntısı vardır.

İspat. L_n^k ifadesi kullanılırsa,

$$L_{n-1}^k(x) + L_n^{k-1}(x) = \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n-1+k)!}{(n-1-r)!\,(k+r)!\,r!}x^r + \sum_{r=0}^{n}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r)!\,(k-1+r)!\,r!}x^r$$

$$L_{n-1}^k(x) + L_n^{k-1}(x) = \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r-1)!\,(k+r)!\,r!}x^r + \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r)!\,(k+r-1)!\,r!}$$

$$+(-1)^n \frac{(n+k-1)!}{(n-n)!\,(k-1+n)!\,n!}\ x^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r-1)!\,(k+r-1)!\,r!}\left\{\frac{1}{(k+r)} + \frac{1}{(n-r)}\right\}x^r + (-1)^n\frac{1}{n!}x^n$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1}(-1)^r \frac{(n+k-1)!}{(n-r-1)!\,(k+r-1)!\,r!}\ \frac{(n-r)+(k+r)}{(k+r)(n-r)}x^r + (-1)^n\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!\,r!} x^r + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{(n+k)!}{(n-r)!(k+r)!\,r!} x^n$$

$$= L_n^k(x)$$

bulunur [9].

Teorem. Ardışık üç Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomu arasında,

$$(n+1)\, L_{n+1}^k(x) = (2n+k+1-x)\, L_n^k(x) - (n+k)\, L_{n-1}^k(x)$$

bağıntısı vardır.

İspat. (3.3.18) tekrarlama bağıntısında, n yerine (n + k) alınarak ve elde edilen ifadenin k defa türevi alınırsa,

$$(n+k+1)\frac{d^k}{dx^k} L_{n+k+1}(x) = (2n+2k+1)\frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) - \frac{d^k}{dx^k}\{x\, L_{n+k}(x) \quad + (n+k)\frac{d^k}{dx^k} L_{n+k-1}(x)$$

elde edilir. Böylece bu çarpımın k mertebeden türevi için Leibnitz teoremi [12] kullanılırsa,

$$(n+k+1)\frac{d^k}{dx^k} L_{n+k+1}(x) = (2n+2k+1)\frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x)$$

$$- x\frac{d^k}{dx^k} L_{n+k}(x) - k\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} L_{n+k}(x) - (n+k)\frac{d^k}{dx^k} L_{n-1+k}(x) \qquad (3.4.16)$$

elde edilir.(3.4.4) ifadesi (3.4.20) de kullanılırsa,

$$(n+k+1)(-1)^k L_{n+1}^k(x)=(2n+2k+1)(-1)^k L_n^k(x)-x(-1)^k L_n^k(x)-$$

$$-k(-1)^{k-1} L_{n+1}^{k-1}(x)-(n+k)(-1)^k L_{n-1}^k(x) \qquad (3.4.21)$$

elde edilir. (3.4.19) bağıntısında n yerine (n + 1) alınır ve(3.4.21) de yerine yazılırsa,

$$(n+k+1)L_{n+1}^k(x)=(2n+2k+1)L_n^k(x)-x\,L_n^k(x)$$

$$+k\left\{L_{n+1}^k(x)-L_n^k(x)\right\}-(n+k)L_{n-1}^k(x) \qquad (3.4.22)$$

bulunur. Bu eşitlikten,

$$(n+1)\,L_{n+1}^k(x)=(2n+k+1-x)L_n^k(x)-(n+k)L_{n-1}^k(x)$$

elde edilir [9].

Teorem (Türev bağıntısı). Ardışık üç Bağlı Chebyshev-Laguerre polinomu arasında,

$$x\,L_n^{k\prime}(x)=n\,L_n^k(x)-(n+k)L_{n-1}^k(x)$$

bağıntısı vardır.

İspat. (3.3.22) eşitliğinde n yerine (n+k) alınarak ve bu ifadenin x e göre k defa türevi alınırsa,

$$\frac{d^k}{dx^k}\left\{x\;L'_{n-k}(x)\right\}=(n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x)-(n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k-1}(x) \qquad (3.4.23)$$

elde edilir. Bu eşitlikte çarpımın k mertebeden türevi için Leibnitz teoremi uygulanırsa,

$$x\frac{d^k}{dx^k}L'_{n+k}(x)+k\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x)=(n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k}(x)-(n+k)\frac{d^k}{dx^k}L_{n+k-1}(x)$$

bulunur. (3.4.4) ifadesi gözönüne alınırsa,

$$x\, L_n^{k'}(x) + k\ L_n^k(x) = (n + k)\ L_n^k(x) - (n + k)\ L_{n-1}^k(x)$$

bulunur. Böylece,

$$x\ L_n^{k'}(x) = n\ L_n^k(x) - (n + k)\ L_{n-1}^k(x)$$

elde edilir[9].

BÖLÜM IV

CHEBYSHEV-HERMİTE DENKLEMİNE DÖNÜŞEN DENKLEM SINIFLARININ OLUŞTURULMASI

Bu bölümde kanonik Chebyshev-Hermite diferansiyel denklemi gözönüne alınarak özel operatör dönüşüm yardımıyla, bu denkleme dönüşen lineer ve lineer olmayan denklem sınıfı oluşturulmuştur. Buradan da operatör dönüşüm yardımıyla, kanonik Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen denklem sınıfları genelleştirilmiştir.

4.1. Chebyshev-Hermite Denklemine Dönüşen Lineer Denklem Sınıfının Oluşturulması

Chebyshev-Hermite denkleminin kanonik şeklindeki ifadesi,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2ny = 0 \tag{4.1.1}$$

biçimindedir [9]. Bu denklemdeki x ve y değişkenleri, yeni bir t değişkeni ve u(t) aranan fonksiyonuna bağlı şekilde,

$$x = \gamma t^{\beta} \quad \text{ve} \quad y = t^{\alpha} u(t) \tag{4.1.2}$$

özel operatör dönüşümü yapılsın. Burada $\beta, \gamma \neq 0$ olmak üzere α, β ve γ sabitlerdir. (4.1.1) denklemi bu operatör dönüşümlere göre yeniden düzenlenirse,

$$\frac{dx}{dt} = \gamma\beta t^{\beta-1} \tag{4.1.3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\beta\gamma} t^{1-\beta} \frac{dy}{dt} \tag{4.1.4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}(\frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\frac{dy}{dt})$$

$$=\frac{1}{\beta\gamma}\frac{d}{dt}(t^{1-\beta}\frac{dy}{dt})\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{1}{\beta^2\gamma^2}t^{1-\beta}\left[(1-\beta)t^{-\beta}\frac{dy}{dt}+t^{1-\beta}\frac{d^2y}{dt^2}\right]$$

yani

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\beta^2\gamma^2}t^{1-\beta}\left[(1-\beta)t^{-\beta}\frac{dy}{dt}+t^{1-\beta}\frac{d^2y}{dt^2}\right] \tag{4.1.5}$$

şeklindedir. (4.1.2) operatör dönüşümlerinin ikincisinden,

$$\frac{dy}{dt}=t^{\alpha}\frac{du}{dt}+\alpha\, t^{\alpha-1}\,u(t) \tag{4.1.6}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=t^{\alpha}\frac{d^2u}{dt^2}+2\alpha\, t^{\alpha-1}\frac{du}{dt}+\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}\,u(t) \tag{4.1.7}$$

elde edilir. (4.1.2)-(4.1.5) ifadeleri gözönüne alınarak, (4.1.1) kanonik Chebyshev-Hermite denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{\beta^2\gamma^2}t^{1-\beta}\left[(1-\beta)t^{-\beta}\frac{dy}{dt}+t^{1-\beta}\frac{d^2y}{dt^2})\right]-2\gamma t^{\beta}\frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\frac{dy}{dt}+2n\,y=0$$

veya

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2}+(1-\beta-2\beta\gamma^2t^{2\beta})t\frac{dy}{dt}+2n\,\beta^2\gamma^2\,t^{2\beta}\,y=0 \tag{4.1.8}$$

bulunur. (4.1.6) ve (4.1.7) ifadeleri, (4.1.8) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$t^2\left[t^\alpha \frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha t^{\alpha-1}\frac{du}{dt} + \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}u(t)\right]$$

$$+(1-\beta-2\beta\gamma^2 t^{2\beta})t\left[t^\alpha \frac{du}{dt} + \alpha t^{\alpha-1}u(t)\right] + 2n\beta^2\gamma^2 t^{2\beta} t^\alpha u(t) = 0$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + \left[2\alpha+1-\beta-2\beta\gamma^2 t^{2\beta}\right]t\frac{du}{dt} + \left[\alpha^2-\alpha\beta+(2n\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta\gamma^2)t^{2\beta}\right]u(t) = 0 \qquad (4.1.9)$$

bulunur. Bu denklem (4.1.2) özel operatör dönüşümü gözönüne alınarak oluşturulan, kanonik Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer bir denklem sınıfıdır. Bu (4.1.9) denklem sınıfında,

$$a = 2\alpha+1-\beta,\ b = -2\beta\gamma^2,\ c = \alpha^2-\alpha\beta,\ d = 2n\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta\gamma^2,\ e = 2\beta$$

alınırsa, (4.1.9) denklem sınıfı,

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2} + (a+b\,t^e)t\frac{du}{dt} + (c+d\,t^e)u(t) = 0 \qquad (4.1.10)$$

formuna dönüşür. Burada $b \neq 0,\ d \neq 0,\ e \neq 0$ dır. (4.1.1) kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin çözümü,

$$y(x) = H_n(x) = \sum_{i=0}^{N}(-1)^i\frac{n!}{(n-2i)!\,i!}(2x)^{n-2i} \qquad (4.1.11)$$

$$N = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ çift iken} \\ \dfrac{n-1}{2}, & n \text{ tek iken} \end{cases}$$

şeklindedir [9]. Burada bu çözümün geçerli olması için gerekli ve yeterli şart, (n-2k) nın tamsayı olmasıdır. Böylece (4.1.2) özel operatör dönüşüm gözönüne alınarak, (4.1.9) şeklindeki Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının çözümü, kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin çözümünün vasıtasıyla,

$$u_n(t) = t^{-\alpha} \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \frac{n!}{(n-2i)!i!} (2\gamma t^{\beta})^{n-2i} \tag{4.1.12}$$

şeklinde olur.

Sonuç olarak (4.1.2) özel operatör dönüşüm gözönüne alınarak, Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen denklem sınıfı oluşturulur. Bu şekilde oluşturulan denklem sınıflarının çözümü, kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin çözümünün yardımıyla yapılır.

4.2. Chebyshev-Hermite Denklemine Dönüşen Denklem Sınıflarının Genelleştirilmesi

Chebyshev-Hermite denkleminin kanonik şeklindeki yazılımı,

$$y''(x) - 2x\,y'(x) + 2n\,y(x) = 0$$

biçimindedir [9]. Kanonik Chebyshev-Hermite diferansiyel denklemine dönüşen denklem sınıflarının genelleştirilmesi için,

$$x = \varphi(t) \tag{4.2.1}$$

$$y = \eta[t, u(t)] \tag{4.2.2}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınsın. Bu operatör dönüşümlerin, sürekli ve ters fonksiyonlar olması gerekir. Bu durumda,

φ ve η operatör dönüşüm fonksiyonları için, gerek ve yeter koşullar bulunmalıdır. Yani denklemin çözümü, (4.1.1) kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin çözümünün vasıtasıyla oluşturulmalıdır.

Ayrıca, (4.1.1) kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin, (4.2.1) ve (4.2.2) operatör dönüşümleri kullanarak yeni koordinatlarda yazılmasıdır.

Yani (4.2.1) ve (4.2.2) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \varphi'(t) \tag{4.2.3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{\frac{d\eta}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \tag{4.2.4}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = \frac{1}{(\frac{dx}{dt})^2}\frac{d^2\eta}{dt^2} - \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{(\frac{dx}{dt})^3}\frac{d\eta}{dt} \tag{4.2.5}$$

elde edilir. (4.2.1), (4.2.2), (4.2.4) ve (4.2.5) ifadeleri (4.1.1) kanonik Chebyshev-Hermite diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2}\frac{d^2\eta}{dt^2} - \left[\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\left[\frac{dx}{dt}\right]^3} - 2\frac{\varphi(t)}{\frac{dx}{dt}}\right]\frac{d\eta}{dt} + 2n\eta = 0 \tag{4.2.6}$$

bulunur. (4.2.3) ifadesi (4.2.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{[\varphi'(t)]^2}\frac{d^2\eta}{dt^2} - \left[\frac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} - 2\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}\right]\frac{d\eta}{dt} + 2n\eta = 0 \tag{4.2.7}$$

veya

$$L_0(t)\frac{d^2\eta}{dt^2}+L_1(t)\frac{d\eta}{dt}+2n\eta=0 \tag{4.2.7}$$

elde edilir. Bu (4.2.7) denklemi, (4.2.1) ve (4.2.2) operatör dönüşümleri gözönüne alınarak, kanonik Chebyshev-Hermite diferansiyel denklemine dönüşen denklem sınıflarının oluşturulması için bulunan denklem sınıfıdır. Bulunan (4.2.7) denklem sınıfının çözümü, (4.1.1) kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin çözümünün ve (4.2.2) kapalı şekilde olan $\eta[t, u(t)]$ operatör dönüşümünün vasıtasıyla,

$$\eta[t,u(t)]=\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\frac{n!}{(n-2i)!i!}[2\varphi(t)]^{n-2i} \tag{4.2.8}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\eta=\eta[t,u(t)]$ operatör dönüşüm fonksiyonunun kapalı olduğu gözönüne alınırsa, (4.2.8) formülünden u(t) fonksiyonu,

$$u_n(t)=\phi\left\{t;\ \sum_{i=0}^{N}(-1)^i\frac{n!}{(n-2i)!i!}[2\varphi(t)]^{n-2i}\right\} \tag{4.2.9}$$

biçiminde olacaktır. Burada şunun belirtilmesinde fayda vardır. (4.2.8) formülünden u(t) fonksiyonunun bulunması için, kapalı şekildeki $y=\eta[t,u(t)]$ operatör dönüşüm fonksiyonun açık şekilde verilmesi gerekir.

Örnek 1.

Dönüşüm fonksiyonları,

$$x=\varphi(t)$$

$$y=\eta[t,u(t)]=\chi(t)\,u(t) \tag{4.2.10}$$

şeklinde olsun. Bu durumda bu dönüşümler (4.2.7) genelleştirilmiş denklem sınıfına uygulanırsa denklem sınıfı,

$$L_0(t)x(t)\frac{d^2u}{dt^2}+[2L_0(t)x'(t)+L_1(t)x(t)]\frac{du}{dt}+[L_0(t)x''(t)+L_1(t)x'(t)+2n\,x(t)]u(t)=0$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem sınıfının çözümü, (4.2.10) dönüşümünün (4.2.9) ifadesinde yerlerine yazılmasıyla ve u(t) fonksiyonunun çekilmesiyle,

$$u_n(t)=\chi^{-1}(t)\left[\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\frac{n!}{(n-2i)!i!}[2\varphi(t)]^{n-2i}\right]$$

şeklinde olacaktır.

Örnek 2.

Dönüşüm fonksiyonları,

$$x=\varphi(t)$$

$$y=\eta[t,u(t)]=A_0(t)u^2(t)+2A_1(t)u(t)+A_2(t) \qquad (4.2.11)$$

şeklinde olsun Bu durumda bu dönüşümler (4.2.7) genelleştirilmiş denklem sınıfına uygulanmak üzere türevleri alınırsa,

$$\frac{d\eta}{dt}=(2A_0(t)u(t)+2A_1(t))\frac{du(t)}{dt}+(A_0'(t)u(t)+2A_1'(t))u(t)+{}+A_2'(t)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=[2A_0(t)u(t)+2A_1(t)]\frac{d^2u}{dt^2}+[4A_0'(t)u(t)+4A_1'(t)]\frac{du}{dt}$$
$$+(A_0''(t)u(t)+2A_1''(t))u(t)+2A_0(t)\left(\frac{du}{dt}\right)^2+A_2''(t)$$

elde edilir. Bu ifadeler (4.2.7) genelleştirilmiş denklem sınıfında yerine yazılırsa denklem sınıfı,

$$[2A_0(t)u(t)L_0(t)+2A_1(t)L_0(t)]\frac{d^2u}{dt^2}$$
$$+[4A_0'(t)u(t)L_0(t)+4A_1'(t)L_0(t)+2A_0(t)u(t)L_1(t)+2L_1(t)A_1(t)]\frac{du}{dt}$$
$$+[A_0''(t)u(t)L_0(t)+2A_1''(t)L_0(t)+A_0'(t)u(t)L_1(t)+2A_1'(t)u(t)L_1(t)+nA_0(t)u(t)+2nA_1(t)]u(t)$$
$$+2A_0(t)L_0(t)\left(\frac{du}{dt}\right)^2+A_2''(t)L_0(t)+A_2'(t)L_1(t)+2nA_2(t)=0$$

şeklinde bulunur. Bu denklem sınıfının çözümü, (4.2.11) dönüşümünün (4.2.9) ifadesinde yerlerine yazılmasıyla ve u(t) fonksiyonunun çekilmesiyle,

$$A_0(t)u^2(t)+2A_1(t)u(t)+A_2(t)-A_3(t)=0 \tag{4.2.12}$$

bulunur. Bu (4.2.12) ifadesi u(t) fonksiyonuna göre ikinci dereceden cebirsel bir denklemdir. $A_3(t)$ fonksiyonu, (4.2.8) eşitliğinin sağ tarafının kısa şekildeki yazılımıdır ve $A_i(t)$ (i=0,1,2) fonksiyonları analitik fonksiyonlardır. (4.2.12) denkleminin çözümü ise,

$$u_n(t)=\frac{1}{A_0(t)}\left[-A_1(t)\mp\sqrt{A_1^2(t)-A_0(t)\left(A_2(t)-A_3(t)\right)}\right.$$

olmaktadır. Böylece u(t) operatör dönüşüm fonksiyonu,

$$u_n(t)=\frac{1}{A_0(t)}\left[-A_1(t)\mp\sqrt{A_1^2(t)-A_0(t)\left(A_2(t)-\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\frac{n!}{(n-2i)!i!}[2\varphi(t)]^{n-2i}\right)}\right] \tag{4.2.13}$$

biçiminde olacaktır.

Örnek 3.

Dönüşüm fonksiyonları,

$$x=\varphi(t) \quad \text{ve} \quad y=\eta[t,u(t)]=\sum_{k=1}^{n}A_n(t)u^n(t)$$

şeklinde olsun. Bu dönüşümler yardımıyla oluşturulan denklem sınıfının çözümü, bu dönüşümlerin (4.2.8) de yerine yazılmasıyla,

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(t)\,u^k(t) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \frac{n!}{(n-2i)!\,i!}\left[2\varphi(t)\right]^{n-2i} \tag{4.2.14}$$

şeklinde elde edilir. Bu (4.2.14) eşitliği u(t) fonksiyonunun bulunmasında cebirsel bir denklemdir. (4.2.14) denkleminde u(t) fonksiyonuna göre çözümün bulunmasıyla u(t) fonksiyonunun tipi belirlenir.

4.3. Chebyshev-Hermite Denklemine Dönüşen Lineer Olmayan Denklem Sınıfının Oluşturulması

Operatör dönüşüm fonksiyonları,

$$x = \gamma\, t^{\beta} \text{ ve } y = t^{\alpha} u^{k}(t) \tag{4.3.1}$$

şeklinde olsun. Burada $\beta, k, \gamma \neq 0$ olmak üzere α, β,k ve γ sabitlerdir. Kanonik Chebyshev-Hermite diferansiyel denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının oluşturulması için, (4.2.7) genelleştirilmiş denklem sınıfı kullanılsın. Bu durumda (4.2.7) genelleştirilmiş denklem sınıfının kullanılması için, (4.2.1) ve (4.2.2) gözönüne alındığında φ ve η operatör dönüşüm fonksiyonları,

$$\varphi(t) = \gamma t^{\beta} \quad \text{ve} \quad \eta\left[t, u(t)\right] = t^{\alpha} u^{k}(t) \tag{4.3.2}$$

şeklinde olur. (4.3.2) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\varphi'(t) = \gamma \beta t^{\beta-1} \tag{4.3.3}$$

$$\varphi''(t) = \gamma \beta(\beta-1) t^{\beta-2} \tag{4.3.4}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = k\, t^{\alpha} u^{k-1}(t) \frac{du}{dt} + \alpha\, t^{\alpha-1} u^{k}(t) \tag{4.3.5}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = k\,u^{k-1}(t)\,t^{\alpha}\,\frac{d^2u}{dt^2} + 2k\alpha\,t^{\alpha-1}u^{k-1}(t)\frac{du}{dt}$$
$$+ k(k-1)t^{\alpha}u^{k-2}(t)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}u^{k}(t) \qquad (4.3.6)$$

elde edilir. (4.3.2)-(4.3.6) ifadeleri, (4.2.7) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$\frac{1}{(\gamma\beta t^{\beta-1})^2}\left(k\,u^{k-1}(t)t^{\alpha}\frac{d^2u}{dt^2} + 2k\alpha\,t^{\alpha-1}u^{k-1}(t)\frac{du}{dt} + k(k-1)t^{\alpha}u^{k-2}(t)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}u^{k}(t)\right)$$
$$+\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}u^{k}(t)) - \left[\frac{\gamma\beta(\beta-1)t^{\beta-2}}{(\gamma\beta t^{\beta-1})^3} - 2\frac{\gamma t^{\beta}}{\gamma\beta t^{\beta-1}}\right]\left[kt^{\alpha}u^{k-1}(t)\frac{du}{dt} + \alpha\,t^{\alpha-1}u^{k}(t)\right] + 2n\,t^{\alpha}u^{k}(t) = 0$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$t^2u(t)\frac{d^2u}{dt^2} + \left[2\alpha - (\beta-1) - 2\beta\gamma^2t^{2\beta}\right]t\,u(t)\frac{du}{dt} + (k-1)\,t^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2$$
$$+\frac{1}{k}\left[\alpha^2 - \alpha\beta + (2n\beta^2\gamma^2 - 2\alpha\beta\gamma^2)t^{2\beta}\right]u^2(t) = 0 \qquad (4.3.7)$$

bulunur. Bu denklem (4.3.1) operatör dönüşümü gözönüne alınarak oluşturulan, Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer olmayan bir denklem sınıfıdır. Kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin çözümü,

$$y(x) = H_n(x) = \sum_{i=0}^{N}(-1)^i\,\frac{n!}{(n-2i)!\,i!}(2\,x)^{n-2i}$$

olduğu gözönüne alınırsa [9], (4.3.7) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümü,

$$u_n{}^{k}(t) = t^{-\alpha}\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\,\frac{n!}{(n-2i)!\,i!}\left[2\gamma\,t^{\beta}\right]^{n-2i}$$

şeklinde bulunur. Bu tipli çözümde, u(t) nin çözümü k ya bağlıdır. $k=1,2,3,4$ olduğunda, tam çözüm kolayca bulunur. $k>4$ olduğunda veya tamsayı olmadığında, yaklaşık yöntemlerle yaklaşık çözüm bulunabilir.

Özel Hal. (4.3.2) operatör dönüşüm fonksiyonunda k=1 alınırsa, operatör dönüşüm fonksiyonları,

$$\varphi(t)=\gamma t^{\beta} \quad \text{ve} \quad \eta[t,u(t)]=t^{\alpha}u(t)$$

şeklinde olur. Bu operatör dönüşümler (4.2.7) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$t^2u(t)\frac{d^2y}{dt^2}+\left[2\alpha-(1-\beta)-2\beta\gamma^2t^{2\beta}\right]t\,u(t)\frac{dy}{dt}+\left[\alpha^2-\alpha\beta+(2n\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta\gamma^2)t^{2\beta}\right]u^2(t)=0$$

elde edilir. Bu ifade sadeleştirilirse,

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+\left[2\alpha+1-\beta-2\beta\gamma^2t^{2\beta}\right]t\frac{du}{dt}++\left[\alpha^2-\alpha\beta+(2n\beta\gamma^2-2\alpha\beta\gamma^2)t^{2\beta}\right]u(t)=0$$

bulunur.

Sonuç olarak, Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen bir denklem sınıfının oluşturulması için, operatör dönüşüm fonksiyonları, ya kanonik Chebyshev-Hermite denkleminde yazılmak üzere düzenlenir yada (4.2.7) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfında yerine yazılmak üzere uygun hale getirilir. Yani iki durumda da aynı denklem sınıfı elde edilir.

BÖLÜM V

CHEBYSHEV-LAGUEERE DENKLEMİNE DÖNÜŞEN DENKLEM SINIFLARININ OLUŞTURULMASI

Bu bölümde kanonik Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemi gözönüne alınarak özel operatör dönüşüm yardımıyla, bu denkleme dönüşen lineer ve lineer olmayan denklem sınıfı oluşturulmuştur. Buradan da operatör dönüşüm yardımıyla, kanonik Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen denklem sınıflarının oluşturulması için, denklem sınıfları genelleştirilmiştir.

5.1. Chebyshev-Laguerre Denklemine Dönüşen Lineer Denklem Sınıfının Oluşturulması

Chebyshev-Laguerre denkleminin kanonik şeklindeki ifadesi,

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(1-x)\frac{dy}{dx}+n\,y=0 \tag{5.1.1}$$

biçimindedir [9]. Bu denklemdeki x ve y değişkenleri, yeni bir t değişkeni ve u(t) aranan fonksiyonuna bağlı şekilde,

$$x=\gamma\, t^{\beta} \qquad \text{ve} \qquad y=t^{\alpha}u(t) \tag{5.1.2}$$

özel operatör dönüşüm yapılsın. Burada $\beta,\gamma \neq 0$ olmak üzere α, β ve γ sabitlerdir. (5.1.1) denklemi bu operatör dönüşümlere göre yeniden düzenlenirse,

$$\frac{dx}{dt}=\gamma\beta\, t^{\beta-1} \tag{5.1.3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\frac{dy}{dt} \tag{5.1.4}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{1}{\beta\gamma}\frac{d}{dt}\left(t^{1-\beta}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{1}{\beta^2\gamma^2}t^{1-\beta}\left[(1-\beta)\,t^{-\beta}\frac{dy}{dt}+t^{1-\beta}\frac{d^2y}{dt^2}\right]$$

yani

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\beta^2\gamma^2}t^{1-\beta}\left[(1-\beta)\,t^{-\beta}\frac{dy}{dt}+t^{1-\beta}\frac{d^2y}{dt^2}\right] \tag{5.1.5}$$

şeklindedir. (5.1.2) operatör dönüşümlerinin ikincisinden,

$$\frac{dy}{dt}=t^{\alpha}\frac{du}{dt}+\alpha\,t^{\alpha-1}u(t) \tag{5.1.6}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=t^{\alpha}\frac{d^2u}{dt^2}+2\alpha\,t^{\alpha-1}\frac{du}{dt}+\alpha(\alpha-1)\,t^{\alpha-2}\,u(t) \tag{5.1.7}$$

elde edilir. (5.1.2)-(5.1.5) ifadeleri gözönüne alınarak, (5.1.1) kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\gamma\,t^{\beta}\frac{1}{\beta^2\gamma^2}t^{1-\beta}\left[(1-\beta)\,t^{-\beta}\frac{dy}{dt}+t^{1-\beta}\frac{d^2y}{dt^2})\right](1-\gamma\,t^{\beta})\frac{1}{\beta\gamma}t^{1-\beta}\frac{dy}{dt}+n\,y=0$$

veya

$$t\frac{d^2y}{dt^2}+(1-\beta\gamma\,t^{\beta})\frac{dy}{dt}+n\beta^2\gamma\,t^{\beta-1}y=0 \tag{5.1.8}$$

bulunur. (5.1.6) ve (5.1.7) ifadeleri, (5.1.8) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$t\left[t^{\alpha}\frac{d^2u}{dt^2}+2\alpha t^{\alpha-1}\frac{du}{dt}+\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}u(t)\right]+(1-\beta\gamma t^{\beta})\left[t^{\alpha}\frac{du}{dt}+\alpha t^{\alpha-1}u(t)\right]$$

$$+n\beta^2\gamma\, t^{\beta-1}t^{\alpha}\, u(t)=0$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+\left[2\alpha+1-\beta\gamma t^{\beta}\right]t\frac{du}{dt}++\left[\alpha^2+(n\beta^2\gamma-\alpha\beta\gamma)t^{\beta}\right]u(t)=0 \qquad (5.1.9)$$

bulunur. Bu denklem (5.1.2) özel operatör dönüşüm gözönüne alınarak oluşturulan, kanonik Chebyshev- Laguerre denklemine dönüşen lineer bir denklem sınıfıdır. Bu (5.1.9) denklem sınıfında,

$$a=2\alpha+1\,,\quad b=-\beta\gamma\,,\quad =\alpha^{22},\quad d=n\beta^2\gamma-\alpha\beta\gamma\,,\quad e=\beta$$

alınırsa, (5.1.9) denklem sınıfı,

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+(a+b\,t^{e})\,t\frac{du}{dt}+(c+d\,t^{e})u(t)=0 \qquad (5.1.10)$$

formuna dönüşür. Burada $b\neq 0$, $d\neq 0$, $e\neq 0$ dır. (5.1.1) kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminin çözümü,

$$y(x)=L_n(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!\,(m!)^2}x^m \qquad (5.1.11)$$

şeklindedir [9]. Böylece (5.1.2) özel operatör dönüşüm gözönüne alınarak oluşturulan, (5.1.9) şeklindeki Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer bir denklem sınıfının çözümü, kanonik Chebyshev- Laguerre denkleminin çözümünün vasıtasıyla,

$$u_n(t)=t^{-\alpha}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}\left[\gamma t^{\beta}\right]^m \qquad (5.1.12)$$

şeklinde olur.

Sonuç olarak (5.1.2) özel operatör dönüşüm gözönüne alınarak, Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen bir denklem sınıfı oluşturulur. Bu şekilde oluşturulan denklem sınıflarının çözümü, kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminin çözümünün yardımıyla yapılır.

5.2. Chebyshev-Laguerre Denklemine Dönüşen Denklem Sınıflarının Genelleştirilmesi

Chebyshev-Laguerre denkleminin kanonik şeklindeki yazılımı,

$$x\,y''(x) + (1 - x)\, y'(x) + n\, y(x) = 0$$

biçimindedir [9]. Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen denklem sınıflarının genelleştirilmesi için,

$$x = \varphi(t) \tag{5.2.1}$$

$$y = \eta\left[t, u(t)\right] \tag{5.2.2}$$

operatör dönüşümler gözönüne alınsın. Bu operatör dönüşümlerin, sürekli ve ters fonksiyonlar olması gerekir. Bu durumda,

φ ve η operatör dönüşüm fonksiyonları için, gerek ve yeter koşullar bulunmalıdır. Yani denklemin çözümü, (5.1.1) kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminin çözümünün vasıtasıyla oluşturulmalıdır.

Ayrıca, (5.1.1) kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminin, (5.2.1) ve (5.2.2) operatör dönüşümleri kullanarak yeni koordinatlarda yazılmasıdır.

Yani (5.2.1) ve (5.2.2) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d\varphi(t)}{dt}=\varphi'(t) \tag{5.2.3}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d\eta}{dx}=\frac{d\eta}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{\dfrac{d\eta}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}} \tag{5.2.4}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]=\frac{1}{\left[\dfrac{dx}{dt}\right]^2}\frac{d^2\eta}{dt^2}-\frac{\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left[\dfrac{dx}{dt}\right]^3}\frac{d\eta}{dt} \tag{5.2.5}$$

elde edilir. (5.2.1), (5.2.2), (5.2.4) ve (5.2.5) ifadeleri, (5.1.1) kanonik Chebyshev-Laguerre diferansiyel denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{\varphi(t)}{\left[\dfrac{dx}{dt}\right]^2}\frac{d^2\eta}{dt^2}+\left[\frac{1-\varphi(t)}{\dfrac{dx}{dt}}-\frac{\varphi(t)\dfrac{d^2x}{dt^2}}{\left[\dfrac{dx}{dt}\right]^3}\right]\frac{d\eta}{dt}+n\eta=0 \tag{5.2.6}$$

bulunur. (5.2.3) ifadesi, (5.2.6) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{\varphi(t)}{[\varphi'(t)]^2}\frac{d^2\eta}{dt^2}+\left[\frac{1-\varphi(t)}{\varphi'(t)}-\frac{\varphi''(t)\varphi(t)}{[\varphi'(t)]^3}\right]\frac{d\eta}{dt}+n\eta=0 \tag{5.2.7}$$

veya

$$L_0(t)\frac{d^2\eta}{dt^2}+L_1(t)\frac{d\eta}{dt}+n\eta=0 \tag{5.2.7}$$

elde edilir. Bu (5.2.7) denklemi, (5.2.1) ve (5.2.2) genel operatör dönüşümleri gözönüne alınarak, Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen denklem sınıflarının oluşturulması için bulunan denklem sınıfının genelleştirilmesi dır. Bulunan (5.2.7) denklem sınıfının genelleştirilmesi nın çözümü, (5.1.1) kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminin çözümünün ve (5.2.2) de kapalı şekilde olan $\eta[t,u(t)]$ operatör dönüşümünün vasıtasıyla,

$$\eta[t,u(t)] = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!(m!)^2} [\varphi(t)]^m \tag{5.2.8}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\eta = \eta[t,u(t)]$ operatör dönüşüm fonksiyonunun kapalı şekilde olduğu gözönüne alınırsa, (5.2.8) formülünden u(t) fonksiyonu,

$$u_n(t) = \phi\left\{t;\ \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!(m!)^2} [\varphi(t)]^m\right\} \tag{5.2.9}$$

biçiminde olacaktır. Burada şunun belirtilmesinde fayda vardır. Yani (5.2.8) formülünden u(t) fonksiyonunun bulunması için, kapalı şekilde olan $y = \eta[t,u(t)]$ operatör dönüşüm fonksiyonun açık şekilde verilmesi gerekir.

Örnek 1.

Dönüşüm fonksiyonları,

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \eta[t,u(t)] = \chi(t)\,u(t) \tag{5.2.10}$$

şeklinde olsun. Bu durumda bu dönüşümler (5.2.7) genelleştirilmiş denklem sınıfına uygulanırsa denklem sınıfı,

$$L_0(t)x(t)\frac{d^2u}{dt^2} + [2L_0(t)x'(t) + L_1(t)x(t)]\frac{du}{dt} + [L_0(t)x''(t) + L_1(t)x'(t) + n\,x(t)]u(t) = 0$$

şeklinde elde edilir. Bu denklem sınıfının çözümü, (5.2.10) dönüşümünün (5.2.9) ifadesinde yerlerine yazılmasıyla ve u(t) fonksiyonunun çekilmesiyle,

$$u_n(t) = \chi^{-1}(t)\left[\sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}[\varphi(t)]^m\right]$$

şeklinde olacaktır.

Örnek 2.

Dönüşüm fonksiyonları,

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \eta[t, u(t)] = A_0(t)u^2(t) + 2A_1(t)u(t) + A_2(t) \tag{5.2.11}$$

şeklinde olsun Bu durumda bu dönüşümler (5.2.7) genelleştirilmiş denklem sınıfına uygulanmak üzere türevleri alınırsa,

$$\frac{d\eta}{dt} = \left(2A_0(t)u(t) + 2A_1(t)\right)\frac{du(t)}{dt} + \left(A_0^{'}(t)u(t) + 2A_1^{'}(t)\right)u(t) + +A_2^{'}(t)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = [2A_0(t)u(t) + 2A_1(t)]\frac{d^2u}{dt^2} + [4A_0^{'}(t)u(t) + 4A_1^{'}(t)]\frac{du}{dt}$$
$$+\left(A_0^{''}(t)u(t) + 2A_1^{''}(t)\right)u(t) + 2A_0(t)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + A_2^{''}(t)$$

elde edilir. Bu ifadeler (5.2.7) genelleştirilmiş denklem sınıfında yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}&[2A_0(t)u(t)L_0(t)+2A_1(t)L_0(t)]\frac{d^2u}{dt^2}\\&+[4A_0'(t)u(t)L_0(t)+4A_1'(t)L_0(t)+2A_0(t)u(t)L_1(t)+2L_1(t)A_1(t)]\frac{du}{dt}\\&+[A_0''(t)u(t)L_0(t)+2A_1''(t)L_0(t)+A_0'(t)u(t)L_1(t)+2A_1'(t)u(t)L_1(t)+\lambda A_0(t)u(t)+2\lambda A_1(t)]u(t)\\&+2A_0(t)L_0(t)\left(\frac{du}{dt}\right)^2+A_2''(t)L_0(t)+A_2'(t)L_1(t)+nA_2(t)=0\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu denklem sınıfının çözümü, (5.2.11) dönüşümünün (5.2.9) ifadesinde yerlerine yazılmasıyla ve u(t) fonksiyonunun çekilmesiyle,

$$A_0(t)u^2(t)+2A_1(t)u(t)+A_2(t)-A_3(t)=0 \tag{5.2.12}$$

bulunur. Bu (5.2.12) ifadesi u(t) fonksiyonuna göre ikinci dereceden cebirsel bir denklemdir. $A_3(t)$ fonksiyonu, (5.2.8) eşitliğinin sağ tarafının kısa şekildeki yazılımıdır ve $A_i(t)$ (i=0,1,2) fonksiyonları analitik fonksiyonlardır. (5.2.12) denkleminin çözümü ise,

$$u_n(t)=\frac{1}{A_0(t)}\left[-A_1(t)\mp\sqrt{A_1^2(t)-A_0(t)\left(A_2(t)-A_3(t)\right)}\right.$$

olmaktadır. Böylece u(t) operatör dönüşüm fonksiyonu,

$$u_n(t)=\frac{1}{A_0(t)}\left[-A_1(t)\mp\sqrt{A_1^2(t)-A_0(t)\left(A_2(t)-\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}[\varphi(t)]^m\right)}\right] \tag{5.2.13}$$

biçiminde olacaktır.

Örnek 3.

Dönüşüm fonksiyonları,

$$x=\varphi(t) \quad \text{ve} \quad y=\eta[t,u(t)]=\sum_{k=1}^{n}A_n(t)u^n(t)$$

şekilde olsun. Bu dönüşümler yardımıyla oluşturulan denklem sınıfının çözümü,bu dönüşümlerin (5.2.8) de yerine yazılmasıyla,

$$\sum_{k=1}^{n} A_k(t)\, u^k(t) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!\,(m!)^2} [\varphi(t)]^m \tag{5.2.14}$$

şeklinde elde edilir. Bu (5.2.14) eşitliği, u(t) fonksiyonunun bulunmasında cebirsel bir denklemdir. (5.2.14) denkleminde u(t) fonksiyonuna göre çözümün bulunmasıyla u(t) fonksiyonunun tipi belirlenir.

5.3. Chebyshev-Laguerre Denklemine Dönüşen Lineer Olmayan Denklem Sınıfının Oluşturulması

Operatör dönüşüm fonksiyonları,

$$x = \gamma t^{\beta}, \qquad y = t^{\alpha} u^k(t) \tag{5.3.1}$$

şeklinde olsun. Burada $\beta, k, \gamma \neq 0$ olmak üzere α, β ,k ve γ sabitlerdir. Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının oluşturulması için, (5.2.7) genelleştirilmiş denklem sınıfı kullanılsın. Bu durumda (5.2.7) denklem sınıfının kullanılması için, (5.2.1) ve (5.2.2) gözönüne alındığında φ ve η operatör dönüşüm fonksiyonları,

$$\varphi(t) = \gamma t^{\beta} \text{ ve } \eta[t, u(t)] = t^{\alpha} u^k(t) \tag{5.3.2}$$

şeklinde olur. (5.3.2) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\varphi'(t) = \gamma \beta t^{\beta-1} \tag{5.3.3}$$

$$\varphi''(t) = \gamma \beta (\beta - 1) t^{\beta-2} \tag{5.3.4}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = k t^{\alpha} u^{k-1}(t) \frac{du}{dt} + \alpha t^{\alpha-1} u^k(t) \tag{5.3.5}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = k\,u^{k-1}(t)\,t^{\alpha}\,\frac{d^2u}{dt^2} + 2k\alpha\,t^{\alpha-1}u^{k-1}(t)\,\frac{du}{dt}$$
$$+\,k(k-1)\,t^{\alpha}u^{k-2}(t)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}u^k \qquad (5.3.6)$$

elde edilir. (5.3.2)-(5.3.6) ifadeleri, (5.2.7) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$\frac{\gamma t^{\beta}}{(\gamma\beta t^{\beta-1})^2}\left(k\,u^{k-1}(t)\,t^{\alpha}\,\frac{d^2u}{dt^2} + 2k\alpha\,t^{\alpha-1}u^{k-1}(t)\,\frac{du}{dt} + k(k-1)\,t^{\alpha}u^{k-2}(t)\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}u^k(t)\right)$$
$$+\left[\frac{1-\gamma t^{\beta}}{\gamma\beta t^{\beta-1}} - \frac{\gamma\beta(\beta-1)t^{\beta-2}\,\gamma t^{\beta}}{(\gamma\beta t^{\beta-1})^3}\right]\left[kt^{\alpha}u^{k-1}(t)\,\frac{du}{dt} + \alpha\,t^{\alpha-1}u^k(t)\right] + n\,t^{\alpha}\,u^k(t) = 0$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse,

$$t^2\,u(t)\,\frac{d^2y}{dt^2} + \left[2\alpha + 1 - \beta\gamma t^{\beta}\right]t\,u(t)\,\frac{du}{dt}$$
$$+\,(k-1)\,t^2\left(\frac{du}{dt}\right) + \frac{1}{k}\left[\alpha^2 + (n\beta^2\gamma - \alpha\beta\gamma)t^{\beta}\right]u^2(t) = 0 \qquad (5.3.7)$$

bulunur. Bu denklem (5.3.1) operatör dönüşümü gözönüne alınarak oluşturulan, Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer olmayan bir denklem sınıfıdır. kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminin çözümü,

$$y(x) = L_n(x) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\,\frac{n!}{(n-m)!\,(m!)^2}\,x^m$$

olduğu gözönüne alınırsa [9], (5.3.7) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümü,

$$u_n{}^k(t) = t^{-\alpha}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\,\frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}\left[\gamma t^{\beta}\right]^m$$

şeklindedir. Burada u(t) nin çözümü, k ya bağlıdır. k= 1,2,3,4 olduğunda, tam çözüm kolayca bulunur. k>4 olduğunda veya tamsayı olmadığında yaklaşık yöntemlerle yaklaşık çözüm bulunur.

Özel Hal. (5.3.2) operatör dönüşüm fonksiyonunda k=1 alınırsa, operatör dönüşüm fonksiyonları,

$$\varphi(t) = \gamma t^{\beta} \qquad \eta[t, u(t)] = t^{\alpha} u(t)$$

şeklinde olur. Bu operatör dönüşümler (5.2.7) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$t^2 u(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + [2\alpha + 1 - \beta\gamma t^{\beta}] t\, u(t) \frac{dy}{dt} + [\alpha^2 + (n\beta^2\gamma - \alpha\beta\gamma) t^{\beta}] u^2(t) = 0$$

elde edilir. Bu ifade sadeleştirilirse,

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + [2\alpha + 1 - \beta\gamma t^{\beta}]\, t \frac{dy}{dt} + [\alpha^2 + (n\beta^2\gamma - \alpha\beta\gamma) t^{\beta}] u(t) = 0$$

bulunur.

Sonuç olarak, Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen bir denklem sınıfını oluşturulması için, operatör dönüşüm fonksiyonları, ya kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminde yazılmak üzere düzenlenir yada (5.2.7) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfında yerine yazılmak üzere uygun hale getirilir. Yani iki durumda da aynı denklem sınıfı elde edilir.

BÖLÜM VI

DENKLEM SINIFLARININ ÇÖZÜMLERİ ARASINDA İLİŞKİ YÖNTEMİ

Bu bölümde Chebyshev-Hermite, Bessel ve Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemlerine dönüşen lineer veya lineer olmayan denklem sınıflarının, operatör dönüşümler yardımıyla, bu lineer ve lineer olmayan denklem sınıflarının çözümleri arasındaki ilişki gösterilmiştir.

6.1. Chebyshev-Hermite ve Bessel Denklemlerine Dönüşen Lineer Denklem Sınıflarının Çözümleri Arasındaki İlişki

Bessel denkleminin kanonik şeklindeki yazılımı,

$$x^2\, y''(x) + x\, y'(x) + (x^2 - p^2)\, y(x) = 0 \tag{6.1.1}$$

biçimindedir [9]. Bu denklemin yaklaşık çözümü,

$$y(x) = C_1\, J_P(x) + C_2\, J_{-P}(x) \tag{6.1.2}$$

şeklindedir [9]. Bessel denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = \gamma_1\, t^{\beta_1} \;\text{ ve }\; y = t^{\alpha_1}\, u(t) \tag{6.1.3}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa , (6.1.1) kanonik tipli Bessel denklemi,

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + [2\alpha_1 + 1]\, t \frac{du}{dt} + \left[\alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2\, t^{2\beta_1}\right] u(t) = 0 \tag{6.1.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu (6.1.4) denklem sınıfının çözümü, (6.1.2) kanonik Bessel denkleminin çözümünün yardımıyla,

$$u_P(t) = C_1\, t^{-\alpha_1}\, J_P(\gamma_1\, t^{\beta_1}) + C_2\, t^{-\alpha_1}\, J_{-P}(\gamma_1\, t^{\beta_1}) \tag{6.1.5}$$

şeklindedir. Chebyshev-Hermite denkleminin kanonik şeklindeki yazılımı,

$$y''(x) - 2x\,y'(x) + 2n\,y(x) = 0 \tag{6.1.6}$$

biçimindedir [9]. Bu denklemin çözümü,

$$y(x) = H_n(x) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \frac{n!}{(n-2i)!\,i!} (2x)^{n-2i} \tag{6.1.7}$$

$$N = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, & n \text{ çift iken} \\ \dfrac{n-1}{2}, & n \text{ tek iken} \end{cases}$$

şeklindedir [9]. Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = \gamma_2\, \xi^{\beta_2} \quad \text{ve} \quad y = \xi^{\alpha_2}\, z(\xi) \tag{6.1.8}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa, (6.1.6) kanonik Chebyshev-Hermite denklemi,

$$\begin{aligned} \xi^2 \frac{d^2 z}{d\xi^2} &+ \left[2\alpha_2 + 1 - \beta_2 - 2\beta_2\, \gamma_2^2\, \xi^{2\beta_2}\right]\xi \frac{dz}{d\xi} \\ &+ \left[\alpha_2^2 - \alpha_2\, \beta_2 + (2n\, \beta_2^2\, \gamma_2^2 - 2\alpha_2\, \beta_2\, \gamma_2^2)\, \xi^{2\beta_2}\right] z(\xi) = 0 \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin çözümü, (6.1.7) kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin çözümünün yardımıyla,

$$z_n(\xi) = \xi^{-\alpha_2} \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \frac{n!}{(n-2i)!\,i!} (2\gamma_2\, \xi^{\beta_2})^{n-2i} \tag{6.1.10}$$

elde edilir. (6.1.4) ve (6.1.9) denklem sınıflarının çözümlerinin arasında ilişkinin bulunması için gerekli ve yeterli koşulların bulunması gerekir. Gerekli koşulun bulunması için,

$$t = \gamma_3 \xi \quad \text{ve} \quad u = \xi z(\xi) \tag{6.1.11}$$

özel operatör dönüşümü gözönüne alınsın. İlk olarak (6.1.4) ve (6.1.9) denklem sınıflarının çözümleri arasında ilişkinin, (6.1.11) şeklinde olması için gerekli koşullar bulunacaktır. Bunun için (6.1.11) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\frac{du}{d\xi} = z(\xi) + \xi \frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = 2\frac{dz}{d\xi} + \xi \frac{d^2z}{d\xi^2}$$

$$\frac{dt}{d\xi} = \gamma_3 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2t}{d\xi^2} = 0$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = \left[z(\xi) + \xi \frac{dz}{d\xi} \right] \frac{1}{\gamma_3} \tag{6.1.12}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \left[2\frac{dz}{d\xi} + \xi \frac{d^2z}{d\xi^2} \right] \frac{1}{\gamma_3^2} \tag{6.1.13}$$

bulunur. (6.1.11)-(6.1.13) ifadeleri, (6.1.4) Bessel denklemine dönüşen lineer denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$(\gamma_3 \xi)^2 \left[2\frac{dz}{d\xi} + \xi \frac{d^2z}{d\xi^2} \right] \frac{1}{\gamma_3^2} + [2\alpha_1 + 1]\gamma_3 \xi \left[z(\xi) + \xi \frac{dz}{d\xi} \right] \frac{1}{\gamma_3} + \left[\alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 \xi^{2\beta_1} \right] \xi z(\xi) = 0$$

veya

$$\xi^2 \frac{d^2 z}{d\xi^2} + [2\alpha_1 + 3]\xi \frac{dz}{d\xi} + \left[2\alpha_1 + 1 + \alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 \gamma_3^{2\beta_1} \xi^{2\beta_1}\right] z(\xi) = 0 \qquad (6.1.14)$$

elde edilir. (6.1.14) Besel denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının çözümünün, (6.1.9) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının çözümüne eşit olması için gerekli koşul, bu lineer denklem sınıflarının katsayılarının birbirine eşit olmasıdır. Yani;

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3 = 2\alpha_2 + 1 - \beta_2 - 2\beta_2 \gamma_2^2 \xi^{2\beta_2} \\ 2\alpha_1 + 1 + \alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 \gamma_3^{2\beta_1} \xi^{2\beta_1} = \alpha_2^2 - \alpha_2 \beta_2 + (2n\beta_2^2 \gamma_2^2 - 2\alpha_2 \beta_2 \gamma_2^2)\xi^{2\beta_2} \end{cases} \qquad (6.1.15)$$

şeklinde olur. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ler (6.1.3), (6.1.8) ve (6.1.11) şeklindeki operatör dönüşümlerin sabitleridir. ξ değişkeni, $\xi^* \leq \xi \leq \xi^{**}$ aralığında değişirken (6.1.15) cebirsel sistemi, sabitler arasında olan cebirsel şekilde bir bağıntıdır. (6.1.15) cebirsel sistemi, (6.1.4) ve (6.1.9) lineer denklem sınıflarının çözümleri arasındaki ilişkinin gerekli koşuludur. Bu durumda (6.1.15) cebirsel sistemi gözönüne alınarak, (6.1.14) ve (6.1.9) lineer denklem sınıflarının çözümleri arasında bir bağıntı, (6.1.11) operatör dönüşümlerinin (6.1.5) de yerlerine yazılmasıyla,

$$\xi z_n(\xi) = C_1 (\gamma_3 \xi)^{-\alpha_1} J_P\left[\gamma_1 (\gamma_3 \xi)^{\beta_1}\right] + C_2 (\gamma_3 \xi)^{-\alpha_1} J_{-P}\left[\gamma_1 (\gamma_3 \xi)^{\beta_1}\right]$$

veya

$$z_n(\xi) = \frac{1}{\xi}\left[C_1 (\gamma_3 \xi)^{-\alpha_1} J_P\left[\gamma_1 \gamma_3^{\beta_1} \xi^{\beta_1}\right] + C_2 (\gamma_3 \xi)^{-\alpha_1} J_{-P}\left[\gamma_1 \gamma_3^{\beta_1} \xi^{\beta_1}\right]\right] \qquad (6.1.16)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, (6.1.9) Chebyshev- Hermite denklemine dönüşen bir denklem sınıfının çözümü, (6.1.14) Bessel denklemine dönüşen bir denklem sınıfının çözümünün yardımıyla yapılmaktadır.

6.2. Chebyshev-Hermite ve Bessel Denklemine Dönüşen Genelleştirilmiş Denklem Sınıflarının Çözümleri Arasındaki İlişki

Bessel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x=\varphi(t) \text{ ve } y=\eta\left[t,u(t)\right] \tag{6.2.1}$$

operatör dönüşümler gözönüne alınır ve (6.1.1) Bessel denklemine uygulanırsa genelleştirilmiş denklem sınıfı,

$$\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}\right]^2\frac{d^2\eta}{dt^2}+\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}-\frac{\varphi''(t)\varphi^2(t)}{\left[\varphi'(t)\right]^3}\right]\frac{d\eta}{dt}+\left[\varphi^2(t)-p^2\right]\eta=0 \tag{6.2.2}$$

şeklinde bulunur. Bu (6.2.2) genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümü, (6.1.2) kanonik Bessel denkleminin çözümünün yardımıyla ve (6.2.1) operatör dönüşümünden u(t) nin çekilmesi ile,

$$u_p(t)=\phi\left\{t;\ C_1\,J_P\left[\varphi(t)\right]+C_2\,J_{-P}\left[\varphi(t)\right]\right\} \tag{6.2.3}$$

biçimindedir. Şimdi Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x=A(\xi) \text{ ve } y=B\left[\xi,z(\xi)\right] \tag{6.2.4}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa bu durumda , (6.1.6) kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin,

$$\frac{1}{(A')^2}\frac{d^2B}{d\xi^2}-\left[\frac{A''}{(A')^3}-2\frac{A}{A'}\right]\frac{dB}{d\xi}+2n\,B=0 \tag{6.2.5}$$

şeklinde genelleştirilmiş denklem sınıfı oluşturulur. Bu genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümü, (6.1.7) kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin çözümünün ve (6.2.4) operatör dönüşümünden $z(\xi)$ nin çekilmesi ile (4.1.21) in yardımıyla,

$$z_n(\xi) = \left\{\xi;\ \sum_{i=0}^{N}(-1)^i \frac{n!}{(n-2i)!i!}[2A(\xi)]^{n-2i}\right\} \tag{6.2.6}$$

biçiminde elde edilir. (6.2.2) ve (6.2.5) genelleştirilmiş denklem sınıflarının çözümleri arasında ilişkinin olması için gerekli ve yeterli koşulların bulunması gerekir. Gerekli koşulun bulunması için,

$$t = \psi(\xi) \text{ ve } u = \chi[\xi, z(\xi)] \tag{6.2.7}$$

yeni operatör dönüşüm gözönüne alınsın. Böylece (6.2.2) ve (6.2.5) denklem sınıflarının çözümleri arasında ilişkinin, (6.2.7) şeklinde olması için gerekli koşullar bulunacaktır. Bunun için (6.2.7) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = \frac{\dfrac{d\eta}{d\xi}}{\dfrac{dt}{d\xi}} \tag{6.2.8}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{d}{d\xi}\left[\frac{d\eta}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}\right]\frac{d\xi}{dt} = \frac{\dfrac{d^2\eta}{d\xi^2}\dfrac{dt}{d\xi} - \dfrac{d\eta}{d\xi}\dfrac{d^2t}{d\xi^2}}{\left(\dfrac{dt}{d\xi}\right)^3}$$

yani

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{1}{\left[\dfrac{dt}{d\xi}\right]^2}\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - \frac{\dfrac{d^2t}{d\xi^2}}{\left[\dfrac{dt}{d\xi}\right]^3}\frac{d\eta}{d\xi} \tag{6.2.9}$$

$$\varphi = \varphi[\psi(\xi)] \tag{6.2.10}$$

$$\varphi'(t)=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\dfrac{d\varphi}{d\xi}}{\dfrac{dt}{d\xi}}=\frac{\varphi'_\xi}{t'_\xi} \tag{6.2.11}$$

$$\varphi''(t)=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d}{d\xi}\left[\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}\right]\frac{d\xi}{dt}$$

elde edilir. Buradan,

$$\varphi''(t)=\frac{\dfrac{d^2\varphi}{d\xi^2}}{\left[\dfrac{dt}{d\xi}\right]^2}-\frac{\dfrac{d\varphi}{d\xi}\dfrac{d^2t}{d\xi^2}}{\left[\dfrac{dt}{d\xi}\right]^3}=\frac{\varphi''_\xi}{[t'_\xi]^2}-\frac{\varphi'_\xi\,\varphi''_\xi}{[t'_\xi]^3} \tag{6.2.12}$$

elde edilir. (6.2.7)-(6.2.12) ifadeleri, (6.2.2) Bessel diferansiyel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$\left[\frac{\varphi}{\dfrac{\varphi'_\xi}{t'_\xi}}\right]^2\left[\frac{1}{[t'_\xi]^2}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}-\frac{\dfrac{d^2t}{d\xi^2}}{[t'_\xi]^3}\frac{d\eta}{d\xi}\right]+\left[\frac{\varphi}{\dfrac{\varphi'_\xi}{t'_\xi}}-\left[\frac{\varphi}{\dfrac{\varphi'_\xi}{t'_\xi}}\right]^2\frac{1}{\dfrac{\varphi'_\xi}{t'_\xi}}\left(\frac{\varphi''_\xi}{[t'_\xi]^2}-\frac{\varphi'_\xi\,t''_\xi}{[t'_\xi]^3}\right)\right]\frac{\dfrac{d\eta}{d\xi}}{t'}+\left[\varphi^2-p^2\right]\eta=0$$

veya

$$\left[\frac{\varphi}{\varphi'_\xi}\right]^2\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\left[\frac{\varphi}{\varphi'_\xi}-\left[\frac{\varphi}{\varphi'_\xi}\right]^2\frac{\varphi''_\xi}{\varphi'_\xi}\right]\frac{d\eta}{d\xi}+\left[\varphi^2-p^2\right]\eta=0 \tag{6.2.13}$$

bulunur. (6.2.13) Bessel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümünün, (6.2.5) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümüne eşit olması için gerekli koşul, (6.2.13) ve (6.2.5) genelleştirilmiş denklem sınıflarının katsayılarının birbirine eşit olmasıdır. Bu durumda (6.2.7) operatör dönüşümleri, (6.2.3) da yerlerine yazılırsa,

$$\chi[\xi, z(\xi)] = \phi\{t;\ C_1 J_P[\varphi(t)] + C_2 J_{-P}[\varphi(t)]\}$$

$$= \phi_1\{\psi(\xi);\ C_1 J_P[\varphi(\psi(\xi))] + C_2 J_{-P}[\varphi(\psi(\xi))]\} \qquad (6.2.14)$$

elde edilir.

Sonuç olarak (6.2.5) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümü, Bessel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümünün yardımıyla yapılır.

6.3. Chebyshev-Hermite ve Bessel Denklemlerine Dönüşen Lineer Olmayan Denklem Sınıflarının Çözümleri Arasındaki İlişki

Bessel denklemine dönüşen lineer olmayan bir denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = \gamma_1 t^{\beta_1} \text{ ve } y = t^{\alpha_1} u^{k_1}(t) \qquad (6.3.1)$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa ve bu operatör dönüşümler (6.1.1) kanonik Bessel denklemine uygulanırsa,

$$t^2 u(t)\frac{d^2u}{dt^2} + [2\alpha_1 + 1]\, t\, u(t)\frac{du}{dt} + (k_1 - 1)t^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{1}{k_1}\left[\alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 t^{2\beta_1}\right]u^2(t) = 0 \qquad (6.3.2)$$

şeklinde Bessel denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfı oluşturulur ve bu denklemin çözümü, (6.1.2) kanonik Bessel denkleminin çözümünün yardımıyla,

$$u_p^{k_1}(t) = C_1 t^{-\alpha_1} J_P(\gamma_1 t^{\beta_1}) + C_2 t^{-\alpha_1} J_{-P}(\gamma_1 t^{\beta_1}) \qquad (6.3.3)$$

şeklinde olacaktır. Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = \gamma_2 \xi^{\beta_2} \text{ ve } y = \xi^{\alpha_2} u^{k_2}(\xi) \qquad (6.3.4)$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa ve bu operatör dönüşümler (6.1.6) kanonik Chebyshev-Hermite denklemine uygulanırsa,

$$\xi^2 z(\xi)\frac{d^2z}{d\xi^2}+\left[2\alpha_2-(\beta_2-1)-2\beta_2\gamma_2^2\xi^{2\beta_2}\right]\xi z(\xi)\frac{dz}{d\xi}+(k_2-1)\xi^2\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2$$

$$+\frac{1}{k_2}\left[\alpha_2^2-\alpha_2\beta_2+(2n\beta_2^2\gamma_2^2-2\alpha_2\beta_2\gamma_2^2)\xi^{2\beta_2}\right]z^2(\xi)=0 \qquad (6.3.5)$$

şeklinde Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfı oluşturulur ve bu denklemin çözümü, (6.1.7) kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin çözümünün yardımıyla,

$$z_n^{k_2}(\xi)=\xi^{-\alpha_2}\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\frac{n!}{(n-2i)!i!}(2\gamma_2\xi^{\beta_2})^{n-2i} \qquad (6.3.6)$$

biçiminde olacaktır. (6.3.2) ve (6.3.5) lineer olmayan denklem sınıflarının çözümlerinin arasında ilişkinin bulunması için, gerekli ve yeterli koşulların bulunması gerekir. Gerekli koşulun bulunması için,

$$= \gamma_3\xi \qquad u = \xi z(\xi) \qquad (6.3.7)$$

özel operatör dönüşüm gözönüne alınsın. İlk olarak (6.3.2) ve (6.3.5) denklem sınıflarının çözümleri arasında ilişkinin, (6.3.7) şeklinde olması için gerekli koşullar bulunacaktır. Buna göre (6.2.13) Bessel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının kullanabilmesi için, (6.3.7) operatör dönüşümlerinin (6.3.1) de yazılmasıyla φ ve η operatör dönüşüm fonksiyonları,

$$\eta(\xi,z(\xi))=\gamma_3^{\alpha_1}\xi^{\alpha_1+k_1}z^{k_1}(\xi) \qquad \varphi=\gamma_1\gamma_3^{\beta_1}\xi^{\beta_1} \qquad (6.3.8)$$

şeklinde olur. (6.3.8) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \gamma_1 \gamma_3^{\beta_1} \beta_1 \xi^{\beta_1 - 1} \tag{6.3.9}$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \gamma_1 \gamma_3^{\beta_1} \beta_1 (\beta_1 - 1) \xi^{\beta_1 - 2} \tag{6.3.10}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \gamma_3^{\alpha_1} (\alpha_1 + k_1) \xi^{\alpha_1 + k_1 - 1} z^{k_1}(\xi) + k_1 \gamma_3^{\alpha_1} \xi^{\alpha_1 + k_1} z^{k_1 - 1}(\xi) \frac{dz}{d\xi} \tag{6.3.11}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = k_1 \gamma_3^{\alpha_1} \xi^{\alpha_1 + k_1} z^{k_1 - 1}(\xi) \frac{d^2 z}{d\xi^2} + 2k_1 \gamma_3^{\alpha_1} (\alpha_1 + k_1) \xi^{\alpha_1 + k_1 - 1} z^{k_1 - 1}(\xi) \frac{dz}{d\xi}$$

$$+ \gamma_3^{\alpha_1} (\alpha_1 + k_1)(\alpha_1 + k_1 - 1) \xi^{\alpha_1 + k_1 - 2} z^{k_1}(\xi) + k_1 (k_1 - 1) \gamma_3^{\alpha_1} \xi^{\alpha_1 + k_1} z^{k_1 - 2}(\xi) \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 \tag{6.3.12}$$

bulunur. (6.3.8)-(6.3.12) ifadeleri, (6.2.13) Bessel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$\xi^2 z(\xi) \frac{d^2 z}{d\xi^2} + [2(\alpha_1 + k_1) + 1] \xi z(\xi) \frac{dz}{d\xi} + (k_1 - 1) \xi^2 \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{k_1} \left[\alpha_1^2 + 2\alpha_1 k_1 + k_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 \gamma_3^{2\beta_1} \xi^{2\beta_1}\right] z^2(\xi) = 0 \tag{6.3.13}$$

şeklinde elde edilir. (6.3.13) Bessel denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümünün, (6.3.5) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümüne eşit olması için gerekli koşul, bu lineer olmayan denklem sınıflarının katsayılarının birbirine eşit olmasıdır. Yani;

$$\begin{cases} 2(\alpha_1+k_1)+1=2\alpha_2+1-\beta_2-2\beta_2\gamma_2^2\,\xi^{2\beta_2} \\ k_1-1=k_2-1 \quad \text{veya} \quad k_1=k_2 \\ (2\alpha_1+1+\alpha_1^2-\beta_1^2p^2+\beta_1^2\gamma_1^2\gamma_3^{2\beta_1}\xi^{2\beta_1})\dfrac{1}{k_1}=\dfrac{1}{k_2}\left[\alpha_2^2-\alpha_2\beta_2+(2n\beta_2^2\gamma_2^2-2\alpha_2\beta_2\gamma_2^2)\xi^{2\beta_2}\right] \end{cases} \tag{6.3.14}$$

şeklinde olmasıdır. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ler (6.3.1), (6.3.4) ve (6.3.7) şeklindeki operatör dönüşümlerin sabitleridir. ξ değişkeni, $\xi^* \le \xi \le \xi^{**}$ aralığında değişirken (6.3.14) cebirsel sistemi, sabitlerin arasında olan cebirsel şekildeki bağıntıdır. (6.3.14) cebirsel sistemi (6.3.5) ve (6.3.13) lineer olmayan denklem sınıflarının çözümleri arasındaki ilişkinin gerekli koş m(. u durumda (6.3.5) ve (6.3.13) lineer olmayan denklem sınıflarının çözümleri arasındaki bağıntı, (6.3.7) operatör dönüşümlerinin (6.3.3) de yerlerine yazılmasıyla,

$$u_p^{k_1}(t)=[\xi z_n(\xi)]^{k_1}=C_1(\gamma_3\xi)^{-\alpha_1}J_P\left[\gamma_1(\gamma_3\xi)^{\beta_1}\right]+C_2(\gamma_3\xi)^{-\alpha_1}J_{-P}\left[\gamma_1(\gamma_3\xi)^{\beta_1}\right] \tag{6.3.15}$$

bulunur. Bu tipli çözümde $z(\xi)$ nin çözümü k_1 e bağlıdır. $k_1 = 1,2,3,4$ olduğunda, tam çözüm kolayca bulunur. $k_1>4$ olduğunda veya tamsayı olmadığında, yaklaşık yöntemlerle yaklaşık çözüm bulunabilir.

Sonuç olarak, (6.3.5) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümü, (6.3.13) Bessel denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümünün yardımıyla yapılır.

Özel Hal. (6.3.1) ve (6.3.4) operatör dönüşümlerinde $k_1 = 1$ ve $k_2 = 1$ alınarak ve özel operatör dönüşüm olarak (6.3.7) operatör dönüşümü gözönüne alınırsa, bu durumda (6.3.13) denklemi,

$$\xi^2\frac{d^2z}{d\xi^2}+[2\alpha_1+3]\xi\frac{dz}{d\xi}+\left[2\alpha_1+1+\alpha_1^2-\beta_1^2p^2+\beta_1^2\gamma_1^2\gamma_3^{2\beta_1}\xi^{2\beta_1}\right]z(\xi)=0$$

şeklinde bulunur. Ayrıca gerek koşul için (6.3.14) ifadesinde, $k_1 = 1$ ve $k_2 = 1$ alınarak,

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3 = 2\alpha_2 + 1 - \beta_2 - 2\beta_2 \gamma_2^2 \xi^{2\beta_2} \\ 2\alpha_1 + 1 + \alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 \gamma_3^{2\beta_1} \xi^{2\beta_1} = \alpha_2^2 - \alpha_2 \beta_2 + (2n\beta_2^2 \gamma_2^2 - 2\alpha_2 \beta_2 \gamma_2^2)\xi^{2\beta_2} \end{cases} \tag{6.3.16}$$

elde edilir. Bu ise (6.3.7) özel operatör dönüşümün alınması ve bu operatör dönüşümlerin (6.1.4) Bessel denklemine dönüşen lineer denklem sınıfında yerine yazılmasıyla oluşturulan denklem sınıfı ile bu özel operatör dönüşümü (6.2.1) operatör dönüşümünde yerine yazılmasıyla φ ve η operatör dönüşüm fonksiyonları bulunarak (6.2.13) genelleştirilmiş denklem sınıfında yerine yazılmasıyla oluşturulan denklem sınıfı aynıdır.

6.4. Chebyshev-Laguerre ve Bessel Denklemlerine Dönüşen Lineer Denklem Sınıflarının Çözümleri Arasındaki İlişki

Bessel denkleminin kanonik şeklindeki yazılımı,

$$x^2 y''(x) + x y'(x) + (x^2 - p^2) y(x) = 0$$

biçimindedir [9]. Bu denklemin yaklaşık çözümü,

$$y(x) = C_1 J_P(x) + C_2 J_{-P}(x) \tag{6.4.1}$$

şeklindedir [9]. Bessel denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = \gamma_1 t^{\beta_1} \text{ ve } y = t^{\alpha_1} u(t) \tag{6.4.2}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa , (6.1.1) kanonik tipli Bessel denklemi,

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + [2\alpha_1 + 1] t \frac{du}{dt} + [\alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 t^{2\beta_1}] u(t) = 0 \tag{6.4.3}$$

şeklinde yazılabilir. (6.4.3) denklem sınıfının çözümü, (6.4.1) kanonik tipli Bessel denkleminin çözümünün yardımıyla,

$$u_P(t) = C_1\, t^{-\alpha_1}\, J_P(\gamma_1\, t^{\beta_1}) + C_2\, t^{-\alpha_1}\, J_{-P}(\gamma_1\, t^{\beta_1}) \tag{6.4.4}$$

şeklindedir. Chebyshev-Laguerre denkleminin kanonik şeklindeki yazılımı,

$$y''(x) + (1-x)\,y'(x) + n\,y(x) = 0 \tag{6.4.5}$$

biçimindedir [9]. Bu denklemin özel polinomlarla çözümü,

$$y(x) = L_n(x) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}\, x^m \tag{6.4.6}$$

şeklindedir [9]. Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = \gamma_2\, \xi^{\beta_2} \quad \text{ve} \quad y = \xi^{\alpha_2}\, z(\xi) \tag{6.4.7}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa denklem sınıfı,

$$\xi^2 \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \left[2\alpha_2 + 1 - \beta_2\gamma_2\,\xi^{\beta_2}\right]\xi\frac{dz}{d\xi} + \left[\alpha_2^2 + (n\,\beta_2^2\gamma_2 - \alpha_2\,\beta_2\,\gamma_2)\xi^{\beta_2}\right]z(\xi) = 0 \tag{6.4.8}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemin çözümü, (6.4.6) kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminin çözümünün yardımıyla,

$$z_n(\xi) = \xi^{-\alpha_2} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!(m!)^2} (\gamma_2\, \xi^{\beta_2})^m \tag{6.4.9}$$

elde edilir. (6.4.3) ve (6.4.8) lineer denklem sınıflarının çözümlerinin arasında ilişkinin bulunması için gerekli ve yeterli koşulların bulunması gerekir. Gerekli koşulun bulunması için,

$$t = \gamma_3 \xi \ \text{ ve } \ u = \xi z(\xi) \tag{6.4.10}$$

özel operatör dönüşümü gözönüne alınsın. İlk olarak (6.4.3) ve (6.4.8) lineer denklem sınıflarının çözümleri arasında ilişkinin, (6.4.10) şeklinde olması için gerekli koşullar bulunacaktır. Bunun için (6.4.10) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\frac{du}{d\xi} = z(\xi) + \xi \frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2} = 2\frac{dz}{d\xi} + \xi \frac{d^2z}{d\xi^2}$$

$$\frac{dt}{d\xi} = \gamma_3 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2t}{d\xi^2} = 0$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = \left[z(\xi) + \xi\frac{dz}{d\xi}\right]\frac{1}{\gamma_3} \tag{6.4.11}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \left[2\frac{dz}{d\xi} + \xi\frac{d^2z}{d\xi^2}\right]\frac{1}{\gamma_3^2} \tag{6.4.12}$$

bulunur. (6.4.10)-(6.4.12) ifadeleri, (6.4.3) Bessel denklemine dönüşen lineer denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$\xi^2 \frac{d^2z}{d\xi^2} + [2\alpha_1 + 3]\xi\frac{dz}{d\xi} + \left[2\alpha_1 + 1 + \alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 \gamma_3^{2\beta_1} \xi^{2\beta_1}\right] z(\xi) = 0 \tag{6.4.13}$$

elde edilir. (6.4.13) Bessel denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının çözümünün, (6.4.8) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının çözümüne eşit olması için gerekli koşul, bu lineer denklem sınıflarının katsayılarının birbirine eşit olmasıdır. Yani;

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3 = 2\alpha_2 + 1 - \beta_2 \gamma_2 \xi^{\beta_2} \\ 2\alpha_1 + 1 + \alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 \gamma_3^{2\beta_1} \xi^{2\beta_1} = \alpha_2^2 + (n\beta_2^2 \gamma_2 - \alpha_2 \beta_2 \gamma_2)\xi^{\beta_2} \end{cases} \tag{6.4.14}$$

şeklinde olur. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ler (6.4.2), (6.4.7) ve (6.4.10) şeklindeki operatör dönüşümlerin sabitleridir. ξ değişkeni, $\xi^* \le \xi \le \xi^{**}$ aralığında istenilen şekilde değişirken (6.4.14) cebirsel sistemi, sabitlerin arasında olan cebirsel şekildeki bağıntıdır. (6.4.14) cebirsel sistemi, (6.4.8) ve (6.4.13) lineer denklem sınıflarının çözümleri arasındaki ilişkinin gerekli koşuludur. Bu durumda (6.4.14) cebirsel sistemi gözönüne alınarak, (6.4.13) ve (6.4.8) lineer denklem sınıflarının çözümleri arasında bağıntı, (6.4.10) operatör dönüşümlerinin (6.4.4) de yerlerine yazılmasıyla,

$$u_p = \xi z_n(\xi) = C_1 (\gamma_3 \xi)^{-\alpha_1} J_P\left[\gamma_1 (\gamma_3 \xi)^{\beta_1}\right] + C_2 (\gamma_3 \xi)^{-\alpha_1} J_{-P}\left[\gamma_1 (\gamma_3 \xi)^{\beta_1}\right]$$

veya

$$z_n(\xi) = \frac{1}{\xi}\left[C_1 (\gamma_3 \xi)^{-\alpha_1} J_P\left[\gamma_1 \gamma_3^{\beta_1} \xi^{\beta_1}\right] + C_2 (\gamma_3 \xi)^{-\alpha_1} J_{-P}\left[\gamma_1 \gamma_3^{\beta_1} \xi^{\beta_1}\right]\right] \tag{6.4.15}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, (6.4.8) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının çözümü, (6.4.13) Bessel denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının çözümünün yardımıyla yapılır.

6.5. Chebyshev-Laguerre ve Bessel Denklemine Dönüşen Genelleştirilmiş Denklem Sınıflarının Çözümleri Arasındaki İlişki

Bessel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = \varphi(t) \text{ ve } y = \eta[t, u(t)] \tag{6.5.1}$$

operatör dönüşümler gözönüne alınır ve (6.1.1) Bessel denklemine uygulanırsa genelleştirilmiş denklem sınıfı,

$$\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}\right]^2 \frac{d^2\eta}{dt^2}+\left[\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)}-\frac{\varphi''(t)\varphi^2(t)}{[\varphi'(t)]^3}\right]\frac{d\eta}{dt}+\left[\varphi^2(t)-p^2\right]\eta=0 \tag{6.5.2}$$

şeklindedir. Bu (6.5.2) genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümü, (6.4.1) kanonik Bessel denkleminin çözümünün yardımıyla ve (6.5.1) operatör dönüşümünden u(t) nin çekilmesi ile,

$$u_p(t)=\phi\{t;\ C_1 J_P[\varphi(t)]+C_2 J_{-P}[\varphi(t)]\} \tag{6.5.3}$$

biçimindedir. Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x=A(\xi) \text{ ve } y=B(\xi,z(\xi)) \tag{6.5.4}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa bu durumda (6.4.5) kanonik Chebyshev-Laguerre denklemi,

$$\frac{A}{[A']^2}\frac{d^2B}{d\xi^2}+\left[\frac{1-A}{A'}-\frac{A''A}{[A']^3}\right]\frac{dB}{d\xi}+nB=0 \tag{6.5.5}$$

şeklinde genelleştirilmiş denklem sınıfı oluşturulur. Bu genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümü, (6.4.6) kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminin çözümünün ve (6.5.4) operatör dönüşümünden $z(\xi)$ nin çekilmesi ile (5.1.21) in yardımıyla,

$$z_n(\xi)=I\left\{\xi;\ \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}[A(\xi)]^m\right\} \tag{6.5.6}$$

biçiminde elde edilir. (6.5.2) ve (6.5.5) genelleştirilmiş denklem sınıflarının çözümleri arasında ilişkinin olması için gerekli ve yeterli koşulların bulunması gerekir. Gerekli koşulun bulunması için,

$$t=\psi(\xi) \text{ ve } u=\chi[\xi,z(\xi)] \tag{6.5.7}$$

yeni operatör dönüşüm gözönüne alınsın. Böylece (6.5.2) ve (6.5.5) genelleştirilmiş denklem sınıflarının çözümleri arasında ilişkinin (6.5.7) şeklinde olması için gerekli koşullar bulunacaktır. Bunun için (6.5.7) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\frac{d\eta}{dt}=\frac{d\eta}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}=\frac{\frac{d\eta}{d\xi}}{\frac{dt}{d\xi}} \tag{6.5.8}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{d}{d\xi}\left[\frac{d\eta}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}\right]\frac{d\xi}{dt}=\frac{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\frac{dt}{d\xi}-\frac{d\eta}{d\xi}\frac{d^2t}{d\xi^2}}{(\frac{dt}{d\xi})^3}$$

yani

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{1}{\left[\frac{dt}{d\xi}\right]^2}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}-\frac{\frac{d^2t}{d\xi^2}}{\left[\frac{dt}{d\xi}\right]^3}\frac{d\eta}{d\xi} \tag{6.5.9}$$

$$\varphi=\varphi[\psi(\xi)] \tag{6.5.10}$$

$$\varphi'(t)=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\frac{d\varphi}{d\xi}}{\frac{dt}{d\xi}}=\frac{\varphi'_\xi}{t'_\xi} \tag{6.5.11}$$

$$\varphi''(t)=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d}{d\xi}\left[\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}\right]\frac{d\xi}{dt}$$

elde edilir. Buradan,

$$\varphi''(t)=\frac{\dfrac{d^2\varphi}{d\xi^2}}{\left[\dfrac{dt}{d\xi}\right]^2}-\frac{\dfrac{d\varphi}{d\xi}\dfrac{d^2t}{d\xi^2}}{\left[\dfrac{dt}{d\xi}\right]^3}=\frac{\varphi''_\xi}{[t'_\xi]^2}-\frac{\varphi'_\xi\,\varphi''_\xi}{[t'_\xi]^3} \tag{6.5.12}$$

elde edilir. (6.5.7)-(6.5.12) ifadeleri, (6.5.2) Bessel diferansiyel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$\left[\frac{\varphi}{\dfrac{\varphi'_\xi}{t'_\xi}}\right]^2\left[\frac{1}{[t'_\xi]^2}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}-\frac{\dfrac{d^2t}{d\xi^2}}{[t'_\xi]^3}\frac{d\eta}{d\xi}\right]+\left[\frac{\varphi}{\dfrac{\varphi'_\xi}{t'_\xi}}-\left[\frac{\varphi}{\dfrac{\varphi'_\xi}{t'_\xi}}\right]^2\frac{1}{\dfrac{\varphi'_\xi}{t'_\xi}}\left(\frac{\varphi''_\xi}{[t'_\xi]^2}-\frac{\varphi'_\xi\,t''_\xi}{[t'_\xi]^3}\right)\right]\frac{\dfrac{d\eta}{d\xi}}{t'}+\left[\varphi^2-p^2\right]\eta=0$$

veya

$$\left[\frac{\varphi}{\varphi'_\xi}\right]^2\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\left[\frac{\varphi}{\varphi'_\xi}-\left[\frac{\varphi}{\varphi'_\xi}\right]^2\frac{\varphi''_\xi}{\varphi'_\xi}\right]\frac{d\eta}{d\xi}+\left[\varphi^2-p^2\right]\eta=0 \tag{6.5.13}$$

bulunur. (6.5.13) Bessel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümünün, (6.5.5) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümüne eşit olması için gerekli koşul, (6.5.13) ve (6.5.5) genelleştirilmiş denklem sınıflarının katsayılarının birbirine eşit olmasıdır. Bu durumda (6.5.7) operatör dönüşümleri, (6.5.3) de yerlerine yazılırsa,

$$\chi[\xi,z(\xi)]=\phi\{t;\ C_1\,J_P[\varphi(t)]+C_2\,J_{-P}[\varphi(t)]\}$$

$$=\phi_1\{\psi(\xi);\ C_1\,J_P[\varphi(\psi(\xi))]+C_2\,J_{-P}[\varphi(\psi(\xi))]\ ] \tag{6.5.14}$$

elde edilir.

Sonuç olarak (6.5.5) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümü, (6.5.13) Bessel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümünün yardımıyla yapılır.

6.6. Chebyshev- Laguerre ve Bessel Denklemine Dönüşen Lineer Olmayan Denklem Sınıflarının Çözümleri Arasındaki İlişki

Bessel denklemine dönüşen lineer olmayan bir denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = \gamma_1 t^{\beta_1} \text{ ve } y = t^{\alpha_1} u^{k_1}(t) \tag{6.6.1}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa ve bu operatör dönüşümler (6.1.1) kanonik Bessel denklemine uygulanırsa,

$$\begin{aligned} t^2 u(t)\frac{d^2u}{dt^2} + [2\alpha_1 + 1] t\, u(t)\frac{du}{dt} + (k_1 - 1)t^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \\ + \frac{1}{k_1}\left[\alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 t^{2\beta_1}\right] u^2(t) = 0 \end{aligned} \tag{6.6.2}$$

şeklinde Bessel denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfı oluşturulur. Bu denklemin çözümü, (6.4.1) kanonik Bessel denkleminin çözümünün yardımıyla,

$$u_p^{k_1}(t) = C_1 t^{-\alpha_1} J_P(\gamma_1 t^{\beta_1}) + C_2 t^{-\alpha_1} J_{-P}(\gamma_1 t^{\beta_1}) \tag{6.6.3}$$

şeklindedir. Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = \gamma_2 \xi^{\beta_2} \text{ ve } y = \xi^{\alpha_2} z^{k_2}(\xi) \tag{6.6.4}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa ve bu operatör dönüşümler (6.4.5) kanonik Chebyshev-Laguerre denklemine uygulanırsa,

$$\xi^2 z(\xi)\frac{d^2 z}{d\xi^2}+\left[2\alpha_2+1-\beta_2\gamma_2 t^{\beta_2}\right]\xi z(\xi)\frac{dz}{d\xi}+(k_2-1)\xi^2\left[\frac{dz}{d\xi}\right]^2$$

$$+\frac{1}{k_2}\left[\alpha_2^2+(n\beta_2^2\gamma_2-\alpha_2\beta_2\gamma_2)\xi^{\beta_2}\right]z^2(\xi)=0 \qquad (6.6.5)$$

şeklinde Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfı oluşturulur ve bu denklemin çözümü, (6.4.6) kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminin çözümünün yardımıyla,

$$z_n^{k_2}(\xi)=\xi^{-\alpha_2}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}(\gamma_2\xi^{\beta_2})^m \qquad (6.6.6)$$

biçiminde olacaktır. (6.6.2) ve (6.6.5) lineer olmayan denklem sınıflarının çözümlerinin arasında ilişkinin bulunması için, gerekli ve yeterli koşulların bulunması gerekir. Gerekli koşulun bulunması için,

$$t=\gamma_3\xi \text{ ve } u=\xi z(\xi) \qquad (6.6.7)$$

özel operatör dönüşüm gözönüne alınsın. İlk olarak (6.6.2) ve (6.6.5) denklem denklem sı çözümleri arasında ilişkinin, (6.6.7) şeklinde olması için gerekli koşullar bulunacaktır. Buna göre (6.5.13) Bessel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının kullanabilmesi için, (6.6.7) operatör dönüşümlerinin (6.6.1) de yazılmasıyla φ ve η operatör dönüşüm fonksiyonları,

$$\eta(\xi,z(\xi))=\gamma_3^{\alpha_1}\xi^{\alpha_1+k_1}z^{k_1}(\xi) \qquad \varphi=\gamma_1\gamma_3^{\beta_1}\xi^{\beta_1} \qquad (6.6.8)$$

şeklinde olur. (6.6.8) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\frac{d\varphi}{d\xi}=\gamma_1\gamma_3^{\beta_1}\beta_1\xi^{\beta_1-1} \qquad (6.6.9)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \gamma_1 \gamma_3^{\beta_1} \beta_1 (\beta_1 - 1)\xi^{\beta_1 - 2} \tag{6.6.10}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \gamma_3^{\alpha_1} (\alpha_1 + k_1)\xi^{\alpha_1 + k_1 - 1} z^{k_1}(\xi) + k_1 \gamma_3^{\alpha_1} \xi^{\alpha_1 + k_1} z^{k_1 - 1}(\xi)\frac{dz}{d\xi} \tag{6.6.11}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = k_1\gamma_3^{\alpha_1} \xi^{\alpha_1 + k_1} z^{k_1 - 1}(\xi)\frac{d^2z}{d\xi^2} + 2k_1\gamma_3^{\alpha_1}(\alpha_1 + k_1)\, \xi^{\alpha_1 + k_1 - 1} z^{k_1 - 1}(\xi)\frac{dz}{d\xi}$$

$$+ \gamma_3^{\alpha_1} (\alpha_1 + k_1)(\alpha_1 + k_1 - 1)\xi^{\alpha_1 + k_1 - 2} z^{k_1}(\xi) + k_1(k_1 - 1)\gamma_3^{\alpha_1}\xi^{\alpha_1 + k_1} z^{k_1 - 2}(\xi)\left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 \tag{6.6.12}$$

bulunur. (6.6.7)-(6.6.12) ifadeleri, (6.5.13) Bessel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$\xi^2 z(\xi)\frac{{}^{2}}{d\xi^2} + [2(\alpha_1 + k_1) + 1]\xi z(\xi)\frac{dz}{d\xi} + (k_1 - 1)\xi^2 \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{k_1}\left[\alpha_1^2 + 2\alpha_1 k_1 + k_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2\gamma_1^2 \gamma_3^{2\beta_1} \xi^{2\beta_1}\right] z^2(\xi) = 0 \tag{6.6.13}$$

şeklinde elde edilir. (6.6.13) Bessel denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümünün, (6.6.5) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümüne eşit olması için gerekli koşul, bu lineer olmayan denklem sınıflarının katsayılarının birbirine eşit olmasıdır. Yani;

$$\begin{cases} 2(\alpha_1 + k_1) + 1 = 2\alpha_2 + 1 - \beta_2 \gamma_2 t^{\beta_2} \\ k_1 - 1 = k_2 - 1 \quad \text{veya} \quad k_1 = k_2 \\ \left[2\alpha_1 + 1 + \alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 \gamma_3^{2\beta_1} \xi^{2\beta_1}\right]\frac{1}{k_1} = \frac{1}{k_1}\left[\alpha_2^2 + (n\beta_2^2\gamma_2 - \alpha_2\beta_2\gamma_2)\xi^{\beta_2}\right] \end{cases} \tag{6.6.14}$$

şeklinde olmasıdır. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ler (6.6.1), (6.6.4) ve (6.6.7) şeklindeki operatör dönüşümlerin sabitleridir. ξ değişkeni, $\xi^* \le \xi \le \xi^{**}$ aralığında istenilen şekilde değişirken (6.6.14) cebirsel sistemi, sabitlerin arasında olan cebirsel şekildeki bağıntıdır. (6.6.14) cebirsel sistemi, (6.6.5) ve (6.6.13) lineer olmayan denklem sınıflarının çözümleri arasındaki ilişkinin gerekli koşuludur. Bu durumda (6.6.5) ve (6.6.13) lineer olmayan denklem sınıflarının çözümleri arasındaki bağıntı, (6.6.7) operatör dönüşümlerinin (6.6.3) de yerlerine yazılmasıyla,

$$u_p^{k_1}(t) = [\xi z(\xi)]^{k_1} = C_1 (\gamma_3 \xi)^{-\alpha_1} J_P\left[\gamma_1 (\gamma_3 \xi)^{\beta_1}\right] + C_2 (\gamma_3 \xi)^{-\alpha_1} J_{-P}\left[\gamma_1 (\gamma_3 \xi)^{\beta_1}\right] \qquad (6.6.15)$$

bulunur. Burada $z(\xi)$ nin çözümü, k_1 e bağlıdır. $k_1 = 1,2,3,4$ olduğunda, çözüm kolayca bulunur. $k_1>4$ olduğunda veya tamsayı olmadığında, yaklaşık yöntemlerle yaklaşık çözüm bulunabilir.

Sonuç olarak, (6.6.5) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümü, (6.6.13) Bessel denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümünün yardımıyla yapılır.

Özel Hal. (6.6.1) ve (6.6.4) operatör dönüşümlerinde $k_1 = 1$ ve $k_2 = 1$ alınarak ve özel operatör dönüşüm olarak (6.6.7) operatör dönüşümü gözönüne alınırsa, bu durumda (6.6.13) denklemi,

$$\xi^2 \frac{d^2 z}{d\xi^2} + [2\alpha_1 + 3]\xi \frac{dz}{d\xi} + \left[2\alpha_1 + 1 + \alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 \gamma_3^{2\beta_1} \xi^{2\beta_1}\right] z(\xi) = 0 \qquad (6.6.16)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca gerek koşul için (6.6.16) ifadesinde $k_1 = 1$ ve $k_2 = 1$ alınarak,

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 3 = 2\alpha_2 + 1 - \beta_2 \gamma_2 \xi^{\beta_2} \\ 2\alpha_1 + 1 + \alpha_1^2 - \beta_1^2 p^2 + \beta_1^2 \gamma_1^2 \gamma_3^{2\beta_1} \xi^{2\beta_1} = \alpha_2^2 + (n\beta_2^2 \gamma_2 - \alpha_2 \beta_2 \gamma_2)\xi^{\beta_2} \end{cases} \qquad (6.6.17)$$

elde edilir. Bu ise (6.4.10) özel operatör dönüşümün alınması ve bu operatör dönüşümlerin (6.5.2) Bessel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfında yerine yazılmasıyla oluşturulan denklem sınıfı ile bu özel operatör dönüşümü (6.5.1) operatör dönüşümünde yerine yazılmasıyla φ ve η operatör dönüşüm fonksiyonları bulunarak (6.5.13) genelleştirilmiş denklem sınıfında yerine yazılmasıyla oluşturulan denklem sınıfı aynıdır.

6.7. Chebyshev-Laguerre ve Chebyshev-Hermite Denklemlerine Dönüşen Lineer Denklem Sınıflarının Çözümleri Arasındaki İlişki

Chebyshev-Laguerre denkleminin kanonik şeklindeki yazılımı,

$$y''(x)+(1-x)\,y'(x)+n\,y(x)=0 \tag{6.7.1}$$

biçimindedir [9]. Bu denklemin çözümü,

$$y(x)=L_n(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}\,x^m \tag{6.7.2}$$

şeklindedir [9]. Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x=\gamma_1\,t^{\beta_1} \text{ ve } y=t^{\alpha_1}\,u(t) \tag{6.7.3}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa, (6.7.1) kanonik Chebyshev-Laguerre denklemi,

$$t^2\frac{d^2u}{dt^2}+\left[2\alpha_1+1-\beta_1\gamma_1 t^{\beta_1}\right]t\frac{du}{dt}++\left[\alpha_1^2+(n\beta_1^2\gamma_1-\alpha_1\beta_1\gamma_1)\,t^{\beta_1}\right]u(t)=0 \tag{6.7.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu (6.7.4) denklem sınıfının çözümü, (6.7.2) kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminin çözümünün yardımıyla,

$$u_n(t) = t^{-\alpha_1} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!(m!)^2} (\gamma_2 t^{\beta_1})^m \tag{6.7.5}$$

şeklindedir. Chebyshev-Hermite denkleminin kanonik şeklindeki yazılımı,

$$y''(x) - 2x\,y'(x) + 2n\,y(x) = 0 \tag{6.7.6}$$

biçimindedir [9]. Bu denklemin çözümü,

$$y(x) = H_n(x) = \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \frac{n!}{(n-2i)!i!} (2x)^{n-2i} \tag{6.7.7}$$

$$N = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & , \ n \text{ çiftiken} \\ \dfrac{n-1}{2} & , \ n \text{ tekiken} \end{cases}$$

şeklindedir [9]. Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = \gamma_2 \xi^{\beta_2} \ \text{ve} \ y = \xi^{\alpha_2} z(\xi) \tag{6.7.8}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa denklem sınıfı,

$$\begin{aligned} \xi^2 \frac{d^2 z}{d\xi^2} &+ \left[2\alpha_2 + 1 - \beta_2 - 2\beta_2 \gamma_2^2 \xi^{2\beta_2}\right] \xi \frac{dz}{d\xi} \\ &+ \left[\alpha_2^2 - \alpha_2 \beta_2 + (2n\,\beta_2^2 \gamma_2^2 - 2\alpha_2 \beta_2 \gamma_2^2)\xi^{2\beta_2}\right] z(\xi) = 0 \end{aligned} \tag{6.7.9}$$

şeklinde yazılır ve bu denklem sınıfının çözümü, (6.7.7) kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin çözümünün yardımıyla,

$$z_n(\xi) = \xi^{-\alpha_2} \sum_{i=0}^{N} (-1)^i \frac{n!}{(n-2i)!i!} (2\gamma_2 \xi^{\beta_2})^{n-2i} \tag{6.7.10}$$

elde edilir. (6.7.4) ve (6.7.9) lineer denklem sınıflarının çözümlerinin arasında ilişkinin bulunması için gerekli ve yeterli koşulların bulunması gerekir. Gerekli koşulun bulunması için,

$$t=\gamma_3\xi \quad \text{ve} \quad u=\xi z(\xi) \tag{6.7.11}$$

özel operatör dönüşüm gözönüne alınsın. İlk olarak (6.7.4) ve (6.7.9) lineer denklem sınıflarının çözümleri arasında ilişkinin (6.7.11) şeklinde olması için gerekli koşullar bulunacaktır. Bunun için (6.7.11) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\frac{du}{d\xi}=z(\xi)+\xi\frac{dz}{d\xi}$$

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}=2\frac{dz}{d\xi}+\xi\frac{d^2z}{d\xi^2}$$

$$\frac{dt}{d\xi}=\gamma_3 \quad \text{ve} \quad \frac{d^2t}{d\xi^2}=0$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}=\left[z(\xi)+\xi\frac{dz}{d\xi}\right]\frac{1}{\gamma_3} \tag{6.7.12}$$

$$\frac{d^2u}{dt^2}=\left[2\frac{dz}{d\xi}+\xi\frac{d^2z}{d\xi^2}\right]\frac{1}{\gamma_3^2} \tag{6.7.13}$$

bulunur. Bu ifadeler, (6.7.4) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$(\gamma_3\xi)^2\left[2\frac{dz}{d\xi}+\xi\frac{d^2z}{d\xi^2}\right]\frac{1}{\gamma_3^2}+\left[2\alpha_1+1-\gamma_1\beta_1\gamma_3^{\beta_1}\xi^{\beta_1}\right]\gamma_3\xi\left[z(\xi)+\xi\frac{dz}{d\xi}\right]\frac{1}{\gamma_3}$$

$$+\left[\alpha_1^2+(n\beta_1^2\gamma_1-\alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_3^{\beta_1}\xi^{\beta_1}\right]\xi z(\xi)=0$$

veya

$$\xi^2 \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \left[2\alpha_1 + 3 - \gamma_1 \beta_1 \gamma_3^{\beta_1} \xi^{\beta_1}\right] \xi \frac{dz}{d\xi}$$
$$+ \left[\alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 1 + (n\beta_1^2\gamma_1 - \beta_1\gamma_1 - \alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_3^{\beta_1}\xi^{\beta_1}\right] z(\xi) = 0 \qquad (6.7.14)$$

elde edilir. (6.7.14) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının çözümünün, (6.7.9) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının çözümüne eşit olması için gerekli koşul, bu denklem sınıflarının katsayılarının birbirine eşit olmasıdır. Yani;

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + 1 - \beta_2 - 2\beta_2\gamma_2^2\xi^{2\beta_2} = 2\alpha_1 + 3 - \gamma_1\beta_1\gamma_3^{\beta_1}\xi^{\beta_1} \\ \alpha_2^2 - \alpha_2\beta_2 + (2n\beta_2^2\gamma_2^2 - 2\alpha_2\beta_2\gamma_2^2)\xi^{2\beta_2} = \alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 1 + (n\beta_1^2\gamma_1 - \beta_1\gamma_1 - \alpha_1\beta_1\gamma_1)\gamma_3^{\beta_1}\xi^{\beta_1} \end{cases}$$

(6.7.15)

şeklinde olur. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ler (6.7.3), (6.7.8) ve (6.7.11) şeklindeki operatör dönüşümlerin sabitleridir. ξ değişkeni, $\xi^* \leq \xi \leq \xi^{**}$ aralığında istenilen şekilde değişirken (6.7.15) cebirsel sistemi, sabitlerin arasında olan cebirsel şekildeki bağıntıdır. (6.7.15) cebirsel sistemi, (6.7.9) ve (6.7.14) lineer denklem sınıflarının çözümleri arasındaki ilişkinin gerekli koşuludur. Bu durumda (6.7.15) cebirsel sistemi gözönüne alınarak, (6.7.9) ve (6.7.14) lineer denklem sınıflarının çözümleri arasında bağıntı, (6.7.11) operatör dönüşümlerinin (6.7.5) de yerlerine yazılmasıyla,

$$\xi z_n(\xi) = (\gamma_2 t^{\beta_1})^{-\alpha_1} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!(m!)^2} (\gamma_2 t^{\beta_1})^m \qquad (6.7.16)$$

veya

$$z_n(\xi)=\frac{1}{\xi}\left[(\gamma_2 t^{\beta_1})^{-\alpha_1}\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}(\gamma_2 t^{\beta_1})^m\right] \tag{6.7.17}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, (6.7.9) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının çözümü, (6.7.14) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer denklem sınıfının çözümünün yardımıyla yapılır.

6.8. Chebyshev-Laguerre ve Chebyshev-Hermite Denklemlerine Dönüşen Genelleştirilmiş Denklem Sınıflarının Çözümleri Arasındaki İlişki

Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x=\varphi(t) \text{ ve } y=\eta[t,u(t)] \tag{6.8.1}$$

operatör dönüşümler gözönüne alınır ve(6.7.1) kanonik Chebyshev-Laguerre denklemine uygulanırsa genelleştirilmiş denklem sınıfı,

$$\frac{\varphi(t)}{[\varphi'(t)]^2}\frac{d^2\eta}{dt^2}+\left[\frac{1-\varphi(t)}{\varphi'(t)}-\frac{\varphi''(t)\varphi(t)}{[\varphi'(t)]^3}\right]\frac{d\eta}{dt}+n\eta=0 \tag{6.8.2}$$

şeklinde bulunur. Bu (6.8.2) genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümü, (6.7.2) kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminin çözümünün ve (6.8.1) operatör dönüşümünden u(t) nin çekilmesi ile (5.1.21) in yardımıyla,

$$u_n(t)=\phi\left\{t;\ \sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}[\varphi(t)]^m\right\} \tag{6.8.3}$$

biçimindedir. Şimdi Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = A(\xi) \quad \text{ve} \quad y = B(\xi, z(\xi)) \tag{6.8.4}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa bu durumda (6.7.6) kanonik Chebyshev-Hermite denklemi,

$$\frac{1}{(A')^2}\frac{d^2B}{d\xi^2} - \left[\frac{A''}{(A')^3} - 2\frac{A}{A'}\right]\frac{dB}{d\xi} + 2n\,B = 0 \tag{6.8.5}$$

şeklinde genelleştirilmiş lineer denklem sınıfı oluşturulur. Bu genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümü, (6.7.7) kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin çözümünün ve (6.8.4) operatör dönüşümünden $z(\xi)$ nin çekilmesi ile (4.1.21) in yardımıyla,

$$z_n(\xi) = I\left\{\xi;\ \sum_{i=0}^{N}(-1)^i \frac{n!}{(n-2i)!i!}\left[2A(\xi)\right]^{n-2i}\right\} \tag{6.8.6}$$

biçiminde elde edilir. (6.8.2) ve (6.8.5) genelleştirilmiş denklem sınıflarının çözümleri arasında ilişkinin olması için gerekli ve yeterli koşulların bulunması gerekir. Gerekli koşulun bulması için,

$$t = \psi(\xi) \quad \text{ve} \quad u = \chi[\xi, z(\xi)] \tag{6.8.7}$$

özel operatör dönüşüm gözönüne alınsın. İlk olarak (6.8.2) ve (6.8.5) genelleştirilmiş denklem sınıflarının çözümleri arasında ilişkinin, (6.8.7) şeklinde olması için gerekli koşullar bulunacaktır. Bunun için (6.8.7) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{d\xi}\frac{d\xi}{dt} = \frac{\frac{d\eta}{d\xi}}{\frac{dt}{d\xi}} \tag{6.8.8}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{d}{d\xi}\left[\frac{d\eta}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}\right]\frac{d\xi}{dt}=\frac{\frac{d^2\eta}{d\xi^2}\frac{dt}{d\xi}-\frac{d\eta}{d\xi}\frac{d^2t}{d\xi^2}}{(\frac{dt}{d\xi})^3}$$

yani

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{1}{\left[\frac{dt}{d\xi}\right]^2}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}-\frac{\frac{d^2t}{d\xi^2}}{\left[\frac{dt}{d\xi}\right]^3}\frac{d\eta}{d\xi} \tag{6.8.9}$$

$$\varphi=\varphi[\psi(\xi)] \tag{6.8.10}$$

$$\varphi'(t)=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{\frac{d\varphi}{d\xi}}{\frac{dt}{d\xi}}=\frac{\varphi'_\xi}{t'_\xi} \tag{6.8.11}$$

$$\varphi''(t)=\frac{d^2\varphi}{dt^2}=\frac{d}{d\xi}\left[\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d\xi}{dt}\right]\frac{d\xi}{dt}$$

elde edilir. Buradan,

$$\varphi''(t)=\frac{\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}}{\left[\frac{dt}{d\xi}\right]^2}-\frac{\frac{d\varphi}{d\xi}\frac{d^2t}{d\xi^2}}{\left[\frac{dt}{d\xi}\right]^3}=\frac{\varphi''_\xi}{[t'_\xi]^2}-\frac{\varphi'_\xi\,\varphi''_\xi}{[t'_\xi]^3} \tag{6.8.12}$$

elde edilir. (6.8.7)-(6.8.12) ifadeleri, (6.8.2) Chebyshev-Laguerre diferansiyel denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$\frac{\varphi}{\left[\frac{\varphi'_\xi}{t'_\xi}\right]^2}\left[t'_\xi\right]^2\left[\frac{1}{\left[t'_\xi\right]^2}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}-\frac{\frac{d^2t}{d\xi^2}}{\left[t'_\xi\right]^3}\frac{d\eta}{d\xi}\right]+\left[\frac{1-\varphi}{\frac{\varphi'_\xi}{t'_\xi}}t'_\xi-\frac{\varphi}{\left[\frac{\varphi'_\xi}{t'_\xi}\right]^3}\left[t'_\xi\right]^3\left(\frac{\varphi''_\xi}{\left[t'_\xi\right]^2}-\frac{\varphi'_\xi\, t''_\xi}{\left[t'_\xi\right]^3}\right)\right]\frac{1}{t'_\xi}\frac{d\eta}{d\xi}+n\,\eta=0$$

veya

$$\frac{\varphi}{\left[\varphi'_\xi\right]^2}\frac{d^2\eta}{d\xi^2}+\left[\frac{1-\varphi}{\varphi'_\xi}-\frac{\varphi''_\xi\,\varphi}{\left[\varphi'_\xi\right]^3}\right]\frac{d\eta}{d\xi}+n\,\eta=0 \qquad (6.8.13)$$

bulunur. (6.8.13) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümünün, (6.8.5) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının çözümüne eşit olması için gerekli koşul, bu denklem sınıflarının katsayılarının birbirine eşit olmasıdır. Bu durumda (6.8.7) operatör dönüşümleri, (6.8.3) da yerlerine yazılırsa,

$$\chi[\xi, \psi(\xi)] = \phi\left\{t;\ \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{n!}{(n-m)!\,(m!)^2}[\varphi(t)]^m\right\}$$

$$= \phi_1\left\{\psi(\xi);\ \sum_{m=0}^{n}(-1)^m \frac{n!}{(n-m)!\,(m!)^2}[\varphi(\psi(\xi))]^m\right\} \qquad (6.8.14)$$

elde edilir.

Sonuç olarak (6.8.5) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen denklem sınıfının çözümü, (6.8.13) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen denklem sınıfının çözümünün yardımıyla yapılır.

6.9. Chebyshev-Laguerre ve Chebyshev-Hermite Denklemlerine Dönüşen Lineer Olmayan Denklem Sınıflarının Çözümleri Arasındaki İlişki

Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer olmayan bir denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = \gamma_1 t^{\beta_1} \quad \text{ve} \quad y = t^{\alpha_1} u^{k_1}(t) \tag{6.9.1}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa ve bu operatör dönüşümler (6.7.1) kanonik Chebyshev-Laguerre denklemine uygulanırsa,

$$t^2 u(t)\frac{d^2y}{dt^2} + \left[2\alpha_1 + 1 - \beta_1 \gamma_1 t^{\beta_1}\right] t\, u(t)\frac{du}{dt} + (k_1 - 1)t^2 (\frac{du}{dt})^2$$

$$+ \frac{1}{k_1}\left[\alpha_1^2 + (n\beta_1^2\gamma_1 - \alpha_1 \beta_1 \gamma_1)t^{\beta_1}\right]u^2(t) = 0 \tag{6.9.2}$$

şeklinde Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfı oluşturulur ve bu denklemin çözümü, (6.7.2) kanonik Chebyshev-Laguerre denkleminin çözümünün yardımıyla,

$$u_n^{k_1}(t) = t^{-\alpha_1} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}\left[\gamma_1 t^{\beta_1}\right]^m \tag{6.9.3}$$

şeklindedir. Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının oluşturulması için,

$$x = \gamma_2 \xi^{\beta_2} \quad \text{ve} \quad y = \xi^{\alpha_2} u^{k_2}(\xi) \tag{6.9.4}$$

operatör dönüşümleri gözönüne alınırsa ve bu operatör dönüşümler (6.7.6) kanonik Chebyshev-Hermite denklemine uygulanırsa,

$$\xi^2 z(\xi)\frac{d^2 z}{d\xi^2}+\left[2\alpha_2-(\beta_2-1)-2\beta_2\gamma_2^2\xi^{2\beta_2}\right]\xi z(\xi)\frac{dz}{d\xi}+(k_2-1)\xi^2(\frac{dz}{d\xi})^2$$

$$+\frac{1}{k_2}\left[\alpha_2^2-\alpha_2\beta_2+(2n\beta_2^2\gamma_2^2-2\alpha_2\beta_2\gamma_2^2)\xi^{2\beta_2}\right]z^2(\xi)=0 \qquad (6.9.5)$$

şeklinde Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfı oluşturulur ve bu denklemin çözümü, (6.7.7) kanonik Chebyshev-Hermite denkleminin çözümünün yardımıyla,

$$z_n^{k_2}(\xi)=\xi^{-\alpha_2}\sum_{i=0}^{N}(-1)^i\frac{n!}{(n-2i)!i!}(2\gamma_2\xi^{\beta_2})^{n-2i} \qquad (6.9.6)$$

biçiminde olacaktır. (6.9.2) ve (6.9.5) lineer olmayan denklem sınıflarının çözümlerinin arasında ilişkinin bulunması için, gerekli ve yeterli koşulların bulunması gerekir. Gerekli koşulun bulunması için,

$$t=\gamma_3\xi \quad \text{ve} \quad u=\xi z(\xi) \qquad (6.9.7)$$

özel operatör dönüşüm göz önüne alınsın. İlk olarak (6.9.2) ve (6.9.5) denklem sınıflarının çözümleri arasında ilişkinin, (6.9.7) şeklinde olması için gerekli koşullar bulunacaktır. Buna göre (6.8.13) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen genelleştirilmiş denklem sınıfının kullanabilmesi için, (6.9.7) operatör dönüşümlerinin (6.9.1) de yazılmasıyla φ ve η operatör dönüşüm fonksiyonları,

$$\eta(\xi,z(\xi))=\gamma_3^{\alpha_1}\xi^{\alpha_1+k_1}z^{k_1}(\xi) \qquad \varphi=\gamma_1\gamma_3^{\beta_1}\xi^{\beta_1} \qquad (6.9.8)$$

şeklinde olur. (6.9.8) operatör dönüşümlerinin türevleri alınırsa,

$$\frac{d\varphi}{d\xi}=\gamma_1\gamma_3^{\beta_1}\beta_1\xi^{\beta_1-1} \qquad (6.9.9)$$

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \gamma_1 \gamma_3^{\beta_1} \beta_1 (\beta_1 - 1) \xi^{\beta_1 - 2} \tag{6.9.10}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \gamma_3^{\alpha_1} (\alpha_1 + k_1) \xi^{\alpha_1 + k_1 - 1} z^{k_1}(\xi) + k_1 \gamma_3^{\alpha_1} \xi^{\alpha_1 + k_1} z^{k_1 - 1}(\xi) \frac{dz}{d\xi} \tag{6.9.11}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = k_1 \gamma_3^{\alpha_1} \xi^{\alpha_1 + k_1} z^{k_1 - 1}(\xi) \frac{d^2 z}{d\xi^2} + 2k_1 \gamma_3^{\alpha_1} (\alpha_1 + k_1) \xi^{\alpha_1 + k_1 - 1} z^{k_1 - 1}(\xi) \frac{dz}{d\xi}$$

$$+ \gamma_3^{\alpha_1} (\alpha_1 + k_1)(\alpha_1 + k_1 - 1) \xi^{\alpha_1 + k_1 - 2} z^{k_1}(\xi) + k_1 (k_1 - 1) \gamma_3^{\alpha_1} \xi^{\alpha_1 + k_1} z^{k_1 - 2}(\xi) \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2 \tag{6.9.12}$$

bulunur. (6.9.8)-(6.9.12) ifadeleri, (6.8.13) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen genelleştirilmiş lineer denklem sınıfında yerlerine yazılırsa,

$$\xi^2 z(\xi) \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \left[2(\alpha_1 + k_1) + 1 - \beta_1 \gamma_1 \gamma_3^{\beta_1} \xi^{\beta_1}\right] \xi z(\xi) \frac{dz}{d\xi} + (k_1 - 1)\xi^2 \left(\frac{dz}{d\xi}\right)^2$$

$$+ \frac{1}{k_1}\left[\alpha_1^2 + 2\alpha_1 k_1 + k_1^2 + (n \beta_1^2 \gamma_1 - \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 - k_1 \beta_1 \gamma_1) \gamma_3^{2\beta_1} \xi^{2\beta_1}\right] z^2(\xi) = 0 \tag{6.9.13}$$

şeklinde elde edilir. (6.9.13) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümünün, (6.9.5) Chebyshev-Hermite denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümüne eşit olması için gerekli koşul, bu lineer olmayan denklem sınıflarının katsayılarının birbirine eşit olması gerekir. Yani;

$$
\begin{cases}
2(\alpha_1 + k_1) + 1 - \beta_1 \gamma_1 \gamma_3^{\beta_1} \xi^{\beta_1} = 2\alpha_2 - (\beta_2 - 1) - 2\beta_2 \gamma_2^2 \xi^{2\beta_2} \\
k_1 - 1 = k_2 - 1 \quad \text{veya} \quad k_1 = k_2 \\
\dfrac{1}{k_1}\left[\alpha_1^2 + 2\alpha_1 k_1 + k_1^2 + (n\beta_1^2\gamma_1 - \alpha_1 \beta_1 \gamma_1 - k_1 \beta_1 \gamma_1)\gamma_3^{2\beta_1} \xi^{2\beta_1}\right] \\
\qquad = \dfrac{1}{k_2}\left[\alpha_2^2 - \alpha_2 \beta_2 + (2n\beta_2^2\gamma_2^2 - 2\alpha_2 \beta_2 \gamma_2^2)\xi^{2\beta_2}\right]
\end{cases} \tag{6.9.14}
$$

şeklinde olmasıdır. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ler (6.9.1), (6.9.4) ve (6.9.7) şeklindeki operatör dönüşümlerin sabitleridir. ξ değişkeni, $\xi^* \le \xi \le \xi^{**}$ aralığında değişirken (6.9.14) cebirsel sistemi, sabitlerin arasında olan cebirsel şekildeki bağıntıdır. (6.9.14) cebirsel sistemi (6.9.5) ve (6.9.13) lineer olmayan denklem sınıflarının çözümleri arasındaki ilişkinin gerekli koşuludur. Bu durumda (6.9.5) ve (6.9.13) lineer olmayan denklem sınıflarının çözümleri arasındaki bağıntı, (6.9.7) operatör dönüşümlerinin (6.9.3) de yerlerine yazılmasıyla,

$$
[\xi z_n(\xi)]^{k_1} = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \frac{n!}{(n-m)!(m!)^2}\left[\gamma_1(\gamma_3 \xi)^{\beta_1}\right]^m \tag{6.9.15}
$$

bulunur. Bu tipli çözümde $z(\xi)$ nin çözümü k_1 e bağlıdır. $k_1 = 1,2,3,4$ olduğunda, tam çözüm kolayca bulunur. $k_1>4$ olduğunda veya tamsayı olmadığında, yaklaşık yöntemlerle yaklaşık çözüm bulunabilir.

Sonuç olarak, (6.9.5) Chebyshev- Hermite denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümü, (6.9.13) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer olmayan denklem sınıfının çözümünün yardımıyla yapılır.

Özel Hal. (6.9.1) ve (6.9.4) operatör dönüşümlerinde $k_1 = 1$ ve $k_2 = 1$ alınarak ve özel operatör dönüşüm olarak (6.9.7) operatör dönüşümü gözönüne alınırsa, bu durumda (6.9.13) denklemi,

$$\xi^2 \frac{d^2 z}{d\xi^2} + \left[2\alpha_1 + 3 - \gamma_1 \beta_1 \gamma_3^{\beta_1} \xi^{\beta_1}\right] \xi \frac{dz}{d\xi} + \left[\alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 1 + (n\beta_1^2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_1 - \alpha_1 \beta_1 \gamma_1)\gamma_3^{\beta_1} \xi^{\beta_1}\right] z(\xi) = 0 \qquad (6.9.16)$$

şeklinde bulunur. Ayrıca gerek koşul için (6.9.14) ifadesinde $k_1 = 1$ ve $k_2 = 1$ alınarak,

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + 1 - \beta_2 - 2\beta_2 \gamma_2^2 \xi^{2\beta_2} = 2\alpha_1 + 3 - \gamma_1 \beta_1 \gamma_3^{\beta_1} \xi^{\beta_1} \\ \alpha_2^2 - \alpha_2 \beta_2 + (2n\beta_2^2 \gamma_2^2 - 2\alpha_2 \beta_2 \gamma_2^2)\xi^{2\beta_2} = \alpha_1^2 + 2\alpha_1 + 1 + (n\beta_1^2 \gamma_1 - \beta_1 \gamma_1 - \alpha_1 \beta_1 \gamma_1)\gamma_3^{\beta_1} \xi^{\beta_1} \end{cases} \qquad (6.9.17)$$

elde edilir. Bu ise (6.7.11) özel operatör dönüşümün alınması ve bu operatör dönüşümlerin (6.7.5) Chebyshev-Laguerre denklemine dönüşen lineer denklem sınıfında yerine yazılmasıyla oluşturulan denklem sınıfı ile bu özel operatör dönüşümün (6.8.1) operatör dönüşümünde yerine yazılmasıyla φ ve η operatör dönüşüm fonksiyonları bulunarak (6.8.13) genelleştirilmiş denklem sınıfında yerine yazılmasıyla oluşturulan denklem sınıfı aynıdır.

BÖLÜM VII

SONUÇ VE ÖNERİLER

Fiziksel olaylarda geniş biçimde kullanılan kanonik Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre denklemleri incelenmiştir. Değişen ortamlarda gelişen fiziksel olaylar, Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre tipindeki denklem sınıflarına dönüşmektedir. Bu durum dikkate alınarak tezin içeriğinde, denklem sınıfları genelleştirmiş ve onların çözüm yöntemi verilmiştir. Bu istikametde aşağıdaki neticeler alınmıştır.

1) Doğada fiziksel olaylar sonucunda oluşan, katsayıları değişen özel tipteki Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre denklemlerinin çözümü, özel polinomlar yardımıyla verilerek bu özel polinomların önemli özellikleri incelenmiştir.

2) Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre tipindeki denklem sınıfları, operatör dönüşümü yardımıyla genelleştirilmiştir. Buradaki denklem sınıfları, lineer ve lineer olmayan denklem sınıflarını da kapsamaktadır. Üstel fonksiyon biçiminde olan operatör dönüşümleri için,denklem sınıfları oluşturulmuştur.

3) Chebyshev-Hermite ve Chebyshev-Laguerre tipindeki denklem sınıflarının genel çözüm yöntemi verilmiştir. Buradaki denklem sınıfları, lineer ve lineer olmayan denklem sınıflarını da kapsamaktadır. Üstel fonksiyon biçiminde olan operatör dönüşümler için oluşturulan denklem sınıflarının çözümleri verilmiştir.

4) Chebyshev-Hermite, Bessel ve Chebyshev-Laguerre tipindeki denklem sınıflarının çözümleri arasında bağlantının bulunması için gerekli koşullar, operatör biçiminde olan özel dönüşüm yardımıyla oluşturulmuştur. Buradaki denklem sınıfları, lineer ve lineer olmayan denklem sınıflarını da kapsamaktadır. Üstel fonksiyon biçiminde olan operatör dönüşümler için oluşturulan denklem sınıfları incelenmiştir.

5) Lineer olmayan fiziksel titreşim problemleri, lineer olmayan ses dalgaları, sıcaklık dalgaları ve elektro-manyetik dalgaların yayılması problemleri mekanik teorisinde lineer olmayan olaylara örnek olarak verilebilir. Doğada meydana gelen lineer olmayan fiziksel problemlerin deneysel ve teorik oluşumu ile onların gelişimi, matematiğin konusuyla birebir bağlıdır.

KAYNAKLAR

[1]. Aliyev, G., ve Turhan, H. N., Özel Fonksiyonlar, Niğde Üniversitesi Yayınları, 83-111s, Niğde, (2000)

[2]. Tcyhonov, A. N., and Samarsky, A. A.,Uravneniya Matematiçeskoy Fiziki, GİTTL, Moskova (1953), 680s

[3]. Koşlakov, N. S., and Gliner, E. B., Smirnov, M. M., Osnovniye Diferansialnıye Uravnaniya Matemticeskoy Fiziki, İzd. Fiz-Mat Lit., Moskova, 1962, 765s.

[4]. Smirnov, V. İ., Kursvısşey Matematiki, T1 i 2, İzd. Nauka, Fiz-Mat. Literatura Moskova, (1967), 665s.

[5]. Aliyev, G., Matematiğin Fizik ve Mühendisliğe Uygulamaları, 216-247s, N.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, İstanbul, (1998)

[6]. Merzbacher, E., Quantum Mechanics, America, 202s,53-79s, 1961, (1970)

[7]. Ohanian, H. C., Modern Physics, America, 237-255s, (1987)

[8]. Karaoğlu, B., Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemleri Bilgi Tek Yayıncılık, 94-112s, İstanbul, (1997)

[9]. Bell, W. W., Special Functions, D.Van Nostrand Company , 157-186s, Ltd. Canada, (1968)

[10]. Önem, C.,Fizikte Matematik Metodları , 339-351s, Birsen Yayınevi İstanbul, 1998

Yayınları, Niğde,2000

[11]. Süray, S., Teori ve Problemlerle İleri Analiz, Ankara, 70s, (1978)

[12]. Karadeniz, A. A., Yüksek Matematik, Vol. 9, İstanbul, 77s, (1993)