T.C.
Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

BANACH UZAYLARINDA ABSTRAKT FONKSİYONLARIN RİEMANN, STİELTJES VE BOCHNER İNTEGRALLERİ VE ONLARIN BAZI UYGULAMALARI

Serkan Kader

Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Mammad İ. Mustafayev

Haziran 2002

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI' nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Prof.Dr. Gabil ALİYEV, Niğde Üniversitesi

Üye : Prof. Dr. Mammad İ. MUSTAFAYEV, Niğde Üniversitesi

Üye : Yrd. Doç. Dr. Hasan KÖSE, Selçuk Üniversitesi

ONAY:

Bu tez 14/06/2002 tarihinde, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca belirlenmiş olan yukarıdaki jüri üyeleri tarafından uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulu' nun kararıyla kabul edilmiştir.

26/6/2002

Doç.Dr. Aydın TOPÇU

Enstitü Müdürü

ÖZET

BANACH UZAYLARINDA ABSTRAKT FONKSİYONLARIN RİEMANN, STİELTJES VE BOCHNER İNTEGRALLERİ VE ONLARIN BAZI UYGULAMALARI

KADER, Serkan

Niğde Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof Dr. Mammad İ. MUSTAFAYEV

Haziran 2002, 81 sayfa

Bu çalışmada normlu uzaylarda tanımlanmış ve değerleri normlu uzaylarda olan abstrakt fonksiyonların Riemann, Stieltjes, Bochner integrallerinin tanımlanması öğrenildi.

İkinci bölümde, adi fonksiyonlar için Lebesque integrali ile ilgili temel tanım ve teoremler hatırlatıldı.

Üçüncü bölümde, sayısal değişkenlere bağlı abstrakt fonksiyonların tanımı verilerek, limit, süreklilik ve diferansiyellenme gibi temel tanımları ve uygun özellikleri ele alındı.

Dördüncü bölümde, Bochner integrali tanımlandı ve Bochner integralinin uygulanmasıyla Banach uzayında diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelendi.

Beşinci bölümde, abstrakt fonksiyonların, pratik problemlerin çözümünde sık sık rastlanan Riemann ve Stieltjes integrallerinin tanımları ve temel özellikleri verildi.

Altıncı bölümde ise, spektral fonksiyon anlamı verildi ve bu spektral fonksiyon üzere Riemann-Stieltjes integrali tanımlandı. Spektral fonksiyonun yardımıyla kendi kendine eşlenik operatörün ve rezolventinin integral açılımı yazıldı.

Anahtar Kelimeler: Abstrakt fonksiyon, Bochner integrali, Cauchy problemi, Stieltjes integrali, spektral fonksiyon, Cauchy formülü.

SUMMARY

RIEMANN, STIELTJES AND BOCHNER INTEGRALS
OF ABSTRACT FUNCTIONS ON BANACH SPACES AND
SOME OF THEİR APPLICATIONS

KADER, Serkan

Nigde University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mammad I. MUSTAFAYEV

June 2002, 81 pages

In this study, it was learned, the definitions of Riemann, Stieltjes and Bochner integrals of abstract functions which defined on normed spaces and which values in normed spaces.
In the second section, basic definitions and theorems related to Lebesque integral overwieved for ordinary functions.
In the third section, by giving the definition of abstract functions which depend on numerical variables, basic definitions such as limit, continuity and differentiability of these functions and its suitable properties considered.
In the fourth section, Bochner integral is defined and we showed the existence and uniqueness of the solution of Cauchy problem for differential equations on Banach space by an application of Bochner integral.
In the fifth section, definitions and basic properties of Riemann and Stieltjes integrals of abstract functions, which are frequently addressed at the solutions of practical problems, were given.
In the sixth section, spectral function is expressed and Riemann–Stieltjes integral is defined on this function. Integral expansion of self adjoint operator and its resolvent is determined by the spectral function.

Key Words: Abstract function, Bochner integral, Cauchy problem, Stieltjes integral, spectral function, Cauchy formula.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında, yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım Prof.Dr. Mammad İ. MUSTAFAYEV' e, çalışmalarım boyunca bana her türlü kolaylığı sağlayan Matematik Bölüm Başkanı Yrd.Doç.Dr. İsmet ALTINTAŞ' a ve Prof.Dr. Gabil ALİYEV' e, çalışmalarım boyunca bana her zaman destek olan Yrd. Doç.Dr. Onur KÖKSOY'a Arş. Gör. Atakan Tuğkan YAKUT' a ve Arş.Gör. Sevgi ÇALIŞKAN YAKUT' a, ayrıca Matematik Bölümünün diğer bütün öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Serkan KADER

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM I

GİRİŞ

Bu çalışmada, parametreye bağlı ve genel halde keyfi normlu uzaylarda tanımlanmış ve değerleri normlu uzaylarda olan fonksiyonların – abstrakt fonksiyonların integrallerinin tanımları ve uygun integrallerin özellikleri öğrenilmiştir.

Parametreye bağlı olan abstrakt fonksiyonların integrallerinin tanımı, matematik analizde (veya Kompleks fonksiyonlar teorisinde) verilen eğri üzere integralin tanımıyla hemen hemen aynıdır. Ama keyfi normlu uzaylarda tanımlanmış abstrakt fonksiyonların integralleri, Reel analizde verilen Lebesque integralinin bir benzeridir. Lebesque integrali, tanım kümesinde, Lebesque ölçüsü yardımı ile verildiği halde, abstrakt fonksiyonların integrali, tanım kümesinde verilmiş olan uygun ölçünün yardımı ile tanımlanır ve alınan integrale genelde Bochner integrali denir.

Bu tez giriş bölümü dahil altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, adi fonksiyonlar için Lebesque integrali ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde, sayısal değişkenlere bağlı abstrakt fonksiyonların tanımı verilerek, limit, süreklilik ve diferansiyellenme gibi temel tanımları ve uygun özellikleri ele alındı. Dördüncü bölümde, Bochner integralinin tanımı verildi ve Bochner integralinin uygulanmasıyla Banach uzayında diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliği incelendi. Beşinci bölümde, abstrakt fonksiyonların, pratik problemlerin çözümünde sık sık rastlanan Riemann ve Stieltjes integrallerinin tanımları ve temel özellikleri verildi. Altıncı bölümde ise, Spektral fonksiyon anlamı verildi ve bu spektral fonksiyon üzere Riemann-Stieltjes integrali tanımlandı. Spektral fonksiyonun yardımıyla kendi kendine eşlenik operatörün, kendisinin ve rezolventinin integral açılımı yazıldı.

BÖLÜM II

ÖLÇÜ VE LEBESQUE İNTEGRALİ

Bochner integralinin tanımında ölçü anlamı ve Lebesque integralinin tanım yönteminden yararlanılacaktır. Bundan dolayı önce Lebesque teorisinin esas anlamlarını ve birkaç önemli teoremlerini verelim.

2.1. Abstrakt (Soyut) Ölçü ve İntegral Anlamı

Tanım 2.1.1. X herhangi bir küme olsun. X kümesinin alt kümelerinin **A** kümesi aşağıdaki,

1^0. $X \in \mathbf{A}$

2^0. $A \in \mathbf{A}$ olduğunda $A^1 \in \mathbf{A}$

3^0. $i = 1, 2, \ldots$ için $A_i \in \mathbf{A}$ iken, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbf{A}$

şartlarını sağlıyorsa, o zaman **A**' ya σ-cebir denir.

Bu şartlardan, $\emptyset \in \mathbf{A}$ olduğu ve σ- cebire dahil olan sonlu veya sayılabilir sayıda kümelerin kesişiminin de σ-cebire dahil olduğu anlaşılır.

X kümesinin alt kümelerinin kümesi σ-cebir oluşturur.

Reel sayılar kümesinin $[\alpha,\beta]$ kapalı aralığını alalım. Bu aralıktaki, sonlu veya sayılabilir sayıda açık aralıkların, kapalı aralıkların keyfi birleşimlerinin veya kesişimlerinin ailesi $[\alpha,\beta]$ aralığındaki kümelerin Borel sistemini oluşturur ve **B** ile gösterilir. Eğer $M \in \mathbf{B}$ ise, o zaman M' nin $[\alpha,\beta]$ aralığındaki tümleyeni $M^1 \in \mathbf{B}$ olduğu açıktır. O halde **B**, σ- cebirdir.

A, σ-cebrine dahil olan her bir kümeye **A**-ölçülebilir veya sadece ölçülebilir küme denir. Hatırlayalım ki, eğer

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k\Big) = A$$

ise, o zaman $\{A_n\}$ kümeler dizisi A kümesine yakınsaktır denir (Natanson, 1961), (Lyusternik ve Sobolev, 1982). Bu durumda A' ya $\{A_n\}$ dizisinin limiti denir ve

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n$$

şeklinde gösterilir. **A**-ölçülebilir kümeler dizisinin limitinin de **A**-ölçülebilir olduğu açıktır.

Tanım 2.1.2. μ: **A** $\to$ **R** fonksiyonu

1^0. Her bir $A \in \mathbf{A}$ için, $\mu(A) \geq 0$

2^0. Eğer $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ olmak üzere $A_n \in \mathbf{A}$ $(n=1,2,...)$ için

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

özelliklerini sağlarsa, μ fonksiyonuna ölçü denir.

Ölçünün monoton fonksiyon olduğu yani, $A \subset B$ ve $A, B \in \mathbf{A} \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$; $\mu(\emptyset) = 0$;

$\forall A_i \in \mathbf{A}$ $(i = 1,2,...)$ için $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ olduğu ispat edilebilir (Natanson, 1961), (Lyusternik ve Sobolev, 1982).

Eğer $A = \lim_{n\to\infty} A_n$ ise, o zaman $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ dır.

Tanım 2.1.3. $E \subset X$ kümesinde reel f(x) fonksiyonu tanımlansın. Eğer E kümesi ölçülebilir ise ve her bir reel c sayısı için $E(f > c) = \{x \in X: f(x) > c\}$ kümesi ölçülebilir ise f(x) fonksiyonuna, ölçülebilir fonksiyon denir.

f' in ölçülebilir olması için gerek ve yeteı şart her bir c için

$$E(f \geq c) \;,\; E(f < c) \;,\; E(f \leq c)$$

kümelerinden birinin ölçülebilir olmasıdır (Natanson,1961),(Lyusternik ve Sobolev, 1982).

Teorem 2.1.4. (Egorov D.F.). E' de hemen hemen her yerde $f_n(x) \to f(x)$ ise, o zaman $\forall\delta > 0$ için öyle ölçülebilir $E' \subset E$ alt kümesi bulunur ki, $\mu(E)-\delta < \mu(E')$ olur ve $\{ f_n(x)\}$ dizisi E'' de f(x)' e düzgün yakınsak olur.

Hatırlayalım ki, E kümesinden ölçüsü sıfır olan küme çıkarıldıktan sonra kalan her yerde $f_n(x)$ dizisi f(x) fonksiyonuna yakınsak olursa, o zaman $f_n(x)$ dizisi f(x) fonksiyonuna E' de hemen hemen her yerde yakınsaktır denir.

Tanım 2.1.5. Eğer $\forall\sigma > 0$ için $n \to \infty$ iken

$$\mu E(| f_n - f | \geq \sigma) \to 0$$

oluyorsa, o zaman E' de ölçülebilir $\{ f_n(x) \}$ dizisi, ölçülebilir f(x) fonksiyonuna ölçüye göre yakınsaktır denir.

$\{ f_n(x) \}$ dizisi f(x) fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsak ise, o zaman bu dizi ölçüye göre de yakınsaktır. Bunun tersi doğru olmayabilir. Ama Riesz, ölçüye göre yakınsak olan her bir diziden bu limite hemen hemen her yerde yakınsak olan dizi seçilebileceğini ispatlamıştır (Natanson, 1961), (Lyusternik ve Sobolev, 1982).

Tanım 2.1.6. Farzedelim ki, E ölçülebilir bir kümedir ve f, E' de negatif olmayan ölçülebilir fonksiyondur. E kümesini, $i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ olmak üzere

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

şeklinde ortak noktaları olmayan sonlu kümelerin birleşimi olarak gösterelim.

$$u_i = \inf_{x \in E_i} f(x)$$

olsun.

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \mu(E_i)$$

toplamını ele alalım.

Bu toplamın, yukarıda gösterilen özelliklere sahip E_i kümelerine ve bu kümelerin sayısına göre sonlu veya sonsuz supremum değerine f(x) fonksiyonunun E kümesi üzere Lebesque integrali denir ve

$$\int_E f(x)\, d\mu = \sup_n \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot \mu(E_i)$$

şeklinde gösterilir.Eğer,

$$\int_E f(x)\, d\mu < +\infty$$

ise o zaman negatif olmayan f(x) fonksiyonu E kümesi üzere integrallenebilirdir denir.

E'de farklı işaretli değerler alan f(x) fonksiyonunun Lebesque integrali

$$\int_E f(x)\, d\mu = \int_E f_+(x)\, d\mu - \int_E f_-(x)\, d\mu$$

şeklindedir. Burada

$$f_+(x) = \frac{|f(x)| + f(x)}{2} \quad , \quad f_-(x) = \frac{|f(x)| - f(x)}{2}$$

dir. Eğer,

$$\int_E f(x)\, d\mu \neq \pm\infty$$

olursa, o zaman f(x) fonksiyonuna E' de Lebesque anlamda integrallenebilirdir veya toplanabilirdir denir.

$$\int_E [\alpha f + \beta g]\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu$$

formülü doğrudur. Bu özelliğe Lebesque integralinin lineerlik özelliği denir

Teorem 2.1.7. (Lebesque). Eğer E' de hemen hemen her yerde $f_n(x) \to f(x)$ ise ve E' de hemen hemen her yerde $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$ ise ve $\int_E \varphi(x)\, d\mu < +\infty$ ise, o zaman

$$\int_E f_n(x)\, d\mu \to \int_E f(x)\, d\mu$$

olur.

Lebesque integralinin çok önemli olan aşağıdaki özellikleri de vardır.

Özellik 2.1.8. (Toplamsallık **).** $i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ ve E_i' ler ölçülebilir olmak üzere $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ ise o zaman

$$\int_E f(x)\, d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f(x)\, d\mu$$

dür.

Özellik 2.1.9. (Mutlak Süreklilik **).** $\forall\, \varepsilon > 0$ için $\exists\, \delta > 0$ var ki, $\mu H < \delta$ şartını sağlayan her bir ölçülebilir $H \in E$ için,

$$\left| \int_H f(x)\, d\mu \right| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanırsa f(x) fonksiyonuna, E kümesinde mutlak süreklidir denir.

2.2. Öklid Uzayında Ölçü ve İntegral

Soyut Lebesque integralinin reelleşmesi, sayısal doğru üzerindeki kümeler üzere Lebesque integralidir.

Farzedelim ki, G sayısal doğrunun açık sınırlı kümesidir. O zaman $G = \bigcup_k (a_k, b_k)$ olduğu açıktır. Burada açık aralıkların sayısı sonlu veya sayılabilir olabilir. G' nin ölçüsü

$$\mu G = \sum_k (b_k - a_k)$$

gibi tanımlanır.

Eğer F sınırlı kapalı küme olursa ve $[\alpha,\beta]$ aralığı da bu kümeyi içinde saklayan en küçük parça ise, yani $\alpha = \inf F$ ve $\beta = \sup F$ ise, o zaman $[\alpha,\beta]$ aralığında F'in tümleyeni açıktır. Bu halde F' in ölçüsü,

$$\mu F = (\beta - \alpha) - \mu F^{t}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi E' nin sayısal doğruda keyfi sınırlı küme olduğunu farzedelim. E' nin dış ölçüsü,

$$\mu^{*}E = \inf_{G \supset E} \mu G$$

dir. Burada G açıktır. E' nin iç ölçüsü,

$$\mu_{*}E = \sup_{F \subset E} \mu F$$

tir. Burada $F \subset E$ olmak üzere keyfi kapalı kapalı kümedir.

Tanım 2.2.1. Eğer $\mu^{*}E = \mu_{*}E$ olursa, o zaman E kümesine Lebesque anlamda ölçülebilir adı verilir ve $\mu E = \mu^{*}E = \mu_{*}E$' ye ise E kümesinin Lebesque ölçüsü denir.

[a,b] parçasında veya (a,b) aralığında yerleşen Lebesque anlamda ölçülebilir E kümelerinin kümesinin σ–cebir oluşturduğu ispat edilebilir. Buna göre de μE ölçüsü, A-ölçülebilir anlamında ölçüdür.

Böylece, ölçülebilir fonksiyon ve Lebesque integrali anlamları Öklid uzayında da benzer şekilde verilebilir. Bu halde Lebesque integrali çoğu zaman

$$\int_{E} f(x)\, dx$$

şeklinde gösterilir. Buna göre de soyut halde gösterdiğimiz tüm teoremler sayısal doğru üzere kümeler içinde sağlanılır.

Mutlak sürekliliğin tanımı bu halde aşağıdaki şekilde verilir.

Tanım 2.2.2. $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ \delta > 0$ var ki, $i \neq j$ için $(x_i, x_i + h_i) \cap (x_j, x_j + h_j) = \emptyset$ olmak üzere

$$\bigcup_{i=1}^{n} (x_i, x_i + h_i) \subset [a,b]$$

ise ve $\sum_{i=1}^{n} h_i < \delta$ olduğunda,

$$\sum_{i=1}^{n} | f(x_i + h_i) - f(x_i) | < \varepsilon$$

oluyorsa, [a,b] aralığında verilmiş f(x) fonksiyonuna mutlak süreklidir denir.

Bu tanımdan, [a,b] aralığında mutlak sürekli olan fonksiyonun bu aralıkta sürekli olduğu açıktır. Ama bunun tersi doğru olmayabilir.

Mutlak sürekli fonksiyonların en önemli özelliklerinden biri aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 2.2.3. [a,b] aralığında mutlak sürekli olan her bir f(x) fonksiyonunun bu aralıkta hemen hemen her yerde $f'(x)$ türevi vardır. Bu türev integrallenebilirdir ve

$$f(x) = \int_a^b f'(x)\, dx + f(a)$$

ifadesi doğrudur (Natanson, 1961), (Lyusternik ve Sobolev, 1982).

Tanım 2.2.4. Reel (kompleks) f(t) fonksiyonunun [a,b] aralığında tanımlandığını ve ölçülebilir olduğunu farzedelim.(Re f ve İm f ölçülebilirdir). Eğer,

$$\int_a^b | f(t) |^p\, dt < +\infty$$

olursa, o zaman f(t) fonksiyonu $L_p[a,b]$ Lebesque sınıfına dahildir denir veya f(t), p dereceden integrallenebilirdir denir. Burada integral Lebesque anlamındadır ve p ise pozitif sayıdır.

Farzedelim ki, $p \geq 1$' dir. Eğer $f(t) \in L_p[a,b]$ ise ve $g(t) \in L_p[a,b]$ ise $f + g \in L_p[a,b]$ olduğu ve λ reel (kompleks) sayı olmak üzere $\lambda f \in L_p[a,b]$ olduğu ispat edilebilir (Bayraktar, 1996).

Fonksiyonların Lebesque sınıfının teorisinde aşağıdaki eşitsizlikler çok önemlidir.

Tanım 2.2.5. (Hölder eşitsizliği). $p > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere eğer $f(t) \in L_p[a,b]$ ise ve $g(t) \in L_q[a,b]$ ise, o zaman $f(t) \cdot g(t)$, $[a,b]$' de integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b |f(t) \cdot g(t)|\, dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (1)$$

dir. Burada $[a,b]$' de hemen hemen her yerde $|f(t)|^p = k \cdot |g(t)|^q$, $(k > 0)$ olduğunda eşitlik elde edilir (Bayraktar, 1996).

Tanım 2.2.6. (Minkowski eşitsizliği).

$$\left(\int_a^b |f(t)+g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \qquad (2)$$

dir. Burada $[a,b]$' de hemen hemen her yerde $f(t) = k \cdot g(t)$, $(k > 0)$ olduğunda eşitlik elde edilir (Bayraktar, 1996).

$[a,b]$ aralığında ölçülebilir fonksiyonların kuruluşunu karakterize eden N.N. Luzin teoremini burada verelim.

$[a,b]$ aralığında verilmiş $f(x)$ fonksiyonu C-özelliği taşıyor denir, eğer $\forall \varepsilon > 0$ için mükemmel (yani, bu küme kapalıdır ve bu kümenin izole olunmuş noktaları yoktur) $\exists\, P \subset [a,b]$ kümesi var ki,

$$(b-a) - \varepsilon < \mu(P)$$

sağlanır ve $f(x)$ fonksiyonu P' de süreklidir.

Teorem 2.2.5.(N.N.Luzin). $f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart bu aralıkta onun C–özelliğine sahip olmasıdır (Natanson, 1961).

Benzer olarak, $\mathbf{R}^n$' de de ölçünün ve Lebesque integralinin tanımı verilir. Bu halde n-boyutlu paralelyüz alınır. Bu paralelyüzde sınırlı açık küme, ikişer ikişer kesişmeyen açık sayılabilir sayıda paralelyüzlerin birleşimi şeklinde gösterilebilir. Böylece açık kümenin ölçüsü, bu kapalı paralelyüzlerin hacimlerinin toplamı şeklinde ifade edilir.

Kapalı sınırlı kümenin ölçüsü ise bu kümeyi içinde saklayan en küçük kapalı paralelyüzün ölçüsü ile bu kümeyi bu paralelyüze tamamlayan açık kümelerin ölçüsünün farkına eşit olur.

Teorem 2.2.6. (Fubini). $f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ fonksiyonu, (n + p)-boyutlu öklid uzayının

$$P = \{ (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m): a_i \leq x_i \leq b_i,\ c_j \leq y_j \leq d_j,\ i = 1, \dots, n\ ,\ j = 1, \dots, m\}$$

paralelyüzünde integrallenebilir olsun. O zaman

$$P_x = \{ (x_1, \dots, x_n): a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, \dots, n \}$$

paralelyüzünün hemen hemen tüm $(x_1, \dots, x_n)$ noktaları için

$$f_x(y_1, \dots, y_m) = f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$$

fonksiyonu,

$$P_y = \{ (y_1, \dots, y_m): c_j \leq y_j \leq d_j\}$$

paralelyüzünde integrallenebilirdir ve

$$\int_{P_y} f_x(y_1, \dots, y_m)\, dy_1 \dots dy_m$$

integrali, $x_1, \dots, x_n$ değişkenlerinin fonksiyonu gibi P_x' te integrallenebilirdir ve

$$\int_P f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)\, dx_1 \dots dx_n \cdot dy_1 \dots dy_m =$$

$$= \int_{P_x} \{ \int_{P_y} f(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)\, dy_1 \dots dy_m \} dx_1 \dots dx_n$$

dir. Burada $x_1, \dots, x_n$ ve $y_1, \dots, y_m$ değişkenleri yer değiştirebilir.

Eğer $f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ fonksiyonu keyfi ölçülebilir E kümesinde verilmişse, o zaman E' yi bir P paralelyüzüne dahil etmekle

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & , (x,y) \in E \\ 0 & , (x,y) \in P \setminus E \end{cases}$$

fonksiyonuna geçilebilir (Natanson, 1961).

2.3. Stieltjes İntegrali.

Bu kısımda Stieltjes-Riemann integralinin tanımını ve esas özelliklerini vereceğiz.

Tanım 2.3.1. Eğer [a,b] aralığının keyfi bir

$$T: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

parçalanışında

$$\sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) | < c$$

olacak şekilde bir c sabiti bulunabilirse, $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ fonksiyonuna [a,b] aralığında sınırlı varyasyonlu fonksiyon adı verilir. O zaman

$$\sup \sum_{i=1}^{n} | f(x_i) - f(x_{i-1}) |$$

sayısına, f fonksiyonunun [a,b] aralığında tam varyasyonu denir ve $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$ şeklinde gösterilir. Mesela, [a,b] aralığında monoton olan f(x) fonksiyonunun sınırlı varyasyonu vardır. Ama

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu [0,1] aralığında sınırlı varyasyonlu fonksiyon değildir.

Bu fonksiyonun [0,1] aralığında sınırlı varyasyonlu fonksiyon olmadığını göstermek için, [0,1] aralığının

$$x_0 = 1,\ x_1 = \frac{2}{\pi},\ x_2 = \frac{2}{2\pi},\ x_3 = \frac{2}{3\pi},\ \dots,\ x_{2n-1} = \frac{2}{(2n-1)\pi},\ x_{2n} = 0$$

noktaları ile parçalanışını ele alalım. Burada sıralamanın sağdan sola doğru yapılmasının hiçbir sakıncası yoktur.

$$f(x_{2k}) = \frac{2}{2k\pi}\sin\frac{2k\pi}{2} = 0$$

ve

$$f(x_{2k+1}) = \frac{2}{(2k+1)\pi}\sin\frac{(2k+1)\pi}{2} = \pm\frac{2}{(2k+1)\pi}$$

eşitliklerini dikkate alalım. Buna göre,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2n} |\, f(x_i) - f(x_{i-1}) \,| &= |\, f(x_1) - f(x_0) \,| + |\, f(x_2) - f(x_1) \,| + \dots + |\, f(x_{2n}) - f(x_{2n-1}) \,| \\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi} + \frac{2}{3\pi} + \dots + \frac{2}{(2n-1)\pi} \\ &= \frac{4}{\pi}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}\right)\end{aligned}$$

olur. Burada $n \to \infty$ durumunda parantez içerisindeki ifade sınırsız büyüdüğünden

$$\sup_m \sum_{i=1}^{m} |\, f(x_i) - f(x_{i-1}) \,| = \infty$$

olduğu bulunur. Buna göre de ele alınan fonksiyon sınırlı varyasyonlu değildir.

Tanım 2.3.2. [a,b] aralığında f(x) ve g(x) fonksiyonlarının verildiğini farzedelim. [a,b] aralığının $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ parçalanışını alalım. Her bir $[x_{i-1}, x_i]$ aralığından ξ_i noktası seçelim ve

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot[\, g(x_i) - g(x_{i-1}) \,]$$

toplamını yapalım.

Eğer [a,b] aralığının parçalanışı sınırsız olarak arttırıldığında bu toplam parçalanış noktalarına ve seçilmiş noktalara bağlı olmadan bir limite yakınsak olursa, o zaman bu limite f(x) fonksiyonunun g(x) fonksiyonu üzere [a,b] aralığında Stieltjes integrali denir ve

$$\int_a^b f(x)\,dg(x)$$

şeklinde gösterilir.

Eğer f(x) fonksiyonu, [a,b] aralığında sürekli ise ve g(x), bu aralıkta sınırlı varyasyona sahip ise, o zaman [a,b] aralığında f(x) fonksiyonunun g(x) fonksiyonu üzere Stieltjes integrali vardır.

Stieltjes integrali f' e ve g'ye göre lineerlik özelliğine sahiptir.

Stieltjes integralinde aşağıdaki integral altında limite geçme teoremlerini verelim.

Teorem 2.3.3. Eğer [a,b] aralığında sürekli olan $\{f_n(x)\}$ dizisi, bu aralıkta f(x) fonksiyonuna düzgün yakınsak ise, o zaman [a,b] aralığında keyfi sınırlı varyasyonlu g(x) fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dg(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

tir.

Teorem 2.3.4. f(x), [a,b] aralığında sürekli bir fonksiyon ve [a,b] aralığında sınırlı varyasyonlu fonksiyonların dizisi $\{g_n(x)\}$, [a,b] aralığında g(x) fonksiyonuna yakınsak olsun. Eğer,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(g_n) \le K \quad (n = 1,2,\ldots)$$

olacak şekilde K sayısı varsa, o zaman g(x) fonksiyonu, [a,b] aralığında sınırlı varyasyonlu fonksiyondur ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dg_n(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x)$$

dir (Natanson, 1961), (Lyusternik ve Sobolev, 1982).

Sınırlı varyasyonlu fonksiyonların ve Stieltjes integralinin aşağıdaki özellikleri vardır.

1) g(t), [a,b] aralığında iki monoton artan fonksiyonun farkı şeklinde gösterilebilir.

2) g(t) fonksiyonu, her bir $[a',b'] \subset [a,b]$ alt aralığında da sınırlı varyasyonludur.

3) Eğer $a < c < b$ ise o zaman

$$\overset{c}{\underset{a}{V}}(g) + \overset{b}{\underset{c}{V}}(g) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$$

dir.

4) Eğer g(t), [a,b] aralığında sürekli olursa, o zaman $\overset{t}{\underset{a}{V}}(g)$ de bu aralıkta süreklidir.

5) g(t) fonksiyonunun [a,b] aralığında en fazla sayılabilir sayıda süreksiz noktası vardır ve süreksiz olduğu noktalar yalnız I. çeşittendir.

6) g(t) fonksiyonunun değerlerini [a,b] aralığının sonlu veya sayılabilir sayıda noktalarında değiştirsek, keyfi sürekli x(t) fonksiyonu için

$$\int_a^b x(t)\, dg(t)$$

integralinin değeri değişmez.

7) Eğer her bir sürekli x(t) fonksiyonu için

$$\int_a^b x(t)\, dg(t) = 0$$

ise, o zaman sürekli olduğu tüm iç noktalarında $g(t) = g(a)$ dır.

Bazı durumlarda sınırlı varyasyonlu fonksiyonlara, sınırlı değişen fonksiyonlar denir. $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$' e ise f(x) fonksiyonunun [a,b] aralığında tam değişmesi denir.

BÖLÜM III

SAYISAL DEĞİŞKENLERE BAĞLI ABSTRAKT FONKSİYONLAR

3.1. Limit ve Süreklilik

Tanım 3.1.1. Λ, herhangi bir sayısal küme (mesela, kompleks sayılardan oluşmuş) ve X herhangi bir normlu Banach uzayı olsun. $X(\lambda) : \Lambda \to X$ fonksiyonuna sayısal değişkenli abstrakt fonksiyon denir.

Sayısal değişkenli abstrakt fonksiyonlar için matematik analizde verilen bir çok tanımlar uygun şekilde verilebilir. Bunlardan bazılarını verelim.

Tanım 3.1.2. $X(\lambda)$ abstrakt fonksiyonu, $\lambda_0 \in \Lambda$ noktasının bir komşuluğunda tanımlansın (λ_0 noktasının kendisinde tanımlanmayabilir) ve $a \in X$ olsun. Eğer,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \| X(\lambda) - a \| = 0$$

ise, o zaman a elemanına, $X(\lambda)$' nın λ_0 noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} X(\lambda) = a$$

veya

$$X(\lambda) \to a \quad ,(\lambda \to \lambda_0)$$

şeklinde yazılır.

Bu limitin bazı özelliklerini verelim.

Özellik 3.1.3. $Q(\lambda)$ adi skaler fonksiyon, $X(\lambda)$ ve $Y(\lambda)$ ise abstrakt fonksiyonlar olsun ve

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} Q(\lambda) = \alpha \ , \quad \lim_{\lambda \to \lambda_0} X(\lambda) = a \quad , \quad \lim_{\lambda \to \lambda_0} Y(\lambda) = b$$

olsun. O zaman,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_o} (Q(\lambda) \cdot X(\lambda)) = \alpha \cdot a$$

ve

$$\lim_{\lambda \to \lambda_o} (X(\lambda) + Y(\lambda)) = a + b$$

olur.

İspat.

$$\| \varphi(\lambda) \cdot X(\lambda) - \alpha \cdot a \| = \| \varphi(\lambda) \cdot X(\lambda) - \alpha \cdot a + \varphi(\lambda) \cdot a - \varphi(\lambda) \cdot a \|$$

$$= \| \varphi(\lambda) \cdot (X(\lambda) - a) + a \cdot (\varphi(\lambda) - \alpha) \|$$

$$\leq \| \varphi(\lambda) \| \cdot \| X(\lambda) - a \| + \| a \| \cdot \| \varphi(\lambda) - \alpha \|$$

Buradan $\lambda \to \lambda_o$ için limit alınırsa,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_o} \|\varphi(\lambda) \cdot X(\lambda) - \alpha \cdot a\| = 0$$

bulunur. Bu da

$$\lim_{\lambda \to \lambda_o} (Q(\lambda) \cdot X(\lambda)) = \alpha \cdot a$$

olması demektir.

Şimdi de diğer eşitliği gösterelim.

$$\| X(\lambda) + Y(\lambda) - (a+b) \| = \| (X(\lambda) - a) + (Y(\lambda) - b) \|$$

$$\leq \| X(\lambda) - a \| + \| Y(\lambda) - b \|$$

den $\lambda \to \lambda_o$ için limit alınırsa,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_o} \| X(\lambda) + Y(\lambda) - (a + b) \| = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}(X(\lambda)+Y(\lambda)) = a+b$$

bulunur.

Özellik 3.1.4. $\lambda\to\lambda_0$ için, $X(\lambda)\to a$ ise, o zaman $\| X(\lambda) \|\to\| a \|$ olur.

İspat.

$$|\, \| X(\lambda) \| - \| a \| \,| \le \| X(\lambda) - a \|$$

eşitsizliğinin her iki yanından $\lambda\to\lambda_0$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} |\, \| X(\lambda) \| - \| a \| \,| = 0$$

bulunur ki, bu da istenilendir.

Tanım 3.1.5. $X(\lambda)$, λ_0 noktasının herhangi bir komşuluğunda tanımlansın. Eğer,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \| X(\lambda) - X(\lambda_0) \| = 0$$

ise, $X(\lambda)$ abstrakt fonksiyonuna λ_0 noktasında süreklidir denir.

$X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ ve skaler $Q(\lambda)$ fonksiyonları $\lambda = \lambda_0$ noktasında sürekli fonksiyonlar olduğunda, $X(\lambda) + Y(\lambda)$ abstrakt fonksiyonu ve $Q(\lambda)\cdot X(\lambda)$ fonksiyonu da $\lambda = \lambda_0$ noktasında süreklidir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \| X(\lambda) + Y(\lambda) - (X(\lambda_0) + Y(\lambda_0)) \| &= \| (X(\lambda) - X(\lambda_0)) + (Y(\lambda) - Y(\lambda_0)) \| \\ &\le \| X(\lambda) - X(\lambda_0)\| + \|Y(\lambda) - Y(\lambda_0) \| \end{aligned}$$

eşitsizliğinden $\lambda\to\lambda_0$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0} \| X(\lambda) + Y(\lambda) - (X(\lambda_0) + Y(\lambda_0)) \| = 0$$

elde edilir. Bu $X(\lambda) + Y(\lambda)$ abstrakt fonksiyonunun $\lambda = \lambda_0$ noktasında sürekli olduğunu gösterir.

Diğer taraftan,

$$\| \varphi(\lambda)\cdot X(\lambda) - \varphi(\lambda_0)\cdot X(\lambda_0) \| = \| \varphi(\lambda)\cdot X(\lambda) - \varphi(\lambda_0)\cdot X(\lambda_0) + \varphi(\lambda_0)\cdot X(\lambda) - \varphi(\lambda_0)\cdot X(\lambda) \|$$

$$= \| X(\lambda)\cdot(\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)) - \varphi(\lambda_0)\cdot(X(\lambda) - X(\lambda_0)) \|$$

$$\leq \| X(\lambda) \|\cdot\| \varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0) \| + \| \varphi(\lambda_0) \|\cdot\| X(\lambda) - X(\lambda_0) \|$$

eşitsizliğinde her iki yandan $\lambda \to \lambda_o$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_o} \| \varphi(\lambda)\cdot X(\lambda) - \varphi(\lambda_0)\cdot X(\lambda_0) \| = 0$$

olur. Bu ise $\varphi(\lambda)\cdot X(\lambda)$ fonksiyonunun $\lambda = \lambda_o$ noktasında sürekli olduğunu gösterir.

Şimdi, $X(\lambda)$ abstrakt fonksiyonu λ_o noktasında sürekli olduğunda, $\|X(\lambda)\|$'nın da λ_o noktasında sürekli olduğunu gösterelim.

Bunun için,

$$| \, \| X(\lambda) \| - \| X(\lambda_0) \| \, | \leq \| X(\lambda) - X(\lambda_0) \|$$

eşitsizliğinde $\lambda \to \lambda_o$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_o} | \, \| X(\lambda) \| - \| X(\lambda_0) \| \, | = 0$$

elde edilir. Bu da $\| X(\lambda) \|$' nın da λ_0 noktasında sürekli olduğunu gösterir.

Tanım 3.1.6. X ve Y iki Banach uzayı olsun. X Banach uzayında tanımlanan ve değerleri Y Banach uzayında olan tüm lineer sınırlı operatörler kümesi $L(X,Y)$ ile gösterilsin. $A(\lambda): \Lambda \to L(X,Y)$ fonksiyonuna operatör değerli abstrakt fonksiyon denir.

Tanım 3.1.7. Operatör değerli $A(\lambda)$ fonksiyonu, λ_0 noktasının herhangi bir komşuluğunda tanımlansın (λ_o noktasının kendisinde tanımlanmayabilir) ve $A \in L(X,Y)$ olsun. Eğer,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_o} \| A(\lambda) - A \| = 0$$

ise, o zaman A elemanına, $A(\lambda)$ operatör değerli fonksiyonunun λ_0 noktasındaki limiti denir ve

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} A(\lambda) = A$$

veya

$$A(\lambda) \to A, \quad (\lambda \to \lambda_0)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.8. Operatör değerli $A(\lambda)$ fonksiyonu, λ_0 noktasının herhangi bir komşuluğunda tanımlansın. Eğer,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \| A(\lambda) - A(\lambda_0) \| = 0$$

ise, $A(\lambda)$ operatör değerli fonksiyonu λ_0 noktasında süreklidir denir.

Özellik 3.1.9. $X(\lambda)$, değerleri X Banach uzayında olan vektör değerli abstrakt fonksiyon ve $A(\lambda)$, değerleri $L(X,Y)$ uzayında olan operatör değerli fonksiyon olsun. $X(\lambda) \to x$ ve $A(\lambda) \to A$ iken, $A(\lambda) \cdot X(\lambda) \to Ax$ olur ve $X(\lambda)$ ve $A(\lambda)$ fonksiyonları λ_0 noktasında sürekli fonksiyonlar iken, $A(\lambda) \cdot X(\lambda)$ fonksiyonu da λ_0 noktasında süreklidir.

İspat.

$$\begin{aligned} \| A(\lambda) \cdot X(\lambda) - Ax \| &= \| A(\lambda) \cdot X(\lambda) - Ax + A(\lambda)x - A(\lambda)x \| \\ &= \| A(\lambda) \cdot (X(\lambda) - x) - (A(\lambda) - A)x \| \\ &\le \| A(\lambda) \| \cdot \| X(\lambda) - x \| + \| A(\lambda) - A \| \cdot \|x\| \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $\lambda \to \lambda_0$ için limit alınırsa,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \| A(\lambda) \cdot X(\lambda) - Ax \| = 0$$

bulunur. Bu $A(\lambda) \cdot X(\lambda) \to Ax$ olması demektir.

Şimdi de $A(\lambda)\cdot X(\lambda)$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim.

$$\| A(\lambda)\cdot X(\lambda) - A(\lambda_0)\cdot X(\lambda_0) \| = \| A(\lambda)\cdot X(\lambda) - A(\lambda_0)\cdot X(\lambda_0) + A(\lambda_0)\cdot X(\lambda) - A(\lambda_0)\cdot X(\lambda) \|$$

$$= \| A(\lambda_0)\cdot(X(\lambda) - X(\lambda_0)) + X(\lambda)\cdot(A(\lambda) - A(\lambda_0)) \|$$

$$\leq \| A(\lambda_0)\|\cdot\| X(\lambda) - X(\lambda_0) \| + \| X(\lambda)\|\cdot\| A(\lambda) - A(\lambda_0) \|$$

eşitsizliğinde $\lambda \to \lambda_o$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} \| A(\lambda)\cdot X(\lambda) - A(\lambda_0)\cdot X(\lambda_0) \| = 0$$

elde edilir. Buradan $A(\lambda)\cdot X(\lambda)$ fonksiyonunun λ_0 noktasında sürekli olduğu görülür.

3.2. Abstrakt Fonksiyonların Diferansiyellenmesi

Tanım 3.2.1. $X(\lambda) : \Lambda \to X$ bir abstrakt fonksiyon olsun. Eğer,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} \frac{X(\lambda) - X(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} = X'(\lambda_o)$$

ise, $X(\lambda)$ abstrakt fonksiyonuna λ_o noktasında diferansiyellenebilirdir denir.

Bu limit X uzayındaki norma göre yakınsaklıktır. Yani,

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o} \| \frac{X(\lambda) - X(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} - X'(\lambda_o) \| = 0$$

dır (Trenogin, 1980).

Teorem 3.2.2. Eğer $X(\lambda)$ abstrakt fonksiyonu, λ_o noktasında diferansiyellenebilir ise, o zaman bu fonksiyon süreklidir.

İspat.

$$\| X(\lambda) - X(\lambda_o) \| = \| \frac{X(\lambda) - X(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o} (\lambda - \lambda_o) \|$$

$$= \| \frac{X(\lambda)-X(\lambda_o)}{\lambda-\lambda_o} \| \cdot |\lambda-\lambda_o|$$

da her iki tarafın $\lambda \to \lambda_0$ için limiti alınırsa,

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \| X(\lambda)-X(\lambda_o) \| = X'(\lambda_o)\cdot 0 = 0$$

olur. Buradan, $X(\lambda)$ fonksiyonunun λ_0 noktasında sürekli olduğu alınır.

Özellik 3.2.3. $X(\lambda)$ ve $Y(\lambda)$ abstrakt fonksiyonları, λ_0 noktasında diferansiyellenebilir ise, o zaman

$$(X+Y)'(\lambda)|_{\lambda=\lambda_o} = X'(\lambda_o)+Y'(\lambda_o)$$

olur.

İspat.

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o}\left(\frac{(X+Y)(\lambda)-(X+Y)(\lambda_o)}{\lambda-\lambda_o}\right) = \lim_{\lambda\to\lambda_o}\frac{X(\lambda)-X(\lambda_o)}{\lambda-\lambda_o} + \lim_{\lambda\to\lambda_o}\frac{Y(\lambda)-Y(\lambda_o)}{\lambda-\lambda_o}$$

$$= X'(\lambda_o)+Y'(\lambda_o)$$

olur. Böylece istenilen eşitliği elde etmiş oluruz.

Özellik 3.2.4. $\varphi(\lambda)$ ve $X(\lambda)$ fonksiyonları, λ_o noktasında diferansiyellenebilir ise, o zaman

$$(\varphi X)'(\lambda)|_{\lambda=\lambda_o} = \varphi'(\lambda_o)X(\lambda_o)+\varphi(\lambda_o)X'(\lambda_o)$$

olur.

İspat.

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{(\varphi X)(\lambda)-(\varphi X)(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} = \lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\varphi(\lambda)X(\lambda)-\varphi(\lambda_0)X(\lambda_0)+\varphi(\lambda_0)X(\lambda)-\varphi(\lambda_0)X(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}$$

$$= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{\varphi(\lambda_0)(X(\lambda) - X(\lambda_0))}{\lambda - \lambda_0} + \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{X(\lambda)(\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0))}{\lambda - \lambda_0}$$

$$= \varphi'(\lambda_0)\, X(\lambda_0) + X'(\lambda_0)\, \varphi(\lambda_0)$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Özellik 3.2.5. Operatör değerli $A(\lambda)$ fonksiyonu ve vektör değerli $X(\lambda)$ fonksiyonu λ_0 noktasında diferansiyellenebilir ise, o zaman

$$(A(\lambda)X(\lambda))'|_{\lambda=\lambda_0} = A'(\lambda_0)X(\lambda_0) + A(\lambda_0)X'(\lambda_0)$$

olur

İspat.

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{A(\lambda)X(\lambda) - A(\lambda_0)X(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{A(\lambda)X(\lambda) - A(\lambda_0)X(\lambda_0) + A(\lambda_0)X(\lambda) - A(\lambda_0)X(\lambda)}{\lambda - \lambda_0}$$

$$= \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{A(\lambda_0)(X(\lambda) - X(\lambda_0))}{\lambda - \lambda_0} + \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{X(\lambda)(A(\lambda) - A(\lambda_0))}{\lambda - \lambda_0}$$

$$= A'(\lambda_0)\, X(\lambda_0) + A(\lambda_0)\, X'(\lambda_0)$$

elde edilir.

3.3. Kuvvet Serileri

$X(\lambda) : \Lambda \to X$ herhangi bir abstrakt fonksiyon olsun. $x_k \in X$ ve $\lambda \in \Lambda$ için oluşturulan

$$x_0 + x_1\lambda + x_2\lambda^2 + \ldots + x_n\lambda^n + \ldots \qquad (1)$$

serisi normlu uzaylardaki serilerin özel bir halidir. Burada her bir terim bir λ parametresine bağlıdır. (1) serisine uygun kısmi toplam

$$S_n(\lambda) = x_0 + x_1\lambda + x_2\lambda^2 + \ldots + x_n\lambda^n \qquad (2)$$

şeklinde yazılır. $\{S_n(\lambda)\}$ dizisi bazı λ' lar için yakınsak, bazı λ' lar için de ıraksak olabilir. Bu dizinin yakınsak olduğu tüm λ' lar kümesini Ω ile gösterelim. Ω' ya bir kuvvet serisinin yakınsaklık bölgesi denir (Lavrent'ev ve Shabat,1965).

$$S(\lambda) = \lim_{n\to\infty} S_n(\lambda)$$

ya (1) serisinin toplamı denir ve

$$S(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\lambda^n$$

şeklinde gösterilir. Böylece $S(\lambda)$, Λ' da tanımlanmış ve değerleri X' te olan bir abstrakt fonksiyondur.
(1) serisi yerine

$$x_o + x_1(\lambda-\lambda_o) + x_2(\lambda-\lambda_o)^2 + \ldots + x_n(\lambda-\lambda_o)^n + \ldots \qquad (1')$$

serisi alınabilir.

Teorem 3.3.1. (Abel Teoremi). $\lambda = \lambda_o$,($\lambda_o \neq 0$) noktasında bir kuvvet serisi yakınsak ise o zaman bu kuvvet serisi, $|\lambda| < |\lambda_o|$ eşitsizliğini sağlayan λ' lar içinde yakınsaktır ve $|\lambda| \leq r < |\lambda_o|$ eşitsizliğini sağlayan λ' lar için kuvvet serisi mutlak yakınsaktır ve λ' lara göre düzgün yakınsaktır. Yani, $S_{|\lambda_o|}(0) \subset \Omega$' dır ve $S_r(0)$ dairesinde (1) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

İspat. $\lambda = \lambda_o$ noktasında (1) serisi yakınsak olduğundan,

$$x_o + x_1\lambda_o + x_2\lambda_o^2 + \ldots + x_n\lambda_o^n + \ldots$$

serisi yakınsaktır. Buna göre bu serinin genel terimi $\{ x_n\lambda_o^n \}$ sıfıra yakınsaktır. Her bir yakınsak dizi sınırlı olduğundan,

$$\| x_n \| \cdot |\lambda_o|^n < M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır.

$$\| x_n\lambda^n \| = \| x_n \cdot \lambda_o^n (\frac{\lambda}{\lambda_o})^n \| = \| x_n\lambda_o^n \| \cdot | \frac{\lambda}{\lambda_o} |^n \leq M (\frac{|\lambda|}{|\lambda_o|})^n$$

olduğundan $q = \frac{|\lambda|}{|\lambda_o|} < 1$ olur. Böylece,

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n + \ldots$$

kuvvet serisi, geometrik seri olduğundan mukayese kriterine göre (1) serisi yakınsaktır. $|\lambda| \leq r < |\lambda_o|$ olduğundan daha kesin olan,

$$\| x_n\lambda^n \| \leq M \frac{r^n}{|\lambda_o|^n}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu halde $q = \frac{r}{|\lambda_o|}$ olur. Buna göre Weierstrass teoreminden (Trenogin, 1980), (1) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Tanım 3.3.2. $R = \sup\limits_{\lambda \in \Omega} |\lambda|$ sayısına bir kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı denir.

R yakınsaklık yarıçapı için,

$$R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{\| x \|}} \quad \text{(Cauchy-Hadamard) ve} \quad R = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\frac{\| x_{n+1} \|}{\| x_n \|}} \quad \text{(D'alambert)}$$

formülleri doğrudur (Trenogin, 1980).

Not.

1-) $R = 0$ olduğunda seri yalnız $\lambda = 0$' da yakınsaktır.

2-) $0 < R < +\infty$ olduğunda seri $S_R(0) \subset \Omega$ bölgesinde yakınsaktır ve $S_R(0)$ dairesinin sınırında Ω' dan olan noktalarda seri yakınsak olabilirde olmayabilirde.

3-) $R = \infty$ olduğunda seri tüm Λ kümesinde yakınsaktır (Trenogin, 1980).

Lemma 3.3.3. $\forall\ n \geq N$ için $\| x_n \| \leq d^n \cdot M$ eşitsizliği sağlanacak şekilde M ve d sabitleri varsa, bu taktirde $\frac{1}{d} \leq R$ olur.

İspat. $\| x_n\lambda^n \| = \| x_n \|\cdot| \lambda |^n \le M\cdot| d\, \lambda |^n$ yazılabilir. $d\cdot|\lambda| = q < 1$ alınırsa $| \lambda | < \frac{1}{d}$ ' de kuvvet serisi yakınsaktır. Bu da $\frac{1}{d} \le R$ olması demektir.

Teorem 3.3.4. Eğer, farklı $\sum_{k=0}^{\infty} x_k\lambda^k$ ve $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{x}_k\lambda^k$ kuvvet serileri aynı $S_R(0)$ dairesinde birbirine eşit olursa o zaman $x_k = \tilde{x}_k$ dır (Trenogin, 1980). Bu özelliğe kuvvet serisinin tekliği özelliği denir.

3.4. Analitik Abstrakt Fonksiyonlar ve Taylor Serileri

Tanım 3.4.1. $X(\lambda) : \Lambda \to X$ herhangi bir abstrakt fonksiyon olsun. Eğer, bu fonksiyon $\lambda = 0$ noktasının küçük bir komşuluğunda yakınsaklık yarıçapı sıfırdan farklı olan bir kuvvet serisi şeklinde gösterilebilirse yani, $X(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\lambda^k$ şeklinde gösterilebilirse, o zaman $X(\lambda)$ fonksiyonuna analitik abstrakt fonksiyon denir.

Teorem 3.4.2. Eğer, $X(\lambda)$ abstrakt fonksiyonu $\lambda = 0$ noktasında analitik abstrakt fonksiyon ise, o zaman bu fonksiyon kendi kuvvet serisinin yakınsaklık dairesi $S_R(0)$' da sürekli fonksiyondur.

İspat. Önce keyfi $\rho \in (0,R)$ sayısı için, $\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\| x_k \|\cdot\rho^{k-1}$ serisinin yakınsak olduğu ispat edilmelidir. Bunun yakınsak olduğunu göstermek için keyfi $\tilde{\rho} \in (\rho,R)$ sayısını alalım. O zaman $\{\| x_k \|\cdot\tilde{\rho}^{\,k}\}$ sınırlıdır. Böylece $\exists$ M vardır öyle ki, $\| x_k \|\cdot\tilde{\rho}^{\,k} < M$' dir. Buradan,

$$k\cdot\| x_k \|\cdot\rho^{k-1}\, \frac{\tilde{\rho}^{\,k}}{\tilde{\rho}^{\,k}} = \frac{k}{\tilde{\rho}}\cdot\| x_k \|\cdot\tilde{\rho}^{\,k}\, \left(\frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)^{k-1}$$

$$\le \frac{M}{\tilde{\rho}}\cdot k\cdot q^{k-1}\ , \qquad \left(q = \frac{\rho}{\tilde{\rho}}\right)$$

bulunur. Böylece $\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\| x_k \|\cdot\rho^{k-1}$ serisi yakınsaktır.

$\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\| x_k \|\cdot\rho^{k-1} = C_1(\rho)$ olsun. $\forall\ \lambda,\lambda_0 \in S_R(0)$ alalım. O halde

$$X(\lambda) - X(\lambda_0) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\cdot(\lambda^k - \lambda_0^k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k\cdot(\underbrace{\lambda^{k-1} + \lambda^{k-2}\lambda_0 + \ldots + \lambda_0^{k-1}}_{k})\cdot(\lambda - \lambda_0)$$

olur. Buradan,

$$\| X(\lambda) - X(\lambda_0) \| \le \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|\cdot k\cdot\rho^{k-1}}_{C_1(\rho)}\cdot| \lambda - \lambda_0 |$$

$$= C_1(\rho)\cdot| \lambda - \lambda_0 |$$

bulunur. Bu da $X(\lambda)$' nın λ_0 noktasında sürekli olması demektir.

Sonuç 3.4.3. $\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot x_k\cdot\lambda^{k-1}$ serisi yakınsaktır.

Teorem 3.4.4. $X(\lambda)$, $\lambda = 0$ noktasında analitik abstrakt fonksiyon olduğunda kendi kuvvet serisinin yakınsaklık dairesinde λ' ya göre diferansiyellenebilen fonksiyondur ve

$$X'(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot x_k\cdot\lambda^{k-1}$$

dir.

İspat.

$$\sum_{k=2}^{\infty} k\cdot(k-1)\cdot\| x_k \|\cdot\rho^{k-2} = C_2(\rho)$$

olsun. Bu teoremi ispat etmek için

$$\frac{\mu^k - \lambda^k}{\mu - \lambda} - k\cdot\lambda^{k-1} = k\cdot(k-1)\cdot\int_0^1 (1-\theta)\cdot(\mu\theta + (1-\theta)\cdot\lambda)\, d(\mu-\lambda)\theta$$ (Trenogin,1980),

eşitliğinden faydalanalım.

$$\left\| \frac{X(\mu)-X(\lambda)}{\mu-\lambda} - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot x_k \cdot \lambda^{k-1} \right\| \leq \left\| \sum_{k=2}^{\infty} x_k \cdot \left[\frac{\mu^k - \lambda^k}{\mu-\lambda} - k \cdot \lambda^{k-1} \right] \right\|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k.(k-1) \cdot \| x_k \| \cdot \rho^{k-2}}_{C_2(\rho)} \cdot | \mu - \lambda |$$

$$\leq C_2(\rho) \cdot | \mu - \lambda |$$

elde edilir.

Böylece bu teorem ardışık olarak uygulanırsa $X(\lambda)$' nın tüm türevleri ve $\lambda=0$ noktasında analitik olan abstrakt fonksiyonun $\lambda=0$ noktasının komşuluğunda keyfi mertebeden diferansiyellenebilir olduğu bulunabilir. Aynı zamanda bu türevlerde $\lambda = \lambda_0$ alınarak kuvvet serisinin katsayıları için

$$x_k = \frac{x^k(0)}{k!}$$

Taylor formülleri bulunabilir.

3.5. Analitik Abstrakt Fonksiyonların Diğer Esas Özellikleri

λ, kompleks düzlemin bir D bölgesinden değerler alsın ve $X(\lambda)$, D bölgesinde tanımlanmış, değerleri normlu X Banach uzayında olan keyfi abstrakt fonksiyon olsun.

Teorem 3.5.1. Eğer $X(\lambda)$, D bölgesinde tanımlanmış analitik abstrakt fonksiyon ise ve f, X' te tanımlanmış keyfi sürekli lineer fonksiyonel ise, o zaman $f(X(\lambda))$, λ' nın, D bölgesinde tanımlanmış adi analitik fonksiyonu olur.

Tanım 3.5.2. γ, λ değişkeninin kompleks düzleminde verilmiş herhangi bir yönlendirilmiş düzlendirilebilen eğri ve $X(\lambda)$, γ üzerinde tanımlanmış sürekli abstrakt fonksiyon olsun. γ eğrisini, λ_0, λ_1, λ_2, ..., λ_n eğri yaylarına bölelim ve her bir eğri yayında keyfi $\xi_k \in \gamma_k$ noktası alalım ve

$$\sum_{k=1}^{n} X(\xi_k)\cdot[\lambda_k - \lambda_{k-1}]\,, \qquad \Delta = \max_{k} |\lambda_k - \lambda_{k-1}|$$

toplamı yapalım. Eğer,

$$\lim_{\Delta \to 0} \sum_{k=1}^{n} X(\xi_k)\cdot[\lambda_k - \lambda_{k-1}] = \int_{\gamma} X(\lambda)\, d\lambda$$

varsa, buna abstrakt fonksiyonun eğri boyunca integrali denir.

İntegralin tanımından ve X Banach uzayında tanımlanmış keyfi sürekli fonksiyonelin lineerlik özelliğinden

$$f\,[\int_{\gamma} X(\lambda)\, d\lambda\,] = \int_{\gamma} f\,(X(\lambda))\, d\lambda$$

elde edilir (Habibzade,1978).

Teorem 3.5.3. (Cauchy İntegral Teoremi). Basit düzlendirilebilen γ eğrisi ile sınırlandırılmış kapalı D bölgesinde tanımlanmış $X(\lambda)$ abstrakt fonksiyonu bu bölgede diferansiyellenebilir ise o zaman bu fonksiyonun γ eğrisi boyunca integrali sıfıra eşittir. Yani,

$$\int_{\gamma} X(\lambda)\, d\lambda = 0$$

dır.

İspat. $\int_{\gamma} X(\lambda)\, d\lambda = y$

olsun. Bu eşitliğin her yanından X' te tanımlanmış keyfi lineer f fonksiyoneli ile etki yapalım. O zaman

$$\int_{\gamma} f\,(X(\lambda))\, d\lambda = f\,(y)$$

olur. Buradan f (y) = 0 dır (Lavrent'ev ve Shabat, 1965). Hahn-Banach teoremine y = 0 bulunur (Şuhubi, 2001).

Teorem 3.5.4 (Cauchy İntegral Formülü). Eğer X(λ) abstrakt fonksiyonu, düzlendirilebilen bir γ eğrisi ile sınırlandırılmış kapalı D bölgesinde diferansiyellenebilir ise, o zaman bu bölgenin her bir iç noktasında X(λ) fonksiyonunun değeri;

$$X(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{X(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi \qquad (1)$$

formülü ile gösterilir.

İspat. Söz konusu γ eğrisinin içerisinde a merkezli, R yarıçaplı bir çemberi γ_1 ile gösterelim. Bu durumda $\frac{X(\xi)}{\xi-\lambda}$ fonksiyonu, γ ile γ_1' in belirttiği halkada tek değerli ve analitiktir. O halde buna göre Cauchy teoreminden (Halilov,1949),

$$\int_{\gamma}\frac{X(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi=\int_{\gamma_1}\frac{X(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi \qquad (2)$$

dır. Diğer taraftan, hipotezimiz gereğince X fonksiyonu analitik olduğundan süreklidir. Dolayısıyla ε > 0 verildiğinde R' yi öyle seçebiliriz ki, $\forall\xi\in\gamma_1$ için,

$$\| X(\xi)-X(\lambda)\| < \varepsilon$$

olur. Ayrıca

$$\xi=\lambda+R\cdot e^{i\theta} \quad , \quad d\xi=i\cdot R\cdot e^{i\theta}\, d\theta \quad , \quad (0\le\theta\le 2\pi)$$

olmak üzere

$$\int_{\gamma_1}\frac{d\xi}{\xi-\lambda}=\int_0^{2\pi}\frac{i\cdot R\cdot e^{i\theta}}{R\cdot e^{i\theta}}d\theta=2\pi i$$

bulunur. Buradan,

$$\int_{\gamma_1}\frac{X(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi=\int_{\gamma_1}\frac{(X(\xi)-X(\lambda)+X(\lambda))}{\xi-\lambda}d\xi$$

$$=\int_{\gamma_1}\frac{X(\xi)-X(\lambda)}{\xi-\lambda}d\xi+X(\lambda)\int_{\gamma_1}\frac{d\xi}{\xi-\lambda}$$

$$= \int_{\gamma_1} \frac{X(\xi) - X(\lambda)}{\xi - \lambda} d\xi + X(\lambda) \cdot 2\pi i$$

elde edilir ve buradan da,

$$\| \int_{\gamma_1} \frac{X(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi - X(\lambda) \cdot 2\pi i \| = \| \int_{\gamma_1} \frac{X(\xi) - X(\lambda)}{\xi - \lambda} d\xi \|$$

$$\leq \int_{\gamma_1} \frac{\| X(\xi) - X(\lambda) \|}{| \xi - \lambda |} \, | d\xi |$$

$$< \frac{\varepsilon}{R} \cdot R \cdot \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi\varepsilon$$

elde edilir. Yani,

$$\| \int_{\gamma_1} \frac{X(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi - X(\lambda) \cdot 2\pi i \| \leq 2\pi\varepsilon$$

olur. Bu son eşitsizliğin sol tarafı ε' a bağlı olmadığından yani, bu eşitsizlik $\forall \varepsilon > 0$ için sağlanacağından,

$$\int_{\gamma_1} \frac{X(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi = 2\pi i \cdot X(\lambda)$$

olur. Buradan,

$$X(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{X(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi$$

bulunur. (2)' den dolayı

$$X(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{X(\xi)}{\xi - \lambda} d\xi$$

elde edilir.

Teorem 3.5.5. $X(\lambda)$ fonksiyonu, λ değişkeninin kompleks düzleminin bir bağlantılı D bölgesinde tanımlanmış, değerleri X Banach uzayında olan ve sabit vektöre eşit olmayan, λ' nın diferansiyellenebilir abstrakt fonksiyonu olduğunda bu fonksiyonun $\| X(\lambda) \|$ normu maksimumunu D bölgesinin iç noktasında alamaz.

İspat. D bölgesinde öyle bir λ_o noktası alalım ki, bu noktada $X(\lambda)$ vektörünün normu maksimum değerini alsın yani,

$$\| X(\lambda_o) \| = \max_{\lambda \in D} \| X(\lambda) \|$$

olsun. Merkezi λ_o noktasında olan ve yarıçapı R olan $S_R(\lambda_o)$ dairesini ele alalım. $S_R(\lambda_o)$ bölgesinde Cauchy formülüne göre,

$$X(\lambda_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{X(\xi)}{\xi - \lambda_0} d\xi$$

eşitliği yazılabilir. Burada γ, $S_R(\lambda_o)$ dairesinin sınırıdır.

$$\xi - \lambda_o = R \cdot e^{i\varphi} \ , \ (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

ve

$$d\xi = i \cdot R \cdot e^{i\varphi} \, d\varphi$$

değerleri yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$X(\lambda_o) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(\lambda_o + R \cdot e^{i\varphi})d\varphi$$

olur. Buradan her iki tarafın normu alınırsa,

$$\| X(\lambda_o) \| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| X(\lambda_o + R \cdot e^{i\varphi}) \| \, d\varphi$$

elde edilir.

$$\| X(\lambda_o) \| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \| X(\lambda_o) \| \, d\varphi$$

eşitliğinden bir önceki eşitsizlik çıkarılırsa,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\| X(\lambda_o) - X(\lambda_o + R \cdot e^{i\varphi}) \|) \, d\varphi \le 0$$

bulunur. Buradan,

$$\| X(\lambda_o) \| - \| X(\lambda_o + R \cdot e^{i\varphi}) \| \le 0$$

elde edilir. $\| X(\lambda_o) \|$' ın tanımından,

$$\| X(\lambda_o + R \cdot e^{i\varphi}) \| \le \| X(\lambda_o) \|$$

olur. Bu ikisinden,

$$\| X(\lambda_o) \| = \| X(\lambda_o + R \cdot e^{i\varphi}) \|$$

bulunur (Habibzade,1978). Buradan vektörün sabit bir vektör olduğu sonucu çıkar. Bu ise bir çelişkidir. Bu çelişkiden dolayı abstrakt fonksiyonun normu maksimumunu iç noktada alamaz.

Operatör değerli fonksiyonlar içinde Cauchy integral formülü verilebilir. Gerçektende. λ kompleks sayı ve $I \in L(X)$ birim operatör olmak üzere ($\lambda I - A$) operatörünü ele alalım. Burada A sınırlı operatördür yani, $\| A \| < \infty$ dur. ($\lambda I - A$) operatörü için,

$$\lambda I - A = \lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} A \right)$$

yazılabilir. Buradan, $\| \frac{1}{\lambda} A \| < 1$ eşitsizliği sağlandığında ters operatörler hakkındaki teoreme göre

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} = \frac{I}{\lambda} + \frac{A}{\lambda^2} + \ldots + \frac{A^k}{\lambda^{k+1}} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}} \quad , \ \| A \| < | \lambda |$$

yazılır. Buna rezolventin Neumann serisi denir. Bu seri λ ya göre Laurent serisidir. Burada

$$I = C_{-1},\ A = C_{-2},\ \ldots,\ A^n = C_{-n-1}$$

dir. Laurent serisinde C_{-1}, $R(\lambda,A)$ nın kalıntısı olduğunda

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=R} (\lambda I - A)^{-1}\, d\lambda, \quad \| A \| < R$$

yazılır ve sırasıyla

$$A = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=R} \lambda\, R(\lambda,A)\, d\lambda$$

....

$$A^k = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=R} \lambda^k R(\lambda,A)\, d\lambda$$

....

bulunur. Bunları sırasıyla $1, t, \ldots, \frac{t^k}{k!}, \ldots$ ile çarparsak

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=R} e^{\lambda t} R(\lambda,A)\, d\lambda, \quad |\lambda| < R$$

olur. Buradan da

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=R} f(\lambda)\, R(\lambda,A)\, d\lambda$$

elde edilir. Burada $f(\lambda)$, $K: |\lambda| \leq R$ halkasında analitiktir.

BÖLÜM IV

ABSTRAKT FONKSİYONLARIN İNTEGRALLENMESİ, BOCHNER İNTEGRALİ

X ve Y verilmiş kümeler ve $E \subset X$ herhangi bir küme olsun. $f: E \rightarrow Y$ dönüşümünün E kümesi üzere integrali,

$$\int_E f\,dx$$

çeşitli yöntemlerle tanımlanır.

Değerleri Banach uzayında olan f(x) dönüşümleri için Bochner integrali aşağıdaki gibi tanımlanır. Bu integral reel değişkenli ve reel değerli reel fonksiyonlar için Lebesque integralinin abstrakt vektör değerli fonksiyonlar için doğal olarak genişlemesidir.

4.1. Ölçülebilir Abstrakt Fonksiyonlar

Tanım 4.1.1. X herhangi bir küme ve Y Banach uzayı olsun. $E \subset X$ kümesini ele alalım. $f: E \rightarrow Y$ dönüşümüne abstrakt vektör fonksiyon denir.

X ve Y uzayları, Banach uzayları olursa, L(X,Y) lineer sınırlı operatörler uzayıdır. Bu halde, eğer Y = L(X,Y) olursa,f dönüşümüne abstrakt operatör fonksiyon denir.

X' te **A** σ-cebiri ve **A** μ-ölçüsü tanımlansın. Burada $\mu(X) < \infty$ olmayabilir.
$\mu(X) = \infty$ olduğunda, $\exists\ \{M_n\} \subset$ **A** kümeler dizisi var ki, $\forall n$ için $\mu(M_n) < +\infty$ olduğunu ve $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ olduğunu kabul edeceğiz.

(X,**A**,μ) üçlüsüne ölçü uzayı denir. Çoğu zaman (X,**A**,μ) ölçü uzayı kısaca X ile gösterilir. $E \in$ **A** olduğunda, E kümesine, ölçülebilir küme denir.

Ölçü uzayına örnek olarak sayısal **R** eksenini gösterebiliriz. Burada **A** σ-cebiri olarak, Lebesque anlamda ölçülebilen, sonlu ve sonsuz ölçülü kümelerin oluşturduğu küme gösterilebilir. M_n kümeleri olarak [-n,n] aralıkları alınabilir.

Tanım 4.1.2. $E \subset X$ kümesinde tanımlanmış (vektör veya operatör) abstrakt $f: E \to Y$ fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} c_i & , x \in E_i \quad (i = 1,2,\ldots,n) \\ 0 & , x \in E \setminus \bigcup_{i=1}^{n} E_i \end{cases} \tag{1}$$

eşitlikleriyle tanımlanırsa, bu fonksiyona E' de merdiven şekilli veya basit fonksiyon denir. Burada E_i' ler, $E_i \cap E_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ koşulunu sağlayan sonlu ölçülü keyfi kümelerdir.

Tanım 4.1.3. Ölçülebilir E kümesinde tanımlanmış f(x) abstrakt fonksiyonu için E' de merdiven şekilli fonksiyonların öyle $\{ f_n(x) \}$dizisi var ki, hemen hemen tüm $x \in E$ için,

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n(x) - f(x) \| = 0$$

koşulu sağlanırsa yani, hemen hemen tüm $x \in E$ için, $f_n(x) \to f(x)$ olursa, o zaman f(x) fonksiyonuna, E kümesinde güçlü ölçülebilirdir denir.

$\forall x \in E$ için doğru olan

$$\left| \| f_n(x) \| - \| f(x) \| \right| \leq \| f_n(x) - f(x) \|$$

eşitsizliğinden güçlü ölçülebilir f(x) fonksiyonunun $\| f(x) \|$ normunun da ölçülebilir olduğu alınır. Bu halde $\| f(x) \|$ fonksiyonu, ölçülebilir $\{ \| f_n(x) \| \}$ fonksiyonlarının yakınsak limiti olur.

4.2. Bochner İntegrali

Tanım 4.2.1. f(x), E kümesinde tanımlanmış merdiven şekilli fonksiyon olsun. Bu halde,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu(E_i)$$

toplamına (1) eşitliği ile verilen merdiven şekilli f(x) fonksiyonunun E kümesi üzere Bochner integrali denir ve

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu(E_i) \tag{2}$$

veya

$$\int_E f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i \cdot \mu(E_i) \tag{2'}$$

şeklinde gösterilir.

E' de merdiven şekilli f ve g fonksiyonlarının $\alpha f(x) + \beta g(x)$ lineer kombinasyonu için,

$$\int_E [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]\, dx = \alpha \int_E f(x)\, dx + \beta \int_E g(x)\, dx$$

eşitliği sağlanır.

E' de merdiven şekilli keyfi f(x) fonksiyonu için,

$$\left\| \int_E f(x)\, dx \right\| \le \int_E \| f(x) \|\, dx$$

olur.

Şimdi f(x) fonksiyonu, E' de güçlü ölçülebilir keyfi fonksiyon olsun. $\{f_n(x)\}$dizisi ise E' de f(x) fonksiyonuna hemen hemen her ycrde yakınsak olan merdiven şekilli fonksiyonlar dizisidir. O zaman,

$$\| f_n(x) - f(x) \|$$

ölçülebilir fonksiyondur ve

$$\int_E \| f_n(x) - f(x) \|\, dx$$

integralinin sonlu veya sonsuz anlamı vardır.

$n \to \infty$ koşulunda,

$$\int_E \| f_n(x) - f(x) \|\, dx \to 0$$

olduğunu kabul edelim. O zaman,

$$\{ \int_E f_i(x)\, dx \}$$

dizisi Y uzayının normundaki yakınsaklığa göre fundamentaldır. Gerçekten de, n,m $\to \infty$ iken,

$$\| \int_E f_n(x)\, dx - \int_E f_m(x)\, dx \| = \| \int_E [f_n(x) - f_m(x)]\, dx \|$$

$$\leq \int_E \| f_n(x) - f_m(x) \|\, dx$$

$$\leq \int_E \| f_n(x) - f(x) \|\, dx + \int_E \| f(x) - f_m(x) \|\, dx \to 0$$

olur.

Y uzayı tam olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, dx$$

limiti vardır.

Tanım 4.2.2. Eğer f(x) abstrakt fonksiyonu, E kümesinde güçlü ölçülebilirse ve basit fonksiyonların E' de hemen hemen her yerde f(x) fonksiyonuna yakınsak olan $\{f_n(x)\}$ dizisi için,

$$\int_E \| f_n(x) - f(x) \|\, dx \to 0 \qquad (3)$$

limiti doğru olursa, o zaman f(x) abstrakt fonksiyonuna E kümesinde Bochner anlamında integrallenebilirdir denir.

Bu halde üstte yakınsaklığını gösterdiğimiz,

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\, dx \qquad (4)$$

limitine f(x) fonksiyonunun E kümesi üzere Bochner integrali denir ve

$$\int_E f(x)\,dx$$

veya

$$\int_E f(x)\,d\mu$$

şeklinde gösterilir.

Bochner integralinin tek değerli olduğunu yani, (4) limitinin (3) koşulunu sağlayan basit approxime edici fonksiyonlar dizisinin seçilişine bağlı olmadığını gösterelim.

$\{f_n(x)\}$ ve $\{\tilde{f}_n(x)\}$ dizilerinin, (3) koşulunu sağlayan basit fonksiyon dizileri olduğunu kabul edelim.

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx$$

ve

$$\tilde{\ell} = \lim_{n\to\infty} \int_E \tilde{f}_n(x)\,dx$$

olsun. Bu durumda,

$$f_1(x),\ \tilde{f}_1(x),\ f_2(x),\ \tilde{f}_2(x),\dots,\ f_n(x),\ \tilde{f}_n(x),\dots$$

dizisi de (3) koşulunu sağlar. Buna göre de,

$$\int_E f_1(x)\,dx,\ \int_E \tilde{f}_1(x)\,dx,\ \int_E f_2(x)\,dx,\ \int_E \tilde{f}_2(x)\,dx,\ \dots,\ \int_E f_n(x)\,dx,\ \int_E \tilde{f}_n(x)\,dx,\ \dots$$

dizisi bir ℓ_0 limitine yakınsaktır. Bu halde $\ell = \tilde{\ell} = \ell_0$ olur. Böylece Bochner integralinin bir değerli tanımlandığı ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.3. f(x) fonksiyonunun E' de Bochner anlamda integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart f(x) fonksiyonunun E' de güçlü ölçülebilir olması ve

$$\int_E \| f(x) \| \, dx < +\infty$$

olmasıdır.

İspat. f(x) fonksiyonu E' de Bochner anlamda integrallebilir olsun. O zaman Bochner integralinin tanımından f(x) fonksiyonu, E' de güçlü ölçülebilirdir. $f_n(x)$, keyfi approxime edici diziden bir keyfi basit fonksiyon olsun. O halde,

$$\int_E \| f(x) \| \, dx \leq \int_E \| f(x) - f_n(x) \| \, dx + \int_E \| f_n(x) \| \, dx$$

yazılabilir.

$$\int_E \| f(x) - f_n(x) \| \, dx \to 0$$

olduğundan bu sınırlıdır ve

$$\int_E \| f_n(x) \| \, dx < \infty$$

olup, buna göre de

$$\int_E \| f(x) \| \, dx < +\infty$$

dur.

Tersine f(x) fonksiyonu, E' de güçlü ölçülebilir olsun. { $f_n(x)$} dizisi E' de hemen hemen her yerde

$$\| f_n(x) - f(x) \| \to 0$$

şartını sağlayan merdiven şekilli fonksiyonların keyfi bir dizisidir. Burada daima

$$\| f_n(x) \| \leq \| f_n(x) - f(x) \| + \| f(x) \|$$

yazılabildiğinden,

$$\| f_n(x) \| \leq \| f(x) \| + 1$$

yazılabilir. Böylece,

$$\| f_n(x) - f(x) \| \leq 2 \| f(x) \| + 1$$

dir. Lebesque teoremine esasen,

$$\int_E \| f(x) - f_n(x) \| \, dx \to 0 , \qquad (n \to \infty)$$

dır. Bu ise f(x) fonksiyonunun, Bochner anlamda integrallenebilmesi demektir.

4.3. Bochner İntegralinin Uygulanmasıyla Banach Uzayında Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Banach uzayında verilmiş

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \ , \ x(0) = x_0 \tag{1}$$

diferansiyel denklemini ele alalım (Daletskiy ve Kreyn, 1970). Burada x ve f(t,x) vektörleri X Banach uzayının elemanlarıdır ve $t \in [0,T]$ dir. f(t,x) abstrakt fonksiyonu t değişkenine göre sürekli ise ve x değişkenine bağlı fonksiyon ise,

$$\| f(t,x_1) - f(t,x_2) \| \leq L \cdot \| x_1 - x_2 \| \ , \ \forall t \in [0,T] \tag{2}$$

Lipschitz koşulunun sağlandığını varsayalım. Burada L sabit sayıdır. Bazen bu sayıya Lipschitz sabiti de denir.

[a,b] aralığında tanımlanmış, değerleri $x(t) \in X$ olan tüm sürekli fonksiyonlar kümesini $C^X_{[a,b]}$ ile gösterelim. Lineer $C^X_{[a,b]}$ uzayında elemanın normunu

$$\| x \|_C = \max_{a \leq t \leq b} \| x(t) \| \tag{3}$$

gibi tanımlayalım.

X ve $C^X_{[a,b]}$ uzayları tam uzaylardır. X = **R** olduğunda $C^R_{[a,b]} = C_{[a,b]}$ olur. $C^X_{[a,b]}$ uzayının tam olması, $C_{[a,b]}$ uzayının tam olmasının ispatı gibidir.

Diferansiyel denklemler teorisinde olduğu gibi

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = f(t,x), \\ &x(0) = x_0 \end{aligned}\right\}$$

problemine Cauchy Problemi veya başlangıç değer problemi denir.

Adi türevli diferansiyel denklemlerde, bu denklemin çözümünün varlığını ispatlamak için, bu problem onunla eşdeğer olan integral denkleme getirilir ve alınmış integral denklemin Lipschitz koşulu sağlandığında sıkan operatörlü bir operatör denklem olduğu gösterilir ve bu integral denklemin ve uygun diferansiyel denklemin çözümü, alınmış bu integral operatörün sabit noktası olduğu iterasyon yöntemi ile ispatlanır. Çözüm ise iterasyon yöntemiyle verilir.

Benzer olarak (1) Cauchy problemini aşağıdaki eşdeğer integral denklem şeklinde yazalım:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau,x(\tau))\, d\tau \ , \quad 0 \le t \le T \tag{4}$$

(4) denklemini çözmek için bu denklemi $0 \le t \le \delta \le T$ aralığında ele alalım. Böylece,

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau,x(\tau))\, d\tau \ , \quad 0 \le t \le \delta \le T \tag{4'}$$

olur. Bu denklemin sağ tarafı, $C^X_{[t_0,t_0+\delta]}$ uzayında alınmış $x = x(t)$ elemanını yine $C^X_{[t_0,t_0+\delta]}$ uzayında başka bir elemana dönüştüren bir $A_t(x)$ operatörüdür. Bu operatör için,

$$\| A_t[x(t)] - A_t[y(t)] \| = \| \int_0^t \{ f(\tau,x(\tau)) - f(\tau,y(\tau)) \} d\tau \|$$

$$\le \int_0^\delta \| f(\tau,x(\tau)) - f(\tau,y(\tau)) \| d\tau$$

değerlendirmesini yapalım. Sonuncu eşitsizlikte (2) şartı dikkate alınırsa,

$$\| A_t(x) - A_t(y) \| \le L \cdot \int_0^{\delta} \| x(\tau) - y(\tau) \| \, d\tau$$

$$\le L \cdot \delta \max_{0 \le t \le T} \| x(t) - y(t) \|$$

$$= L \cdot \delta \cdot \| x - y \| \qquad (5)$$

olur. (5) eşitsizliğinden görüyoruz ki, $L \cdot \delta < 1$ olduğunda A_t operatörü $C^{X}_{[0,\delta]}$ uzayını kendisine sıkan bir operatördür. Buna göre sıkan operatörlerin sabit nokta hakkındaki teoremine göre (Daletskiy ve Kreyn, 1970), (4′) denkleminin çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

(4′) denklemi, $0 \le t \le \delta$ aralığında (1) Cauchy problemine eşdeğer olduğundan, (1) probleminin $[0,\delta]$ aralığında çözümü vardır ve tektir. Özel halde,

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x)$$

denkleminin $x(\delta) = x_0^{\delta}$ başlangıç değer şartlarını sağlayan probleminin $[\delta,\delta+\delta] = [\delta,2\delta]$ aralığında çözümünün varlığı ve tekliği açıktır. Böylece, bu yöntemle ele alınan (1) denkleminin çözümünü, tüm $[0,T]$ aralığına genişletebiliriz.

Dikkat edelim ki, burada kullanılan integral Bochner integralidir. Özel halde X uzayı n-boyutlu lineer uzay olduğunda biz n adi türevli diferansiyel denklemler sisteminin çözümünün varlığı ve tekliği problemine geliriz. Bu halde ise, $f(t,x(t))$ fonksiyonunun özelliğine bağlı olarak integral adi Riemann veya Lebesque integralleri olarak alınır.

Örnek 4.3.1. Banach uzayında verilmiş $\dot{x} = A(t)x + y(t)$, $t \ge 0$, $x(0) = x_0$ lineer diferansiyel denkleminin $\max_{0 \le t \le T} \| A(t) \| < +\infty$ olduğunda çözümü var ve tektir [$x(t), y(t) \in X$, $A(t) \in L(X)$, $[0,\infty)$].

Çözüm. $x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau,x(\tau)) \, d\tau$

eşitliğinin sağ tarafına, L(X) uzayını kendi içine dönüştüren bir operatör gibi bakalım.

$$Ax(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau,x(\tau))\, d\tau \,.$$

Bu operatör için,

$$\| A[x(t)] - A[y(t)] \| = \| \int_0^t \{ f(\tau,x(\tau)) - f(\tau,y(\tau)) \} d\tau \|$$

$$\leq \int_0^\delta \| f(\tau,x(\tau)) - f(\tau,y(\tau)) \| d\tau$$

$$\leq L\cdot \int_0^\delta \| x(\tau) - y(\tau) \| \, d\tau$$

$$\leq L\cdot\delta \max_{0\leq t\leq T} \| x(t) - y(t) \|$$

$$= L\cdot\delta\cdot \| x - y \|$$

olur. Buradan, $L\cdot\delta < 1$ olduğunda, A operatörünün L(X) uzayını kendisine sıkan bir operatör olduğu görülür. Buna göre de, denklemin çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

4.4. Banach Uzayında Diferansiyel Denklemlerin Varyasyonlarla Denklemi

X Banach uzayında verilmiş,

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad 0 \leq t < \infty \tag{1}$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Burada f(t,x) fonksiyonu, $x \in B \subseteq X$ alt kümesinde tanımlanmış ve değerleri X Banach uzayında olan fonksiyondur ve $t \in [0,\infty)$ dır (Lyusternik ve Sobolev, 1982) .

(1) denkleminde f(t,x) fonksiyonu x değişkenine göre $x = \varphi(t)$ noktası komşuluğunda diferansiyellenebilir olduğunda bu denklemi araştırmak için daha uyumlu hale getirilebilir. Gerçekten de, bu halde $\Delta x = x(t) - \varphi(t)$ alınarak, $\Delta x(t)$ fonksiyonu için,

$$\frac{d\Delta x}{dt} = f(t,\Delta x + \varphi(t)) - f(t,\varphi(t)) = A(t)\Delta x + F(t,\Delta x)$$

denklemi yazılabilir. Burada

$$A(t) = f_x'(t,\varphi(t))$$

ve

$$\| F(t,\Delta x) \| \leq c_t(\Delta x)\cdot\| \Delta x \|$$

dir öyle ki,

$$\lim_{\Delta x \to 0} c_t(\Delta x) = 0$$

dır.

Böylece (1) denklemi,

$$\frac{d\Delta x}{dt} = A(t)\Delta x + F(t,\Delta x) \tag{2}$$

şeklinde yazılabilir. Böyle denkleme,

$$\| F(t,\Delta x) \| \leq c(\Delta x)\cdot\| \Delta x \| \ , \ \lim_{\Delta x \to 0} c(\Delta x) = 0$$

şartı sağlandığında bazen kuazilineer denklem denir.

$x(t) = \varphi(t)$ fonksiyonu (1) denkleminin çözümü olduğunda lineer

$$\frac{d\Delta x}{dt} = A(t)\,\Delta x \quad , \ (A(t) = f_x'(t,\varphi(t))) \tag{3}$$

denklemine, (1) denkleminin $x = \varphi(t)$ çözümüne göre varyasyonlarda denklemi denir. Varyasyonlarla denklemin (1) denkleminin incelenmesinde çok önemli yeri vardır.

Önemli özel hallerden biri olan

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{4}$$

autonom denklemini ele alalım. Autonom denklem halinde denklemin sağ tarafı açık olarak t değişkenine bağlı değildir. $x = \varphi(t)$, (4) Autonom denkleminin çözümü ise keyfi $x = \varphi(t - t_0)$ öteleme fonksiyonunun da onun çözümü olduğu dikkate alınmalıdır.

Şimdi x_0 noktasının $f(x)$ fonksiyonunun kritik noktası olduğunu, yani

$$f(x_0) = 0$$

olduğunu varsayalım. O zaman (4) denkleminin stasioner çözümü

$$x(t) \equiv x_0$$

olur. Bu halde (4) denkleminin varyasyonlarla denklemi

$$\frac{d\Delta x}{dt} = A\Delta x \ , \ (A = f_x'(x_0)) \tag{5}$$

stasioner denklem olur. Burada $A = f_x'(x_0)$ operatörü t ve x değişkenine bağlı değildir.

Özel halde eğer autonom denklemin periyodik $x(t) = \varphi(t)$ çözümü olursa, o zaman $\varphi'(t)$ fonksiyonu varyasyonlarla denklemi sağlar. Gerçektende,

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(\varphi(t))$$

denkleminin her iki yanından t' ye göre diferansiyel alınırsa,

$$\frac{d\varphi'(t)}{dt} = f_x'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t) = A(t)\cdot\varphi'(t)$$

bulunur.

BÖLÜM V

ABSTRAKT FONKSİYONLARIN İNTEGRALLENMESİ. RİEMANN VE STİELTJES İNTEGRALLERİ

5.1. Sürekli Abstrakt Fonksiyonların Riemann İntegrali.

x(t) fonksiyonu, [a,b] aralığında tanımlanmış ve değerleri X Banach uzayında olan sürekli abstrakt fonksiyon olsun.

Tanım 5.1.1. Eğer keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her bir $t', t'' \in [a,b]$ için, $| t' - t'' | < \delta$ iken

$$\| x(t') - x(t'') \| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, o zaman x(t) abstrakt fonksiyonu [a,b] aralığında düzgün süreklidir.

Lemma 5.1.2. Eğer abstrakt fonksiyon ele alınan aralıkta sürekli ise, o zaman bu fonksiyon bu aralıkta düzgün süreklidir.

İspat. $Q = [a,b]x[a,b]$ karesinde tanımlanmış,iki değişkenli

$$\varphi(t,s) = \| x(t) - x(s) \|$$

sayısal fonksiyonunu ele alalım. E^2 düzleminde tüm normlar eşdeğerdir. Burada kubik normdan istifade edelim:

$$\left\| \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \right\|_k = \max (|t|, |s|).$$

$\varphi(t,s)$ fonksiyonu, $Q \subset E^2$ kümesinden E^1' e etki ediyor. Q kümesi, E^2 de kapalı olduğundan, Cantor teoremine göre (Aydın ve diğerleri, 2000), Q kümesinde sürekli olan $\varphi(t,s)$ fonksiyonu, Q' da düzgün sürekli olur.

Not. Eğer keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, $|t'-t''| < \delta$ ve $|s'-s''| < \delta$ şartlarını sağlayan her bir $(t', s') \in Q$ ve $(t'', s'') \in Q$ noktaları için

$$\| \varphi(t', s') - \varphi(t'', s'') \| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, $\varphi(t,s)$ fonksiyonuna Q kümesinde süreklidir denir.

Son eşitsizlikte, $s' = s'' = t''$ alınırsa, o zaman $\varphi(t'', s'') = 0$ olur. Buradan ise, özel olarak, keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, $|t'-t''| < \delta$ şartını sağlayan her bir $t', t'' \in [a,b]$ için,

$$|\varphi(t', t'')| = \| x(t') - x(t'') \| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\delta > 0$ sayısı bulunmuş olur. Bu, x(t) abstrakt fonksiyonunun [a,b] aralığında düzgün sürekli olmasıdır.

Şimdi abstrakt fonksiyonun Riemann integralinin tanımını verelim. Bunun için [a,b] aralığını $\tau = \{t_i\}_0^N$ noktaları ile

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < t_N = b$$

şeklinde $[t_{i-1}, t_i]$ aralıklarına bölelim. $[t_{i-1}, t_i]$ aralığına, τ parçalanışının aralığı diyeceğiz. $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ parçalanışların uzunluklarını, $\lambda(\tau) = \max\limits_{1 \le i \le N} \Delta t_i$ ise, bu parçalanışın küçüklüğünü gösterir. Her bir $[t_{i-1}, t_i]$, ($i = 1,2,\ldots,N$) parçalanış aralığından bir tane θ_i noktası seçelim. $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ noktalarına, aralık noktaları diyeceğiz. [a,b] aralığında verilmiş x(t) abstrakt fonksiyonunun integral toplamı,

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(x; \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N) = \sum_{i=1}^{N} x(\theta_i) \cdot \Delta t_i \qquad (1)$$

şeklindedir.

Tanım 5.1.3. [a,b] aralığının keyfi

$$\tau_n = \{t_i^{(n)}\}_{i=0}^{N}, \quad n = 1,2,\ldots$$

parçalanışları için ve $\{t_{i-1}^{(n)}, t_i^{(n)}\}$, ($i = 1,2,\ldots,N_n$) aralıklarından seçilmiş keyfi $\theta_i^{(n)}$, ($n = 1,2, \ldots$) aralık noktaları için, $n \to \infty$ şartında, $\lambda(\tau_n) \to 0$ durumunda

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_{\tau_n}(x;\theta_1^{(n)},\ldots,\theta_{N_n}^{(n)}) = r$$

eşitliği sağlanacak şekilde $r \in X$ elemanı varsa, $x(t)$ abstrakt fonksiyonuna, $[a,b]$ aralığında Riemann anlamında integrallenebilirdir denir.

r elemanına, $[a,b]$ aralığında $x(t)$ fonksiyonunun Riemann integrali denir ve

$$r = \int_a^b x(t)\,dt$$

şeklinde gösterilir. Böylece,

$$\int_a^b x(t)\,dt = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{N_n} x(\theta_i^{(n)}) \cdot \Delta t_i^{(n)}$$

olur. Burada,

$$\lim_{n \to \infty} \lambda(\tau_n) = 0$$

dır.

Aşağıda $[a,b]$ aralığında sürekli olan $x(t)$ abstrakt fonksiyonunun bu aralıkta Riemann anlamında integrallenebilir olduğunu göstereceğiz. Bunun için önce iki tane yardımcı lemmayı ispatlayalım.

Bu kısımda $\delta > 0$ sayısı olarak düzgün sürekliliğin tanımındaki $\delta > 0$ sayısının alınması, $\lambda(\tau) < \delta$ olduğunda, keyfi $t_i', t_i'' \in [t_{i-1}, t_i]$ için, τ parçalanışında

$$\| x(t_i') - x(t_i'') \| < \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanmasını garanti eder.

[a,b] aralığında bir τ parçalanışı verilmiş olsun. Bu aralığı daha küçük aralıklara bölen τ' parçalanışa, τ parçalanışının küçültülmüş parçalanışı denir.

$[t_{i-1}, t_i]$ aralığı, τ parçalanışının aralığı olsun. Bu aralığın $\tau_i = \{t_i^j\}_{j=0}^{N_i}$ parçalanışı ele alalım.

$$\left.\begin{array}{l} t_{i-1} = t_i^0 < t_i^1 < \ldots < t_i^{N_i} = t_i \\ \Delta t_i^j = t_i^j - t_i^{j-1}\ , \quad j = 1,2,\ldots,N_i \\ \sum\limits_{j=1}^{N_i} \Delta t_i^j = \Delta t_i\ . \end{array}\right\} \tag{2}$$

τ_i parçalanışının her bir $[t_{i-1}, t_i]$ aralığından bir θ_i^j noktası seçelim ve

$$\sigma_{\tau'} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i} x(\theta_i^j)\cdot\Delta t_i^j \tag{3}$$

Riemann integral toplamını yapalım.

Lemma 5.1.4. τ parçalanışı, [a,b] aralığının $\lambda(\tau) < \delta$ şartını sağlayan parçalanışı ve σ_τ ise, x(t) fonksiyonunun [a,b] aralığında τ parçalanışına uygun Riemann toplamı olsun. τ' parçalanışı, τ parçalanışının küçültülmüş parçalanışı ve $\sigma_{\tau'}$ ise, bu parçalanışa uygun Riemann toplamı olsun. O zaman,

$$\| \sigma_\tau - \sigma_{\tau'} \| < \varepsilon\cdot(b-a)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. (1) formülü ile tanımlanmış σ_τ Riemann integral toplamının, (2) formüllerinden yararlanılarak ,

$$\sigma_\tau = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N_i} x(\theta_i)\cdot\Delta t_i^j$$

şeklinde yazılabildiğini dikkate alalım.

Bu eşitlikle (3) eşitliği taraf tarafa çıkarılırsa ve $\theta_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ve tüm $0 \le j \le N_i$ için, $\theta_i^j \in [t_{i-1}, t_i]$ olduğundan, $|\ \theta_i - \theta_i^j\ | < \delta$ olduğu bulunur ve x(t) fonksiyonu [a,b] aralığında düzgün sürekli olduğundan,

$$\| \sigma_\tau - \sigma_{\tau'} \| \le \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N_i} \| x(\theta_i) - x(\theta_i^j) \| \cdot \Delta t_i^j \le \varepsilon \cdot (b-a)$$

bulunur.

Lemma 5.1.5. τ_1 ve τ_2 parçalanışları, [a,b] aralığının $\lambda(\tau_1) < \delta$ ve $\lambda(\tau_2) < \delta$ şartlarını sağlayan parçalanışları olsun. σ_{τ_1} ve σ_{τ_2} ise, x(t) fonksiyonunun bu parçalanışlara uygun, keyfi seçilmiş aralık noktalı Riemann integral toplamları olsun. O zaman,

$$\| \sigma_{\tau_1} - \sigma_{\tau_2} \| < 2 \cdot \varepsilon \cdot (b-a)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ parçalanışını alalım. $\tau_1 \subset \tau$ ve $\tau_2 \subset \tau$ olduğundan τ parçalanışı, hem τ_1 parçalanışının hem de τ_2 parçalanışının küçültülmüş parçalanışı olur. Buna göre, Lemma 5.1.4 burada kullanılırsa,

$$\| \sigma_{\tau_1} - \sigma_{\tau_2} \| \le \| \sigma_{\tau_1} - \sigma_\tau \| + \| \sigma_\tau - \sigma_{\tau_2} \|$$

$$< \varepsilon \cdot (b-a) + \varepsilon \cdot (b-a)$$

$$= 2 \cdot \varepsilon \cdot (b-a)$$

bulunur.

Teorem 5.1.6. Abstrakt fonksiyon sürekli olduğu aralıkta Riemann integrallenebilirdir.

İspat. $\{\tau_n\}$ dizisi, [a,b] aralığının $n \to \infty$ durumunda parçalanış küçüklüğü sıfıra yakınsak olan yani, $\lambda(\tau_n) \to 0$ olan keyfi parçalanış dizisi olsun. Her bir n sayısı için, aralık noktalarını seçerek x(t) fonksiyonunun [a,b] aralığı için uygun $\{\sigma_{\tau_n}\}$Riemann integral toplamı dizisini yapalım. Burada $n \to \infty$ durumunda $\lambda(\tau_n) \to 0$ olduğundan, öyle N numarası bulabiliriz ki, tüm $n > N$ için $\lambda(\tau_n) < \delta$ eşitsizliği sağlanır. Lemma 5.1.5' e göre, her $n > N$ ve keyfi doğal p sayısı için,

$$\| \sigma_{\tau_{n+p}} - \sigma_{\tau_n} \| < 2 \cdot \varepsilon \cdot (b-a)$$

olur. Bu ise $\{\sigma_{\tau_n}\}$ dizisinin X Banach uzayında fundamental dizi olduğunu gösterir. X tam uzay olduğundan, öyle $r \in X$ elemanı var ki, $\{\sigma_{\tau_n}\}$ dizisi, $n \to \infty$ şartında r elemanına yakınsak olur.

Şimdi r elemanının parçalanış dizisinin ve aralık noktalarının seçilişine bağlı olmadığını gösterelim.

$\{\tau'_n\}$ başka bir parçalanış dizisi ve $\{\sigma_{\tau'_n}\}$ dizisi ise $\{\tau'_n\}$ dizisine uygun herhangi aralık noktaları ile Riemann integral toplamı olsun. Öyle $r' \in X$ elemanı var ki, $n \to \infty$ durumunda $\sigma_{\tau'_n} \to r'$ olur.

Şimdi,

$$\sigma_{\tau_1}, \sigma_{\tau'_1}, \sigma_{\tau_2}, \sigma_{\tau'_2}, \ldots, \sigma_{\tau_n}, \sigma_{\tau'_n}, \ldots$$

Riemann integral toplamları dizisini yapalım. Bu dizide yakınsaktır. Bu dizinin çift indisli olmayan alt dizisi r elemanına, çift indisli alt dizisi ise r′ elemanına yakınsaktır.Yakınsak bir dizinin alt dizileri aynı limite yakınsak olduğundan $r = r'$ eşitliği bulunur.

5.2. Riemann İntegralinin Özellikleri.

[a,b] aralığında sürekli abstrakt fonksiyonların Riemann integralinin aşağıdaki esas özelliklerini gösterebiliriz.

1) $\varphi(t)$ skaler fonksiyonu [a,b] aralığında sürekli bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ herhangi bir eleman olsun. O zaman,

$$\int_a^b x_0 \cdot \varphi(t)\, dt = x_0 \int_a^b \varphi(t)\, dt$$

olur.

İspat.

$$\sigma_\tau(x_0 \cdot \varphi) = \sum_{k=1}^{N} x_0 \cdot \varphi(\theta_k) \cdot \Delta t_k$$

$$= x_0 \sum_{k=1}^{N} \varphi(\theta_k) \cdot \Delta t_k$$

$$= x_0 \cdot \sigma_\tau(\varphi)$$

eşitliğinden $\lambda(\tau) \to 0$ şartında istenilen eşitlik alınır.

2) Sabit bir λ sayısı için,

$$\int_a^b \lambda \cdot x(t)\, dt = \lambda \int_a^b x(t)\, dt$$

eşitliği doğrudur.

$\sigma_\tau(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \sigma_\tau(x)$ olduğundan bu özellik ispatlanır.

3)

$$\int_a^b [x(t) + y(t)]\, dt = \int_a^b x(t)\, dt + \int_a^b y(t)\, dt$$

dir.

Bu özelliğin ispatı $\sigma_\tau(x+y) = \sigma_\tau(x) + \sigma_\tau(y)$ eşitliğinden çıkar.

4) Her bir $c \in [a,b]$ için,

$$\int_a^b x(t)\, dt = \int_a^c x(t)\, dt + \int_c^b x(t)\, dt$$

dir.

İspat. τ_1, $[a,c]$ aralığının τ_2, $[c,b]$ aralığının ve $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$ ise $[a,b]$ aralığının parçalanışı olsun. O zaman,

$$\sigma_\tau(x) = \sigma_{\tau_1}(x) + \sigma_{\tau_2}(x)$$

eşitliği doğrudur.

Eğer $\lambda(\tau_1) \to 0$ ve $\lambda(\tau_2) \to 0$ ise, o zaman $\lambda(\tau) \to 0$ olduğu bulunur ve özelliğin ispatı yukarıdaki eşitlikten çıkar.

5)

$$\| \int_a^b x(t)\, dt \| \leq \int_a^b \| x(t) \| \, dt$$

dir.

Bu özelliğin ispatı $\| \sigma_\tau(x) \| \leq \sigma_\tau(\| x \|)$ eşitsizliğinden çıkar.

6) X ve Y iki Banach uzayı ve $x \in X$ elemanları için $y \in Y$ ile sağdan çarpma işlemi tanımlanmış olsun. O zaman,

$$\int_a^b x(t)\, dt \cdot y = \int_a^b x(t) \cdot y \, dt$$

olur.

Bu özelliğin ispatı,

$$\sigma_\tau(x) \cdot y = \sum_{k=1}^{N} x(\theta_k) \cdot \Delta t_k \cdot y = \sum_{k=1}^{N} x(\theta_k) \cdot \Delta t_k = \sigma_\tau(x \cdot y)$$

eşitliğinden alınır.

Çarpımın tanımından, $x(t) \cdot y$ çarpımının $[a,b]$ aralığında sürekli olduğu çıkar.

7) X ve Z iki Banach uzayı ve $x \in X$ elemanı için $z \in Z$ ile soldan çarpma işlemi tanımlanmış olsun. O zaman,

$$z \int_a^b x(t)\, dt = \int_a^b z \cdot x(t)\, dt$$

eşitliği doğrudur.

8) $u(t) = \int_a^b x(s)\, ds$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli diferansiyellenebilirdir ve $t \in [a,b]$ için $u'(t) = x(t)$ eşitliği doğrudur.

İspat. $|h| < \delta$ alalım. Burada $\delta > 0$, x(t) fonksiyonunun t noktasında sürekliliğinin tanımındaki δ sayısıdır.

$$\left\| \frac{u(t+h)-u(t)}{h} - x(t) \right\| \leq \frac{1}{|h|} \left| \int_{t}^{t+h} \| x(s) - x(t) \| \, ds \right| < \varepsilon .$$

u′(t) fonksiyonunun sürekliliği ise x(t) fonksiyonunun sürekliliğinden alınır.

9) x(t) fonksiyonu, [a,b] aralığında sürekli diferansiyellenebilir olsun. O zaman,

$$\int_{a}^{b} x'(t)\, dt = x(b) - x(a)$$

Newton-Leibnitz formülü doğrudur.

İspat. X uzayının elemanları için, X* eşlenik uzayının elemanları ile sağdan çarpım işlemi tanımlıdır. Keyfi $f \in X^*$ için, (6) özelliğine göre,

$$\langle \int_{a}^{b} x'(t)\, dt , f \rangle = \int_{a}^{b} \langle x'(t) , f \rangle\, dt$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{d}{dt} \langle x(t) , f \rangle\, dt$$

$$= \langle x(t) , f \rangle \Big|_{a}^{b}$$

$$= \langle x(b) , f \rangle - \langle x(a) , f \rangle$$

$$= \langle x(b) - x(a) , f \rangle$$

bulunur. Böylece, keyfi $f \in X^*$ için

$$\langle \int_{a}^{b} x'(t)\, dt - x(b) + x(a) , f \rangle = 0$$

eşitliği elde edilir. Bu ise yalnız

$$\int_a^b x'(t)\,dt - x(b) + x(a) = 0$$

halinde doğrudur.

Burada (6) ve (7) özelliklerinin aşağıdaki durumlarını verelim.

$A(t) \in L(X,Y)$ ve $x \in X$ olduğunda,

$$\int_a^b A(t)\,dt \cdot x = \int_a^b A(t) \cdot x\,dt$$

dir.

$A(t) \in L(X,Y)$ ve $B \in L(Z,X)$ olduğunda,

$$\int_a^b A(t)\,dt \cdot B = \int_a^b A(t) \cdot B\,dt$$

dir.

$A(t) \in L(X,Y)$ ve $C \in L(Y,Z)$ olduğunda,

$$C \int_a^b A(t)\,dt = \int_a^b C \cdot A(t)\,dt$$

dir.

Özellik 5.2.1. $x(t)$ fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında süreklidir. $t = \varphi(\sigma)$ sayısal fonksiyonu ise $[\alpha,\beta]$ aralığında sürekli diferansiyellenebilirdir ve $a = \varphi(\alpha) \le \varphi(\sigma) \le \varphi(\beta) = b$ dir.

$$\int_a^b x(t)\,dt = \int_\alpha^\beta x[\varphi(\sigma)] \cdot \varphi'(\sigma)\,d\sigma$$

olur (Trenogin, 1980).

Özellik 5.2.2. X ve Y iki Banach uzayı olsun ve $x \in X$ elemanının $y \in Y$ elemanı ile sağdan çarpımı işlemi tanımlanmış olsun. Ayrıca, değerleri X uzayında olan x(t) abstrakt fonksiyonu ve değerleri Y uzayında olan y(t) abstrakt fonksiyonu, [a,b] aralığında sürekli diferansiyellenebilir olsun. O zaman,

$$\int_a^b x(t)\cdot y'(t)\, dt = x(t)\cdot y(t)\Big|_a^b - \int_a^b x'(t)\cdot y(t)\, dt$$

integralleme formülü doğrudur (Trenogin, 1980).

5.3. Abstrakt Fonksiyonların Stieltjes İntegrali.

Bu kısımda Riemann integrali anlamı genelleştirilecektir. Burada Stieltjes (Riemann-Stieltjes) integrali anlamı verilecektir. Bu integralin bir çok uygulamaları vardır. Mesela, bu integral anlamından yararlanılarak, kendi kendine eşlenik lineer operatörlerin spektral açılımının inşaası verilir.

Stieltjes integrali anlamını vermeden önce, sınırlı varyasyonlu abstrakt fonksiyonun tanımını verelim. [a,b] aralığında tanımlanmış, değerleri Y Banach uzayında olan y(t) abstrakt fonksiyonunun verildiğini varsayalım. $\tau = (t_i)_{i=0}^{N}$ ise, [a,b] aralığının parçalanışı olsun.

$$V_\tau(y) = \sum_{i=1}^{N} \| y(t_i) - y(t_{i-1}) \|$$

toplamını yapalım.

Tanım 5.3.1. $\overset{b}{\underset{a}{V}}(y) = \sup_{\tau} V_\tau(y)$ sayısına, y(t) fonksiyonunun [a,b] aralığında tam varyasyonu denir.

Tanım 5.3.2. Eğer, $\overset{b}{\underset{a}{V}}(y) < +\infty$ eşitsizliği sağlanırsa o zaman, y(t) fonksiyonuna sınırlı varyaşyonlu abstrakt fonksiyon denir.

Örnek 5.3.3. $y(t)$ abstrakt fonksiyonu, $[a,b]$ aralığında Lipschitz şartını sağlasın yani, keyfi $t', t'' \in [a,b]$ için,

$$\| y(t') - y(t'') \| \leq M \cdot | t' - t'' |$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $M > 0$ sabiti var olsun. (Buradaki M sabitine Lipschitz sabiti denir)

Bu $y(t)$ abstrakt fonksiyonu için,

$$\overset{b}{\underset{a}{V}} (y) \leq M \cdot (b-a)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, Lipschitz şartını sağlayan fonksiyonların sınırlı varyasyonlu fonksiyon olduğu görülür.

Şimdi $x(t)$ sürekli abstrakt fonksiyonunun, $y(t)$ abstrakt fonksiyonu üzere Stieltjes integrali anlamını verelim.

X, Y, Z Banach uzayları olsun ve $x \in X$ elemanı için, $y \in Y$ elemanı ile sağdan çarpım işlemi tanımlanmış olsun. Çarpımın değeri Z uzayındadır yani, $x \cdot y \in Z$' dir. $[a,b]$ aralığında tanımlanmış, sınırlı değerleri sırasıyla X ve Y uzaylarında olan $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları verilmiştir.

$\tau = (t_i)_{i=0}^{N}$, $[a,b]$ aralığında herhangi bir parçalanış, $\theta_i \in [t_{i-1} , t_i]$ ise, aralık noktaları olsun ($i = 1, 2, \dots , N$).

$$\sigma_\tau = \sigma_\tau(x; y; \theta_1, \theta_2, \dots , \theta_N) = \sum_{i=1}^{N} x(\theta_i) \cdot [y(t_i) - y(t_{i-1})]$$

Stieltjes toplamını yapalım.

Tanım 5.3.4. Eğer, $[a,b]$ aralığında $n \to \infty$ durumunda $\lambda(\tau_n) \to 0$ şartını sağlayan keyfi

$$\tau_n = \{t_i^{(n)}\}_{i=0}^{N} \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

parçalanış dizisi için ve keyfi $\theta_i^{(n)}$ aralık noktaları için ($i = 1, 2, \dots , N_n$) ve öyle $s \in Z$ elemanı için,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\tau_n} = s$$

bağıntısı sağlanırsa, o zaman x(t) fonksiyonu, [a,b] aralığında y(t) fonksiyonuna göre Stieltjes anlamda integrallenebilirdir denir ve

$$s = \int_a^b x(t)\, dy(t)$$

şeklinde gösterilir.

Riemann integralinin Stieltjes integralinin özel bir hali olduğuna dikkat edelim. Gerçekten de, Stieltjes integralinde $Y = E^1$, $Z = X$ ve $y(t) = t$ alınırsa, o zaman Stieltjes integrali Riemann integraline eşit olur.

Teorem 5.3.5. Eğer x(t) abstrakt fonksiyonu, [a,b] aralığında sürekli abstrakt fonksiyon ise ve y(t) abstrakt fonksiyonu, [a,b] aralığında sınırlı varyasyonlu fonksiyon ise, o zaman x(t) abstrakt fonksiyonu [a,b] aralığında y(t) fonksiyonuna göre Stieltjes anlamda integrallenebilirdir (Trenogin,1980).

5.4. Stieltjes İntegralinin Özellikleri

1)

$$\int_a^b x_0 \cdot dy(t) = x_0 \cdot y(t) \Big|_a^b = x_0 \cdot [y(b) - y(a)]$$

dır.

2) $x(t) = x_0\, \varphi(t)$, $x_0 \in X$ ve $\varphi(t) \in C_{[a,b]}$ olduğunda,

$$\int_a^b x_0 \cdot \varphi(t)\, dy(t) = x_0 \int_a^b \varphi(t)\, dy(t)$$

dir.

3) $y(t) = y_0\psi(t)$, $y_0 \in Y$ ve $\psi(t)$ fonksiyonu sınırlı varyasyonlu skaler fonksiyon olduğunda,

$$\int_a^b x(t)\, d[y_0 \cdot \psi(t)] = \left(\int_a^b x(t)\, d\psi(t) \right) \cdot y_0$$

formülü doğrudur.

4)

$$\int_a^b [x_1(t) + x_2(t)]\, dy(t) = \int_a^b x_1(t)\, dy(t) + \int_a^b x_2(t)\, dy(t)$$

dir.

5)

$$\int_a^b x(t)\, d[y_1(t) + y_2(t)] = \int_a^b x(t)\, dy_1(t) + \int_a^b x(t)\, dy_2(t)$$

dir.

6)

$$\int_a^b x(t)\, dy(t) + \int_a^b y(t)\, dx(t) = x(t) \cdot y(t) \Big|_a^b$$

dir. Burada x(t) ve y(t) abstrakt fonksiyonlarının her ikiside [a,b] aralığında süreklidir ve bu aralıkta sınırlı varyasyonlu fonksiyonlardır.

7) Eğer, $a < c < b$ ise o zaman,

$$\int_a^b x(t)\, dy(t) = \int_a^c x(t)\, dy(t) + \int_c^b x(t)\, dy(t)$$

dir.

8)

$$\left\| \int_a^b x(t)\, dy(t) \right\| \leq \int_a^b \| x(t) \| \cdot d \overset{b}{\underset{a}{V}} (y) \leq \max_{[a,b]} \| x(t) \| \cdot \overset{b}{\underset{a}{V}} (y)$$

dir (Trenogin,1980).

5.5. Has Olmayan İntegraller ve Eğrisel İntegraller

Yukarıda tanımlanmış olan Riemann ve Stieltjes İntegralleri gibi genelleştirilebilir.

Mesela, parça parça sürekli olan x(t) fonksiyonunun (yani, sonlu sayıda birinci çeşit süreksiz noktaları olan fonksiyon) integrali, bu fonksiyonun sürekli olduğu aralıklardaki integrallerinin toplamı olarak tanımlanabilir.

Şimdi değerleri X Banach uzayında olan x(t) abstrakt fonksiyonunun has olmayan Riemann integralini tanımlayalım.

Tanım 5.5.1. x(t) fonksiyonu, [c,∞) yarı ekseninde tanımlanmış olsun ve bu fonksiyonun her bir sonlu [c,b] aralığında Riemann anlamda integrali var olsun. Eğer, X uzayındaki norma göre

$$\lim_{b\to+\infty}\int_c^b x(t)\,dt = \int_c^{+\infty} x(t)\,dt \qquad (1)$$

limiti varsa, o zaman bu limite x(t) fonksiyonunun [c,∞) aralığında has olmayan Riemann integrali denir.

Benzer olarak, eğer x(t) fonksiyonu, (-∞,c] aralığında tanımlanmışsa ve bu fonksiyon her bir [a,c] sonlu aralığında Riemann anlamda integrallenebilir ise, o zaman has olmayan Riemann integrali,

$$\int_{-\infty}^{c} x(t)\,dt = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c x(t)\,dt \qquad (2)$$

formülü ile tanımlanır.

Son olarak, eğer x(t) fonksiyonu, (-∞,∞) aralığında tanımlanmışsa ve bu fonksiyon her bir [a,b] sonlu aralığında Riemann anlamda integrallenebilir ise ve $\int_{-\infty}^{c} x(t)\,dt$, $\int_{c}^{+\infty} x(t)\,dt$ integralleri varsa, o zaman has olmayan Riemann integrali,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dt = \int_{-\infty}^{c} x(t)\,dt + \int_{c}^{+\infty} x(t)\,dt \qquad (3)$$

formülü ile tanımlanır. Bu tanımın $-\infty < c < \infty$ sabitine bağlı olmadığı kolaylıkla gösterilebilir.

Has olmayan integral var olduğunda, bu integral yakınsaktır denir. Aksi halde has olmayan integral ıraksaktır denir.

Eğer, $\| x(t) \|$ fonksiyonunun has olmayan integrali varsa, o zaman x(t) fonksiyonunun uygun has olmayan integrali mutlak yakınsaktır denir.

Has olmayan Riemann integrali, Riemann integralinin özelliklerini sağlar. Gerçekten de, (1)-(7) özelliklerinin sağ tarafındaki integraller ($a = -\infty$ veya $b = \infty$ halinde) yakınsak olduklarında bu özellikler sağlanır. (8) özelliğinde , $\int_{-\infty}^{t} x(s)\, ds$ integralinin yakınsak olduğu da istenir. Newton-Leibnitz formülünde $x(+\infty)$ ve $x(-\infty)$ limitlerinin varlığı istenir.

Şimdi birinci çeşit eğrisel integralin tanımını verelim.

X kompleks Banach uzayı ve L ise, Z kompleks düzleminde parça parça regüler eğri olsun. $a \le t \le b$ olmak üzere L eğrisinin parametrik denklemini, $z = z(t)$ şeklinde verelim. L eğrisi sonlu olduğunda, [a,b] aralığı da sonlu olur. L eğrisi sonlu olmadığında [a,b] aralığı $(-\infty,c)$, $(c,+\infty)$ veya $(-\infty,+\infty)$ şeklinde olur. Bu üç çeşit eğri [a,b] şeklinde yazılacaktır.

L eğrisinin parça parça regüler olmasından, z'(t) nin sürekli olduğu ya da sonlu sayıda birinci çeşit süreksiz olduğu noktaların varolduğu alınır.

Tanım 5.5.2. L eğrisi üzerinde x(z) abstrakt fonksiyonu verilsin.

$$\int_L x(z)\, dz = \int_a^b x(z(t)) \cdot z'(t)\, dt \qquad (4)$$

Riemann integraline, x(z) fonksiyonunun L eğrisi üzere birinci çeşit eğrisel integrali denir.

Bu integralin sağ yanındaki a veya b sayılarından biri sonsuz olursa, uygun integral has olmayan integral olur.

Abstrakt fonksiyonun L eğrisi üzere integralinin bu tanımı, birinci çeşit eğrisel integrallerin özelliklerini sağlar. Özel halde, L eğrisinin yönü değiştirildiğinde integralin işareti değişir.

Son olarak özel bir halde has olmayan Stieltjes integralinin tanımını verelim.

$X = Y = Z = E^1$, bir boyutlu Öklid uzayı olsun yani, $(-\infty,+\infty)$ ekseni olsun. $x(t)\colon E^1 \to E^1$ sürekli fonksiyonunu ele alalım. Ayrıca, E^1 de sınırlı olan ve sağdan sürekli olan, azalmayan $y(t)$ fonksiyonunun verildiğini varsayalım. $x(t)$ fonksiyonunun, $y(t)$ fonksiyonuna göre $(-\infty,+\infty)$ aralığındaki has olmayan Stieltjes integrali,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,dy(t) = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} x(t)\,dy(t) + \lim_{b\to+\infty}\int_{0}^{b} x(t)\,dy(t) \tag{5}$$

şeklindedir.

Eğer has olmayan (5) integrali varsa, o zaman bu integrale yakınsaktır denir. Aksi halde ıraksaktır denir. Eğer,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \| x(t) \|\, dy(t)$$

integrali yakınsak ise, o zaman (5) Stieltjes integraline mutlak yakınsaktır denir.

$x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları üzerine konulan şartlarda Stieltjes integralinin mutlak yakınsak olması, uygun bir serinin mutlak yakınsak olmasına eşdeğer olur.

$(-\infty,+\infty)$ aralığını, $[t_{k-1}, t_k)$ yarı açık aralıklarına bölelim $(k = 0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$. Bu parçalanış öyle yapılmıştır ki,

$$M_k = \sup_{[t_{k-1},t_k)} x(t) \quad , \quad m_k = \inf_{[t_{k-1},t_k)} x(t)$$

olmak üzere,

$$\omega = \sup_k (M_k - m_k) < +\infty \tag{6}$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi $\theta_k \in [t_{k-1}, t_k)$ aralık noktasını alarak

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\theta_k)\cdot[y(t_k) - y(t_{k-1})] \tag{7}$$

serisini inşa edelim.

Teorem 5.5.3. (7) serisi ile (5) has olmayan integralinin her ikisi aynı zamanda mutlak yakınsak olur. Eğer (7) integrali, keyfi $\omega > 0$ için yakınsak ise, o zaman

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dy(t) = \lim_{\omega \to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(\theta_k)\cdot[y(t_k) - y(t_{k-1})]$$

olur (Trenogin,1980).

5.6. Banach Uzayında Lineer Diferansiyel Denklemler İçin Cauchy Problemi

X herhangi bir Banach uzayı olsun. $A \in L(X)$, $x_0 \in X$ tir. y(t) fonksiyonu, [0,T] aralığında tanımlanmış, değerleri X Banach uzayında olan sürekli abstrakt fonksiyondur. [0,T] aralığında birinci dereceden lineer operatör diferansiyel denklem için Cauchy problemini ele alalım:

$$\dot{x} = Ax + y(t) \tag{1}$$

$$x(0) = x_0. \tag{2}$$

[0,T] aralığında sürekli diferansiyellenebilen (1) denklemini aynı şekilde dönüştüren ve (2) başlangıç şartını sağlayan her bir x(t) abstrakt fonksiyonuna (1)-(2) probleminin çözümü denir.

(1)-(2) probleminin çözümünü formül şeklinde açıkça yazabilmek için, bu problemin çözümü olan x(t) nin var olduğunu kabul edelim. O zaman, x(t) çözümü (1)-(2) de yerine yazılırsa,

$$\dot{x}(s) = Ax(s) + y(s), \quad 0<s<t \tag{3}$$

$$x(0) = x_0$$

eşitliği bulunur.

Şimdi (3) eşitliğinin her iki tarafını, operatör değerli e^{-As} abstrakt fonksiyonu ile soldan çarpıp, s değişkenine göre 0 dan t'ye kadar ($t \in [0,T]$) integrali alınırsa,

$$e^{-As}\cdot \dot{x}(s) = e^{-As}\cdot Ax(s) + e^{-As}\cdot y(s),$$

$$e^{-As}\cdot \dot{x}(s) - e^{-As}\cdot Ax(s) = e^{-As}\cdot y(s),$$

$$\frac{d}{ds}[e^{-As}\cdot x(s)] = e^{-As}\cdot y(s), \tag{4}$$

$$\int_0^t \frac{d}{ds}[e^{-As}\cdot x(s)]\, ds = \int_0^t e^{-As}\cdot y(s)\, ds$$

$$e^{-At}\cdot x(t) - x_0 = \int_0^t e^{-As}\cdot y(s)\, ds, \tag{5}$$

$$x(t) = e^{At}\cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\cdot y(s)\, ds \tag{6}$$

bulunur. (6) formülüne, Cauchy formülü denir.

Böylece (1)-(2) probleminin çözümü varsa, o zaman bu çözüm (6) formülü ile gösterilir. Bu ise, (1)-(2) probleminin çözümü varsa, bu çözümün tek olduğunu gösterir.

Şimdi (1)-(2) probleminin çözümünün varlığını gösterelim. Bunun için, (6) formülü ile verilen x(t) abstrakt fonksiyonunun (1)-(2) probleminin çözümünü verdiği gösterilmelidir. Bu amaçla (6) formülü ile verilen x(t) abstrakt fonksiyonunun t'ye göre diferansiyeli alınırsa,

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}[e^{At}\cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\cdot y(s)\, ds]$$

$$= \frac{d}{dt}(e^{At}\cdot x_0) + \frac{d}{dt}[\int_0^t e^{A(t-s)}\cdot y(s)\, ds]$$

$$= A\cdot e^{At}\cdot x_0 + A\int_0^t e^{A(t-s)}\cdot y(s)\, ds + y(t)$$

$$= A\cdot\underbrace{[e^{At}\cdot x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}\cdot y(s)\, ds]}_{x(t)} + y(t) \tag{7}$$

bulunur.

Böylece, (6) formülü ile tanımlanan x(t) fonksiyonu için

$$\dot{x} \equiv A(t)x + y(t) \quad , \quad 0 < t < T$$

(1) denklemine dönüşür. Başlangıç (2) şartı da sağlanır.

(7) eşitliğini yazarken, önce

$$\int_0^t e^{A(t-s)} \cdot y(s)\, ds = e^{At} \int_0^t e^{-As} \cdot y(s)\, ds$$

sonra ise,

$$\frac{d}{dt}\left[\int_0^t e^{A(t-s)} \cdot y(s)\, ds \right] = \frac{d}{dt}\left[e^{At} \int_0^t e^{-As} \cdot y(s)\, ds \right] = A \int_0^t e^{A(t-s)} \cdot y(s)\, ds + y(t)$$

eşitlikleri kullanıldı.

Örnek 5.6.1. $X = E^n$ olsun. O zaman

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad , \quad y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ . \\ . \\ . \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad , \quad 0 \le t \le T$$

olur. $y_i(t)$ ler adi fonksiyonlar olup, [0,t] aralığında süreklidirler. X(t) fonksiyonunun

$$x_1(t), \ldots, x_n(t)$$

koordinatları [0,t] aralığında sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Böylece, x(t) n-boyutlu sütun vektör fonksiyonudur. Bu halde (1)-(2) Cauchy problemi,

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i(t) \quad , \quad 0 < t < T$$

$$x_i(0) = x_{0i} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler sistemi için Cauchy problemi olur.

BÖLÜM VI

SPEKTRAL FONKSİYON VE BU FONKSİYON ÜZERE İNTEGRAL

6.1. Spektral Fonksiyon

Tanım 6.1.1. Aşağıdaki özellikleri sağlayan reel parametreye bağlı her bir P_λ operatör fonksiyonuna spektral fonksiyon denir.

1^0. P_λ operatör fonksiyonu λ parametresinin her bir değerinde projeksiyon operatördür.

2^0. $\lambda \le \mu$ olduğunda $P_\lambda \le P_\mu$ dür. Yani, $P_\mu - P_\lambda$ operatörü negatif olmayan operatördür.

3^0. Her bir $x \in H$ için

$$P_{-\infty}x = 0 \quad \text{ve} \quad P_{+\infty}x = I$$

dir. Yani, $\forall x \in H$ için,

$$\lim_{\lambda \to -\infty} \| P_\lambda x \| = 0 \quad \text{ve} \quad \lim_{\lambda \to +\infty} \| P_\lambda x - I \| = 0$$

dır ve böylece

$$P_{-\infty} = 0 \quad \text{ve} \quad P_{+\infty} = I$$

olur.

4^0. Keyfi $x \in H$ için $P_\lambda x$ vektör fonksiyonu sağdan süreklidir. Yani,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| P_{\lambda+\varepsilon} x - P_\lambda x \| = 0$$

dır.

Keyfi $x \in H$ için, 2^0 özelliğinden

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_{\mu-\varepsilon} x = P_{\mu-0} x$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} P_{\mu+\varepsilon} x = P_{\mu+0} x \quad , \quad \varepsilon > 0$$

limitlerinin doğru olduğu kolayca görülür.

4^0 özelliği,

$$P_{\mu+0} = P_\mu$$

olması demektir. Bu şart çokta önemli bir şart değildir. Bu şart spektral fonksiyonu normlaştırmak için verilir.

(α,β), $[\alpha,\beta)$, $(\alpha,\beta]$, $[\alpha,\beta]$ aralıklarının yerine sadece Δ işaretinin kullanılacağını dikkate alalım. Bu halde P_Δ işareti uygun olarak,

$$P_{\beta-0} - P_{\alpha+0} = P_{\beta-0} - P_\alpha = P_\Delta \quad , \quad P_{\beta-0} - P_{\alpha-0} = P_\beta - P_\alpha = P_\Delta$$

$$P_{\beta+0} - P_{\alpha+0} = P_\beta - P_\alpha = P_\Delta \quad , \quad P_{\beta+0} - P_{\alpha-0} = P_\beta - P_{\alpha-0} = P_\Delta$$

işaretlerinden birini gösterecektir.

2^0 özelliğinden, keyfi Δ için P_Δ' nın projeksiyon operatör olduğu kolayca görülür. Aynı zamanda $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ aralıkları kesişmediğinde $i \neq j$ için

$$P_{\Delta_i} P_{\Delta_j} = 0$$

olduğu da kolayca gösterilebilir.

6.2. Spektral Fonksiyon Üzere İntegral

Keyfi spektral fonksiyon üzere Riemann-Stieltjes integrali tanımlanabilir. Gerçekten de, farzedelim ki, $f(\lambda)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olan keyfi fonksiyondur. $[a,b]$ aralığını $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ parçalanış noktaları ile

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = b$$

şeklinde $[\lambda_{i-1},\lambda_i]$ aralıklarına bölelim.

$$\Delta_i = \lambda_i - \lambda_{i-1} \quad (i = 1,\ldots,n)$$

aralıkların uzunluğunu gösterir.

Keyfi $\xi_i \in [\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ alalım ve

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot P_{\Delta_i}$$

toplamını yapalım. S toplamı, H Hilbert uzayında tanımlanmış bir sınırlı operatördür.

$[\lambda_{i-1}, \lambda_i]$ aralıklarının uzunluklarını sıfıra yaklaştırmakla, bu toplamın operatör normuna göre bir J limit operatörüne yakınsak olduğu gösterilebilir. Yani, keyfi $\varepsilon > 0$ sayısına karşı öyle $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki, $\Delta_i < \delta$ olduğunda keyfi S toplamı için

$$\| S - J \| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır (Naimark, 1969).

J operatörüne, $f(\lambda)$ fonksiyonunun P_λ üzere integrali denir ve

$$J = \int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda \qquad (1)$$

şeklinde gösterilir.

(1) integralinin varlığından $\forall x \in H$ için,

$$Jx = \int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda x \qquad (2)$$

integralinin var olması açıktır. Bu sonuncu integral ise,

$$Sx = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot P_{\Delta_i} x$$

toplamının limitidir. Şimdi eğer,

$$\| Sx \|^2 = \| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot P_{\Delta_i} x \|^2 = \sum_{i=1}^{n} | f(\xi_i) |^2 \cdot \| P_{\Delta_i} x \|^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} | f(\xi_i) |^2 \cdot (P_{\Delta_i} x , x) \qquad (3)$$

eşitliğinde limite geçilirse, o zaman

$$\| \int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda x \|^2 = \int_a^b | f(\lambda) |^2 \cdot \| dP_\lambda x \|^2 = \int_a^b | f(\lambda) |^2\, d(P_\lambda x, x) \tag{4}$$

bulunur. Bu son eşitliğin sağ tarafındaki integral adi Stieltjes integralidir.

Eğer özel olarak, her bir sonlu λ için $f(\lambda)$ fonksiyonu sürekli fonksiyon ise, o zaman (2) formülünde $a \to -\infty$ ve $b \to +\infty$ şartında limit alınırsa

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda x \tag{5}$$

integrali tanımlanabilir.

Cauchy kriterine göre (4) formülü ve (5) integrali yalnız ve yalnız

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(\lambda) |^2 \cdot \| dP_\lambda x \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | f(\lambda) |^2\, d(P_\lambda x, x)$$

adi integralinin varlığı halinde vardır.

Bu halde (4) formülünde limit alınırsa,

$$\| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda x \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | f(\lambda) |^2\, d(P_\lambda x, x)$$

eşitliği bulunur (Naimark, 1969).

6.3. Kendi Kendine Eşlenik Operatörlerin Spektral Açılımı Üzerine

Önce çift-çift ortogonal olan sonlu sayıda $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ projeksiyon operatörlerini ele alalım.

$$Q_i \cdot Q_j = 0 \ , \quad i \neq j.$$

Bu operatörlerin toplamının I birim operatörüne eşit olduğunu yani,

$$Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = I$$

olduğunu ve sonlu sayıda $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ reel sayılarının verildiğini kabul edelim. Burada

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$$

dir. Merdiven şekilli P_λ fonksiyonunu,

$$P_\lambda = \sum_{\lambda_k \le \lambda} Q_k$$

şeklinde tanımlayalım. Bu toplam yalnız ve yalnız P_k toplamlarından oluşmuştur ki, bunlar için $\lambda_k \le \lambda$ şartı sağlanır.

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP_\lambda \qquad (1)$$

integralini ele alalım. Bu integral reel olarak,

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda k \cdot Qk \qquad (2)$$

sonlu toplamını gösterir. (2) eşitliği ile tanımlanan A operatörünün karakteristik sayıları λ_k sayılarıdır. Uygun olarak, Q_k operatörlerinin izdüşümleri olan alt uzaylar ise A operatörünün karakteristik alt uzayları olur. (2) formülüne A operatörünün diyagonal şeklinde gösterilişi denir.

Sonlu boyutlu uzaylarda her bir Hermite A operatörü diyagonal şekle getirilebildiğinden, bu operatörler için merdiven şekilli P_λ spektral fonksiyonu inşa edilebilir ki, onun yardımıyla da böyle operatörler için (2) açılımı yazılabilir.

Hilbert uzayında kendi kendine eşlenik olan her bir operatörün (1) şeklinde gösterilebildiği ispatlanabilir.(Bu halde P_λ spektral fonksiyonunun merdiven şekilli olması gerekmez). Ayrıca bu operatörlerin rezolventi için

$$(A - \lambda I)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_\mu}{\mu - \lambda} \qquad (3)$$

açılımı yazılır. Burada P_μ fonksiyonu, A operatörünün spektral fonksiyonudur (Naimark,1969).

SONUÇ VE ÖNERİLER

Parametreye bağlı olan abstrakt fonksiyonların integrallerinin tanımı, matematik analizde (veya Kompleks fonksiyonlar teorisinde) verilen eğri üzere integralin tanımıyla hemen hemen aynıdır.

Bu çalışmada, parametreye bağlı ve genel halde keyfi normlu uzaylarda tanımlanmış ve değerleri normlu uzaylarda olan fonksiyonların – abstrakt fonksiyonların Riemann, Stieltjes ve Bochner integrallerinin tanımları ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca özel olarak, Bochner integrali kullanılarak Banach uzayında diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin çözümünün varlığının ve tekliğinin incelenmesi gösterilmiştir.

Riemann ve Stieltjes integralinin uygulanmasıyla da Banach uzayında benzer problemler incelenebilir.

KAYNAKLAR

Aydın, K., Bulgak, A., Bulgak, H., 2000, *Analiz*, S. Ü. Vakfı Yayınları, Konya.

Balcı, M., 1998, *Reel Analiz*, Ertem Basım Yayın, Ankara.

Bartle, R.G., ve Sherbert, D.R., 1992, *Introduction to Real Analysis*, John Wiley and Sons., New York.

Bayraktar, M., 1996, *Fonksiyonel Analiz*, 4. Baskı, Erzurum.

Collatz, L., 1964, *Funksional Analysis und Numerische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.

Çakar, Ö., 1993, *Fonksiyonel Analize Giriş*, İkinci Baskı, A.Ü. F. F. Döner Sermaye İşlet. Yayınları, Ankara.

Daletskiy, Yu. L., ve Kreyn, M.G.,1970, *Ustoyçivots Reşeniy Differensialnıx Uravneniy v Banaxovom Prostranstve*, 'Nauka', Moscow.

Dunford, N., ve Schwartz, J.T., 1988, *Linear Operators Part I*, *General Theory*, John Wiley and Sons, New York.

Dunford, N., ve Schwartz, J.T., 1988, *Linear Operators Part II*, *Spectral Theory*, *Self Adjoint Operators in Hilbert Space*, John Wiley and Sons, New York.

Habibzade, E.,1978, *Funksional Analiz*, Neşr. "Maarif", Baku.

Halilov, Z.İ., 1949, *Lineynıe Uravneniya v Lineynıx Normirovannıx Prostranstvax*, İzdat Nauka Azerbaydjanskoy SSR, Bakü.

Kantoroviç, L.V., ve Akilov, G.P., 1977, *Funksionalnıy Analiz,* İzdat, 'Nauka', Moscow.

Karadeniz, A. A., 1992, *Yüksek Matematik, Cilt 2,* Çağlayan Kitabevi, İstanbul.

Kızmaz, H., 1993, *Fonksiyonel Analize Giriş*, K. T. Ü. Basımevi, Trabzon.

Lavrent'ev, M.A., ve Shabat, V. I., 1965, *Metody Teorii Funktsii Kompleksnogo Peremennego (Methods in The Theory of Functions of A Complex Vaiable),* İzdat, 'Nauka', Moscow.

Lyusternik, L.A., ve Sobolev,V.I.,1974, *Elements of Functional Analysis,* Hindustani Publ. Delhi, Wiley, New York.

Lyusternik, L.A., ve Sobolev,V.I., 1982, *Kratkiy Kurs Fonksionalnogo Analiza (A Breef Course of Functional Analysis),* Bısş. Skola, Moscow.

Mikusinski, J., 1978, *The Bochner Integral*, Birkhauser Basel, Stuttgart.

Natanson, I. P., 1961, *Theory of Functions of A Real Variable,* Unger, New York.

Naimark,M.A., 1969, *Lineynıye Differensialnıye Operatorı (Linear Diferantial Operators),* İzdat, 'Nauka', Moscow.

Royden, H.L., 1968, *Real Analysis,* Macmillan, New York.

Rudin, W., 1973, *Functional Analysis, New York.*

Rudin, W., 1987, *Real and Complex Analysis,* New York.

Şuhubi, E. Ş., 2001, *Fonksiyonel Analiz*, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.

Toktamış, Ö., 1995, *İleri Analiz*, Emel Matbaacılık, Ankara.

Trenogin, V. A., 1980, *Functional Analysis,* 'Nauka', Moscow.

Yosida, K., 1980, *Functional Analysis*, Springer- Verlag, New York.

Zaanen, A. C., 1959, *Linear Analysis, Measure and Integral, Banach and Hilbert Space, Linear İntegral Equations,* North Holland Pub. Co., Amsterdam.

Zaanen, A. C., 1967, *Integration*, North Holland Pub. Co., Amsterdam.